Definición 0.0.1. Sea A un anillo, se llama A-módulo a cualquier grupo abeliano $(M,+)$ sobre el que A actúa linealmente, es decir, un grupo M con junto con una operación externa $A \times M \to M$ que cumple que para todo $m,n \in M, a,b \in A$:

1. $a(m+n) = am + an$
2. $(a+b)m = am + bm$
3. $(ab)m = a(bm)$
4. $1_A m = m$.

Ejemplo 0.0.2. 1. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial es un $\mathbb{K}$-módulo..

2. Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ un endomorfismo, entonces V es un $\mathbb{K}[x]$-módulo via la aplicación

$$\begin{aligned} &\mathbb{K}[x] \times V \to V \\ &(p(x), v) \mapsto p(f) = a_n f^{(n)} + \cdots + a_1 f + a_0 \end{aligned}$$

siendo $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $f^(k) = f \circ \overset{k)}{\cdots} \circ f$.

3. Toda A-álgebra B de un anillo A es un A-módulo. B es un anillo luego $(B,+)$ es un grupo abeliano. Por ser A-álgebra, existe un homomorfismo $\varphi : A \to B$, y entonces podemos definir la operación externa de la definición 0.0.1 como $A \times B \to B$ que hace corresponder $(a,b) \mapsto \varphi(a)b$.

Observación 0.0.3. Atendiendo al último ejemplo resulta que dados dos anillos A, B, dar a B estructura de A-álgebra es equivalente a darle estructura de A-módulo junto con la propiedad adicional de que

$$\forall b, b' \in B,\ \forall a \in A \quad a \cdot_{\text{ext}} (bb') = (a \cdot_{\text{ext}} b)b'$$

Definición 0.0.4. . Dado un anillo A y un A-módulo M, diremos que $S \subset M$ es un *submódulo de* M si es un subgrupo de M cerrado para la multiplicación por elementos de A.

Observación 0.0.5. Si A es un anillo, $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal, y M un A-módulo entonces el conjunto

$$\mathfrak{a}M := \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i m_i \mid r \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathfrak{a},\ m_i \in \mathbb{N} \right\}$$

es un submódulo de M.

Definición 0.0.6. . Sean $(A,+,\cdot)$ anillo, M y N A-módulos. Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ se dice que es un homomorfismo de A-módulos o, simplemente, que es una aplicación A-lineal si verifica

i) $\forall\ m_1, m_2 \in M \quad f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2)$ y

ii) $\forall\ \lambda \in A,\ \forall\ m \in M \quad f(\lambda m) = \lambda f(m)$.

Observación 0.0.7. 1. En un A-módulo M se tiene que

$$\begin{array}{ll} \forall\ m \in M & 0_A m = 0_M \\ \forall\ \lambda \in A & \lambda 0_M = 0_M. \end{array}$$

Para ver lo primero basta observar que para todo $m \in M$ se tiene que $0_A m + m = (0_A + 1_A)m = 1_A m = m$, es decir, $0_A m = 0_M$. De aquí se desprende también que

$$(-1_A)(1_M) = -1_M = (1_A)(-1_M)$$

puesto que $0_M = 0_A 1_M = (1_A - 1_A)1_M = 1_A 1_M + (-1_A)(1_M) = 1_M + (-1_A)(1_M)$. También se desprende que, para $\lambda \in A$ y $m \in M$ fijados (arbitrarios), $\lambda 0_M = \lambda(0_A m) = (\lambda 0_A)m = 0_A m = 0_M$; esto es, la segunda propiedad.

2. Dado un homomorfismo de A-módulos, $f : M \longrightarrow N$, se tiene que $\mathrm{Ker}(f) := \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$ es un submódulo de M y que $\mathrm{im}(f) := \{y \in N \mid \exists\ x \in M$ tal que $f(x) = y\}$ es un submódulo de N.

0.1 Construcciones con A-módulos

0.1.1 Módulos cociente

Dados $(A,+,\cdot)$ un anillo, M un A-módulo y $N \subset M$ un submódulo. Denotemos para cada $m \in M$ como $[m]_N$ a la clase de m en M/N. Tras esta consideración, se tiene que M/N junto a la aplicación

$$\begin{array}{rcl} M/N \times M/N & \longrightarrow & M/N \\ ([m_1]_N, [m_2]_N) & \longmapsto & [m_1+m_2]_N. \end{array}$$

tiene estructura de grupo abeliano. Esto es así puesto que $(M,+)$ es un grupo abeliano y, por lo tanto, todo subgrupo suyo también lo es; es decir, todo subgrupo suyo será normal y el cociente será de nuevo abeliano.

Definición 0.1.1. . Sean $(A, +, \cdot)$ un anillo, M un A-módulo y $N \subseteq M$ un submódulo. Definiendo la aplicación

$$\begin{array}{rcl} A \times M/N & \longrightarrow & M/N \\ (\lambda, [m]) & \longmapsto & \lambda[m]_N := [\lambda m]_N \end{array}$$

dotamos a M/N de estructura de A-módulo y lo denominamos *módulo cociente.*

Observación 0.1.2. La aplicación natural

$$\begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & M/N \\ m & \longmapsto & [m]_N \end{array}$$

es un homomorfismo de A-módulos.

0.1.2 Anuladores

Definición 0.1.3. Dados A un anillo y M un A-módulo, definimos el anulador de A en M como

$$Anul_A M = \{\lambda \in A \mid \lambda \cdot m = 0, \forall m \in M\}$$

Observación 0.1.4. *i)*

1. $Anul_A M$ es un ideal de A.

   (a) Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in Anul_A M$, para cada $m \in M$, $\lambda_1 \cdot m = \lambda_2 \cdot m = 0$. Restando, se obtiene $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot m = 0 \rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \in Anul_A M$

   (b) Dado $\lambda \in Anul_A M$, para cada $\alpha \in A$ y para cada $m \in M$ se tiene $(\alpha \cdot \lambda) \cdot m = \alpha \cdot (\lambda \cdot m) = \alpha \cdot 0 = 0$, luego $\alpha \cdot \lambda \in Anul_A M$

   Por tanto, $A/Anul_A M$ tiene estructura de anillo. Además, podemos ver a M como un $A/Anul_A M$-módulo mediante la aplicación

$$\begin{array}{rcl} {}^{A}\!\big/_{Anul_A M} \times M & \longrightarrow & M \\ (\lambda + Anul_A M) \cdot m & \longmapsto & \lambda \cdot m \end{array}$$

2. Dado un ideal $\mathfrak{a} \subset Anul_A M$, M es un $A/\mathfrak{a}$-módulo. Los submódulos de M como $A/\mathfrak{a}$-módulo son los submódulos de M como A-módulo.

0.1.3 Aplicaciones A-lineales

Definición 0.1.5. . Dados M y N dos A-módulos, definimos *el conjunto de aplicaciones A-lineales entre M y N*

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) := \{f : M \longrightarrow N |\, f \text{ es aplicación } A\text{-lineal}\}$$

Proposición 0.1.6. *Dados M y N dos A-módulos,* $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ *tiene estructura de A-módulo.*

Prueba. En primer lugar, definamos para cada $\lambda \in A$ y cada $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \lambda f: & M & \longrightarrow & N \\ & m & \longmapsto & \lambda(f(m)) \end{array}$$

y veamos de nuevo que $\lambda f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, de forma que

$$\begin{array}{rcl} A \times \mathrm{Hom}_A(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,N) \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda f \end{array}$$

esté bien definida. Sean $m, m_1, m_2 \in M$ y $\mu \in A$:

$$\begin{aligned} (\lambda f)(m_1+m_2) &= \lambda(f(m_1+m_2)) = \\ &= \lambda(f(m_1)+f(m_2)) = \\ &= \lambda(f(m_1)) + \lambda(f(m_2)) = (\lambda f)(m_1) + (\lambda f)(m_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda f)(\mu m) &= \lambda(f(\mu m)) = \lambda(\mu(f(m))) = (\lambda\mu)(f(m)) = \\ &= (\mu\lambda)(f(m)) = \mu(\lambda(f(m))) = (\mu(\lambda f))(m). \end{aligned}$$

Ahora, dadas $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} f+g: & M & \longrightarrow & N \\ & m & \longmapsto & f(m)+g(m) \end{array}$$

Veamos que $f+g \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$. Dados $m, m_1, m_2 \in M$ y $\lambda \in A$ arbitrarios, tenemos efectivamente

$$\begin{aligned} (f+g)(m_1+m_2) &= f(m_1+m_2) + g(m_1+m_2) = \\ &= f(m_1)+f(m_2)+g(m_1)+g(m_2) = (f+g)(m_1) + (f+g)(m_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f+g)(\lambda m) &= f(\lambda m) + g(\lambda m) = \lambda f(m) + \lambda g(m) = \\ &= \lambda(f(m)+g(m)) = \lambda((f+g)(m)) = (\lambda(f+g))(m). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{array}{rrcl} +: & \mathrm{Hom}_A(M,N)\times \mathrm{Hom}_A(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,N)\\ & (f,g) & \longmapsto & f+g, \end{array}$$

está bien definida y dota a $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ de estructura de grupo abeliano.

Comprobemos por último que el producto exterior cumple los cuatro axiomas de la definición de A-módulo. Sean $m \in M,\ f,g \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ y $\lambda,\mu \in A$ arbitrarios:

i) $(\lambda(f+g))(m) = \lambda((f+g)(m)) = \lambda(f(m)+g(m)) = \lambda(f(m)) + \lambda(g(m)) = (\lambda f)(m) + (\lambda g)(m) = (\lambda f + \lambda g)(m)$,

ii) $((\lambda+\mu)f)(m) = (\lambda+\mu)(f(m)) = \lambda(f(m))+\mu(f(m)) = (\lambda f)(m)+(\mu f)(m) = (\lambda f + \mu f)(m)$,

iii) $((\lambda\mu)f)(m) = (\lambda\mu)(f(m)) = \lambda(\mu(f(m)) = \lambda((\mu f)(m)) = (\lambda(\mu f))(m)$ y

iv) $(1_A f)(m) = 1_A(f(m)) = f(m)$.

$\square$

0.1.4 Pullbacks

Dados M_1, M_2 y N A-módulos y dada $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M_1,M_2)$, podemos definir

$$\begin{array}{rrcl} \varphi^*: & Hom_A(M_2,N) & \longrightarrow & Hom_A(M_1,N)\\ & g & \longmapsto & g\circ\varphi \end{array}$$

que resulta ser un homomorfismo de A-módulos y se denota $\varphi^* = Hom_A(\varphi\_\_)$.

Análogamente, dados M, N_1 y N_2 A-módulos y dada $\psi \in \mathrm{Hom}_A(N_1,N_2)$,

$$\begin{array}{rrcl} \psi^*: & Hom_A(M,N_1) & \longrightarrow & Hom_A(M,N_2)\\ & g & \longmapsto & \psi\circ g \end{array}$$

es un homomorfismo de A-módulos.

Nótese que si tenemos M_1, M_2 y M_3 A-módulos y $\varphi \in Hom_A(M_1,M_2)$ y $\psi \in Hom_A(M_2,M_3)$, entonces $(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$

0.1.5 Suma directa

Definición 0.1.7. . Sean $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo unitario y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de A-módulos. Definimos el conjunto

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{ (m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid m_i = 0_{M_i}, \forall\ i \in I \setminus F,\ F \subseteq I \text{ finito} \right\}$$

y lo llamamos *suma directa* de los A-módulos $\{M_i\}_{i\in I}$.

Proposición 0.1.8. *Sean A un anillo y una familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de A-módulos. Entonces $\bigoplus_{i\in I} M_i$ con la suma por coordenadas y el producto por escalares por coordenadas es un A-módulo.*

Observación 0.1.9.

1. Para cada $j \in I$, tenemos definida $p_j : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M_j$, la proyección a cada M_j. No es más que la restricción a $\bigoplus_{i\in I} M_i$ de la proyección Π_j definida sobre el producto cartesiano $\Pi_{i\in I} M_i$. p_j es un homomorfismo de A-módulos.

2. Para cada $j \in I$, la inclusión $q_j : M_j \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ es homomorfismo de anillos.

i)

ii)

iii) Para cada $x = (x_i) \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, existe un número finito de índices $i_1, ..., i_r$ tal que $x_{i_r} \neq 0$. Entonces, expresamos $x = \sum_{i\in i_{i_1},\dots i_{i_r}} q_i(x_i)$.

Notación. Dado A un anillo, I un conjunto no vacío, denotamos $A^{(I)} = \bigoplus_{i\in i} A_i$, donde para cada $i \in I$, $A_i = A$. $A^{(I)}$ es un submódulo de $A^I = \prod_{i\in I} A_i$, con $A_i = A$ para cada $i \in I$.

0.2 A-módulos libres

Definición 0.2.1. . Dado un homomorfismo de A-módulos, $f : M \to N$, se dice que es un isomorfismo de A-módulos si existe $g : N \to M$ homomorfismo de A-módulos tal que $g \circ f = Id_M$ y $f \circ g = Id_N$, es decir, una inversa de f.

Observación 0.2.2. $f : M \longrightarrow N$ es isomorfismo de A-módulos si, y sólo si, es inyectivo y sobreyectivo. Esto significa que es suficiente que f sea biyectivo como A-aplicación.

Lema 0.2.3. *Sean $M_i : i \in I$ un conjunto de A-módulos y sea N otro A-módulo. Un homomorfismo $\Phi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ viene unívocamente determinado por los homomorfismos $\Phi \circ q_i : M_i \to N$. Análogamente, los homomorfismos $\Phi : N \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ vienen unívocamente determinados por los homomorfismos $p_i \circ \Phi : N \to M_i$.*

Prueba. Sea $\Phi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ un homomorfismo de A-módulos. Para cada $i \in I$, $\Phi \circ q_i$ es una composición de homomorfismos, luego es un homomorfismo de anillos.

Recíprocamente, dados $\Phi_i : M_i \to N$ homomorfismo de A-módulos, para cada $i \in I$, definimos $\Phi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ de la siguiente forma:

Para cada $\omega \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, existen unos únicos $i_1, ..., i_r$, todos ellos distintos, tales que $\omega = q_{i_1}(\omega_{i_1}) + \cdots q_{i_r}(\omega_{i_r})$. Entonces, ponemos $\Phi(\omega) = \Phi_{i_1}(\omega_{i_1}) + ... + \Phi_{i_r}(\omega_{i_r})$. En el caso en el que ω sea 0, ponemos $\Phi(\omega) = 0$. Φ es un homomorfismo de anillos que cumple $\Phi \circ q_i = \Phi_i$, para cada $i \in I$. □

Notación. Denotamos al Φ de la demostración anterior como $\bigoplus_{i\in I} \Phi_i$

Definición 0.2.4. Se dice que M es un *A-módulo libre* si $M \cong A^{(I)}$ para cierto conjunto I.

Proposición 0.2.5. *M es un A-módulo libre si y solo si existe $B := \{m_i\}_{i\in I} \subseteq M$ tal que para cada $x \in M$ existe $F \subseteq I$ cumpliendo que x se puede expresar de forma única como*

$$x = \sum_{\substack{j\in F \\ \lambda_j \in A}} \lambda_j m_j$$

. Si dos subconjuntos B y B' cumplen lo anterior, entonces tienen el mismo cardinal.

Prueba. ($2 \Rightarrow 1$) Supongamos que existe $\phi : A^{(I)} \to M$ un isomorfismo de A-módulos, para cierto conjunto de índices I. Sea, para cada $i \in I$, $m_i := \phi(e_i)$, donde $e_i = (\delta_{ij})_j \in A^{(I)}$. El conjunto $\{\, m_i, i \in I \,\}$ es el que buscamos.

Para cada $m \in M$, por ser ϕ sobreyectiva, existe un $\underline{x} \in A^{(I)}$ tal que $\phi(\underline{x}) = m$. A su vez, existen $i_1, ..., i_r \in I$ tales que $\underline{x} = q_{i_1}(x_{i_1}) + ... + q_{i_r}(x_{i_r}) = x_{i_1} q_{i_1}(1_A) + ... + x_{i_r} q_{i_r}(1_A)$. Por tanto, $\phi(\underline{x}) = x_{i_1}\phi(e_{i_1}) + ... + x_{i_r}\phi(e_{i_r}) = x_{i_1} m_{i_1} + ... + x_{i_1} m_{i_r} = m$. Hemos escrito m como una combinación lineal de elementos $m_i : i \in I$

La unicidad es clara porque estamos usando un isomorfismo, pero podemos detallarlo. Si un elemento tiene dos representaciones en los m_i, al restarlas obtengo una combinación lineal nula de un conjunto de los m_i, basta entonces comprobar que, si una combinación lineal de cualquier subconjunto de los m_i es nula, sus coeficientes son nulos también:

$$0_M = \lambda_{i_1} m_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_r} m_{i_r} = \Phi(\lambda_{i_1} e_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_r} e_{i_r}) \\ \Longleftrightarrow \lambda_{i_1} e_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_r} e_{i_r} = 0_{A^{(I)}} \Longleftrightarrow \lambda_{i_j} = 0_A \quad (1)$$

$\forall\ j \in \{1, \ldots, r\}$, lo que concluye la prueba.

$(1 \Rightarrow 2)$ En primer lugar, para cada $i \in I$ definimos las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & A & \longrightarrow & M \\ & 1_A & \longmapsto & m_i. \end{array}$$

Para cada $i \in I$ y cada $\lambda \in A$ se verifica $\varphi_i(\lambda) = \lambda m_i$. De esta forma, φ_i es un homomorfismo de A-módulos entre A y M para cada $i \in I$ y, por el lema previo, $\varphi := \bigoplus_{i \in I} \varphi_i : A^{(I)} \longrightarrow M$ es a su vez un homomorfismo de A-módulos.

Todo $x \in M$ admite una representación única como combinación lineal finita de elementos de B. Sean las aplicaciones $\psi_i : M \to A$ dadas por $x = \sum_{j \in F} \lambda_j m_j \mapsto \lambda_i$, donde $F \subset I$ finito. Para cada $i \in I$, ψ_i es un homomorfismo de A-módulos y, de forma análoga, la aplicación $\psi : M \longrightarrow A^I$ que verifica $p_i \circ \psi = \psi_i$, es un homomorfismo de A-módulos y es único. Más aún, para cada $x \in M$ existe $F \subseteq I$ finito de forma que, $\psi_i(x) = 0_A$ si $i \in I \setminus F$; es decir, $\psi(M) \subseteq A^{(I)}$.

Por último, es claro por definición de los homomorfismos que $\varphi \circ \psi = Id_M$ y $\psi \circ \varphi = Id_{A^{(I)}}$.

Veamos que todas las bases tienen un mismo cardinal. Si $M \cong A^{(I)}$, sean $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de A y $\{\, m_i, i \in I\,\}$ una base de M. $\mathfrak{m}M$ es un submódulo de M y, como $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Ann}_A \left(M/\mathfrak{m}M \right)$, $M/\mathfrak{m}M$ tiene estructura de $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial.

Tomemos $M = A^{(I)}$ y veamos que $A^{(I)}/\mathfrak{m}A^{(I)} \cong \left(A/\mathfrak{m} \right)^{(I)}$, que es un $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial de dimensión $\#(I)$.

En primer lugar, definamos para cada $i \in I$ las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{rccl} \tau_i : & A & \longrightarrow & \left(A/\mathfrak{m} \right)^{(I)} \\ & 1_A & \longmapsto & \tau_i(1_A) = (a_j + \mathfrak{m})_{j \in I} := \left\{ \begin{array}{ll} a_j + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} & \text{si } i \neq j \\ a_j + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m} & \text{si } i = j \end{array} \right. . \end{array}$$

Se comprueba que, para cada $i \in I$, τ_i es homomorfismo de A-módulos y, por lo tanto, $\bigoplus_{i \in I} \tau_i : A^{(I)} \longrightarrow \left(A/\mathfrak{m} \right)^{(I)}$ es también un homomorfismo de A-módulos.

Además, $\bigoplus_{i\in I}\tau_i$ es sobreyectivo y Ker $\bigoplus_{i\in I}\tau_i = \mathfrak{m}A^{(I)}$. Así, por el primer teorema de isomorfía, $\bigoplus_{i\in I}\tau_i$ induce un isomorfismo de $A/\mathfrak{m}$-módulos, $\widehat{\bigoplus_{i\in I}\tau_i} : A^{(I)}/\mathfrak{m}A^{(I)} \longrightarrow \left(A/\mathfrak{m}\right)^{(I)}$

Ahora, dados dos conjuntos de índices no vacíos I y J, supongamos que existe un isomorfismo de A-módulos $\Phi : A^{(I)} \longrightarrow A^{(J)}$. Por ser así, en concreto se tiene que $\Phi(\mathfrak{m}A^{(I)}) = \mathfrak{m}A^{(J)}$ y Φ induce otro isomorfismo de $A/\mathfrak{m}$-módulos, $\widehat{\Phi} : A^{(I)}/\mathfrak{m}A^{(I)} \longrightarrow A^{(J)}/\mathfrak{m}A^{(J)}$. De esta forma, resulta que $(A/\mathfrak{m})^(I) \cong (A/\mathfrak{m})^(J)$ y $\#(I) = \#(J)$. $\square$

Definición 0.2.6. A cualquier conjunto B que cumpla la proposición anterior se le llama base del A-módulo libre M, y a su cardinal se le llama *rango de M*.

Corolario 0.2.7. *Sea M es un A-módulo libre, es decir, existe un conjunto I tal que $M \cong A^{(I)}$, y sea N otro A-módulo. Dados $n_i : i \in I \subset N$, existe un único homomorfismo de A-módulos $f : M \to N$ tal que $f(m_i) = n_i$ para cada $i \in I$, donde $m_i : i \in I$ es una base de M.*

0.3 Sucesiones exactas

Definición 0.3.1. Una sucesión de homomorfismos de A-módulos

$$... \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\Phi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\Phi_i} M_{i+1} \longrightarrow ...$$

se dice exacta si $\mathrm{Ker}(\Phi_{i+1}) = \mathrm{im}(\Phi_i)$, donde para cada i, M_i es un A-módulo y $\Phi_i : M_i \to M_{i+1}$ es un homomorfismo de A-módulos.

Definición 0.3.2. Decimos que una sucesión de homomorfismos de A-módulos es corta si es de la forma

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

Observación 0.3.3. Una sucesión corta es exacta si y sólo si $f : M_1 \to M_2$ es inyectiva, $g : M_2 \to M_3$ es suprayectiva y $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$

Ejemplo 0.3.4. 1. Dados $N \subset M$ A-módulos,

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

es una sucesión corta exacta.

2. Dados M y N A-módulos,

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{q_M} M \oplus N \xrightarrow{p_N} N \longrightarrow 0$$

es una también una sucesión corta exacta.

Observación 0.3.5. Toda sucesión de homomorfismos de A-módulos se puede descomponer en varias sucesiones cortas.

Definición 0.3.6. Dado M un A-módulo, un subconjunto $S \subset M$ es un sistema de generadores de M si para cada $x \in M$ existen $\{s_1, ..., s_n\} \subset S$ tales que

$$x = \lambda_1 s_1 + ... + \lambda_n s_n$$

con $\lambda_i \in A$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Es decir, el menor submódulo de M que contiene a S es el propio M.

Definición 0.3.7. Dado un conjunto de A-módulos ζ, una aplicación $\lambda : \zeta \to \mathbb{N}$ se dice aditiva si para cada M, M' y $M'' \in \zeta$ y para cada sucesión corta y exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

se verifica $\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$.

Ejemplo 0.3.8. Dado K cuerpo, los K-módulos son los K-espacios vectoriales. Tomando ζ como los K-espacios vectoriales de dimensión finita,

$$\begin{array}{ccc} \zeta & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ M & \longmapsto & dim(M) \end{array}$$

es una aplicación aditiva.

Proposición 0.3.9. *Sea*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión corta y exacta de A-módulos. Son equivalentes:

i) Existe $\pi : M \longrightarrow M'$ homomorfismo de A-módulos tal que $\pi \circ f = 1_{M'}$

ii) Existe $\sigma : M'' \longrightarrow M$ homomorfismo de A-módulos tal que $g \circ \sigma = 1_{M''}$

iii) $M \cong M' \oplus M''$ vía f y g, es decir, existe $\Phi : M \longrightarrow M' \oplus M''$ isomorfismo de A-módulos tal que los diagramas son conmutativos.

En tal caso, se dice que la sucesión corta es escindida.

Prueba. (1 $\Rightarrow$ 2) Dado $m'' \in M''$, por ser g sobreyectiva existe $m \in M$ tal que $g(m) = m''$. Considero
$$m^* := m - f \circ \tau(m) \in M$$
y afirmo que m^* no depende de la elección hecha de $m \in M$ de forma que $g(m) = m''$. Supongamos que existe otro $m_1 \in M$ tal que $g(m_1) = m''$. Por ser así,

$$g(m - m_1) = g(m) - g(m_1) = 0_{M''}.$$

Como $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{im}(f)$, existe $m' \in M'$ tal que $f(m') = m - m_1$. Dado que por hipótesis $\tau \circ f = \mathrm{id}_{M'}$, tenemos

$$m - m_1 = f(m') = f \circ \tau(m - m_1) = f \circ \tau(m) - f \circ \tau(m_1)$$

y
$$m - f \circ \tau(m) = m_1 - f \circ \tau(m_1).$$

Vemos así que m^* no depende del $m \in M$ escogido con tal de que se tenga $g(m) = m''$.

Por esto que acabamos de ver, la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & M'' & \longrightarrow & M \\ & m'' & \longmapsto & m^* = m - f \circ \tau(m) \end{array},$$

donde m verifica $g(m) = m''$, está bien definida. Además, para cada $m'' \in M''$,

$$g \circ \sigma(m'') = g(\sigma(m'')) = g(m - f \circ \tau(m)) = g(m) = m'',$$

es decir, $g \circ \sigma = \mathrm{id}_{M''}$.

Falta por comprobar que σ es homomorfismo de A-módulos. Sean $\lambda, \mu \in A$ y $m''_1, m''_2 \in M''$ arbitrarios. Usamos que f, g y τ son homomorfismos de A-módulos. en primer lugar, es claro que, si $m_1, m_2 \in M$ verifican $g(m_i) = m''_i$, entonces $g(\lambda m_1) = \lambda m''_1$, $g(\mu m_2) = \mu m''_2$ y $g(\lambda m_1 + \mu m_2) = \lambda m''_1 + \mu m''_2$. Teniendo esto en cuenta,

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda m''_1 + \mu m''_2) &= (\lambda m_1 + \mu m_2) - f \circ \tau(\lambda m_1 + \mu m_2) = \\ &= \lambda m_1 - f \circ \tau(\lambda m_1) + \mu m_2 - f \circ \tau(\mu m_2) = \sigma(\lambda m''_1) + \sigma(\mu m''_2) \end{aligned}$$

como queríamos.

(2 $\Rightarrow$ 1) Partiendo ahora de la existencia de $\sigma : M'' \longrightarrow M$ verificando $g \circ \sigma = \mathrm{id}_{M''}$, buscamos definir $\tau : M \longrightarrow M'$ cumpliendo $\tau \circ f = \mathrm{id}'_M$. Dado $m \in M$,

$m - \sigma(g(m)) \in \mathrm{Ker}(g) = im(f)$ y, como antes, existe $m' \in M'$ tal que $f(m') = m - \sigma(g(m))$ único por la inyectividad de f. Así, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \tau : & M & \longrightarrow & M' \\ & m & \longmapsto & m' \end{array},$$

donde m' es el único elemento en M' tal que $f(m') = m - \sigma(g(m))$, está bien definida. Además, es claro que para cada $m' \in M'$ se cumple $\tau \circ f(m') = m'$. La comprobación de que τ es homomorfismo de A-módulos es análoga al caso anterior.

($2 \Rightarrow 3$) En primer lugar, como se verifica 2) también tenemos 1); es decir, contamos con las aplicaciones τ y σ verificando las condiciones del enunciado.

Definimos así $\Phi : M' \oplus M'' :\longrightarrow M$ como el único homomorfismo de A-módulos que hace $\Phi \circ q_{M'} = f$ y $\Phi \circ q_{M''}$. Φ está bien definido por la propia contrucción de la suma directa $M' \oplus M''$. Veamos que es sobreyectivo. Sea $m \in M$ y tomemos $m' := \tau(m - \sigma(g(m))$ y $m'' := g(m)$. De nuevo, $m - \sigma(g(m)) \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{im}(f)$ y existe $m^* \in M'$ tal que $f(m^*) = m - \sigma(g(m))$. Por esto,

$$\begin{aligned} \Phi(m', m'') =& \Phi((m', 0) + (0, m'')) = \Phi \circ q_{M'}(m') + \Phi \circ q_{M''}(m'') = \\ =& f(\tau(m - \sigma(g(m)))) + \sigma(g(m)) = f \circ \tau \circ f(m^*) + \sigma \circ g(m) = \\ =& f(m^*) + \sigma \circ g(m) = m - \sigma(g(m)) + \sigma(g(m)) = m. \end{aligned}$$

Veamos ahora que Φ es inyectiva. Supongamos que $\Phi(m', m'') = 0_M$, es decir, $f(m') + \sigma(m'') = 0_M$. Aplicando g tenemos que $m'' = g \circ \sigma(m'') = 0_{M''}$. Por su parte, como f es inyectiva, $f(m') = 0_{M'}$ implica $m' = 0_{M'}$.

Por último, si $m \in M$, $\Phi^{-1}(m) = (m', m'')$, con $m'' = g(m)$. Así, ${p_{M''}}^{-1} = g$.

($3 \Rightarrow 2$) Basta tomar $\sigma := \Phi \circ q_{M''}$. $\square$

Denotemos por CRing a la categoría de anillos conmutativos unitarios. Dado $A \in \mathrm{Obj}(\mathrm{CRing})$, denotaremos a su vez por Mod_A a la categoría de A-módulos.

Proposición 0.3.10. *1) Sea*

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \tag{2}$$

una sucesión de A-módulos y homomorfismos. Entonces (2) es exacta si, y sólo si, para todo $N \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}_A)$ la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N') \overset{\mathrm{Hom}_A(M,f)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(M, N) \overset{\mathrm{Hom}_A(M,g)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(M, N'') \tag{3}$$

es también una sucesión exacta.

2) Sea

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{4}$$

una sucesión de A-módulos y homomorfismos. Entonces (4) es exacta si, y sólo si, para todo $M \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}_A)$ la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'', N) \overset{\mathrm{Hom}_A(g,N)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(M, N) \overset{\mathrm{Hom}_A(f,N)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(M', N) \tag{5}$$

es también una sucesión exacta.

Prueba. Veamos ($\Rightarrow$) en 1). Denotemos $f_* := \mathrm{Hom}_A(M, f)$ y $g_* := \mathrm{Hom}_A(M, g)$. En primer lugar, por definición de f_* y dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N')$, si $f \circ \varphi \equiv 0_N$, entonces para toda $x \in M$ se tiene $\varphi(x) = 0$ por la inyectividad de f (si existiera $x \in M$ tal que $\varphi(x) \neq 0_{N'}$, entonces $f(\varphi(x)) \neq 0_N$). Así, vemos que f_* es inyectiva.

Comprobemos ahora que $\mathrm{im}(f_*) = \mathrm{Ker}(g_*)$. En primer lugar, dado que $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ y $g \circ f = 0_{N''}$ resulta

$$g_* \circ f_* = 0_{\mathrm{Hom}_A(M,N'')},$$

es decir, $\mathrm{im}(f_*) \subset \mathrm{Ker}(g_*)$. Ahora, dado $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ tal que $g \circ \psi \equiv 0$, se tiene que $\mathrm{im}(\psi) \subset \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{im}(f)$. Como f es un isomorfismo sobre su imagen, el homomorfismo de A-módulos

$$\varphi := f^{-1} \circ \psi : \quad M \quad \longrightarrow \quad N'$$

está bien definido. Así, componiendo f por la izquierda tenemos la igualdad $\psi = f \circ \varphi$; de forma equivalente, $\psi \in \mathrm{im}(f_*)$ como queríamos probar.

Probemos ahora ($\Rightarrow$) en 2). Sea $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M'', N)$ tal que $\psi \circ \psi \equiv 0$. Como g es suprayectiva, la suposición anterior implica que $M'' = \mathrm{im}(g) \subset \mathrm{Ker}\,\psi$; es decir, $\psi \equiv 0_{\mathrm{Hom}_A(M'',N)}$ y g^* es inyectiva.

Veamos ahora que $\mathrm{im}(g^*) = \mathrm{Ker}(f^*)$. En primer lugar, si $\psi \in \mathrm{im}(g^*)$, existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M'', N)$ tal que $\psi = \varphi \circ g$. Por ser esto así, se tiene

$$f^*(\psi) = \psi \circ f = (\varphi \circ g) \circ f = \varphi \circ (g \circ f) = \varphi \circ 0_{\mathrm{Hom}_A(M',M'')} = 0_{\mathrm{Hom}_A(M',N)},$$

es decir, $\mathrm{im}(g^*) \subset \mathrm{Ker}(f^*)$.

Ahora, sea $\psi \in \mathrm{Ker}(f^*)$, i.e, $\psi \circ f \equiv 0_{\mathrm{Hom}_A(M',N)}$. Por un lado, $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$. Por otro, como g es sobreyectiva, para todo $x \in M''$ existe $m_x \in M$ tal que $g(m_x) = x$. Podemos definir así la siguiente aplicación

$$\begin{array}{cccc} \varphi & M'' & \longrightarrow & N \\ & x & \longmapsto & \psi(m_x) \end{array}.$$

Veamos que está bien definida. Supongamos que existen $m_x, m_x{}' \in M$ distintos de forma que $g(m_x) = g(m_x{}') = x$. Por darse $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$ y ser g homomorfismo de A-módulos, $m_x - m_x{}' \in \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$, es decir, $\psi(m_x) = \psi(m_x{}')$. Tras comprobar que φ es un homomorfismo de A-módulos, tenemos que para cada $x \in M$ se verifica

$$\varphi(g(x)) = \psi(x);$$

es decir, $\psi = \varphi \circ g$.

Ahora vamos a probar las implicaciones ($\Leftarrow$) tanto en 1) como en 2). Comenzamos con la de 2). Para ver que g es suprayectiva, tomamos en primer lugar $N := {}^{M''}\!\diagup_{\mathrm{im}(g)}$ en (5). Si consideramos la aplicación cociente $c : M'' \longrightarrow N$, se tiene que $g^*(c) = c \circ g = 0_{\mathrm{Hom}_A(M,N)}$; es decir, como g^* es inyectiva, $c \equiv 0_{\mathrm{Hom}_A(M'',N)}$ y $M'' = \mathrm{im}(g)$.

Tomemos ahora $N := {}^{M}\!\diagup_{\mathrm{im}(f)}$. De nuevo, si consideramos la aplicación cociente $c : M \longrightarrow N$, se tiene que $f^*(c) = c \circ f = 0_{\mathrm{Hom}_A(M',N)}$ y $c \in \mathrm{Ker}(f^*)$. Por esto último, existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M'', N)$ tal que $c = \varphi \circ g$. Si $x \in M$ es tal que $g(x) = 0$, entonces $c(x) = 0_N$ y $x \in \mathrm{im}(f)$. Así, $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{im}(f)$. Para ver que $\mathrm{Ker}(g) \supset \mathrm{im}(f)$ basta tomar $N := M''$ y observar que

$$g^*(1_{M''}) = g \in \mathrm{Ker}(f^*);$$

es decir, $g \circ f = 0_{\mathrm{Hom}_A(M',M'')}$ y se tiene lo que buscábamos.

Comprobemos por último la suficiencia en 1). Para ver que f es inyectiva, tomemos $M := \mathrm{Ker}(f)$ y la inclusión $i : M \longrightarrow N'$, que es inyectiva. Por esta elección, tenemos que

$$f_*(i) = f \circ i = 0_{\mathrm{Hom}_A(M,N')}$$

y , como por hipótesis f_* es inyectiva, $i \equiv 0_{\mathrm{Hom}_A(M,N')}$. Ahora, como i es inyectiva, se tiene que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{N'}\}$, es decir, f es inyectiva.

Para ver $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{im}(f)$, veamos las dos inclusiones. En primer lugar, tomando $M := N'$ y $1_{N'} \in \mathrm{Hom}_A(M, N')$, se tiene que

$$f_*(1_{N'}) = f \in \mathrm{im}(f_*) = \mathrm{Ker}(g_*),$$

es decir, $g \circ f = 0_{\mathrm{Hom}_A(N',N'')}$ y $\mathrm{Ker}(g) \supset \mathrm{im}(f)$. Para el otro contenido, definamos de forma análoga al caso anterior $M := \mathrm{Ker}(g)$ y consideremos la inclusión $i \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Por esta elección tenemos que

$$g_*(i) = g \circ i = 0_{\mathrm{Hom}_A(M,N'')},$$

es decir, $i \in \operatorname{Ker}(g_*) = \operatorname{im}(f_*)$ y por lo tanto existe $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(M, N')$ de forma que $i = f \circ \varphi$. Es por esto que, dado $x \in M$ se verifica

$$x = i(x) = f(\varphi(x)) \in \operatorname{im}(f).$$

Así, $\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{im}(f)$. $\square$

0.4 Módulos proyectivos y módulos inyectivos

Supongamos $M \in \operatorname{Obj}(\operatorname{Mod}_A)$ tal que, siempre que se tenga una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0,$$

se tuviera que la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, N') \stackrel{\operatorname{Hom}_A(M,f)}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_A(M, N) \stackrel{\operatorname{Hom}_A(M,g)}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_A(M, N'') \longrightarrow 0$$

también es exacta. Por 0.3.10, esto es equivalente a que para cualesquiera $N, N'' \in \operatorname{Obj}(\operatorname{Mod}_A)$ y todo $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(M, N')$ existiría $h \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$ tal que $g \circ h = \varphi$. Esta observación motiva la siguiente definición.

Definición 0.4.1. Sea $M \in \operatorname{Obj}(\operatorname{Mod}_A)$ tal que para toda $g \in \operatorname{Hom}_A(N, N')$ suprayectiva y toda $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(M, N')$ existe $h \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$ verificando $g \circ \varphi = h$. En estas condiciones, decimos que M es un A-*módulo proyectivo*.

Observación 0.4.2. Todo módulo libre es un módulo proyectivo. Sea $A^{(I)}$ un A-módulo libre con sistema de generadores $\{a_i\}_{i\in I}$. Sean también $g \in \operatorname{Hom}_A(N, N')$ suprayectiva y $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(A^{(I)}, N')$ arbitrarias. Por ser g sobreyectiva, para cada $i \in I$ existe $n_i \in N$ tal que $g(n_i) = \varphi(a_i)$. Es por esto que podemos definir

$$\begin{array}{rccc} h: & A^{(I)} & \longrightarrow & N \\ & a_i & \longmapsto & n_i \end{array}.$$

Por lo ya comentado, h está bien definido. Además, como $\{a_i\}_{i\in I}$ es un sistema de generadores, para cada $x \in A^{(I)}$ existe $F_x \subset I$ finito tal que $x = \sum_{i\in F_x} \lambda_i a_i$, donde $\lambda_i \in A$ para cada $i \in F_x$. Es por esto que tomando $x \in A^{(I)}$ arbitrario se verifica

$$g(h(x)) = g\left(\sum_{i\in F_x} \lambda_i h(a_i)\right) = \sum_{i\in F_x} \lambda_i g(n_i) = \sum_{i\in F_x} \lambda_i \varphi(a_i) = \varphi\left(\sum_{i\in F_x} \lambda_i a_i\right) = \varphi(x).$$

Tenemos así que $g \circ h = \varphi$.

Proposición 0.4.3. *M es un A-módulo proyectivo si, y sólo si, M es suma directa de un A-módulo libre.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Sabemos que existe $I \subset M$ tal que

$$\begin{array}{rccc} \pi: & A^{(I)} & \longrightarrow & M \\ & e_i & \longmapsto & m_i \end{array}$$

es un homomorfismo bien definido y suprayectivo (basta tomar al propio M como sistema de generadores). Surge así de manera natural la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Ker}\pi \overset{i}{\hookrightarrow} A^{(I)} \overset{\pi}{\to} M \to 0.$$

Por hipótesis, M es A-módulo proyectivo, es decir, tomando $\pi \in \operatorname{Hom}_A(A^{(I)}, M)$ suprayectivo y $1_M \in \operatorname{Hom}_A(M, M)$, existe $h \in \operatorname{Hom}_A(M, A^{(I)})$ tal que $\pi \circ h = 1_M$; es decir, por 0.3.9 la sucesión anterior es escindida y $A^{(I)} \cong \operatorname{Ker}\pi \oplus M$. $\square$

Ahora, supongamos que $N \in \operatorname{Obj}(\operatorname{Mod}_A)$ es tal que, si la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \overset{f}{\longrightarrow} M$$

es exacta, entonces la sucesión

$$\operatorname{Hom}_A(M, N) \overset{\operatorname{Hom}_A(f,N)}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_A(M', N) \longrightarrow 0$$

también lo es; es decir, para cualquier $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(M', N)$, existe $\Phi \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$ de forma que $\varphi = \Phi \circ f$. Por ser f inyectiva, podemos interpretar M' como un submódulo de M (entender f como una inclusión) y, por esto, nuestro problema se trata de un problema de extensión.

Esta extensión no va a ser posible en general como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 0.4.4. Sea $n \in \mathbb{Z}$ y consideremos $\langle n \rangle \subset \mathbb{Z}$ submódulo. Si definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \langle n \rangle & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & 1_{\mathbb{Z}} \\ \lambda n & \longmapsto & \lambda \end{array},$$

se comprueba que no puede extenderse a $\mathbb{Z}$.

Surge la siguiente definición.

Definición 0.4.5. Diremos que $N \in \operatorname{Obj}(\operatorname{Mod}_A)$ es un A-módulo inyectivo si, para cualesquiera $M, M' \in \operatorname{Obj}(\operatorname{Mod}_A)$, $f \in \operatorname{Hom}_A(M', M)$ inyectiva y $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(M', N)$, se tiene que existe $\Phi \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$ de forma que $\varphi = \Phi \circ f$.

0.5 Producto tensorial de módulos

La motivación de la construcción que vamos a desarrollar en esta sección es poder estudiar formas bilineales (multilineales) a través de formas lineales, cuyas propiedades conocemos mejor. Para ello, vamos a construir una estructura relacionada con el producto cartesiano de módulos llamada *producto tensorial*. Antes de proseguir, recordamos definiciones.

Definición 0.5.1. Sean M, N y P A-módulos. Una aplicación$\Phi : M \times N \longrightarrow P$ se dice A-bilineal si se verfican las siguientes condiciones.

1) Para cada $m_1, m_2 \in M$, $n \in N$, $\Phi(m_1 + m_2, n) = \Phi(m_1, n) + \Phi(m_2, n)$

2) Para cada $m \in M$, $n_1, n_2 \in N$, $\Phi(m, n_1 + n_2) = \Phi(m, n_1) + \Phi(m, n_2)$

3) Para cada $m \in M$, $n \in N$, $\lambda \in A$, $\Phi(\lambda m, n) = \Phi(m, \lambda n) = \lambda\Phi(m, n)$

Observación 0.5.2. Análogamente, podemos definir el concepto de aplicaciones multilineales de la siguiente forma. Dados $M_1, \dots, M_r$ A-módulos,

$$\Phi : M_1 \times \cdots \times M_r \longrightarrow P$$

se dice multilineal si para cada $i \in \{1, \dots, r\}$

- $\Phi(m_1, \dots, m_i + m_i', \dots, m_r) = \Phi(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r) + \Phi(m_1, \dots, m_i', \dots, m_r)$
- $\Phi(m_1, \dots, \lambda m_i, \dots, m_r) = \lambda\Phi(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r)$

Con $\lambda \in A$ y $m_j \in M_j$ para cada $j \in \{1, \dots, r\}$

Observación 0.5.3. Si M, M' son A-módulos, $g : M \to M'$ es suprayectiva, y $N \subset \operatorname{Ker} g$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
m \arrow[d, mapsto] & M \arrow[d] \arrow[dr, "g"] \arrow[dr, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright"] & & \\
m + \operatorname{Ker} g & M/\operatorname{Ker} g \arrow[r] & M' & g(m) \\
m + N \arrow[u, mapsto] & M/N \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[ur, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowright"] & &
\end{tikzcd}$$

Proposición 0.5.4. *Dados dos A-módulos M y N, existe un A-módulo $M \otimes_A N$ y una aplicación A-bilineal $\delta : M \times N \to M \otimes_A N$ tal que para cada A-módulo P y para cada $F : M \times N \to P$ A-bilineal, existe una única aplicación A-lineal $f : M \otimes_A N :\to P$ tal que $f \circ \delta = F$.*

Además, el par $(\delta, M \otimes_A N)$ es único, en el sentido que de existir otro par (δ', T) que verifique las condiciones del enunciado, se tiene que $T \cong M \otimes_A N$.

Prueba. Para ver la unicidad, supongamos que (δ, T) y (δ', T') cumplen las condiciones de la proposición. Poniendo a T' como P y a δ' como F, el resultado garantiza la existencia de $j : T \to T'$ tal que $\delta' = j \circ \delta$. Intercambiando los roles de T y T', se tiene $j' : T' \to T$ tal que $\delta = j' \circ \delta'$. Entonces, cada una de las composiciones $j \circ j'$ y $j' \circ j$ son la identidad, lo cual garantiza que j sea un isomorfismo.

Para la existencia, procedemos como sigue. Consideremos $A^{(M \times N)}$, la suma directa de A tantas veces como elementos tenga $M \times N$. Definimos el siguiente subconjunto de $A^{(M \times N)}$

$$\begin{aligned} S = \{ & e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)}, e_{(m,n+n')} - e_{(m,n)} - e_{(m,n')}, \\ & e_{(m,\lambda n)} - \lambda e_{(m,n)}, e_{(\lambda m,n)} - \lambda e_{(m,n)} \} \end{aligned} \tag{6}$$

con $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ y $\lambda \in A$.

Ahora tomamos Σ el submódulo generado por S. Se cumple $\Sigma \subset A^{(M \times N)}$, luego podemos definir el cociente $A^{(M \times N)}/\Sigma$, que es un A-módulo:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\delta} & M \otimes_A N := A^{(M \times N)} / \Sigma \\ (m,n) & \longmapsto & [e_{(m,n)}] \end{array}$$

La aplicación δ es bilineal por construcción. Además, $\{[e_{(m,n)}] : (m,n) \in M \times N\}$ es un sistema de generadores de $M \otimes_A N$.

Cada aplicación $f : M \times N \to P$ se extiende por linealidad a un homomorfismo de A-módulos $f : A^{(M \times N)} \to P$, tomando $f(e_{(m,n)}) = f(m,n)$, $f(e_{(m,n)} + e_{(m,n)}) = f(m,n) + f(m',n')$, y $f(\lambda e_{(m,n)}) = \lambda f(m,n)$. En particular, dada $F : M \times N \to P$ es bilineal, definimos el homomorfismo de A-módulos

$$\begin{array}{cccc} f_0 : & A^{M \times N} & \longrightarrow & P \\ & e_{(m,n)} & \longmapsto & F(m,n) \end{array}$$

Para poder pasar al cociente solo hemos de comprobar que $\Sigma \subset ker(f_0)$. Como Σ está generado por S, basta ver $S \subset ker(f_0)$. Pero esto es directo por ser F bilineal y la definición de S. Por ejemplo,

$$f_0(e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)}) = F(e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)}) = 0$$

. Así, la siguiente aplicación está bien definida y cumple las condiciones del teorema

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}_0 : & A^{M\times N}/_{\sum} & \longrightarrow & P \\ & [e_{(m,n)}] & \longmapsto & F(m,n) \end{array}$$

□

Definición 0.5.5. Al A-módulo $M \otimes N$ se le llama *producto tensorial* de M y N.

Observación 0.5.6. Observamos que la construcción es de lo más natural. Otra forma de escribir la construcción es pensar que hemos tomado todos los elementos del producto cartesiano de la forma $(m + m', n) - (m, n) - (m', n), (m, n + n') - (m, n) - (m, n'), (m, \lambda n) - \lambda(m, n), \lambda(m, n) - \lambda(m, n)$, es decir, hemos seleccionado unas relaciones que queremos que se cumplan (de bilinealidad). Al cocientar por el módulo que generan, estamos imponiendo que cada uno de esos elementos sea 0, que $[(m + m', n)] = [(m, n)] + [(m', n)]$, etc.

Observación 0.5.7. De ahora en adelante omitiremos el subíndice de $\otimes_A$, escribiendo $M \otimes N$ siempre que no de lugar a confusión. Entonces

1. A las clases $[e_{(m,n)}]$ se les denota $m \otimes n$.

   Todo elemento de $M \otimes N$ es suma $\sum_{i=1}^{r} m_j \otimes n_j$, para ciertos $m_j \in M$, $n_j \in N$ y $r \in \mathbb{N}$, ya que $[\lambda e_{(m,n)}] = [e_{(\lambda m,n)}] = [e_{(m,\lambda n)}]$ por la definición inicial de S.

2. Las aplicaciones bilineales de $M \times N$ en P, $\mathrm{Bil}_A(M \times N, P)$ están en correspondencia biyectiva con $\mathrm{Hom}_A(M \otimes N, P)$.

   En particular, si tomamos A como K cuerpo y M y N K-espacios vectoriales,

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_K N, K) = (M \otimes_K N)^* = \mathrm{Bil}_K(M \times N, K)$$

3. La construcción del producto tensorial de módulos se puede generalizar. Dados unos A-módulos $M_1, \dots, M_r$, existe un A-módulo $M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$ y $\delta : M_1 \times \cdots \times, M_r \longrightarrow M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$ multilineal tal que para cualquier aplicación A-multilineal $\Phi : M_1 \times \cdots \times, M_r \longrightarrow P$, existe una única $f : M_1 \otimes \cdots \otimes M_r \longrightarrow P$ A-lineal tal que $f \circ \delta = F$

Lema 0.5.8. *Sean Z y Z' dos A-módulos. Sea $\{z_i\}_{i\in I}$ un sistema de generadores de Z y sea $\{z'_j\}_{j\in J}$ un sistema de generadores de Z'. Entonces, $\{z_i \otimes z_j : (i, j) \in I \times J\}$ es un sistema de generadores de $Z \otimes Z'$.*

Proposición 0.5.9. *Sea A un anillo conmutativo unitario. Se cumple:*

1. *Dados M, N y P A-módulos,*

$$M \otimes N \otimes P \cong (M \otimes N) \otimes P$$

2. $M \otimes N = N \otimes M$

3. *Dados $f : M_1 \to M_2$ y $g : N_1 \to N_2$ A-lineales, existe $f \otimes g : M_1 \otimes N_1 \to M_2 \otimes N_2$ A-lineal tal que si tenemos $f' : M_2 \to M_3$ y $g' : N_2 \to N_3$ homomorfismos de A-módulos,*

$$M_1 \otimes N_1 \xrightarrow{f \otimes g} M_2 \otimes N_2 \xrightarrow{f' \otimes g'} M_3 \otimes N_3$$

   se cumple

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$$

4. *Si B es un A-álgebra, $B \otimes M$ es un B-módulo*

5. *Si B y C son A-álgebras, $B \otimes C$ es un A-álgebra, un B-módulo y un C-módulo*

6. *Para todo P A-módulo, se verifica $P \otimes_A A \cong P$ mediante el siguiente isomorfismo de A-módulos*

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \otimes_A A \\ p & \longmapsto & p \otimes_A 1_A \end{array}$$

7. *Sean $\{ N_i \}_{i \in I}$ y M A-módulos. Se cumple que*

$$M \otimes_A \left(\bigoplus_{i \in I} N_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_A N_i).$$

   En particular,

$$M \otimes_A A^{(I)} \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_A A) \cong M^{(I)}.$$

Prueba. Comprobamos cada cosa.

1. Definimos la aplicación A-trilineal

$$\begin{array}{rccc} F: & M \times N \times P & \longrightarrow & (M \otimes N) \otimes P \\ & (m, n, p) & \longmapsto & (m \otimes n) \otimes p \end{array}$$

Existe una única $f : M \otimes N \otimes P \to (M \otimes N) \otimes P$ tal que $f(m \otimes n \otimes p) = F(m, n, p) = (m \otimes n) \otimes p$,

$$\begin{tikzcd} M \times N \times P \arrow[r, "F"] \arrow[d] & (M \otimes N) \otimes P \\ M \otimes N \otimes P \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos como definir la flecha en sentido contrario. Para cada $p \in P$ definimos la aplicación A-bilineal

$$\begin{array}{rccc} \Phi_p : & M \times N & \longrightarrow & M \otimes N \otimes P \\ & (m, n) & \longmapsto & m \otimes n \otimes p \end{array}$$

Existe una única $\varphi_p : M \otimes N \to M \otimes N \otimes P$ tal que $\varphi_p(m \otimes n) = \Phi_p(m, n) = m \otimes n \otimes p$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[d] & M \otimes N \otimes P \\ M \otimes N \arrow[ur, "\varphi_p"'] & \end{tikzcd}$$

Observamos que si $p, p' \in P$, entonces $\varphi_p + \varphi_{p'} = \varphi_{p+p'}$ por unicidad ya que ambas completan el diagrama: $\varphi_p(m \otimes n) + \varphi_{p'}(m \otimes n) = m \otimes n \otimes p + m \otimes n \otimes p' = m \otimes n \otimes (p + p') = \varphi_{p+p'}(m \otimes n)$. Lo mismo ocurre con $\lambda \varphi_p = \varphi_{\lambda p}$.

Sea entonces la aplicación A-bilineal

$$\begin{array}{rccc} G : & (M \otimes N) \times P & \longrightarrow & M \otimes N \otimes P \\ & (z, p) & \longmapsto & \varphi_p(z) \end{array}$$

Existe una única $g : (M \otimes N) \otimes P \to M \otimes N \otimes P$ aplicación A-lineal que hace conmutativo el diagrama siguiente

Veamos entonces que la composición de ambas es la identidad. Para ello solo hace falta ver que deja los generadores de cada A-módulo invariantes. Efectivamente,

$$\begin{array}{c} M \otimes N \otimes P \xrightarrow{f} (M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{g} M \otimes N \otimes P \\ m \otimes n \otimes p \longmapsto (m \otimes n) \otimes p \longmapsto m \otimes n \otimes p \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes N) \times P \arrow[r, "G"] \arrow[d] & M \otimes N \otimes P \\
(M \otimes N) \otimes P \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Por tanto, $g \circ f = Id_{M \otimes N \otimes P}$

Por otro, $\{m \otimes n : (m,n) \in M \times N\}$ es sistema de generadores de $M \otimes N$. Por el lema 0.5.8, $\{(m \otimes n) \otimes p : (m,n,p) \in M \times N \times P\}$ es sistema de generadores de $(M \otimes N) \otimes P$. Evaluando, $(f \circ g)((m \otimes n) \otimes p) = (m \otimes n) \otimes p)$ y concluimos $f \circ g) = Id_{(M \otimes N) \otimes P}$.

2. Siguiendo el esquema de *1*, solo hay que definir las aplicaciones naturales $M \times N \to N \otimes M$ que llevan $(m,n) \mapsto n \otimes m$ y la análoga en la otra dirección, que pasan al producto tensorial, y cuya composición resulta en la identidad. Para comprobar esto último solo hay que verlo para los generadores que es trivial.

3. Definimos la aplicación A-bilineal $M_1 \times N_1 \to M_2 \times N_2$ dada por $(m_1, n_1) \mapsto f(m_1) \otimes g(n_1)$. Entonces existe una única $M_1 \otimes N_1 \to M_2 \otimes N_2$ lineal que completa el diagrama conmutativo habitual.

Lo mismo sucede con $M_2 \times N_2 \to M_3 \times N_3$, de forma que obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_1 \otimes N_1 \arrow[r, "f_1 \otimes g_1"] \arrow[rr, bend right, "(f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1)"'] & M_2 \times N_2 \arrow[r, "f_2 \otimes g_2"] & M_3 \times N_3
\end{tikzcd}$$

Podemos definir la aplicación A-bilineal $M_1 \times N_1 \to M_3 \otimes N_3$ dada por $(m_1, n_1) \mapsto (f_2 \circ f_1)(m_1) \otimes (g_2 \circ g_1)(n_1)$, y así existe una única aplicación $M_1 \otimes N_1 \to M_3 \otimes N_3$ que cierra el diagrama conmutativo, y por unicidad ha de coincidir con la composición de arriba.

4. Queremos definir un producto externo. Empezamos definiendo para cada $b \in B$ la aplicación A-lineal $\Phi_b : B \times M \to B \otimes M$ dada por $(b', m) \mapsto bb' \otimes m$. Entonces existe una única aplicación lineal del producto tensorial que cierra el diagrama

Se cumple que $\varphi_{b_1 + b_2} = \varphi_{b_1} + \varphi_{b_2}$ y que $\varphi_{b_1 b_2} = \varphi_{b_1} \circ \varphi_{b_2}$ por la unicidad. De esta forma podemos definir la aplicación

$$\begin{tikzcd} B \times M \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[d] & B \otimes M \\ B \otimes M \arrow[ur, "\varphi_p"'] & \end{tikzcd}$$

$$\Phi : B \times (B \otimes M) \to B \otimes M \tag{7}$$
$$(b, z) \mapsto \varphi_b(z) \tag{8}$$

que está bien definida y con la cual $B \otimes M$ cumple los axiomas de A-módulo.

7. Denotemos por $n_i \in \oplus_{i\in I} N_i$ al elemento tal que tiene a $n \in N_i$ por i-ésima coordenada y 0 en el resto. Definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} F: & M \times (\oplus_{i\in I}) & \longrightarrow & \oplus_{i\in I}(M \otimes_A N_i) \\ & (m, n_i) & \longmapsto & (m \otimes n)_i \end{array} .$$

Esta aplicación es bilineal por serlo para el sistema de generadores

$$\begin{aligned} F(\lambda m, n_i) = (\lambda m \otimes n)_i =& (m \otimes \lambda n)_i = F(m, \lambda n) \\ =& \lambda(m \otimes n)_i = \lambda F(m, n_i), \\ F(m_1 + m_2, n_i) =& ((m_1 + m_2) \otimes n)_i = \\ =& (m_1 \otimes n)_i + (m_2 \otimes n)_i = F(m_1, n_i) + F(m_2, n_i) \quad \text{y} \\ F(m, (n_1 + n_2)_i) =& (m \otimes (n_1 + n_2))_i = \\ =& (m \otimes n_1)_i + (m \otimes n_2)_i = F(m, n_{1i}) + F(m, n_{2i}). \end{aligned}$$

Es por esto que existe

$$f: \quad M \otimes_A (\oplus_{i\in I} N_i) \quad \longrightarrow \quad \oplus_{i\in I}(M \otimes_A N_i)$$

aplicación A-lineal. En el otro sentido comenzamos definiendo para cada $i \in I$ las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} G_i: & M \times N_i & \longmapsto & M \otimes (\oplus_{i\in I} N_i) \\ & (m, n) & \longmapsto & m \otimes n_i \end{array} ,$$

que son A-bilineales de nuevo por la propia definición. Así, surgen las apliciones A-lineales

$$g_i \quad M \otimes N_i \quad \longrightarrow \quad M \otimes (\oplus_{i\in I} N_i) \ ,$$

que nos permiten definir a su vez la siguiente aplicación A-lineal

$$g := \oplus_{i\in I} g_i : \quad \oplus(M \otimes_A N_i) \quad \longrightarrow \quad M \otimes_A (\oplus_{i\in I} N_i) \quad .$$

Se comprueba que $g \circ f = 1_{M\otimes_A(\oplus N_i)}$ y $f \circ g = 1_{\oplus(M\otimes_A N_i)}$ y se tiene el resultado.

Para ver el caso particular, basta aplicar lo que acabamos de probar y la propiedad 6 del producto tensorial.

□

En estas construcciones se tienen las siguientes propiedades.

1) Dados M_1, M_2 y M_3 A-módulos, $M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \cong (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \cong M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$

2) $M \otimes N = N \otimes M$

3) Dados $f : M_1' \to M_1$ y $g : M_2' \to M_2$ A-lineales, existe $f \otimes g : M_1' \otimes M_2' \to M_1 \otimes M_2$ A-lineal tal que el diagrama es conmutativo.

   En particular, si $M \in Obj(Mod_A)$, $M \otimes \_$ es un funtor covariante de Mod_A en Mod_A (Véase Apéndice A)

Ahora, dado un A-módulo M, consideremos el funtor

$$\begin{array}{ccc} Mod_A & \stackrel{M\oplus_A\_}{\longrightarrow} & Mod_A \\ N & \longmapsto & M \oplus_A N \end{array}$$

y estudiemos su comportamiento respecto de sucesiones exactas. Antes de comenzar, cabe destacar que estudiar este funtor es equivalente a estudiar el funtor $\_ \oplus_A M$ debido al isomorfismo existente $M \oplus_A N \cong N \oplus_A M$.

Proposición 0.5.10. *Sea M un A-módulo y sea*

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0 \tag{9}$$

una sucesión exacta. Se cumple que

$$M \otimes_A N' \stackrel{1_M\otimes f}{\longrightarrow} M \otimes_A N \stackrel{1_M\otimes g}{\longrightarrow} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0 \tag{10}$$

es también una sucesión exacta.

Prueba. Sabemos que (9) es exacta si, y sólo si, para todo P A-módulo se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M \oplus_A N'', P) \overset{(1_M \oplus g)^*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(M \oplus_A N, P) \overset{(1_M \oplus f)^*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(M \oplus_A N', P) \tag{11}$$

es exacta.

La sucesión

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N,P)) &\overset{(g^{*_P})_{*_M}}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N,P)) \overset{(f^{*_P})_{*_M}}{\longrightarrow} \\ &\overset{(f^{*_P})_{*_M}}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N,P)), \end{aligned}$$

donde $(f^{*_P})_{*_M} := \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(f,P))$ y $(g^{*_P})_{*_M} := \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(g,P))$, surge de aplicar en primer lugar el funtor $\mathrm{Hom}_A(\_, P)$ a la sucesión 9 y, después, aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_A(M, \_)$ al resultado anterior. Así, 0.3.10 nos dice que es exacta.

Observemos ahora que, para cada $X \in \{ N, N', N'' \}$ se tiene la cadena de isomorfismos de A-módulos

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A X, P) \cong \mathrm{Bil}_A(M \times X, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(X,P)).$$

El primero de los isomorfismos es inmediato atendiendo a la propia definición del producto tensorial: Dada $F \in \mathrm{Bil}_A(M \times X, P)$, existe una única $\bar{F} \in \mathrm{Hom}_A(M \otimes X, P)$ de forma que para cada par $(m,x) \in M \times X$ se verifica $\bar{F}(m \otimes_A x) = F(m,x)$. Comprobemos el segundo de los isomorfismos. En primer lugar, definamos

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Bil}_A(M \times X, P) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(X,P)) \\ F(m,n) & \longmapsto & (\varphi_F(m))(n) := F(m,n) \end{array} .$$

Dados $F, G \in \mathrm{Bil}_A(M \times X, P)$ y $\lambda \in A$ tenemos

- $(F+G)(n,m) = F(m,n) + G(m,n)$ y
- $(\lambda F)(m,n) = \lambda F(m,n)$.

Por otro lado, definamos

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(X,P)) & \longrightarrow & \mathrm{Bil}_A(M \times X, P) \\ \varphi(m)(n) & \longmapsto & F_\varphi(m,n) := \varphi(m)(n) \end{array} .$$

Veamos que la aplicación es bilienal. Sean $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(X,P))$, $\{ m, m_1, m_2 \} \subset M$, $\{ n, n_1, n_2 \} \subset X$ y $\lambda \in A$. Tenemos

- $\varphi(m_1+m_2)(n) = (\varphi(m_1)+\varphi(m_2))(n) = \varphi(m_1)(n)+\varphi(m_2)(n)$,
- $\varphi(m)(n_1+n_2) = \varphi(m)(n_1)+\varphi(m)(n_2)$ y
- $\varphi(\lambda m)(n) = (\lambda\varphi)(m)(n) = \lambda\varphi(m)(n) = \varphi(m)(\lambda n)$.

Vemos así que ambas aplicaciones son A-lineales. Por último, sean $F \in \mathrm{Bil}_A(M \times X, P)$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(X,P))$ y veamos que la una es la inversa de la otra. Se tiene

- $\varphi_{F_\varphi}(m)(n) = F_\varphi(m,n) = \varphi(m)(n)$ y
- $F_{\varphi_F}(m,n) = \varphi_F(m)(n) = F(m,n)$.

Denotemos $\Phi_X : \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A X, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(X,P))$, para cada $X \in \{N, N', N''\}$, a cada uno de los isomorfismos definidos. Estos isomorfismos implican que por ser (**??**) exacta (11) es también exacta. Para probar esto es suficiente ver que se tienen las igualdades

$$(1_M \otimes g)^* = {\Phi_N}^{-1} \circ (g^*)_* \circ \Phi_{N''}$$

y

$$(1_M \otimes f)^* = {\Phi'_N}^{-1} \circ (f^*)_* \circ \Phi_N.$$

Probemos la primera de las igualdades. Dado $F \in \mathrm{Hom}_A(M \oplus N'', P)$, $\Phi_{N''}(F) := \varphi_F \in \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N'', P))$ y

$$(g^*)_*(\varphi_F(m)(n)) = g^*(\varphi_F(m))(n) = \varphi_F(m)(g(n))$$

para cada $m \oplus n \in M \oplus_A N$. Por último,

$${\Phi_N}^{-1}(\varphi_F(m)(g(n))) = F(m \oplus g(n))$$

y

$$F(m \oplus g(n)) = F((1_M \oplus g)(m \oplus n)).$$

Dado que $m \oplus n \in M \oplus_A N''$ era arbitrario, tenemos la igualdad que buscábamos. El caso de la f es análogo. $\square$

Definición 0.5.11. Se dice que un A-módulo M es plano si, y sólo si, el funtor $M \otimes_A \_\_$ es exacto, i.e, conserva sucesiones exactas.

Antes de continuar con la siguiente proposición, observemos lo siguiente: dados M, N A-módulos y $N' \subset N$ submódulo, un elemento $m \otimes_A n' \in M \otimes_A N'$ puede considerarse como un elemento en $M \otimes_A N'$ y como un elemento en $M \otimes_A N$ haciendo uso de la inclusión

$$M \otimes_A N' \overset{i}{\hookrightarrow} M \otimes_A N;$$

sin embargo, de la pertenencia $m \otimes_A n' \in M \otimes_A N'$ no se sigue necesariamente la igualdad $i(m \otimes_A n') = m \otimes_A n$.

Ejemplo 0.5.12. Consideremos los $\mathbb{Z}$-módulos $M := \mathbb{Z}$, $N = N' := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $M' := 2\mathbb{Z}$ (submódulo de $\mathbb{Z}$). Tomemos $x \in N \setminus \{0\}$:

- por un lado, $2 \otimes_{\mathbb{Z}} x = 1 \otimes_{\mathbb{Z}} 2x = 0_{M \otimes N}$,
- sin embargo, por otro lado el elemento $2 \otimes_{\mathbb{Z}} x$ no es $0_{M' \otimes N'}$.

Proposición 0.5.13. *Sea M un A-módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *M es un A-módulo plano.*
2. *Para toda sucesión corta exacta*
$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0,$$
la sucesión
$$0 \longrightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{1 \otimes g} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$
es exacta.
3. *Para cualesquiera dos A-módulos N y N' y cualquier sucesión exacta corta*
$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f}, N$$
la sucesión
$$0 \longrightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_A N$$
es exacta.
4. *Para cualesquiera dos A-módulos N y N' finitamente generados y cualquier sucesión exacta corta*
$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f}, N$$
la sucesión
$$0 \longrightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_A N$$
es exacta.

Prueba. En primer lugar, ($1 \Leftrightarrow 2$) basta con aplicar la definición de módulo plano para ($1 \Rightarrow 2$) y tener en cuenta que toda sucesión exacta larga se puede escindir en sucesiones exactas cortas para ($2 \Rightarrow 1$). También son claras las implicaciones ($2 \Rightarrow 3$) y ($3 \Rightarrow 4$). Probemos ($3 \Rightarrow 2$) y ($4 \Rightarrow 3$).

($3 \Rightarrow 2$). Sean M, N y N' A-módulos y consideremos una sucesión exacta arbitraria

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0.$$

En primer lugar, aplicando (**??**) tenemos que $\mathrm{im}(1 \otimes f) = \mathrm{Ker}\,(1 \otimes g)$ y que $1 \otimes g$ es sobreyectiva. Por otro lado, del hecho de que la sucesión que hemos tomado sea exacta se desprende que, en concreto,

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N$$

es también exacta; así, por hipótesis tenemos que $1 \otimes f$ es inyectiva.

Con todo, resulta que la sucesión

$$0 \longrightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{1 \otimes g} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

es también exacta.

($4 \Rightarrow 3$). Sean N, N' A-módulos y $f : N' \longrightarrow N$ una aplicación A-lineal e inyectiva. Tomemos $z := \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes_A n_i \in M \otimes_A N'$ tal que $f(z) = 0_{M \otimes_A N}$, esto ocurre si, y sólo si, $\sum_{i=1}^{r} m_i \otimes_A f(n_i) = 0_{M \otimes_A N}$ o, lo que es lo mismo

$$e_{(m_1, f(n_1))} + \cdots + e_{(m_r, f(n_r))} \in \Sigma.$$

Esta pertenencia nos garantiza la existencia de ciertos $\{\, \mathrm{rel}_1, \ldots, \mathrm{rel}_s \,\} \subset \Sigma$ tales que

$$e_{(m_1, f(n_1))} + \cdots + e_{(m_r, f(n_r))} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \mathrm{rel}_i \qquad \lambda_i \in A \ \forall\ i \in \{1, \ldots, s\}$$

Definamos ahora los menores submódulos de N y de N' que contengan a los conjuntos $\{\, \mathrm{rel}_1, \ldots, \mathrm{rel}_s, f(n_1), \ldots, f(n_r) \,\}$ y $\{\, n_1, \ldots, n_r \,\}$ respectivamente. Denotemos al primero por N_{red} y al segundo, $N_{\mathrm{red}}{}'$.

Es claro que $f_{|N_{\mathrm{red}}{}'} : N_{\mathrm{red}}{}' \longrightarrow N_{\mathrm{red}}$ está bien definida y es inyectiva. Así, por la hipótesis, se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow M \otimes_A N_{\mathrm{red}}{}' \xrightarrow{1 \otimes f_{|N_{\mathrm{red}}{}'}} M \ M \otimes N_{\mathrm{red}}$$

es exacta. Así, denotando por z_{red} al elemento z visto en $M \otimes_A N_{\mathrm{red}}{}'$, se tiene que $f(z_{\mathrm{red}}) = 0_{M \otimes_A N_{\mathrm{red}}}$, es decir, $z_{\mathrm{red}} = 0_{M \otimes_A N_{\mathrm{red}}{}'}$. Si ahora consideramos el homomorfismo inclusión

$$M \otimes_A N_{\mathrm{red}}{}' \overset{i}{\hookrightarrow} M \otimes_A N',$$

en este caso, por ser homomorfismo sí se puede concluir que $i(z_{\text{red}}) = z = 0_{M\otimes_A N'}$.
$\square$

Observación 0.5.14. *1)* Sean M y N dos A-módulos. El mismo argumento empleado en la implicación ($4 \Rightarrow 3$) de la prueba anterior prueba que, tras la adaptación necesaria, si $\sum_{i=1}^r m_i \otimes_A n_1 = 0_{M\otimes_A N}$, existen $M' \subset M$ y $N' \subset N$ submódulos finitamente generados que contienen a los conjutos $\{ m_i \}$ y $\{ n_i \}$ respectivamente, tales que $\sum_{i=1}^r m_i \otimes_A n_i = 0_{M'\otimes N'}$. De nuevo, hay que destacar que no necesariamente se tiene $M' \otimes_A N' \subset M \otimes_A N$.

Ejemplo 0.5.15. Denotemos respectivamente por M_0 y N_0 a los submódulos M' y N' de la observación anterior y mantengamos la notación de **??**.

Es claro que $M_0 \supset M'$ y $N_0 \supset N'$ pues si $z = 0_{M_0\otimes N_0}$ y $M_0 \subset M'$ y $N_0 \subset N'$ también debe ser $0_{M'\otimes N'}$. En primer lugar, si $x \neq 0_N$, el menor submódulo generado por x es el propio N. Así, $N_0 = N = N'$. Supongamos ahora M_0 generado por los elementos $\{ m_1, \ldots, m_r \}$. La inclusión antes mencionada implica $m_i|2$ para toda $i \in \{ 1, \ldots, r \}$, es decir, $m_i = 1$ o $m_i = 2$. Por esto, existe $i \in \{ 1, \ldots, r \}$ tal que $m_i = 1$ y $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \subset M_0$.

Así, los únicos submódulos M_0 y N_0 que verifican las condiciones del consecuente de la observación anterior son $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Teorema 0.5.16. *Sea M un A-módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *M es un A-módulo plano.*

2. *Para cualesquiera N' y N A-módulos y $f : N' \longrightarrow N$ inyectiva,*
$$1_M \otimes f : M \otimes N' \longrightarrow M \otimes N$$
es inyectiva.

2'. *Para cualesquiera N' y N A-módulos finitamente generados y $f : N' \longrightarrow N$ inyectiva,*
$$1_M \otimes f : M \otimes N' \longrightarrow M \otimes N$$
es inyectiva.

3. *Si*
$$\sum_{i=1}^n a_i m_i = 0_A$$

para ciertos $a_i \in A$ *y* $m_i \in N$, *entonces existen* $m_j{}' \in M$ *de forma que para cada* i *se tiene*

$$m_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} m_j{}', \qquad \lambda_{ij} \in A$$

y para cada j *se verifica*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} a_i = 0.$$

4. *Si* $\mathfrak{a} \in A$ *es un ideal, entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{a} \otimes_A M & \longrightarrow & M & \textit{entendido como } A \otimes_A M \\ \sum_{i \in F} a_i \otimes_A m_i & \longmapsto & \sum_{i \in F} a_i m_i & \end{array}$$

es inyectiva.

Observación 0.5.17. *1.* Sean A un anillo conmutativo y unitario, I un conjunto de índices, N y N' A-módulos y $f : N' \longrightarrow N$ una aplicación A-lineal inyectiva. Se verifica que la aplicación

$$1_{A^{(I)}} \otimes_A f : A^{(I)} \otimes N \longrightarrow A^{(I)} \otimes_A N$$

es también inyectiva.

Dado que $A^{(I)} \otimes_A N \cong \oplus_{i \in I} N$ y $A^{(I)} \otimes_A N' \cong \oplus_{i \in I} N'$, basta comprobar que la aplicación

$$\oplus_{i \in I} f : \oplus_{i \in I} N' \longrightarrow \oplus_{i \in I} N$$

es inyectiva.

2. Si B es plano y $\mathfrak{a} \subset A$ un ideal, entonces la cuarta afirmación del teorema anterior nos da el isomorfismo de A-módulos

$$\mathfrak{a}^e \cong \mathfrak{a} \otimes_A B.$$

Lema 0.5.18. *Sean* M *y* N A*-módulos, donde* $N := \langle n_1, \ldots, n_r \rangle_A$. *Si se tiene una relación en* $M \otimes_A N$ *de forma que*

$$\sum_{i=1}^{r} m_i \otimes n_i = 0_{M \otimes_A N},$$

entonces existen elementos $m_j{}' \in M$ *y* $\mu_{ij} \in A$, *para* $j \in \{1, \ldots, s\}$ *y* $s \in \mathbb{N}$, *de forma que*

$$m_i = \sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} m_j{}' \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, r\} \tag{12}$$

y

$$\sum_{i \in F} \mu_{ij} n_i = 0_N \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, s\}. \tag{13}$$

Prueba. Probemos primero un caso base: consideremos N como A-módulo libre generado por el conjunto $\{ n_1, \dots, n_r \}$; es decir, existe un isomorfismo de A-módulos

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & N & \longrightarrow & A^{(r)} \\ & n_i & \longmapsto & e_i \end{array}.$$

Así, tenemos la cadena de isomorfismos de A-módulos

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes N & \xrightarrow{1\otimes\sigma} & M \otimes A^{(r)} & \longrightarrow & M^{(r)} \\ (m \otimes n_i) & \longmapsto & (m \otimes e_i) & \longmapsto & (m)_i \end{array}$$

y se desprende que

$$\sum_{i=1}^{r} m_i n_i = 0_{M\otimes N} \Leftrightarrow (m_1, \dots, m_r) = 0_{M^{(r)}} \Leftrightarrow m_i = 0_M \quad \forall\, i \in \{1, \dots, r\}.$$

Tras esto, basta tomar $s = r$ y definir $m_j{}' := m_j$, $\mu_{ij} := 0_A$ para $i, j \in \{ 1, \dots, r \}$.

Ahora, de forma más general, sea

$$0 \longrightarrow K := \operatorname{Ker}(f) \hookrightarrow A^{(r)} \xrightarrow{F} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta, donde F verifica $F(e_i) = n_i$ para cada $i \in \{ 1, \dots, r \}$. Sabemos que la sucesión

$$M \otimes_A K \xrightarrow{h:=1_m\otimes i} M \otimes_A A^{(r)} \xrightarrow{f:=1_M\otimes F} M \otimes N \longrightarrow 0$$

es exacta.

De esta forma, si un elemento $z := \sum m_i \otimes e_i$ verifica $f(z) = 0_{M\otimes_A N}$, entonces existe $w := \sum_{j=1}^{s} m_j{}' \otimes k_j \in M \otimes_A K$ de forma que $h(w) = z$; esto supone

$$\sum_{j=1}^{s} m_j{}' \otimes k_j - \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes e_i = 0_{M\otimes_A A^{(r)}}.$$

Además, para cada $j \in \{ 1, \dots, s \}$ existen $\mu_{ij} \in A$ tales que

$$k_j = \sum \mu_{ij} e_i.$$

Resulta así lo siguiente. Por un lado se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{s} m_j{}' \otimes k_j - \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes e_i &= \sum_{j=1}^{s} m_j{}' \otimes \sum_{i=1}^{r} \mu_{ij} e_i - \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes e_i = \\ &= \sum_{i=1}^{r} (\sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} m_j{}') \otimes e_i - \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes e_i = \\ &= \sum_{i=1}^{r} (\sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} m_j{}' - m_i) \otimes e_i = 0_{M\otimes_A A^{(r)}}, \end{aligned}$$

de donde se desprenden las igualdades

$$m_i = \sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} m_j{}' \quad \forall\, i \in \{\, 1, \ldots, r \,\}\,. \tag{14}$$

Por otro lado, como para cada $j \in \{\, 1, \ldots, s \,\}$ se tiene $k_j \in K$, resulta

$$0_N = f(k_j) = \sum_{i=1}^{r} \mu_{ij} f(e_i) = \sum_{i=1}^{r} \mu_{ij} n_i \quad \forall\, j \in \{\, 1, \ldots, s \,\}\,. \tag{15}$$

□