

**Definición 0.0.1.** Sea  $A$  un anillo, se llama  $A$ -módulo a cualquier grupo abeliano  $(M, +)$  sobre el que  $A$  actúa linealmente, es decir, un grupo  $M$  con junto con una operación externa  $A \times M \rightarrow M$  que cumple que para todo  $m, n \in M, a, b \in A$ :

1.  $a(m + n) = am + an$
2.  $(a + b)m = am + bm$
3.  $(ab)m = a(bm)$
4.  $1_A m = m$ .

**Ejemplo 0.0.2.** 1. Si  $\mathbb{K}$  es un cuerpo, todo  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial es un  $\mathbb{K}$ -módulo..

2. Si  $V$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita y  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo, entonces  $V$  es un  $\mathbb{K}[x]$ -módulo via la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[x] \times V &\rightarrow V \\ (p(x), v) &\mapsto p(f(v)) = a_n f^{(n)}(v) + \cdots + a_1 f(v) + a_0 v \end{aligned}$$

siendo  $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$  y  $f^{(k)} = f \circ \dots \circ f$ .

3. Toda  $A$ -álgebra  $B$  de un anillo  $A$  es un  $A$ -módulo.  $B$  es un anillo luego  $(B, +)$  es un grupo abeliano. Por ser  $A$ -álgebra, existe un homomorfismo  $\varphi : A \rightarrow B$ , y entonces podemos definir la operación externa de la definición ?? como  $A \times B \rightarrow B$  que hace corresponder  $(a, b) \mapsto \varphi(a)b$ .

**Observación 0.0.3.** Atendiendo al último ejemplo resulta que dados dos anillos  $A, B$ , dar a  $B$  estructura de  $A$ -álgebra es equivalente a darle estructura de  $A$ -módulo junto con la propiedad adicional de que

$$\forall b, b' \in B, \forall a \in A \quad a \cdot_{\text{ext}} (bb') = (a \cdot_{\text{ext}} b)b'$$

**Definición 0.0.4.** . Dado un anillo  $A$  y un  $A$ -módulo  $M$ , diremos que  $S \subset M$  es un *submódulo de  $M$*  si es un subgrupo de  $M$  cerrado para la multiplicación por elementos de  $A$ .

**Observación 0.0.5.** Si  $A$  es un anillo,  $\mathfrak{a} \subseteq A$  un ideal, y  $M$  un  $A$ -módulo entonces el conjunto

$$\mathfrak{a}M := \left\{ \sum_{i=1}^r a_i m_i \mid r \in \mathbb{N}, a_i \in \mathfrak{a}, m_i \in M \right\}$$

es un submódulo de  $M$ .

**Definición 0.0.6.** Sean  $(A, +, \cdot)$  anillo,  $M$  y  $N$   $A$ -módulos. Una aplicación  $f : M \longrightarrow N$  se dice que es un homomorfismo de  $A$ -módulos o, simplemente, que es una aplicación  $A$ -lineal si verifica

$$i) \quad \forall m_1, m_2 \in M \quad f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \text{ y}$$

$$ii) \quad \forall \lambda \in A, \forall m \in M \quad f(\lambda m) = \lambda f(m).$$

**Observación 0.0.7.** 1. En un  $A$ -módulo  $M$  se tiene que

$$\forall m \in M \quad 0_A m = 0_M$$

$$\forall \lambda \in A \quad \lambda 0_M = 0_M.$$

Para ver lo primero basta observar que para todo  $m \in M$  se tiene que  $0_A m + m = (0_A + 1_A)m = 1_A m = m$ , es decir,  $0_A m = 0_M$ . De aquí se desprende también que

$$(-1_A)(1_M) = -1_M = (1_A)(-1_M)$$

puesto que  $0_M = 0_A 1_M = (1_A - 1_A)1_M = 1_A 1_M + (-1_A)(1_M) = 1_M + (-1_A)(1_M)$ . También se desprende que, para  $\lambda \in A$  y  $m \in M$  fijados (arbitrarios),  $\lambda 0_M = \lambda(0_A m) = (\lambda 0_A)m = 0_A m = 0_M$ ; esto es, la segunda propiedad.

2. Dado un homomorfismo de  $A$ -módulos,  $f : M \longrightarrow N$ , se tiene que  $\text{Ker}(f) := \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$  es un submódulo de  $M$  y que  $\text{im}(f) := \{y \in N \mid \exists x \in M \text{ tal que } f(x) = y\}$  es un submódulo de  $N$ .

## 0.1 Construcciones con $A$ -módulos

### 0.1.1 Módulos cociente

Dados  $(A, +, \cdot)$  un anillo,  $M$  un  $A$ -módulo y  $N \subset M$  un submódulo. Denotemos para cada  $m \in M$  como  $[m]_N$  a la clase de  $m$  en  $M/N$ . Tras esta consideración, se tiene que  $M/N$  junto a la aplicación

$$\begin{aligned} M/N \times M/N &\longrightarrow M/N \\ ([m_1]_N, [m_2]_N) &\longmapsto [m_1 + m_2]_N. \end{aligned}$$

tiene estructura de grupo abeliano. Esto es así puesto que  $(M, +)$  es un grupo abeliano y, por lo tanto, todo subgrupo suyo también lo es; es decir, todo subgrupo suyo será normal y el cociente será de nuevo abeliano.

**Definición 0.1.1.** Sean  $(A, +, \cdot)$  un anillo,  $M$  un  $A$ -módulo y  $N \subseteq M$  un submódulo. Definiendo la aplicación

$$\begin{aligned} A \times M/N &\longrightarrow M/N \\ (\lambda, [m]) &\longmapsto \lambda[m]_N := [\lambda m]_N \end{aligned}$$

dotamos a  $M/N$  de estructura de  $A$ -módulo y lo denominamos *módulo cociente*.

**Observación 0.1.2.** La aplicación natural

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow M/N \\ m &\longmapsto [m]_N \end{aligned}$$

es un homomorfismo de  $A$ -módulos.

### 0.1.2 Anuladores

**Definición 0.1.3.** Dados  $A$  un anillo y  $M$  un  $A$ -módulo, definimos el anulador de  $A$  en  $M$  como

$$Anul_A M = \{\lambda \in A \mid \lambda \cdot m = 0, \forall m \in M\}$$

**Observación 0.1.4.** 1.  $Anul_A M$  es un ideal de  $A$ .

- (a) Dados  $\lambda_1, \lambda_2 \in Anul_A M$ , para cada  $m \in M$ ,  $\lambda_1 \cdot m = \lambda_2 \cdot m = 0$ . Restando, se obtiene  $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot m = 0 \rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \in Anul_A M$
- (b) Dado  $\lambda \in Anul_A M$ , para cada  $\alpha \in A$  y para cada  $m \in M$  se tiene  $(\alpha \cdot \lambda) \cdot m = \alpha \cdot (\lambda \cdot m) = \alpha \cdot 0 = 0$ , luego  $\alpha \cdot \lambda \in Anul_A M$

Por tanto,  $A/Anul_A M$  tiene estructura de anillo. Además, podemos ver a  $M$  como un  $A/Anul_A M$ -módulo mediante la aplicación

$$\begin{aligned} A/Anul_A M \times M &\longrightarrow M \\ (\lambda + Anul_A M) \cdot m &\longmapsto \lambda \cdot m \end{aligned}$$

- 2. Dado un ideal  $\mathfrak{a} \subset Anul_A M$ ,  $M$  es un  $A/\mathfrak{a}$ -módulo. Los submódulos de  $M$  como  $A/\mathfrak{a}$ -módulo son los submódulos de  $M$  como  $A$ -módulo.

### 0.1.3 Aplicaciones A-lineales

**Definición 0.1.5.** Dados  $M$  y  $N$  dos  $A$ -módulos, definimos *el conjunto de aplicaciones A-lineales entre  $M$  y  $N$*

$$\text{Hom}_A(M, N) := \{f : M \longrightarrow N \mid f \text{ es aplicación } A\text{-lineal}\}$$

**Proposición 0.1.6.** *Dados  $M$  y  $N$  dos  $A$ -módulos,  $\text{Hom}_A(M, N)$  tiene estructura de  $A$ -módulo.*

*Prueba.* En primer lugar, definamos para cada  $\lambda \in A$  y cada  $f \in \text{Hom}_A(M, N)$  la aplicación

$$\begin{aligned} \lambda f : M &\longrightarrow N \\ m &\longmapsto \lambda(f(m)) \end{aligned}$$

y veamos de nuevo que  $\lambda f \in \text{Hom}_A(M, N)$ , de forma que

$$\begin{aligned} A \times \text{Hom}_A(M, N) &\longrightarrow \text{Hom}_A(M, N) \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda f \end{aligned}$$

esté bien definida. Sean  $m, m_1, m_2 \in M$  y  $\mu \in A$ :

$$\begin{aligned} (\lambda f)(m_1 + m_2) &= \lambda(f(m_1 + m_2)) = \\ &= \lambda(f(m_1) + f(m_2)) = \\ &= \lambda(f(m_1)) + \lambda(f(m_2)) = (\lambda f)(m_1) + (\lambda f)(m_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda f)(\mu m) &= \lambda(f(\mu m)) = \lambda(\mu(f(m))) = (\lambda\mu)(f(m)) = \\ &= (\mu\lambda)(f(m)) = \mu(\lambda(f(m))) = (\mu(\lambda f))(m). \end{aligned}$$

Ahora, dadas  $f, g \in \text{Hom}_A(M, N)$  definamos la aplicación

$$\begin{aligned} f + g : M &\longrightarrow N \\ m &\longmapsto f(m) + g(m) \end{aligned}$$

Veamos que  $f + g \in \text{Hom}_A(M, N)$ . Dados  $m, m_1, m_2 \in M$  y  $\lambda \in A$  arbitrarios, tenemos efectivamente

$$\begin{aligned} (f + g)(m_1 + m_2) &= f(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) = \\ &= f(m_1) + f(m_2) + g(m_1) + g(m_2) = (f + g)(m_1) + (f + g)(m_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f + g)(\lambda m) &= f(\lambda m) + g(\lambda m) = \lambda f(m) + \lambda g(m) = \\ &= \lambda(f(m) + g(m)) = \lambda((f + g)(m)) = (\lambda(f + g))(m). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} + : \text{Hom}_A(M, N) \times \text{Hom}_A(M, N) &\longrightarrow \text{Hom}_A(M, N) \\ (f, g) &\longmapsto f + g, \end{aligned}$$

está bien definida y dota a  $\text{Hom}_A(M, N)$  de estructura de grupo abeliano.

Comprobemos por último que el producto exterior cumple los cuatro axiomas de la definición de  $A$ -módulo. Sean  $m \in M$ ,  $f, g \in \text{Hom}_A(M, N)$  y  $\lambda, \mu \in A$  arbitrarios:

- i)  $(\lambda(f + g))(m) = \lambda((f + g)(m)) = \lambda(f(m) + g(m)) = \lambda(f(m)) + \lambda(g(m)) = (\lambda f)(m) + (\lambda g)(m) = (\lambda f + \lambda g)(m),$
- ii)  $((\lambda + \mu)f)(m) = (\lambda + \mu)(f(m)) = \lambda(f(m)) + \mu(f(m)) = (\lambda f)(m) + (\mu f)(m) = (\lambda f + \mu f)(m),$
- iii)  $((\lambda\mu)f)(m) = (\lambda\mu)(f(m)) = \lambda(\mu(f(m))) = \lambda((\mu f)(m)) = (\lambda(\mu f))(m) \text{ y}$
- iv)  $(1_A f)(m) = 1_A(f(m)) = f(m).$

□

### 0.1.4 Pullbacks

Dados  $M_1, M_2$  y  $N$   $A$ -módulos y dada  $\varphi \in \text{Hom}_A(M_1, M_2)$ , podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi^* : \text{Hom}_A(M_2, N) &\longrightarrow \text{Hom}_A(M_1, N) \\ g &\longmapsto g \circ \varphi \end{aligned}$$

que resulta ser un homomorfismo de  $A$ -módulos y se denota  $\varphi^* = \text{Hom}_A(\varphi \_)$ .

Análogamente, dados  $M, N_1$  y  $N_2$   $A$ -módulos y dada  $\psi \in \text{Hom}_A(N_1, N_2)$ ,

$$\begin{aligned} \psi_* : \text{Hom}_A(M, N_1) &\longrightarrow \text{Hom}_A(M, N_2) \\ g &\longmapsto \psi \circ g \end{aligned}$$

es un homomorfismo de  $A$ -módulos y se denota  $\psi_* = \text{Hom}_A(\_ \psi)$ .

Nótese que si tenemos  $M_1, M_2$  y  $M_3$   $A$ -módulos y  $\varphi \in \text{Hom}_A(M_1, M_2)$  y  $\psi \in \text{Hom}_A(M_2, M_3)$ , entonces  $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ .

Respectivamente, dados  $N_1, N_2$  y  $N_3$   $A$ -módulos y  $\varphi \in \text{Hom}_A(N_1, N_2)$  y  $\psi \in \text{Hom}_A(N_2, N_3)$ , entonces  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ .

### 0.1.5 Suma directa

**Definición 0.1.7.** Sean  $(A, +, \cdot)$  un anillo conmutativo unitario y  $\{M_i\}_{i \in I}$  una familia no vacía de  $A$ -módulos. Definimos el conjunto

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \left\{ (m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid m_i = 0_{M_i}, \forall i \in I \setminus F, F \subseteq I \text{ finito} \right\}$$

y lo llamamos *suma directa* de los  $A$ -módulos  $\{M_i\}_{i \in I}$ .

**Proposición 0.1.8.** Sean  $A$  un anillo y una familia  $\{M_i\}_{i \in I}$  de  $A$ -módulos. Entonces  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  con la suma por coordenadas y el producto por escalares por coordenadas es un  $A$ -módulo.

**Observación 0.1.9.** 1. Para cada  $j \in I$ , tenemos definida  $p_j : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$ , la proyección a cada  $M_j$ . No es más que la restricción a  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  de la proyección  $\Pi_j$  definida sobre el producto cartesiano  $\prod_{i \in I} M_i$ .  $p_j$  es un homomorfismo de  $A$ -módulos.

2. Para cada  $j \in I$ , la inclusión  $q_j : M_j \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$  es homomorfismo de  $A$ -módulos.

3. Para cada  $x = (x_i) \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ , existe un número finito de índices  $i_1, \dots, i_r$  tal que  $x_{i_r} \neq 0$ . Entonces, expresamos  $x = \sum_{i \in i_1, \dots, i_r} q_i(x_i)$ .

**Notación.** Dado  $A$  un anillo,  $I$  un conjunto no vacío, denotamos  $A^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} A_i$ , donde para cada  $i \in I$ ,  $A_i = A$ .  $A^{(I)}$  es un submódulo de  $A^I = \prod_{i \in I} A_i$ , con  $A_i = A$  para cada  $i \in I$ .

## 0.2 A-módulos libres

**Definición 0.2.1.** . Dado un homomorfismo de  $A$ -módulos,  $f : M \rightarrow N$ , se dice que es un isomorfismo de  $A$ -módulos si existe  $g : N \rightarrow M$  homomorfismo de  $A$ -módulos tal que  $g \circ f = Id_M$  y  $f \circ g = Id_N$ , es decir, una inversa de  $f$ .

**Observación 0.2.2.**  $f : M \rightarrow N$  es isomorfismo de  $A$ -módulos si, y sólo si, es injectivo y sobreyectivo. Esto significa que es suficiente que  $f$  sea biyectivo como  $A$ -aplicación.

**Lema 0.2.3.** Sean  $M_i : i \in I$  un conjunto de  $A$ -módulos y sea  $N$  otro  $A$ -módulo. Un homomorfismo  $\Phi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$  viene unívocamente determinado por los homomorfismos  $\Phi \circ q_i : M_i \rightarrow N$ . Análogamente, los homomorfismos  $\Phi : N \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$  vienen unívocamente determinados por los homomorfismos  $p_i \circ \Phi : N \rightarrow M_i$ .

*Prueba.* Sea  $\Phi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$  un homomorfismo de  $A$ -módulos. Para cada  $i \in I$ ,  $\Phi \circ q_i$  es una composición de homomorfismos, luego es un homomorfismo de  $A$ -módulos.

Recíprocamente, dados  $\Phi_i : M_i \rightarrow N$  homomorfismo de  $A$ -módulos, para cada  $i \in I$ , definimos  $\Phi : \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow N$  de la siguiente forma:

Para cada  $\omega \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ , existen unos únicos  $i_1, \dots, i_r$ , todos ellos distintos, tales que  $\omega = q_{i_1}(\omega_{i_1}) + \dots + q_{i_r}(\omega_{i_r})$ . Entonces, ponemos  $\Phi(\omega) = \Phi_{i_1}(\omega_{i_1}) + \dots + \Phi_{i_r}(\omega_{i_r})$ . En el caso en el que  $\omega$  sea 0, ponemos  $\Phi(\omega) = 0$ .  $\Phi$  es un homomorfismo de anillos que cumple  $\Phi \circ q_i = \Phi_i$ , para cada  $i \in I$ .  $\square$

**Notación.** Denotamos al  $\Phi$  de la demostración anterior como  $\bigoplus_{i \in I} \Phi_i$

**Definición 0.2.4.** Se dice que  $M$  es un  $A$ -módulo libre si  $M \cong A^{(I)}$  para cierto conjunto  $I$ .

**Proposición 0.2.5.**  $M$  es un  $A$ -módulo libre si y solo si existe  $B := \{m_i\}_{i \in I} \subseteq M$  tal que para cada  $x \in M$  existe  $F \subseteq I$  cumpliendo que  $x$  se puede expresar de forma única como

$$x = \sum_{\substack{j \in F \\ \lambda_j \in A}} \lambda_j m_j$$

Si dos subconjuntos  $B$  y  $B'$  cumplen lo anterior, entonces tienen el mismo cardinal.

*Prueba.* Supongamos que existe  $\phi : A^{(I)} \rightarrow M$  un isomorfismo de  $A$ -módulos, para cierto conjunto de índices  $I$ . Sea, para cada  $i \in I$ ,  $m_i := \phi(e_i)$ , donde  $e_i = (\delta_{ij})_j \in A^{(I)}$ . El conjunto  $\{m_i, i \in I\}$  es el que buscamos.

Para cada  $m \in M$ , por ser  $\phi$  sobreyectiva, existe un  $\underline{x} \in A^{(I)}$  tal que  $\phi(\underline{x}) = m$ . A su vez, existen  $i_1, \dots, i_r \in I$  tales que  $\underline{x} = q_{i_1}(x_{i_1}) + \dots + q_{i_r}(x_{i_r}) = x_{i_1}q_{i_1}(1_A) + \dots + x_{i_r}q_{i_r}(1_A)$ . Por tanto,  $\phi(\underline{x}) = x_{i_1}\phi(e_{i_1}) + \dots + x_{i_r}\phi(e_{i_r}) = x_{i_1}m_{i_1} + \dots + x_{i_r}m_{i_r} = m$ . Hemos escrito  $m$  como una combinación lineal de elementos  $m_i : i \in I$

La unicidad es clara porque estamos usando un isomorfismo, pero podemos detallarlo. Si un elemento tiene dos representaciones en los  $m_i$ , al restarlas obtengo una combinación lineal nula de un conjunto de los  $m_i$ , basta entonces comprobar que, si una combinación lineal de cualquier subconjunto de los  $m_i$  es nula, sus coeficientes son nulos también:

$$\begin{aligned} 0_M = \lambda_{i_1}m_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r}m_{i_r} &= \Phi(\lambda_{i_1}e_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r}e_{i_r}) \\ \iff \lambda_{i_1}e_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r}e_{i_r} &= 0_{A^{(I)}} \iff \lambda_{i_j} = 0_A \quad (1) \end{aligned}$$

$\forall j \in \{1, \dots, r\}$ , lo que concluye la prueba.

Recíprocamente, para cada  $i \in I$  definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi_i : A &\longrightarrow M \\ 1_A &\longmapsto m_i. \end{aligned}$$

Para cada  $i \in I$  y cada  $\lambda \in A$  se verifica  $\varphi_i(\lambda) = \lambda m_i$ . De esta forma,  $\varphi_i$  es un homomorfismo de  $A$ -módulos entre  $A$  y  $M$  para cada  $i \in I$  y, por el lema previo,  $\varphi := \bigoplus_{i \in I} \varphi_i : A^{(I)} \longrightarrow M$  es a su vez un homomorfismo de  $A$ -módulos.

Todo  $x \in M$  admite una representación única como combinación lineal finita de elementos de  $B$ . Sean las aplicaciones  $\psi_i : M \rightarrow A$  dadas por  $x = \sum_{j \in F} \lambda_j m_j \mapsto \lambda_i$ , donde  $F \subset I$  finito. Para cada  $i \in I$ ,  $\psi_i$  es un homomorfismo de  $A$ -módulos y, de forma análoga, la aplicación  $\psi : M \longrightarrow A^I$  que verifica  $p_i \circ \psi = \psi_i$ , es un homomorfismo de  $A$ -módulos y es único. Más aún, para cada  $x \in M$  existe  $F \subseteq I$  finito de forma que,  $\psi_i(x) = 0_A$  si  $i \in I \setminus F$ ; es decir,  $\psi(M) \subseteq A^{(I)}$ .

Por último, es claro por definición de los homomorfismos que  $\varphi \circ \psi = Id_M$  y  $\psi \circ \varphi = Id_{A^{(I)}}$ .

Veamos que todas las bases tienen un mismo cardinal. Si  $M \cong A^{(I)}$ , sean  $\mathfrak{m}$  un ideal maximal de  $A$  y  $\{m_i, i \in I\}$  una base de  $M$ .  $\mathfrak{m}M$  es un submódulo de  $M$  y, como  $\mathfrak{m} \subset \text{Ann}_A(M/\mathfrak{m}M)$ ,  $M/\mathfrak{m}M$  tiene estructura de  $A/\mathfrak{m}$ -espacio vectorial.

Tomemos  $M = A^{(I)}$  y veamos que  $A^{(I)}/\mathfrak{m}A^{(I)} \cong (A/\mathfrak{m})^{(I)}$ , que es un  $A/\mathfrak{m}$ -espacio vectorial de dimensión  $\#(I)$ .

En primer lugar, definamos para cada  $i \in I$  las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} \tau_i : A &\longrightarrow (A/\mathfrak{m})^{(I)} \\ 1_A &\longmapsto \tau_i(1_A) = (a_j + \mathfrak{m})_{j \in I} := \begin{cases} a_j + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} & \text{si } i \neq j \\ a_j + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m} & \text{si } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

Se comprueba que, para cada  $i \in I$ ,  $\tau_i$  es homomorfismo de  $A$ -módulos y, por lo tanto,  $\bigoplus_{i \in I} \tau_i : A^{(I)} \longrightarrow (A/\mathfrak{m})^{(I)}$  es también un homomorfismo de  $A$ -módulos.

Además,  $\bigoplus_{i \in I} \tau_i$  es sobreyectivo y  $\text{Ker } \bigoplus_{i \in I} \tau_i = \mathfrak{m}A^{(I)}$ . Así, por el primer teorema de isomorfía,  $\bigoplus_{i \in I} \tau_i$  induce un isomorfismo de  $A/\mathfrak{m}$ -módulos,  $\widehat{\bigoplus_{i \in I} \tau_i} : A^{(I)}/\mathfrak{m}A^{(I)} \longrightarrow (A/\mathfrak{m})^{(I)}$ .

Ahora, dados dos conjuntos de índices no vacíos  $I$  y  $J$ , supongamos que existe un isomorfismo de  $A$ -módulos  $\Phi : A^{(I)} \longrightarrow A^{(J)}$ . Por ser así, en concreto se tiene que  $\Phi(\mathfrak{m}A^{(I)}) = \mathfrak{m}A^{(J)}$  y  $\Phi$  induce otro isomorfismo de  $A/\mathfrak{m}$ -módulos,  $\widehat{\Phi} : A^{(I)}/\mathfrak{m}A^{(I)} \longrightarrow A^{(J)}/\mathfrak{m}A^{(J)}$ . De esta forma, resulta que  $(A/\mathfrak{m})^{(I)} \cong (A/\mathfrak{m})^{(J)}$  y  $\#(I) = \#(J)$ .  $\square$

**Definición 0.2.6.** A cualquier conjunto  $B$  que cumpla la proposición anterior se le llama base del  $A$ -módulo libre  $M$ , y a su cardinal se le llama *rango de  $M$* .



**Corolario 0.2.7.** Sea  $M$  es un  $A$ -módulo libre, es decir, existe un conjunto  $I$  tal que  $M \cong A^{(I)}$ , y sea  $N$  otro  $A$ -módulo. Dados  $n_i : i \in I \subset N$ , existe un único homomorfismo de  $A$ -módulos  $f : M \rightarrow N$  tal que  $f(m_i) = n_i$  para cada  $i \in I$ , donde  $m_i : i \in I$  es una base de  $M$ .

### 0.3 Sucesiones exactas

**Definición 0.3.1.** Una sucesión de homomorfismos de  $A$ -módulos

$$\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\Phi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\Phi_i} M_{i+1} \longrightarrow \dots$$

se dice exacta si  $\text{Ker}(\Phi_{i+1}) = \text{im}(\Phi_i)$ , donde para cada  $i$ ,  $M_i$  es un  $A$ -módulo y  $\Phi_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$  es un homomorfismo de  $A$ -módulos.

**Definición 0.3.2.** Decimos que una sucesión de homomorfismos de  $A$ -módulos es corta si es de la forma

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

**Observación 0.3.3.** Una sucesión corta es exacta si y sólo si  $f : M_1 \rightarrow M_2$  es inyectiva,  $g : M_2 \rightarrow M_3$  es suprayectiva y  $\text{im}(f) = \text{Ker}(g)$

**Ejemplo 0.3.4.** 1. Dados  $N \subset M$   $A$ -módulos,

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

es una sucesión corta exacta.

2. Dados  $M$  y  $N$   $A$ -módulos,

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{q_M} M \oplus N \xrightarrow{p_N} N \longrightarrow 0$$

es una también una sucesión corta exacta.

**Observación 0.3.5.** Toda sucesión de homomorfismos de  $A$ -módulos se puede descomponer en varias sucesiones cortas.

**Definición 0.3.6.** Dado  $M$  un  $A$ -módulo, un subconjunto  $S \subset M$  es un sistema de generadores de  $M$  si para cada  $x \in M$  existen  $\{s_1, \dots, s_n\} \subset S$  tales que

$$x = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$$

con  $\lambda_i \in A$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Es decir, el menor submódulo de  $M$  que contiene a  $S$  es el propio  $M$ .

**Definición 0.3.7.** Dado un conjunto de  $A$ -módulos  $\zeta$ , una aplicación  $\lambda : \zeta \rightarrow \mathbb{N}$  se dice aditiva si para cada  $M, M'$  y  $M'' \in \zeta$  y para cada sucesión corta y exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

se verifica  $\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$ .

**Ejemplo 0.3.8.** Dado  $K$  cuerpo, los  $K$ -módulos son los  $K$ -espacios vectoriales. Tomando  $\zeta$  como los  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita,

$$\begin{aligned} \zeta &\longrightarrow \mathbb{N} \\ M &\longmapsto \dim(M) \end{aligned}$$

es una aplicación aditiva.

**Proposición 0.3.9.** Sea

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión corta y exacta de  $A$ -módulos. Son equivalentes:

- 1) Existe  $\tau : M \longrightarrow M'$  homomorfismo de  $A$ -módulos tal que  $\tau \circ f = 1_{M'}$
- 2) Existe  $\sigma : M'' \longrightarrow M$  homomorfismo de  $A$ -módulos tal que  $g \circ \sigma = 1_{M''}$
- 3)  $M \cong M' \oplus M''$  vía  $f$  y  $g$ , es decir, existe  $\Phi : M \longrightarrow M' \oplus M''$  isomorfismo de  $A$ -módulos tal que los diagramas son conmutativos.

En tal caso, se dice que la sucesión corta es escindida.

*Prueba.* (1  $\Rightarrow$  2) Dado  $m'' \in M''$ , por ser  $g$  sobreyectiva existe  $m \in M$  tal que  $g(m) = m''$ . Considero

$$m^* := m - f \circ \tau(m) \in M$$

y afirmo que  $m^*$  no depende de la elección hecha de  $m \in M$  de forma que  $g(m) = m''$ . Supongamos que existe otro  $m_1 \in M$  tal que  $g(m_1) = m''$ . Por ser así,

$$g(m - m_1) = g(m) - g(m_1) = 0_{M''}.$$

Como  $\text{Ker}(g) = \text{im}(f)$ , existe  $m' \in M'$  tal que  $f(m') = m - m_1$ . Dado que por hipótesis  $\tau \circ f = \text{id}_{M'}$ , tenemos

$$m - m_1 = f(m') = f \circ \tau(m - m_1) = f \circ \tau(m) - f \circ \tau(m_1)$$

y

$$m - f \circ \tau(m) = m_1 - f \circ \tau(m_1).$$

Vemos así que  $m^*$  no depende del  $m \in M$  escogido con tal de que se tenga  $g(m) = m''$ .

Por esto que acabamos de ver, la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma : M'' &\longrightarrow M \\ m'' &\longmapsto m^* = m - f \circ \tau(m) \end{aligned} ,$$

donde  $m$  verifica  $g(m) = m''$ , está bien definida. Además, para cada  $m'' \in M''$ ,

$$g \circ \sigma(m'') = g(\sigma(m'')) = g(m - f \circ \tau(m)) = g(m) = m'',$$

es decir,  $g \circ \sigma = \text{id}_{M''}$ .

Falta por comprobar que  $\sigma$  es homomorfismo de  $A$ -módulos. Sean  $\lambda, \mu \in A$  y  $m''_1, m''_2 \in M''$  arbitrarios. Usamos que  $f, g$  y  $\tau$  son homomorfismos de  $A$ -módulos. en primer lugar, es claro que, si  $m_1, m_2 \in M$  verifican  $g(m_i) = m''_i$ , entonces  $g(\lambda m_1) = \lambda m''_1$ ,  $g(\mu m_2) = \mu m''_2$  y  $g(\lambda m_1 + \mu m_2) = \lambda m''_1 + \mu m''_2$ . Teniendo esto en cuenta,

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda m''_1 + \mu m''_2) &= (\lambda m_1 + \mu m_2) - f \circ \tau(\lambda m_1 + \mu m_2) = \\ &= \lambda m_1 - f \circ \tau(\lambda m_1) + \mu m_2 - f \circ \tau(\mu m_2) = \sigma(\lambda m''_1) + \sigma(\mu m''_2) \end{aligned}$$

como queríamos.

(2  $\Rightarrow$  1) Partiendo ahora de la existencia de  $\sigma : M'' \longrightarrow M$  verificando  $g \circ \sigma = \text{id}_{M''}$ , buscamos definir  $\tau : M \longrightarrow M'$  cumpliendo  $\tau \circ f = \text{id}_M$ . Dado  $m \in M$ ,  $m - \sigma(g(m)) \in \text{Ker}(g) = \text{im}(f)$  y, como antes, existe  $m' \in M'$  tal que  $f(m') = m - \sigma(g(m))$  único por la inyectividad de  $f$ . Así, la aplicación

$$\begin{aligned} \tau : M &\longrightarrow M' \\ m &\longmapsto m' \end{aligned} ,$$

donde  $m'$  es el único elemento en  $M'$  tal que  $f(m') = m - \sigma(g(m))$ , está bien definida. Además, es claro que para cada  $m' \in M'$  se cumple  $\tau \circ f(m') = m'$ . La comprobación de que  $\tau$  es homomorfismo de  $A$ -módulos es análoga al caso anterior.

(2  $\Rightarrow$  3) En primer lugar, como se verifica 2) también tenemos 1); es decir, contamos con las aplicaciones  $\tau$  y  $\sigma$  verificando las condiciones del enunciado.

Definimos así  $\Phi : M' \oplus M'' \longrightarrow M$  como el único homomorfismo de  $A$ -módulos que hace  $\Phi \circ q_{M'} = f$  y  $\Phi \circ q_{M''} = \sigma$ .  $\Phi$  está bien definido por la propia construcción de la suma directa  $M' \oplus M''$ . Veamos que es sobreyectivo. Sea  $m \in M$  y tomemos

$m' := \tau(m - \sigma(g(m)))$  y  $m'' := g(m)$ . De nuevo,  $m - \sigma(g(m)) \in \text{Ker}(g) = \text{im}(f)$  y existe  $m^* \in M'$  tal que  $f(m^*) = m - \sigma(g(m))$ . Por esto,

$$\begin{aligned}\Phi(m', m'') &= \Phi((m', 0) + (0, m'')) = \Phi \circ q_{M'}(m') + \Phi \circ q_{M''}(m'') = \\ &= f(\tau(m - \sigma(g(m)))) + \sigma(g(m)) = f \circ \tau \circ f(m^*) + \sigma \circ g(m) = \\ &= f(m^*) + \sigma \circ g(m) = m - \sigma(g(m)) + \sigma(g(m)) = m.\end{aligned}$$

Veamos ahora que  $\Phi$  es inyectiva. Supongamos que  $\Phi(m', m'') = 0_M$ , es decir,  $f(m') + \sigma(m'') = 0_M$ . Aplicando  $g$  tenemos que  $m'' = g \circ \sigma(m'') = 0_{M''}$ . Por su parte, como  $f$  es inyectiva,  $f(m') = 0_{M'}$  implica  $m' = 0_{M'}$ .

Por último, si  $m \in M$ ,  $\Phi^{-1}(m) = (m', m'')$ , con  $m'' = g(m)$ . Así,  $p_{M''}^{-1} = g$ .

(3  $\Rightarrow$  2) Basta tomar  $\sigma := \Phi \circ q_{M''}$ . □

Denotemos por  $\text{CRing}$  a la categoría de anillos conmutativos unitarios. Dado  $A \in \text{Obj}(\text{CRing})$ , denotaremos a su vez por  $\text{Mod}_A$  a la categoría de  $A$ -módulos. Con abuso de notación y siempre que no lleve a confusión, si  $\in \text{Obj}(\text{Mod}_A)$ , escribiremos  $M \in \text{Mod}_A$ , e igual con el resto de categorías.

**Proposición 0.3.10.** 1) Sea

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \quad (2)$$

una sucesión de  $A$ -módulos y homomorfismos. Entonces (??) es exacta si, y sólo si, para todo  $M \in \text{Mod}_A$  la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N') \xrightarrow{\text{Hom}_A(M, f)} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(M, g)} \text{Hom}_A(M, N'') \quad (3)$$

es también una sucesión exacta.

2) Sea

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \quad (4)$$

una sucesión de  $A$ -módulos y homomorfismos. Entonces (??) es exacta si, y sólo si, para todo  $M \in \text{Mod}_A$  la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(g, N)} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(f, N)} \text{Hom}_A(M', N) \quad (5)$$

es también una sucesión exacta.

*Prueba.* Veamos ( $\Rightarrow$ ) en 1). Denotemos  $f_* := \text{Hom}_A(M, f)$  y  $g_* := \text{Hom}_A(M, g)$ . En primer lugar, por definición de  $f_*$  y dado  $\varphi \in \text{Hom}_A(M, N')$ , si  $f \circ \varphi \equiv 0_N$ ,

entonces para toda  $x \in M$  se tiene  $\varphi(x) = 0$  por la inyectividad de  $f$  (si existiera  $x \in M$  tal que  $\varphi(x) \neq 0_{N'}$ , entonces  $f(\varphi(x)) \neq 0_N$ ). Así, vemos que  $f_*$  es inyectiva.

Comprobemos ahora que  $\text{im}(f_*) = \text{Ker}(g_*)$ . En primer lugar, dado que  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$  y  $g \circ f = 0_{N''}$  resulta

$$g_* \circ f_* = 0_{\text{Hom}_A(M, N'')},$$

es decir,  $\text{im}(f_*) \subset \text{Ker}(g_*)$ . Ahora, dado  $\psi \in \text{Hom}_A(M, N)$  tal que  $g \circ \psi \equiv 0$ , se tiene que  $\text{im}(\psi) \subset \text{Ker}(g) = \text{im}(f)$ . Como  $f$  es un isomorfismo sobre su imagen, el homomorfismo de  $A$ -módulos

$$\varphi := f^{-1} \circ \psi : M \longrightarrow N'$$

está bien definido. Así, componiendo  $f$  por la izquierda tenemos la igualdad  $\psi = f \circ \varphi$ ; de forma equivalente,  $\psi \in \text{im}(f_*)$  como queríamos probar.

Probemos ahora ( $\Rightarrow$ ) en 2). Sea  $\psi \in \text{Hom}_A(M'', N)$  tal que  $\psi \circ \psi \equiv 0$ . Como  $g$  es suprayectiva, la suposición anterior implica que  $M'' = \text{im}(g) \subset \text{Ker} \psi$ ; es decir,  $\psi \equiv 0_{\text{Hom}_A(M'', N)}$  y  $g^*$  es inyectiva.

Veamos ahora que  $\text{im}(g^*) = \text{Ker}(f^*)$ . En primer lugar, si  $\psi \in \text{im}(g^*)$ , existe  $\varphi \in \text{Hom}_A(M'', N)$  tal que  $\psi = \varphi \circ g$ . Por ser esto así, se tiene

$$f^*(\psi) = \psi \circ f = (\varphi \circ g) \circ f = \varphi \circ (g \circ f) = \varphi \circ 0_{\text{Hom}_A(M', M'')} = 0_{\text{Hom}_A(M', N)},$$

es decir,  $\text{im}(g^*) \subset \text{Ker}(f^*)$ .

Ahora, sea  $\psi \in \text{Ker}(f^*)$ , i.e.,  $\psi \circ f \equiv 0_{\text{Hom}_A(M', N)}$ . Por un lado,  $\text{Ker}(g) = \text{im}(f) \subset \text{Ker}(\psi)$ . Por otro, como  $g$  es sobreyectiva, para todo  $x \in M''$  existe  $m_x \in M$  tal que  $g(m_x) = x$ . Podemos definir así la siguiente aplicación

$$\begin{array}{ccc} \varphi & M'' & \longrightarrow N \\ & x & \longmapsto \psi(m_x) \end{array}.$$

Veamos que está bien definida. Supongamos que existen  $m_x, m_x' \in M$  distintos de forma que  $g(m_x) = g(m_x') = x$ . Por darse  $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(\psi)$  y ser  $g$  homomorfismo de  $A$ -módulos,  $m_x - m_x' \in \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(\psi)$ , es decir,  $\psi(m_x) = \psi(m_x')$ . Tras comprobar que  $\varphi$  es un homomorfismo de  $A$ -módulos, tenemos que para cada  $x \in M$  se verifica

$$\varphi(g(x)) = \psi(x);$$

es decir,  $\psi = \varphi \circ g$ .

Ahora vamos a probar las implicaciones ( $\Leftarrow$ ) tanto en 1) como en 2). Comenzamos con la de 2). Para ver que  $g$  es suprayectiva, tomamos en primer lugar  $N :=$

$M''/\text{im}(g)$  en (??). Si consideramos la aplicación cociente  $c : M'' \longrightarrow N$ , se tiene que  $g^*(c) = c \circ g = 0_{\text{Hom}_A(M, N)}$ ; es decir, como  $g^*$  es inyectiva,  $c \equiv 0_{\text{Hom}_A(M'', N)}$  y  $M'' = \text{im}(g)$ .

Tomemos ahora  $N := M/\text{im}(f)$ . De nuevo, si consideramos la aplicación cociente  $c : M \longrightarrow N$ , se tiene que  $f^*(c) = c \circ f = 0_{\text{Hom}_A(M', N)}$  y  $c \in \text{Ker}(f^*)$ . Por esto último, existe  $\varphi \in \text{Hom}_A(M'', N)$  tal que  $c = \varphi \circ g$ . Si  $x \in M$  es tal que  $g(x) = 0$ , entonces  $c(x) = 0_N$  y  $x \in \text{im}(f)$ . Así,  $\text{Ker}(g) \subset \text{im}(f)$ . Para ver que  $\text{Ker}(g) \supset \text{im}(f)$  basta tomar  $N := M''$  y observar que

$$g^*(1_{M''}) = g \in \text{Ker}(f^*);$$

es decir,  $g \circ f = 0_{\text{Hom}_A(M', M'')}$  y se tiene lo que buscábamos.

Comprobemos por último la suficiencia en 1). Para ver que  $f$  es inyectiva, tomemos  $M := \text{Ker}(f)$  y la inclusión  $i : M \longrightarrow N'$ , que es inyectiva. Por esta elección, tenemos que

$$f_*(i) = f \circ i = 0_{\text{Hom}_A(M, N')}$$

y, como por hipótesis  $f_*$  es inyectiva,  $i \equiv 0_{\text{Hom}_A(M, N')}$ . Ahora, como  $i$  es inyectiva, se tiene que  $\text{Ker}(f) = \{0_{N'}\}$ , es decir,  $f$  es inyectiva.

Para ver  $\text{Ker}(g) = \text{im}(f)$ , veamos las dos inclusiones. En primer lugar, tomando  $M := N'$  y  $1_{N'} \in \text{Hom}_A(M, N')$ , se tiene que

$$f_*(1_{N'}) = f \in \text{im}(f_*) = \text{Ker}(g_*),$$

es decir,  $g \circ f = 0_{\text{Hom}_A(N', N'')}$  y  $\text{Ker}(g) \supset \text{im}(f)$ . Para el otro contenido, definamos de forma análoga al caso anterior  $M := \text{Ker}(g)$  y consideremos la inclusión  $i \in \text{Hom}_A(M, N)$ . Por esta elección tenemos que

$$g_*(i) = g \circ i = 0_{\text{Hom}_A(M, N'')},$$

es decir,  $i \in \text{Ker}(g_*) = \text{im}(f_*)$  y por lo tanto existe  $\varphi \in \text{Hom}_A(M, N')$  de forma que  $i = f \circ \varphi$ . Es por esto que, dado  $x \in M$  se verifica

$$x = i(x) = f(\varphi(x)) \in \text{im}(f).$$

Así,  $\text{Ker}(g) \subset \text{im}(f)$ . □

## 0.4 Módulos proyectivos y módulos inyectivos

Supongamos  $M \in \text{Mod}_A$  tal que, siempre que se tenga una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0,$$

$$\begin{array}{ccc} M \text{ [rrd, "}\varphi\text{"}] & \text{[rr, "h"]} & N \text{ [d, "g", two heads]} \\ & N' & \end{array}$$

se tuviera que la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N') \xrightarrow{\text{Hom}_A(M, f)} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(M, g)} \text{Hom}_A(M, N'') \longrightarrow 0$$

también es exacta. Por ??, esto es equivalente a que para cualesquiera  $N, N'' \in \text{Mod}_A$  y todo  $\varphi \in \text{Hom}_A(M, N'')$  existiría  $h \in \text{Hom}_A(M, N)$  tal que  $g \circ h = \varphi$ . Esta observación motiva la siguiente definición.

**Definición 0.4.1.** Sea  $M \in \text{Mod}_A$  tal que para toda  $g \in \text{Hom}_A(N, N')$  suprayectiva y toda  $\varphi \in \text{Hom}_A(M, N'')$  existe  $h \in \text{Hom}_A(M, N)$  verificando que completa el diagrama:  $g \circ \varphi = h$ . En estas condiciones, decimos que  $M$  es un  $A$ -módulo proyectivo.

**Observación 0.4.2.** Todo módulo libre es un módulo proyectivo. Sea  $A^{(I)}$  un  $A$ -módulo libre con sistema de generadores  $\{a_i\}_{i \in I}$ . Sean también  $g \in \text{Hom}_A(N, N')$  suprayectiva y  $\varphi \in \text{Hom}_A(A^{(I)}, N')$  arbitrarias. Por ser  $g$  sobreyectiva, para cada  $i \in I$  existe  $n_i \in N$  tal que  $g(n_i) = \varphi(a_i)$ . Es por esto que podemos definir

$$\begin{array}{ccc} h : A^{(I)} & \longrightarrow & N \\ a_i & \longmapsto & n_i \end{array}.$$

Por lo ya comentado,  $h$  está bien definido. Además, como  $\{a_i\}_{i \in I}$  es un sistema de generadores, para cada  $x \in A^{(I)}$  existe  $F_x \subset I$  finito tal que  $x = \sum_{i \in F_x} \lambda_i a_i$ , donde  $\lambda_i \in A$  para cada  $i \in F_x$ . Es por esto que tomando  $x \in A^{(I)}$  arbitrario se verifica

$$g(h(x)) = g\left(\sum_{i \in F_x} \lambda_i h(a_i)\right) = \sum_{i \in F_x} \lambda_i g(n_i) = \sum_{i \in F_x} \lambda_i \varphi(a_i) = \varphi\left(\sum_{i \in F_x} \lambda_i a_i\right) = \varphi(x).$$

Tenemos así que  $g \circ h = \varphi$ .

**Proposición 0.4.3.**  $M$  es un  $A$ -módulo proyectivo si, y sólo si,  $M$  es suma directa de un  $A$ -módulo libre.

*Prueba.* ( $\Rightarrow$ ) Sabemos que existe  $I \subset M$  tal que

$$\begin{array}{ccc} \pi : A^{(I)} & \longrightarrow & M \\ e_i & \longmapsto & m_i \end{array}$$

es un homomorfismo bien definido y suprayectivo (basta tomar al propio  $M$  como sistema de generadores). Surge así de manera natural la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker } \pi \xrightarrow{i} A^{(I)} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0.$$

Por hipótesis,  $M$  es  $A$ -módulo proyectivo, es decir, tomando  $\pi \in \text{Hom}_A(A^{(I)}, M)$  suprayectivo y  $1_M \in \text{Hom}_A(M, M)$ , existe  $h \in \text{Hom}_A(M, A^{(I)})$  tal que  $\pi \circ h = 1_M$ ; es decir, por ?? la sucesión anterior es escindida y  $A^{(I)} \cong \text{Ker } \pi \oplus M$ .  $\square$

Ahora, supongamos que  $N \in \text{Mod}_A$  es tal que, si la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$$

es exacta, entonces la sucesión

$$\text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(f, N)} \text{Hom}_A(M', N) \longrightarrow 0$$

también lo es; es decir, para cualquier  $\varphi \in \text{Hom}_A(M', N)$ , existe  $\Phi \in \text{Hom}_A(M, N)$  de forma que  $\varphi = \Phi \circ f$ . Por ser  $f$  inyectiva, podemos interpretar  $M'$  como un submódulo de  $M$  (entender  $f$  como una inclusión) y, por esto, nuestro problema se trata de un problema de extensión.

Esta extensión no va a ser posible en general como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 0.4.4.** Sea  $n \in \mathbb{Z}$  y consideremos  $\langle n \rangle \subset \mathbb{Z}$  submódulo. Si definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto 1_{\mathbb{Z}}, \\ \lambda n &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

se comprueba que no puede extenderse a  $\mathbb{Z}$ .

Surge la siguiente definición.

**Definición 0.4.5.** Diremos que  $N \in \text{Mod}_A$  es un  $A$ -módulo inyectivo si, para cualesquiera  $M, M' \in \text{Mod}_A$ ,  $f \in \text{Hom}_A(M', M)$  inyectiva y  $\varphi \in \text{Hom}_A(M', N)$ , se tiene que existe  $\Phi \in \text{Hom}_A(M, N)$  de forma que  $\varphi = \Phi \circ f$ .

## 0.5 Producto tensorial de módulos

La motivación de la construcción que vamos a desarrollar en esta sección es poder estudiar formas bilineales (multilineales) a través de formas lineales, cuyas



propiedades conocemos mejor. Para ello, vamos a construir una estructura relacionada con el producto cartesiano de módulos llamada *producto tensorial*. Antes de proseguir, recordamos definiciones.

**Definición 0.5.1.** Sean  $M, N$  y  $P$   $A$ -módulos. Una aplicación  $\Phi : M \times N \longrightarrow P$  se dice  $A$ -bilineal si se verifican las siguientes condiciones.

- 1) Para cada  $m_1, m_2 \in M, n \in N, \Phi(m_1 + m_2, n) = \Phi(m_1, n) + \Phi(m_2, n)$
- 2) Para cada  $m \in M, n_1, n_2 \in N, \Phi(m, n_1 + n_2) = \Phi(m, n_1) + \Phi(m, n_2)$
- 3) Para cada  $m \in M, n \in N, \lambda \in A, \Phi(\lambda m, n) = \Phi(m, \lambda n) = \lambda \Phi(m, n)$

**Observación 0.5.2.** Análogamente, podemos definir el concepto de aplicaciones multilineales de la siguiente forma. Dados  $M_1, \dots, M_r$   $A$ -módulos,

$$\Phi : M_1 \times \dots \times M_r \longrightarrow P$$

se dice multilineal si para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$

- $\Phi(m_1, \dots, m_i + m'_i, \dots, m_r) = \Phi(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r) + \Phi(m_1, \dots, m'_i, \dots, m_r)$
- $\Phi(m_1, \dots, \lambda m_i, \dots, m_r) = \lambda \Phi(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r)$

Con  $\lambda \in A$  y  $m_j \in M_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, r\}$

**Observación 0.5.3.** Si  $M, M'$  son  $A$ -módulos,  $g : M \rightarrow M'$  es suprayectiva, y  $N \subset \text{Ker } g$ , entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 m & & M & & \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow g & \\
 m + \text{Ker } g & & M / \text{Ker } g & \xrightarrow{\quad} & M' \\
 \uparrow & & \uparrow & \swarrow & \uparrow g(m) \\
 m + N & & M / N & & 
 \end{array}$$

(El diagrama incluye flechas de inclusión y curvas de conmutación en los triángulos internos.)

**Proposición 0.5.4.** Dados dos  $A$ -módulos  $M$  y  $N$ , existe un  $A$ -módulo  $M \otimes_A N$  y una aplicación  $A$ -bilineal  $\delta : M \times N \rightarrow M \otimes_A N$  tal que para cada  $A$ -módulo  $P$  y para cada  $F : M \times N \rightarrow P$   $A$ -bilineal, existe una única aplicación  $A$ -lineal  $f : M \otimes_A N \rightarrow P$  tal que  $f \circ \delta = F$ .

Además, el par  $(\delta, M \otimes_A N)$  es único, en el sentido que de existir otro par  $(\delta', T)$  que verifique las condiciones del enunciado, se tiene que  $T \cong M \otimes_A N$ .

*Prueba.* Para ver la unicidad, supongamos que  $(\delta, T)$  y  $(\delta', T')$  cumplen las condiciones de la proposición. Poniendo a  $T'$  como  $P$  y a  $\delta'$  como  $F$ , el resultado garantiza la existencia de  $j : T \rightarrow T'$  tal que  $\delta' = j \circ \delta$ . Intercambiando los roles de  $T$  y  $T'$ , se tiene  $j' : T' \rightarrow T$  tal que  $\delta = j' \circ \delta'$ . Entonces, cada una de las composiciones  $j \circ j'$  y  $j' \circ j$  son la identidad, lo cual garantiza que  $j$  sea un isomorfismo.

Para la existencia, procedemos como sigue. Consideremos  $A^{(M \times N)}$ , la suma directa de  $A$  tantas veces como elementos tenga  $M \times N$ . Definimos el siguiente subconjunto de  $A^{(M \times N)}$

$$S = \{e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)}, e_{(m,n+n')} - e_{(m,n)} - e_{(m,n')}, \\ e_{(m,\lambda n)} - \lambda e_{(m,n)}, e_{(\lambda m,n)} - \lambda e_{(m,n)}\} \quad (6)$$

con  $m, m' \in M$ ,  $n, n' \in N$  y  $\lambda \in A$ .

Ahora tomamos  $\Sigma$  el submódulo generado por  $S$ . Se cumple  $\Sigma \subset A^{(M \times N)}$ , luego podemos definir el cociente  $A^{(M \times N)}/\Sigma$ , que es un  $A$ -módulo:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\delta} & M \otimes_A N := A^{(M \times N)}/\Sigma \\ (m, n) & \mapsto & [e_{(m,n)}] \end{array}$$

La aplicación  $\delta$  es bilineal por construcción. Además,  $\{[e_{(m,n)}] : (m, n) \in M \times N\}$  es un sistema de generadores de  $M \otimes_A N$ .

Cada aplicación  $f : M \times N \rightarrow P$  se extiende por linealidad a un homomorfismo de  $A$ -módulos  $f : A^{(M \times N)} \rightarrow P$ , tomando  $f(e_{(m,n)}) = f(m, n)$ ,  $f(e_{(m,n)} + e_{(m',n)}) = f(m, n) + f(m', n')$ , y  $f(\lambda e_{(m,n)}) = \lambda f(m, n)$ . En particular, dada  $F : M \times N \rightarrow P$  es bilineal, definimos el homomorfismo de  $A$ -módulos

$$\begin{array}{ccc} f_0 : A^{M \times N} & \longrightarrow & P \\ e_{(m,n)} & \longmapsto & F(m, n) \end{array}$$

Para poder pasar al cociente solo hemos de comprobar que  $\Sigma \subset \ker(f_0)$ . Como  $\Sigma$  está generado por  $S$ , basta ver  $S \subset \ker(f_0)$ . Pero esto es directo por ser  $F$  bilineal y la definición de  $S$ . Por ejemplo,

$$f_0(e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)}) = F(e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)}) = 0$$

. Así, la siguiente aplicación está bien definida y cumple las condiciones del teorema

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f}_0 : A^{M \times N}/\Sigma & \longrightarrow & P \\ [e_{(m,n)}] & \longmapsto & F(m, n) \end{array}$$

□

**Definición 0.5.5.** Al  $A$ -módulo  $M \otimes N$  se le llama *producto tensorial* de  $M$  y  $N$ .

**Observación 0.5.6.** Observamos que la construcción es de lo más natural. Otra forma de escribir la construcción es pensar que hemos tomado todos los elementos del producto cartesiano de la forma  $(m + m', n) - (m, n) - (m', n), (m, n + n') - (m, n) - (m, n'), (m, \lambda n) - \lambda(m, n), \lambda(m, n) - \lambda(m, n)$ , es decir, hemos seleccionado unas relaciones que queremos que se cumplan (de bilinealidad). Al cocientar por el módulo que generan, estamos imponiendo que cada uno de esos elementos sea 0, que  $[(m + m', n)] = [(m, n)] + [(m', n)]$ , etc.

**Observación 0.5.7.** De ahora en adelante omitiremos el subíndice de  $\otimes_A$ , escribiendo  $M \otimes N$  siempre que no de lugar a confusión. Entonces

1. A las clases  $[e_{(m,n)}]$  se les denota  $m \otimes n$ .

Todo elemento de  $M \otimes N$  es suma  $\sum_{i=1}^r m_j \otimes n_j$ , para ciertos  $m_j \in M$ ,  $n_j \in N$  y  $r \in \mathbb{N}$ , ya que  $[\lambda e_{(m,n)}] = [e_{(\lambda m, n)}] = [e_{(m, \lambda n)}]$  por la definición inicial de  $S$ .

2. Las aplicaciones bilineales de  $M \times N$  en  $P$ ,  $\text{Bil}_A(M \times N, P)$  están en correspondencia biyectiva con  $\text{Hom}_A(M \otimes N, P)$ .

En particular, si tomamos  $A$  como  $K$  cuerpo y  $M$  y  $N$   $K$ -espacios vectoriales,

$$\text{Hom}_A(M \otimes_K N, K) = (M \otimes_K N)^* = \text{Bil}_K(M \times N, K)$$

3. La construcción del producto tensorial de módulos se puede generalizar. Dados unos  $A$ -módulos  $M_1, \dots, M_r$ , existe un  $A$ -módulo  $M_1 \otimes \dots \otimes M_r$  y  $\delta : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow M_1 \otimes \dots \otimes M_r$  multilineal tal que para cualquier aplicación  $A$ -multilineal  $\Phi : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow P$ , existe una única  $f : M_1 \otimes \dots \otimes M_r \rightarrow P$   $A$ -lineal tal que  $f \circ \delta = \Phi$ .

**Lema 0.5.8.** Sean  $Z$  y  $Z'$  dos  $A$ -módulos. Sea  $\{z_i\}_{i \in I}$  un sistema de generadores de  $Z$  y sea  $\{z'_j\}_{j \in J}$  un sistema de generadores de  $Z'$ . Entonces,  $\{z_i \otimes z'_j : (i, j) \in I \times J\}$  es un sistema de generadores de  $Z \otimes Z'$ .

**Proposición 0.5.9.** Sea  $A$  un anillo conmutativo unitario. Se cumple:

1. Dados  $M, N$  y  $P$   $A$ -módulos,

$$M \otimes N \otimes P \cong (M \otimes N) \otimes P$$

2.  $M \otimes N = N \otimes M$

3. Dados  $f : M_1 \rightarrow M_2$  y  $g : N_1 \rightarrow N_2$   $A$ -lineales, existe  $f \otimes g : M_1 \otimes N_1 \rightarrow M_2 \otimes N_2$   $A$ -lineal tal que si tenemos  $f' : M_2 \rightarrow M_3$  y  $g' : N_2 \rightarrow N_3$  homomorfismos de  $A$ -módulos,

$$M_1 \otimes N_1 \xrightarrow{f \otimes g} M_2 \otimes N_2 \xrightarrow{f' \otimes g'} M_3 \otimes N_3$$

se cumple

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$$

4. Si  $B$  es un  $A$ -álgebra,  $B \otimes M$  es un  $B$ -módulo
5. Si  $B$  y  $C$  son  $A$ -álgebras,  $B \otimes C$  es un  $A$ -álgebra, un  $B$ -módulo y un  $C$ -módulo
6. Para todo  $P$   $A$ -módulo, se verifica  $P \otimes_A A \cong P$  mediante el siguiente isomorfismo de  $A$ -módulos

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow P \otimes_A A \\ p &\longmapsto p \otimes_A 1_A \end{aligned}$$

7. Sean  $\{N_i\}_{i \in I}$  y  $M$   $A$ -módulos. Se cumple que

$$M \otimes_A \left( \bigoplus_{i \in I} N_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_A N_i).$$

En particular,

$$M \otimes_A A^{(I)} \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_A A) \cong M^{(I)}.$$

*Prueba.* Comprobamos cada cosa.

1. Definimos la aplicación  $A$ -trilineal

$$\begin{aligned} F : M \times N \times P &\longrightarrow (M \otimes N) \otimes P \\ (m, n, p) &\longmapsto (m \otimes n) \otimes p \end{aligned}$$

Existe una única  $f : M \otimes N \otimes P \rightarrow (M \otimes N) \otimes P$  tal que  $f(m \otimes n \otimes p) = F(m, n, p) = (m \otimes n) \otimes p$ ,

Veamos como definir la flecha en sentido contrario. Para cada  $p \in P$  definimos la aplicación  $A$ -bilineal

$$\begin{aligned} \Phi_p : M \times N &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\ (m, n) &\longmapsto m \otimes n \otimes p \end{aligned}$$

Existe una única  $\varphi_p : M \otimes N \rightarrow M \otimes N \otimes P$  tal que  $\varphi_p(m \otimes n) = \Phi_p(m, n) = m \otimes n \otimes p$

$$\begin{array}{ccc}
M \times N \times P & \xrightarrow{F} & (M \otimes N) \otimes P \\
\downarrow & \nearrow f & \\
M \otimes N \otimes P & & \\
\\ 
M \times N & \xrightarrow{\Phi_p} & M \otimes N \otimes P \\
\downarrow & \nearrow \varphi_p & \\
M \otimes N & & 
\end{array}$$

Observamos que si  $p, p' \in P$ , entonces  $\varphi_p + \varphi_{p'} = \varphi_{p+p'}$  por unicidad ya que ambas completan el diagrama:  $\varphi_p(m \otimes n) + \varphi_{p'}(m \otimes n) = m \otimes n \otimes p + m \otimes n \otimes p' = m \otimes n \otimes (p + p') = \varphi_{p+p'}(m \otimes n)$ . Lo mismo ocurre con  $\lambda\varphi_p = \varphi_{\lambda p}$ .

Sea entonces la aplicación  $A$ -bilineal

$$\begin{aligned}
G : (M \otimes N) \times P &\longrightarrow M \otimes N \otimes P \\
(z, p) &\longmapsto \varphi_p(z)
\end{aligned}$$

Existe una única  $g : (M \otimes N) \otimes P \rightarrow M \otimes N \otimes P$  aplicación  $A$ -lineal que hace conmutativo el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc}
(M \otimes N) \times P & \xrightarrow{G} & M \otimes N \otimes P \\
\downarrow & \nearrow g & \\
(M \otimes N) \otimes P & & 
\end{array}$$

Veamos entonces que la composición de ambas es la identidad. Para ello solo hace falta ver que deja los generadores de cada  $A$ -módulo invariantes. Efectivamente,

$$\begin{aligned}
M \otimes N \otimes P &\xrightarrow{f} (M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{g} M \otimes N \otimes P \\
m \otimes n \otimes p &\longmapsto (m \otimes n) \otimes p \longmapsto m \otimes n \otimes p
\end{aligned}$$

Por tanto,  $g \circ f = Id_{M \otimes N \otimes P}$

Por otro,  $\{m \otimes n : (m, n) \in M \times N\}$  es sistema de generadores de  $M \otimes N$ . Por el lema ??,  $\{(m \otimes n) \otimes p : (m, n, p) \in M \times N \times P\}$  es sistema de generadores de  $(M \otimes N) \otimes P$ . Evaluando,  $(f \circ g)((m \otimes n) \otimes p) = (m \otimes n) \otimes p$  y concluimos  $f \circ g = Id_{(M \otimes N) \otimes P}$ .

2. Siguiendo el esquema de 1, solo hay que definir las aplicaciones naturales  $M \times N \rightarrow N \otimes M$  que llevan  $(m, n) \mapsto n \otimes m$  y la análoga en la otra dirección, que pasan al producto tensorial, y cuya composición resulta en la identidad. Para comprobar esto último solo hay que verlo para los generadores que es trivial.

3. Definimos la aplicación  $A$ -bilineal  $M_1 \times N_1 \rightarrow M_2 \times N_2$  dada por  $(m_1, n_1) \mapsto f(m_1) \otimes g(n_1)$ . Entonces existe una única  $M_1 \otimes N_1 \rightarrow M_2 \otimes N_2$  lineal que completa el diagrama conmutativo habitual.

Lo mismo sucede con  $M_2 \times N_2 \rightarrow M_3 \times N_3$ , de forma que obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} M_1 \otimes N_1 & \xrightarrow{f_1 \otimes g_1} & M_2 \times N_2 & \xrightarrow{f_2 \otimes g_2} & M_3 \times N_3 \\ & & & \searrow & \nearrow \\ & & & (f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1) & \end{array}$$

Podemos definir la aplicación  $A$ -bilineal  $M_1 \times N_1 \rightarrow M_3 \otimes N_3$  dada por  $(m_1, n_1) \mapsto (f_2 \circ f_1)(m_1) \otimes (g_2 \circ g_1)(n_1)$ , y así existe una única aplicación  $M_1 \otimes N_1 \rightarrow M_3 \otimes N_3$  que cierra el diagrama conmutativo, y por unicidad ha de coincidir con la composición de arriba.

4. Queremos definir un producto externo. Empezamos definiendo para cada  $b \in B$  la aplicación  $A$ -lineal  $\Phi_b : B \times M \rightarrow B \otimes M$  dada por  $(b', m) \mapsto bb' \otimes m$ . Entonces existe una única aplicación lineal del producto tensorial que cierra el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B \times M & \xrightarrow{\Phi_p} & B \otimes M \\ \downarrow & \nearrow \varphi_p & \\ B \otimes M & & \end{array}$$

Se cumple que  $\varphi_{b_1+b_2} = \varphi_{b_1} + \varphi_{b_2}$  y que  $\varphi_{b_1 b_2} = \varphi_{b_1} \circ \varphi_{b_2}$  por la unicidad. De esta forma podemos definir la aplicación

$$\Phi : B \times (B \otimes M) \rightarrow B \otimes M \quad (7)$$

$$(b, z) \mapsto \varphi_b(z) \quad (8)$$

que está bien definida y con la cual  $B \otimes M$  cumple los axiomas de  $A$ -módulo.

7. Denotemos por  $n_i \in \oplus_{i \in I} N_i$  al elemento tal que tiene a  $n \in N_i$  por  $i$ -ésima coordenada y 0 en el resto. Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} F : M \times (\oplus_{i \in I} N_i) &\longrightarrow \oplus_{i \in I} (M \otimes_A N_i) \\ (m, n_i) &\longmapsto (m \otimes n)_i \end{aligned}.$$

Esta aplicación es bilineal por serlo para el sistema de generadores

$$\begin{aligned} F(\lambda m, n_i) &= (\lambda m \otimes n)_i = (m \otimes \lambda n)_i = F(m, \lambda n) \\ &= \lambda(m \otimes n)_i = \lambda F(m, n_i), \\ F(m_1 + m_2, n_i) &= ((m_1 + m_2) \otimes n)_i = \\ &= (m_1 \otimes n)_i + (m_2 \otimes n)_i = F(m_1, n_i) + F(m_2, n_i) \quad \text{y} \\ F(m, (n_1 + n_2)_i) &= (m \otimes (n_1 + n_2))_i = \\ &= (m \otimes n_1)_i + (m \otimes n_2)_i = F(m, n_{1i}) + F(m, n_{2i}). \end{aligned}$$

Es por esto que existe

$$f : M \otimes_A (\oplus_{i \in I} N_i) \longrightarrow \oplus_{i \in I} (M \otimes_A N_i)$$

aplicación  $A$ -lineal. En el otro sentido comenzamos definiendo para cada  $i \in I$  las aplicaciones

$$\begin{aligned} G_i : M \times N_i &\longmapsto M \otimes (\oplus_{i \in I} N_i) \\ (m, n) &\longmapsto m \otimes n_i \end{aligned},$$

que son  $A$ -bilineales de nuevo por la propia definición. Así, surgen las aplicaciones  $A$ -lineales

$$g_i : M \otimes N_i \longrightarrow M \otimes (\oplus_{i \in I} N_i),$$

que nos permiten definir a su vez la siguiente aplicación  $A$ -lineal

$$g := \oplus_{i \in I} g_i : \oplus (M \otimes_A N_i) \longrightarrow M \otimes_A (\oplus_{i \in I} N_i).$$

Se comprueba que  $g \circ f = 1_{M \otimes_A (\oplus N_i)}$  y  $f \circ g = 1_{\oplus (M \otimes_A N_i)}$  y se tiene el resultado.

Para ver el caso particular, basta aplicar lo que acabamos de probar y la propiedad 6 del producto tensorial.

□

En estas construcciones se tienen las siguientes propiedades.

- 1) Dados  $M_1, M_2$  y  $M_3$   $A$ -módulos,  $M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \cong (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \cong M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$
- 2)  $M \otimes N = N \otimes M$
- 3) Dados  $f : M'_1 \rightarrow M_1$  y  $g : M'_2 \rightarrow M_2$   $A$ -lineales, existe  $f \otimes g : M'_1 \otimes M'_2 \rightarrow M_1 \otimes M_2$   $A$ -lineal tal que el diagrama es conmutativo.

En particular, si  $M \in \text{Obj}(\text{Mod}_A)$ ,  $M \otimes \_$  es un funtor covariante de  $\text{Mod}_A$  en  $\text{Mod}_A$  (Véase Apéndice A)

Ahora, dado un  $A$ -módulo  $M$ , consideremos el funtor

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_A & \xrightarrow{M \otimes_A -} & \text{Mod}_A \\ N & \longmapsto & M \otimes_A N \end{array}$$

y estudiemos su comportamiento respecto de sucesiones exactas. Antes de comenzar, cabe destacar que estudiar este funtor es equivalente a estudiar el funtor  $\_ \otimes_A M$  debido al isomorfismo existente  $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$ .

**Proposición 0.5.10.** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo y sea*

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0 \quad (9)$$

*una sucesión exacta. Se cumple que*

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{1_M \otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{1_M \otimes g} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0 \quad (10)$$

*es también una sucesión exacta.*

*Prueba.* Sabemos que (??) es exacta si, y sólo si, para todo  $P$   $A$ -módulo se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M \oplus_A N'', P) \xrightarrow{(1_M \oplus g)^*} \text{Hom}_A(M \oplus_A N, P) \xrightarrow{(1_M \oplus f)^*} \text{Hom}_A(M \oplus_A N', P) \quad (11)$$

es exacta.

La sucesión

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, P)) &\xrightarrow{(g^*P)^*_M} \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, P)) \xrightarrow{(f^*P)^*_M} \\ &\xrightarrow{(f^*P)^*_M} \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, P)), \end{aligned}$$



donde  $(f^{*P})_{*M} := \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(f, P))$  y  $(g^{*P})_{*M} := \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(g, P))$ , surge de aplicar en primer lugar el funtor  $\text{Hom}_A(\_, P)$  a la sucesión ?? y, después, aplicar el funtor  $\text{Hom}_A(M, \_)$  al resultado anterior. Así, ?? nos dice que es exacta.

Observemos ahora que, para cada  $X \in \{N, N', N''\}$  se tiene la cadena de isomorfismos de  $A$ -módulos

$$\text{Hom}_A(M \otimes_A X, P) \cong \text{Bil}_A(M \times X, P) \cong \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(X, P)).$$

El primero de los isomorfismos es inmediato atendiendo a la propia definición del producto tensorial: Dada  $F \in \text{Bil}_A(M \times X, P)$ , existe una única  $\bar{F} \in \text{Hom}_A(M \otimes X, P)$  de forma que para cada par  $(m, x) \in M \times X$  se verifica  $\bar{F}(m \otimes_A x) = F(m, x)$ . Comprobemos el segundo de los isomorfismos. En primer lugar, definamos

$$\begin{aligned} \text{Bil}_A(M \times X, P) &\longrightarrow \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(X, P)) \\ F(m, n) &\longmapsto (\varphi_F(m))(n) := F(m, n) \end{aligned} \quad .$$

Dados  $F, G \in \text{Bil}_A(M \times X, P)$  y  $\lambda \in A$  tenemos

- $(F + G)(n, m) = F(m, n) + G(m, n)$  y
- $(\lambda F)(m, n) = \lambda F(m, n)$ .

Por otro lado, definamos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(X, P)) &\longrightarrow \text{Bil}_A(M \times X, P) \\ \varphi(m)(n) &\longmapsto F_\varphi(m, n) := \varphi(m)(n) \end{aligned} \quad .$$

Veamos que la aplicación es bilienal. Sean  $\varphi \in \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(X, P))$ ,  $\{m, m_1, m_2\} \subset M$ ,  $\{n, n_1, n_2\} \subset X$  y  $\lambda \in A$ . Tenemos

- $\varphi(m_1 + m_2)(n) = (\varphi(m_1) + \varphi(m_2))(n) = \varphi(m_1)(n) + \varphi(m_2)(n)$ ,
- $\varphi(m)(n_1 + n_2) = \varphi(m)(n_1) + \varphi(m)(n_2)$  y
- $\varphi(\lambda m)(n) = (\lambda \varphi)(m)(n) = \lambda \varphi(m)(n) = \varphi(m)(\lambda n)$ .

Vemos así que ambas aplicaciones son  $A$ -lineales. Por último, sean  $F \in \text{Bil}_A(M \times X, P)$  y  $\varphi \in \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(X, P))$  y veamos que la una es la inversa de la otra. Se tiene

- $\varphi_{F_\varphi}(m)(n) = F_\varphi(m, n) = \varphi(m)(n)$  y

- $F_{\varphi_F}(m, n) = \varphi_F(m)(n) = F(m, n)$ .

Denotemos  $\Phi_X : \text{Hom}_A(M \otimes_A X, P) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(X, P))$ , para cada  $X \in \{N, N', N''\}$ , a cada uno de los isomorfismos definidos. Estos isomorfismos implican que por ser  $(?)$  exacta  $(?)$  es también exacta. Para probar esto es suficiente ver que se tienen las igualdades

$$(1_M \otimes g)^* = \Phi_N^{-1} \circ (g^*)_* \circ \Phi_{N''}$$

y

$$(1_M \otimes f)^* = \Phi_N'^{-1} \circ (f^*)_* \circ \Phi_N.$$

Probemos la primera de las igualdades. Dado  $F \in \text{Hom}_A(M \oplus N'', P)$ ,  $\Phi_{N''}(F) := \varphi_F \in \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N'', P))$  y

$$(g^*)_*(\varphi_F(m)(n)) = g^*(\varphi_F(m))(n) = \varphi_F(m)(g(n))$$

para cada  $m \oplus n \in M \oplus_A N$ . Por último,

$$\Phi_N^{-1}(\varphi_F(m)(g(n))) = F(m \oplus g(n))$$

y

$$F(m \oplus g(n)) = F((1_M \oplus g)(m \oplus n)).$$

Dado que  $m \oplus n \in M \oplus_A N''$  era arbitrario, tenemos la igualdad que buscábamos. El caso de la  $f$  es análogo.  $\square$

**Definición 0.5.11.** Se dice que un  $A$ -módulo  $M$  es plano si, y sólo si, el funtor  $M \otimes_A \_$  es exacto, i.e, conserva sucesiones exactas.

Antes de continuar con la siguiente proposición, observemos lo siguiente: dados  $M, N$   $A$ -módulos y  $N' \subset N$  submódulo, un elemento  $m \otimes_A n' \in M \otimes_A N'$  puede considerarse como un elemento en  $M \otimes_A N'$  y como un elemento en  $M \otimes_A N$  haciendo uso de la inclusión

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{i} M \otimes_A N;$$

sin embargo, de la pertenencia  $m \otimes_A n' \in M \otimes_A N'$  no se sigue necesariamente la igualdad  $i(m \otimes_A n') = m \otimes_A n$ .

**Ejemplo 0.5.12.** Consideremos los  $\mathbb{Z}$ -módulos  $M := \mathbb{Z}$ ,  $N = N' := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  y  $M' := 2\mathbb{Z}$  (submódulo de  $\mathbb{Z}$ ). Tomemos  $x \in N \setminus \{0\}$ :

- por un lado,  $2 \otimes_{\mathbb{Z}} x = 1 \otimes_{\mathbb{Z}} 2x = 0_{M \otimes N}$ ,

- sin embargo, por otro lado el elemento  $2 \otimes_{\mathbb{Z}} x$  no es  $0_{M' \otimes N'}$ .

**Proposición 0.5.13.** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1.  $M$  es un  $A$ -módulo plano.
2. Para toda sucesión corta exacta

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0,$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{1 \otimes g} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

es exacta.

3. Para cualesquiera dos  $A$ -módulos  $N$  y  $N'$  y cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f}, N$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_A N$$

es exacta.

4. Para cualesquiera dos  $A$ -módulos  $N$  y  $N'$  finitamente generados y cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f}, N$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_A N$$

es exacta.

*Prueba.* En primer lugar,  $(1 \Leftrightarrow 2)$  basta con aplicar la definición de módulo plano para  $(1 \Rightarrow 2)$  y tener en cuenta que toda sucesión exacta larga se puede escindir en sucesiones exactas cortas para  $(2 \Rightarrow 1)$ . También son claras las implicaciones  $(2 \Rightarrow 3)$  y  $(3 \Rightarrow 4)$ . Probemos  $(3 \Rightarrow 2)$  y  $(4 \Rightarrow 3)$ .

$(3 \Rightarrow 2)$ . Sean  $M, N$  y  $N'$   $A$ -módulos y consideremos una sucesión exacta arbitraria

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0.$$

En primer lugar, aplicando (??) tenemos que  $\text{im}(1 \otimes f) = \text{Ker}(1 \otimes g)$  y que  $1 \otimes g$  es sobreyectiva. Por otro lado, del hecho de que la sucesión que hemos tomado sea exacta se desprende que, en concreto,

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N$$

es también exacta; así, por hipótesis tenemos que  $1 \otimes f$  es inyectiva.

Con todo, resulta que la sucesión

$$0 \longrightarrow M \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_A N \xrightarrow{1 \otimes g} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

es también exacta.

(4  $\Rightarrow$  3). Sean  $N, N'$   $A$ -módulos y  $f : N' \longrightarrow N$  una aplicación  $A$ -lineal e inyectiva. Tomemos  $z := \sum_{i=1}^r m_i \otimes_A n_i \in M \otimes_A N'$  tal que  $f(z) = 0_{M \otimes_A N}$ , esto ocurre si, y sólo si,  $\sum_{i=1}^r m_i \otimes_A f(n_i) = 0_{M \otimes_A N}$  o, lo que es lo mismo

$$e_{(m_1, f(n_1))} + \cdots + e_{(m_r, f(n_r))} \in \Sigma.$$

Esta pertenencia nos garantiza la existencia de ciertos  $\{\text{rel}_1, \dots, \text{rel}_s\} \subset \Sigma$  tales que

$$e_{(m_1, f(n_1))} + \cdots + e_{(m_r, f(n_r))} = \sum_{i=1}^s \lambda_i \text{rel}_i \quad \lambda_i \in A \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}$$

Definamos ahora los menores submódulos de  $N$  y de  $N'$  que contengan a los conjuntos  $\{\text{rel}_1, \dots, \text{rel}_s, f(n_1), \dots, f(n_r)\}$  y  $\{n_1, \dots, n_r\}$  respectivamente. Denotemos al primero por  $N_{\text{red}}$  y al segundo,  $N_{\text{red}}'$ .

Es claro que  $f|_{N_{\text{red}}'} : N_{\text{red}}' \longrightarrow N_{\text{red}}$  está bien definida y es inyectiva. Así, por la hipótesis, se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow M \otimes_A N_{\text{red}}' \xrightarrow{1 \otimes f|_{N_{\text{red}}'}} M \otimes_A N_{\text{red}}$$

es exacta. Así, denotando por  $z_{\text{red}}$  al elemento  $z$  visto en  $M \otimes_A N_{\text{red}}'$ , se tiene que  $f(z_{\text{red}}) = 0_{M \otimes_A N_{\text{red}}}$ , es decir,  $z_{\text{red}} = 0_{M \otimes_A N_{\text{red}}'}$ . Si ahora consideramos el homomorfismo inclusión

$$M \otimes_A N_{\text{red}}' \xhookrightarrow{i} M \otimes_A N',$$

en este caso, por ser homomorfismo sí se puede concluir que  $i(z_{\text{red}}) = z = 0_{M \otimes_A N'}$ .  $\square$

**Observación 0.5.14.** 1) Sean  $M$  y  $N$  dos  $A$ -módulos. El mismo argumento empleado en la implicación (4  $\Rightarrow$  3) de la prueba anterior prueba que, tras la adaptación necesaria, si  $\sum_{i=1}^r m_i \otimes_A n_i = 0_{M \otimes_A N}$ , existen  $M' \subset M$  y  $N' \subset N$  submódulos

finitamente generados que contienen a los conjuntos  $\{m_i\}$  y  $\{n_i\}$  respectivamente, tales que  $\sum_{i=1}^r m_i \otimes_A n_i = 0_{M' \otimes_A N'}$ . De nuevo, hay que destacar que no necesariamente se tiene  $M' \otimes_A N' \subset M \otimes_A N$ .

**Ejemplo 0.5.15.** Denotemos respectivamente por  $M_0$  y  $N_0$  a los submódulos  $M'$  y  $N'$  de la observación anterior y mantengamos la notación de ??.

Es claro que  $M_0 \supset M'$  y  $N_0 \supset N'$  pues si  $z = 0_{M_0 \otimes N_0}$  y  $M_0 \subset M'$  y  $N_0 \subset N'$  también debe ser  $0_{M' \otimes N'}$ . En primer lugar, si  $x \neq 0_N$ , el menor submódulo generado por  $x$  es el propio  $N$ . Así,  $N_0 = N = N'$ . Supongamos ahora  $M_0$  generado por los elementos  $\{m_1, \dots, m_r\}$ . La inclusión antes mencionada implica  $m_i | 2$  para toda  $i \in \{1, \dots, r\}$ , es decir,  $m_i = 1$  o  $m_i = 2$ . Por esto, existe  $i \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $m_i = 1$  y  $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \subset M_0$ .

Así, los únicos submódulos  $M_0$  y  $N_0$  que verifican las condiciones del consecuente de la observación anterior son  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Teorema 0.5.16.** Sea  $M$  un  $A$ -módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1.  $M$  es un  $A$ -módulo plano.

2. Para cualesquiera  $N'$  y  $N$   $A$ -módulos y  $f : N' \rightarrow N$  inyectiva,

$$1_M \otimes f : M \otimes N' \rightarrow M \otimes N$$

es inyectiva.

2'. Para cualesquiera  $N'$  y  $N$   $A$ -módulos finitamente generados y  $f : N' \rightarrow N$  inyectiva,

$$1_M \otimes f : M \otimes N' \rightarrow M \otimes N$$

es inyectiva.

3. Si

$$\sum_{i=1}^n a_i m_i = 0_A$$

para ciertos  $a_i \in A$  y  $m_i \in N$ , entonces existen  $m_j' \in M$  de forma que para cada  $i$  se tiene

$$m_i = \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} m_j', \quad \lambda_{ij} \in A$$

y para cada  $j$  se verifica

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} a_i = 0.$$

4. Si  $\mathfrak{a} \in A$  es un ideal, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \otimes_A M &\longrightarrow M \quad \text{entendido como } A \otimes_A M \\ \sum_{i \in F} a_i \otimes_A m_i &\longmapsto \sum_{i \in F} a_i m_i \end{aligned}$$

es inyectiva.

**Observación 0.5.17.** 1. Sean  $A$  un anillo conmutativo y unitario,  $I$  un conjunto de índices,  $N$  y  $N'$   $A$ -módulos y  $f : N' \longrightarrow N$  una aplicación  $A$ -lineal inyectiva. Se verifica que la aplicación

$$1_{A^{(I)}} \otimes_A f : A^{(I)} \otimes N \longrightarrow A^{(I)} \otimes N$$

es también inyectiva.

Dado que  $A^{(I)} \otimes_A N \cong \oplus_{i \in I} N$  y  $A^{(I)} \otimes_A N' \cong \oplus_{i \in I} N'$ , basta comprobar que la aplicación

$$\oplus_{i \in I} f : \oplus_{i \in I} N' \longrightarrow \oplus_{i \in I} N$$

es inyectiva.

2. Si  $B$  es plano y  $\mathfrak{a} \subset A$  un ideal, entonces la cuarta afirmación del teorema anterior nos da el isomorfismo de  $A$ -módulos

$$\mathfrak{a}^e \cong \mathfrak{a} \otimes_A B.$$

**Lema 0.5.18.** Sean  $M$  y  $N$   $A$ -módulos, donde  $N := \langle n_1, \dots, n_r \rangle_A$ . Si se tiene una relación en  $M \otimes_A N$  de forma que

$$\sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i = 0_{M \otimes_A N},$$

entonces existen elementos  $m_j' \in M$  y  $\mu_{ij} \in A$ , para  $j \in \{1, \dots, s\}$  y  $s \in \mathbb{N}$ , de forma que

$$m_i = \sum_{j=1}^s \mu_{ij} m_j' \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (12)$$

y

$$\sum_{i \in F} \mu_{ij} n_i = 0_N \quad \forall j \in \{1, \dots, s\}. \quad (13)$$

*Prueba.* Probemos primero un caso base: consideremos  $N$  como  $A$ -módulo libre generado por el conjunto  $\{n_1, \dots, n_r\}$ ; es decir, existe un isomorfismo de  $A$ -módulos

$$\begin{aligned} \sigma : N &\longrightarrow A^{(r)} \\ n_i &\longmapsto e_i \end{aligned}.$$

Así, tenemos la cadena de isomorfismos de  $A$ -módulos

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes N & \xrightarrow{1 \otimes \sigma} & M \otimes A^{(r)} & \longrightarrow & M^{(r)} \\ (m \otimes n_i) & \longmapsto & (m \otimes e_i) & \longmapsto & (m)_i \end{array}$$

y se desprende que

$$\sum_{i=1}^r m_i n_i = 0_{M \otimes N} \Leftrightarrow (m_1, \dots, m_r) = 0_{M^{(r)}} \Leftrightarrow m_i = 0_M \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

Tras esto, basta tomar  $s = r$  y definir  $m_j' := m_j$ ,  $\mu_{ij} := 0_A$  para  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ .

Ahora, de forma más general, sea

$$0 \longrightarrow K := \text{Ker}(f) \hookrightarrow A^{(r)} \xrightarrow{F} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta, donde  $F$  verifica  $F(e_i) = n_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Sabemos que la sucesión

$$M \otimes_A K \xrightarrow{h:=1_M \otimes i} M \otimes_A A^{(r)} \xrightarrow{f:=1_M \otimes F} M \otimes N \longrightarrow 0$$

es exacta.

De esta forma, si un elemento  $z := \sum m_i \otimes e_i$  verifica  $f(z) = 0_{M \otimes_A N}$ , entonces existe  $w := \sum_{j=1}^s m_j' \otimes k_j \in M \otimes_A K$  de forma que  $h(w) = z$ ; esto supone

$$\sum_{j=1}^s m_j' \otimes k_j - \sum_{i=1}^r m_i \otimes e_i = 0_{M \otimes_A A^{(r)}}.$$

Además, para cada  $j \in \{1, \dots, s\}$  existen  $\mu_{ij} \in A$  tales que

$$k_j = \sum \mu_{ij} e_i.$$

Resulta así lo siguiente. Por un lado se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s m_j' \otimes k_j - \sum_{i=1}^r m_i \otimes e_i &= \sum_{j=1}^s m_j' \otimes \sum_{i=1}^r \mu_{ij} e_i - \sum_{i=1}^r m_i \otimes e_i = \\ &= \sum_{i=1}^r \left( \sum_{j=1}^s \mu_{ij} m_j' \right) \otimes e_i - \sum_{i=1}^r m_i \otimes e_i = \\ &= \sum_{i=1}^r \left( \sum_{j=1}^s \mu_{ij} m_j' - m_i \right) \otimes e_i = 0_{M \otimes_A A^{(r)}}, \end{aligned}$$

de donde se desprenden las igualdades

$$m_i = \sum_{j=1}^s \mu_{ij} m_j' \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}. \quad (14)$$

Por otro lado, como para cada  $j \in \{1, \dots, s\}$  se tiene  $k_j \in K$ , resulta

$$0_N = f(k_j) = \sum_{i=1}^r \mu_{ij} f(e_i) = \sum_{i=1}^r \mu_{ij} n_i \quad \forall j \in \{1, \dots, s\}. \quad (15)$$

□