Definición 0.0.1. Sea A un anillo, se llama A-módulo a cualquier grupo abeliano $(M, +)$ sobre el que A actúa linealmente, es decir, un grupo M con junto con una operación externa $A \times M \to M$ que cumple que para todo $m, n \in M, a, b \in A$:

1. $a(m+n) = am + an$
2. $(a+b)m = am + bm$
3. $(ab)m = a(bm)$
4. $1_A m = m$.

Ejemplo 0.0.2.
1. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial es un $\mathbb{K}$-módulo..
2. Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ un endomorfismo, entonces V es un $\mathbb{K}[x]$-módulo via la aplicación

$$\begin{aligned} &\mathbb{K}[x] \times V \to V \\ &(p(x), v) \mapsto p(f) = a_n f^{(n)} + \cdots + a_1 f + a_0 \end{aligned}$$

siendo $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $f^(k) = f \circ \overset{k)}{\cdots} \circ f$.

3. Toda A-álgebra B de un anillo A es un A-módulo. B es un anillo luego $(B, +)$ es un grupo abeliano. Por ser A-álgebra, existe un homomorfismo $\varphi : A \to B$, y entonces podemos definir la operación externa de la definición 0.0.1 como $A \times B \to B$ que hace corresponder $(a, b) \mapsto \varphi(a)b$.

Observación 0.0.3. Atendiendo al último ejemplo resulta que dados dos anillos A, B, dar a B estructura de A-álgebra es equivalente a darle estructura de A-módulo junto con la propiedad adicional de que

$$\forall b, b' \in B,\ \forall a \in A \quad a \cdot_{\text{ext}} (bb') = (a \cdot_{\text{ext}} b)b'$$

Definición 0.0.4. . Dado un anillo A y un A-módulo M, diremos que $S \subset M$ es un *submódulo de* M si es un subgrupo de M cerrado para la multiplicación por elementos de A.

Observación 0.0.5. Si A es un anillo, $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal, y M un A-módulo entonces el conjunto

$$\mathfrak{a}M := \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i m_i \mid r \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathfrak{a},\ m_i \in \mathbb{N} \right\}$$

es un submódulo de M.

Definición 0.0.6. . Sean $(A,+,\cdot)$ anillo, M y N A-módulos. Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ se dice que es un homomorfismo de A-módulos o, simplemente, que es una aplicación A-lineal si verifica

i) $\forall\ m_1, m_2 \in M \quad f(m_1+m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ y

ii) $\forall\ \lambda \in A,\ \forall\ m \in M \quad f(\lambda m) = \lambda f(m)$.

Observación 0.0.7. 1. En un A-módulo M se tiene que

$$\begin{array}{ll} \forall\ m \in M & 0_A m = 0_M \\ \forall\ \lambda \in A & \lambda 0_M = 0_M. \end{array}$$

Para ver lo primero basta observar que para todo $m \in M$ se tiene que $0_A m + m = (0_A + 1_A)m = 1_A m = m$, es decir, $0_A m = 0_M$. De aquí se desprende también que

$$(-1_A)(1_M) = -1_M = (1_A)(-1_M)$$

puesto que $0_M = 0_A 1_M = (1_A - 1_A)1_M = 1_A 1_M + (-1_A)(1_M) = 1_M + (-1_A)(1_M)$. También se desprende que, para $\lambda \in A$ y $m \in M$ fijados (arbitrarios), $\lambda 0_M = \lambda(0_A m) = (\lambda 0_A)m = 0_A m = 0_M$; esto es, la segunda propiedad.

2. Dado un homomorfismo de A-módulos, $f : M \longrightarrow N$, se tiene que $\ker(f) := \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$ es un submódulo de M y que $\operatorname{im}(f) := \{y \in N \mid \exists\ x \in M$ tal que $f(x) = y\}$ es un submódulo de N.

0.1 Construcciones con A-módulos

0.1.1 Módulos cociente

Dados $(A,+,\cdot)$ un anillo, M un A-módulo y $N \subset M$ un submódulo. Denotemos para cada $m \in M$ como $[m]_N$ a la clase de m en M/N. Tras esta consideración, se tiene que M/N junto a la aplicación

$$\begin{array}{rcl} M/N \times M/N & \longrightarrow & M/N \\ ([m_1]_N, [m_2]_N) & \longmapsto & [m_1 + m_2]_N. \end{array}$$

tiene estructura de grupo abeliano. Esto es así puesto que $(M,+)$ es un grupo abeliano y, por lo tanto, todo subgrupo suyo también lo es; es decir, todo subgrupo suyo será normal y el cociente será de nuevo abeliano.

Definición 0.1.1. . Sean $(A, +, \cdot)$ un anillo, M un A-módulo y $N \subseteq M$ un submódulo. Definiendo la aplicación

$$\begin{array}{rcl} A \times M/N & \longrightarrow & M/N \\ (\lambda, [m]) & \longmapsto & \lambda[m]_N := [\lambda m]_N \end{array}$$

dotamos a M/N de estructura de A-módulo y lo denominamos *módulo cociente.*

Observación 0.1.2. La aplicación natural

$$\begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & M/N \\ m & \longmapsto & [m]_N \end{array}$$

es un homomorfismo de A-módulos.

0.1.2 Anuladores

Definición 0.1.3. Dados A un anillo y M un A-módulo, definimos el anulador de A en M como

$$Anul_A M = \{\lambda \in A \mid \lambda \cdot m = 0, \forall m \in M\}$$

Observación 0.1.4. *i)*

1. $Anul_A M$ es un ideal de A.

   (a) Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in Anul_A M$, para cada $m \in M$, $\lambda_1 \cdot m = \lambda_2 \cdot m = 0$. Restando, se obtiene $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot m = 0 \to \lambda_1 - \lambda_2 \in Anul_A M$

   (b) Dado $\lambda \in Anul_A M$, para cada $\alpha \in A$ y para cada $m \in M$ se tiene $(\alpha \cdot \lambda) \cdot m = \alpha \cdot (\lambda \cdot m) = \alpha \cdot 0 = 0$, luego $\alpha \cdot \lambda \in Anul_A M$

   Por tanto, $A/Anul_A M$ tiene estructura de anillo. Además, podemos ver a M como un $A/Anul_A M$-módulo mediante la aplicación

$$\begin{array}{rcl} A/_{Anul_A M} \times M & \longrightarrow & M \\ (\lambda + Anul_A M) \cdot m & \longmapsto & \lambda \cdot m \end{array}$$

2. Dado un ideal $\mathfrak{a} \subset Anul_A M$, M es un $A/\mathfrak{a}$-módulo. Los submódulos de M como $A/\mathfrak{a}$-módulo son los submódulos de M como A-módulo.

0.1.3 Aplicaciones A-lineales

Definición 0.1.5. . Dados M y N dos A-módulos, definimos *el conjunto de aplicaciones A-lineales entre M y N*

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) := \{f : M \longrightarrow N \mid f \text{ es aplicación } A\text{-lineal}\}$$

Proposición 0.1.6. *Dados M y N dos A-módulos, $Hom_A(M,N)$ tiene estructura de A-módulo.*

Prueba. En primer lugar, definamos para cada $\lambda \in A$ y cada $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \lambda f : & M & \longrightarrow & N \\ & m & \longmapsto & \lambda(f(m)) \end{array}$$

y veamos de nuevo que $\lambda f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, de forma que

$$\begin{array}{rcl} A \times \mathrm{Hom}_A(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,N) \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda f \end{array}$$

esté bien definida. Sean $m, m_1, m_2 \in M$ y $\mu \in A$:

$$\begin{aligned} (\lambda f)(m_1 + m_2) &= \lambda(f(m_1 + m_2)) = \\ &= \lambda(f(m_1) + f(m_2)) = \\ &= \lambda(f(m_1)) + \lambda(f(m_2)) = (\lambda f)(m_1) + (\lambda f)(m_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda f)(\mu m) &= \lambda(f(\mu m)) = \lambda(\mu(f(m))) = (\lambda\mu)(f(m)) = \\ &= (\mu\lambda)(f(m)) = \mu(\lambda(f(m))) = (\mu(\lambda f))(m). \end{aligned}$$

Ahora, dadas $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ definamos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f + g : & M & \longrightarrow & N \\ & m & \longmapsto & f(m) + g(m) \end{array}$$

Veamos que $f + g \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$. Dados $m, m_1, m_2 \in M$ y $\lambda \in A$ arbitrarios, tenemos efectivamente

$$\begin{aligned} (f+g)(m_1 + m_2) &= f(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) = \\ &= f(m_1) + f(m_2) + g(m_1) + g(m_2) = (f+g)(m_1) + (f+g)(m_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f+g)(\lambda m) &= f(\lambda m) + g(\lambda m) = \lambda f(m) + \lambda g(m) = \\ &= \lambda(f(m) + g(m)) = \lambda((f+g)(m)) = (\lambda(f+g))(m). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{array}{rrcl} + : & \mathrm{Hom}_A(M,N) \times \mathrm{Hom}_A(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,N) \\ & (f,g) & \longmapsto & f+g, \end{array}$$

está bien definida y dota a $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ de estructura de grupo abeliano.

Comprobemos por último que el producto exterior cumple los cuatro axiomas de la definición de A-módulo. Sean $m \in M,\ f,g \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ y $\lambda, \mu \in A$ arbitrarios:

i) $(\lambda(f+g))(m) = \lambda((f+g)(m)) = \lambda(f(m)+g(m)) = \lambda(f(m)) + \lambda(g(m)) = (\lambda f)(m) + (\lambda g)(m) = (\lambda f + \lambda g)(m)$,

ii) $((\lambda+\mu)f)(m) = (\lambda+\mu)(f(m)) = \lambda(f(m))+\mu(f(m)) = (\lambda f)(m)+(\mu f)(m) = (\lambda f + \mu f)(m)$,

iii) $((\lambda\mu)f)(m) = (\lambda\mu)(f(m)) = \lambda(\mu(f(m)) = \lambda((\mu f)(m)) = (\lambda(\mu f))(m)$ y

iv) $(1_A f)(m) = 1_A(f(m)) = f(m)$.

□

0.1.4 Pullbacks

Dados M_1, M_2 y N A-módulos y dada $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$, podemos definir

$$\begin{array}{rrcl} \varphi^* : & Hom_A(M_2,N) & \longrightarrow & Hom_A(M_1,N) \\ & g & \longmapsto & g \circ \varphi \end{array}$$

que resulta ser un homomorfismo de A-módulos y se denota $\varphi^* = Hom_A(\varphi\_\_)$.

Análogamente, dados M, N_1 y N_2 A-módulos y dada $\psi \in \mathrm{Hom}_A(N_1, N_2)$,

$$\begin{array}{rrcl} \psi^* : & Hom_A(M,N_1) & \longrightarrow & Hom_A(M,N_2) \\ & g & \longmapsto & \psi \circ g \end{array}$$

es un homomorfismo de A-módulos.

Nótese que si tenemos M_1, M_2 y M_3 A-módulos y $\varphi \in Hom_A(M_1, M_2)$ y $\psi \in Hom_A(M_2, M_3)$, entonces $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$

0.1.5 Suma directa

Definición 0.1.7. . Sean $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo unitario y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de A-módulos. Definimos el conjunto

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{ (m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid m_i = 0_{M_i}, \forall\ i \in I \setminus F,\ F \subseteq I \text{ finito} \right\}$$

y lo llamamos *suma directa* de los A-módulos $\{M_i\}_{i\in I}$.

Proposición 0.1.8. *Sean A un anillo y una familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de A-módulos. Entonces $\bigoplus_{i\in I} M_i$ con la suma por coordenadas y el producto por escalares por coordenadas es un A-módulo.*

Observación 0.1.9.

1. Para cada $j \in I$, tenemos definida $p_j : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M_j$, la proyección a cada M_j. No es más que la restricción a $\bigoplus_{i\in I} M_i$ de la proyección Π_j definida sobre el producto cartesiano $\Pi_{i\in I} M_i$. p_j es un homomorfismo de A-módulos.

2. Para cada $j \in I$, la inclusión $q_j : M_j \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ es homomorfismo de anillos.

i)

ii)

iii) Para cada $x = (x_i) \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, existe un número finito de índices $i_1, ..., i_r$ tal que $x_{i_r} \neq 0$. Entonces, expresamos $x = \sum_{i \in i_{i_1}, \ldots i_{i_r}} q_i(x_i)$.

Notación. Dado A un anillo, I un conjunto no vacío, denotamos $A^{(I)} = \bigoplus_{i\in i} A_i$, donde para cada $i \in I$, $A_i = A$. $A^{(I)}$ es un submódulo de $A^I = \prod_{i\in I} A_i$, con $A_i = A$ para cada $i \in I$.

0.2 A-módulos libres

Definición 0.2.1. . Dado un homomorfismo de A-módulos, $f : M \to N$, se dice que es un isomorfismo de A-módulos si existe $g : N \to M$ homomorfismo de A-módulos tal que $g \circ f = Id_M$ y $f \circ g = Id_N$, es decir, una inversa de f.

Observación 0.2.2. $f : M \longrightarrow N$ es isomorfismo de A-módulos si, y sólo si, es inyectivo y sobreyectivo. Esto significa que es suficiente que f sea biyectivo como A-aplicación.

Lema 0.2.3. *Sean $M_i : i \in I$ un conjunto de A-módulos y sea N otro A-módulo. Un homomorfismo $\Phi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ viene unívocamente determinado por los homomorfismos $\Phi \circ q_i : M_i \to N$. Análogamente, los homomorfismos $\Phi : N \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ vienen unívocamente determinados por los homomorfismos $p_i \circ \Phi : N \to M_i$.*

Prueba. Sea $\Phi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ un homomorfismo de A-módulos. Para cada $i \in I$, $\Phi \circ q_i$ es una composición de homomorfismos, luego es un homomorfismo de anillos.

Recíprocamente, dados $\Phi_i : M_i \to N$ homomorfismo de A-módulos, para cada $i \in I$, definimos $\Phi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ de la siguiente forma:

Para cada $\omega \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, existen unos únicos $i_1, ..., i_r$, todos ellos distintos, tales que $\omega = q_{i_1}(\omega_{i_1}) + \cdots q_{i_r}(\omega_{i_r})$. Entonces, ponemos $\Phi(\omega) = \Phi_{i_1}(\omega_{i_1}) + ... + \Phi_{i_r}(\omega_{i_r})$. En el caso en el que ω sea 0, ponemos $\Phi(\omega) = 0$. Φ es un homomorfismo de anillos que cumple $\Phi \circ q_i = \Phi_i$, para cada $i \in I$. $\square$

Notación. Denotamos al Φ de la demostración anterior como $\bigoplus_{i\in I} \Phi_i$

Definición 0.2.4. Se dice que M es un *A-módulo libre* si $M \cong A^{(I)}$ para cierto conjunto I.

Proposición 0.2.5. *M es un A-módulo libre si y solo si existe $B := \{m_i\}_{i\in I} \subseteq M$ tal que para cada $x \in M$ existe $F \subseteq I$ cumpliendo que x se puede expresar de forma única como*

$$x = \sum_{\substack{j\in F \\ \lambda_j \in A}} \lambda_j m_j$$

. Si dos subconjuntos B y B' cumplen lo anterior, entonces tienen el mismo cardinal.

Prueba. ($2 \Rightarrow 1$) Supongamos que existe $\phi : A^{(I)} \to M$ un isomorfismo de A-módulos, para cierto conjunto de índices I. Sea, para cada $i \in I$, $m_i := \phi(e_i)$, donde $e_i = (\delta_{ij})_j \in A^{(I)}$. El conjunto $\{ m_i, i \in I \}$ es el que buscamos.

Para cada $m \in M$, por ser ϕ sobreyectiva, existe un $\underline{x} \in A^{(I)}$ tal que $\phi(\underline{x}) = m$. A su vez, existen $i_1, ..., i_r \in I$ tales que $\underline{x} = q_{i_1}(x_{i_1}) + ... + q_{i_r}(x_{i_r}) = x_{i_1} q_{i_1}(1_A) + ... + x_{i_r} q_{i_r}(1_A)$. Por tanto, $\phi(\underline{x}) = x_{i_1}\phi(e_{i_1}) + ... + x_{i_r}\phi(e_{i_r}) = x_{i_1} m_{i_1} + ... + x_{i_1} m_{i_r} = m$. Hemos escrito m como una combinación lineal de elementos $m_i : i \in I$

La unicidad es clara porque estamos usando un isomorfismo, pero podemos detallarlo. Si un elemento tiene dos representaciones en los m_i, al restarlas obtengo una combinación lineal nula de un conjunto de los m_i, basta entonces comprobar que, si una combinación lineal de cualquier subconjunto de los m_i es nula, sus coeficientes son nulos también:

$$\begin{aligned}0_M = \lambda_{i_1} m_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_r} m_{i_r} = \Phi(\lambda_{i_1} e_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_r} e_{i_r})& \\ \Longleftrightarrow \lambda_{i_1} e_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_r} e_{i_r} = 0_{A^{(I)}} \Longleftrightarrow \lambda_{i_j} = 0_A &\quad (1)\end{aligned}$$

$\forall\ j \in \{1, \ldots, r\}$, lo que concluye la prueba.

$(1 \Rightarrow 2)$ En primer lugar, para cada $i \in I$ definimos las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc}\varphi_i : & A & \longrightarrow & M \\ & 1_A & \longmapsto & m_i.\end{array}$$

Para cada $i \in I$ y cada $\lambda \in A$ se verifica $\varphi_i(\lambda) = \lambda m_i$. De esta forma, φ_i es un homomorfismo de A-módulos entre A y M para cada $i \in I$ y, por el lema previo, $\varphi := \bigoplus_{i \in I} \varphi_i : A^{(I)} \longrightarrow M$ es a su vez un homomorfismo de A-módulos.

Todo $x \in M$ admite una representación única como combinación lineal finita de elementos de B. Sean las aplicaciones $\psi_i : M \to A$ dadas por $x = \sum_{j \in F} \lambda_j m_j \mapsto \lambda_i$, donde $F \subset I$ finito. Para cada $i \in I$, ψ_i es un homomorfismo de A-módulos y, de forma análoga, la aplicación $\psi : M \longrightarrow A^I$ que verifica $p_i \circ \psi = \psi_i$, es un homomorfismo de A-módulos y es único. Más aún, para cada $x \in M$ existe $F \subseteq I$ finito de forma que, $\psi_i(x) = 0_A$ si $i \in I \setminus F$; es decir, $\psi(M) \subseteq A^{(I)}$.

Por último, es claro por definición de los homomorfismos que $\varphi \circ \psi = Id_M$ y $\psi \circ \varphi = Id_{A^{(I)}}$.

Veamos que todas las bases tienen un mismo cardinal. Si $M \cong A^{(I)}$, sean $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de A y $\{\, m_i, i \in I \,\}$ una base de M. $\mathfrak{m}M$ es un submódulo de M y, como $\mathfrak{m} \subset \operatorname{Ann}_A \left(M / \mathfrak{m}M \right)$, $M / \mathfrak{m}M$ tiene estructura de $A / \mathfrak{m}$-espacio vectorial.

Tomemos $M = A^{(I)}$ y veamos que $A^{(I)} / \mathfrak{m}A^{(I)} \cong \left(A / \mathfrak{m} \right)^{(I)}$, que es un $A / \mathfrak{m}$-espacio vectorial de dimensión $\#(I)$.

En primer lugar, definamos para cada $i \in I$ las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{rccc}\tau_i : & A & \longrightarrow & \left(A / \mathfrak{m} \right)^{(I)} \\ & 1_A & \longmapsto & \tau_i(1_A) = (a_j + \mathfrak{m})_{j \in I} := \left\{ \begin{array}{ll} a_j + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} & \text{si } i \neq j \\ a_j + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m} & \text{si } i = j \end{array} \right. .\end{array}$$

Se comprueba que, para cada $i \in I$, τ_i es homomorfismo de A-módulos y, por lo tanto, $\bigoplus_{i \in I} \tau_i : A^{(I)} \longrightarrow \left(A / \mathfrak{m} \right)^{(I)}$ es también un homomorfismo de A-módulos.

Además, $\bigoplus_{i\in I}\tau_i$ es sobreyectivo y $\ker\bigoplus_{i\in I}\tau_i = \mathfrak{m}A^{(I)}$. Así, por el primer teorema de isomorfía, $\bigoplus_{i\in I}\tau_i$ induce un isomorfismo de $A/\mathfrak{m}$-módulos, $\widehat{\bigoplus_{i\in I}\tau_i} : A^{(I)}/\mathfrak{m}A^{(I)} \longrightarrow \left(A/\mathfrak{m}\right)^{(I)}$

Ahora, dados dos conjuntos de índices no vacíos I y J, supongamos que existe un isomorfismo de A-módulos $\Phi : A^{(I)} \longrightarrow A^{(J)}$. Por ser así, en concreto se tiene que $\Phi(\mathfrak{m}A^{(I)}) = \mathfrak{m}A^{(J)}$ y Φ induce otro isomorfismo de $A/\mathfrak{m}$-módulos, $\widehat{\Phi} : A^{(I)}/\mathfrak{m}A^{(I)} \longrightarrow A^{(J)}/\mathfrak{m}A^{(J)}$. De esta forma, resulta que $(A/\mathfrak{m})^(I) \cong (A/\mathfrak{m})^(J)$ y $\#(I) = \#(J)$. $\square$

Definición 0.2.6. A cualquier conjunto B que cumpla la proposición anterior se le llama base del A-módulo libre M, y a su cardinal se le llama *rango de M*.

Corolario 0.2.7. *Sea M es un A-módulo libre, es decir, existe un conjunto I tal que $M \cong A^{(I)}$, y sea N otro A-módulo. Dados $n_i : i \in I \subset N$, existe un único homomorfismo de A-módulos $f : M \to N$ tal que $f(m_i) = n_i$ para cada $i \in I$, donde $m_i : i \in I$ es una base de M.*

0.3 Sucesiones exactas

Definición 0.3.1. Una sucesión de homomorfismos de A-módulos

$$... \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\Phi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\Phi_i} M_{i+1} \longrightarrow ...$$

se dice exacta si $ker(\Phi_{i+1}) = im(\Phi_i)$, donde para cada i, M_i es un A-módulo y $\Phi_i : M_i \to M_{i+1}$ es un homomorfismo de A-módulos.

Definición 0.3.2. Decimos que una sucesión de homomorfismos de A-módulos es corta si es de la forma

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

Observación 0.3.3. Una sucesión corta es exacta si y sólo si $f : M_1 \to M_2$ es inyectiva, $g : M_2 \to M_3$ es suprayectiva y $im(f) = ker(g)$

Ejemplo 0.3.4. 1. Dados $N \subset M$ A-módulos,

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

es una sucesión corta exacta.

2. Dados M y N A-módulos,

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{q_M} M \oplus N \xrightarrow{p_N} N \longrightarrow 0$$

es una también una sucesión corta exacta.

Observación 0.3.5. Toda sucesión de homomorfismos de A-módulos se puede descomponer en varias sucesiones cortas.

Definición 0.3.6. Dado M un A-módulo, un subconjunto $S \subset M$ es un sistema de generadores de M si para cada $x \in M$ existen $\{s_1, ..., s_n\} \subset S$ tales que

$$x = \lambda_1 s_1 + ... + \lambda_n s_n$$

con $\lambda_i \in A$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Es decir, el menor submódulo de M que contiene a S es el propio M.

Definición 0.3.7. Dado un conjunto de A-módulos ζ, una aplicación $\lambda : \zeta \to \mathbb{N}$ se dice aditiva si para cada M, M' y $M'' \in \zeta$ y para cada sucesión corta y exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

se verifica $\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$.

Ejemplo 0.3.8. Dado K cuerpo, los K-módulos son los K-espacios vectoriales. Tomando ζ como los K-espacios vectoriales de dimensión finita,

$$\begin{array}{rcl} \zeta & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ M & \longmapsto & dim(M) \end{array}$$

es una aplicación aditiva.

Proposición 0.3.9. *Sea*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión corta y exacta de A-módulos. Son equivalentes:

i) *Existe $\pi : M \longrightarrow M'$ homomorfismo de A-módulos tal que $\pi \circ f = 1_{M'}$*

ii) *Existe $\sigma : M'' \longrightarrow M$ homomorfismo de A-módulos tal que $g \circ \sigma = 1_{M''}$*

iii) *$M \cong M' \oplus M''$ vía f y g, es decir, existe $\Phi : M \longrightarrow M' \oplus M''$ isomorfismo de A-módulos tal que los diagramas son conmutativos.*

En tal caso, se dice que la sucesión corta es escindida.

Prueba. ($1 \Rightarrow 2$) Dado $m'' \in M''$, por ser g sobreyectiva existe $m \in M$ tal que $g(m) = m''$. Considero
$$m^* := m - f \circ \tau(m) \in M$$
y afirmo que m^* no depende de la elección hecha de $m \in M$ de forma que $g(m) = m''$. Supongamos que existe otro $m_1 \in M$ tal que $g(m_1) = m''$. Por ser así,
$$g(m - m_1) = g(m) - g(m_1) = 0_{M''}.$$
Como $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$, existe $m' \in M'$ tal que $f(m') = m - m_1$. Dado que por hipótesis $\tau \circ f = \mathrm{id}_{M'}$, tenemos
$$m - m_1 = f(m') = f \circ \tau(m - m_1) = f \circ \tau(m) - f \circ \tau(m_1)$$
y
$$m - f \circ \tau(m) = m_1 - f \circ \tau(m_1).$$
Vemos así que m^* no depende del $m \in M$ escogido con tal de que se tenga $g(m) = m''$.

Por esto que acabamos de ver, la aplicación
$$\begin{array}{rccl} \sigma : & M'' & \longrightarrow & M \\ & m'' & \longmapsto & m^* = m - f \circ \tau(m) \end{array},$$
donde m verifica $g(m) = m''$, está bien definida. Además, para cada $m'' \in M''$,
$$g \circ \sigma(m'') = g(\sigma(m'')) = g(m - f \circ \tau(m)) = g(m) = m'',$$
es decir, $g \circ \sigma = \mathrm{id}_{M''}$.

Falta por comprobar que σ es homomorfismo de A-módulos. Sean $\lambda, \mu \in A$ y $m_1'', m_2'' \in M''$ arbitrarios. Usamos que f, g y τ son homomorfismos de A-módulos. en primer lugar, es claro que, si $m_1, m_2 \in M$ verifican $g(m_i) = m_i''$, entonces $g(\lambda m_1) = \lambda m_1''$, $g(\mu m_2) = \mu m_2''$ y $g(\lambda m_1 + \mu m_2) = \lambda m_1'' + \mu m_2''$. Teniendo esto en cuenta,
$$\begin{aligned} \sigma(\lambda m_1'' + \mu m_2'') &= (\lambda m_1 + \mu m_2) - f \circ \tau(\lambda m_1 + \mu m_2) = \\ &= \lambda m_1 - f \circ \tau(\lambda m_1) + \mu m_2 - f \circ \tau(\mu m_2) = \sigma(\lambda m_1'') + \sigma(\mu m_2'') \end{aligned}$$
como queríamos.

($2 \Rightarrow 1$) Partiendo ahora de la existencia de $\sigma : M'' \longrightarrow M$ verificando $g \circ \sigma = \mathrm{id}_{M''}$, buscamos definir $\tau : M \longrightarrow M'$ cumpliendo $\tau \circ f = \mathrm{id}'_M$. Dado $m \in M$,

$m - \sigma(g(m)) \in \ker(g) = im(f)$ y, como antes, existe $m' \in M'$ tal que $f(m') = m - \sigma(g(m))$ único por la inyectividad de f. Así, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \tau : & M & \longrightarrow & M' \\ & m & \longmapsto & m' \end{array},$$

donde m' es el único elemento en M' tal que $f(m') = m - \sigma(g(m))$, está bien definida. Además, es claro que para cada $m' \in M'$ se cumple $\tau \circ f(m') = m'$. La comprobación de que τ es homomorfismo de A-módulos es análoga al caso anterior.

($2 \Rightarrow 3$) En primer lugar, como se verifica 2) también tenemos 1); es decir, contamos con las aplicaciones τ y σ verificando las condiciones del enunciado.

Definimos así $\Phi : M' \oplus M'' :\longrightarrow M$ como el único homomorfismo de A-módulos que hace $\Phi \circ q_{M'} = f$ y $\Phi \circ q_{M''}$. Φ está bien definido por la propia contrucción de la suma directa $M' \oplus M''$. Veamos que es sobreyectivo. Sea $m \in M$ y tomemos $m' := \tau(m - \sigma(g(m))$ y $m'' := g(m)$. De nuevo, $m - \sigma(g(m)) \in \ker(g) = \mathrm{im}(f)$ y existe $m^* \in M'$ tal que $f(m^*) = m - \sigma(g(m))$. Por esto,

$$\begin{aligned} \Phi(m', m'') =& \Phi((m', 0) + (0, m'')) = \Phi \circ q_{M'}(m') + \Phi \circ q_{M''}(m'') = \\ =& f(\tau(m - \sigma(g(m)))) + \sigma(g(m)) = f \circ \tau \circ f(m^*) + \sigma \circ g(m) = \\ =& f(m^*) + \sigma \circ g(m) = m - \sigma(g(m)) + \sigma(g(m)) = m. \end{aligned}$$

Veamos ahora que Φ es inyectiva. Supongamos que $\Phi(m', m'') = 0_M$, es decir, $f(m') + \sigma(m'') = 0_M$. Aplicando g tenemos que $m'' = g \circ \sigma(m'') = 0_{M''}$. Por su parte, como f es inyectiva, $f(m') = 0_{M'}$ implica $m' = 0_{M'}$.

Por último, si $m \in M$, $\Phi^{-1}(m) = (m', m'')$, con $m'' = g(m)$. Así, ${p_{M''}}^{-1} = g$.

($3 \Rightarrow 2$) Basta tomar $\sigma := \Phi \circ q_{M''}$. □

Denotemos por CRing a la categoría de anillos conmutativos unitarios. Dado $A \in \mathrm{Obj(CRing)}$, denotaremos a su vez por Mod_A a la categoría de A-módulos.

Proposición 0.3.10. *1) Sea*

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \tag{2}$$

una sucesión de A-módulos y homomorfismos. Entonces (2) es exacta si, y sólo si, para todo $N \in Obj(Mod_A)$ la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_A(M, N') \overset{Hom_A(M,f)}{\longrightarrow} Hom_A(M, N) \overset{Hom_A(M,g)}{\longrightarrow} Hom_A(M, N'') \tag{3}$$

es también una sucesión exacta.

2) Sea

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{4}$$

una sucesión de A-módulos y homomorfismos. Entonces (4) es exacta si, y sólo si, para todo $M \in Obj(Mod_A)$ la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_A(M'', N) \overset{Hom_A(g,N)}{\longrightarrow} Hom_A(M, N) \overset{Hom_A(f,N)}{\longrightarrow} Hom_A(M', N) \tag{5}$$

es también una sucesión exacta.

Prueba. Veamos ($\Rightarrow$) en 1). Denotemos $f_* := \mathrm{Hom}_A(M, f)$ y $g_* := \mathrm{Hom}_A(M, g)$. En primer lugar, por definición de f_* y dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N')$, si $f \circ \varphi \equiv 0_N$, entonces para toda $x \in M$ se tiene $\varphi(x) = 0$ por la inyectividad de f (si existiera $x \in M$ tal que $\varphi(x) \neq 0_{N'}$, entonces $f(\varphi(x)) \neq 0_N$). Así, vemos que f_* es inyectiva.

Comprobemos ahora que $\mathrm{im}(f_*) = \ker(g_*)$. En primer lugar, dado que $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ y $g \circ f = 0_{N''}$ resulta

$$g_* \circ f_* = 0_{\mathrm{Hom}_A(M,N'')},$$

es decir, $\mathrm{im}(f_*) \subset \ker(g_*)$. Ahora, dado $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ tal que $g \circ \psi \equiv 0$, se tiene que $\mathrm{im}(\psi) \subset \ker(g) = \mathrm{im}(f)$. Como f es un isomorfismo sobre su imagen, el homomorfismo de A-módulos

$$\varphi := f^{-1} \circ \psi : \quad M \longrightarrow N'$$

está bien definido. Así, componiendo f por la izquierda tenemos la igualdad $\psi = f \circ \varphi$; de forma equivalente, $\psi \in \mathrm{im}(f_*)$ como queríamos probar.

Probemos ahora ($\Rightarrow$) en 2). Sea $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M'', N)$ tal que $\psi \circ \psi \equiv 0$. Como g es suprayectiva, la suposición anterior implica que $M'' = \mathrm{im}(g) \subset \ker \psi$; es decir, $\psi \equiv 0_{\mathrm{Hom}_A(M'',N)}$ y g^* es inyectiva.

Veamos ahora que $\mathrm{im}(g^*) = \ker(f^*)$. En primer lugar, si $\psi \in \mathrm{im}(g^*)$, existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M'', N)$ tal que $\psi = \varphi \circ g$. Por ser esto así, se tiene

$$f^*(\psi) = \psi \circ f = (\varphi \circ g) \circ f = \varphi \circ (g \circ f) = \varphi \circ 0_{\mathrm{Hom}_A(M',M'')} = 0_{\mathrm{Hom}_A(M',N)},$$

es decir, $\mathrm{im}(g^*) \subset \ker(f^*)$.

Ahora, sea $\psi \in \ker(f^*)$, i.e, $\psi \circ f \equiv 0_{\mathrm{Hom}_A(M',N)}$. Por un lado, $\ker(g) = \mathrm{im}(f) \subset \ker(\psi)$. Por otro, como g es sobreyectiva, para todo $x \in M''$ existe $m_x \in M$ tal que $g(m_x) = x$. Podemos definir así la siguiente aplicación

$$\begin{array}{cccc} \varphi & M'' & \longrightarrow & N \\ & x & \longmapsto & \psi(m_x) \end{array}.$$

Veamos que está bien definida. Supongamos que existen $m_x, m_x' \in M$ distintos de forma que $g(m_x) = g(m_x') = x$. Por darse $\ker(g) \subset \ker(\psi)$ y ser g homomorfismo de A-módulos, $m_x - m_x' \in \ker(g) \subset \ker(\psi)$, es decir, $\psi(m_x) = \psi(m_x')$. Tras comprobar que φ es un homomorfismo de A-módulos, tenemos que para cada $x \in M$ se verifica

$$\varphi(g(x)) = \psi(x);$$

es decir, $\psi = \varphi \circ g$.

Ahora vamos a probar las implicaciones ($\Leftarrow$) tanto en 1) como en 2). Comenzamos con la de 2). Para ver que g es suprayectiva, tomamos en primer lugar $N := {}^{M''}\!\diagup_{\operatorname{im}(g)}$ en (5). Si consideramos la aplicación cociente $c : M'' \longrightarrow N$, se tiene que $g^*(c) = c \circ g = 0_{\operatorname{Hom}_A(M,N)}$; es decir, como g^* es inyectiva, $c \equiv 0_{\operatorname{Hom}_A(M'',N)}$ y $M'' = \operatorname{im}(g)$.

Tomemos ahora $N := {}^{M}\!\diagup_{\operatorname{im}(f)}$. De nuevo, si consideramos la aplicación cociente $c : M \longrightarrow N$, se tiene que $f^*(c) = c \circ f = 0_{\operatorname{Hom}_A(M',N)}$ y $c \in \ker(f^*)$. Por esto último, existe $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(M'', N)$ tal que $c = \varphi \circ g$. Si $x \in M$ es tal que $g(x) = 0$, entonces $c(x) = 0_N$ y $x \in \operatorname{im}(f)$. Así, $\ker(g) \subset \operatorname{im}(f)$. Para ver que $\ker(g) \supset \operatorname{im}(f)$ basta tomar $N := M''$ y observar que

$$g^*(1_{M''}) = g \in \ker(f^*);$$

es decir, $g \circ f = 0_{\operatorname{Hom}_A(M',M'')}$ y se tiene lo que buscábamos.

Comprobemos por último la suficiencia en 1). Para ver que f es inyectiva, tomemos $M := \ker(f)$ y la inclusión $i : M \longrightarrow N'$, que es inyectiva. Por esta elección, tenemos que

$$f_*(i) = f \circ i = 0_{\operatorname{Hom}_A(M,N')}$$

y , como por hipótesis f_* es inyectiva, $i \equiv 0_{\operatorname{Hom}_A(M,N')}$. Ahora, como i es inyectiva, se tiene que $\ker(f) = \{0_{N'}\}$, es decir, f es inyectiva.

Para ver $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$, veamos las dos inclusiones. En primer lugar, tomando $M := N'$ y $1_{N'} \in \operatorname{Hom}_A(M, N')$, se tiene que

$$f_*(1_{N'}) = f \in \operatorname{im}(f_*) = \ker(g_*),$$

es decir, $g \circ f = 0_{\operatorname{Hom}_A(N',N'')}$ y $\ker(g) \supset \operatorname{im}(f)$. Para el otro contenido, definamos de forma análoga al caso anterior $M := \ker(g)$ y consideremos la inclusión $i \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$. Por esta elección tenemos que

$$g_*(i) = g \circ i = 0_{\operatorname{Hom}_A(M,N'')},$$

es decir, $i \in \ker(g_*) = \mathrm{im}(f_*)$ y por lo tanto existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N')$ de forma que $i = f \circ \varphi$. Es por esto que, dado $x \in M$ se verifica

$$x = i(x) = f(\varphi(x)) \in \mathrm{im}(f).$$

Así, $\ker(g) \subset \mathrm{im}(f)$. □

0.4 Módulos proyectivos y módulos inyectivos

Supongamos $M \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}_A)$ tal que, siempre que se tenga una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0,$$

se tuviera que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,f)} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,g)} \mathrm{Hom}_A(M, N'') \longrightarrow 0$$

también es exacta. Por 0.3.10, esto es equivalente a que para cualesquiera $N, N'' \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}_A)$ y todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N')$ existiría $h \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ tal que $g \circ h = \varphi$. Esta observación motiva la siguiente definición.

Definición 0.4.1. Sea $M \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}_A)$ tal que para toda $g \in \mathrm{Hom}_A(N, N')$ suprayectiva y toda $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N')$ existe $h \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ verificando $g \circ \varphi = h$. En estas condiciones, decimos que M es un A-*módulo proyectivo*.

Observación 0.4.2. Todo módulo libre es un módulo proyectivo. Sea $A^{(I)}$ un A-módulo libre con sistema de generadores $\{a_i\}_{i \in I}$. Sean también $g \in \mathrm{Hom}_A(N, N')$ suprayectiva y $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, N')$ arbitrarias. Por ser g sobreyectiva, para cada $i \in I$ existe $n_i \in N$ tal que $g(n_i) = \varphi(a_i)$. Es por esto que podemos definir

$$\begin{array}{rccc} h: & A^{(I)} & \longrightarrow & N \\ & a_i & \longmapsto & n_i \end{array}.$$

Por lo ya comentado, h está bien definido. Además, como $\{a_i\}_{i \in I}$ es un sistema de generadores, para cada $x \in A^{(I)}$ existe $F_x \subset I$ finito tal que $x = \sum_{i \in F_x} \lambda_i a_i$, donde $\lambda_i \in A$ para cada $i \in F_x$. Es por esto que tomando $x \in A^{(I)}$ arbitrario se verifica

$$g(h(x)) = g\left(\sum_{i \in F_x} \lambda_i h(a_i)\right) = \sum_{i \in F_x} \lambda_i g(n_i) = \sum_{i \in F_x} \lambda_i \varphi(a_i) = \varphi\left(\sum_{i \in F_x} \lambda_i a_i\right) = \varphi(x).$$

Tenemos así que $g \circ h = \varphi$.

Proposición 0.4.3. *M es un A-módulo proyectivo si, y sólo si, M es suma directa de un A-módulo libre.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Sabemos que existe $I \subset M$ tal que

$$\begin{array}{rccc} \pi: & A^{(I)} & \longrightarrow & M \\ & e_i & \longmapsto & m_i \end{array}$$

es un homomorfismo bien definido y suprayectivo (basta tomar al propio M como sistema de generadores). Surge así de manera natural la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \ker \pi \overset{i}{\hookrightarrow} A^{(I)} \overset{\pi}{\to} M \to 0.$$

Por hipótesis, M es A-módulo proyectivo, es decir, tomando $\pi \in \mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, M)$ suprayectivo y $1_M \in \mathrm{Hom}_A(M, M)$, existe $h \in \mathrm{Hom}_A(M, A^{(I)})$ tal que $\pi \circ h = 1_M$; es decir, por 0.3.9 la sucesión anterior es escindida y $A^{(I)} \cong \ker \pi \oplus M$. $\square$

Ahora, supongamos que $N \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}_A)$ es tal que, si la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \overset{f}{\longrightarrow} M$$

es exacta, entonces la sucesión

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \overset{\mathrm{Hom}_A(f,N)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(M', N) \longrightarrow 0$$

también lo es; es decir, para cualquier $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M', N)$, existe $\Phi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ de forma que $\varphi = \Phi \circ f$. Por ser f inyectiva, podemos interpretar M' como un submódulo de M (entender f como una inclusión) y, por esto, nuestro problema se trata de un problema de extensión.

Esta extensión no va a ser posible en general como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 0.4.4. Sea $n \in \mathbb{Z}$ y consideremos $\langle n \rangle \subset \mathbb{Z}$ submódulo. Si definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \langle n \rangle & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & 1_{\mathbb{Z}} \\ \lambda n & \longmapsto & \lambda \end{array},$$

se comprueba que no puede extenderse a $\mathbb{Z}$.

Surge la siguiente definición.

Definición 0.4.5. Diremos que $N \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}_A)$ es un A-módulo inyectivo si, para cualesquiera $M, M' \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}_A)$, $f \in \mathrm{Hom}_A(M', M)$ inyectiva y $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M', N)$, se tiene que existe $\Phi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ de forma que $\varphi = \Phi \circ f$.

0.5 Producto tensorial de módulos

Definición 0.5.1. Sean M, N y P A-módulos. Una aplicación$\Phi : M \times N \longrightarrow P$ se dice A-bilineal si se verfican las siguientes condiciones.

1) Para cada $m_1, m_2 \in M$, $n \in N$, $\Phi(m_1 + m_2, n) = \Phi(m_1, n) + \Phi(m_2, n)$

2) Para cada $m \in M$, $n_1, n_2 \in N$, $\Phi(m, n_1 + n_2) = \Phi(m, n_1) + \Phi(m, n_2)$

3) Para cada $m \in M$, $n \in N$, $\lambda \in A$, $\Phi(\lambda m, n) = \Phi(m, \lambda n) = \lambda\Phi(m, n)$

Observación 0.5.2. Análogamente, podemos definir el concepto de aplicaciones multilineales de la siguiente forma. Dados $M_1, \dots, M_r$ A-módulos,

$$\Phi : M_1 \times \cdots \times M_r \longrightarrow P$$

se dice multilineal si para cada $i \in \{1, \dots, r\}$

- $\Phi(m_1, \dots, m_i + m_i', \dots, m_r) = \Phi(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r) + \Phi(m_1, \dots, m_i', \dots, m_r)$
- $\Phi(m_1, \dots, \lambda m_i, \dots, m_r) = \lambda\Phi(m_1, \dots, m_i, \dots, m_r)$

Con $\lambda \in A$ y $m_j \in M_j$ para cada $j \in \{1, \dots, r\}$

Observación 0.5.3. Si M, M' son A-módulos, $g : M \to M'$ es suprayectiva, y $N \subset \ker g$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
m \arrow[d, mapsto] & M \arrow[d] \arrow[dr, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & & \\
m + \ker g & M/\ker g \arrow[r] & M' & g(m) \\
m + N \arrow[u, mapsto] & M/N \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & &
\end{tikzcd}$$

Proposición 0.5.4. *Dados dos A-módulos M y N, existe un A-módulo $M \otimes_A N$ y una aplicación A-bilineal $\delta : M \times N \to M \otimes_A N$ tal que para cada A-módulo P y para cada $F : M \times N \to P$ A-bilineal, existe una única aplicación A-lineal $f : M \otimes_A N :\to P$ tal que $f \circ \delta = F$.*

Además, el par $(\delta, M \otimes_A N)$ es único, en el sentido que de existir otro par (δ', T) que verifique las condiciones del enunciado, se tiene que $T \cong M \otimes_A N$.

Prueba. Para ver la unicidad, supongamos que (δ, T) y (δ', T') cumplen las condiciones de la proposición. Poniendo a T' como P y a δ' como F, el resultado garantiza la existencia de $j : T \to T'$ tal que $\delta' = j \circ \delta$. Intercambiando los roles de T y T', se tiene $j' : T' \to T$ tal que $\delta = j' \circ \delta'$. Entonces, cada una de las composiciones $j \circ j'$ y $j' \circ j$ son la identidad, lo cual garantiza que j sea un isomorfismo.

Para la existencia, procedemos como sigue. Consideremos $A^{(M\times N)}$, la suma directa de A tantas veces como elementos tenga $M \times N$. Definimos el siguiente subconjunto de $A^{(M\times N)}$

$$S = \{e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)}, e_{(m,n+n')} - e_{(m,n)} - e_{(m,n')}, e_{(m,\lambda n)} - \lambda e_{(m,n)}, e_{(\lambda m,n)} - \lambda e_{(m,n)}\}$$

con $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ y $\lambda \in A$.

Ahora tomamos Σ el submódulo generado por S. Se cumple $\Sigma \subset A^{(M\times N)}$, luego podemos definir el cociente $A^{(M\times N)}/\Sigma$, que es un A-módulo. Entonces, definimos

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\delta} & A^{(M\times N)}/\Sigma \\ (m,n) & \longmapsto & [e_{(m,n)}] \end{array}$$

Ver que δ es bilineal es trivial por cómo se ha definido S. Por ejemplo, dados $m, m' \in M$, $n \in N$, $\delta(m + m', n) = [e_{(m+m',n)}] = [e_{(m,n)} + e_{(m',n)}] = [e_{(m,n)}] + [e_{(m',n)}] = \delta(m, n) + \delta(m', n)$.

Ponemos $M \otimes_A N = A^{(M\times N)}/\Sigma$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} f_0 : & A^{M\times N} & \longrightarrow & P \\ & e_{(m,n)} & \longmapsto & F(m,n) \end{array}$$

que está bien definida ya que $\{e_{(m,n)} : (m, n) \in M \times N\}$ es un sistema de generadores de $A^{M\times N}$. Nótese que entonces $\{[e_{(m,n)}] : (m, n) \in M \times N\}$ es un sistema de generadores de $M \otimes_A N$. Por ser F homomorfismo, f_0 es homomorfismo de A-módulos.

Veamos que $\Sigma \subset ker(f_0)$. Com Σ está generado por S, basta ver $S \subset ker(f_0)$. Pero esto es directo por ser F bilineal y la definición de S. Por ejemplo,

$$f_0(e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)}) = F(e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)} = 0$$

Por tanto, siguiendo la observación anterior a la proposición, podemos definir

$$\begin{array}{rrcl} \tilde{f}_0 : & A^{M\times N}/_{\sum} & \longrightarrow & P \\ & [e_{(m,n)}] & \longmapsto & F(m,n) \end{array}$$

que está bien definida y cumple las condiciones del teorema. □

Observación 0.5.5. 1. A las clases $[e_{(m,n)}]$ se les denota $m \otimes_A n$ o simplemente $m \otimes n$.

Todo elemento de $M \otimes_A N$ es suma $\sum_{i=1}^r m_j \otimes n_j$, para ciertos $m_j \in M$, $n_j \in N$ y $r \in \mathbb{N}$, ya que $[\lambda e_{(m,n)}] = [e_{(\lambda m,n)}] = [e_{(m,\lambda n)}]$ por la definición inicial de S.

2. Las aplicaciones bilineales de $M \times N$ en P, $Bil_A(M \times N, P)$ están en correspondencia biyectiva con $Hom_A(M \otimes_A N, P)$.

   En particular, si tomamos A como K cuerpo y M y N K-espacios vectoriales,

$$Hom_A(M \otimes_K N, K) = (M \otimes_K N)^* = Bil_K(M \times N, K)$$

Definición 0.5.6. Al A-módulo $M \otimes_A N$ se le llama *producto tensorial* de M y N.

En particular, si tomamos A como K cuerpo y M y N K-espacios vectoriales,

$$Hom_A(M \otimes_K N, K) = (M \otimes_K N)^* = Bil_K(M \times N, K)$$

3) La construcción del producto tensorial de módulos se puede generalizar. Dados $M_1, \dots, M_r$ A-módulos, existe un A-módulo $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_r$ y

$$\delta : M_1 \times \cdots \times, M_r \longrightarrow M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_r$$

multilineal tal que para cualquier

$$\Phi : M_1 \times \cdots \times, M_r \longrightarrow P$$

A-multilineal, existe una única

$$f : M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_r \longrightarrow P$$

A-lineal tal que $f \circ \delta = F$

Lema 0.5.7. *Sean Z y Z' dos A-módulos. Sea $\{z_i\}_{i\in I}$ un sistema de generadores de Z y sea $\{z'_j\}_{j\in J}$ un sistema de generadores de Z'. Entonces, $\{z_i \otimes z_j : (i,j) \in I \times J\}$ es un sistema de generadores de $Z \otimes_A Z'$.*

$$\begin{tikzcd} M \times N \times P \arrow[r, "F"] \arrow[d] & (M \otimes N) \otimes P \\ M \otimes N \otimes P \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 0.5.8. *Sea A un anillo conmutativo unitario. Se cumple:*

1. *Dados M, N y P A-módulos,*

$$M \otimes_A N \otimes P \overset{isom}{\cong} (M \otimes_A N) \otimes_A P$$

2. $M \otimes_A N = N \otimes_A M$

3. *Dados $f : M_1 \to M_2$ y $g : N_1 \to N_2$ A-lineales, existe $f \otimes g : M_1 \otimes_A N_1 \to M_2 \otimes N_2$ A-lineal tal que si tenemos $f' : M_2 \to M_3$ y $g' : N_2 \to N_3$ homomorfismos de A-módulos,*

$$M_1 \otimes_A N_1 \overset{f \otimes_A g}{\longrightarrow} M_2 \otimes_A N_2 \overset{f' \otimes_A g'}{\longrightarrow} M_3 \otimes_A N_3$$

se cumple

$$(f' \otimes_A g') \circ (f \otimes_A g) = (f' \circ f) \otimes_A (g' \circ g)$$

4. *Si B es un A-álgebra, $B \otimes_A M$ es un B-módulo*

5. *Si B y C son A-álgebras, $B \otimes_A C$ es un A-álgebra, un B-módulo y un C-módulo*

Prueba. Comprobamos cada cosa.

1. Definimos la aplicación A-trilineal

$$\begin{array}{rrcl} F : & M \times N \times P & \longrightarrow & (M \otimes_A N) \otimes_A P \\ & (m, n, p) & \longmapsto & (m \otimes n) \otimes p \end{array}$$

Existe una única $f : M \otimes_A N \otimes_A P \to (M \otimes_A N) \otimes_A P$ tal que $f(m \otimes n \otimes p) = F(m, n, p) = (m \otimes n) \otimes p$,

Veamos como definir la flecha en sentido contrario. Para cada $p \in P$ definimos la aplicación A-bilineal

$$\begin{array}{rrcl} \Phi_p : & M \times N & \longrightarrow & M \otimes_A N \otimes_A P \\ & (m, n) & \longmapsto & m \otimes n \otimes p \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[d] & M \otimes N \otimes P \\
M \otimes N \arrow[ur, "\varphi_p"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes N) \times P \arrow[r, "G"] \arrow[d] & M \otimes N \otimes P \\
(M \otimes N) \otimes P \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Existe una única $\varphi_p : M \otimes_A N \to M \otimes_A N \otimes_A P$ tal que $\varphi_p(m \otimes n) = \Phi_p(m, n) = m \otimes n \otimes p$

Observamos que si $p, p' \in P$, entonces $\varphi_p + \varphi_{p'} = \varphi_{p+p'}$ por unicidad ya que ambas completan el diagrama: $\varphi_p(m \otimes n) + \varphi_{p'}(m \otimes n) = m \otimes n \otimes p + m \otimes n \otimes p' = m \otimes n \otimes (p + p') = \varphi_{p+p'}(m \otimes n)$. Lo mismo ocurre con $\lambda\varphi_p = \varphi_{\lambda p}$.

Sea entonces la aplicación A-bilineal

$$\begin{array}{rccc} G: & (M \otimes_A N) \times P & \longrightarrow & M \otimes_A N \otimes_A P \\ & (z, p) & \longmapsto & \varphi_p(z) \end{array}$$

Existe una única $g : (M \otimes_A N) \otimes_A P \to M \otimes_A N \otimes_A P$ aplicación A-lineal que hace conmutativo el diagrama siguiente

Veamos entonces que la composición de ambas es la identidad. Para ello solo hace falta ver que deja los generadores de cada A-módulo invariantes. Efectivamente,

Por tanto, $g \circ f = Id_{M \otimes N \otimes P}$

Por otro, $\{m \otimes n : (m, n) \in M \times N\}$ es sistema de generadores de $M \otimes_A N$. Por el lema 0.5.7, $\{(m \otimes n) \otimes p : (m, n, p) \in M \times N \times P\}$ es sistema de generadores

$$\begin{tikzcd}
M \otimes N \otimes P \arrow[r, "f"] & (M \otimes N) \times P \arrow[r, "g"] & M \otimes N \otimes P \\
m \otimes n \otimes p \arrow[r, mapsto] & (m \otimes n) \otimes p \arrow[r, mapsto] & m \otimes n \otimes p
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M_1 \otimes N_1 \arrow[r, "f_1 \otimes g_1"] \arrow[rr, bend right, "(f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1)"'] & M_2 \times N_2 \arrow[r, "f_2 \otimes g_2"] & M_3 \times N_3 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} B \times M \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[d] & B \otimes M \\ B \otimes M \arrow[ur, "\varphi_p"'] & \end{tikzcd}$$

de $(M \otimes_A N) \otimes_A P$. Evaluando, $(f \circ g)((m \otimes n) \otimes p) = (m \otimes n) \otimes p)$ y concluimos $f \circ g) = Id_{(M \otimes_A N) \otimes_A P}$

3. Definimos la aplicación A-bilineal $M_1 \times N_1 \to M_2 \times N_2$ dada por $(m_1, n_1) \mapsto f(m_1) \otimes g(n_1)$. Entonces existe una única $M_1 \otimes N_1 \to M_2 \otimes N_2$ lineal que completa el diagrama conmutativo habitual.

Lo mismo sucede con $M_2 \times N_2 \to M_3 \times N_3$, de forma que obtenemos el diagrama

Podemos definir la aplicación A-bilineal $M_1 \times N_1 \to M_3 \otimes N_3$ dada por $(m_1, n_1) \mapsto (f_2 \circ f_1)(m_1) \otimes (g_2 \circ g_1)(n_1)$, y así existe una única aplicación $M_1 \otimes N_1 \to M_3 \otimes N_3$ que cierra el diagrama conmutativo, y por unicidad ha de coincidir con la composición de arriba.

4. Queremos definir un producto externo. Empezamos definiendo para cada $b \in B$ la aplicación A-lineal $\Phi_b : B \times M \to B \otimes M$ dada por $(b', m) \mapsto bb' \otimes m$. Entonces existe una única aplicación lineal del producto tensorial que cierra el diagrama

Se cumple que $\varphi_{b_1 + b_2} = \varphi_{b_1} + \varphi_{b_2}$ y que $\varphi_{b_1 b_2} = \varphi_{b_1} \circ \varphi_{b_2}$ por la unicidad. De esta forma podemos definir la aplicación

$$\Phi : B \times (B \otimes M) \to B \otimes M \tag{6}$$
$$(b, z) \mapsto \varphi_b(z) \tag{7}$$

que está bien definida y con la cual $B \otimes M$ cumple los axiomas de A-módulo.

$\square$

En estas construcciones se tienen las siguientes propiedades.

1) Dados M_1, M_2 y M_3 A-módulos, $M_1 \otimes_A M_2 \otimes M_3 \overset{isom}{\cong} (M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \overset{isom}{\cong} M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)$

2) $M \otimes_A N = N \otimes_A M$

3) Dados $f : M_1' \to M_1$ y $g : M_2' \to M_2$ A-lineales, existe $f \otimes g : M_1' \otimes_A M_2' \to M_1 \otimes M_2$ A-lineal tal que el diagrama es conmutativo.

   En particular, si $M \in Obj(Mod_A)$, $M \otimes \_$ es un funtor covariante de Mod_A en Mod_A (Véase Apéndice A)