Problemas de Álgebra Comutativa: (Hoja nº1, 16 de Febrero 2021).

NOTA: Todos los anillos son conmutativos unitarios y los homomorfismos de anillos conservan el 1.

1. Sea A un anillo, $u \in A$ una unidad y $x \in A$ un elemento nilpotente. Demostrar que $u + x$ es una unidad.

2. Sea A un anillo y supongamos que A es isomorfo a un producto de anillos $\phi : A \cong A_1 \times A_2$.

(i) Sea $\mathfrak{a} \subset A$ un ideal de A. Demostrar que $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}' \times \mathfrak{a}''$ vía ϕ.

(ii) Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Demostrar que vía ϕ, $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p}' \times A''$ ó $\mathfrak{p} \cong A' \times \mathfrak{p}''$ para ciertos ideales primos $\mathfrak{p}'$ de A y $\mathfrak{p}''$ de A'' respectivamente.

3. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Demostrar que $\sqrt{\mathfrak{a}} = \cap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$

4. Sea A un anillo $A[X]$ el anillo de polinomios en una indeterminada. Sea $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in A$. Demostrar que f es unidad en $A[X]$ si y sólo si a_0 es unidad y a_i nilpotentes para $i = 1, \ldots, n$.

5. Sea A un DIP,

(1) Si $\mathfrak{a}$ un ideal de A distinto del $\langle 0 \rangle$, demostrar que son equivalentes: (i) $\mathfrak{a}$ es un ideal primo. (ii) $\mathfrak{a}$ es un ideal maximal. (iii) Existe $f \in A$ irreducible tal que $\mathfrak{a} = \langle f \rangle$

(2) Sean $a, b \in A \setminus 0_A$ no unidades y sean $d \in A$ y $m \in A$ tales que, $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle d \rangle$ y $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle m \rangle$. Demostrar que $d = \mathrm{mcd}(a, b)$ y $m = \mathrm{mcm}(a, b)$.

6. (i) Sea A un anillo. Demostrar que existe una biyección entre :

–Las descomposiciones $\Phi : A \to A_1 \times \ldots \times A_n$, donde los A_i son anillos y Φ es isomorfismo de anillos.

–Los subconjuntos de idempotentes ortogonales: $\{(e_1, \ldots, e_r) : r \in \mathbb{N}; \sum_{i=1}^{r} e_i = 1\ ; e_i e_j = \delta_{ij} e_i\}$

(ii) Demostrar que dada una descomposición como en (i) los A_i se identifican con ideales de A (no con subanillos). ¿ Qué descomposición se corresponde con el sistema de idempotentes $\{0_A, 1_A\}$?

7. Encontrar un sistema de idempotentes ortogonales distinto del trivial ($\{0_A, 1_A\}$), y una descomposición asociada (ejerc. anterior) para los siguientes anillos :

(i) $A = \mathbb{Z}/\langle n.m \rangle$, con $\mathrm{mcd}(n, m) = 1$

(ii) $A = \mathbb{Q}[X]/\langle x^2(x-1) \rangle$

(iii) $A = K[X]/\langle f.g \rangle$, con $f, g \in K[X]$, K es un cuerpo y $\mathrm{mcd}(f, g) = 1$

8. (i) Sea $A = \mathbb{R}[x, y]/\langle x^2 + y^2 - 1 \rangle$ y el ideal de A, $\mathfrak{a} = \langle x - 1, y \rangle / \langle x^2 + y^2 - 1 \rangle$. Demostrar que $\mathfrak{a}$ no es un ideal principal.

(ii) Sea $B = \mathbb{C}[x, y]/\langle x^2 + y^2 - 1 \rangle$ y el ideal de B, $\mathfrak{b} = \langle x - 1, y \rangle / \langle x^2 + y^2 - 1 \rangle$. Demostrar que $\mathfrak{b}$ es un ideal principal.

9. Sea A un anillo $\mathfrak{a}$ un ideal de A y $A[X]$ el anillo de polinomios sobre A. Denotemos $\mathfrak{a}[X] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 : a_i \in \mathfrak{a}\}$. Demostrar que $\mathfrak{a}[X]$ es el extendido del ideal $\mathfrak{a}$ vía el homomorfismo $A \to A[X]$. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. ¿Es $\mathfrak{p}[X]$ un ideal primo de $A[X]$?

10. Sea A un anillo, M un A-módulo y $\mathfrak{a}$ un ideal contenido en $\mathrm{A}nul(M) := \{a \in A : \forall x \in M : ax = 0_M\}$. Demostrar que M tiene estructura de $A/\mathfrak{a}$-módulo.

11. Sea A un anillo y $\mathfrak{a}$ ideal de A

(i) Supóngase que $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ son ideales primos de A tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2 \cup \mathfrak{p}_3$. Demostrar que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1$. ó $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_2$, ó $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_3$. (Nota: Para $r = 2$ no es necesario que $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ sean ideales primos.)

(ii) Supóngase que $\mathfrak{p}_i, i = 1..r$ son ideales primos de A tal que

$$\mathfrak{a} \subset \cup_{i=1..r}\mathfrak{p}_i$$

Demostrar que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ para algún i.

12. Sea $\phi : \mathbb{C}[X, Y, Z] \to \mathbb{C}[t]$ el homomorfismo de anillos $X \mapsto t^2; Y \mapsto t^3; Z \mapsto t^4$.

13. Sea A un anillo y $R := A[X_1, \ldots, X_n]$. Sean $a_i \in A$ e I el ideal de R, $I = \langle X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n\rangle$. Demostrar que $A/I \cong A$ y que si A es un cuerpo, I es maximal.

14. Hacer el ejercicio 14 del primer capítulo del Atiyah MacDonald

15. Sea K un cuerpo y $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ una K-álgebra finitamente generada. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) A es un K-espacio vectorial de dimensión finita.

(ii) $\forall i = 1, \ldots, n$ existe un polinomio en una variable $f_i(T) \in K[T] \setminus \{0\}$ tal que $f_i(x_i) = 0_A$

16. Sea A un anillo un ideal $\mathfrak{q}$ se dice que es un ideal *primario* si $\forall x, y \in A$ tal que $x.y \in \mathfrak{q}$ y $x \notin \mathfrak{q}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y^n \in \mathfrak{q}$.

Si $A := \mathbb{Z}$ y p un número primo demostrar que el ideal $\langle p^r\rangle$ es un ideal primario para todo $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(ii) Probar que para todo anillo A, y para todo ideal primario $\mathfrak{q}$, su raíz $\sqrt{\mathfrak{q}}$ es un ideal primo.

(iii) Probar que si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A y $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es un ideal maximal, entonces $\mathfrak{a}$ es un ideal primario.

(iv) Sea $A = \mathbb{Q}[X, Y, Z]/\langle X^2-ZY^2\rangle$ y sea $\mathfrak{p} : \langle X, Z\rangle/\langle X^2-ZY^2\rangle$ y $\mathfrak{q} : \mathfrak{p}^2 = \langle X^2, Z^2, XZ\rangle/\langle X^2-ZY^2\rangle$. Demostrar que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo y $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$.'? Es $\mathfrak{q}$ un ideal primario?

17. Sea A un anillo y $f \in A[T]$, $f = a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots a_1T + a_0$ Decimos que f es un polinomio primitivo si $c(f) := \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ coincide con A (ie. contiene a 1). Demostrar que el producto de polinomios primitivos es un polinomio primitivo.

18. Sea A un anillo M un A- módulo. Se define en $A \times M$ una multiplicación del modo siguiente, usando de manera obvia alternativamente la multiplicación en A y el producto externo de elementos de A por elementos de M:

$$(a, e), (b, f) \in A \times M; (a, e) * (b, f) := (ab, af + be)$$

(i) Demostrar que $A \times M$ con la suma obvia y ese producto constituye una A-álgebra, siendo $1_{A\times M} = (1_A, 0_M)$. ¿Es el homomorfismo de anillos $A \to A \times M; a \mapsto (a, 0_M)$ inyectivo?

19. Hacer los ejercicios 16 y 17 del primer capítulo del Atiyah Macdonald

20. Sea A un anillo $\mathfrak{a}_i, i = 1..r$ ideales tales que para todo $i \neq j$, $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = A$ (i) Llamando $\mathfrak{b}_i = \cap_{j\neq i}\mathfrak{a}_j$, demostrar que $\mathfrak{b}_i + \mathfrak{a}_i = A$, $i = 1..r$ (ii) Demostrar que la aplicación $A \to \prod_{i=1..r} A/\mathfrak{a}_i$, es suprayectiva y su núcleo es $\cap_{j=1..r}\mathfrak{a}_j$. (iii) ¿Cuál es, en el sentido del Ejercicio **6**, el conjunto de idempotentes que descibe esta descomposición?

21. Sea $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$. (i) Estudiar la extensión de ideales. (ii) Si $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo y $\langle p\rangle^e =: \mathfrak{b}$, describir $\mathbb{Z}[i]/\mathfrak{b}$.