En el siguiente capitulo generalizaremos la construcción del cuerpo de los números racionales desde el anillo de los enteros a cualquier dominio de integridad. Para ello, necesitaremos el siguiente concepto.

Definición 0.0.1. Sea A un anillo conmutativo unitario, donde $0_A \neq 1_A$. $S \subset A$ se dice *multiplicativamente cerrado* si se verifica

1. $0_A \notin S$
2. $1_A \in S$
3. $s_1 \cdot s_2 \in S, \forall s_1, s_2 \in S$

Ejemplo 0.0.2.
1. $S = \{1_A\}$ es multiplicativamente cerrado
2. Denotemos como $\mathrm{Div}_0(A)$ al conjunto de los divisores de 0 de A. $S = A \setminus \mathrm{Div}_0(A)$ es multiplicativamente cerrado. En efecto,
   - $0_A \in \mathrm{Div}_0(A)$, pues cualquier $a \in A$ verifica que $a \cdot 0_A = 0_A$. Por tanto, $0_A \notin S$
   - Para cada $a \in A \setminus \{0\}$, $1_A \cdot a = a \neq 0$, luego $a \notin \mathrm{Div}_0(A)$, es decir, $1_A \in S$
   - Dados $s_1, s_2 \in S$ y $x \in A \setminus \{0\}$, $(s_1 \cdot s_2) \cdot x = s_1 \cdot (s_2 \cdot x)$. Como $s_1 \notin \mathrm{Div}_0(A)$, $s_2 \cdot x = 0$, pero como $s_2 \notin \mathrm{Div}_0(A)$, necesariamente $x = 0$, lo que implica $s_1 \cdot s_2 \in S$.
3. Dado $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A, $A \setminus \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativamente cerrado. En efecto,
   - Por ser ideal, $0 \in \mathfrak{p}$
   - Por ser primo, $1 \notin \mathfrak{p}$
   - Por ser primo, si $s_1 \cdot s_2 \in \mathfrak{p}$, necesariamente alguno tiene que estar en $\mathfrak{p}$.

0.1 Construcción del anillo de fracciones

Sea A un anillo conmutativo y unitario. Sea $S \subset A$ un conjunto multiplicativamente cerrado. Definimos en $A \times S$ la siguiente relación

$$(a, s_1) \sim (b, s_2) \iff \exists s' \in S : s'(as_2 - bs_1) = 0$$

Proposición 0.1.1. *La relación '$\sim$' es de equivalencia*

Prueba. Las propiedades reflexiva y simétrica son inmediatas. Para ver la transitiva, supongamos

$$(a, s_1) \sim (b, s_2) \iff \exists s' \in S : s'(as_2 - bs_1) = 0 \tag{1}$$

y

$$(b, s_2) \sim (c, s_3) \iff \exists s'' \in S : s''(bs_3 - cs_2) = 0 \tag{2}$$

Multiplicamos la primera ecuación por $s''s_3$ y la segunda por $s's_1$. Sumando ambas expresiones queda

$$0_A = s_2 s' s''(as_3 - cs_1)$$

lo que es equivalente a $(a, s_1) \sim (c, s_3)$ $\square$

Observación 0.1.2. Es necesario incluir la existencia del $s' \in S$ para que se cumpla la transitividad, no basta con pedir únicamente que se anule la resta entre los paréntesis.

Al conjunto $A \times S/\sim$ se le suele denotar como $S^{-1}A$. A los elementos $[(a, s)]$ se les denota a su vez como $\frac{a}{s}$. Definimos en este conjunto las siguientes operaciones:

- $[(a, s)] + [(b, t)] := [(at + bs, st)]$
- $[(a, s)] \cdot [(b, t)] := [(ab, dt)]$

Nótese que no son más que las operaciones para fracciones normales.

Proposición 0.1.3. *Las operaciones $+$ y $\cdot$ están bien definidas y $(S^{-1}A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo unitario tal que*

$$\begin{array}{rccc} \delta_S : & A & \longrightarrow & S^{-1}A \\ & a & \longmapsto & [(a, 1)] \end{array}.$$

es un homomorfismo de anillos.

Prueba. Veamos que $+$ está bien definida. Supongamos

$$(a_1, s_1) \sim (a_1', s_1') \iff \exists s_1^* \in S : s_1^*(a_1 s_1' - a_1' s_1) = 0 \tag{3}$$

y

$$(a_2, s_2) \sim (a_2', s_2') \iff \exists s_2^* \in S : s_2^*(a_2 s_2' - a_2' s_2) = 0 \tag{4}$$

Multilpicamos (3) por $s_2s_2's_2^*$ y (4) por $s_1s_1's_1^*$ y sumando ambas expresiones queda

$$s_1^*s_2^*((s_1's_2')(a_1s_2+a_2s_1)-(s_1s_2)(a_1's_2'+a_2's_1'))=0$$

Esto se traduce en que

$$\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2}=\frac{a_1'}{s_1'}+\frac{a_2'}{s_2'}.$$

$+$ verifica la propiedad asociativa:

$$\left(\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2}{s_2}\right)+\frac{a_3}{s_3}=\frac{a_1s_2+a_2s_1}{s_1s_2}+\frac{a_3}{s_3}=\frac{a_1s_2s_3+a_2s_1s_3+a_3s_1s_2}{s_1s_2s_3}=$$
$$\frac{a_1}{s_1}+\frac{a_2s_3+a_3s_2}{s_2s_3}=\frac{a_1}{s_2}+\left(\frac{a_2}{s_2}+\frac{a_3}{s_3}\right).$$

La propiedad conmutativa se comprueba fácilmente.

Comprobemos ahora que $\cdot$ está bien definida. Tomemos dos pares $(a_1,s_1)\sim(a_1',s_1')$ y $(a_2,s_2)\sim(a_2',s_2')$. Existen $s_1^*,\ s_2^*\in S$ tales que

$$s_1^*(a_1s_1'-a_1's_1)=0 \tag{5}$$

y

$$s_2^*(a_2s_2'-a_2's_2)=0. \tag{6}$$

Basta multiplicar (5) y (6) por $a_2s_2's_2^*$ y $a_1's_1s_1^*$ respectivamente y sumarlas para obtener $(a_1a_2,s_1s_2)\sim(a_1'a_2',s_1's_2')$, es decir,

$$\frac{a_1}{s_1}\cdot\frac{a_2}{s_2}=\frac{a_1'}{s_1'}\cdot\frac{a_2'}{s_2'}.$$

Es sencillo comprobar que $\cdot$ verifica las propiedades asociativa y conmutativa.

Veamos que se cumple la propiedad distributiva:

$$\frac{a_1}{s_1}\left(\frac{a_2}{s_2}+\frac{a_3}{s_3}\right)=\frac{a_1a_2s_3+a_1a_3s_2}{s_1s_2s_3}=\frac{a_1s_1a_2s_3+a_1a_3s_1s_2}{s_1^2s_2s_3}=\frac{a_1a_2}{s_1s_2}+\frac{a_1a_3}{s_1s_3}.$$

Finalmente, que $\delta_S(a)=[(a,1)]$ es un homomorfismo de anillos se sigue sencillamente de la definición. $\square$

Observación 0.1.4. 1) El elemento neutro para $+$ en $S^{-1}A$ es $0_{S^{-1}A}=[(0,1)]$. Además, para cada $s\in S$, se tiene que $[(0,1)]=[(0,s)]$. En efecto, dado $\frac{a}{s}\in S^{-1}A$,

$$0_{S^{-1}A}+\frac{a}{s}=\frac{0_A}{1}+\frac{0\cdot s+a}{s}=\frac{a}{s}$$

y para cada $s \in S$ se tiene trivialmente $1_A(0_A s - 0_A 1_A) = 0_A$, es decir, $[(0,1)] = [(0,s)]$.

2) Análogamente, el elemento neutro para $\cdot$ en $S^{-1}A$ es $1_{S^{-1}A} = [(1,1)]$ y, para cada $s \in S$, se tiene que $[(1,1)] = [(s,s)]$.

3) El núcleo de δ_S es el conjunto $\{a \in A : [(a,1)] = [(0,s)], s \in S\}$, esto es, existe un s^* tal que $s^*(a-0) = s^*a = 0$. Una condición suficiente para que δ_S sea inyectiva es que A sea dominio de integridad. Concretamente, δ_S es inyectiva si, y sólo si, $S \cap \mathrm{Div}_0(A) = \varnothing$.

0.1.1 Propiedad universal del anillo de fracciones

Teorema 0.1.5. ***(Propiedad universal del anillo de fracciones)*** *Sean A y B anillos, $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado de A y $\varphi : A \longrightarrow B$ de forma que $\varphi(s)$ es unidad en B para toda $s \in S$. Bajo estas hipótesis, existe un único homomorfismo $\Phi : S^{-1}A \longrightarrow B$ que cumple*

$$\varphi = \Phi \circ \delta_S$$

Prueba. Supongamos en primer lugar la existencia de tal homomorfismo y probemos su unicidad. Para todo $a \in A$ se tiene que $\Phi(\frac{a}{1}) = \Phi \circ \delta_S(a) = \varphi(a)$. Por otra parte, dado $s \in S$, se tiene

$$1_B = \Phi\left(\frac{1_A}{1_A}\right) = \Phi\left(\frac{s}{s}\right) = \Phi\left(\frac{s}{1_A}\frac{1_A}{s}\right) = \Phi\left(\frac{s}{1_A}\right)\Phi\left(\frac{1_A}{s}\right) = \varphi(s)\Phi\left(\frac{1_A}{s}\right),$$

es decir, $\Phi(\frac{1_A}{s}) = \varphi(s)^{-1}$. Con todo, para todo $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ se tiene $\Phi(\frac{a}{s}) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$; es decir, Φ está unívocamente determinado por φ.

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos a definir para cada $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$

$$\Phi\left(\frac{a}{s}\right) := \varphi(a)\varphi(s)^{-1}.$$

Veamos que está bien definido. Dados dos elementos $\frac{a}{s}$ y $\frac{a'}{s'}$ en la misma clase de equivalencia, existe $s^* \in S$ tal que $s^*(as' - a's) = 0_A$. Aplicando φ a ambos miembros de la igualdad resulta $\varphi(s^*)(\varphi(a)\varphi(s') - \varphi(a')\varphi(s)) = 0_B$ y, dado que $\varphi(s^*)$ es unidad por hipótesis, tenemos que $\varphi(a)\varphi(s') - \varphi(a')\varphi(s) = 0_B$. De esto se desprende

$$\varphi\left(\frac{a}{s}\right) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1} = \varphi(a')\varphi(s')^{-1} = \Phi\left(\frac{a'}{s'}\right).$$

Esta última igualdad también se apoya en el hecho de que $\varphi(s)$ y $\varphi(s')$ son unidades. $\square$

Observación 0.1.6. 1) El enunciado del teorema se puede reescribir pidiendo que B sea una A-álgebra mediante un homomorfismo φ.

2) De la Propiedad universal del anillo de fracciones se deduce que, en el caso de que A sea un DI y $S = \mathrm{Div}_0(A)$, $S^{-1}A$ es el menor cuerpo que contiene a A.

Supongamos K cuerpo tal que $A \subset K$. Como ya hemos comentado en (0.1.4), δ_S es un homomorfismo inyectivo, luego también se tiene $A \subset S^{-1}A$. Además, por ser $S^{-1}A$ un cuerpo, Φ (definido como en el teorema) es de igual forma inyectivo, por lo que $S^{-1}A \subset K$.

3) Si S_1 y S_2 son conjuntos multiplicativamente cerrados de A tales que $S_1 \subset S_2$, todo $s \in S_1$ verifica que $\delta_{S_2}(s)$ es unidad en ${S_2}^{-1}A$. Así, podemos aplicar el Principio universal del anillo de fracciones y tener que $\delta_{S_2} = \Phi \circ \delta_{S_1}$, de forma que todo elemento $\frac{a}{s}$ de ${S_1}^{-1}A$ se puede ver como uno de ${S_2}^{-1}A$.

Hay que destacar igualmente que Φ no es necesariamente inyectiva, puede existir cierto elemento $\frac{a}{s} \in {S_1}^{-1}A$ tal que $\frac{a}{s} \neq 0_{{S_1}^{-1}A}$ y cumpla $\frac{a}{s} = 0_{{S_2}^{-1}A}$ visto como elemento de ${S_2}^{-1}A$. Una condición suficiente para la inyectividad de Φ es que se tenga $S_2 \cap \mathrm{Div}_0(A) = \varnothing$.

0.2 Módulo de fracciones

De forma similar a como hemos procedido, consideremos A un anillo, $S \subset A$ un conjunto multiplicativamente cerrado y M un A-módulo. Consideremos el conjunto $M \times S$ y definamos en él la siguiente relación de equivalencia $\sim$: dados $(m_1, s_1), (m_2, s_2) \in M \times S$ se tiene

$$(m_1, s_1) \sim (m_2, s_2) \iff \exists s \in S \ s(s_2 m_1 - s_1 m_2) = 0_M.$$

donde el producto que estamos considerando es el exterior de M como A-módulo.

Denotemos $S^{-1}M := M \times S/\sim$ y veamos que lo podemos dotar de una estructura tanto de A-módulo como de $S^{-1}A$-módulo. Definamos las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{rccc} + : & S^{-1}M \times S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}M \\ & ([(m_1, s_1)], [(m_2, s_2)]) & \longmapsto & [(s_2 m_1 + s_1 m_2, s_1 s_2)] \end{array},$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}M \\ & (a, [(m, s)]) & \longmapsto & [(am, s)] \end{array}$$

y

$$
\begin{array}{rccc}
* : & S^{-1}A \times S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}M \\
 & ([(a,s_1)],[(m,s_2)]) & \longmapsto & [(am, s_1s_2)]
\end{array}.
$$

Proposición 0.2.1. *Las aplicaciones* $+$, $\cdot$ *y* $*$ *están bien definidas.*

Prueba. La prueba para $+$ es análoga al caso de los anillos de fracciones. Veamos las otras dos.

Sean $(m,s),(m',s') \in M \times S$ tales que $(m,s) \sim (m',s')$. Existe $s^* \in S$ tal que $s^*(s'm - sm') = 0_M$. Así, dado $a \in A$, tenemos que

$$0_M = a(s^*(s'm - sm') = s^*(s'(am) - s(am')),$$

es decir, $(am,s) \sim (am',s')$ y $\cdot$ está bien definida.

Sean ahora $(a,s_1),(a',s_1') \in S^{-1}A$ y $(m,s_2),(m',s_2') \in M \times S$ tales que $(a,s_1) \sim (a,s_1')$ y $(m,s) \sim (m',s')$. Existen $s_3, s_3' \in S$ tales que

$$s_3(as_1' - a's_1) = 0_A \tag{7}$$

y

$$s_3'(s_2'm - s_2m') = 0_M. \tag{8}$$

A partir de estas igualdades obtenemos las siguientes

$$s_3(as_1' - a's_1)(s_2's_3m) = 0_A(s_2's_3m) = 0_M \tag{9}$$

y

$$(a's_1s_3)s_3'(s_2'm - s_2m') = 0_M \tag{10}$$

y sumándolas resulta

$$s_3s_3'(s_1's_2'am - s_1s_2a'm') = 0_M,$$

es decir, $(am, s_1s_2) \sim (a'm', s_1's_2')$ y $*$ está bien definida. □

Observación 0.2.2. En la prueba de $*$ hay que tener la precaución en este caso (y en comparación con las pruebas anteriores) de que el producto que se considera es el exterior de M. Más aún, los elementos de (7) son elementos de A y los de (8) lo son de M. El paso a (9) y (10) permite sumarlas.

De aquí en adelante, siempre que no haya posibilidad de confusión se omitirá el símbolo $*$.

Corolario 0.2.3. $(S^{-1}M,+)$ *dotado con el producto exterior* $\cdot$ *es un* A*-módulo.*

Corolario 0.2.4. *$(S^{-1}M,+)$ dotado con el producto exterior $*$ es un $S^{-1}A$-módulo.*

Prueba. Comprobemos que se verifican los cuatro axiomas de la definición de $S^{-1}A$-módulo.

i) En primer lugar, claramente se tiene

$$1_{S^{-1}A}\frac{m}{s} = \frac{1_A}{1_A}\frac{m}{s} = \frac{1_A m}{1_A s} = \frac{m}{s}, \qquad \text{para todo } \frac{m}{s} \in S^{-1}M.$$

ii) Sean $\frac{a}{s} \in S^{-1}M$ y $\frac{m_1}{s_1}, \frac{m_2}{s_2} \in S^{-1}M$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{a}{s}\left(\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2}\right) &= \frac{a}{s}\frac{s_2m_1 + s_1m_2}{s_1s_2} = \frac{as_2m_1 + as_1m_2}{ss_1s_2} \\ &\overset{i)}{=} \frac{s}{s}\frac{s_2m_1 + s_1m_2}{ss_1s_2} = \frac{as_2sm_1 + as_1sm_2}{ss_1ss_2} = \frac{am_1}{ss_1} + \frac{am_2}{ss_2}. \end{aligned}$$

iii) Ahora, dados $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}A$ y $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right)\frac{m}{s} &= \frac{a_1s_2 + a_2s_1}{s_1s_2}\frac{m}{s} = \frac{a_1s_2m + a_2s_1m}{s_1s_2s} \\ &\overset{i)}{=} \frac{s}{s}\frac{a_1s_2m + a_2s_1m}{s_1s_2s} = \frac{a_1s_2sm_1 + a_2s_1sm_2}{s_1ss_2s} = \frac{a_1m}{s_1s} + \frac{a_2m}{s_2s} \end{aligned}$$

iv) Por último, sean $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}A$ y $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$. Resulta

$$\left(\frac{a_1}{s_1}\frac{a_2}{s_2}\right)\frac{m}{s} = \frac{(a_1a_2)m}{(s_1s_2)s} = \frac{a_1(a_2m)}{s_1(s_2s)} = \frac{a_1}{s_1}\left(\frac{a_2}{s_2}\frac{m}{s}\right).$$

$\square$

En vista de este último resultado, parece natural definir un funtor, S^{-1}, entre las categorías Mod_A y $\mathrm{Mod}_{S^{-1}A}$ de tal manera que:

- $S^{-1}(M) := S^{-1}M$ para cada M A-módulo y,
- dados M y N A-módulos, para cada $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$

$$S^{-1}(f) := S^{-1}f : \begin{array}{ccc} S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}N \\ \frac{m}{s} & \longmapsto & \frac{f(m)}{s} \end{array}.$$

Lema 0.2.5. *Dados M_1, M_2 y M_3 A-módulos, $f \in \operatorname{Hom}_A(M_1, M_2)$ y $g \in \operatorname{Hom}_A(M_2, M_3)$ se verifica*

$$S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}g \circ S^{-1}f.$$

Prueba. Dado $\frac{m}{s} \in M_1$ se tiene

$$S^{-1}(g \circ f)\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{(g \circ f)(m)}{s} = \frac{g(f(m))}{s} = S^{-1}g\left(\frac{f(m)}{s}\right) = (S^{-1}g \circ S^{-1}f)\left(\frac{m}{s}\right).$$

□

Proposición 0.2.6. *Si $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es una sucesión exacta, entonces la sucesión*

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

también lo es.

Prueba. Veamos en primer lugar la inyectividad y la sobreyectividad de $S^{-1}f$ y $S^{-1}g$ respectivamente. Sea $\frac{m'}{s} \in S^{-1}M'$ tal que $S^{-1}f\left(\frac{m}{s}\right) = 0_{S^{-1}M}$. Por ser así, existe $t \in S$ de forma que $tf(m') = 0_M$ y, como $f \in \operatorname{Hom}_A(M', M)$ y es inyectiva, $tm' = 0_{M'}$, es decir, $\frac{m'}{s} = 0_{S^{-1}M'}$. Consideremos ahora $\frac{m''}{s} \in S^{-1}M''$. Dado $m'' \in M''$ y por ser g sobreyectiva existe $m \in M$ tal que $g(m) = m'$, es decir, $S^{-1}g\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{m''}{s}$.

Comprobemos ahora que $\operatorname{im}(S^{-1}f) = \operatorname{Ker}(S^{-1}g)$. En primer lugar, como $g \circ f \equiv 0_{M''}$, el lema anterior nos dice que

$$0_{S^{-1}M''} \equiv S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}g \circ S^{-1}f,$$

es decir, $\operatorname{im}(S^{-1}f) \subseteq \operatorname{Ker}(S^{-1}g)$. Por otra parte, dado $\frac{m}{s} \in \operatorname{Ker}(S^{-1}g)$, tenemos que existe $t \in S$ tal que $tg(m) = 0_{M''}$ y por ser g homomorfismo esto implica que $tm \in \operatorname{Ker}(g)$, es decir, existe a su vez $m' \in M'$ tal que $f(m') = tm$. Es por esto que basta considerar el elemento $\frac{m'}{ts}$ de forma que $f(\frac{m'}{ts}) = \frac{tm}{ts} = \frac{m}{s}$ y $\operatorname{Ker}(g) \subseteq \operatorname{im}(f)$. □

Podemos demostrar que el funtor S^{-1} es exacto de una forma alternativa. Para ello, probemos antes algunos resultados.

Proposición 0.2.7. *Dado un anillo A y un subconjunto multiplicativamente cerrado $S \subset A$ se tiene que $S^{-1}A$ es un A-módulo plano.*

Prueba. Para probarlo vamos a usar la caracterización por ecuaciones. Sean $a_i \in A$ y $\frac{\alpha_i}{s_i} \in S^{-1}A$, $i \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\alpha_i}{s_i} = 0_{S^{-1}A}.$$

Denotando $s^* := \prod_{j=1}^{n} s_j$ y $s_i^* := \prod_{j \neq i} s_j$ resulta

$$0_{S^{-1}A} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\alpha_i}{s_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{s_i^* \alpha_i}{s^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i s_i^* \alpha_i}{s^*},$$

es decir, existe $t \in S$ tal que

$$t(\sum_{i=1}^{n} a_i s_i^* \alpha_i) = 0_A.$$

De esta forma, basta considerar $m_i' := \frac{1}{ts^*} \in S^{-1}A$ y $\lambda_{i,i} := ts_i^* \alpha_i \in A$ para tener

$$m_i = \lambda_{i,i} m_i'$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_{i,i} = 0_A.$$

□

Proposición 0.2.8. *Dado un anillo A, un subconjunto multiplicativamente cerrado $S \subset A$ y un A-módulo M se tiene*

$$S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M.$$

Prueba. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} F: & S^{-1}A \times M & \longrightarrow & S^{-1}M \\ & (\frac{a}{s}, m) & \longmapsto & \frac{am}{s} \end{array}.$$

En primer lugar, veamos que F está bien definida. Sean $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}$ de forma que existe $s \in S$ tal que $s(s_2a_1 - s_1a_2) = 0_A$. Tenemos que

$$s(s_2a_1m - s_1a_2m) = 0_A \Longleftrightarrow \frac{a_1m}{s_1} = \frac{a_2m}{s_2} \Longleftrightarrow F\left(\frac{a_1}{s_1}, m\right) = F\left(\frac{a_2}{s_2}, m\right).$$

Por otro lado, es claro que F es A-bilineal. Así, tenemos que existe un único homomorfismo A-lineal $f : S^{-1}A \otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M$ tal que $f(\frac{a}{s} \otimes m) = \frac{am}{s}$.

Comprobamos que f es inyectiva. Si $f(\frac{a}{s}\otimes m) = 0_M$, entonces $\frac{am}{s} = 0_{S^{-1}M}$, es decir, existe $t \in S$ tal que $tam = 0_M$. Así,

$$\frac{a}{s}\otimes m = \frac{ta}{ts}\otimes m = \frac{1_A}{ts}\otimes tam = 0_{S^{-1}A\otimes M}$$

La sobreyectividad es clara. Con todo f es un isomorfismo.]

De forma análoga, definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} h: & S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}A\otimes M \\ & \frac{m}{s} & \longmapsto & \frac{1_A}{s}\otimes m \end{array}.$$

De nuevo debemos comprobar que está bien definida. Dados $\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2} \in S^{-1}M$ existe $s \in S$ tal que $s(s_2m_1 - s_1m_2) = 0_M$ o equivalentemente $ss_2m_1 = ss_1m_2$. Es por esto que

$$\begin{aligned} h\left(\frac{m_1}{s_1}\right) &= \frac{1_A}{s_1}\otimes m_1 = \frac{ss_2}{ss_2s_1}\otimes m_1 = \frac{1_A}{ss_2s_1}\otimes ss_2m_1 \\ &= \frac{1_A}{ss_2s_1}\otimes ss_1m_2 = \frac{ss_1}{ss_2s_1}\otimes m_2 = \frac{1_A}{s_2}\otimes m_2 = h\left(\frac{m_2}{s_2}\right). \end{aligned}$$

Por último, tenemos tanto que $h\circ f$ restringida a los elementos de la forma $\frac{a}{s}\otimes m \in S^{-1}A\otimes_A M$ como $f\circ h$ a los $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ resultan ser las respectivas identidades $\mathrm{Id}_{S^{-1}A\otimes_A M}$ y $\mathrm{Id}_{S^{-1}M}$; es decir, $f = h^{-1}$ y

$$S^{-1}A\otimes_A M \cong S^{-1}M.$$

□

Corolario 0.2.9. *El functor* $S^{-1} : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_{S^{-1}A}$ *es exacto.*

Prueba. Dada la sucesión exacta $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$, tensorizando por el A-módulo plano $S^{-1}A$ resulta que

$$S^{-1}A\otimes_A M' \xrightarrow{\mathrm{Id}_{S^{-1}A}\otimes f} S^{-1}A\otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{Id}_{S^{-1}A}\otimes g} S^{-1}A\otimes_A M''$$

también es exacta.

Sean $\varphi : S^{-1}A\otimes_A M' \longrightarrow S^{-1}M$ y $\psi : S^{-1}A\otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M$ los isomorfismos que da la proposición anterior. Veamos que $\mathrm{Id}_{S^{-1}A}\otimes f = \psi^{-1}\circ S^{-1}f\circ\varphi$. Dado $\frac{a}{s}\otimes m \in S^{-1}A\otimes_A M'$, se tiene

$$\begin{aligned} \psi^{-1}\circ S^{-1}f\circ\varphi\left(\frac{a}{s}\otimes m\right) &= \psi^{-1}\circ S^{-1}f\left(\frac{am}{s}\right) \\ &= \psi^{-1}\left(\frac{af(m)}{s}\right) \\ &= \frac{1_A}{s}\otimes af(m) = \frac{a}{s}\otimes f(m) = \mathrm{Id}_{S^{-1}A}\otimes f\left(\frac{a}{s}\otimes m\right). \end{aligned}$$

Esto mismo se prueba para el homomorfismo $\mathrm{Id}_{S^{-1}A} \otimes g$ y los A-módulos M y M''. De todo lo anterior se sigue que la sucesión

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

es exacta. $\square$

Proposición 0.2.10. *1. Dado $\mathfrak{a}$ un ideal de A, $\mathfrak{a}^{ec} = \{x \in A : \exists S, sx \in \mathfrak{a}\}$*

2. Todo ideal (propio) de $\mathfrak{a}'$ de $S^{-1}A$ es extendido de uno de A (que no corta a S).

3. Un ideal $\mathfrak{a}$ de A es contraido si y solo si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}$

4. La extensión-contracción da una biyección entre los ideales primos de A cuya intersección con S es vacío y los ideales primos de $S^{-1}A$.

Algunas observaciones antes de comenzar la prueba que son de caracter más general.

Lema 0.2.11. *Sea A un anillo, $S \subset A$ multiplicativamente cerrado, y $\mathfrak{a} \subset A$ un ideal. Entonces la extensión de $\mathfrak{a}$ es*

$$\mathfrak{a}^e = \left\{\frac{a}{s} | \ a \in \mathfrak{a}, s \in S\right\} \tag{11}$$

Prueba. Trabajamos sobre un elemento genérico de $\mathfrak{a}^e$. Sea $r \in \mathbb{N}$ y sean $a_i \in \mathfrak{a}, x_i \in A, s_i \in S$ para $i = 1, \dots, r$, entonces

$$\sum_{i=1}^{r} \delta(a_i)\frac{x_i}{s_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{1}\frac{x_i}{s_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{1}\frac{x_i s_i^*}{s^*}$$

donde $s_i^* = \prod_{j \neq i} s_j$, $s^* = \prod_{i=1}^{r} s_i$. Esto está justificado porque

$$1_A(s^*x_i - s_i x_i s_i^*) = 1_A(s^*x_i - s^*x_i) = 0_A$$

entonces, aplicando las propiedades de las operaciones en el anillo de fracciones y que $\mathfrak{a}$ es un ideal

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{1}\frac{x_i s_i^*}{s^*} = \frac{\sum_{i=1}^{r} a_i x_i s_i^*}{s^*} = \frac{a}{s^*}$$

con $a \in \mathfrak{a}$. El contenido contrario es automático porque si $a \in \mathfrak{a}, s \in S$ entonces $\frac{a}{s} = \delta(a)\frac{1}{s} \in \mathfrak{a}^e$. $\square$

Prueba de la proposición 0.2.10. 1. Si $x \in A, s \in S$ son tales que $sx = a \in \mathfrak{a}$ entonces

$$\delta(x) = \frac{x}{1} = \frac{a}{s} = \frac{a}{1}\frac{1}{s} = \delta(a)\frac{1}{s} \in \mathfrak{a}^e$$

por tanto $x \in \mathfrak{a}^{ec}$. Recíprocamente, si tomamos $x \in \mathfrak{a}^{ec}$, entonces existe $y \in \mathfrak{a}$ tal que $x \in \delta^{-1}(\frac{y}{1})$, o equivalentemente, $\delta(x) = \frac{x}{1} = \frac{y}{1}$. Esto quiere decir que existe $s \in S$ tal que $0 = s(x - y) = sx - sy$, por lo que $sx = sy \in \mathfrak{a}$.

2. Sea $\mathfrak{a}' \subsetneq S^{-1}A$ un ideal. Sabemos que en general $\mathfrak{a}'^{ec} \subset \mathfrak{a}'$ así que solo hay que demostrar el otro contenido. Sea $z = \frac{x}{s} \in \mathfrak{a}'$, con $x \in A$ y $s \in S$. Resulta que $x \in \mathfrak{a}'^c$ ya que

$$\delta(x) = \frac{x}{1} = \frac{s}{1}\frac{x}{s}\mathfrak{a}'$$

y entonces x es preimagen de un elemento del ideal. Entonces $\frac{x}{1} \in \mathfrak{a}'^{ce}$ y por tanto $\frac{x}{s} = \frac{1}{s}\frac{x}{1} \in \mathfrak{a}'^{ce}$. Es decir, $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}'^{ce}$. Esto prueba que $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}'^c)^e$ y así es el extendido de un ideal de A.

Además, sí $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^e$ es propio, entonces $\mathfrak{a} \cap S \neq \varnothing$, pues si $s_0 \in \mathfrak{a} \cap S$, como los elementos de $\mathfrak{a}^e$ son de la forma $\frac{a}{s}$ con $a \in \mathfrak{a}, s \in S$, entonces $\frac{s_0}{s_0} = 1_{S^{-1}A} \in \mathfrak{b}$ y por tanto $\mathfrak{b} = S^{-1}A$.

3. Esta propiedad se cumple siempre como se prueba en el lema **??**.

4. La contracción de un ideal propio $\mathfrak{b}$ es siempre ideal propio por ser preimagen y porque $1 \notin \mathfrak{b}$ y los homomorfismos llevan la unidad en la unidad. Según se indica en la observación **??**, la contracción conserva la primalidad. Además, por *2* el contraído no corta a S, porque por ser primo es propio.

Por otra parte, sea $\mathfrak{p}$ ideal primo de A que no corta a S. Sean $\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2} \in S^{-1}A$ tales que $\frac{x_1}{s_1} \cdot \frac{x_2}{s_2} = \frac{p}{s} \in \mathfrak{p}^e$ [1]. Existe $s' \in S$ tal que $s'(sx_1x_2 - s_1s_2p) = 0_A$, y asi $s'sx_1x_2 \in \mathfrak{p}$. Como $s's \notin \mathfrak{p}$ porque $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, entonces $x_1x_2 \in \mathfrak{p}$, y a su vez $x_1 \in \mathfrak{p}$ o $x_2 \in \mathfrak{p}$, lo que implica que $\frac{x_1}{s_1} \in \mathfrak{p}^e$ o $\frac{x_2}{s_2} \in \mathfrak{p}^e$, y así $\mathfrak{p}^e$ es primo.

Finalmente, veamos que hay una biyección via la extensión-contracción. Sea $\mathfrak{p}$ primo en A tal que no corta a S, por *1* sabemos que $\mathfrak{p}^{ec} = \{x \in A | \exists S, sx \in \mathfrak{p}\}$. Si $sx \in \mathfrak{p}$, como $s \notin \mathfrak{p}$, entonces $x \in \mathfrak{p}$, es decir, $\mathfrak{p}^{ec} = \{x \in A | x \in \mathfrak{p}\} = \mathfrak{p}$. Por otro lado, dado $\mathfrak{p}'$ ideal primo de $S^{-1}A$, por *2* existe un $\mathfrak{a} \subset A$ tal que $\mathfrak{p}' = \mathfrak{a}^e$, y entonces $\mathfrak{p}'^{ce} = \mathfrak{a}^{ece} = \mathfrak{a}^e = \mathfrak{p}'$, usando el lema **??**.

□

[1] sabemos que los elementos de $\mathfrak{p}^e$ son de esa forma por el lema anterior.

Ejemplo 0.2.12. Sea A un anillo y $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Spec}(A)$. Sea $S = A \setminus \mathfrak{p}_0$. S es multiplicativamente cerrado y definimos $A_{\mathfrak{p}_0} = S^{-1}A$. Existe una biyección, dada por la extensión-contracción, entre

$$\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}_0}) \longleftrightarrow \operatorname{Spec}(A)\backslash\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) : \mathfrak{p}\cap(A\backslash\mathfrak{p}_0) = \varnothing\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) : \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_0\}$$

Esta relación es análoga a la que da el teorema de la correspondencia entre los ideales del cociente y los ideales del anillo que contienen al ideal por el que cocientamos.

Geométricamente, tomando $A \xrightarrow{\delta} A_{\mathfrak{p}_0}$, se considera $\delta^* : \operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}_0}) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$, siendo $\operatorname{im}(\delta^*) = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_0\}$. De esta forma, todo ideal primo de $A_{\mathfrak{p}_0}$ es el extendido de un ideal primo de A que está contenido en $\mathfrak{p}_0$. Es decir, todo ideal primo de $A_{\mathfrak{p}_0}$ está contenido en $\mathfrak{p}_0^e$.

$A_{\mathfrak{p}_0}$ es un anillo local. Su único ideal maximal es $\mathfrak{p}_0^e = \{\frac{x}{s} : x \in A, s \notin \mathfrak{p}_0\}$.

Definición 0.2.13. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo A. Un ideal $\mathfrak{q}$ se dice $\mathfrak{p}$-*primario* si $\mathfrak{q}$ es primario y $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$.

Proposición 0.2.14. *Sea A un anillo,* $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Spec}(A)$*, y* $A_{\mathfrak{p}_0}$*. Hay una biyección entre los ideales primos de A contenidos en* $\mathfrak{p}_0$ *y los ideales primos de* $A_{\mathfrak{p}_0}$*. Esta biyección conserva el ser* $\mathfrak{p}_0$*-primario.*

Prueba. Consideremos $\delta : A \longrightarrow A_{\mathfrak{p}_0}$. Supongamos $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{p}_0$-primario. Veamos que $\mathfrak{q}^e$ es $A_{\mathfrak{p}_0}$-primario. Sean $\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2} \in A_{\mathfrak{p}_0}$ tal que $\frac{x_1}{s_1}\frac{x_2}{s_2} \in \mathfrak{q}^e$. Supongamos que $\frac{x_1}{s_1} \notin \mathfrak{q}^e$. Se tiene $\frac{x_1}{s_1}\frac{x_2}{s_2} = \frac{q}{s}$, con $q \in \mathfrak{q}$, $s \notin \mathfrak{p}_0$. Esto es, existe $s' \notin \mathfrak{p}_0$ tal que $s'(sx_1x_2 - qs_1s_2) = 0_A$, luego $s'sx_1x_2 \in \mathfrak{q}$.

Como $\frac{x_1}{s_1} \notin \mathfrak{q}^e, x_1 \notin \mathfrak{q}$, pues de estarlo podríamos escribir $\frac{x_1}{s_1} = \frac{x_1}{1}\frac{1}{s_1} \in \mathfrak{q}^e$. Entonces, por ser $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{p}_0$-primario, $s'sx_2 \in \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}_0$. Por ser $\mathfrak{p}_0$ primo y $ss' \notin \mathfrak{p}_0$, $x_2 \in \mathfrak{p}_0$. Por tanto, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_2^n \in \mathfrak{q}^n$, luego $(\frac{x_2}{s_2})^n \in \mathfrak{q}^e$. Hemos visto que $\mathfrak{q}^e$ es primario y que su raíz es $\mathfrak{p}_0$, pues $\frac{x_2}{s_2} \in \mathfrak{p}_0^e$.

Recíprocamente, tomemos un ideal $\mathfrak{q}'$ que sea $\delta(\mathfrak{p}_0)A_{\mathfrak{p}_0}$-primario. Nótese que $\delta(\mathfrak{p}_0)A_{\mathfrak{p}_0} = \mathfrak{p}_0^e$. Supongamos $x_1, x_2 \in A$ tal que $x_1x_2 \in \mathfrak{q}'^c$ y $x_1 \notin \mathfrak{q}'^c$. Esto es, $\frac{x_1x_2}{1} \in \mathfrak{q}'$. Como $\frac{x_1}{1} \notin \mathfrak{q}'$, se tiene que $\frac{x_2}{1} \in \mathfrak{p}_0^e$, ya que $\mathfrak{q}'$ es p_0^e-primario. Es decir, $x_2 \in \mathfrak{p}_0^{ec} = \delta^{-1}(\mathfrak{p}_0^e)$. Como $\mathfrak{p}_0^{ec} = \mathfrak{p}_0$, $x_2 \in \mathfrak{p}_0$. □

Observación 0.2.15. Dado $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Spec}(A)$, $\mathfrak{p}_0^n$ no es necesariamente $\mathfrak{p}_0$-primario. Sin embargo, hay algo que se le aproxima bastante.

Tomando $A \xrightarrow{\delta} A_{\mathfrak{p}_0}$, $\mathfrak{p}_0^e$ es maximal. En este caso, sí tenemos que $(\mathfrak{p}_0^e)^n$ tiene por raíz un maximal, a saber $\mathfrak{p}_0^e$, p_0^e-primario. Se tiene que $((\mathfrak{p}_0^e)^n)^e$ es $\mathfrak{p}_0$-primario.

A esto se le llama *potencias simbólicas* y se denota $\mathfrak{p}_0^n$.

Tenemos ya maquinaria suficiente para construir anillos locales.

Teorema 0.2.16 (de Cayley). *Sean A un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal de A, M un A-módulo finitamente generado y $f : M \longrightarrow M$ una aplicación A-lineal tal que $f(M) \subset \mathfrak{a}M$. Entonces, existen $a_i \in \mathfrak{a}, n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$f^{(n)} + a_1 s^{(n-1)} + \cdots + a_i I_M = 0_{Hom_A(M,M)}$$

donde cada $f^{(i)} = f \circ \overset{(i)}{\ldots} \circ f$

Prueba. Se sabe que M tiene estructura de $A[X]$-módulo via f con la operación externa dada por

$$\begin{aligned} * : A[X] \times M &\to M && (12)\\ (P, m) &\mapsto P(f)(m) && (13)\end{aligned}$$

donde $P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$ y $P(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f^{(i)}$ siendo $f^{(0)} = 1_M$.

Sean $m_1, \ldots, m_r \in M$ generadores de M como A-módulo. Para cada $i, j = 1, \ldots, r$ existen $\lambda_{ij} \in \mathfrak{a}$ tales que $f(m_i) = \sum_{j=1}^{r} lambda_{ij} m_j$. Esto da lugar a un sistema de ecuaciones tal que

$$\begin{cases} (X_1 - \lambda_{11}) * m_1 - \lambda_{12} * m_2 \cdots - \lambda_{1r} * m_r = 0_M \\ -\lambda_{21} * m_1 + (X_2 - \lambda_{22}) * m_2 \cdots - \lambda_{2r} * m_r = 0_M \\ \vdots \\ -\lambda_{r1} * m_1 - \lambda r2 * m_2 \cdots + (X_r - \lambda_{rr}) * m_r = 0_M \end{cases} \tag{14}$$

que podemos escribir de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} (X_1 - \lambda_{11}) & -\lambda_{12} & \ldots & -\lambda_{1r} \\ -\lambda_{21} & (X_2 - \lambda_{22}) & \ldots & -\lambda_{2r} \\ \vdots & & & \\ -\lambda_{r1} & -\lambda_{r2} & \ldots & -\lambda_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Sea Ω la matriz, y consideremos la matriz adjunta traspuesta $\operatorname{Adj} \Omega^T$. Por la formula de la matriz inversa, sabemos que $(\operatorname{Adj} \Omega^T)\Omega = \operatorname{diag}(\det \Omega)$ es una matriz diagonal con toda la diagonal igual al determinante de la matriz. Además

$$\det \Omega = X^r + a_{r-1} X^{r-1} + \cdots + a_r$$

con $a_i \in \mathfrak{a}$, porque los términos de grado $< r$ se obtienen multiplicando entradas de la matriz alguna de las cuales está fuera de la diagonal. Entonces multiplicando por $\operatorname{Adj}\Omega^T$ en el sistema matricial obtenemos que

$$\det \Omega * m_i = \det \Omega(f)(m_i) = 0$$

para cada $i = 1, \ldots, r$. Como se anula sobre cada uno de los generadores, se anula sobre todo M. □

Lema 0.2.17 (de Nakayama). *Se expresa en tres formulaciones equivalentes.*

1. *Sea A un anillo local, $\mathfrak{m}$ su único ideal maximal y M un A-módulo finitamente generado. Si $\mathfrak{m}M = M$, entonces $M = 0$.*

2. *Sea A un anillo local, $\mathfrak{m}$ su único ideal maximal y M un A-módulo finitamente generado. Si $N \subset M$ es un submódulo y $N + \mathfrak{m}M = M$, entonces $M = N$.*

3. *Sea A un anillo local, $\mathfrak{m}$ su único ideal maximal y M un A-módulo finitamente generado. Sean $m_1, \ldots, m_r \in M$ tales que $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_r} \in M/\mathfrak{m}M$ son sistema de generadores de $M/\mathfrak{m}$ como $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial. Entonces, $m_1, \ldots, m_r$ son sistema de generadores de M como A-módulo.*

Prueba. Probemos primero *1*, que es una consecuencia del Teorema de Cayley.

Tomemos $M \xrightarrow{id} M$ y supongamos $id(M) = M = \mathfrak{m}$. Entonces existen $a_i \in \mathfrak{m}, n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_{(n-1)} f = 0_{End_A(M)}$$

Dado un sistema de generadores $m_1, \ldots, m_r$ de M,

$$(1 + a_1 + \cdots + a_n) m_i = 0, \forall i = 1, \ldots, r$$

Como $a_1 + \cdots + a_r \in \mathfrak{m}$, $1 + a_1 + \cdots + a_r \notin \mathfrak{m}$, es decir, es una unidad y tiene inverso. Esto significa que cada $m_i = 0$.

2. Esta afirmación es una consecuencia de *1*. Basta observar la siguiente cadena de isomorfismos

$$\mathfrak{m}\left({M}/{N}\right) \cong {\mathfrak{m}M}/{N} \cong 0 + {\mathfrak{m}M}/{N} \cong {(N + \mathfrak{m}M)}/{N} \cong {M}/{N}.$$

Así, aplicando *1* tenemos que $M/N \cong \{ 0 \}$ y, como tenemos $N \subset M$, esto implica que $N = M$.

3. Veamos que las hipótesis tienen sentido. Tenemos M un A-módulo, $\mathfrak{m}M \subset M$ un submódulo suyo luego $A/\mathfrak{m}M$ A-módulo cociente está bien definido. Como

$\mathfrak{m} \subset \mathrm{Anul}_A(M/\mathfrak{m}M)$, se tiene que $M/\mathfrak{m}M$ es un $A/\mathfrak{m}$-módulo, que además es finitamente generado por serlo M. Como $A/\mathfrak{m}$ es también un cuerpo, podemos ver a $M/\mathfrak{m}M$ como un $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial.

Sea $N = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle_A$ el submódulo de M generado por las m_i. Veamos que se cumplen las hipótesis de *2*, es decir, $N + \mathfrak{m}M = M$.

'$\supset$' es directo. Para ver '$\subset$', tomamos $x \in M$. Su clase $\overline{x}$ pertenece a $M/\mathfrak{m}M$. Por hipótesis, existen $a_i \in A$ tales que $\overline{x} = \sum_{i=1}^{r} \overline{a_i m_i}$. Restando, se obtiene que $x - \sum_{i=1}^{r} \overline{a_i m_i} \in \mathfrak{m}M$, pues esto es el 0 del cociente. Entonces, hemos expresado x como combinación lineal de los m_i, que pertenece a N y un elemento de $\mathfrak{m}M$. Luego $M = N + \mathfrak{m}M$. Por *2*, $M = N = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle_A$, es decir, los m_i son generadores de M, tal y como queríamos probar. □

Definición 0.2.18. Un sistema de generadores $S = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle$ de un A-módulo M se dice *minimal* si no existe ningún sistema de generadores de M formado por elementos de S que no sean el total.

Corolario 0.2.19. *Sea A un anillo local y sea $\mathfrak{m}$ su único ideal maximal. Sea M un A-módulo finitamente generado. Entonces, todos los sistemas minimales de generadores de M tienen el mismo cardinal.*

Prueba. Sea $\langle m_1, \ldots, m_r \rangle$ un sistema de generadores de M como A-módulo. Definimos, para cada $i = 1, \ldots, r$ $\overline{m_i} = m_i + \mathfrak{m}M$. Se cumple que

$$\{\overline{m_i} : 1 \leq i \leq r\}$$

es un sistema de generadores de $M/\mathfrak{m}M$ como $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial.

Supongamos que $r > \dim_{A/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M) =: s$. Sea entonces $\{\overline{x_{i_1}}, \ldots, \overline{x_{i_s}}\}$ una base (también sistema de generadores) de $M/\mathfrak{m}M$ como $A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial. Por la versión *3* de 0.2.17 los $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$ son sistema de generadores de M como A-módulo, lo cual contradice la hipótesis de minimalidad de las $m_1, \ldots, m_r$. □

Ejemplo 0.2.20. 1. Sean $A := \mathbb{R}[x,y]/\langle x^2 + y^2 - 1 \rangle$ y $\mathfrak{m}_0 := \langle \overline{x}, \overline{y-1} \rangle$ (se comprueba que no es ideal principal de A). Tenemos que

$$A_{\mathfrak{m}_0} := \left\{ \frac{\overline{f}(x,y)}{\overline{g}(x,y)} \mid \overline{g} \notin \mathfrak{m}_0 \right\} = \left\{ \frac{\overline{f}(x,y)}{\overline{g}(x,y)} \mid g(0,1) \neq 0 \right\}$$

Observemos que $\overline{x}^2 = (\overline{y-1})(\overline{y+1})$ en A. Como $\overline{y+1} \notin \mathfrak{m}_0$, $\frac{\overline{y-1}}{\overline{1}}$ es unidad en $A_{\mathfrak{m}_0}$ y $\overline{y-1} \in \langle \overline{x} \rangle A_{\mathfrak{m}_0}$, es decir, $\mathfrak{m}_0 A_{\mathfrak{m}_0} = \langle \overline{x} \rangle A_{\mathfrak{m}_0}$ y $A_{\mathfrak{m}_0}$ es principal.

2. De forma más general, sean K un cuerpo y $f \in K[x,y]$ tal que $f(a,b) = 0_K$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ para ciertos $a, b \in K$. Denotemos $A := K[x,y]/\langle f(x,y) \rangle$ y $\mathfrak{m}_0 := \langle \overline{x-a}, \overline{y-b} \rangle$. Se verifica que $\mathfrak{m}_0 A_{\mathfrak{m}_0}$ es ideal principal.

En $K[x,y]$ tenemos el desarrollo de Taylor de f en (a,b)

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + T, \tag{16}$$

donde T es el resto de términos de grado ≥ 2. Esta expresión, tomando clases de equivalencia se convierte en

$$0_A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(\overline{x-a}) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(\overline{y-b}) + \overline{T}. \tag{17}$$

Definiendo ahora $M := \mathfrak{m}_0 A_{\mathfrak{m}_0}$ se tiene que

$$M/\mathfrak{m}_0 M = \mathfrak{m}_0 A_{\mathfrak{m}_0}/\mathfrak{m}_0{}^2 A_{\mathfrak{m}_0}$$

es $A_{\mathfrak{m}_0}/\mathfrak{m}_0 A_{\mathfrak{m}_0}$-espacio vectorial. Así, por ser $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ es unidad y $\frac{\overline{1}}{\overline{1}} + \mathfrak{m}_0{}^2 A_{\mathfrak{m}_0}$ genera $M/\mathfrak{m}_0 M$. Por la versión 3 de 0.2.17 M está generado por un único elemento, concretamente $\frac{\overline{x-1}}{\overline{1}}$.

Teorema 0.2.21. *Si A es un anillo local y M un A-módulo finitamente generado, entonces son equivalentes*

- *i) M es libre,*
- *ii) M es proyectivo y*
- *iii) M es plano.*

Prueba. Basta ver que plano implica libre. Sabemos que todos los sistemas minimales de generadores tienen mismo cardinal $\dim_{A/\mathfrak{a}}(M/\mathfrak{m}M) = r$ donde $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de A. Veamos que todo conjunto de r elementos de M que sean $A/\mathfrak{m}$-linealmente independientes, también son A-linealmente independientes. Lo probamos por inducción sobre r.

En el caso de $r = 1$, sea $x_1 \in M$ con $\{\bar{x}_1\}$ base de $M/\mathfrak{m}M$ como espacio vectorial. Sea $a \in A$ tal que $ax_1 = 0_M$, veamos que $a = 0_A$. Necesariamente $a \in \mathfrak{m}$ pues, si no es una unidad y podríamos despejar $x_1 = 0_M$, dando un absurdo con que $\bar{x}_1$ sea base. Por ser M plano y $ax_1 = 0_M$ existen unos $\lambda_{1j} \in A$ y $y_j \in M$ para $j = 1, \ldots, s$ tales que

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j y_j \\ 0_A = \lambda_j a \qquad\qquad \forall j = 1, \ldots, s \end{cases}$$

No puede ser que $\lambda_j \in \mathfrak{m}$ para todo $j = 1, \ldots, s$, porque si no $\bar{x}_1 = \bar{0}$. Por tanto existe un j_0 tal que $\lambda_{j_0} \notin \mathfrak{m}$ luego es una unidad y despejando queda $a = 0_A$.

Supongamos que es cierto para $r-1$ y lo demostramos para r. Sea $\{x_1, \ldots, x_r\}$ base de $M/\mathfrak{m}M$ como $A/\mathfrak{m}$ espacio vectorial. Sean $a_1, \ldots, a_r$ tales que

$$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = 0_M \tag{18}$$

Como M es plano, existen $y_j \in M$ y $\lambda_{ij} \in A$ para $i = 1, \ldots, r$ y $j = 1, \ldots, s$ tales que

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} y_j & \forall i = 1, \ldots, r \\ 0_A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ij} a_i & \forall j = 1, \ldots, s \end{cases}$$

Por ser un elemento de la base, $\bar{x}_1 \neq \bar{0}$, por eso y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda_{1s} \notin \mathfrak{m}$, así es una unidad y podemos despejar

$$a_1 = -\lambda_{1s}^{-1} \sum_{i=2}^{r} \lambda_{is} a_i = \sum_{i=2}^{r} v_i a_i \tag{19}$$

con $v_i = -\lambda_{1s}^{-1} \lambda_{is}$ para cada $i = 2, \ldots, r$. Sustituyendo en (18) lo anterior tenemos

$$0_M = \sum_{i=2}^{r} a_i (v_i x_1 + x_i)$$

Por la hipótesis de inducción, dado que $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r$ es un conjunto de $r-1$ vectores $A/\mathfrak{m}$-linealmente independientes, $x_2, \ldots, x_r$ son A-linealmente independientes. Deducimos entonces que $a_i = 0_A$ para todo $i = 2, \ldots, r$, y por (19) también $a_1 = 0$.

$\square$