

En el siguiente capitulo generalizaremos la construcción del cuerpo de los números racionales desde el anillo de los enteros a cualquier dominio de integridad. Para ello, necesitaremos el siguiente concepto.

**Definición 0.0.1.** Sea  $A$  un anillo conmutativo unitario, donde  $0_A \neq 1_A$ .  $S \subset A$  se dice *multiplicativamente cerrado* si se verifica

1.  $0_A \notin S$
2.  $1_A \in S$
3.  $s_1 \cdot s_2 \in S, \forall s_1, s_2 \in S$

**Ejemplo 0.0.2.** 1.  $S = \{1_A\}$  es multiplicativamente cerrado

2. Denotemos como  $\text{Div}_0(A)$  al conjunto de los divisores de 0 de  $A$ .  $S = A \setminus \text{Div}_0(A)$  es multiplicativamente cerrado. En efecto,

- $0_A \in \text{Div}_0(A)$ , pues cualquier  $a \in A$  verifica que  $a \cdot 0_A = 0_A$ . Por tanto,  $0_A \notin S$
- Para cada  $a \in A \setminus \{0\}$ ,  $1_A \cdot a = a \neq 0$ , luego  $a \notin \text{Div}_0(A)$ , es decir,  $1_A \in S$
- Dados  $s_1, s_2 \in S$  y  $x \in A \setminus \{0\}$ ,  $(s_1 \cdot s_2) \cdot x = s_1 \cdot (s_2 \cdot x)$ . Como  $s_1 \notin \text{Div}_0(A)$ ,  $s_2 \cdot x = 0$ , pero como  $s_2 \notin \text{Div}_0(A)$ , necesariamente  $x = 0$ , lo que implica  $s_1 \cdot s_2 \in S$ .

3. Dado  $\mathfrak{p}$  un ideal primo de  $A$ ,  $A \setminus \mathfrak{p}$  es un conjunto multiplicativamente cerrado. En efecto,

- Por ser ideal,  $0 \in \mathfrak{p}$
- Por ser primo,  $1 \notin \mathfrak{p}$
- Por ser primo, si  $s_1 \cdot s_2 \in \mathfrak{p}$ , necesariamente alguno tiene que estar en  $\mathfrak{p}$ .

## 0.1 Construcción del anillo de fracciones

Sea  $A$  un anillo conmutativo y unitario. Sea  $S \subset A$  un conjunto multiplicativamente cerrado. Definimos en  $A \times S$  la siguiente relación

$$(a, s_1) \sim (b, s_2) \iff \exists s' \in S : s'(as_2 - bs_1) = 0$$

**Proposición 0.1.1.** *La relación ‘ $\sim$ ’ es de equivalencia*

*Prueba.* Las propiedades reflexiva y simétrica son inmediatas. Para ver la transitiva, supongamos

$$(a, s_1) \sim (b, s_2) \iff \exists s' \in S : s'(as_2 - bs_1) = 0 \quad (1)$$

y

$$(b, s_2) \sim (c, s_3) \iff \exists s'' \in S : s''(bs_3 - cs_2) = 0 \quad (2)$$

Multiplicamos la primera ecuación por  $s''s_3$  y la segunda por  $s's_1$ . Sumando ambas expresiones queda

$$0_A = s_2s's''(as_3 - cs_1)$$

lo que es equivalente a  $(a, s_1) \sim (c, s_3)$  □

**Observación 0.1.2.** Es necesario incluir la existencia del  $s' \in S$  para que se cumpla la transitividad, no basta con pedir únicamente que se anule la resta entre los paréntesis.

Al conjunto  $A \times S / \sim$  se le suele denotar como  $S^{-1}A$ . A los elementos  $[(a, s)]$  se les denota a su vez como  $\frac{a}{s}$ . Definimos en este conjunto las siguientes operaciones:

- $[(a, s)] + [(b, t)] := [(at + bs, st)]$
- $[(a, s)] \cdot [(b, t)] := [(ab, dt)]$

Nótese que no son más que las operaciones para fracciones normales.

**Proposición 0.1.3.** *Las operaciones  $+$  y  $\cdot$  están bien definidas y  $(S^{-1}A, +, \cdot)$  es un anillo conmutativo unitario tal que*

$$\begin{aligned} \delta_S : A &\longrightarrow S^{-1}A \\ a &\longmapsto [(a, 1)] \end{aligned}$$

*es un homomorfismo de anillos.*

*Prueba.* Veamos que  $+$  está bien definida. Supongamos

$$(a_1, s_1) \sim (a'_1, s'_1) \iff \exists s_1^* \in S : s_1^*(a_1s'_1 - a'_1s_1) = 0 \quad (3)$$

y

$$(a_2, s_2) \sim (a'_2, s'_2) \iff \exists s_2^* \in S : s_2^*(a_2s'_2 - a'_2s_2) = 0 \quad (4)$$

Multiplicamos (3) por  $s_2 s'_2 s_2^*$  y (4) por  $s_1 s'_1 s_1^*$  y sumando ambas expresiones queda

$$s_1^* s_2^* ((s'_1 s'_2)(a_1 s_2 + a_2 s_1) - (s_1 s_2)(a'_1 s'_2 + a'_2 s'_1)) = 0$$

Esto se traduce en que

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a'_1}{s'_1} + \frac{a'_2}{s'_2}.$$

+ verifica la propiedad asociativa:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} \right) + \frac{a_3}{s_3} &= \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2} + \frac{a_3}{s_3} = \frac{a_1 s_2 s_3 + a_2 s_1 s_3 + a_3 s_1 s_2}{s_1 s_2 s_3} = \\ \frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2 s_3 + a_3 s_2}{s_2 s_3} &= \frac{a_1}{s_2} + \left( \frac{a_2}{s_2} + \frac{a_3}{s_3} \right). \end{aligned}$$

La propiedad conmutativa se comprueba fácilmente.

Comprobemos ahora que  $\cdot$  está bien definida. Tomemos dos pares  $(a_1, s_1) \sim (a'_1, s'_1)$  y  $(a_2, s_2) \sim (a'_2, s'_2)$ . Existen  $s_1^*, s_2^* \in S$  tales que

$$s_1^*(a_1 s'_1 - a'_1 s_1) = 0 \quad (5)$$

y

$$s_2^*(a_2 s'_2 - a'_2 s_2) = 0. \quad (6)$$

Basta multiplicar (5) y (6) por  $a_2 s'_2 s_2^*$  y  $a'_1 s_1 s_1^*$  respectivamente y sumarlas para obtener  $(a_1 a_2, s_1 s_2) \sim (a'_1 a'_2, s'_1 s'_2)$ , es decir,

$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{a'_1}{s'_1} \cdot \frac{a'_2}{s'_2}.$$

Es sencillo comprobar que  $\cdot$  verifica las propiedades asociativa y conmutativa.

Veamos que se cumple la propiedad distributiva:

$$\frac{a_1}{s_1} \left( \frac{a_2}{s_2} + \frac{a_3}{s_3} \right) = \frac{a_1 a_2 s_3 + a_1 a_3 s_2}{s_1 s_2 s_3} = \frac{a_1 s_1 a_2 s_3 + a_1 a_3 s_1 s_2}{s_1^2 s_2 s_3} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2} + \frac{a_1 a_3}{s_1 s_3}.$$

Finalmente, que  $\delta_S(a) = [(a, 1)]$  es un homomorfismo de anillos se sigue sencillamente de la definición.  $\square$

**Observación 0.1.4.** 1) El elemento neutro para  $+$  en  $S^{-1}A$  es  $0_{S^{-1}A} = [(0, 1)]$ . Además, para cada  $s \in S$ , se tiene que  $[(0, 1)] = [(0, s)]$ . En efecto, dado  $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ ,

$$0_{S^{-1}A} + \frac{a}{s} = \frac{0_A}{1} + \frac{0 \cdot s + a}{s} = \frac{a}{s}$$

y para cada  $s \in S$  se tiene trivialmente  $1_A(0_A s - 0_A 1_A) = 0_A$ , es decir,  $[(0, 1)] = [(0, s)]$ .

2) Análogamente, el elemento neutro para  $\cdot$  en  $S^{-1}A$  es  $1_{S^{-1}A} = [(1, 1)]$  y, para cada  $s \in S$ , se tiene que  $[(1, 1)] = [(s, s)]$ .

3) El núcleo de  $\delta_S$  es el conjunto  $\{a \in A : [(a, 1)] = [(0, s)], s \in S\}$ , esto es, existe un  $s^*$  tal que  $s^*(a - 0) = s^*a = 0$ . Una condición suficiente para que  $\delta_S$  sea inyectiva es que  $A$  sea dominio de integridad. Concretamente,  $\delta_S$  es inyectiva si, y sólo si,  $S \cap \text{Div}_0(A) = \emptyset$ .

### 0.1.1 Propiedad universal del anillo de fracciones

**Teorema 0.1.5. (*Propiedad universal del anillo de fracciones*)** Sean  $A$  y  $B$  anillos,  $S \subset A$  un subconjunto multiplicativamente cerrado de  $A$  y  $\varphi : A \rightarrow B$  de forma que  $\varphi(s)$  es unidad en  $B$  para toda  $s \in S$ . Bajo estas hipótesis, existe un único homomorfismo  $\Phi : S^{-1}A \rightarrow B$  que cumple

$$\varphi = \Phi \circ \delta_S$$

*Prueba.* Supongamos en primer lugar la existencia de tal homomorfismo y probemos su unicidad. Para todo  $a \in A$  se tiene que  $\Phi(\frac{a}{1}) = \Phi \circ \delta_S(a) = \varphi(a)$ . Por otra parte, dado  $s \in S$ , se tiene

$$1_B = \Phi\left(\frac{1_A}{1_A}\right) = \Phi\left(\frac{s}{s}\right) = \Phi\left(\frac{s}{1_A} \frac{1_A}{s}\right) = \Phi\left(\frac{s}{1_A}\right) \Phi\left(\frac{1_A}{s}\right) = \varphi(s) \Phi\left(\frac{1_A}{s}\right),$$

es decir,  $\Phi(\frac{1_A}{s}) = \varphi(s)^{-1}$ . Con todo, para todo  $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$  se tiene  $\Phi(\frac{a}{s}) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$ ; es decir,  $\Phi$  está unívocamente determinado por  $\varphi$ .

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos a definir para cada  $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$

$$\Phi\left(\frac{a}{s}\right) := \varphi(a)\varphi(s)^{-1}.$$

Veamos que está bien definido. Dados dos elementos  $\frac{a}{s}$  y  $\frac{a'}{s'}$  en la misma clase de equivalencia, existe  $s^* \in S$  tal que  $s^*(as' - a's) = 0_A$ . Aplicando  $\varphi$  a ambos miembros de la igualdad resulta  $\varphi(s^*)(\varphi(a)\varphi(s') - \varphi(a')\varphi(s)) = 0_B$  y, dado que  $\varphi(s^*)$  es unidad por hipótesis, tenemos que  $\varphi(a)\varphi(s') - \varphi(a')\varphi(s) = 0_B$ . De esto se desprende

$$\varphi\left(\frac{a}{s}\right) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1} = \varphi(a')\varphi(s')^{-1} = \Phi\left(\frac{a'}{s'}\right).$$

Esta última igualdad también se apoya en el hecho de que  $\varphi(s)$  y  $\varphi(s')$  son unidades.  $\square$

**Observación 0.1.6.** 1) El enunciado del teorema se puede reescribir pidiendo que  $B$  sea una  $A$ -álgebra mediante un homomorfismo  $\varphi$ .

2) De la Propiedad universal del anillo de fracciones se deduce que, en el caso de que  $A$  sea un DI y  $S = \text{Div}_0(A)$ ,  $S^{-1}A$  es el menor cuerpo que contiene a  $A$ .

Supongamos  $K$  cuerpo tal que  $A \subset K$ . Como ya hemos comentado en (0.1.4),  $\delta_S$  es un homomorfismo inyectivo, luego también se tiene  $A \subset S^{-1}A$ . Además, por ser  $S^{-1}A$  un cuerpo,  $\Phi$  (definido como en el teorema) es de igual forma inyectivo, por lo que  $S^{-1}A \subset K$ .

3) Si  $S_1$  y  $S_2$  son conjuntos multiplicativamente cerrados de  $A$  tales que  $S_1 \subset S_2$ , todo  $s \in S_1$  verifica que  $\delta_{S_2}(s)$  es unidad en  $S_2^{-1}A$ . Así, podemos aplicar el Principio universal del anillo de fracciones y tener que  $\delta_{S_2} = \Phi \circ \delta_{S_1}$ , de forma que todo elemento  $\frac{a}{s}$  de  $S_1^{-1}A$  se puede ver como uno de  $S_2^{-1}A$ .

Hay que destacar igualmente que  $\Phi$  no es necesariamente inyectiva, puede existir cierto elemento  $\frac{a}{s} \in S_1^{-1}A$  tal que  $\frac{a}{s} \neq 0_{S_1^{-1}A}$  y cumpla  $\frac{a}{s} = 0_{S_2^{-1}A}$  visto como elemento de  $S_2^{-1}A$ . Una condición suficiente para la inyectividad de  $\Phi$  es que se tenga  $S_2 \cap \text{Div}_0(A) = \emptyset$ .

## 0.2 Módulo de fracciones

De forma similar a como hemos procedido, consideremos  $A$  un anillo,  $S \subset A$  un conjunto multiplicativamente cerrado y  $M$  un  $A$ -módulo. Consideremos el conjunto  $M \times S$  y definamos en él la siguiente relación de equivalencia  $\sim$ : dados  $(m_1, s_1), (m_2, s_2) \in M \times S$  se tiene

$$(m_1, s_1) \sim (m_2, s_2) \iff \exists s \in S \ s(s_2 m_1 - s_1 m_2) = 0_M.$$

donde el producto que estamos considerando es el exterior de  $M$  como  $A$ -módulo.

Denotemos  $S^{-1}M := M \times S / \sim$  y veamos que lo podemos dotar de una estructura tanto de  $A$ -módulo como de  $S^{-1}A$ -módulo. Definamos las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} + : \quad S^{-1}M \times S^{-1}M &\longrightarrow S^{-1}M \\ [(m_1, s_1)], [(m_2, s_2)] &\longmapsto [(s_2 m_1 + s_1 m_2, s_1 s_2)] , \\ \cdot : \quad A \times S^{-1}M &\longrightarrow S^{-1}M \\ (a, [(m, s)]) &\longmapsto [(am, s)] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} * : \quad S^{-1}A \times S^{-1}M &\longrightarrow S^{-1}M \\ ((a, s_1), [(m, s_2)]) &\longmapsto [(am, s_1s_2)] \end{aligned}$$

**Proposición 0.2.1.** *Las aplicaciones  $+$ ,  $\cdot$  y  $*$  están bien definidas.*

*Prueba.* La prueba para  $+$  es análoga al caso de los anillos de fracciones. Veamos las otras dos.

Sean  $(m, s), (m', s') \in M \times S$  tales que  $(m, s) \sim (m', s')$ . Existe  $s^* \in S$  tal que  $s^*(s'm - sm') = 0_M$ . Así, dado  $a \in A$ , tenemos que

$$0_M = a(s^*(s'm - sm')) = s^*(s'(am) - s(am')),$$

es decir,  $(am, s) \sim (am', s')$  y  $\cdot$  está bien definida.

Sean ahora  $(a, s_1), (a', s'_1) \in S^{-1}A$  y  $(m, s_2), (m', s'_2) \in M \times S$  tales que  $(a, s_1) \sim (a', s'_1)$  y  $(m, s) \sim (m', s')$ . Existen  $s_3, s'_3 \in S$  tales que

$$s_3(as'_1 - a's_1) = 0_A \tag{7}$$

y

$$s'_3(s'_2m - s_2m') = 0_M. \tag{8}$$

A partir de estas igualdades obtenemos las siguientes

$$s_3(as'_1 - a's_1)(s'_2s_3m) = 0_A(s'_2s_3m) = 0_M \tag{9}$$

y

$$(a's_1s_3)s'_3(s'_2m - s_2m') = 0_M \tag{10}$$

y sumándolas resulta

$$s_3s'_3(s'_1s'_2am - s_1s_2a'm') = 0_M,$$

es decir,  $(am, s_1s_2) \sim (a'm', s'_1s'_2)$  y  $*$  está bien definida.  $\square$

**Observación 0.2.2.** En la prueba de  $*$  hay que tener la precaución en este caso (y en comparación con las pruebas anteriores) de que el producto que se considera es el exterior de  $M$ . Más aún, los elementos de (7) son elementos de  $A$  y los de (8) lo son de  $M$ . El paso a (9) y (10) permite sumarlas.

De aquí en adelante, siempre que no haya posibilidad de confusión se omitirá el símbolo  $*$ .

**Corolario 0.2.3.**  *$(S^{-1}M, +)$  dotado con el producto exterior  $\cdot$  es un  $A$ -módulo.*

**Corolario 0.2.4.**  $(S^{-1}M, +)$  dotado con el producto exterior  $*$  es un  $S^{-1}A$ -módulo.

*Prueba.* Comprobemos que se verifican los cuatro axiomas de la definición de  $S^{-1}A$ -módulo.

i) En primer lugar, claramente se tiene

$$1_{S^{-1}A} \frac{m}{s} = \frac{1_A m}{1_A s} = \frac{1_A m}{1_A s} = \frac{m}{s}, \quad \text{para todo } \frac{m}{s} \in S^{-1}M.$$

ii) Sean  $\frac{a}{s} \in S^{-1}M$  y  $\frac{m_1}{s_1}, \frac{m_2}{s_2} \in S^{-1}M$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} \left( \frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} \right) &= \frac{a}{s} \frac{s_2 m_1 + s_1 m_2}{s_1 s_2} = \frac{a s_2 m_1 + a s_1 m_2}{s s_1 s_2} \\ &\stackrel{i)}{=} \frac{s}{s} \frac{s_2 m_1 + s_1 m_2}{s s_1 s_2} = \frac{a s_2 s m_1 + a s_1 s m_2}{s s_1 s s_2} = \frac{a m_1}{s s_1} + \frac{a m_2}{s s_2}. \end{aligned}$$

iii) Ahora, dados  $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}A$  y  $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$  se tiene

$$\begin{aligned} \left( \frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} \right) \frac{m}{s} &= \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2} \frac{m}{s} = \frac{a_1 s_2 m + a_2 s_1 m}{s_1 s_2 s} \\ &\stackrel{i)}{=} \frac{s}{s} \frac{a_1 s_2 m + a_2 s_1 m}{s_1 s_2 s} = \frac{a_1 s_2 s m + a_2 s_1 s m}{s_1 s s_2 s} = \frac{a_1 m}{s_1 s} + \frac{a_2 m}{s_2 s} \end{aligned}$$

iv) Por último, sean  $\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1}A$  y  $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ . Resulta

$$\left( \frac{a_1}{s_1} \frac{a_2}{s_2} \right) \frac{m}{s} = \frac{(a_1 a_2) m}{(s_1 s_2) s} = \frac{a_1 (a_2 m)}{s_1 (s_2 s)} = \frac{a_1}{s_1} \left( \frac{a_2 m}{s_2 s} \right).$$

□

En vista de este último resultado, parece natural definir un funtor,  $S^{-1}$ , entre las categorías  $\text{Mod}_A$  y  $\text{Mod}_{S^{-1}A}$  de tal manera que:

- $S^{-1}(M) := S^{-1}M$  para cada  $M$   $A$ -módulo y,
- dados  $M$  y  $N$   $A$ -módulos, para cada  $f \in \text{Hom}_A(M, N)$

$$S^{-1}(f) := S^{-1}f : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$

$$\frac{m}{s} \longmapsto \frac{f(m)}{s}.$$

**Lema 0.2.5.** *Dados  $M_1, M_2$  y  $M_3$   $A$ -módulos,  $f \in \text{Hom}_A(M_1, M_2)$  y  $g \in \text{Hom}_A(M_2, M_3)$  se verifica*

$$S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}g \circ S^{-1}f.$$

*Prueba.* Dado  $\frac{m}{s} \in M_1$  se tiene

$$S^{-1}(g \circ f) \left( \frac{m}{s} \right) = \frac{(g \circ f)(m)}{s} = \frac{g(f(m))}{s} = S^{-1}g \left( \frac{f(m)}{s} \right) = (S^{-1}g \circ S^{-1}f) \left( \frac{m}{s} \right).$$

□

**Proposición 0.2.6.** *Si  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$  es una sucesión exacta, entonces la sucesión*

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

*también lo es.*

*Prueba.* Veamos en primer lugar la inyectividad y la sobreyectividad de  $S^{-1}f$  y  $S^{-1}g$  respectivamente. Sea  $\frac{m'}{s} \in S^{-1}M'$  tal que  $S^{-1}f \left( \frac{m'}{s} \right) = 0_{S^{-1}M}$ . Por ser así, existe  $t \in S$  de forma que  $tf(m') = 0_M$  y, como  $f \in \text{Hom}_A(M', M)$  y es inyectiva,  $tm' = 0_{M'}$ , es decir,  $\frac{m'}{s} = 0_{S^{-1}M'}$ . Consideremos ahora  $\frac{m''}{s} \in S^{-1}M''$ . Dado  $m'' \in M''$  y por ser  $g$  sobreyectiva existe  $m \in M$  tal que  $g(m) = m'$ , es decir,  $S^{-1}g \left( \frac{m}{s} \right) = \frac{m'}{s}$ .

Comprobemos ahora que  $\text{im}(S^{-1}f) = \text{Ker}(S^{-1}g)$ . En primer lugar, como  $g \circ f \equiv 0_{M''}$ , el lema anterior nos dice que

$$0_{S^{-1}M''} \equiv S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}g \circ S^{-1}f,$$

es decir,  $\text{im}(S^{-1}f) \subseteq \text{Ker}(S^{-1}g)$ . Por otra parte, dado  $\frac{m}{s} \in \text{Ker}(S^{-1}g)$ , tenemos que existe  $t \in S$  tal que  $tg(m) = 0_{M''}$  y por ser  $g$  homomorfismo esto implica que  $tm \in \text{Ker}(g)$ , es decir, existe a su vez  $m' \in M'$  tal que  $f(m') = tm$ . Es por esto que basta considerar el elemento  $\frac{m'}{ts}$  de forma que  $f \left( \frac{m'}{ts} \right) = \frac{tm}{ts} = \frac{m}{s}$  y  $\text{Ker}(g) \subseteq \text{im}(f)$ . □

Podemos demostrar que el funtor  $S^{-1}$  es exacto de una forma alternativa. Para ello, probemos antes algunos resultados.

**Proposición 0.2.7.** *Dado un anillo  $A$  y un subconjunto multiplicativamente cerrado  $S \subset A$  se tiene que  $S^{-1}A$  es un  $A$ -módulo plano.*



*Prueba.* Para probarlo vamos a usar la caracterización por ecuaciones. Sean  $a_i \in A$  y  $\frac{\alpha_i}{s_i} \in S^{-1}A$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  tales que

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\alpha_i}{s_i} = 0_{S^{-1}A}.$$

Denotando  $s^* := \prod_{j=1}^n s_j$  y  $s_i^* := \prod_{j \neq i} s_j$  resulta

$$0_{S^{-1}A} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\alpha_i}{s_i} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{s_i^* \alpha_i}{s^*} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i s_i^* \alpha_i}{s^*},$$

es decir, existe  $t \in S$  tal que

$$t \left( \sum_{i=1}^n a_i s_i^* \alpha_i \right) = 0_A.$$

De esta forma, basta considerar  $m'_i := \frac{1}{ts^*} \in S^{-1}A$  y  $\lambda_{i,i} := ts_i^* \alpha_i \in A$  para tener

$$m_i = \lambda_{i,i} m'_i$$

y

$$\sum_{i=1}^n a_i \lambda_{i,i} = 0_A.$$

□

**Proposición 0.2.8.** *Dado un anillo  $A$ , un subconjunto multiplicativamente cerrado  $S \subset A$  y un  $A$ -módulo  $M$  se tiene*

$$S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M.$$

*Prueba.* Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} F : S^{-1}A \times M &\longrightarrow S^{-1}M \\ \left( \frac{a}{s}, m \right) &\longmapsto \frac{am}{s}. \end{aligned}$$

En primer lugar, veamos que  $F$  está bien definida. Sean  $\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}$  de forma que existe  $s \in S$  tal que  $s(s_2 a_1 - s_1 a_2) = 0_A$ . Tenemos que

$$s(s_2 a_1 m - s_1 a_2 m) = 0_A \iff \frac{a_1 m}{s_1} = \frac{a_2 m}{s_2} \iff F\left(\frac{a_1}{s_1}, m\right) = F\left(\frac{a_2}{s_2}, m\right).$$

Por otro lado, es claro que  $F$  es  $A$ -bilineal. Así, tenemos que existe un único homomorfismo  $A$ -lineal  $f : S^{-1}A \otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M$  tal que  $f\left(\frac{a}{s} \otimes m\right) = \frac{am}{s}$ .

Comprobamos que  $f$  es inyectiva. Si  $f(\frac{a}{s} \otimes m) = 0_M$ , entonces  $\frac{am}{s} = 0_{S^{-1}M}$ , es decir, existe  $t \in S$  tal que  $tam = 0_M$ . Así,

$$\frac{a}{s} \otimes m = \frac{ta}{ts} \otimes m = \frac{1_A}{ts} \otimes tam = 0_{S^{-1}A \otimes M}$$

La sobreyectividad es clara. Con todo  $f$  es un isomorfismo.]

De forma análoga, definimos la aplicación

$$h : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}A \otimes M \\ \frac{m}{s} \longmapsto \frac{1_A}{s} \otimes m \quad .$$

De nuevo debemos comprobar que está bien definida. Dados  $\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2} \in S^{-1}M$  existe  $s \in S$  tal que  $s(s_2m_1 - s_1m_2) = 0_M$  o equivalentemente  $ss_2m_1 = ss_1m_2$ . Es por esto que

$$\begin{aligned} h\left(\frac{m_1}{s_1}\right) &= \frac{1_A}{s_1} \otimes m_1 = \frac{ss_2}{ss_2s_1} \otimes m_1 = \frac{1_A}{ss_2s_1} \otimes ss_2m_1 \\ &= \frac{1_A}{ss_2s_1} \otimes ss_1m_2 = \frac{ss_1}{ss_2s_1} \otimes m_2 = \frac{1_A}{s_2} \otimes m_2 = h\left(\frac{m_2}{s_2}\right). \end{aligned}$$

Por último, tenemos tanto que  $h \circ f$  restringida a los elementos de la forma  $\frac{a}{s} \otimes m \in S^{-1}A \otimes_A M$  como  $f \circ h$  a los  $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$  resultan ser las respectivas identidades  $\text{Id}_{S^{-1}A \otimes_A M}$  y  $\text{Id}_{S^{-1}M}$ ; es decir,  $f = h^{-1}$  y

$$S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M.$$

□

**Corolario 0.2.9.** *El functor  $S^{-1} : \text{Mod}_A \rightarrow \text{Mod}_{S^{-1}A}$  es exacto.*

*Prueba.* Dada la sucesión exacta  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ , tensorizando por el  $A$ -módulo plano  $S^{-1}A$  resulta que

$$S^{-1}A \otimes_A M' \xrightarrow{\text{Id}_{S^{-1}A} \otimes f} S^{-1}A \otimes_A M \xrightarrow{\text{Id}_{S^{-1}A} \otimes g} S^{-1}A \otimes_A M''$$

también es exacta.

Sean  $\varphi : S^{-1}A \otimes_A M' \longrightarrow S^{-1}M$  y  $\psi : S^{-1}A \otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M$  los isomorfismos que da la proposición anterior. Veamos que  $\text{Id}_{S^{-1}A} \otimes f = \psi^{-1} \circ S^{-1}f \circ \varphi$ . Dado  $\frac{a}{s} \otimes m \in S^{-1}A \otimes_A M'$ , se tiene

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \circ S^{-1}f \circ \varphi\left(\frac{a}{s} \otimes m\right) &= \psi^{-1} \circ S^{-1}f\left(\frac{am}{s}\right) \\ &= \psi^{-1}\left(\frac{af(m)}{s}\right) \\ &= \frac{1_A}{s} \otimes af(m) = \frac{a}{s} \otimes f(m) = \text{Id}_{S^{-1}A} \otimes f\left(\frac{a}{s} \otimes m\right). \end{aligned}$$

Esto mismo se prueba para el homomorfismo  $\text{Id}_{S^{-1}A} \otimes g$  y los  $A$ -módulos  $M$  y  $M''$ .

De todo lo anterior se sigue que la sucesión

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

es exacta. □

**Ejemplo 0.2.10.** Sea  $A$  un anillo y  $\mathfrak{p}_0 \in \text{Spec}(A)$ . Sea  $S = A \setminus \mathfrak{p}_0$ .  $S$  es multiplicativamente cerrado y definimos  $A_{\mathfrak{p}_0} = S^{-1}A$ . Existe una biyección, dada por la extensión-contracción, entre

$$\text{Spec}(A_{\mathfrak{p}_0}) \longleftrightarrow \text{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) : \mathfrak{p} \cap (A \setminus \mathfrak{p}_0) = \emptyset\} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) : \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_0\}$$

Esta relación es análoga a la que da el teorema de la correspondencia entre los ideales del cociente y los ideales del anillo que contienen al ideal por el que cocientamos.

Geométricamente, tomando  $A \xrightarrow{\delta} A_{\mathfrak{p}_0}$ , se considera  $\delta^* : \text{Spec}(A_{\mathfrak{p}_0}) \rightarrow \text{Spec}(A)$ , siendo  $\text{im}(\delta^*) = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_0\}$ . De esta forma, todo ideal primo de  $A_{\mathfrak{p}_0}$  es el extendido de un ideal primo de  $A$  que está contenido en  $\mathfrak{p}_0$ . Es decir, todo ideal primo de  $A_{\mathfrak{p}_0}$  está contenido en  $\mathfrak{p}_0^e$ .

$A_{\mathfrak{p}_0}$  es un anillo local. Su único ideal maximal es  $\mathfrak{p}_0^e = \{\frac{x}{s} : x \in A, s \notin \mathfrak{p}_0\}$ .

**Definición 0.2.11.** Sea  $\mathfrak{p}$  un ideal primo de un anillo  $A$ . Un ideal  $\mathfrak{q}$  se dice  $\mathfrak{p}$ -primario si  $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ .

**Proposición 0.2.12.** Sea  $A$  un anillo,  $\mathfrak{p}_0 \in \text{Spec}(A)$ , y  $A_{\mathfrak{p}_0}$ . Hay una biyección entre los ideales primos de  $A$  contenidos en  $\mathfrak{p}_0$  y los ideales primos de  $A_{\mathfrak{p}_0}$ . Esta biyección conserva el ser  $\mathfrak{p}_0$ -primario.

*Prueba.* Consideremos  $\delta : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}_0}$ . Supongamos  $\mathfrak{q}$   $\mathfrak{p}_0$ -primario. Veamos que  $\mathfrak{q}^e$  es  $A_{\mathfrak{p}_0}$ -primario. Sean  $\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2} \in A_{\mathfrak{p}_0}$  tal que  $\frac{x_1 x_2}{s_1 s_2} \in \mathfrak{q}^e$ . Supongamos que  $\frac{x_1}{s_1} \notin \mathfrak{q}^e$ . Se tiene  $\frac{x_1 x_2}{s_1 s_2} = \frac{q}{s}$ , con  $q \in \mathfrak{q}, s \notin \mathfrak{p}_0$ . Esto es, existe  $s' \notin \mathfrak{p}_0$  tal que  $s'(sx_1x_2 - qs_1s_2) = 0_A$ , luego  $s'sx_1x_2 \in \mathfrak{q}$ .

Como  $\frac{x_1}{s_1} \notin \mathfrak{q}^e, x_1 \notin \mathfrak{q}$ , pues de estarlo podríamos escribir  $\frac{x_1}{s_1} = \frac{x_1}{1} \frac{1}{s_1} \in \mathfrak{q}^e$ . Entonces, por ser  $\mathfrak{q}$   $\mathfrak{p}_0$ -primario,  $s'sx_2 \in \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}_0$ . Por ser  $\mathfrak{p}_0$  primo y  $ss' \notin \mathfrak{p}_0, x_2 \in \mathfrak{p}_0$ . Por tanto, existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x_2^n \in \mathfrak{q}^n$ , luego  $(\frac{x_2}{s_2})^n \in \mathfrak{q}^e$ . Hemos visto que  $\mathfrak{q}^e$  es primario y que su raíz es  $\mathfrak{p}_0$ , pues  $\frac{x_2}{s_2} \in \mathfrak{p}_0^e$ .

Recíprocamente, tomemos un ideal  $\mathfrak{q}'$  que sea  $\delta(\mathfrak{p}_0)A_{\mathfrak{p}_0}$ -primario. Nótese que  $\delta(\mathfrak{p}_0)A_{\mathfrak{p}_0} = \mathfrak{p}_0^e$ . Supongamos  $x_1, x_2 \in A$  tal que  $x_1x_2 \in \mathfrak{q}'^c$  y  $x_1 \notin \mathfrak{q}'^c$ . Esto es,  $\frac{x_1x_2}{1} \in \mathfrak{q}'$ . Como  $\frac{x_1}{1} \notin \mathfrak{q}'$ , se tiene que  $\frac{x_2}{1} \in \mathfrak{p}_0^e$ , ya que  $\mathfrak{q}'$  es  $\mathfrak{p}_0^e$ -primario. Es decir,  $x_2 \in \mathfrak{p}_0^{ec} = \delta^{-1}(\mathfrak{p}_0^e)$ . Como  $\mathfrak{p}_0^{ec} = \mathfrak{p}_0, x_2 \in \mathfrak{p}_0$ . □

**Observación 0.2.13.** Dado  $\mathfrak{p}_0 \in \text{Spec}(A)$ ,  $\mathfrak{p}_0^n$  no es necesariamente  $\mathfrak{p}_0$ -primario. Sin embargo, hay algo que se le aproxima bastante.

Tomando  $A \xrightarrow{\delta} A_{\mathfrak{p}_0}$ ,  $\mathfrak{p}_0^e$  es maximal. En este caso, sí tenemos que  $(\mathfrak{p}_0^e)^n$  tiene por raíz un maximal, a saber  $\mathfrak{p}_0^e$ ,  $\mathfrak{p}_0^e$ -primario. Se tiene que  $((\mathfrak{p}_0^e)^n)^e$  es  $\mathfrak{p}_0$ -primario.

A esto se le llama *potencias simbólicas* y se denota  $\mathfrak{p}_0^n$ .

Tenemos ya maquinaria suficiente para construir anillos locales.

**Teorema 0.2.14 (de Cayley).** Sean  $A$  un anillo,  $\mathfrak{a}$  un ideal de  $A$ ,  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado y  $f : M \rightarrow M$  una aplicación  $A$ -lineal tal que  $f(M) \subset \mathfrak{a}M$ . Entonces, existen  $a_i \in \mathfrak{a}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_n I_M = 0_{\text{Hom}_A(M, M)}$$

donde cada  $f^{(i)} = f \circ \dots \circ f$

*Prueba.*

□

**Lema 0.2.15 (de Nakayama).** Se expresa en tres formulaciones equivalentes.

1. Sea  $A$  un anillo local,  $\mathfrak{m}$  su único ideal maximal y  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Si  $\mathfrak{m}M = M$ , entonces  $M = 0$ .
2. Sea  $A$  un anillo local,  $\mathfrak{m}$  su único ideal maximal y  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Si  $N \subset M$  y  $N + \mathfrak{m}M = M$ , entonces  $M = N$ .
3. Sea  $A$  un anillo local maximal y sea  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Entonces, el menor número de generadores de  $M$  como  $A$ -módulo es la dimensión de  $M/\mathfrak{m}M$  como  $A/\mathfrak{m}$ -espacio vectorial.