The Polyakov Path Integral and Ghosts

@homuotaku

2023 年 2 月 21 日

目次

5 The Polyakov Path Integral and Ghosts

共形対称性には 2 次元の背景が固定されているか力学変数として動くもの使うかによって異なる解釈がある。統計力学への応用では背景は固定されているので共形対称性は大域的な対称性である。弦理論においては背景は力学的 (力学変数として振る舞う、の意味) である。共形対称性はゲージ対称性であり、微分同相と Weyl 不変の残りである。ゲージ対称性とは対称性ではなく系を記述する際の冗長性である*1。そのためそれらを失う余地はなく、量子論においてアノマリーが生じないことが必須となる。最悪、ゲージアノマリーのある理論は意味をなさない。例えば、左巻き基本フェルミオンだけと結合した Yang-Mills 理論はこの意味で無意味である。量子論を復元することができるかもしれないが、始めの理論とは関係がないものとなる。

前の章の話と合わせて考えると大変らしい。Weyl 対称性はアノマリーである。エネルギー運動量テンソルの期待値が Weyl 対称性で結ばれた背景で異なる値を取るためだ。すなわち、

$$\langle T^{\alpha}{}_{\alpha}\rangle = -\frac{c}{12}R \tag{1}$$

ここで R は Ricci スカラー。固定された背景において、これはただ面白いだけだが、力学的な背景においては致命的である。*2 どうすればいいのだろうか。$c=0$ なら解決される。しかし全ての非自明なユニタリ CFT では $c>0$ である。抜け穴を探りたい。$c=0$ の要請を実現するための理にかなった方法がある。

*1 電磁気では理論からどうしてもゲージ不変であった、みたいな感じ？
*2 その計量ごとに違うエネルギー運動量テンソルを出すため。

5.1 The Path Integral

Euclid 空間で Polyakov 作用は

$$S_P = \frac{1}{4\pi\alpha}\int d^2\sigma\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu\delta_{\mu\nu} \tag{2}$$

以下、経路積分で解析する。 すべての埋め込み座標 X^μ と世界面計量 $g_{\alpha\beta}$ について積分する。概略的には

$$Z = \frac{1}{\mathrm{Vol}}\int \mathcal{D}g\mathcal{D}X\, e^{-S_P[X,g]} \tag{3}$$

この”Vol” が重要。すべての場の配位について積分するわけではなく、微分同相や Weyl に関係するところのみを積分するということを意味する。場の空間におけるゲージの作用の体積で割り算する必要があるということである。この状況をもっとあらわに表せば、すべての場の配位に渡る積分を 2 つの部分に分ける必要がある。

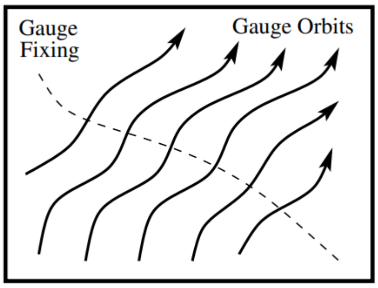

図 1 実線のように様々なゲージ自由度がある中で、その自由度の分だけ取り除いて、ゲージ固定した点線部分のみの積分がほしい。

物理的な配位に対応する、概略的には図において点線で書かれている部分と、ゲージ変換に対応する実線部分である。すなわち”Vol” で割ることは、単にこの実線部のゲージ軌道の積分より現れる分配関数での部分を取り除くことである。通常の積分では、座標を変換したときヤコビアンを拾うことになるので注意が要る。経路積分でも違いはない。この積分変数を物理的な場とゲージ軌道に分解したい。求めるヤコビアンが問題なのだが、Faddeev-Popov によって決定する方法が発見されている。この方法は Yang-Mills を含む全てのゲージ対称性に対して有用で、Advanced Quantum Field Theory コースでも学ぶ。

5.1.1 The Faddeev-Popov Method

- ゲージ不変な成分を分離する方法

ここで 2 つのゲージ対称性がある。すなわち、微分同相と Weyl 変換である。これらを ζ で表す。一般のゲージ変換に対する計量の変化を $g \to g^\zeta$ である。これは

$$g_{\alpha\beta}(\sigma) \to g^\zeta_{\alpha\beta}(\sigma') = e^{2\omega(\sigma)}\frac{\partial\sigma^\gamma}{\partial\sigma'^\alpha}\frac{\partial\sigma^\delta}{\partial\sigma'^\beta}g_{\gamma\delta}(\sigma) \tag{4}$$

の短縮である。2 次元ではこれらのゲージ対称性で、計量を例えば $\hat{g}$ のように好きな形に置くことができる。これは基準計量 (fiducial metric)[*3]といい、選んだゲージ固定を表す。注意事項が 2 つある。

[*3] 訳あってるかな

- まず、どんな 2 次元計量も我々の選択の $\hat{g}$ の形にできるというのは正しくない。これは局所的にのみ正しい。大域的には、世界面が円筒または球面のトポロジーを持つときに正しくて、高次の種数 (genus) ではダメ。
- 次に、局所的に計量を $\hat{g}$ に固定することはすべてのゲージ対称性を固定することではない。まだ行える共形対称性がある。以上 2 つの問題については Section6 でやる。

目標は物理的に等価でない配位についてのみ積分することである。これを成し遂げるためにまず $\hat{g}$ のゲージ軌道についての積分を考える。ゲージ変換 ζ のいくつかの値について、配位 g^ζ はもとの計量 g と一致する。デルタ関数を用いて

$$\int \mathcal{D}\zeta\, \delta(g - \hat{g}^\zeta) = \Delta_{FP}^{-1}[g] \tag{5}$$

が得られる。[*4]ヤコビアンを考慮することからこの積分は 1 に等しくはならない。これは $\int dx\delta(f(x)) = 1/|f'|$ の類推である。上の等式において、このヤコビアン因子 $\Delta_{FP}^{-1}[g]$ と書いた。これの逆数 $\Delta_{FP}[g]$ は **Faddeev-Popov 行列式**と呼ばれる。このあとすぐあらわに評価する。コメント:

- この全体の手順はかなり形式的で、経路積分を定義しようとするといつもの困難にぶつかる。しかし Yang-Mills 理論と同様にいい答えが得られるとわかるだろう。
- ここではゲージ固定がうまくいっていると仮定する。つまり、前の図 1 は物理的に異なる配位を正確に一度だけ切り取る。同様に、ゲージ変換全体に渡る積分 $\mathcal{D}\zeta$ はデルタ関数と一度だけ触れ、離散的な多義性を考慮しないでよい。(QCD では Gribov コピーとして知られる)
- 測度は Lie 群についての Haar 測度の類推とみなせて、左右不変である。

$$\mathcal{D}\zeta = \mathcal{D}(\zeta'\zeta) = \mathcal{D}(\zeta\zeta') \tag{6}$$

Yang-Mills 理論におけるゲージ固定のとき、まずやることは Faddeev-Popov 行列式 Δ_{FP} がゲージ不変であることを示すことである。しかし我々のたどる道はもう少し微妙である。上で強調したように、Weyl アノマリーはもとの理論が実はゲージ不変であらざることを意味する。Faddeev-Popov 行列式もうまくいかないが、ある状況下では well-defined な理論を残してもとの失敗をキャンセルすることができる。Faddeev-Popov の手順は経路積分中に 1 を挿入することから始める。

$$1 = \Delta_{FP}[g] \int \mathcal{D}\zeta \delta(g - \hat{g}^\zeta) \tag{7}$$

経路積分の結果を $Z[\hat{g}]$ とする。なぜならば基準計量 $\hat{g}$ に依存するため。まずデルタ関数 $\delta(g - \hat{g}^\zeta)$ を用いて計量についての積分をする。[*5]

$$Z[\hat{g}] = \frac{1}{\mathrm{Vol}} \int \mathcal{D}\zeta\, \mathcal{D}X \mathcal{D}g \Delta_{FP}[g] \delta(g - \hat{g}^\zeta) e^{S_P[X,g]} \tag{8}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Vol}} \int \mathcal{D}\zeta\, \mathcal{D}X \Delta_{FP}[\hat{g}^\zeta] e^{S_P[X,\hat{g}^\zeta]} \tag{9}$$

この段階では積分は $\hat{g}^\zeta$ に依存する。式中の全ては微分同相のもとで不変であるが、Weyl 変換については別問題である。量子論において $\int \mathcal{D}X\, e^{-S_P}$ は Weyl アノマリーに苦しめられる。作用 S_P は Weyl リスケーリングで不変であり、その微妙さは測度からくる。一方、起こると予想すると、Faddeev-Popov 行列式 Δ_{FP} で似た問題を見つけることになる。

[*4] デルタ関数の中身は変換先と元のところが一致することを表したいのでこれでいい。
[*5] 通常のデルタ関数の扱いと同じようにその値だけ抜き出す。

しかしもしこの問題がキャンセルされるような幸運な状況になればうまくいくだろう。そのとき (9) の右辺にあるものは微分同相と Weyl 変換の両方で不変であるということがわかり、ζ を書かない形で表せる。

$$Z[\hat{g}] = \frac{1}{\mathrm{Vol}} \int \mathcal{D}\zeta\, \mathcal{D}X \Delta_{FP}[\hat{g}] e^{-S_P[X,\hat{g}]} \tag{10}$$

ゲージ変換に関する部分はなくなり、ζ 積分はゲージ軌道の"Vol" とキャンセルされる。

$$Z[\hat{g}] = \int \mathcal{D}X\, \Delta_{FP}[\hat{g}] e^{-S_P[X,\hat{g}]} \tag{11}$$

これは物理的に異なる配位に関する積分となり、Faddeev-Popov 行列式はまさに必要としているヤコビアン因子であることがわかる。

上記の議論は (9) の理論が真に Weyl 不変であるような場合にのみ成り立つ。次にやることはこれがいつ起こるかを理解することである。つまり、Weyl 変換を行ったときに Δ_{FP} がどうなるかを知る必要がある。

5.1.2 The Faddeev-Popov Determinant

まだ $\Delta_{FP}[\hat{g}]$ を計算しなければならない。単位元に近いゲージ変換 ζ を見てみよう。この場合、デルタ関数 $\delta(g - \hat{g}^\zeta)$ は計量 g が基準計量 $\hat{g}$ に近いとき非ゼロとなる。実際は、$\zeta = 0$ のとき非ゼロになるデルタ関数だけ見れば十分である。無限小 Weyl 変換 $\omega(\sigma)$ と無限小微分同相 $\delta\sigma^\alpha = v^\alpha(\sigma)$ をとる。計量の変化は座標をあわせることに注意して

$$\delta\hat{g}_{\alpha\beta} = 2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha \tag{12}$$

であるから

$$\int \mathcal{D}\zeta\, \delta(g - \hat{g}^\zeta) = \Delta_{FP}^{-1}[g]$$

に代入し、今は単位元付近を見るから、ゲージ群全体の積分 $\mathcal{D}\zeta$ を群の Lie 代数での積分 $\mathcal{D}\omega\mathcal{D}v$ に置き換える。Faddeev-Popov 行列式は次のような形となる。

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}\omega\mathcal{D}v\, \delta(2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha) \tag{13}$$

この段階ではデルタ関数を Fourier 積分形式であらわしておくと便利である。なお、ここでは汎関数であることに注意する。世界面上の対称 2 階テンソル $\beta^{\alpha\beta}$ を用いて、[*6]

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}\omega\mathcal{D}v\mathcal{D}\beta\, \exp\left[2\pi i \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}}\beta^{\alpha\beta}(2\omega\hat{g}_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha)\right] \tag{14}$$

Fourier 積分では全ての空間を張るからそれを世界面全体に拡張しようとすると指数関数内部にこの積分がいるのかも。

ここで $\int \mathcal{D}\omega$ 積分を行う。微分はついてないので

$$\beta^{\alpha\beta}\hat{g}_{\alpha\beta} = 0 \tag{15}$$

と設定し、Lagrange 乗数[*7]としてはたらく。言い換えれば、ω 積分をしたあとで $\beta^{\alpha\beta}$ は対称でトレースレスとなる。世界面上の 2 階対称テンソルというのは設定で、ここではトレースレスということがわかる。→デルタ関数の中身だから $= 0$ だけを見るということを言ってる。これを $\beta^{\alpha\beta}$ の定義とみなす。したがって

[*6] なぜこれを入れる必要があるのか？ $\delta(x) = \int dp e^{ipx}$ の積分変数 p に値し、$xp = \sum x_i p_i$

[*7] 未定乗数法を使いたいから $\beta^{\alpha\beta}$ を導入したのか？

$$\Delta_{FP}^{-1}[\hat{g}] = \int \mathcal{D}v\mathcal{D}\beta \, \exp\left[4\,\pi i \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}}\beta^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v_\beta\right] \tag{16}$$

を得る。

5.1.3 Ghosts

前節で Δ_{FP}^{-1} の式を得たが、我々はこれの逆数 Δ_{FP} がほしい。これを成し遂げるための簡単な方法がある。積分は v, β についての 2 次形式なので、積分は演算子 ∇_α の行列式の逆数を計算する。[*8]正確には、対称トレースレステンソルへの射影の行列式の逆数を計算する。この観察は重要である。なぜならば relevant 演算子は行列式について語るのに必要な正方行列であることを意味するので。[*9]逆数でない Δ_{FP} の経路積分を用いた計算方法を知っている。すなわち、交換する積分変数を反交換する場に変える。

$$\beta_{\alpha\beta} \to b_{\alpha\beta} \tag{19}$$
$$v^\alpha \to c^\alpha \tag{20}$$

この b, c はともに Grassmann 数の場である。すなわち、反交換する。これらはゴースト場として知られる。気持ちとしては

$$\Delta^{-1} = \int dv d\beta e^{-\beta\nabla v} = (\det \nabla)^{-1} \tag{21}$$

だから Grassmann 数の Gauss 積分の公式より

$$\det \nabla = \int d\xi d\eta e^{\eta\nabla\xi} = \Delta \tag{22}$$

となる。さて、これによって Faddeev-Popov 行列式の最終的な式を得る。ゴースト作用

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}b_{\alpha\beta}\nabla^\alpha c^\beta \tag{23}$$

を用いて

$$\Delta_{FP}[g] = \int \mathcal{D}b\,\mathcal{D}c\,\exp[iS_{\text{ghost}}] \tag{24}$$

のように表せる。なお、b, c はいい感じにリスケールしている。これを Euclid 空間に回転させて戻すと i の因子は消えて、(11) とともに

$$Z[\hat{g}] = \int \mathcal{D}X\,\mathcal{D}b\,\mathcal{D}c\;\exp\left(-S_P[X,\hat{g}] - S_{\text{ghost}}[b,c,\hat{g}]\right) \tag{25}$$

が完全な分配関数の形である。補助的に導入したゴースト場 b, c が力学変数となり、X と同等の立場となっている。ゲージ固定の代償として余計なゴースト場が出る。

このゴースト場の役割は非物理的なゲージ自由度をキャンセルして X^μ を $D-2$ 個の transverse モードだけを残すことである。光円錐量子化と異なり、Lorentz 不変性を保つことのできる方法である。

[*8] Green 関数みたいな感じだと思う。→行列のガウス積分

[*9] 雑に和訳したが要するに行列のガウス積分

$$\int dq_1 \cdots dq_N\,\exp\left(-\frac{1}{2}\sum q_i A_{ij} q_j\right) \sim (\det A)^{-1/2} \tag{17}$$

とそれを Grassmann 数で行った Gauss 積分

$$\int d^N\xi d^N\eta e^{\eta_i A_{ij}\xi_j} = \det A \tag{18}$$

のこと。

■Simplifying the Ghost Action　ゴースト作用 (23) は単純に見える。しかし、共形ゲージ

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = e^{2\omega}\delta_{\alpha\beta} \tag{26}$$

で行えばもっと単純に見える。この行列式は $\sqrt{\hat{g}} = e^{2\omega}$ である。測度は複素座標にて $d^2\sigma = \frac{1}{2}d^2z$ であり、また計量を用いれば共変微分の添字を下げられる。

$$\nabla^z = g^{z\bar{z}}\nabla_{\bar{z}} = 2e^{-2\omega}\nabla_{\bar{z}} \tag{27}$$

これでゴースト作用は、$e^{2\omega}$ が g の行列式と共変微分のところで打ち消されて

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\left(b_{zz}\nabla_{\bar{z}}c^z + b_{\bar{z}\bar{z}}\nabla_z c^{\bar{z}}\right) \tag{28}$$

ここで $b_{\alpha\beta}$ がトレースレスであることから $b_{z\bar{z}} = 0$ である。

$$b_{z\bar{z}} = b_{1\bar{z}} + ib_{2\bar{z}} = b_{11} - ib_{12} + i(b_{21} - ib_{22}) = (b_{11} + b_{22}) + i(b_{21} - b_{12}) \tag{29}$$

b は対称であることに注意。ゴースト作用において共変微分が実は通常の微分となる。

$$\nabla_{\bar{z}}c^z = \partial_{\bar{z}}c^z + \Gamma^z_{\bar{z}\alpha}c^\alpha \tag{30}$$

に注目してみる。ここで $\alpha = z, \bar{z}$ である。このとき Christoffel 記号は、計量が $g^{z\bar{z}}$ 以外の成分を持たないことに気をつけて

$$\Gamma^z_{\bar{z}\alpha} = \frac{1}{2}g^{z\bar{z}}(\partial_{\bar{z}}g_{\alpha\bar{z}} + \partial_\alpha g_{\bar{z}\bar{z}} - \partial_{\bar{z}}g_{\bar{z}\alpha}) = \frac{1}{2}g^{z\bar{z}}(\partial_{\bar{z}}g_{\alpha\bar{z}} + 0 - \partial_{\bar{z}}g_{\bar{z}\alpha}) = 0 \tag{31}$$

そのため共形ゲージにおいてゴースト作用が

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\left(b_{zz}\partial_{\bar{z}}c^z + b_{\bar{z}\bar{z}}\partial_z c^{\bar{z}}\right) \tag{32}$$

と、2 つの自由な理論に分離される。この作用は共形因子 ω に依存しない。言い換えると、これは b, c を変える必要なしに Weyl 不変であり、すなわちこれらは Weyl 変換にたいしてどちらも中立である。*10ただし $b_{\alpha\beta}, c^\alpha$ は Weyl 変換のもとで中立だが、添字を上げ下げすると、計量より現れる因子を拾ってしまうので $b^{\alpha\beta}, c^\alpha$ は Weyl 変換で中立ではない。

5.2　The Ghost CFT

Weyl と微分同相のゲージ対称性を固定することで、2 つの新たな力学的なゴースト場 b, c が残される。両方とも Grassmann 変数である。すなわち、反交換する。これらの力学は CFT によって支配される。

$$b = b_{zz} \quad , \quad \bar{b} = b_{\bar{z}\bar{z}} \tag{33}$$
$$c = c^z \quad , \quad \bar{c} = c_{\bar{z}} \tag{34}$$

と定義すると、ゴースト作用は次のように書ける。

$$S_{\text{ghost}} = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\left(b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c}\right) \tag{35}$$

ここから運動方程式として

$$\bar{\partial}b = \partial\bar{b} = \bar{\partial}c = \partial\bar{c} = 0 \tag{36}$$

*10 言い換えた側がわからん。中立:ニュートラル＝関わりがない、何も起こらないということ？

が得られる。したがって b, c は正則場で、$\bar{b}, \bar{c}$ は反正則場である。

量子化を行う前に、最後に少しの情報を古典論より必要とする。すなわち、bc ゴーストに対するエネルギー運動量テンソルである。4 章での一般の定義

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\partial S}{\partial g^{\alpha\beta}} \tag{37}$$

を用いるので、(23) の一般の背景場のもとで行い、計量 $g^{\alpha\beta}$ で変分する。複雑なところは二重になっている。まず共変微分 ∇^{α} の中に潜む Christoffel 記号の寄与を拾うことになる。次に $b_{\alpha\beta}$ がトレースレスであることを思い出す。しかしこれは計量に依存するそれ自身の条件であった。すなわち、$b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 0$ に由来する。このことを考慮し、トレースレス性を課して Lagrange 乗数を作用に加えるべきである。適切に計量を変文したあと、平坦な空間に戻ると最終的な結果はより単純なものとなっている。どの共形理論でも成り立たなければならないように、$T_{z\bar{z}} = 0$ を得る。一方、エネルギー運動量テンソルの正則と反正則な部分は次の形で与えられる。

$$T = 2(\partial c)b + c\partial b \quad , \quad \bar{T} = 2(\bar{\partial}\bar{c})b + \bar{c}\bar{\partial}\bar{b} \tag{38}$$

↑導けない！ Christoffel 記号とトレースレス性を考慮しないとだめらしいけど死ぬほど面倒くさい。

■OPE　通常の経路積分の技法を用いて OPE を計算する。以下では CFT の正則部に注目する。例えば、

$$0 = \int \mathcal{D}b\,\mathcal{D}c\,\frac{\delta}{\delta b(\sigma)}\left[e^{-S_{\text{ghost}}}b(\sigma')\right] = \int \mathcal{D}b\,\mathcal{D}c\,e^{-S_{\text{ghost}}}\left[-\frac{1}{2\pi}\bar{\partial}c(\sigma)b(\sigma') + \delta(\sigma-\sigma')\right] \tag{39}$$

が得られる。[*11]前半部は S_{ghost} の運動方程式から従う。これより

$$\bar{\partial}c(\sigma)b(\sigma') = 2\pi\,\delta(\sigma-\sigma') \tag{40}$$

である。また $\delta/\delta c(\sigma)$ について見れば

$$\bar{\partial}b(\sigma)c(\sigma') = 2\pi\,\delta(\sigma-\sigma') \tag{41}$$

$\bar{\partial}(1/z) = 2\pi\delta(z,\bar{z})$ を使って積分すれば OPE が得られる。σ, σ' を z, w に置き換えて

$$b(z)c(w) = \frac{1}{z-w} + \cdots \tag{42}$$

$$c(w)b(z) = \frac{1}{w-z} + \cdots \tag{43}$$

実際は 2 番目の式は 1 番目の式より従い、Fermi 統計である。bb, cc は特異部を持たず、$z \to w$ で消滅する。

最後にこの理論のエネルギー運動量テンソルが欲しい。正規順序を取れば

$$T(z) = 2 : \partial c(z)b(z) : + : c(z)\partial b(z) : \tag{44}$$

である。この選択で b, c は Weyl スケーリングで中立なテンソル場について正しいウェイトをもつことをすぐに示す。

■Primary Fields　b, c がそれぞれウェイト $h = 2, h = -1$ を持つ primary 場であることを示す。まず c を見る。

$$T(z)c(w) = 2 : \partial c(z)b(z) : c(w) + : c(z)\partial b(z) : c(w) \tag{45}$$

前半部分は (42) をそのまま使い、後半は (42) を両辺 z 微分した

$$\partial b(z)c(w) = -\frac{1}{(z-w)^2} + \cdots \tag{46}$$

[*11] $= 0$ はどこから？期待値を出すから微分したらゼロ？

を用いる。よって

$$T(z)c(w) = \frac{2\partial c(z)}{z-w} - \frac{c(z)}{(z-w)^2} + \cdots = -\frac{c(w)}{(z-w)^2} + \frac{2\partial c(w)}{z-w} + \cdots \tag{47}$$

となる。なお、最後の式変形では $c(z)$ を $z = w$ まわりで展開した $c(z) = c(w) + \partial c(w)(z-w) + \cdots$ を使った。$T(z)c(w)$ だから $c(w)$ であってほしい、ということだと思う。これより c はウェイト $h = -1$ とわかる。次に b について考える。b, c を入れ替えるときは反対称であることに注意する。

$$T(z)b(w) = 2 : \partial c(z)b(z) : b(w) + : c(z)\partial b(z) : b(w) = -2b(z)\partial c(z)b(w) - \partial b(z)c(z)b(w) \tag{48}$$

c のときと同様に (43) を両辺 z 微分して

$$\partial c(z)b(w) = -\frac{1}{(z-w)^2} + \cdots \tag{49}$$

を使えば、

$$T(z)b(w) = -2b(z)\left(\frac{-1}{(z-w)^2}\right) - \frac{\partial b(z)}{z-w} = \frac{2b(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial b(w)}{z-w} + \cdots \tag{50}$$

これより b はウェイト $h = 2$ を持つ。何度も指摘している通り共形＝微分同相＋ Weyl である。b, c は Weyl 変換のもとで中立である。これはそれらの添字構造 b_{zz}, c^z によって決定される微分同相によるウェイトに反映されている。[*12]

■The Central Charge　最後に TT OPE を計算して bc ゴースト系の central charge を決定する。

$$\begin{aligned} T(z)T(w) =& (2 : \partial c(z)b(z) : + : c(z)\partial b(z) :)(2 : \partial c(w)b(w) : + : c(w)\partial b(w) :) \quad (51) \\ =& 4 : \partial c(z)b(z) :: \partial c(w)b(w) : + 2 : \partial c(z)b(z) :: c(w)\partial b(w) : \\ &+ 2 : c(z)\partial b(z) :: \partial c(w)b(w) : + : c(z)\partial b(z) :: c(w)\partial b(w) : \quad (52) \end{aligned}$$

計算は面倒だから書かない。Wick 縮約と同じような感じで計算すると楽。縮約取って OPE 作って……とする過程は同じだが、1 つだけ縮約を取るときと、2 つの縮約を取るときとで分けて考えないと間違える。また引数が z の部分は $z = w$ まわりの Taylor 展開を考える。この際、$\partial b, \partial c$ についてはきちんと 2 階微分の項まで考慮に入れるとよい。2 つ縮約を取る部分からは $-13(z-w)^{-4}$、1 つ縮約を取る部分からは $2T(w)(z-w)^{-2} + \partial T(w)(z-w)^{-1}$ が出る。したがって

$$T(z)T(w) = \frac{-13}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \cdots \tag{53}$$

を得る。central charge とは $(z-w)^{-4}$ 係数である $c/2$ を見るものだった。すなわち、bc ゴースト系においては上の表式によって

$$c = -26 \tag{54}$$

とわかる。

参考文献

[1] David Tong,Lectures on String Theory, `http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html`

[*12] どういうこと?