

経路積分の方法

あけみ@homuotaku

2023 年 3 月 17 日

経路積分についてまとめる。参考資料や私の気分によって、このノートでもノーテーションのブレがあるかもしれない。

目次

1	Faynnman の考え	1
2	量子力学において	1
2.1	Feynman 核	2
2.2	経路積分表示	3

1 Faynnman の考え

2 重スリット実験の帰結では、電子銃から放たれ、2 つのスリットを通った粒子のスクリーン上での状態は、確率密度の重ね合わせで実現する。そのスリットを 3 重にしたら、あるいはスリットをもう 1 枚増やしたらどうなるかという、スクリーンに到達した電子の状態は、これもまたそれらの重ね合わせで表される。ではスリットの穴と枚数をどんどん増やしていき、ついに全面が穴となり、また電子銃とスクリーンの間に隙間なくそのスリットが敷き詰められた場合を考える。結局のところ、電子銃とスクリーンの間に何も無いのと同じなのだが、前述の議論を参考にすれば「あらゆる可能な経路を通る重ね合わせ」でスクリーン上の状態が実現するといえる。言い換えれば、始状態と終状態の間の遷移確率振幅は、その 2 つを結ぶすべての経路の重ね合わせで与えられる、ということになる。

2 量子力学において

はじめにハミルトニアン H は時間並進の生成子であり、 $U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}tH)$ は t だけ時間をシフトするユニタリ演算子であることを確認する。

時間並進の演算子 $U(t, t_0)$ として、状態 $|\psi(t_0)\rangle$ から $|\psi(t)\rangle$ に時間発展させることは以下のように書ける。

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (2.1)$$

この演算子は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = I \quad (2.2)$$

$$U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0), \quad (t_2 > t_1 > t_0) \quad (2.3)$$

を満たす。これを示すために、Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.4)$$

を考える。(2.1) を代入すれば

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = H(t) U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (2.5)$$

ここで $|\psi(t_0)\rangle$ は任意なので、例えば位置表示で $|\psi(t_0)\rangle = |q\rangle$ をし、さらに両辺 $\langle q|$ をかけて積分することで完全性によって (2.2) が成立する。次にハミルトニアンが時間に依存しないとき

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)H\right) \quad (2.6)$$

と書けることを示す。時間を N 等分することを考え、(2.2) の時間微分について無限小の $\Delta t = (t - t_0)/N$ を用いて書き直す。

$$i\hbar \frac{U(t + \Delta t, t) - U(t, t)}{\Delta t} = H(t) U(t, t) \quad (2.7)$$

$U(t, t) = I$ なので

$$U(t + \Delta t, t) = I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(t) \quad (2.8)$$

さらに $t_j = t_{j-1} + \Delta t (j = 1, 2, \dots, N)$ と書けば

$$U(t_j, t_{j-1}) = I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(t_j) \quad (2.9)$$

これと (2.3) を繰り返し用いれば、

$$U(t, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} U(t, t_{N-1}) \cdots U(t_1, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(t)\right) \cdots \left(I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(t_1)\right) \quad (2.10)$$

と書ける。なお、 $t_N = t$ である。いまハミルトニアンは時間依存しない状況を考えているので $H(t) = H$ と書いて、 $\Delta t = (t - t_0)/N$ と表示すれば

$$U(t, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I - \frac{i}{\hbar} \frac{t - t_0}{N} H\right)^N = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)H\right) \quad (2.11)$$

と書ける。

2.1 Feynman 核

ここでは **Feynman** 核について議論する。Feynman 核は

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I) = \langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle = \langle q_F | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F - t_I)H} | q_I \rangle \quad (2.12)$$

で与えられ、経路積分において基本となるものである。これは時刻 t_I 、位置 q_I の粒子が時刻 t_F で位置 q_F に見出される確率振幅に対応する。Feynman 核を用いて波動関数表示について

$$\psi(q_F, t_F) = \int dq_I K(q_F, t_F; q_I, t_I) \psi(q_I, t_I) \quad (2.13)$$

と書ける。これは状態を位置表示で

$$|\psi\rangle = \int dq_I |q_I\rangle \langle q_I | \psi \rangle \quad (2.14)$$

と書けることから両辺 $\langle q_F |$ をかけて

$$\langle q_F | \psi \rangle = \int dq_I \langle q_F | q_I \rangle \langle q_I | \psi \rangle \Rightarrow \psi(q_F) = \int dq_I \langle q_F | q_I \rangle \psi(q_I) \quad (2.15)$$

とできるためである。また位置表示の基底ベクトルは正規直交なので (2.12) の初期条件として

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I)|_{t_F=t_I} = \delta(q_F - q_I) \quad (2.16)$$

が得られる。さらに (2.12) に状態の完全性を挿入すれば

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I) = \int dq' \langle q_F, t_F | q', t' \rangle \langle q', t' | q_I, t_I \rangle = \int dq' K(q_F, t_F; q', t') \langle q', t' | q_I, t_I \rangle \quad (2.17)$$

を満たすことがわかる。あるいは正規直交化されたエネルギー固有関数系 $\{\varphi_n(q)\}$ を用いれば

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I) = \langle q_F | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F-t_I)H} | q_I \rangle \quad (2.18)$$

$$= \sum_n \langle q_F | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F-t_I)H} | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | q_I \rangle \quad (2.19)$$

$$= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F-t_I)E_n} \langle q_F | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | q_I \rangle \quad (2.20)$$

$$= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F-t_I)E_n} \varphi_n(q_F) \varphi_n^*(q_I) \quad (2.21)$$

と Feynman 核を表すことができる。

2.2 経路積分表示

参考文献

- [1] 柏太郎, 新板 演習場の量子論, サイエンス社 [2009]
- [2] 坂本真人, 場の量子論 (II), 裳華房 [2021(第2版)]