

# 経路積分の方法

あけみ@homuotaku

2023 年 3 月 20 日

経路積分についてまとめる。主に [1] と [2] に拠っている。参考資料や私の気分によって、このノートでもノーテーションのブレがあるかもしれない。

## 目次

1	Feynman の考え	1
2	量子力学において	1
2.1	Feynman 核	2
2.2	経路積分表示	3
2.2.1	相空間における表示	4
2.2.2	配位空間における表示	5

## 1 Feynman の考え

2 重スリット実験の帰結では、電子銃から放たれ、2 つのスリットを通った粒子のスクリーン上での状態は、確率密度の重ね合わせで実現する。そのスリットを 3 重にしたら、あるいはスリットをもう 1 枚増やしたらどうなるかという、スクリーンに到達した電子の状態は、これもまたそれらの重ね合わせで表される。ではスリットの穴と枚数をどんどん増やしていき、ついに全面が穴となり、また電子銃とスクリーンの間に隙間なくそのスリットが敷き詰められた場合を考える。結局のところ、電子銃とスクリーンの間に何も無いのと同じなのだが、前述の議論を参考にすれば「あらゆる可能な経路を通る重ね合わせ」でスクリーン上の状態が実現するといえる。言い換えれば、始状態と終状態の間の遷移確率振幅は、その 2 つを結ぶすべての経路の重ね合わせで与えられる、ということになる。

## 2 量子力学において

はじめにハミルトニアン  $H$  は時間並進の生成子であり、 $U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}tH)$  は  $t$  だけ時間をシフトするユニタリ演算子であることを確認する。

時間並進の演算子  $U(t, t_0)$  として、状態  $|\psi(t_0)\rangle$  から  $|\psi(t)\rangle$  に時間発展させることは以下のように書ける。

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (2.1)$$

この演算子は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = I \quad (2.2)$$

$$U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0), \quad (t_2 > t_1 > t_0) \quad (2.3)$$

を満たす。これを示すために、Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.4)$$

を考える。(2.1) を代入すれば

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = H(t)U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (2.5)$$

ここで  $|\psi(t_0)\rangle$  は任意なので、例えば位置表示で  $|\psi(t_0)\rangle = |q\rangle$  をし、さらに両辺  $\langle q|$  をかけて積分することで完全性によって (2.2) が成立する。次にハミルトニアンが時間に依存しないとき

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)H\right) \quad (2.6)$$

と書けることを示す。時間を  $N$  等分することを考え、(2.2) の時間微分について無限小の  $\Delta t = (t - t_0)/N$  を用いて書き直す。

$$i\hbar \frac{U(t + \Delta t, t) - U(t, t)}{\Delta t} = H(t)U(t, t) \quad (2.7)$$

$U(t, t) = I$  なので

$$U(t + \Delta t, t) = I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(t) \quad (2.8)$$

さらに  $t_j = t_{j-1} + \Delta t (j = 1, 2, \dots, N)$  と書けば

$$U(t_j, t_{j-1}) = I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(t_j) \quad (2.9)$$

これと (2.3) を繰り返し用いれば、

$$U(t, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} U(t, t_{N-1}) \cdots U(t_1, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(t)\right) \cdots \left(I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(t_1)\right) \quad (2.10)$$

と書ける。なお、 $t_N = t$  である。いまハミルトニアンは時間依存しない状況を考えているので  $H(t) = H$  と書いて、 $\Delta t = (t - t_0)/N$  と表示すれば

$$U(t, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I - \frac{i}{\hbar} \frac{t - t_0}{N} H\right)^N = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)H\right) \quad (2.11)$$

と書ける。

## 2.1 Feynman 核

ここでは **Feynman** 核について議論する。Feynman 核は

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I) = \langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle = \langle q_F | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F - t_I)H} | q_I \rangle \quad (2.12)$$

で与えられ、経路積分において基本となるものである。これは時刻  $t_I$ 、位置  $q_I$  の粒子が時刻  $t_F$  で位置  $q_F$  に見出される確率振幅に対応する。Feynman 核を用いて波動関数表示について

$$\psi(q_F, t_F) = \int dq_I K(q_F, t_F; q_I, t_I) \psi(q_I, t_I) \quad (2.13)$$

と書ける。これは状態を位置表示で

$$|\psi\rangle = \int dq_I |q_I\rangle \langle q_I|\psi\rangle \quad (2.14)$$

と書けることから両辺  $\langle q_F|$  をかけて

$$\langle q_F|\psi\rangle = \int dq_I \langle q_F|q_I\rangle \langle q_I|\psi\rangle \Rightarrow \psi(q_F) = \int dq_I \langle q_F|q_I\rangle \psi(q_I) \quad (2.15)$$

とできるためである。また位置表示の基底ベクトルは正規直交なので (2.12) の初期条件として

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I)|_{t_F=t_I} = \delta(q_F - q_I) \quad (2.16)$$

が得られる。さらに (2.12) に状態の完全性を挿入すれば

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I) = \int dq' \langle q_F, t_F|q', t'\rangle \langle q', t'|q_I, t_I\rangle = \int dq' K(q_F, t_F; q', t') K(q', t'; q_I, t_I) \quad (2.17)$$

を満たすことがわかる。あるいは正規直交化されたエネルギー固有関数系  $\{\varphi_n(q)\}$  を用いれば

$$\begin{aligned} K(q_F, t_F; q_I, t_I) &= \langle q_F|e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F-t_I)H}|q_I\rangle \\ &= \sum_n \langle q_F|e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F-t_I)H}|\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|q_I\rangle \\ &= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F-t_I)E_n} \langle q_F|\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|q_I\rangle \\ &= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F-t_I)E_n} \varphi_n(q_F) \varphi_n^*(q_I) \end{aligned} \quad (2.18)$$

と Feynman 核を表すことができる。

## 2.2 経路積分表示

さて、この Feynman 核を用いて、1 で述べた「あるゆる可能な経路を通る重ね合わせ」という考えが実現されていることを見る。今考えている時間間隔を  $N$  等分して、各時刻を

$$t_n = t_I + n\Delta t, \quad \Delta t = \frac{t_F - t_I}{N} \quad (2.19)$$

と表示する。 $(n = 0, 1, \dots, N)$  当然  $t_0 = t_I, t_N = t_F$  である。次に、Feynman 核に、各時刻  $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$  における完全系

$$\int dq_n |q_n, t_n\rangle \langle q_n, t_n| = I \quad (2.20)$$

を順次挿入して、以下のように変形する。

$$\begin{aligned}
K(q_F, t_F; q_I, t_I) &= \langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle \\
&= \langle q_F, t_F | \left( \int dq_{N-1} |q_{N-1}, t_{N-1}\rangle \langle q_{N-1}, t_{N-1}| \right) \\
&\quad \times \left( \int dq_{N-2} |q_{N-2}, t_{N-2}\rangle \langle q_{N-2}, t_{N-2}| \right) \cdots \\
&\quad \times \text{kakko} \int dq_1 |q_1, t_1\rangle \langle q_1, t_1| q_I, t_I \rangle \\
&= \int dq_1 dq_{N-1} \langle q_F, t_F | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \langle q_{N-1}, t_{N-1} | q_{N-2}, t_{N-2} \rangle \\
&\quad \times \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \cdots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_I, t_I \rangle
\end{aligned} \tag{2.21}$$

この式において、 $\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle$  は時刻  $t_{n-1}$  で位置  $q_{n-1}$  にいた粒子が時刻  $t_n = t_{n-1} + \Delta t$  で位置  $q_n$  に見出される遷移確率振幅である。よって、一番右から見て行けば、 $(q_I, t_I) \rightarrow (q_1, t_1) \rightarrow \cdots \rightarrow (q_{N-1}, t_{N-1}) \rightarrow (q_F, t_F)$  と辿ったときの振幅に対応する。さらに、始状態と終状態は固定されており、中間状態  $n = 1, 2, \dots, N-1$  の部分はすべて積分されているので、これがすべての可能な経路を足し合わせることを表している。これではじめに述べた考えが実現されていることとなる。

### 2.2.1 相空間における表示

ここでは相空間における表示を導く。すなわち、Feynman 核を

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I) = \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_F} dt (p(t)\dot{q}(t) - H(p, q)) \right] \tag{2.22}$$

とする表示を求める。まず、

$$\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \langle q_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta H} | q_{n-1} \rangle \tag{2.23}$$

を評価する。ハミルトニアン内部には演算子である  $q, p$  が含まれることに注意せよ。ハミルトニアンは

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{2.24}$$

の形で与えられるとする。いま、 $\Delta t$  は十分小さいとすると、時間並進について

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta H} = I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(p, q) + O(\Delta t^2) \tag{2.25}$$

と書ける。これを用いれば

$$\begin{aligned}
\langle q_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta H} | q_{n-1} \rangle &= \langle q_n | \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(p, q) + O(\Delta t^2) \right) | q_{n-1} \rangle \\
&= \langle q_n | \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(p, q) \right) | q_{n-1} \rangle + O(\Delta t^2) \\
&= \langle q_n | \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(p, q) \right) \left( \int dp_n |p_n\rangle \langle p_n| \right) | q_{n-1} \rangle + O(\Delta t^2) \\
&= \int dp_n \left( I - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(p_n, q_n) \right) \langle q_n | p_n \rangle \langle p_n | q_{n-1} \rangle + O(\Delta t^2)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

と変形できる。ここで、下から2番目の等号で完全系を挿入し、最後の等号において  $\langle q_n |, |p_n\rangle$  の固有値  $q_n, p_n$  で書かれている。すなわち、演算子の部分がすべて c 数で書き換えられたことになる。

$$\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p q} \tag{2.27}$$

と書けることを用いて、再び (2.25) で指数関数で表せば

$$\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \Delta t \left( p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} - H(p_n, q_n) \right) \right] + O(\Delta t^2) \quad (2.28)$$

を得る。これを (2.21) に用いる。

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I) = \left( \prod_{n=1}^{N-1} \int dq_n \right) \left( \prod_{n=1}^N \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \Delta t \left( p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} - H(p_n, q_n) \right) \right] \quad (2.29)$$

$N \rightarrow \infty$  と取れば  $t_n$  は連続的な変化をすると思なせるので、 $q_n, p_n \rightarrow q(t), p(t)$  と書けて、また

$$\sum_{n=1}^N \Delta t \rightarrow \int_{t_I}^{t_F} dt, \quad \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \rightarrow \dot{q}(t) \quad (2.30)$$

と表せる。さらに

$$\left( \prod_{n=1}^{N-1} \int dq_n \right) \left( \prod_{n=1}^N \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right) = \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \quad (2.31)$$

と表記すれば、相空間における経路積分表示を得られる。

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I) = \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_F} dt (p(t)\dot{q}(t) - H(p, q)) \right] \quad (2.32)$$

### 2.2.2 配位空間における表示

ここでは配位空間における経路積分表示

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I) = \int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}q \exp \left( \frac{i}{\hbar} S[q] \right) \quad (2.33)$$

を導く。なお、ここで  $S[q]$  は

$$S[q] = \int_{t_I}^{t_F} dt L(q(t), \dot{q}(t)) = \int_{t_I}^{t_F} dt \left( \frac{1}{2} m \dot{q}(t)^2 - V(q) \right) \quad (2.34)$$

と表される作用積分である。前節で得た (2.32) を見ると、指数の肩にラグランジアン<sup>\*1</sup>の形式が現れている。ただし、ここで導入している  $p$  と  $q$  は独立であるため、ラグランジアンそのものではない。しかし、具体的に運動量積分することでラグランジアン<sup>\*</sup>の表示にすることが可能だ。(2.29) で  $p_n$  に関する積分を実行する。ハミルトニアン<sup>\*</sup>の形から、 $p_n$  の 2 次式となっていることに注目すると、平方完成して Gauss 積分の形へと持ち込める。

$$p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} - \frac{p_n^2}{2m} - V(q_n) = -\frac{1}{2m} p_n'^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - V(q_n) \quad (2.35)$$

ここで

$$p_n' = p_n - m \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \quad (2.36)$$

と置いた。この変換した  $p_n'$  で積分を実行することで

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I) = \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \Delta t} \right)^{N/2} \left( \prod_{n=1}^{N-1} \int dq_n \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \Delta t \left( \frac{m}{2} \left( \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - V(q_n) \right) \right] \quad (2.37)$$

---

<sup>\*1</sup> ハミルトニアンは Legendre 変換で  $H = p\dot{q} - L$  と書けた。

を得て、前節同様に  $N \rightarrow \infty$  として (2.30) と (2.31) で書き換えれば

$$K(q_F, t_F; q_I, t_I) = \int \mathcal{D}q \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_F} dt \left( \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) \right] \quad (2.38)$$

と書かれる。ここで全体の比例係数は積分測度  $\mathcal{D}q$  に入れて再定義した。

## 参考文献

- [1] 柏太郎, 新板 演習場の量子論, サイエンス社 [2009]
- [2] 坂本真人, 場の量子論 (II), 裳華房 [2021(第 2 版)]