Funktionalanalysys

Patrick Jenny

21. Januar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Hilberträume

Definition 1.1. Ein metrischer Raum besteht aus eine Menge X und einer Abb. $d : X, X \to \mathbb{R}$ die jedem geordneten Paar von Elementen aus X eine reele Zahl Zuordnet.

Diese Abb soll ($\forall x, y, z \in X$) folgende Eigenschaften bessitzen:

- $d(x, y) \geq 0$ (Nichtnegativität)
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Eindeutigkeit)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (Symetrie)
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (Dreiecksungleichung)

Definition 1.2. Ein normierter Raum ist ein Vektorraum V über den Köprer $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ auf dem eine Abb. $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ erklärt ist, die jedem Element $x \in V$ eine reele Zahl $\|x\|$ zuordnet und folgende Eigenschaften besitzt

- $\|x\| \geq 0$ (Nichtnegativität)
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Eindeutigkeit)
- $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (Skalierung)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkung. Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum mit Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ durch die Norm induzierte Metrik.

Definition 1.3. Ein normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert (bzgl. Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$) ist ein vollständig normierter Raum bzw. Banachraum.

Beispiele

- $\mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- $\mathbb{C}^n : \|\vec{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2}$
- Hilbert'scher Folgenraum ℓ^2

Definition 1.4. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}(\mathbb{R})$. Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abb. die jedem geordneten Paar von Elementen aus V eindeutig ein, mit $\langle x, y\rangle$ bezeichnetes Element aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ zuordnet und folgende Eigenschaften erfüllt.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \cdot V \to \mathbb{C}$

$\forall x, y, z \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$
- $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
- $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
- $\langle x, x\rangle \geq$ für $x \in \mathbb{R}$

- $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bemerkung. Skalarprodukt ist 'positiv hermitische Form'

- $\langle \lambda x, y\rangle = \langle y, \lambda x\rangle^* = \lambda^* \langle y, x\rangle^* = \lambda^* \langle x, y\rangle$
- $\langle x + y, z\rangle = \langle z, x + y\rangle^* + \langle x, z\rangle$

2 Fourierreihen

Temperaturverteilung auf Ring

$$a_0 + \sum_0^{\infty} (a_n \cos(n\omega\phi) + b_n \sin(n\omega\phi))$$

P.L. Dirichlet (1829) $\rightarrow$ mathematischer Beweis

Zerlegung einer periodischen Funktion nach diskreten Teilfrequenzen

- Fourieranalyse
- Fouriersynthese

Periodische Funktion mit Periodenlänge L

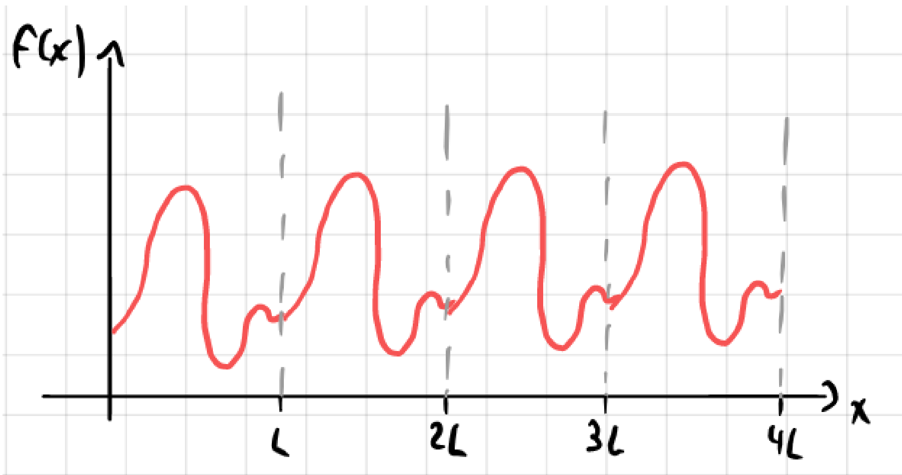


Abb. 1: Periodische Funktion mit Periodenlänge L

Definition 2.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ wird periodischen mit Periode L , $L > 0$, genannt wenn:

$$f(x + L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung. Periodiesche Funktion mit Periode L ist eindeutig auf ganz $\mathbb{R}$ fesgelegt, wenn man sie auf einem beliebiges Intervall der Länge L, $[a, a + L)$ kennt.
Standardvorgabe:

$$[0, L) \quad \text{oder} \quad [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$$

Bemerkung. $f(x)$ periodisch mit Periode L

$$\Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f(x) = \int_{a-\frac{L}{2}}^{a+\frac{L}{2}} dx f(x)$$

Betrachte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ mit

(i) periodisch mit Periode L, d.h. $f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) Lebesque-integrierbar auf dem Periodizitätsintervall, dh $f \in L^1(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ (schwächer als quadratintegrierbar)

Betrachte Funktionen der Einfachheit halber für $L = 2\pi$
Die ∞-trigometrische Reihe

$$FR(f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \text{mit}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\cos(nx) \quad n \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\sin(nx) \quad n > 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

heißt Fourierreihe der Funktion f mit den Fourierkoeffizienten a_n und b_n.

Konvergenz der Partialsummen

$FR(f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

muss beachtet werden.

Bemerkung. Wenn $f \in L^1(-\pi, \pi)$, dann stellt Fourierreihe eine Entwicklung nach der OGB $\{1, \sin(nx), \cos(nx); n \in \mathbb{N}\}$ auf $\sqrt{2}$ normiert $\Rightarrow \frac{1}{2}$ bei a_0

bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\overline{f(x)}g(x)$$

dar.

$\Rightarrow FR(f)$ konvergiert in L^2-Norm (Konvergenz im Mittel)

$$\lim_{n\to\infty} \|f - FR_N(t)\|_2 = 0$$

Satz 2.2. *Parsewal I*

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

2.0.1 Rechenregeln und Beispiele

(i) Allgemeines Periodizitätsintervall (a, b)

$$FR(f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right)$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b dx f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b dx f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \quad n > 0$$

(ii) Integrale über ein symetrisches Integrationsintervall $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ um Null verschwinden für ungerade Integranden:

- $f(x)$ ungerade $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$

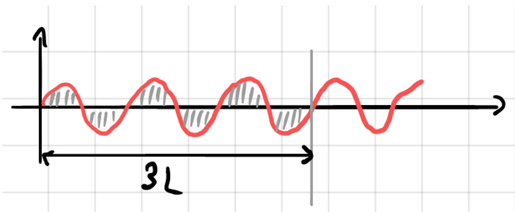
$$\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \underbrace{\underbrace{f(x)}_{ungerade} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)}_{gerade}}_{ungerade} = 0 \quad \text{cos()-Terme verschwinden}$$

- $f(x)$ gerade $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$

$$\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \underbrace{\underbrace{f(x)}_{gerade} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)}_{ungerade}}_{ungerade} = 0 \quad \text{sin()-Terme verschwinden}$$

(iii) Integrale über ein Vielfaches der Periode von sin- oder cos-Funktion verschwinden

$$\int_a^{a+k\frac{L}{n}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) dx = \int_a^{a+k\frac{L}{n}} \cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) dx = 0 \quad k \neq 0 \quad n \neq 0$$

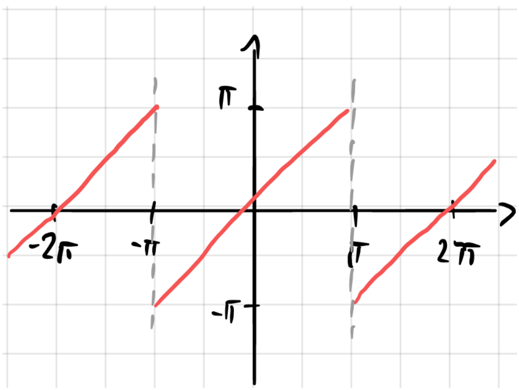


(iv) Linearität der Fourierreihe

$$FR(f+g)(x) = FR(f)(x) + FR(g)(x)$$
$$FR(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot FR(f)(x)$$

Beispiel 2.3. Sägezahnfunktion

$$f(x) = x \quad x \in (-\pi, \pi) \quad \text{Periode: } 2\pi$$



$$a_{n\geq 0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx x \cos(nx) = 0$$

Satz 2.4. *Ist eine periodische Funktion f, die auf dem Periodizitätsintervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ stückweise stetig diff-bar*

Bemerkung. Konvergiert $\frac{d}{dx}FR(f)(x)$ gleichmäßig $\Rightarrow$ Grenzfunktion ist stetige Funktion die auf $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ mit $f'(x)$ übereinstimmt

Satz 2.5. *$f(x)$ stückweise diff-bare Funktion auf $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ mit Fourierreihe $FR(f)(x)$, wobei $a_0 = 0$ und Stammfunktion $F(x)$. Dann gilt:*

$$FR(f)(x) = \int dx FR(f)(x)$$

3 Integral Transformationen

$f \in L^1[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ lässt sich durch FR darstellen. Was passiert mit FR, wenn $L \to \infty$?

3.1 Testfunktionenräume und Distributionen

Definition 3.1. V VR über $\mathbb{K}$. Ein Funktional F ist eine Abbildung:

$$F : V \to \mathbb{K}$$

$$\phi \in V \mapsto F(\phi) = \alpha \in \mathbb{K}$$

Ein lineares Funktional F erfüllt die Linearitätsbedingung

$$F(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha F(\phi) + \beta F(\psi) \quad \phi, \psi \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Die Menge aller linerarer Funktionale auf V

$$V^* = \{F | F : V \to \mathbb{K} \quad linear\}$$

bildet selbst bzgl. der ppunktweisenÄddition und Multiplikation mit einem Skalar einen VR, den algebraischen Dualraum von V.

$$(F + G)(\phi) = F(\phi) + G(\phi) \quad \forall \phi \in V$$

$$(\alpha F)(\phi) = \alpha(F)(\phi) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \phi \in V$$

Definition 3.2. Der Raum der beliebig oft stetig diff-baren (komplex- oder reellwertigen) Funktionen mit kompakten Trägern ist definiert als

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) | f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ und } f(\vec{x}) = 0 \text{ für } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ mit } \Omega \text{ kompakt}\}$$

$$(\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt } \Rightarrow \Omega \text{ abgeschlossen und beschränkt})$$

Bsp: $\phi = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \quad \in C_0^\infty$

Definition 3.3. Konvergenz in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
Eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|D^\alpha f_k - D^\alpha f\|_{\Omega,\infty} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}^n \text{ kompakt}$$

$$\to \max_{\vec{x}\in\Omega} |D^\alpha f_k - D^\alpha f|$$

4 Operatoren

Beispiel 4.1. (Ortsoperator in der Quantenmechanik)
$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ und $\hat{Q} = (D, Q)$ definiert durch

$(Qf)(x) = xf(x)$

$D(\hat{Q} = C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{f | f$ ist C^∞ mit kompaktem Träger$\}$

$\hat{Q}$ ist symmetrisch (aber nicht selbstadj.)

Beispiel 4.2. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $\hat{A} = (D, A)$

$(Af)(x) = x^{-\alpha} f(x) \qquad \alpha > 0,$ fest

$D = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | f = 0$ in Umgebung von $x = 0\}$

$\Rightarrow D^* = \{g \in L^2(\mathbb{R}) | x^{-\alpha} \cdot g \in L^2(\mathbb{R})\} \supset D$

und $\hat{A} = (D^*, A^\dagger) = (D^*, A) \quad \underbrace{\supset}_{Erweiterung} \quad \hat{A} \quad \Rightarrow \hat{A}$ ist symm.

$$\langle g, Af \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, g^*(x)(x^{-\alpha} f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (x^{-\alpha} g)^*(x) f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (A^\dagger g)(x) f(x)$$

Definition 4.3. Ein linearer Operator $\hat{A} = (D, A)$ in $\mathcal{H}$ heißt

(a) abgeschlossen, geschrieben als $\overline{\hat{A}} = \hat{A}$, genau dann, wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$, für die $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\mathcal{H}} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - y\|_{\mathcal{H}} = 0$ (mit $x, y \in^{n\to\infty} \mathcal{H}$) gilt, dass $x \in D$ und $Ax = y$

(b) abschließbar geanu dann, wenn $\hat{A}$ eine abgeschlossene Erweiterung $\hat{B} = \overline{\hat{B}} \supset \hat{A}$ besitzt

Bemerkung. Wesentlich (nur bei Abgeschlossenheit gefordert)

$A(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty}(Ax_n)$

nur für jene Cauchyfolgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt, für die auch $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ konvergiert.

Beispiel 4.4. $L^2[0;1]$

$\hat{A}_j = (D_j, A) \qquad j = 1, 2 \qquad (Af)(x) = x^{-\alpha} f(x) \quad \alpha > 0$

$D_1 = \{f \in L^2[0;1] \,|\, f = 0$ in Umgebung von $x = 0\}$

$D_2 = \{f \in L^2[0;1] \,|\, x^{-\alpha} f \in L^2[0;1]\}$

$D_1 \subset D_2 \quad$ und $\quad \overline{D_1} = \overline{D_2} = L^2[0;1]$

$\hat{A}_1$ **ist nicht abgeschlossen:** $f(x) = x^\alpha \notin D_1$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \in D_1$$

$$(Af_n)(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \in L^2[0;1]$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n = f \quad & \in \mathcal{H} \\ f \quad & \notin D_1 \Rightarrow \hat{A} \text{ nicht abgeschlossen} \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} Af_n = 1 \quad \in \mathcal{H}$

$\hat{A}_2$ **ist abgeschlossen:**

$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D_2$ mit

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g \in L^2[0;1] \quad \text{und}$$
$$\lim_{n\to\infty} Ag_n = G \in L^2[0;1]$$

Z.z.: $g \in D_2$ und $Ag = G$ Es gilt $D_2 = D_1^* = D(\hat{A_1}^\dagger)$

$\forall h \in D_1 : \quad \langle Ah, g\rangle = \langle x^{-\alpha}h, g\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x^{-\alpha}h, g_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle h, x^{-\alpha}g_n\rangle$
$= \lim_{n\to\infty}\langle h, Ag_n\rangle = \langle h, G\rangle$

$\Rightarrow y \in D_1^* = D_2 \quad$ und $\quad G = Ag$

Satz 4.5. *$\hat{A} = (D, A)$ dicht definiert in $\mathcal{H}$. Dann gilt:*

(a) $\hat{A} \subseteq \hat{B} \Rightarrow \hat{B}^\dagger \subseteq \hat{A}^\dagger$

(b) der zu $\hat{A}$ adjuingierte Operator $\hat{A}^\dagger$ ist abgeschlossen: $\overline{\hat{A}^\dagger} = \hat{A}^\dagger$

(c) $\hat{A}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $D^* = D(\hat{A}^\dagger)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist. In diesem Fall ist $\overline{\hat{A}} = \left(\hat{A}^\dagger\right)^\dagger$

Bemerkung.

- (b) folgt aus Stetigkeit des Skalarprodukts
- Ein selbstadjungierter Operator ist immer abgeschlossen, da $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ und in (b) $A^\dagger$ abgeschlossen.
- Ein dichtdefinierter Operator in $\mathcal{H}$ heißt wesentlich selbstadjungiert, wenn $\hat{A}$ symmetrisch und $\overline{\hat{A}}$ selbstadjungiert.

4.1 Überblick über Begriffe symmetrisch abgeschlossen und (wesentlich) selbstadjungiert

- $\hat{A}$ symm: $\underbrace{\hat{A} \subset \overline{\hat{A}}}_{\hat{A} \text{ hat abgeschl. Erweiterung}} = \left(\hat{A}^\dagger\right)^\dagger \subset \hat{A}^\dagger$
- $\hat{A}$ symm. & abgeschl.: $\hat{A} = \overline{\hat{A}} = \left(\hat{A}^\dagger\right)^\dagger \subset \hat{A}^\dagger$
- $\hat{A}$ wesentl. selbstadj: $\hat{A} \subset \overline{\hat{A}} = \left(\hat{A}^\dagger\right)^\dagger = \hat{A}^\dagger$
- $\hat{A}$ selbstadj.: $\hat{A} = \overline{\hat{A}} = \left(\hat{A}^\dagger\right)^\dagger = \hat{A}^\dagger$

Hauptproblem für selbstadjungierten Operator: $D = D(\hat{A}) = D^* = D(\hat{A}^\dagger)$

Satz 4.6. *Für einen symmetrischen Operar $\hat{A}$ in $\mathcal{H}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\hat{A}$ *selbstadjungiert:* $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$

(b) $\hat{A}$ *abgeschlossen* $\left(\overline{\hat{A}} = \hat{A}\right)$ *und* $Ker(\hat{A}^\dagger \pm iI) = \{0\}$

(c) $Ran(\hat{A}^\dagger \pm iI) = \mathcal{H}$

Beispiel 4.7. quantenmechanisches Teilchen in 1 Raumdimension, das im Intervall $[0;1]$ ëingesperrtïst

Impulsoperator:

$$\hat{P} = (D, P)$$

$$\mathcal{H} = L^2[0;1]$$

$D = \{f \in L^2[0,1] \,|\, f$ absolut stetig und $f' \in L^2[0,1]\}$

und $(Pf)(x) = i\frac{d}{dx}f(x) \qquad \forall f \in D$

D ist dicht in $\mathcal{H} \Rightarrow \hat{P}$ ist ein dicht definierter Operator.

$\forall f, g \in D$ gilt: $\quad \langle f, Pg\rangle = \int_0^1 \, dx\, f^*(x)ig'(x) = if^*(x)g(x)|_0^1 + \int_0^1 \, dx\,(if'(x)^*g(x)$

$\Rightarrow \hat{P}$ auf D nicht symmetrisch (wegen der Randterme)

Suche $D' \subset D$, sodass Randterme verschwinden

$f^*(1)\cdot g(1) - f^*(0)\cdot g(0) = 0 \quad \forall f, g \in D'$

$\hat{P}' = (D', P)$ wäre symmetrischer Operator

Für $f = g \qquad |f(1)|^2 = |f(0)|^2 \Leftrightarrow f(1) = e^{i\gamma}$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ f an der Stelle 0 und f an der Stelle 1 können sich nur ume eine Phase unterscheiden.

$\hat{P}_\gamma = (D_\gamma, P) \qquad D_\gamma\{f \in D \,|\, f(1) = e^{i\gamma}f(0)\} \qquad \gamma \in \mathbb{R}$

$\hat{P}_\infty = (D_\infty, P)$ mit $D_\infty\{f \in D \,|\, f(1) = f(0) = 0\}$

Es gilt: $D_\infty \subset D \subset D_\infty^* \quad \Rightarrow$ symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert

Aber:

$\hat{P}_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$ sind selbstadjungierte Operatoren $\left(\hat{P}_\gamma = \hat{P}_\gamma^\dagger\right)$

$\Rightarrow \hat{P}_\infty$ besitzt ∞ viele selbstadjungierte Erweiterungen.

$\hat{P}_\gamma = \hat{P}_\gamma^\dagger \supset \hat{P}_\infty \qquad \forall\gamma \in \mathbb{R}$

Jede selbstadjungierte Erweiterung von $\hat{P}_\infty$ lässt sich in Form von $\hat{P}_\gamma$ mit einem bestimmtem γ darstellen.

Beispiel 4.8. Impulsoperator in der Quantenmechanik

$\mathcal{H} = L^2[0;1]$

$\hat{P}_\gamma = (D_\gamma, P) \qquad (Pf)(x) = i\frac{d}{dx}f(x)$

$D_\gamma = \{f \in D \,|\, f(1) = e^{i\gamma}f(0)\} \qquad \gamma \in \mathbb{R}$

$D = \{f \in L^2[0;1] \,|\, f$ absolutstetig und $f' \in L^2[0;1]\}$

$\hat{P}_\gamma \ldots$ s.a Operator
$\hat{P}_\infty \ldots$

$\hat{P} \qquad \hat{H} =$ Unvollständig

$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = H\Psi(t,x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(t,x) + V(x)\Psi(t,x)$

ist Multiplikationsoperator

4.2 Beschränkte und kompakte Operatoren

5 Partielle Differentialgleichungen

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis