

Funktionalanalysis

Patrick Jenny

12. Januar 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Hilberträume	2
2	Fourierreihen	4
2.0.1	Rechenregeln und Beispiele	5
3	Integral Transformationen	8
3.1	Testfunktionenräume und Distributionen	8

1 Hilberträume

Definition 1.1. Ein metrischer Raum besteht aus einer Menge X und einer Abb. $d : X, X \rightarrow \mathbb{R}$ die jedem geordneten Paar von Elementen aus X eine reelle Zahl Zuordnet.

Diese Abb soll $(\forall x, y, z \in X)$ folgende Eigenschaften besitzen:

- $d(x, y) \geq 0$ (Nichtnegativität)
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Eindeutigkeit)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (Dreiecksungleichung)

Definition 1.2. Ein normierter Raum ist ein Vektorraum V über den Körper $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ auf dem eine Abb. $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt ist, die jedem Element $x \in V$ eine reelle Zahl $\|x\|$ zuordnet und folgende Eigenschaften besitzt

- $\|x\| \geq 0$ (Nichtnegativität)
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Eindeutigkeit)
- $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (Skalierung)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkung. Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum mit Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ durch die Norm induzierte Metrik.

Definition 1.3. Ein normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert (bzgl. Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$) ist ein vollständig normierter Raum bzw. Banachraum.

Beispiele

- $\mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- $\mathbb{C}^n : \|\vec{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2}$
- Hilbert'scher Folgenraum ℓ^2

Definition 1.4. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}(\mathbb{R})$. Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abb. die jedem geordneten Paar von Elementen aus V eindeutig ein, mit $\langle x, y \rangle$ bezeichnetes Element aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ zuordnet und folgende Eigenschaften erfüllt.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \cdot V \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\forall x, y, z \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
- $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$

- $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bemerkung. Skalarprodukt ist 'positiv hermitische Form'

- $\langle \lambda x, y \rangle = \langle y, \lambda x \rangle^* = \lambda^* \langle y, x \rangle^* = \lambda^* \langle x, y \rangle$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle z, x + y \rangle^* + \langle x, z \rangle$

2 Fourierreihen

Temperaturverteilung auf Ring

$$a_0 + \sum_0^{\infty} (a_n \cos(n\omega\phi) + b_n \sin(n\omega\phi))$$

P.L. Dirichlet (1829) → mathematischer Beweis

Zerlegung einer periodischen Funktion nach diskreten Teilfrequenzen

- Fourieranalyse
- Fouriersynthese

Periodische Funktion mit Periodenlänge L



Abb. 1: Periodische Funktion mit Periodenlänge L

Definition 2.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ wird periodisch mit Periode L , $L > 0$, genannt wenn:

$$f(x + L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung. Periodische Funktion mit Periode L ist eindeutig auf ganz \mathbb{R} festgelegt, wenn man sie auf einem beliebigen Intervall der Länge L , $[a, a + L)$ kennt.

Standardvorgabe:

$$[0, L) \quad \text{oder} \quad \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$$

Bemerkung. $f(x)$ periodisch mit Periode L

$$\Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f(x) = \int_{a-\frac{L}{2}}^{a+\frac{L}{2}} dx f(x)$$

Betrachte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ mit

- (i) periodisch mit Periode L , d.h. $f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (ii) Lebesgue-integrierbar auf dem Periodizitätsintervall, dh $f \in L^1(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ (schwächer als quadratintegrierbar)

Betrachte Funktionen der Einfachheit halber für $L = 2\pi$

Die ∞ -trigometrische Reihe

$$FR(f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \text{mit}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(nx) \quad n \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin(nx) \quad n > 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

heißt Fourierreihe der Funktion f mit den Fourierkoeffizienten a_n und b_n .

Konvergenz der Partialsummen

$$FR(f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

muss beachtet werden.

Bemerkung. Wenn $f \in L^1(-\pi, \pi)$, dann stellt Fourierreihe eine Entwicklung nach der OGB $\{1, \sin(nx), \cos(nx); n \in \mathbb{N}\}$ auf $\sqrt{2}$ normiert $\Rightarrow \frac{1}{2}$ bei a_0

bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \overline{g(x)}$$

dar.

$\Rightarrow FR(f)$ konvergiert in L^2 -Norm (Konvergenz im Mittel)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - FR_N(t)\|_2 = 0$$

Satz 2.2. Parseval I

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

2.0.1 Rechenregeln und Beispiele

- (i) Allgemeines Periodizitätsintervall (a, b)

$$FR(f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b dx f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \quad n > 0$$

(ii) Integrale über ein symmetrisches Integrationsintervall $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ um Null verschwinden für ungerade Integranden:

- $f(x)$ ungerade $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$

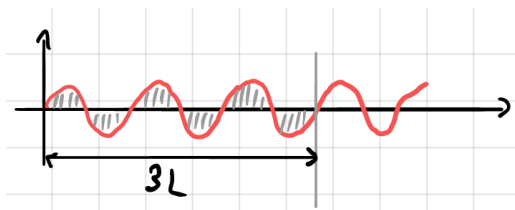
$$\frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{ungerade}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)}_{\text{gerade}}}_{\text{ungerade}} = 0 \quad \cos(\text{)-Terme verschwinden}$$

- $f(x)$ gerade $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$

$$\frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{gerade}} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)}_{\text{ungerade}}}_{\text{ungerade}} = 0 \quad \sin(\text{)-Terme verschwinden}$$

(iii) Integrale über ein Vielfaches der Periode von sin- oder cos-Funktion verschwinden

$$\int_a^{a+k\frac{L}{n}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) dx = \int_a^{a+k\frac{L}{n}} \cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) dx = 0 \quad k \neq 0 \quad n \neq 0$$



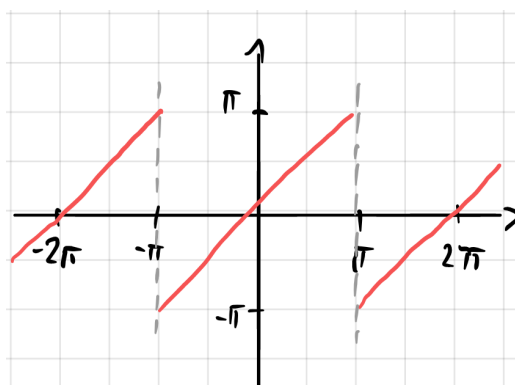
(iv) Linearität der Fourierreihe

$$FR(f+g)(x) = FR(f)(x) + FR(g)(x)$$

$$FR(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot FR(f)(x)$$

Beispiel 2.3. Sägezahnfunktion

$$f(x) = x \quad x \in (-\pi, \pi) \quad \text{Periode: } 2\pi$$



$$a_{n \geq 0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx x \cos(nx) = 0$$

Satz 2.4. Ist eine periodische Funktion f , die auf dem Periodizitätsintervall $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ stückweise stetig diff-bar

Bemerkung. Konvergiert $\frac{d}{dx} FR(f)(x)$ gleichmäßig \Rightarrow Grenzfunktion ist stetige Funktion die auf $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ mit $f'(x)$ übereinstimmt

Satz 2.5. $f(x)$ stückweise diff-bare Funktion auf $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ mit Fourierreihe $FR(f)(x)$, wobei $a_0 = 0$ und Stammfunktion $F(x)$. Dann gilt:

$$FR(f)(x) = \int dx FR(f)(x)$$

3 Integral Transformationen

$f \in L^1[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ lässt sich durch FR darstellen. Was passiert mit FR, wenn $L \rightarrow \infty$?

3.1 Testfunktionenräume und Distributionen

Definition 3.1. V VR über \mathbb{K} . Ein Funktional F ist eine Abbildung:

$$F : V \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\phi \in V \mapsto F(\phi) = \alpha \in \mathbb{K}$$

Ein lineares Funktional F erfüllt die Linearitätsbedingung

$$F(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha F(\phi) + \beta F(\psi) \quad \phi, \psi \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Die Menge aller linearer Funktionale auf V

$$V^* = \{F | F : V \rightarrow \mathbb{K} \text{ linear}\}$$

bildet selbst bzgl. der punktweisen Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen VR, den algebraischen Dualraum von V .

$$(F + G)(\phi) = F(\phi) + G(\phi) \quad \forall \phi \in V$$

$$(\alpha F)(\phi) = \alpha(F)(\phi) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \phi \in V$$

Definition 3.2. Der Raum der beliebig oft stetig diff-baren (komplex- oder reellwertigen) Funktionen mit kompakten Trägern ist definiert als

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) | f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ und } f(\vec{x}) = 0 \text{ für } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ mit } \Omega \text{ kompakt}\}$$

$$(\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \Rightarrow \Omega \text{ abgeschlossen und beschränkt})$$

$$\text{Bsp: } \phi = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \in C_0^\infty$$

Definition 3.3. Konvergenz in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Eine Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|D^\alpha f_k - D^\alpha f\|_{\Omega, \infty} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}^n \text{ kompakt}$$

$$\rightarrow \max_{\vec{x} \in \Omega} |D^\alpha f_k - D^\alpha f|$$

Beispiel 3.4. (Ortsoperator in der Quantenmechanik)

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ und $\hat{Q} = (D, Q)$ definiert durch

$$(Qf)(x) = xf(x)$$

$$D(\hat{Q}) = C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{f | f \text{ ist } C^\infty \text{ mit kompaktem Träger}\}$$

\hat{Q} ist symmetrisch (aber nicht selbstadj.)

Beispiel 3.5. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $\hat{A} = (D, A)$

$$(Af)(x) = x^{-\alpha}f(x) \quad \alpha > 0, \text{ fest}$$

$$D = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | f = 0 \text{ in Umgebung von } x = 0\}$$

$$\Rightarrow D^* = \{g \in L^2(\mathbb{R}) | x^{-\alpha} \cdot g \in L^2(\mathbb{R})\} \supset D$$

$$\text{und } \hat{A} = (D^*, A^\dagger) = (D^*, A) \quad \underbrace{\supset}_{\text{Erweiterung}} \hat{A} \Rightarrow \hat{A} \text{ ist symm.}$$

$$\langle g, Af \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx g^*(x)(x^{-\alpha}f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (x^{-\alpha}g)^*(x)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (A^\dagger g)(x)f(x)$$

Definition 3.6. Ein linearer Operator $\hat{A} = (D, A)$ in \mathcal{H} heißt

(a) abgeschlossen, geschrieben als $\overline{\hat{A}} = \hat{A}$, genau dann, wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{\mathcal{H}} = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - y\|_{\mathcal{H}} = 0$ (mit $x, y \in {}^{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}$) gilt, dass $x \in D$ und $Ax = y$

(b) abschließbar genau dann, wenn \hat{A} eine abgeschlossene Erweiterung $\hat{B} = \overline{\hat{B}} \supset \hat{A}$ besitzt

Bemerkung. Wesentlich (nur bei Abgeschlossenheit gefordert)

$$A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n)$$

nur für jene Cauchyfolgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gilt, für die auch $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H} konvergiert.

Beispiel 3.7. $L^2[0; 1]$

$$\hat{A}_j = (D_j, A) \quad j = 1, 2 \quad (Af)(x) = x^{-\alpha}f(x) \quad \alpha > 0$$

$$D_1 = \{f \in L^2[0; 1] | f = 0 \text{ in Umgebung von } x = 0\}$$

$$D_2 = \{f \in L^2[0; 1] | x^{-\alpha}f \in L^2[0; 1]\}$$

$$D_1 \subset D_2 \quad \text{und} \quad \overline{D_1} = \overline{D_2} = L^2[0; 1]$$

\hat{A}_1 ist nicht abgeschlossen: $f(x) = x^\alpha \notin D_1$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in D_1$$

$$(Af_n)(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in L^2[0; 1]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in \mathcal{H} \\ f \notin D_1 \Rightarrow \hat{A} \text{ nicht abgeschlossen}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Af_n = 1 \in \mathcal{H}$$

\hat{A}_2 ist abgeschlossen:

$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_2$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g \in L^2[0; 1] \quad \text{und}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ag_n = G \in L^2[0; 1]$$

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1	Periodische Funktion mit Periodenlänge L	4
---	--	---