

# Funktionalanalysis

Patrick Jenny

15. Januar 2020

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Hilberträume</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Fourierreihen</b>	<b>4</b>
2.0.1	Rechenregeln und Beispiele . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Integral Transformationen</b>	<b>8</b>
3.1	Testfunktionenräume und Distributionen . . . . .	8
3.1.1	Überblick über Begriffe symmetrisch abgeschlossen und (wesentlich) selbst-adjungiert . . . . .	10

# 1 Hilberträume

**Definition 1.1.** Ein metrischer Raum besteht aus einer Menge  $X$  und einer Abb.  $d : X, X \rightarrow \mathbb{R}$  die jedem geordneten Paar von Elementen aus  $X$  eine reelle Zahl Zuordnet.

Diese Abb soll  $(\forall x, y, z \in X)$  folgende Eigenschaften besitzen:

- $d(x, y) \geq 0$  (Nichtnegativität)
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (Eindeutigkeit)
- $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  (Dreiecksungleichung)

**Definition 1.2.** Ein normierter Raum ist ein Vektorraum  $V$  über den Körper  $\mathbb{C}(\mathbb{R})$  auf dem eine Abb.  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  erklärt ist, die jedem Element  $x \in V$  eine reelle Zahl  $\|x\|$  zuordnet und folgende Eigenschaften besitzt

- $\|x\| \geq 0$  (Nichtnegativität)
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (Eindeutigkeit)
- $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$  (Skalierung)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Dreiecksungleichung)

**Bemerkung.** Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum mit Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$  durch die Norm induzierte Metrik.

**Definition 1.3.** Ein normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert (bzgl. Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$ ) ist ein vollständig normierter Raum bzw. Banachraum.

## Beispiele

- $\mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- $\mathbb{C}^n : \|\vec{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2}$
- Hilbert'scher Folgenraum  $\ell^2$

**Definition 1.4.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ . Ein Skalarprodukt auf  $V$  ist eine Abb. die jedem geordneten Paar von Elementen aus  $V$  eindeutig ein, mit  $\langle x, y \rangle$  bezeichnetes Element aus  $\mathbb{C}(\mathbb{R})$  zuordnet und folgende Eigenschaften erfüllt.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \cdot V \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\forall x, y, z \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
- $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$  für  $x \in \mathbb{R}$

- $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**Bemerkung.** Skalarprodukt ist 'positiv hermitische Form'

- $\langle \lambda x, y \rangle = \langle y, \lambda x \rangle^* = \lambda^* \langle y, x \rangle^* = \lambda^* \langle x, y \rangle$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle z, x + y \rangle^* + \langle x, z \rangle$

## 2 Fourierreihen

Temperaturverteilung auf Ring

$$a_0 + \sum_0^{\infty} (a_n \cos(n\omega\phi) + b_n \sin(n\omega\phi))$$

P.L. Dirichlet (1829) → mathematischer Beweis

Zerlegung einer periodischen Funktion nach diskreten Teilfrequenzen

- Fourieranalyse
- Fouriersynthese

Periodische Funktion mit Periodenlänge  $L$



Abb. 1: Periodische Funktion mit Periodenlänge  $L$

**Definition 2.1.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  wird periodisch mit Periode  $L$ ,  $L > 0$ , genannt wenn:

$$f(x + L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Bemerkung.** Periodische Funktion mit Periode  $L$  ist eindeutig auf ganz  $\mathbb{R}$  festgelegt, wenn man sie auf einem beliebigen Intervall der Länge  $L$ ,  $[a, a + L)$  kennt.

Standardvorgabe:

$$[0, L) \quad \text{oder} \quad \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$$

**Bemerkung.**  $f(x)$  periodisch mit Periode  $L$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f(x) = \int_{a-\frac{L}{2}}^{a+\frac{L}{2}} dx f(x)$$

Betrachte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  mit

- (i) periodisch mit Periode  $L$ , d.h.  $f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (ii) Lebesgue-integrierbar auf dem Periodizitätsintervall, dh  $f \in L^1(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$  (schwächer als quadratintegrierbar)

Betrachte Funktionen der Einfachheit halber für  $L = 2\pi$

Die  $\infty$ -trigometrische Reihe

$$FR(f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \text{mit}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos(nx) \quad n \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin(nx) \quad n > 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

heißt Fourierreihe der Funktion  $f$  mit den Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ .

Konvergenz der Partialsummen

$$FR(f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

muss beachtet werden.

**Bemerkung.** Wenn  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ , dann stellt Fourierreihe eine Entwicklung nach der OGB  $\{1, \sin(nx), \cos(nx); n \in \mathbb{N}\}$  auf  $\sqrt{2}$  normiert  $\Rightarrow \frac{1}{2}$  bei  $a_0$

bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \overline{g(x)}$$

dar.

$\Rightarrow FR(f)$  konvergiert in  $L^2$ -Norm (Konvergenz im Mittel)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - FR_N(t)\|_2 = 0$$

**Satz 2.2.** Parseval I

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

## 2.0.1 Rechenregeln und Beispiele

- (i) Allgemeines Periodizitätsintervall  $(a, b)$

$$FR(f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b dx f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) \quad n > 0$$

(ii) Integrale über ein symmetrisches Integrationsintervall  $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$  um Null verschwinden für ungerade Integranden:

- $f(x)$  ungerade  $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$

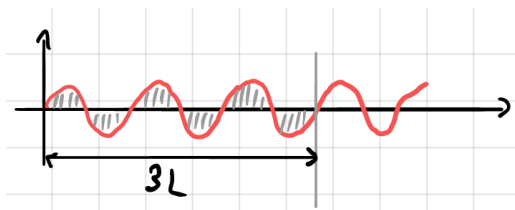
$$\frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{ungerade}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)}_{\text{gerade}}}_{\text{ungerade}} = 0 \quad \cos(\text{)-Terme verschwinden}$$

- $f(x)$  gerade  $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$

$$\frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{gerade}} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)}_{\text{ungerade}}}_{\text{ungerade}} = 0 \quad \sin(\text{)-Terme verschwinden}$$

(iii) Integrale über ein Vielfaches der Periode von sin- oder cos-Funktion verschwinden

$$\int_a^{a+k\frac{L}{n}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) dx = \int_a^{a+k\frac{L}{n}} \cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) dx = 0 \quad k \neq 0 \quad n \neq 0$$



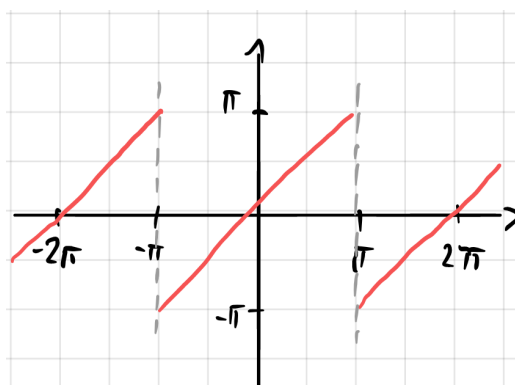
(iv) Linearität der Fourierreihe

$$FR(f+g)(x) = FR(f)(x) + FR(g)(x)$$

$$FR(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot FR(f)(x)$$

**Beispiel 2.3.** Sägezahnfunktion

$$f(x) = x \quad x \in (-\pi, \pi) \quad \text{Periode: } 2\pi$$



$$a_{n \geq 0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx x \cos(nx) = 0$$

**Satz 2.4.** Ist eine periodische Funktion  $f$ , die auf dem Periodizitätsintervall  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  stückweise stetig diff-bar

**Bemerkung.** Konvergiert  $\frac{d}{dx} FR(f)(x)$  gleichmäßig  $\Rightarrow$  Grenzfunktion ist stetige Funktion die auf  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  mit  $f'(x)$  übereinstimmt

**Satz 2.5.**  $f(x)$  stückweise diff-bare Funktion auf  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  mit Fourierreihe  $FR(f)(x)$ , wobei  $a_0 = 0$  und Stammfunktion  $F(x)$ . Dann gilt:

$$FR(f)(x) = \int dx FR(f)(x)$$

### 3 Integral Transformationen

$f \in L^1[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  lässt sich durch FR darstellen. Was passiert mit FR, wenn  $L \rightarrow \infty$ ?

#### 3.1 Testfunktionenräume und Distributionen

**Definition 3.1.**  $V$  VR über  $\mathbb{K}$ . Ein Funktional  $F$  ist eine Abbildung:

$$F : V \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\phi \in V \mapsto F(\phi) = \alpha \in \mathbb{K}$$

Ein lineares Funktional  $F$  erfüllt die Linearitätsbedingung

$$F(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha F(\phi) + \beta F(\psi) \quad \phi, \psi \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Die Menge aller linearer Funktionale auf  $V$

$$V^* = \{F | F : V \rightarrow \mathbb{K} \text{ linear}\}$$

bildet selbst bzgl. der punktweisen Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen VR, den algebraischen Dualraum von  $V$ .

$$(F + G)(\phi) = F(\phi) + G(\phi) \quad \forall \phi \in V$$

$$(\alpha F)(\phi) = \alpha(F)(\phi) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall \phi \in V$$

**Definition 3.2.** Der Raum der beliebig oft stetig diff-baren (komplex- oder reellwertigen) Funktionen mit kompakten Trägern ist definiert als

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) | f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ und } f(\vec{x}) = 0 \text{ für } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \text{ mit } \Omega \text{ kompakt}\}$$

$$(\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \Rightarrow \Omega \text{ abgeschlossen und beschränkt})$$

$$\text{Bsp: } \phi = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \in C_0^\infty$$

**Definition 3.3.** Konvergenz in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Eine Funktionenfolge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  konvergiert gegen  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|D^\alpha f_k - D^\alpha f\|_{\Omega, \infty} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}^n \text{ kompakt}$$

$$\rightarrow \max_{\vec{x} \in \Omega} |D^\alpha f_k - D^\alpha f|$$



**Beispiel 3.4.** (Ortsoperator in der Quantenmechanik)

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  und  $\hat{Q} = (D, Q)$  definiert durch

$$(Qf)(x) = xf(x)$$

$$D(\hat{Q}) = C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{f | f \text{ ist } C^\infty \text{ mit kompaktem Träger}\}$$

$\hat{Q}$  ist symmetrisch (aber nicht selbstadj.)

**Beispiel 3.5.**  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ ,  $\hat{A} = (D, A)$

$$(Af)(x) = x^{-\alpha}f(x) \quad \alpha > 0, \text{ fest}$$

$$D = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | f = 0 \text{ in Umgebung von } x = 0\}$$

$$\Rightarrow D^* = \{g \in L^2(\mathbb{R}) | x^{-\alpha} \cdot g \in L^2(\mathbb{R})\} \supset D$$

$$\text{und } \hat{A} = (D^*, A^\dagger) = (D^*, A) \quad \underbrace{\supset}_{\text{Erweiterung}} \hat{A} \Rightarrow \hat{A} \text{ ist symm.}$$

$$\langle g, Af \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx g^*(x)(x^{-\alpha}f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (x^{-\alpha}g)^*(x)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (A^\dagger g)(x)f(x)$$

**Definition 3.6.** Ein linearer Operator  $\hat{A} = (D, A)$  in  $\mathcal{H}$  heißt

- (a) abgeschlossen, geschrieben als  $\overline{\hat{A}} = \hat{A}$ , genau dann, wenn für jede Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ , für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_{\mathcal{H}} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - y\|_{\mathcal{H}} = 0$  (mit  $x, y \in {}^{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}$ ) gilt, dass  $x \in D$  und  $Ax = y$
- (b) abschließbar genau dann, wenn  $\hat{A}$  eine abgeschlossene Erweiterung  $\hat{B} = \overline{\hat{B}} \supset \hat{A}$  besitzt

**Bemerkung.** Wesentlich (nur bei Abgeschlossenheit gefordert)

$$A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n)$$

nur für jene Cauchyfolgen  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  gilt, für die auch  $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{H}$  konvergiert.

**Beispiel 3.7.**  $L^2[0; 1]$

$$\hat{A}_j = (D_j, A) \quad j = 1, 2 \quad (Af)(x) = x^{-\alpha}f(x) \quad \alpha > 0$$

$$D_1 = \{f \in L^2[0; 1] | f = 0 \text{ in Umgebung von } x = 0\}$$

$$D_2 = \{f \in L^2[0; 1] | x^{-\alpha}f \in L^2[0; 1]\}$$

$$D_1 \subset D_2 \quad \text{und} \quad \overline{D_1} = \overline{D_2} = L^2[0; 1]$$

$\hat{A}_1$  ist nicht abgeschlossen:  $f(x) = x^\alpha \notin D_1$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in D_1$$

$$(Af_n)(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in L^2[0; 1]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in \mathcal{H} \\ f \notin D_1 \Rightarrow \hat{A} \text{ nicht abgeschlossen}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Af_n = 1 \in \mathcal{H}$$

$\hat{A}_2$  ist abgeschlossen:

$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_2$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g \in L^2[0; 1] \quad \text{und}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ag_n = G \in L^2[0; 1]$$

Z.z.:  $g \in D_2$  und  $Ag = G$  Es gilt  $D_2 = D_1^* = D(\hat{A}_1^\dagger)$

$$\begin{aligned} \forall h \in D_1 : \quad \langle Ah, g \rangle &= \langle x^{-\alpha} h, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x^{-\alpha} h, g_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle h, x^{-\alpha} g_n \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle h, Ag_n \rangle = \langle h, G \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \in D_1^* = D_2 \quad \text{und} \quad G = Ag$$

**Satz 3.8.**  $\hat{A} = (D, A)$  dicht definiert in  $\mathcal{H}$ . Dann gilt:

(a)  $\hat{A} \subseteq \hat{B} \Rightarrow \hat{B}^\dagger \subseteq \hat{A}^\dagger$

(b) der zu  $\hat{A}$  adjungierte Operator  $\hat{A}^\dagger$  ist abgeschlossen:  $\overline{\hat{A}^\dagger} = \hat{A}^\dagger$

(c)  $\hat{A}$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $D^* = D(\hat{A}^\dagger)$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist. In diesem Fall ist  $\overline{\hat{A}} = (\hat{A}^\dagger)^\dagger$

**Bemerkung.**

- (b) folgt aus Stetigkeit des Skalarprodukts
- Ein selbstadjungierter Operator ist immer abgeschlossen, da  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$  und in (b)  $\hat{A}^\dagger$  abgeschlossen.
- Ein dichtdefinierter Operator in  $\mathcal{H}$  heißt wesentlich selbstadjungiert, wenn  $\hat{A}$  symmetrisch und  $\overline{\hat{A}}$  selbstadjungiert.

### 3.1.1 Überblick über Begriffe symmetrisch abgeschlossen und (wesentlich) selbstadjungiert

- $\hat{A}$  symm.:  $\underbrace{\hat{A} \subset \overline{\hat{A}}}_{\hat{A} \text{ hat abgeschl. Erweiterung}} = (\hat{A}^\dagger)^\dagger \subset \hat{A}^\dagger$
- $\hat{A}$  symm. & abgeschl.:
- $\hat{A}$  wesentl. selbstadj.:
- $\hat{A}$  selbstadj.:

Hauptproblem für selbstadjungierten Operator:  $D = D(\hat{A}) = D^* = D(\hat{A}^\dagger)$

**Satz 3.9.** Für einen symmetrischen Operator  $\hat{A}$  in  $\mathcal{H}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

(a)  $\hat{A}$  selbstadjungiert:  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$

## Tabellenverzeichnis

## Abbildungsverzeichnis

1	Periodische Funktion mit Periodenlänge $L$ . . . . .	4
---	--	---