Solution série 1

<u>Exercice 1</u>: Donner la Forme Normale Conjonctive FNC de: $(P \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow S$

<u>Solution:</u>

1) On élimine les implications par la règle: $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ on obtient:

$\neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S$

2) on développe la négation jusqu'aux littéraux par les règles:

$\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$\neg \neg A \equiv A$ on obtient:

$(\neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \vee S$

3) On applique la règle (3) pour la FNC $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ autant de fois que nécessaire (2 fois), on obtient:

$((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee S$ puis

$\mathbf{(S \vee \neg P \vee Q) \wedge (S \vee \neg P \vee \neg R)}$ qui est une FNC c-à-d une conjonction de disjonction de littéraux.

<u>Exercice 2:</u> Soient les expressions suivantes :

1) Si les enseignants sont sévères alors les notes sont mauvaises
2) Si les notes sont mauvaises alors les étudiants sont en colère
3) Les enseignants sont sévères
4) Les étudiants sont en colère

Montrer que 4 est Conséquence Logique de 1,2, 3 (avec la logique propositionnelle).

<u>Solution:</u>

a) La première étape est de transformer ces expressions en formules de la logique propositionnelle.

On va représenter par des symboles les connaissances qu'on a:

" les enseignants sont sévères" va etre représentée par la proposition P
" les notes sont mauvaises" / / Q
" les étudiants sont en colère" / / R

En utilisant ces symboles de proposition on obtient les formules suivantes:

1) $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
2) $Q \Rightarrow R \equiv \neg Q \vee R$
3) P
4) R

b) Maintenant nous allons vérifier que (4) est conséquence logique de (1), (2),(3).

On vous rappelle la définition de la notion de conséquence logique (CL):

G est CL de F1, F2, ..., Fn ssi $(F1 \wedge F2 \wedge .... \wedge Fn)$ vraie implique que G est Vraie.

Il y a plusieurs manières pour montrer ça:

- Par la table de vérité qui est utilisable pour les cas où le ne nombre de proposition n'est pas grand,
- Par des transformations de la logique,
- Par les théorèmes (1) et (2) vus en cours,
- etc...

Par la table de vérité: On a 3 propositions, donc la table contient 2^3 possibilités (8):

P	Q	R	$\neg P \vee Q$	$\neg Q \vee R$	(1)^(2)^(3)	(4)
V	V	V	V	V	**V**	**V**
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	F

Il faut vérifier maintenant qu'à chaque fois que (1)^(2)^(3) est vraie (4) doit etre vraie. Il y a un seul cas où (1)^(2)^(3) est vraie (1ere ligne), et (4) est aussi vraie dans ce cas et donc (4) est CL de (1), (2), (3). On ne regarde pas les cas où (1)^(2)^(3) est Fausse.

Par la logique:

Supposons que la conjonction (1)^(2)^(3) $\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge P$ est vraie, donc:

$(\neg P \vee Q)$ Vraie $\longrightarrow$ Q doit etre Vraie $\equiv \neg Q$ Faux

et

$(\neg Q \vee R)$ Vraie $\longrightarrow$ R est Vraie

et

P Vraie $\equiv \neg P$ faux

On peut le faire aussi en utilisant le Théorème 1 ou 2 vus en cours.

Exercice 3: Montrer le théorème 1: G est une conséquence logique de FI, F2, ... Fn ssi la formule $((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \Rightarrow G)$ est valide.

=>) Hypothèse: G est CL de F1, F2, ... Fn c-à-d $F1 \wedge F2 \wedge \ldots Fn$ vraie implique G vraie

A montrer: $((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \Rightarrow G)$ est valide c-à-d $(\neg(F1 \wedge \ldots \wedge Fn) \vee G)$ est valide

Soit une interprétation quelconque. Sous cette interprétation la conjonction $F1 \wedge \ldots \wedge Fn$ est soit vraie soit fausse. Nous allons étudier ces 2 cas:

a) $F1 \wedge F2 \wedge \ldots Fn$ Vraie sous I: dans ce cas, d'après l'hypothèse, G est vraie et donc ...*..... $\vee$ G est vraie et donc $\neg(F1 \wedge F2 \wedge \ldots Fn) \vee G$ est vraie et donc

$((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \Rightarrow G)$ est vraie

b) $F1 \wedge F2 \wedge \ldots Fn$ Fausse sous I: dans ce cas alors, $\neg(F1 \wedge F2 \wedge \ldots Fn)$ est vraie et donc $\neg(F1 \wedge F2 \wedge \ldots Fn) \vee G$ est vraie et donc $((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \Rightarrow G)$ est vraie

Dans les 2cas on a pu montrer que $((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \Rightarrow G)$ est valide.

<=) Hypoythèse: $((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \Rightarrow G)$ est valide c-à-d $(\neg(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \vee G)$ vraie $\forall$ l'interprétation.

A montrer: G est CL de F1, F2, ... Fn c-à-d dans le cas où $F1 \wedge F2 \wedge \ldots Fn$ est vraie alors G vraie

On part de $F1 \wedge F2 \wedge \ldots Fn$ vraie, et donc $\neg(F1 \wedge F2 \wedge \ldots Fn)$ est faux et on a par hypothèse $((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \vee G)$ vraie. A partir de ces 2 données on peut affirmer que G doit etre vraie et donc G est CL de F1, F2, ...Fn.

Exercice 3b) Montrer le théorème 2: G est une conséquence logique de FI, F2, ... Fn ssi la formule $(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn \wedge \neg G)$ est inconsistente.

$(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn \wedge \neg G)$ est inconsistente

la négation d'une formule inconsistente est valide et donc

$\neg(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn \wedge \neg G)$ est valide

en utilisant $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (on applique ça à la dernière conjonction)

$\neg(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \vee G$ est valide

en utilisant $\neg A \vee B \equiv A \Rightarrow B$

$(F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \Rightarrow G$ est valide

en utilisant le théorème 1 on a

G est CL de F1, F2, ... Fn

Exercice 4: Soient les formules : F1) $P \Rightarrow Q$ F2) $\neg Q$ et G) $\neg P$

Montrer que G est Conséquence Logique de FI et F2

(A faire vous meme)

Chaque étudiant doit m'envoyer sa solution et sera prise en compte lors de l'évaluation.

Logique du 1er ordre

Exercice 5a) : *Traduire sous forme de fbf les expressions suivantes :*

- Tout humain est mortel
- Ali est un humain
- Ali est mortel

On propose

- les prédicats :

  Humain(x) pour exprimer x est humain
  Mortel(x) pour exprimer x est mortel

- La constante : Ali

On obtient :

$(\forall x)$ humain(x) $\Rightarrow$ mortel(x)
Humain(Ali)
Mortel(Ali)

Exercice 5b) *Traduire sous forme de fbf les expressions suivantes:*

- Tout nombre rationnel est un nombre réel
- Il existe un nombre qui est premier
- Pour tout nombre x, il existe un nombre y tel x < y

Soient les prédicats :

- Rationnel (x) pour exprimer que x est un nombre rationnel
- Reel(x) pour x est un nombre reel
- Premier(x) pour x est nombre premier
- Inf(x,y) pour exprimer x < y

On obtient :

$(\forall x)$ rationnel(x) $\Rightarrow$ reel(x)
$(\exists x)$ premier(x)
$(\forall x)$ $(\exists y)$ inf(x,y)

Exercice 5c) *Traduire sous forme de fbf les expressions suivantes:*

*– Pour tout nombre, il existe un **seul** successeur*
- il n'existe pas de nombres pour lequel 0 est un successeur immédiat
*- Pour tout nombre autre que 0 il existe un **seul** nombre qui est son prédécesseur*

Soient les fonctions :
f(x) pour exprimer le successeur(x)
g(x) pour exprimer predecesseur(x)
Soit la constante : 0
Soit le prédicat E(x,y) pour exprimer egal ou (non egal) de x avec y

y successeur(x) unicite

$(\forall x)\ (\exists y)\ [\ E(y,f(x)) \wedge (\forall z)\ [E(z,f(x)) \Rightarrow E(y,z)]]$

$\neg\ [\ (\exists x)\ E(0,f(x))]\ \cong\ (\forall x) \neg\ E(0,f(x))$

$(\forall x)\ [\ \neg E(x,0) \Rightarrow [(\exists y)\ [E(y,g(x)) \wedge (\forall z)\ [E(z,g(x)) \Rightarrow E(y,z)]]]$

x =/= 0 y predecesseur de x unicite

Pour représenter l'unicité, il ne fat surtout pas utiliser $\exists!$. Dire qu'une chose x vérifiant une propriété P quelconque est unique, c'est dire que tout autre y vérifiant cette propriété P est identique à x.

Exercice 5d) *Traduire sous forme de fbf les expressions suivantes:*

– *il y a des patients et qui aiment tous les docteurs*

- Aucun patient n'aime les charlatans

- Aucun docteur n'est un charlatan

Montrer que la 3eme expression est une conséquence logique des 2 premières

On utilise les prédicats suivants :

- P(x) pour x patient
- D(x) pour x docteur
- Q(x) pour x charlatan
- L(x,y) pour x aime y

1) $(\exists x)\,[P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \Rightarrow L(x,y))]$
2) $(\forall x)\,[P(x) \Rightarrow (\forall y)(Q(y) \Rightarrow \neg L(x,y))]$
3) $(\forall x)(D(x) \Rightarrow \neg Q(x))$

Montrer que 3 est conséquence logique de 1 et 2.

Rappel:

Def CL : On part de (1) $\wedge$ (2) vraie et on doit arriver à (3) vraie.

Soit une interprétation quelconque dans laquelle (1) $\wedge$ (2) vraie.

(1) $\wedge$ (2) vraie $\cong$ (1) vraie et (2) vraie $\cong$

(1)vraie $\cong$ $(\exists x)\,[P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \Rightarrow L(x,y))]$ vraie $\cong$ il existe une certaine valeur (soit e) pour x pour laquelle (1) vraie

$\cong$ $[P(e) \wedge (\forall y)(D(y) \Rightarrow L(e,y))]$ vraie

$\cong$ **<u>P(e) vraie</u> et $(\forall y)(\neg D(y) \vee L(e,y))$** vraie (*)

(2)vraie $\cong$ $(\forall x)\,[P(x) \Rightarrow (\forall y)(Q(y) \Rightarrow \neg L(x,y))]$ vraie $\cong$ elle est vraie pour x=e car elle Est vraie pour $(\forall x)$

$\cong$ $[P(e) \Rightarrow (\forall y)(Q(y) \Rightarrow \neg L(e,y))]$ vraie

$\cong$ $[\neg P(e) \vee \underline{(\forall y)(\neg Q(y) \vee \neg L(e,y))}]$ vraie

Or de (*) on a P(e) vraie donc $\neg$P(e) faux et donc il faut que

$(\forall y)(\neg Q(y) \vee \neg L(e,y))$ soit vraie (**)

Raisonner maintenant sur D(y) et en utilisant (*) et (**). La valeur de vérité de D(y) peut etre:

a) D(y) fausse ………..

……. Arriver à (3) vraie

b) D(y) vraie ……………………….. arriver à (3) vraie

Et donc(«3) est CL de (1) et (2).

(A terminer et m'envoyer la solution, chaque étudiant doit le faire)

<u>Exercice 6:</u> Soient les assertions suivantes :

1) *« Un spécialiste n'achète pas de voitures d'occasion pour sa famille »*
2) *« Les gens qui achètent des voitures d'occasion pour leur famille sont malhonnêtes »*

Conclure que : « *des malhonnêtes ne sont pas des spécialistes* »

En utilisant la notion de conséquence logique.

<u>(A FAire)</u>

<u>Exrcice 7 :</u> sous quelle condition sur le domaine cette fbf est toujours vraie ?

$$(\exists y)P(y) \rightarrow (\forall x)\, P(x)$$

<u>Solution:</u> Quand est ce qu'on peut dire que tous les étudiants du groupe sont présents lorsqu'il y a un seul étudiant présent? en analysant bien, on voit qu'on peut dire que le groupe ne doit contenir qu'un seul étudiant.
et donc pour que cette expression soit toujours vraie, il faut que la cardinalité du domaine doit etre égale à 1.

<u>Exercice 8</u>: Appliquer l'algorithme d'unification sur les exemples suivants :
<u>Rappel:</u>

Une substitution est un ensemble $\sigma=\{X1/t1, X2/t2, ..., Xn/tn\}$ où les Xi sont des variables distinctes et les ti des termes. Chaque ti ne doit pas contenir Xi.

Appliquer une substitution σ à une expression t, notée σt, consiste à remplacer dans t, les Xi par les ti.

2 expressions E1 et E2 sont unifiables, si on arrive à trouver une substitution σ telle que $\sigma E1 = \sigma E2$.

Appliquons ce processus aux paires d'expressions suivantes:

E1	**E2**	**substitution σ**	**σE1 = σE2**
f(x, g(5), h(10),x)	f(t(y), g(z), h(v),w)	{x/t(y), z/5, v/10, w/t(y)}	f(t(y), g(5), h(10),t(y))
f(x, g(5), h(10),x)	f(t(y), g(z), h(v),10)	{x/t(y), z/5, v/10 Blocage	E1 et E2 non unifiable
p(x,b,z) v Q(f(x))	p(a,y,g(x)) v Q(t)	{x/a, y/b, z/g(a)}	p(a,b,g(a))
P(x, f(10),x) et P(v,w,g(v))		à faire	

<u>Exercice9</u> : Transformer la fbf suivante en clauses.

$(\forall x)\{P(x) \Rightarrow \{(\forall y)[P(y) \Rightarrow P(f(x,y))] \wedge \neg (\forall y)[Q(x,y) \Rightarrow P(y)]\}\}$

On applique le processus de 9 étapes vu en cours qui nous permet de transformer n'importe quelle fbf en un ensemble de clauses. Je rappelle qu'une clause est une disjonction de littéraux, c-a-d que les seules opérateurs autorisés sont le ou $\vee$ et la négation $\neg$ au niveau des prédicats.

$(\forall x)\{P(x) \Rightarrow \{(\forall y)[P(y) \Rightarrow P(f(x,y))] \wedge \neg (\forall y)[Q(x,y) \Rightarrow P(y)]\}\}$

étape 1:enlever les $\Leftrightarrow$ et les $\Rightarrow$ par les 2 propriétés vues en cours (on a 3 $\Rightarrow$)

$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \neg (\forall y)[\neg Q(x,y) \vee P(y)]\}\}$

étape 2: réduire la négation jusqu'aux littéraux (on a un cas: .... $\neg (\forall y)[\neg Q(x,y) \vee P(y)]\}\})$

$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge (\exists y)[Q(x,y) \wedge \neg P(y)]\}\}$

étape 3: standardiser les variables (renommer les variables de telles sorte que chaque quantificateur aura sa propre variable, on a le cas de la variable y qui apparait dans 2 quantificateurs et donc on la renomme dans sa 2eme apparition en z)

$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge (\exists z)[Q(x,z) \wedge \neg P(z)]\}\}$

étape 4: skolémisation : Eliminer les quantificateurs existentiels par le processus suivant: Remplacer une variable existentielle par une fonction de Skolem (un nouveau nom de fonction) dont les arguments sont les variables liées à des quantificateurs universels dont la portée inclut la portée du quantificateur existentiel à éliminer. S'il n'existe pas de tels quantificateurs universels alors la fonction de Skolem est une constante de Skolem) on a une seule variable existentielle z et qui a x comme variable qui l'inclut. donc on enlève ($\exists z$) et on remplace cette variable z par g(x) où g est une nouvelle fonction de skolem.

$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge [Q(x,g(x)) \wedge \neg P(g(x))]\}\}$

étape 5,6: on rassemble les quantificateurs $\forall$ et on les efface

$\{\neg P(x) \vee \{[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge [Q(x,g(x)) \wedge \neg P(g(x))]\}\}$

étape 7: on transforme cette expression en une Forme Normale Conjonctive (FNC) par la règle: $X1 \vee (X2 \wedge X3) \equiv (X1 \vee X2) \wedge (X1 \vee X3)$ (on applique 2 fois cette règle)

$[\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge [\neg P(x) \vee [Q(x,g(x)) \wedge \neg P(g(x))]]$

$[\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge [\neg P(x) \vee Q(x,g(x))] \wedge [\neg P(x) \vee \neg P(g(x))]$

étape 8: Eliminer les symboles $\wedge$ en remplaçant la matrice X1 $\wedge$ X2 $\wedge$ X3 .... $\wedge$ Xn par l'ensemble de clauses {X1, X2, X3, ..., Xn} Chaque Xi est formée de disjonction de littéraux qui est une clause.

$[\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))]$, $[\neg P(x) \vee Q(x,g(x))]$, $[\neg P(x) \vee \neg P(g(x))]$

étape 9: Renommer les variables de chaque clause:

$[\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))]$,

$[\neg P(x') \vee Q(x',g(x'))]$,

$[\neg P(x'') \vee \neg P(g(x''))]$

on a obtenu 3clauses.

<u>Exercice 10</u> : Calculer les résolvantes des clauses suivantes :

<u>Rappel:</u> Pour pouvoir appliquer la règle d'inférence « la résolution »,à 2 clauses C1 et C2 (appelées clauses parentes), il faut trouver une substitution σ qui puisse être appliquée à ces 2 clauses de telles sorte qu'elles vont contenir 2 littéraux complémentaires σl1 et σl2 respectivement (σl1 est complémentaire à σl2). La nouvelle clause inferée appelée clause résultante est σ(C1\l1 ∨ C2\l2). Appliquons cette règle sur des exemples:

<u>Exemple 1: sur la logique propositionnelle:</u> (on n'a pas besoin de substitution ici)

C1   C2

$P \vee \neg Q \vee \neg R$ $T \vee Q \vee R$

$P \vee \neg R \vee T \vee R$ $P \vee \neg Q \vee T \vee Q$ qui donnent les 2 nouvelles clauses résolvantes

$P \vee T$ $P \vee T$

<u>Exemple 2: sur la logique d'ordre 1:</u>

C1   C2

$P(x, f(A)) \vee P(x, f(y)) \vee Q(y)$ $\neg P(z, f(A)) \vee \neg Q(z)$

x/z   x/z, y/A   y/z

$P(z, f(y)) \vee Q(y) \vee \neg Q(z)$ $P(z, f(A)) \vee Q(A) \vee \neg Q(z)$

$P(x,f(A)) \vee P(x,f(z)) \vee \neg P(z, f(A))$

Il y a une 4eme clause à trouver avec la substitution x/z, y/A,