Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ «09.03.04 Программная инженерия»

ОТЧЕТ

ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

Название: Интервальные оценки

Дисциплина: Математическая статистика

Студент ИУ7-66Б ______ Т. А. Казаева
Группа Подпись, дата И. О. Фамилия

Преподаватель ______ Т. В. Андреева
Подпись, дата И. О. Фамилия

Москва, 2022 г.

1. Содержание работы

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ:

   a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n), \overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;

   c) вычисление оценок $\hat{\mu}$ и S^2 математического ожидания MX и дисперсии DX;

   d) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n), \overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:

   a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2. Теоретические сведения

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Определение. Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\ ;\ \ \overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{2.1}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания;

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии;

n – объем выборки;

γ – уровень доверия;

$t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения Стьюдента с n - 1 степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}};\ \ \overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}} \tag{2.2}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии;

n – объем выборки;

γ – уровень доверия;

$t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения $\chi^2(n-1)$ с n - 1 степенями свободы.

3. Текст программы

```
function main()
  pkg load statistics
  X = [-0.68, 0.71, 2.27, 0.38, 0.14, 0.06, 1.21, -0.59, 0.44, 1.98, 1.00, ...
       -0.88, -0.08, 1.87, -0.74, 0.83, -1.45, 0.58, 0.48, 3.26, 0.02, 0.26, ...
       2.96, 1.78, 0.58, 0.08, -1.60, 1.26, 1.28, -0.36, 0.15, -0.38, -1.04, ...
       0.95, -2.17, -0.30, 1.09, 0.39, 1.06, 0.98, -2.55, 2.62, -1.58, 3.75, ...
     -1.43, 0.92, 2.75, -0.55, 1.48, -0.96, 0.50, 2.67, -0.58, 0.41, -0.46, ...
     -0.48, 1.68, -0.08, 1.76, 0.08, -1.15, 0.66, 1.54, 0.17, -0.20, 1.34, ...
     1.08, 1.59, -0.05, 0.15, -0.35, 0.58, -0.87, 1.73, -0.27, 0.00, -0.67, ...
     0.13, 1.75, -0.59, 1.31, 1.20, 0.53, 0.14, -0.35, 1.00, -0.01, 0.21, ...
     1.58, -0.02, 1.28, 1.34, -1.66, 0.30, 0.08, 0.66, -0.26, 1.54, 1.22, ...
     1.24, 0.11, 0.79, -0.83, 1.41, 0.17, 0.55, 1.60, 1.26, 1.06, 0.39, ...
     -0.77, 1.49, 0.92, -1.58, 1.19, 0.13, 0.26, -2.14, 0.08, -1.75];

  gamma = 0.9;
  n = length(X);
  % Точечная оценка мат. ожидания
  mu = mean(X);
  % Точечная оценка дисперсии
  s2 = var(X);

  mu_low = get_mu_low(n, mu, s2, gamma);
  mu_high = get_mu_high(n, mu, s2, gamma);

  s2_low = get_s2_low(n, s2, gamma);
  s2_high = get_s2_high(n, s2, gamma);

  fprintf('a) Точечная оценка математического ожидания = %.3f\n', mu);
  fprintf('   Точечная оценка дисперсии = %.3f\n', s2);
  fprintf('б) Нижняя граница доверительного интервала для математического ожид
     ания = %.3f\n', mu_low);
  fprintf('   Верхняя граница доверительного интервала для математического ожи
     дания = %.3f\n', mu_high);
  fprintf('в) Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии = %.3f\n',
      s2_low);
  fprintf('   Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии = %.3f\n'
     , s2_high);

  mus = zeros(1, n);
  s2s = zeros(1, n);

  mus_low = zeros(1, n);
  mus_high = zeros(1, n);
  s2s_low = zeros(1, n);
  s2s_high = zeros(1, n);
```

```
  for i = 1:n
    mu = mean(X(1:i));
    s2 = var(X(1:i));
    mus(i) = mu;
    s2s(i) = s2;
    mus_low(i) = get_mu_low(i, mu, s2, gamma);
    mus_high(i) = get_mu_high(i, mu, s2, gamma);
    s2s_low(i) = get_s2_low(i, s2, gamma);
    s2s_high(i) = get_s2_high(i, s2, gamma);
  end

  plot(1:n, [(zeros(1, n) + mu)', mus', mus_low', mus_high']);
  xlabel('n');
  ylabel('y');

  legend('точечная оценка \mu(x_N)', 'точечная оценка \mu(x_n)', 'верхняя граница ДО \mu', ...
    'нижняя граница ДО \mu', 'Interpreter', 'tex');
  figure;
  plot(1:n, [(zeros(1, n) + s2)', s2s', s2s_low', s2s_high']);
  xlabel('n');
  ylabel('z');
  legend('точечная оценка S^2(x_N)', 'точечная оценка S^2(x_n)', 'верхняя граница ДО \sigma', ...
      'нижняя граница ДО \sigma', 'Interpreter', 'tex');
end

function mu_low = get_mu_low(n, mu, s2, gamma)
  mu_low = mu - sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

function mu_high = get_mu_high(n, mu, s2, gamma)
  mu_high = mu + sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

function s2_low = get_s2_low(n, s2, gamma)
  s2_low = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
end

function s2_high = get_s2_high(n, s2, gamma)
  s2_high = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end
```

4. Результаты расчетов

1. Точечные оценки $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно: $\hat{\mu}(\vec{x}_n) = 0.416$, $S^2(\vec{x}_n) = 1.340$

2. Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n), \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания DX: $\underline{\mu}(\vec{x}_n) = 0.592, \overline{\mu}(\vec{x}_n) = 0.241$

3. Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}(\vec{x}_n), \overline{\sigma}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX: $\underline{\sigma}(\vec{x}_n) = 1.096, \overline{\sigma}(\vec{x}_n) = 1.682$

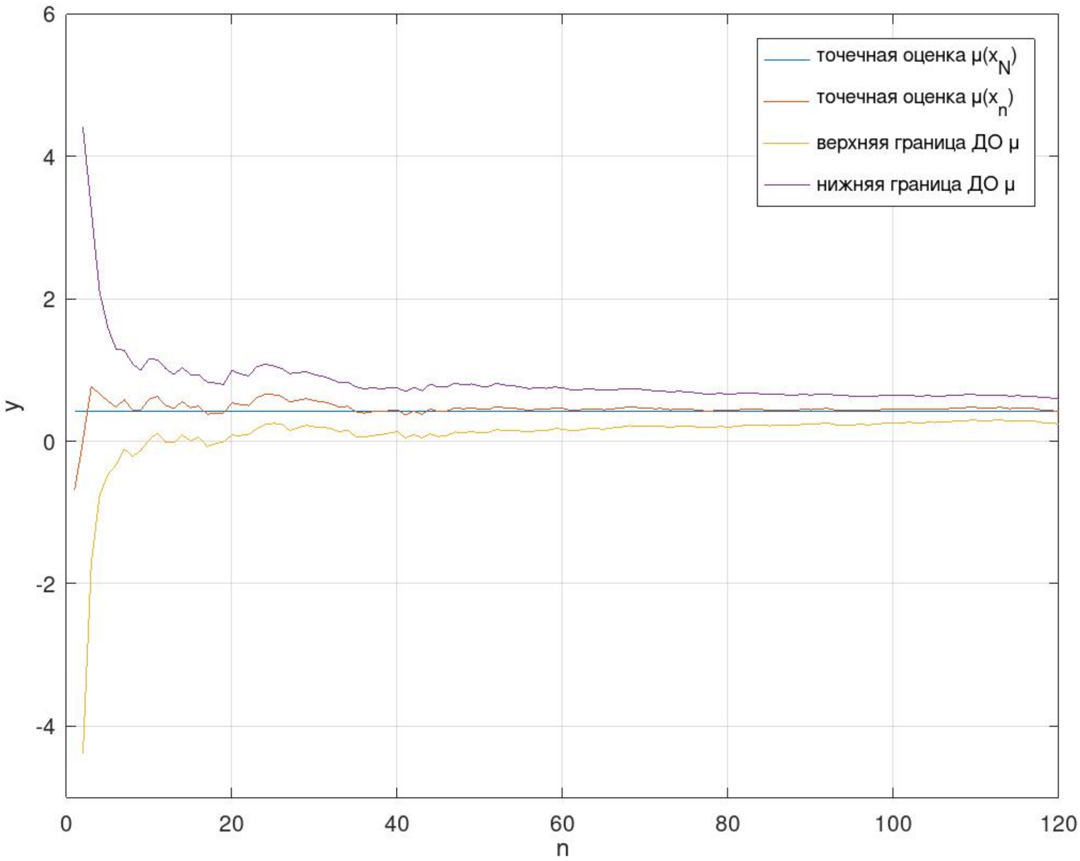

Рисунок 4.1 – Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n), y = \underline{\mu}(\vec{x}_n), y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

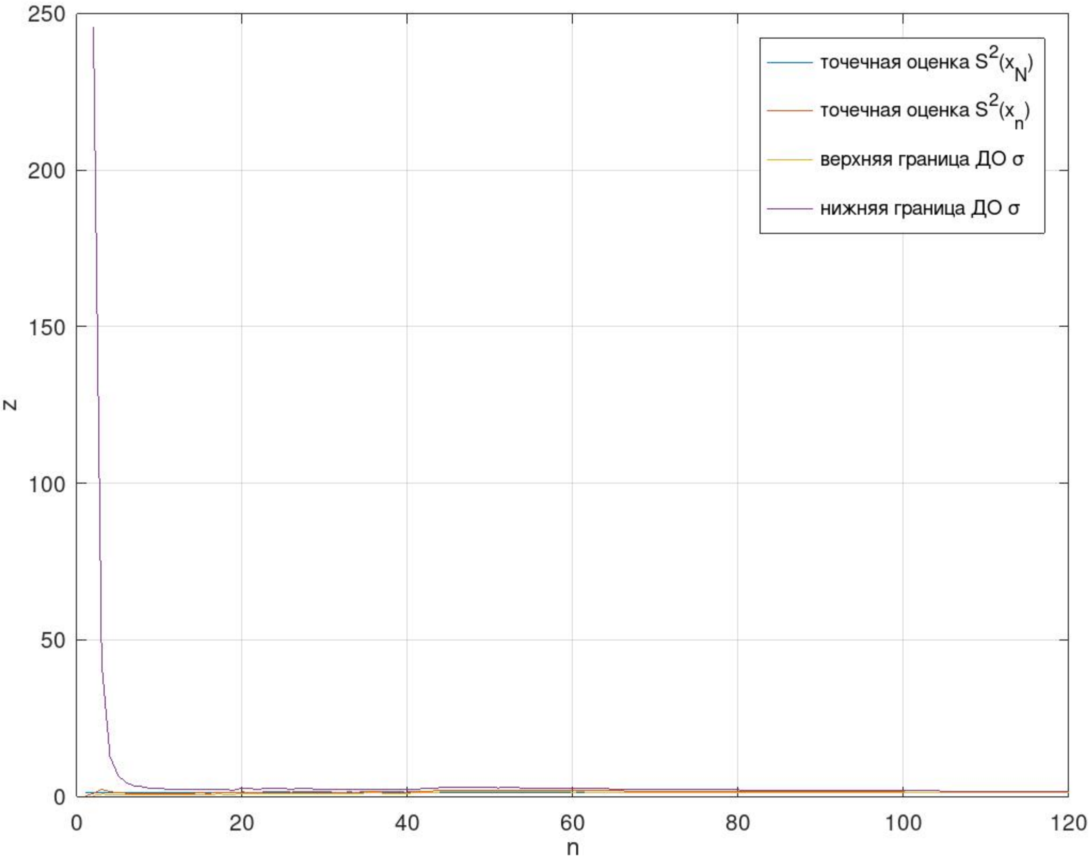

Рисунок 4.2 – Прямая $z = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n), z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

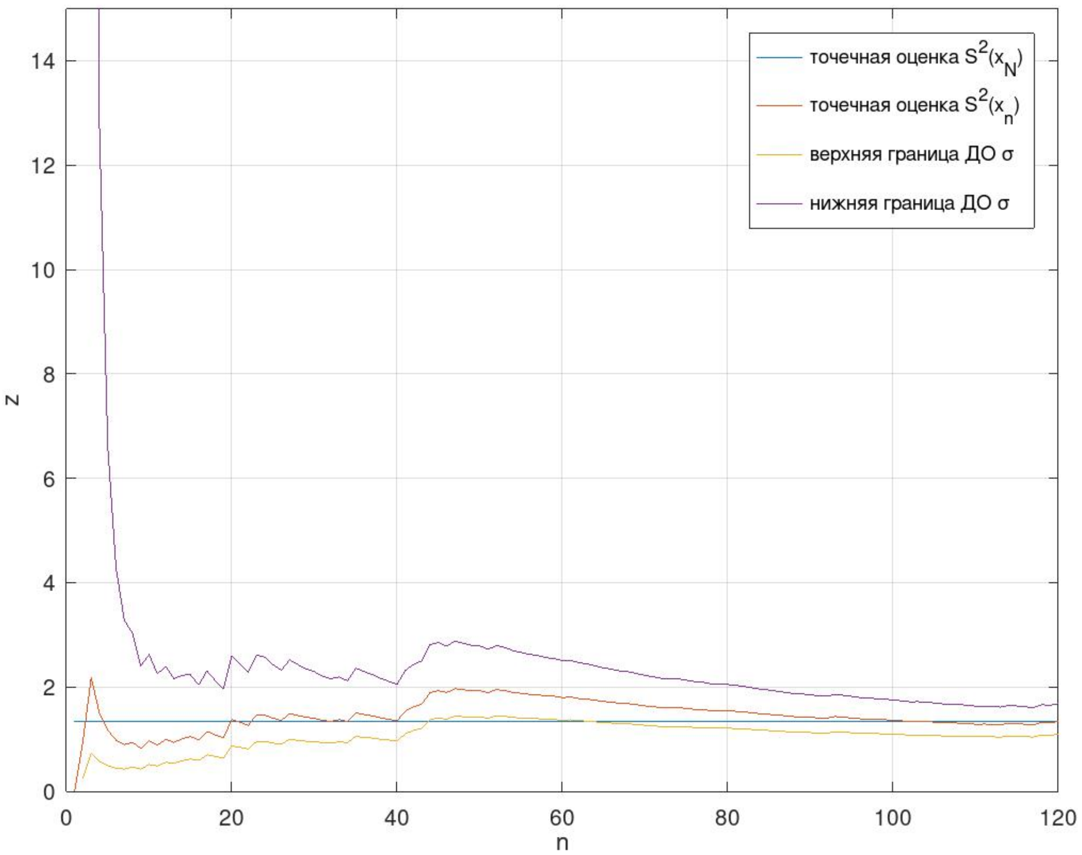

Рисунок 4.3 – Прямая $z = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n), z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.