

확률변수론 중간고사 1

2007년 10월 12일 (금) 18:00 ~ 20:00

학번 : _____ 이름 : _____

“나는 시험도중 일체의 부정행위를 하지 않겠음을 서약합니다!”

서명 : _____

1. (4×5 점) 다음의 명제들이 각각 참인지 거짓인지 말하여라.

- (a) 두 사건 (Event) A, B 가 독립이면 $P[B|A] = P[A|B]$ 가 반드시 성립한다. []
- (b) 임의의 독립인 사건 A_1, A_2, \dots, A_n 에 대하여 $P[\bigcup_{i=1}^n A_i] \leq \sum_{i=1}^n P[A_i]$ 이 반드시 성립한다. []
- (c) 확률변수 X 의 분산 (Variance)은 반드시 양의 실수이다. []
- (d) $P[X = x] \neq 0$ 인 실수 x 가 존재하는 연속확률변수 X 가 존재한다. []

2. (4×5 점) A, B, C 가 임의로 주어진 독립인 사건일 때, 다음이 성립함을 증명하라. [힌트 : Theorem of Total Probability!]

(a) A 와 $B \cap C$ 도 독립이다.

(b) A, B, C^c 도 독립이다.

(c) A 와 $B - C$ 도 독립이다.

(d) A 와 $B \cup C$ 도 독립이다.

3. (10점) Exponential Random Variable X 의 PDF $F_X(x)$ 가 아래와 같이 주어져 있을 때 조건부 확률 $P[X \leq x + t | X > t]$ 를 구하여라. [단, x, t, α 는 양의 실수임]

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

4. (4×5 점) 앞 면이 나올 확률이 π 인 특수하게 제작된 동전을 던지는 실험을 생각하자. 이 때, 결과를 관찰하는 사람이 시력이 좋지 않아 가끔씩 결과를 잘못 기록하는 데, 앞면을 뒷면으로 기록하는 확률이 p , 뒷면을 앞면으로 기록하는 확률이 q 라고 가정하자.

(a) 동전이 뒷면으로 기록될 확률은 얼마인가?

(b) 동전이 뒷면으로 기록되어 있지만, 사실은 앞면이 나왔었을 확률은 얼마인가?

(c) 동전이 앞면으로 기록되어 있지만, 사실은 뒷면이 나왔었을 확률은 얼마인가?

(d) 기록상의 오류가 생기는 확률은 얼마인가?

5. (3×5 점) 어떤 이산확률변수 (Discrete Random Variable) X 의 Probability Mass Function $p_X(x)$ 가 아래와 같이 주어져 있다. [단, $0 < p < 1$.]

$$p_X(x) = \begin{cases} \alpha(1-p)^x & x \in \{0, 1, 2, \dots\}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(a) 적절한 α 의 값은 얼마인가?

(b) X 의 평균 $E[X]$ 를 구하여라.

(c) X 의 분산 $Var[X]$ 를 구하여라.

6. (3×5 점) 확률분포함수 (Probability Distribution Function)이 아래와 같이 주어지는 확률변수 X 에 대하여 다음 물음에 답하여라. [단, α 는 양의 실수임.]

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x^2}, & x > 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(a) X 의 확률밀도함수 (probability density function) $f_X(x)$ 를 구하여라.

(b) X 의 평균 $E[X]$ 를 구하여라.

(c) X 의 분산 $Var[X]$ 를 구하여라.