矩阵计算

李宇峰

liyf@nju.edu.cn

人工智能学院

主要参考书

1. 张贤达，周杰，《矩阵论及其工程应用》，清华大学出版社，2015

2. Charu C. Aggarwal, “Linear Algebra and Optimization for Machine Learning”, Springer International Publishing, 2020

3. 方保熔等，《矩阵论》，清华大学出版社，2004

4. David C. Lay, “Linear Algebra and Its Applications", Addison-Wesley, 2012

课程特点

- 以矩阵计算常用的理论和方法为主线
- 是一门数学与工程领域紧密结合的课程
- 根据经典的应用例子，从应用背景出发，引入矩阵论中的相关算法

主要内容

（1）矩阵计算的基本理论和方法；

（2）主要结果的求解思路；

（3）矩阵计算的应用

包括：代数与矩阵的基本概念、特殊矩阵、特征分析、奇异值分析、子空间分析、广义逆与矩阵方程求解等

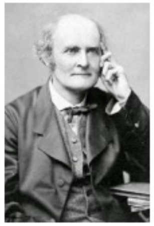
矩阵理论的应用

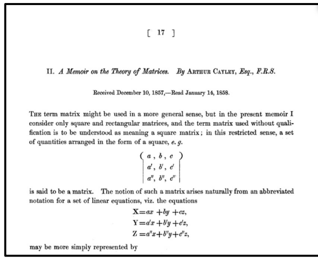
矩阵论的发展

- 《九章算术》（东汉）

- Seki Kowa(关孝和, 1683)， Leibniz(1693)
  -矩阵的行列式

- Arthur Cayley
  -A Memoir on the Theory of Matrices （1857)





[17]

II. *A Memoir on the Theory of Matrices.* By Arthur Cayley, *Esq., F.R.S.*

Received December 10, 1857,—Read January 14, 1858.

The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, *e. g.*

$$\left(\begin{array}{l} a\ ,\ b\ ,\ c \\ a',\ b',\ c' \\ a'',\ b'',\ c'' \end{array}\right)$$

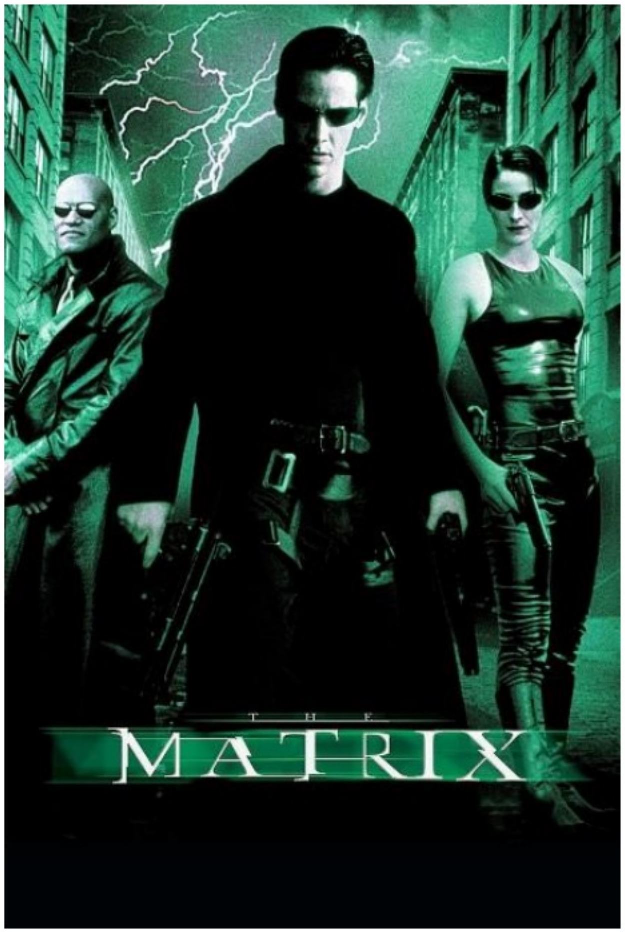
is said to be a matrix. The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

may be more simply represented by

- James J. Sylvester
  - 三次方程的判别式
  - 发明了大量数学术语，如“矩阵”（1850年）、“图”（在网络意义上）和“判别式”

黑客帝国 The Matrix (1999)



MATLAB:

```
>> load gatlin
>> image(X)
>> colormap(map)
```

photo from the Gatlinburg conference on Numerical Algebra, 1964.
Wilkinson, Givens, Forsythe, Householder, Henrici, and Bauer

第一讲 代数与矩阵基础

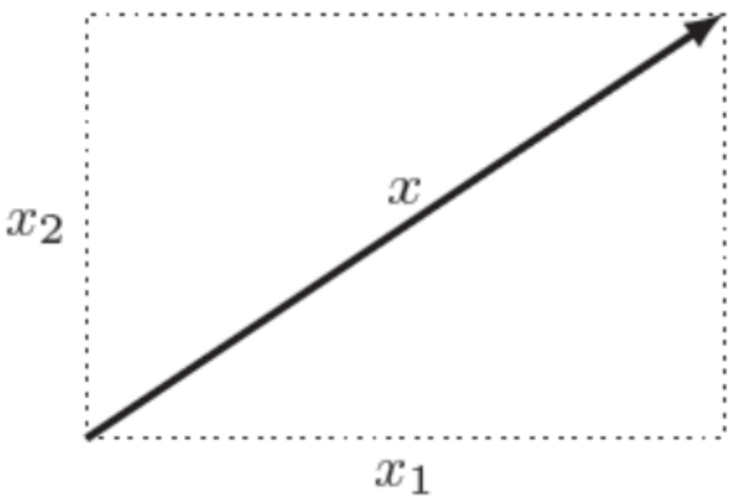
1. 代数与矩阵的基本概念

- 工程问题->数学建模->线性方程组
- 矩阵是描述和求解线性方程组最常用的数学工具。
- 基本符号：P代表数域，R代表实数域，C代表复数域，Z代表整数域。

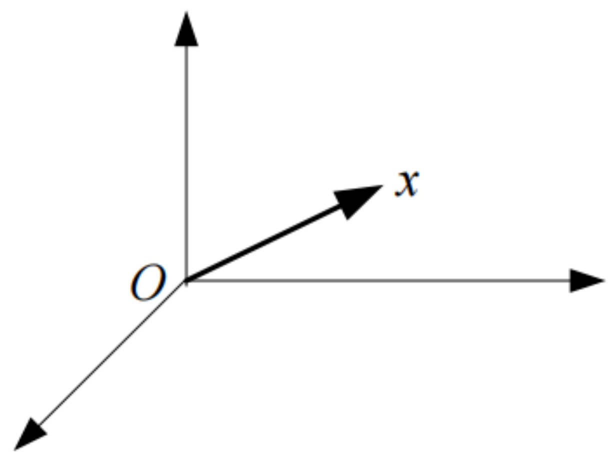
列向量与行向量

- 一个m维向量(m-vector)定义为：$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$.
- 若其元素$x_i\,(i=1,2,\cdots,m)$取实数，即$x_i \in R$，称m维实向量，也简记为$x \in R^m = R^{m\times 1}$。
- 如果其元素是复数，就是m维复向量，记成$x \in C^m$.
- 一个m维行向量定义为$x = [x_1, x_2, \dots, x_m]$，记作$x \in R^{1\times m}$，或者$x \in C^{1\times m}$.
- 一个m维的列向量也可以写出m维行向量的转置形式，即$x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$.

列向量与行向量



A 2-vector



A 3-vector

矩阵

- 一个$m \times n$矩阵(matrix)定义为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

若其元素$a_{ij} \in R$，则就称A为$m \times n$实矩阵，表示为$A \in R^{m \times n}$.

- $m \times n$矩阵A是由m行n列所组成，其可以表示成n个列向量的形式，就是

$$A = [a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

其第i列向量为$a_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})^T$，$i = 1, 2, \ldots, n$.

线性空间

下面引入一个重要的概念，线性空间(linear space).

定义1.1 线性空间是指在一个集合S上定义了加法和数乘运算，且数乘满足下列线性规则，即 $\forall \alpha, \beta \in P, \forall x, y \in S$ ，均有

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$$

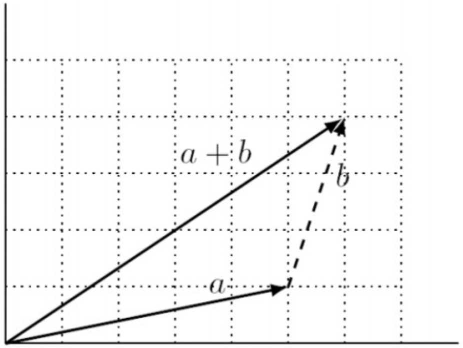
$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

线性空间

其实我们已经学过许多线性空间的例子。譬如

例1. 1 R^n是线性空间，其中“加法”运算定义为

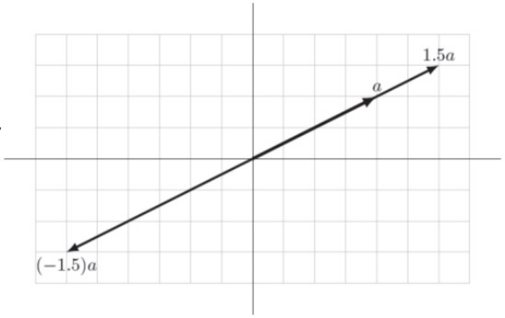
$$a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)^T$$



数乘运算为

$$\lambda a=(\lambda a_1,\lambda a_2,\dots,\lambda a_n)^T$$

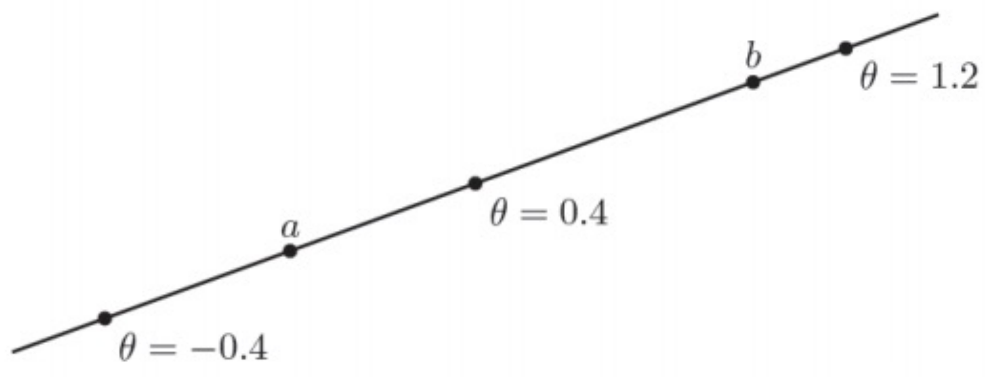
其中$a=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T, b=(b_1,b_2,\dots,b_n)^T$



线性空间

思考：在n维实空间中，经过两个向量a和b的直线怎么表示？连接它们的线段怎么表示？

线性空间



$(1-\theta)a + \theta b$ for different values of θ.

线段：$\mathbf{a}+\theta\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\theta\in[0, 1]$

直线：$\mathbf{a}+\theta\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\theta\in R$

线性空间

- 若S和Q同为线性空间，且$Q \subset S$，则称Q为S的线性子空间(linear subspace).

例1.2 次数$\leq n$的实系数多项式的全体

$$P_n(\lambda) = \{a \mid a = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, a_i \in R\}$$

是线性空间。

思考题：最小的线性空间是什么？次数为n的多项式的集合是线性空间吗？

零空间与像空间

- 函数$f(x)$有定义域(domain)与值域(range)。定义域是自变量x所有可取值的集合；值域是由定义域中一切元素所能得到的所有函数值的集合。

- 设$A \in R^{m\times n}$为一个$m \times n$矩阵，其所对应的变换$y = Ax(x \in R^n)$的值域(像空间)定义为

$$R(A) = \{y \in R^m \mid y = Ax, x \in R^n\}$$

零空间（核空间）：$Ax = 0$的所有解向量$x \in R^n$组成的集合

$$N(A) = \{x \in R^n \mid Ax = 0, x \in R^n\}$$

零空间与像空间

例1.3 给定$A \in R^{m\times n}$，求证$R(A)$是R^m的子空间；$N(A)$是R^n的子空间。

证明：要证明实空间S是否是线性子空间，只要证明

$\forall x, y \in S, \forall \alpha, \beta \in R$，都有$\alpha x + \beta y \in S$.

下面分别证明$R(A)$是线性空间.

设$y_1, y_2 \in R(A) \subset R^m, \alpha, \beta \in R$，根据$R(A)$的定义，故必有

$x_1, x_2 \in R^n$使得$Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2$

$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = A(\alpha x_1 + \beta x_2)$

故推得$\forall y_1, y_2 \in R(A) \subset R^m, \forall \alpha, \beta \in R$得到$\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(A)$.

所以$R(A)$是一个子空间。同理可以证明$N(A)$也是线性空间。

零空间与像空间

线性空间、线性子空间概念和理论是现代矩阵论的基础，也是现代数学解决科学与工程问题的基础，前面所讲到的两个子空间是经常会遇到的。

零空间与像空间

如果$A \in R^{m\times n}$，则

(1) A的零空间 $N(A) = \{x \in R^n \mid Ax = 0, x \in R^n\} \subset R^n$，就是说$N(A)$是$n$维实向量空间的子空间，$N(A)$中的向量是$n$维向量；

(2) A的像空间 $R(A) = \{x \in R^m \mid y = Ax, \forall x \in R^n\} \subset R^m$，就是说$R(A)$是$m$维实向量空间的子空间，$R(A)$中的向量是$m$维向量。

- 若已知向量$b \in R(A)$，则一定存在向量x，使得$b = Ax$.
- 因此，线性方程组$Ax = b$是否有解最本质的条件是：右端向量是否有$b \in R(A)$.

零空间与像空间

"向量系的生成空间"

设有一组向量系$x_1, x_2, \dots, x_k$，其中$x_i \in R^n, i = 1,2,\dots,k$，则这一组向量系的所有线性组合的集合：

$$S = \{y \in R^n \mid y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k, \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$$

容易证明S是R^n的一个子空间，称为这一组向量系的生成空间（$Span$），因此所谓A的像空间，就是A的列向量张成的空间。

线性相关与线性无关

- 向量系的线性相关和线性无关，是矩阵论中最重要的概念之一。

对于给定的一组向量系$\{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \forall x_i \in R^n$，如果仅仅当$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$都为零时，其线性组合

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = 0,$$

则就称向量系$\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$是线性无关的，反之就是线性相关的。

- 向量系不是线性相关的，就是线性无关的，而线性无关的概念和基底、矩阵的秩(*rank*)，空间的维数紧密相关。

线性相关与线性无关

- 如果在线性空间S中存在有n个向量线性无关，而任何n+1个向量均线性相关，则称空间S的维数（dimension）为n，并记为dim(S)=n。

- 若S是定义在数域R上的线性空间，且S中的向量系$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$满足以下两条

1. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$线性无关；
2. $\forall x \in S$, x都可以表示成$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$，则称向量系$x_1, x_2, \ldots, x_n$是空间$S$的一组基底（basis）。

问题：基底上的表示 $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ 是否唯一？

$$\sum_i a_i x_i = \sum_i b_i x_i$$

$$\sum_i (a_i - b_i) \cdot x_i = 0$$

$$a_i = b_i, \forall i$$

思考

- 线性空间的“交”、“并”、“和”、“直接和”四种运算的定义如下：

$$T \cap V = \{x \mid x \in T \text{且} x \in V\}$$

$$T \cup V = \{x \mid x \in T \text{或} x \in V\}$$

$$T + V = \{x \mid x = y + z, y \in T, z \in V\}$$

$$T \oplus V = \{y \mid y = x + v, x \in T, v \in V, T \cap V = \{0\}\}$$

思考：以上四个集合中，都是子空间吗？

思考

- 首先看$T \cap V$，

设$\forall x, y \in T \cap V \Rightarrow x, y \in T$且$x, y \in V$，故$\forall \alpha, \beta \in R, \alpha x + \beta y \in T$且$\alpha x + \beta y \in V \ \Rightarrow \alpha x + \beta y \in T \cap V \Rightarrow T \cap V$是子空间。

- 注意$T \cup V$，

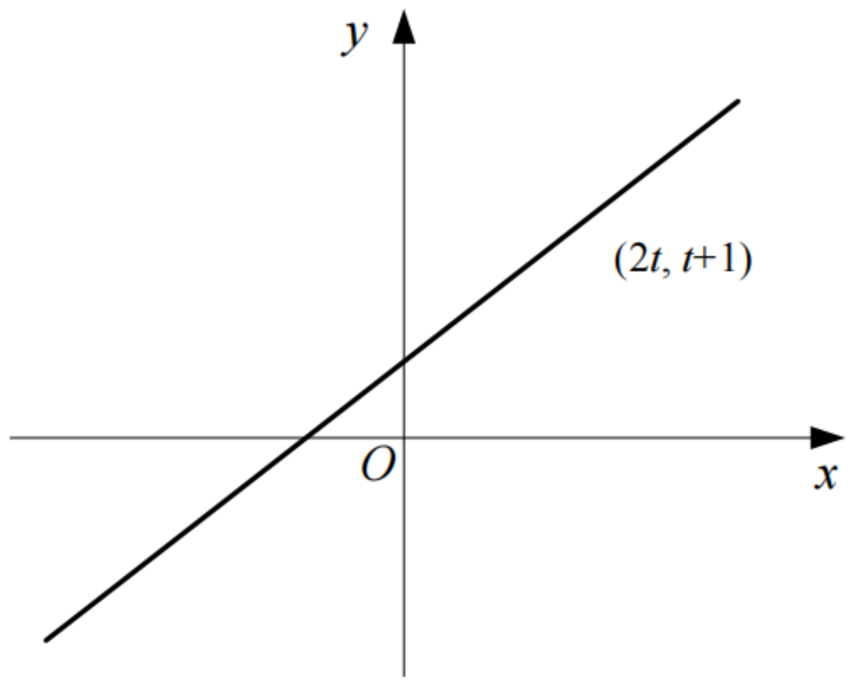
比如设 $T = \{x \mid x = (x_1, 0), x_1 \in R\}, V = \{x \mid x = (0, x_2), x_2 \in R\}$ ，则$\forall x, y \in T \cup V$，就有可能$x + y \notin T \cup V$，对于通常定义的加法不具有封闭性。所以$T \cup V$不是$R^2$的子空间。

$$(1,0) + (0,1) = (1,1)$$
$$(1,1) \notin T, (1,1) \notin V$$

思考题：集合$T + V$、$T \oplus V$是子空间吗？

思考

例1.5 考虑二维几何空间的直线 $V_1 = \{(2t, t+1) \mid t \in R\}$，它是二维几何空间的子空间吗？



2.矩阵与线性方程组

- 《九章算术》：提出最早的线性方程组解法

今有上禾(上等稻)三秉(捆)，中禾二秉，下禾一秉，实(谷子) 三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾一秉各几何？

今有上等稻3捆、中等稻2捆、下等稻1捆，共打出39斗米；有上等稻2捆、中等稻3捆、下等稻1捆，共打出34斗米；有上等稻1捆、中等稻2捆、下等稻3捆，共打出26斗米。问上等稻、中等稻、下等稻各1捆能打出多少斗米？

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 39\\
2x + 3y + z &= 34\\
x + 2y + 3z &= 26.
\end{aligned}
$$

解法：算筹法（高斯消去法）

矩阵与线性方程组

科学与工程中的许多问题都可以通过数学建模转化成一个线性方程组

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

这是一个由m个方程n个未知量组成的线性方程组。
线性方程组(2. 1)可以表示成矩阵和向量的简洁的形式

$$Ax = b \tag{2.2}$$

矩阵与线性方程组

其中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

A称为系数矩阵，b称为右端项，x称为要求的未知向量。

求解线性方程组从数学的角度看，就是要确定已知向量b在A的列向量上的线性表示系数，因为若把A表示成列向量的形式$A=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$，则方程组$Ax=b$就是求$x_1,x_2,\ldots,x_n$使得

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=b \qquad (2.3)$$

矩阵与线性方程组

线性方程组$Ax = b$从工程问题的角度看，矩阵A往往是某个物理线性系统的符号表示，x表示该系统的输入激励（不可观测），b表示输出响应（可观测）。 于是线性方程组$Ax = b$的求解问题就可以叙述为：根据已知的线性系统参数和输出观察值，求未知的输入激励。

矩阵与线性方程组

对于线性方程组的系数矩阵A常有三种形式：

（1）$m>n$时常称矩阵A是“高矩阵”，相应的线性方程组为超定方程组(overdetermined systems)；

（2）$m=n$时矩阵A称为正方矩阵(square matrix)；

（3）$m<n$时矩阵A常称为“宽矩阵”，相应的线性方程组为亚定方程组(underdetermined systems)。

但方程组$Ax = b$中矩阵的上面三种形式，仅仅是形式上的差别，并不是影响其解(有解、无解等)的本质差别。

工程应用中的向量

科学和工程中常见的向量有下列几种形式：

（1）物理向量：泛指既有幅角，又有方向的物理量，如速度、加速度、位移等；

（2）几何向量：是物理向量的可视化表示，常用带方向的线段表示，这种有向线段称为几何向量。例如，$v = \overrightarrow{AB}$表示有向线段，其起点为A，终点为B；

（3）代数向量：几何向量的代数形式表示。例如，若平面上的几何向量$v = \overrightarrow{AB}$的起点A的坐标为(a_1, a_2)，终点B的坐标为(b_1, b_2)，则该几何向量可以用代数形式表示成$v = \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 \\ b_2 & -a_2 \end{bmatrix}$，这种用代数形式表示的几何向量称为代数向量。

向量就其元素的情况还可以分为常数向量、函数向量和随机向量。

工程应用中的向量

向量的分类

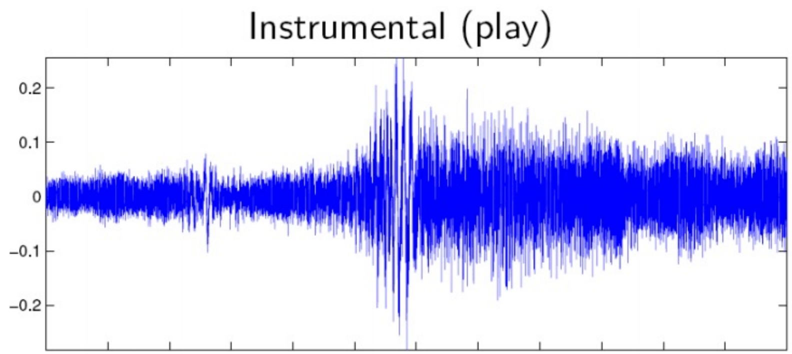
- 向量
  - 物理向量
  - 代数向量
    - 常数向量
    - 函数向量
    - 随机向量
  - 几何向量

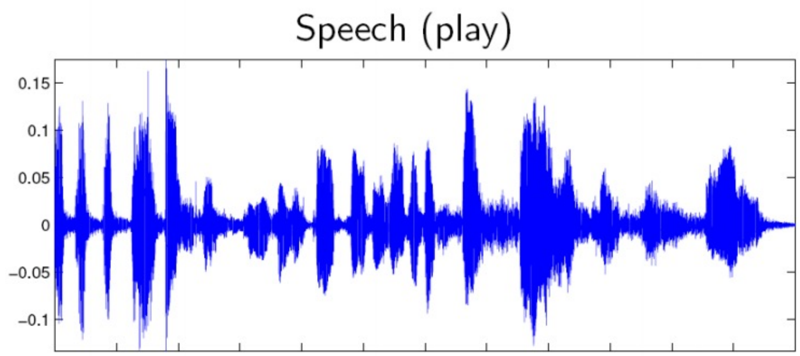
几何向量是物理向量的可视化表示，

代数向量可看作是物理向量的运算化工具。

工程应用中的向量

例：声音信号





- n-vector $\boldsymbol{x}$ represent audio signal over some time interval
- x_i is (scaled) acoustic pressure at time $t = 1, \ldots, n$
- x_i is called a sample
- typical sample rates are 44100/sec or 48000/sec
- stereophnic audio signal consists of a left and a right audio signal

工程应用中的向量

例：黑白图像信号(Monochome images)

- Typically $0 \le x_i \le 1$ where 0 is black and 1 is white
- values outside [0, 1] are clipped
- *negative image* is given by 1-x
- $y_i = x_i^{\gamma}$ is called γ-correction

工程应用中的向量

pumpkins

flowers

(pumpkins+flowers)/2

工程应用中的向量

例：彩色图像信号(Color images)

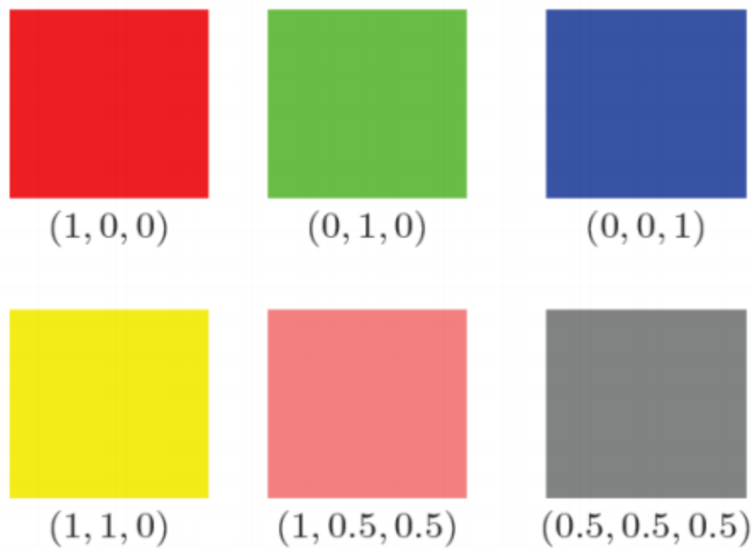


Fig. Six colors and their RGB vectors

工程应用中的向量

彩色信号中的RGB分量

工程应用中的向量

彩色→黑白

$$y_i = \omega^T(r_i, g_i, b_i)$$

3. 矩阵的基本运算

1. 矩阵的转置

若A是一个$m\times n$矩阵，则A的转置(transpose)矩阵是$n\times m$矩阵，

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

若A是一个$m\times n$复矩阵，则A的共轭转置(conjugate transpose)矩阵$n\times m$矩阵，

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow A^H=\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{m1}^* \\ a_{11}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{m2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix}_{n\times m}$$

矩阵的转置、乘法、求逆

共轭转置矩阵$A^H = (A^*)^T = (A^T)^*$，

$A = A^T$的正方矩阵称为对称矩阵，这是一类重要的特殊矩阵；

若$A = A^H$，则称A为Hermitian矩阵(复共轭对称矩阵)。

2. 矩阵的乘法运算

矩阵与标量相乘 设$A = [a_{ij}]_{m\times n}$，α是一个数(标量)，则定义$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$

矩阵与向量相乘 设$A = [a_{ij}]_{m\times n}$，$\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$，则

$$[Ax]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i = 1,2,\ldots,m.$$

矩阵的转置、乘法、求逆

矩阵与矩阵相乘 $m\times n$矩阵A与$r\times s$矩阵B的乘积AB只有当$n=r$时才存在，它是一个$m\times s$矩阵也就是说两个矩阵相乘只有当A的列数与B的行数相等时才可乘，并且不满足交换律，即$AB\neq BA$.

$$[(AB)_{ij}]_{m\times s}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\,,i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,s.$$

矩阵的转置、乘法、求逆

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 &= y_1 \\ b_{21}x_1 + b_{32}x_2 &= y_2 \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 &= y_3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{C}$$

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

矩阵的转置、乘法、求逆

矩阵求逆(inverse)

对于$n\times n$矩阵A，如果存在$n\times n$矩阵B，使得$AB=BA=I_n$，则B就称为A的逆矩阵，记成A^{-1} 。这样对于线性方程组$Ax=b$的解就可以写成$x=A^{-1}b$.

对于矩阵的共轭、转置和共轭转置满足以下分配律：

$$(A+B)^*=A^*+B^* \quad (A+B)^T=A^T+B^T \quad (A+B)^H=A^H+B^H$$

对于矩阵的共轭、转置和共轭转置满足关系式：

$$(AB)^T=B^TA^T \qquad (AB)^H=B^HA^H$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$ （A,B为可逆的同阶正方阵）

矩阵的行列式

- 一个$n\times n$正方矩阵A的行列式(determinant)记作$det(A)$或$|A|$.

对于标量a，有$\det(a)=a$.

- 矩阵A的行列式可由递推得出：

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

其中A_{ij}为矩阵A删去第i行和第j列后的$(n-1)\times(n-1)$子矩阵。

- 定义：行列式不等于零的矩阵称为非奇异矩阵。

- 行列式的性质：

（1） $\det(I) = 1$；

（2） $\det(A) = \det(A^T)$, 但是 $\det(A^H) = [\det(A^T)]^* = \det(A)^*$；

（3） $\det(AB) = \det(A)\det(B)$；

（4） $\det(cA) = c^n \det(A)$；

（5） 若A非奇异，$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

- **Sylvester's Determinant Theorem**

  for A, an $m \times n$ matrix, and B, an $n \times m$ matrix

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$$

- 推论：
  - For the case of column vector c and r, each with m components

$$\det(I_m + cr^T) = 1 + r^T c$$

  - For any invertible $m \times m$ matrix X

$$\det(X + AB) = \det(X)\det(I_n + BX^{-1}A)$$

4.矩阵的二次型

矩阵的二次型(Quadratic form)

- 任意一个实对称矩阵或复共轭矩阵(即Hermitian)矩阵A的二次型定义为$x^H Ax$，其中x可以是任意的非零复向量。

- 矩阵的二次型$x^H Ax$取实数，可以同零比较大小。

例：设待设计的线性系统用$m\times n$矩阵A建模，其输入向量为x，输出信号向量$y=Ax$，为了抑制噪声或者干扰，线性系统的设计常采用最大输出能量准则：使输出能量

$$J(x)=\|y\|^2=y^H y=(Ax)^H(Ax)=x^H A^H Ax$$

最大化。此时目标函数$J(x)=x^H Bx$即为二次型函数，其中$B=A^H A$为$n\times n$ Hermitian矩阵。

- 通常将大于零的二次型$x^H Ax$称为正定二次型，与之对应的$n\times n$ Hermitian矩阵称为正定矩阵。类似的可由二次型$x^H Ax$定义Hermitian矩阵的半正定性、负定性和半负定性。

定义4.1 一个$n \times n$的复共轭对称矩阵A称为：

(1) 正定矩阵(positive definete)：若 $\forall x \neq 0$，二次型 $x^H A x > 0$，记作$A>0$；

(2) 半正定矩阵(positive semi-definite, PSD)：若对$\forall x \neq 0$，二次型$x^H A x \geq 0$，记作$A \geq 0$；

(3) 负定矩阵：若对$\forall x \neq 0$，二次型$x^H A x < 0$，记作$A<0$；

(4) 半负定矩阵：若对$\forall x \neq 0$，二次型$x^H A x \leq 0$，记作$A \leq 0$；

(5) 不定矩阵：若二次型$x^H A x$既可取正值，也可取负值。

代数与矩阵基础

- 向量，矩阵
- 线性空间，线性子空间
  - 零空间，像空间
- 线性相关，线性无关
  - 空间的维数与基底
- 矩阵的基本运算
  - 转置，共轭转置
  - 相乘，求逆
- 矩阵的数值特征
  - 行列式，二次型，特征值，trace，rank
- 内积与范数
  - 向量范数
  - 矩阵范数
- 应用