디지털신호처리

강 의 노 트

신호와 시스템의 이해

1주차 1차시

학습내용

❖ 신호

❖ 시스템

❖ 신호와 시스템의 수학적 표현

학습목표

❖ 신호의 개념과 신호의 종류를 설명할 수 있다.

❖ 시스템의 개념과 시스템의 종류를 설명할 수 있다.

❖ 신호와 시스템을 수학적으로 표현할 수 있다.

신호와 시스템의 이해

1. 디지털 신호처리 기술이란?

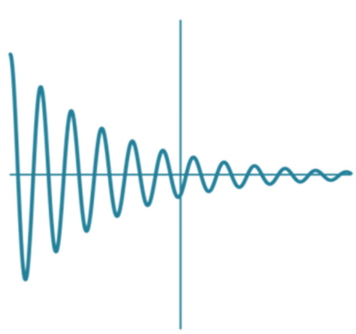
최근 대부분의 산업 분야에서 **꼭 필요한 기술**

"메카트로닉스 공학의 핵심기술"

※ 머신 비전(Machine Vision): 기계에 인간이 가지고 있는 시각과 판단 기능을 부여한 것
사람이 인지하고 판단하는 기능을 하드웨어와 소프트웨어의 시스템이 처리하는 기술

2. 디지털 신호처리 기술의 기초

신호 및 시스템 기술



정현파 기술

복소지수 신호

신호

1. 신호의 개념

1) 신호(Signal)의 정의

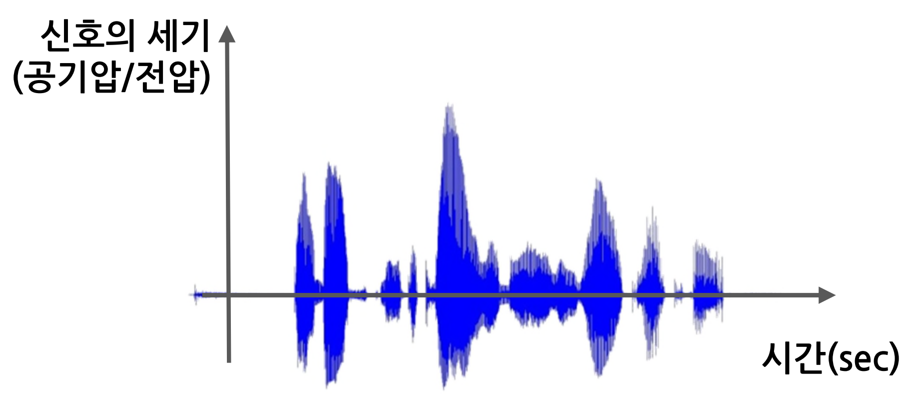
- 정보를 전달하는 그 "무엇"
  → 물리적으로 조작/저장/전송할 수 있는 물리적 양의 변화 형태를 의미함

2) 신호(Signal)의 특징

- 다양한 물리적 현상의 동작 또는 성질을 표현
- 수학적으로 한 개 이상의 독립 변수의 함수로 표현됨
- 정보는 신호가 변화하는 양상 속에 담겨 있음

2. 신호의 종류

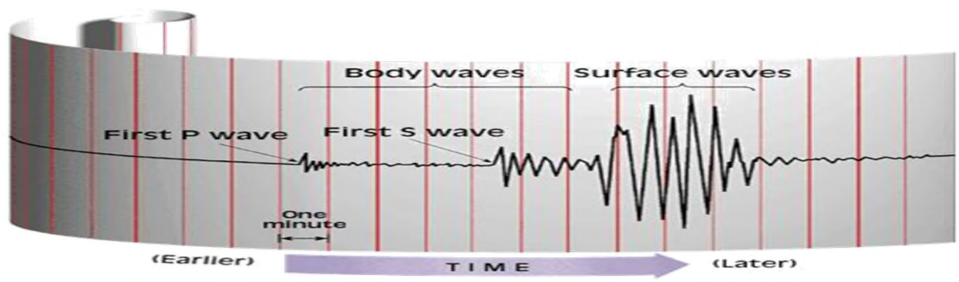
1) 음성 신호(Audio Signal)



[음성신호 파형 예시]

신호

2) 지진 신호



[지진 신호 파형 예시]

3) 주가 신호

※ 예시: 0 0 전자 주가신호

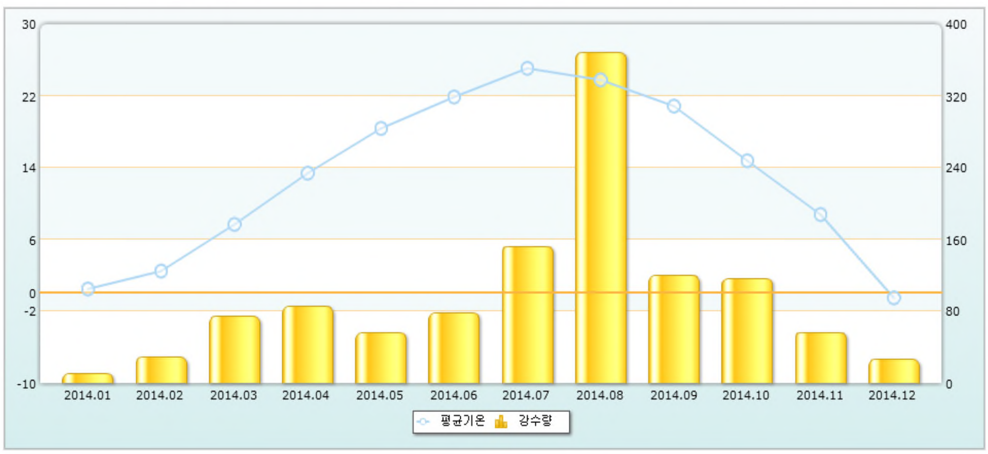
[주가신호 파형 예시]

4) 영상 신호

신호

5) 월 평균 기온 신호

지표	2014.01	2014.02	2014.03	2014.04	2014.05	2014.06	2014.07	2014.08	2014.09	2014.10	2014.11	2014.12
평균기온 (℃)	0.5	2.5	7.7	13.4	18.4	21.9	25.1	23.8	20.9	14.8	8.8	-0.5
강수량 (㎜)	10.1	28.7	74.1	85.6	56.2	78.2	152.6	369.0	119.6	116.6	56.8	26.2

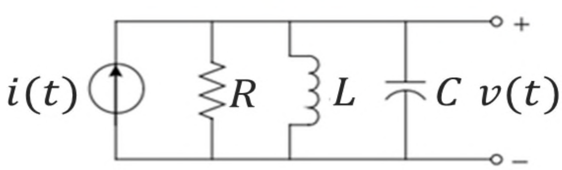


평균기온(2014.01~12)

※자료 출처: 국가통계포털, KOSIS 100대 지(http://http://kosis.kr)

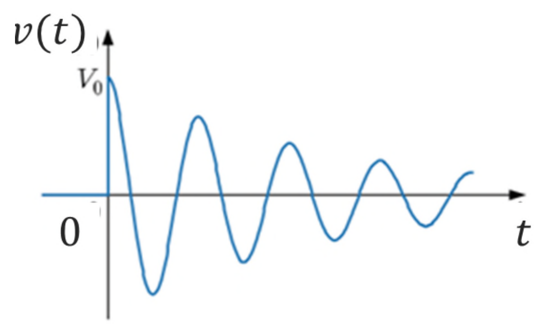
6) 전기 회로의 전압 신호

RLC 병렬 전기회로



- $i(t)$: 전류입력 신호
- R: 저항(Resistor)
- L: 인덕턴스(Inductance)
- C: 커패시턴스(Capacitance)
- $v(t)$: 커패시터 소자에 인가되는 출력전압

출력 전압신호



시스템

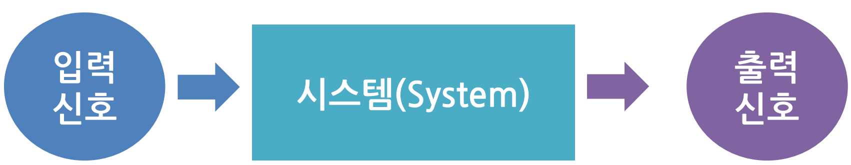
1. 시스템(System)이란?

1) 정의

- 입력 신호를 받아서 출력 신호(새로운 신호)를 출력해 주는 모든 것
- 신호를 변경하거나, 기록, 전송하는 기능을 가진 장치
- 일련의 신호를 처리하여 다른 일련의 신호를 만드는 실체를 의미
  →교환, 변환, 가공, 추출, 전송

2) 특징

- 입력, 출력(응답), 동작 규칙에 의해 기술됨 (시스템 모델링)
- 수학적으로 일련의 방정식으로 표현됨
- 물리적 요소(하드웨어) 또는 알고리즘(소프트웨어)으로 구성됨



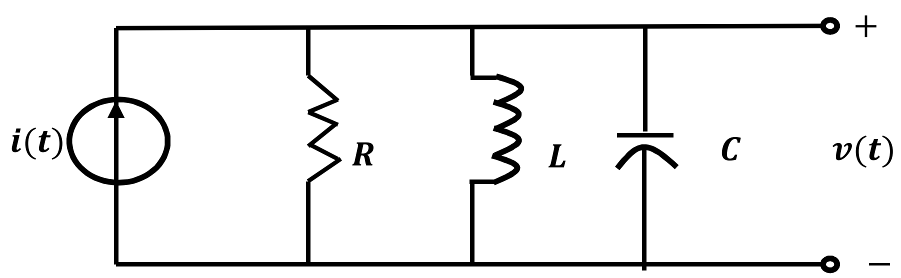
2. 시스템의 종류

1) 다양한 종류의 시스템

RLC 전기회로 시스템	신호 증폭기 시스템 (Amplifier System)
통신 시스템 (Communication System)	제어 시스템 (Control Systems)
의료 시스템 (Biomedical System)	기타

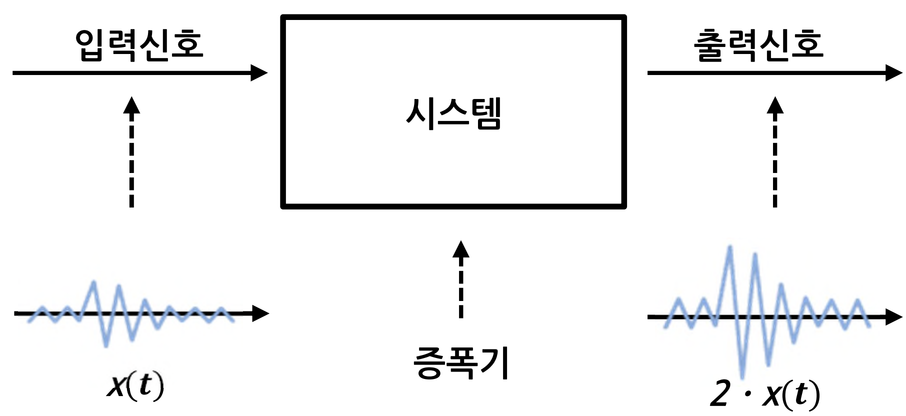
시스템

2) RLC 전기 회로 시스템

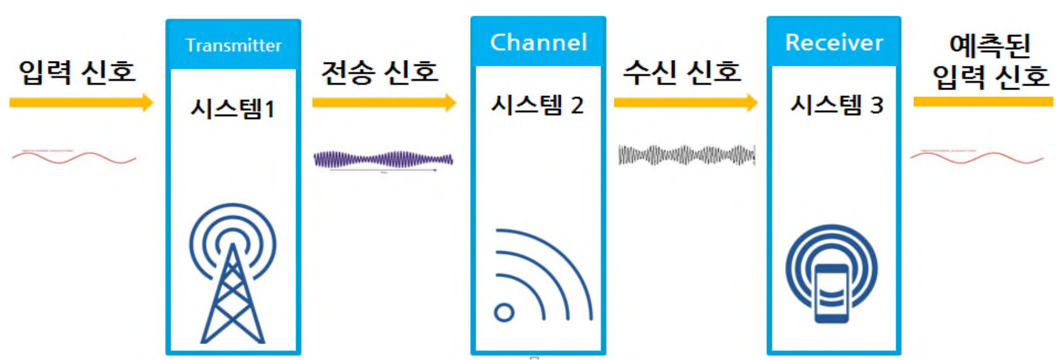


[RLC 전기회로 시스템]

3) 신호 증폭기 시스템(Amplifier System)

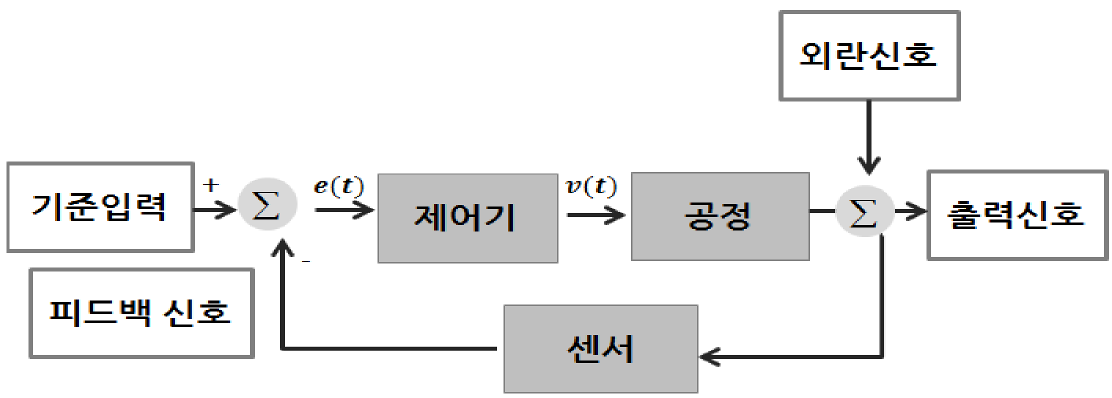


4) 통신 시스템(Communication System)

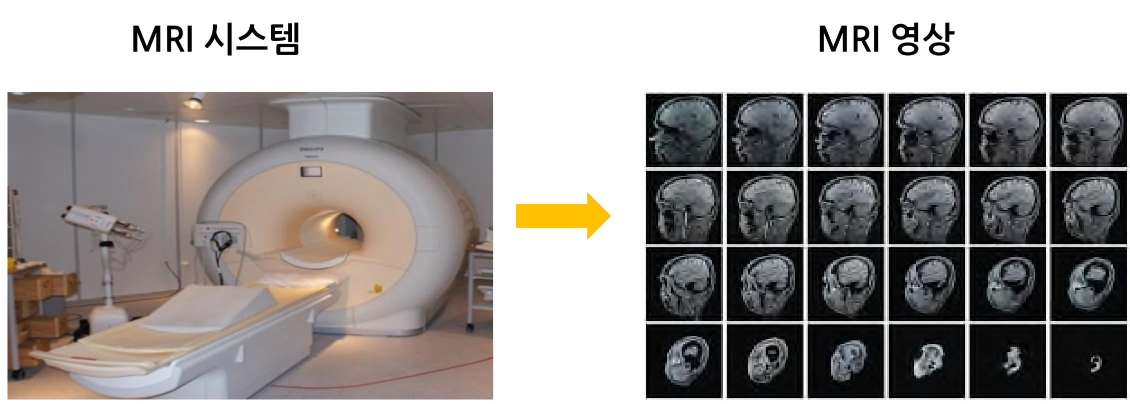


시스템

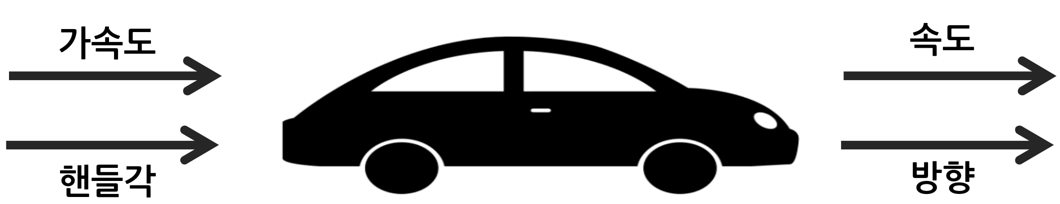
5) 제어 시스템(Control System)



6) 의료 시스템(Biomedical System)



7) 기타(자동차 시스템)



신호와 시스템의 수학적 표현

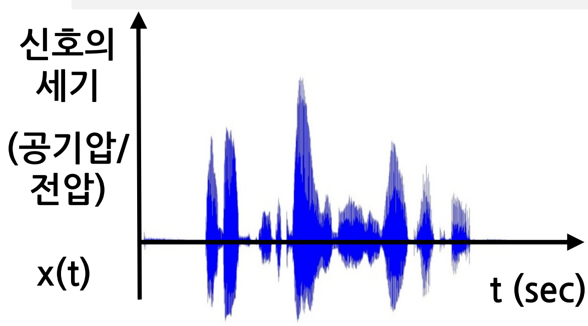
1. 신호에 대한 수학적 표현

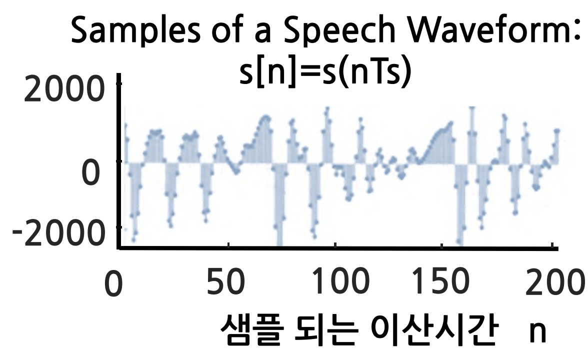
1) 기본 전제

- 신호 분석을 위해 신호를 활용 가능한 형태로 표현함
- 수학적인 기호를 도입하여 표현
- 관련된 변수들의 함수로 표현

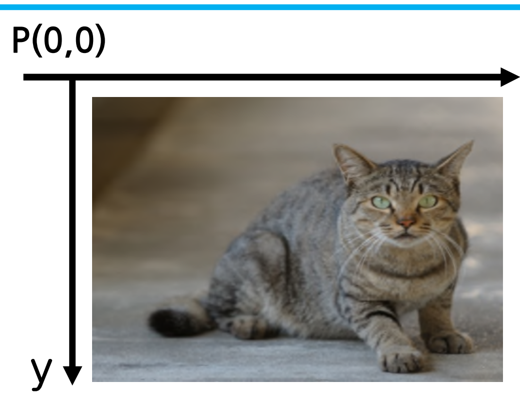
2) 음성 신호

음성 신호 x(t) (t : 시간변수)	음성 신호를 샘플링 한 이산신호 *s[n]=s(nTs)*





3) 영상 신호



s(x,y)

2차원 영상 신호

s(x,y)

(x, y: 2차원 공간변수)

4) 동영상 신호

3차원의 동영상 신호

s(x,y,t)

(x, y: 2차원 공간변수 / t:시간변수)

※ 참고: 일반적으로 영화와 TV와 같은 동영상은 1초에 정지영상 25장~30장을 연속적으로 디스플레이 해 주는 것

신호와 시스템의 수학적 표현

2. 시스템에 대한 수학적 표현

1) 블록도(Block Diagram)

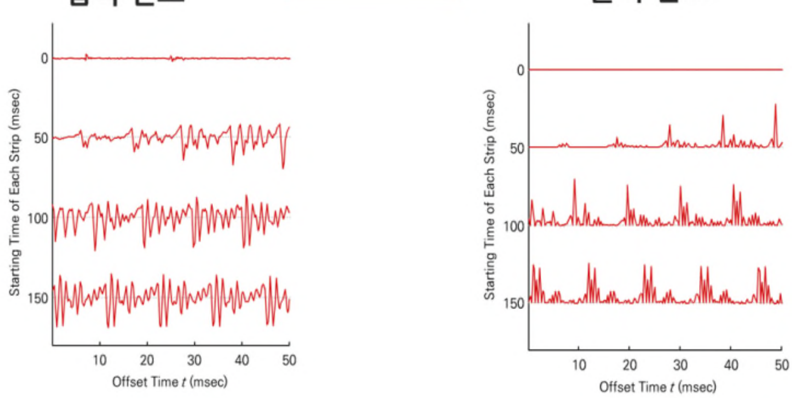
- 시스템을 시각적으로 표현하는 유용한 방법
- 시스템 구현을 위해 수행되는 연산을 표현하고, 복잡한 시스템 속에 존재하는 여러 신호 간의 상호관계를 잘 나타냄

[예] 연속 시스템에 대한 간단한 블록도와 수학적 표현

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\}$$

[예] 임의의 연속시간 시스템이 입력신호를 제곱해서 출력하는 블록도와 수학적 표현

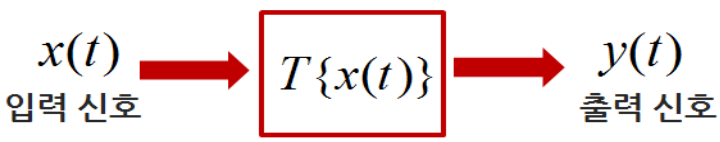
$$y(t) = x(t)^2$$



신호와 시스템의 수학적 표현

2) 연속시간 시스템

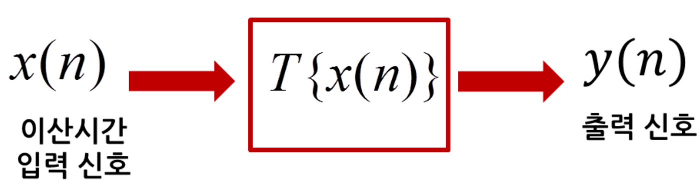
[예] 연속시간 시스템(Continuous-time System)의 수학적 표현



$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\}$$

3) 이산시간 시스템

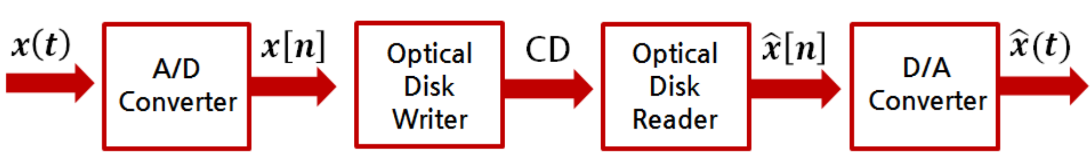
[예] 이산시간 시스템(Continuous-time System)의 수학적 표현



$$y(n) = \mathrm{T}\{x(n)\}$$

4) 아날로그-디지털신호 시스템

[예] 오디오 CD의 녹음과 재생 시스템의 수학적 표현



핵심정리

신호

- 신호의 정의: 정보를 전달하는 그 '무엇'
- 다양한 물리적 현상의 동작 또는 성질을 표현

시스템

- 신호를 변경하거나, 기록, 전송하는 기능을 가진 장치
- 입력, 출력(응답), 동작 규칙에 의해 기술

신호와 시스템의 수학적 표현

- 신호를 분석하기 위해서는 신호를 활용 가능한 형태로 표현
- 신호의 분석과 응용을 위해서 수학적인 기호를 도입하여 표현
- 블록다이어그램(Block Diagram)은 시스템을 시각적으로 잘 보여주는 유용한 방법

디지털 신호처리의 개요

1주차 2차시

학습내용

❖ 신호의 분류

❖ 기본적인 신호처리

❖ 디지털 신호처리의 개념과 목적

학습목표

❖ 아날로그신호, 이산신호 및 디지털신호의 차이점을 표현할 수 있다.

❖ 신호처리의 개념과 기본적인 신호처리 연산에 대해서 표현할 수 있다

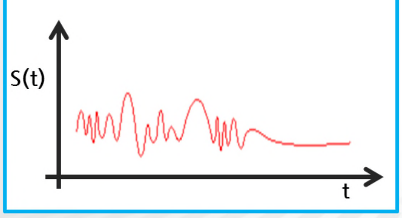
❖ 디지털 신호처리의 개념과 목적에 대해 설명할 수 있다.

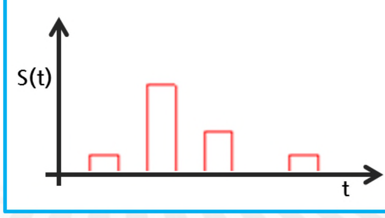
신호의 분류

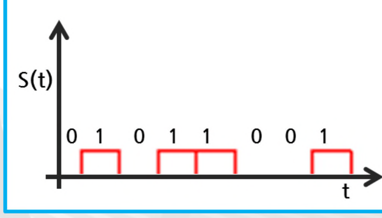
1. 아날로그신호, 이산신호, 디지털신호

[시간변수와 신호 값의 특성에 따른 분류]

아날로그신호 (Analog Signal)	이산시간신호 (Discrete Time Signal)	디지털신호 (Digital Signal)
모든 시간 범위에 걸쳐 연속적으로 정의되는 신호 (연속시간신호)	어떤 특정한 시간값에 대해서만 정의되는 신호	0, 1과 같이 두 개의 값만으로 표현되는 이산 신호







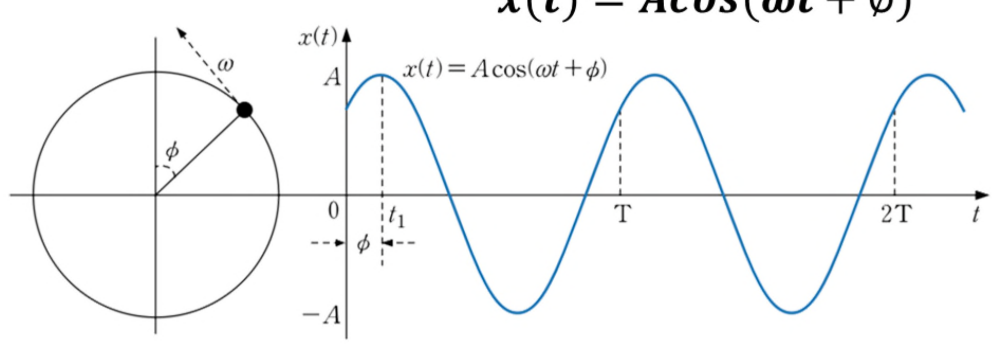
2. 결정적신호, 랜덤신호

1) 결정적신호(Deterministic Signal)

- 예측 가능한 형태로 진행하는 신호
- 하나의 분명한 수학공식, 자료목록, 잘 정의된 규칙으로 유일하게 기술할 수 있는 신호

[예] 정현파(사인, 코사인) 신호

$$\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega t + \emptyset)}$$

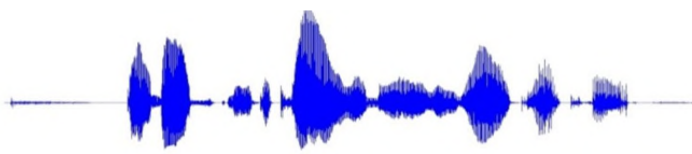


신호의 분류

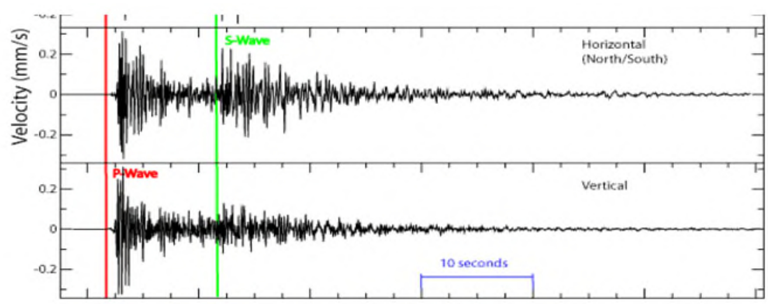
2) 랜덤신호(Random Signal)

- 예측할 수 없는 형태로 진행하는 신호
- 실제의 많은 응용분야에서 수학공식으로 서술할 수 없는 신호가 대부분임

[예] 음성 신호



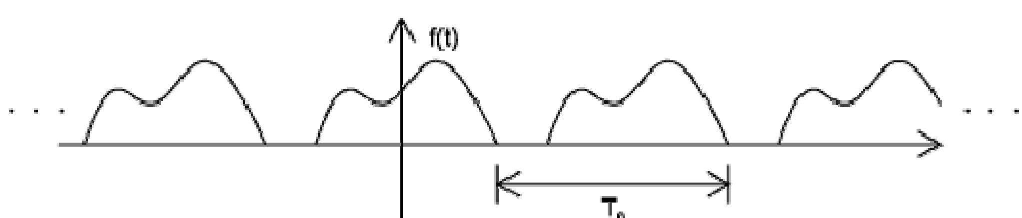
[예] 지진 신호



3. 주기신호, 비주기신호

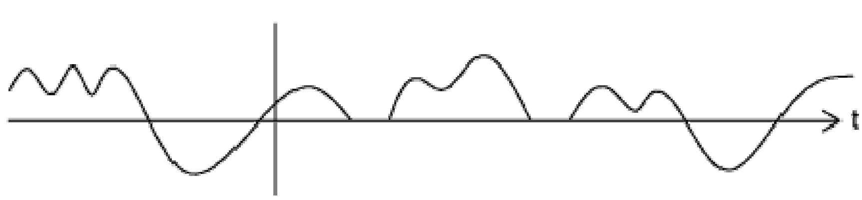
1) 주기신호(Periodic Signal)

- 임의의 주기(T) 동안의 계속해서 반복되는 신호
- $f(t)=f(t+T)$
  주기신호에 대한 기본주파수(Fundamental Frequency): $f=1/T$
  각 주파수(Angular Frequency): $\omega=2\pi/T$



2) 비주기신호(Non-periodic Signal)

- 주기신호와 다르게 똑같은 신호가 계속해서 반복되지 않는 신호



기본적인 신호처리

1. 신호처리(Signal Processing)란?

1) 정의

- 신호를 처리하는 방법 혹은 알고리즘으로서 각종 정보에 가공하여 부가가치를 창출하는
- 작업
- 원하는 목적에 알맞은 결과를 얻을 수 있도록 시스템을 이용하여 신호를 교환, 변환, 가공, 전송, 저장 등을 가하는 행위
- 아날로그 신호를 디지털 컴퓨터·집적회로를 이용,수치적으로 처리하는 디지털 신호처리가 발달

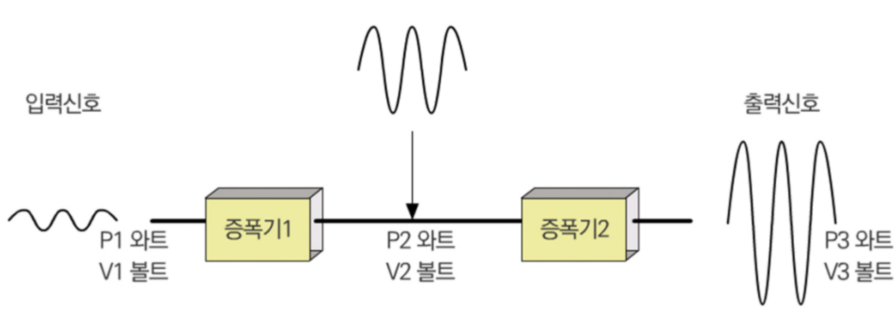
2) 관련 용어

- 해석: 신호로부터 원하는 특정 정보를 빼내어 적절한 방법으로 표현
- 합성: 조절 신호에 의해 원하는 출력신호를 발생
- 변환: 신호를 물리적인 형태로부터 다른 형태로 변경
- 필터링 : 불필요한 성분을 제거하거나 바람직한 형태로 신호를 변형

2. 신호 증폭(Signal Amplification)

[예] 증폭 블록도와 수학적 표현

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{시스템}} \longrightarrow y(t) \qquad y(t) = cx(t)$$



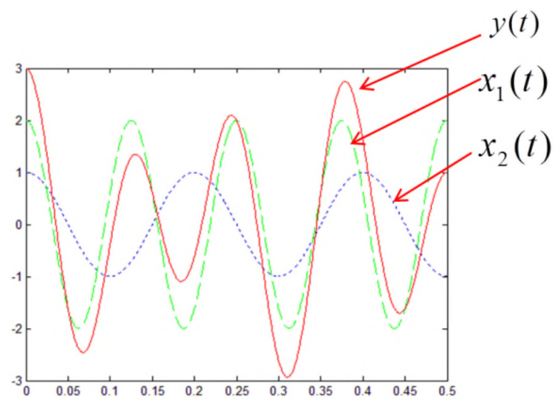
기본적인 신호처리

3. 신호 합성 및 신호의 곱 연산

1) 신호 합성(Signal Addition)

[예] 합성 블록도와 수학적 표현

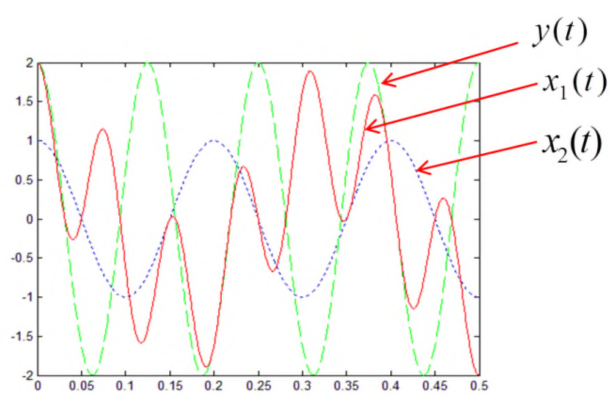
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



2) 신호의 곱(Signal Multiplication)

[예] 곱 블록도와 수학적 표현

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$



기본적인 신호처리

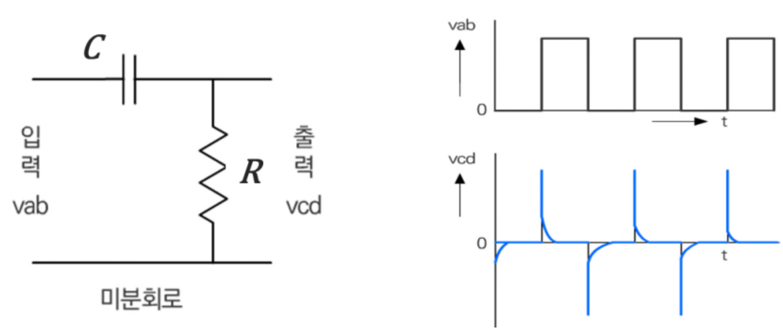
4. 신호의 미분 및 적분 연산

1) 신호의 미분 연산

[예] 미분 블록도와 수학적 표현

$x(t)$ → 시스템 → $y(t)$

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

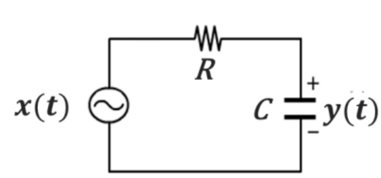


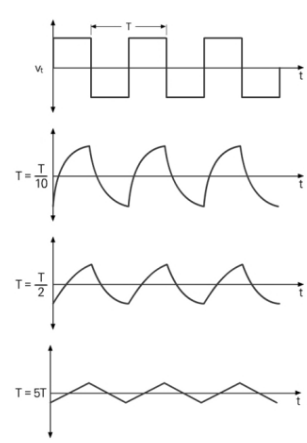
2) 신호의 적분 연산

[예] 적분 블록도와 수학적 표현

$x(t)$ → 시스템 → $y(t)$

$$y(t) = \int x(t)dt$$





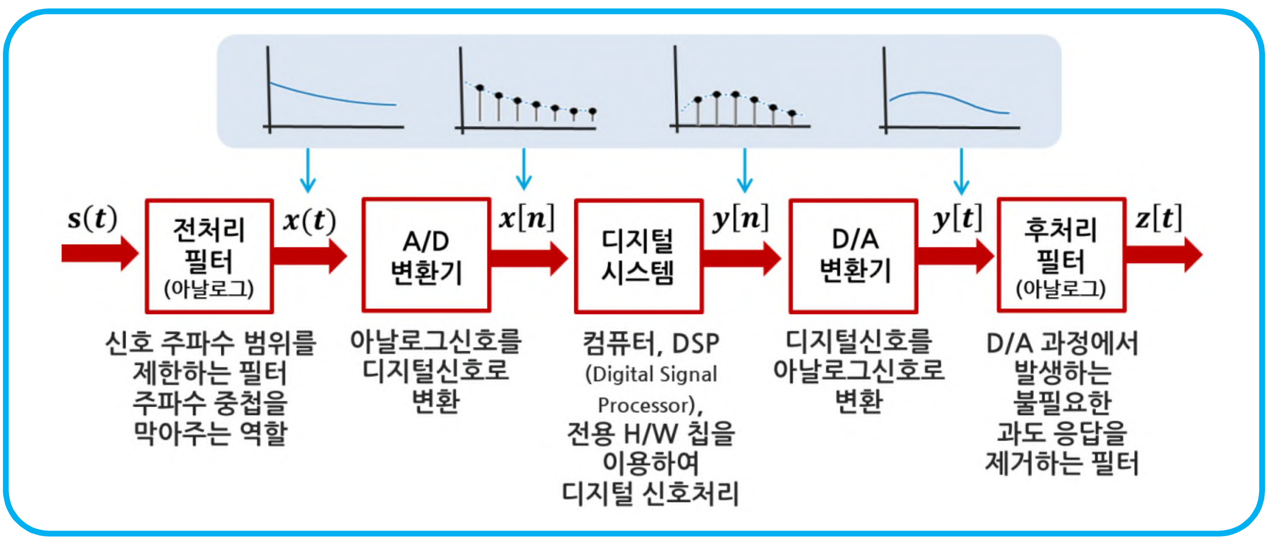
디지털 신호처리의 개념과 목적

1. 디지털 신호처리(Digital Signal Processing)란

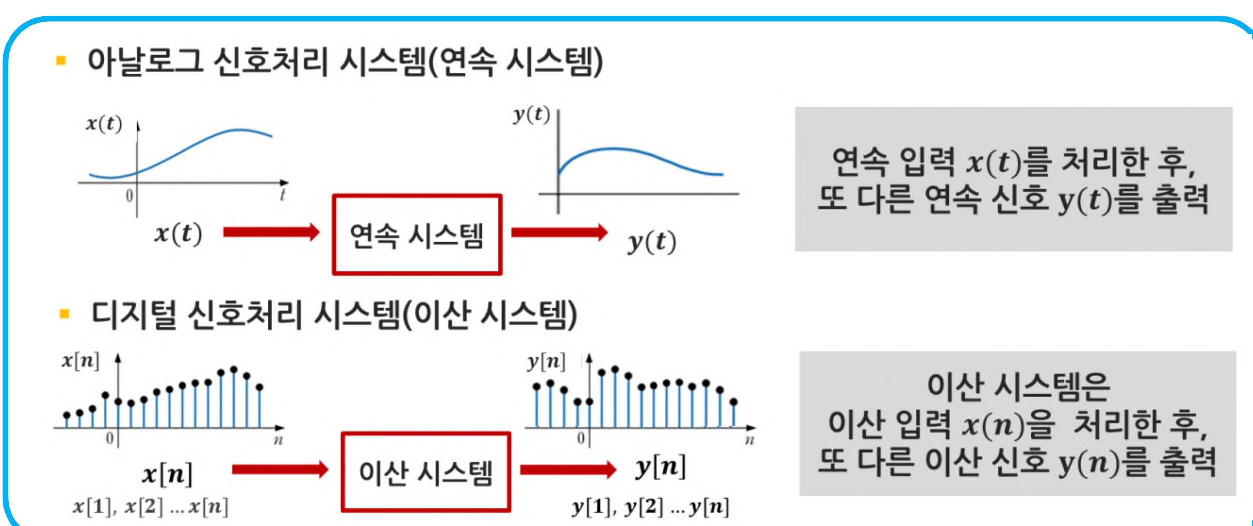
1) 정의

- 디지털 기술과 제품의 보편화로 디지털 신호처리의 필요성과 중요성이 높아짐
- 디지털 기술의 발전에 따라 아날로그신호를 컴퓨터·디지털 집적회로를 이용, 수치적으로 처리하는 디지털 신호처리가 발달
- 디지털신호는 모든 신호를 단순한 숫자의 나열로 변환 처리
  → 수열
- 디지털 신호처리는 멀티미디어 신호처리의 기초

2) 디지털 신호처리 시스템의 구성



2. 아날로그 신호처리 시스템과 디지털 신호처리 시스템



디지털 신호처리의 개념과 목적

3. 디지털 신호처리의 목적

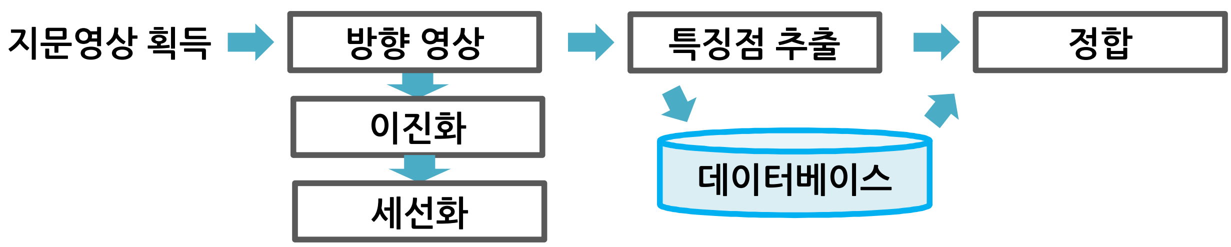
1) 신호 해석

- 관측 신호로부터 그 신호의 특정한 성질을 해석하고 분석하기 위한 목적
  [예] 음성 인식, 얼굴 인식, 문자 인식 등
- 스펙트럼(주파수)분석, 상관(Correlation)해석

2) 정보 추출

- 신호 해석 및 처리를 위해 관측 신호에 포함된 의미 있는 정보 추출
- 수학적 기법(확률 통계적 방법) 사용

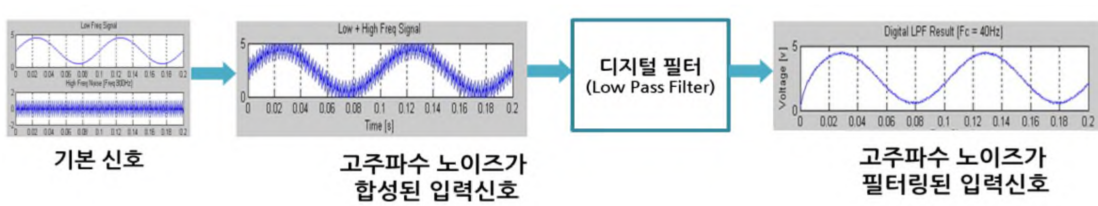
[예] 패턴 인식 특징 추출: 지문의 주요 특징 추출



3) 디지털 필터를 이용한 신호 필터링(Filtering)

- 불필요한 성분을 제거하거나 바람직한 형태로 신호를 변형

[예] 주파수 선택 필터: 불필요한 성분 제거



4) 신호의 압축과 복원

- 품질의 저하 없이 데이터의 양을 줄임
  [예] 정지 영상: BMP 파일 vs. JPG 파일

5) 디지털 영상 화질 개선

- 다양한 디지털 영상처리 알고리즘을 이용, 디지털 영상의 화질을 개선
  [예] Photoshop 이미지 개선

핵심정리

신호의 분류

- 시간 축에 따른 신호의 정의에 따라 연속신호, 이산신호, 디지털신호로 분류
- 주기의 형태에 따라 주기 신호와 비주기 신호로 분류
- 예측 가능 여부에 따라 결정적신호와 랜덤신호로 분류

기본신호처리

- 기본적인 신호처리에는 신호의 증폭, 신호합성, 신호의 곱 연산이 있음
- 기본적인 신호처리에 미분연산 및 적분연산도 기본적인 신호처리

디지털 신호처리의 목적

- 연속적인 입력신호를 디지털신호로 변환, DSP(Digital Signal Processor) 또는 컴퓨터를 이용하여 디지털신호를 처리하는 것
- 신호 해석, 정보 추출, 필터링 및 정보 압축 등을 위해서 디지털 신호처리를 수행함

디지털신호처리

강 의 노 트

주파수와 정현파 신호

1주차 3차시

학습내용

❖ 주파수의 이해

❖ 기저신호

❖ 정현파 신호

학습목표

❖ 다양한 신호에서의 주파수 개념을 설명할 수 있다.

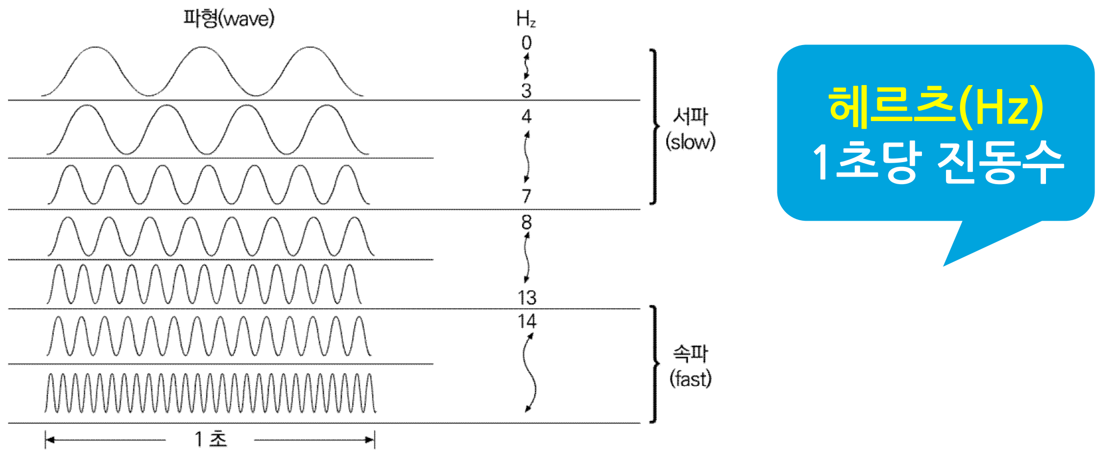
❖ 기저신호의 의미와 기저신호의 조건을 설명할 수 있다.

❖ 정현파 신호의 특징과 성질을 설명할 수 있다.

주파수의 이해

1. 주파수(Frequency)란?

- 빛이나 전파의 진동수를 나타내는 측정단위
- 1초당 진동수가 적으면 저주파(Low Frequency), 많으면 고주파(High Frequency)

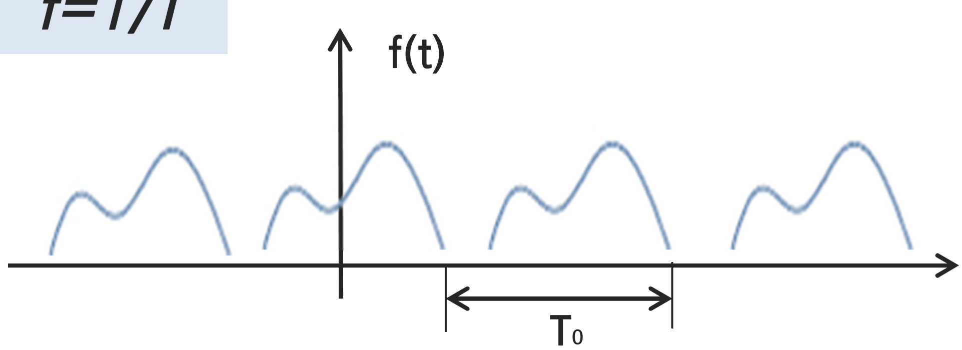


2. 주기와 주파수와의 관계

1) 정의

- 주기신호(Periodic Signal): 임의의 주기(T) 동안에 신호가 계속해서 반복되는 신호
- 주기신호에 대한 주파수와 주기는 반비례

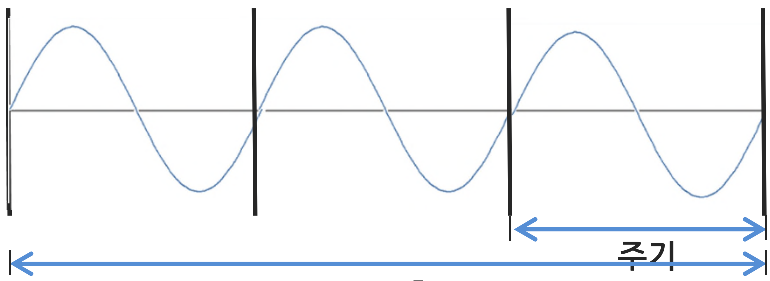
$$f=1/T$$



주파수의 이해

2) 예시

[정현파(사인파) 신호]

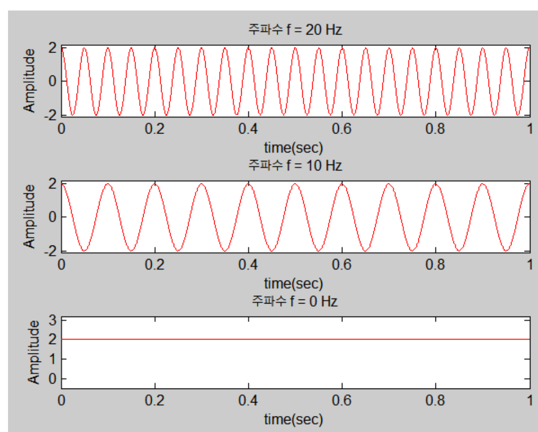


주파수=사이클/초
=3Hz

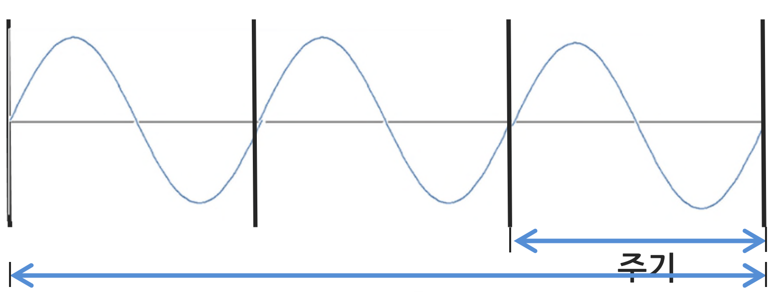
※ *주기:* 1/3*s, 주파수: 3Hz*

[다양한 주파수의 정현파 신호]

$$\boldsymbol{x(t) = 2\cos(2\pi f t)}$$



[정현파(사인파) 신호]



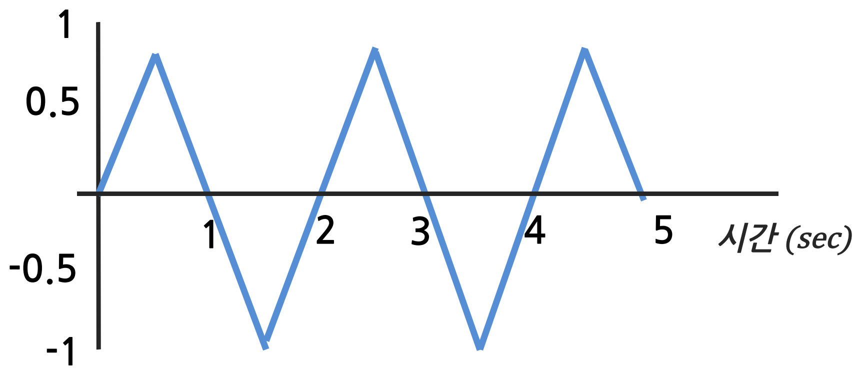
주파수=사이클/초
=3Hz

※ *주기:* 1/3*s, 주파수: 3Hz*

주파수의 이해

2) 예시

[삼각파(Triangular Wave) 주기신호]



※ 주기(T) : 2 sec, 주파수(f) : 0.5 Hz

기저신호

1. 기저신호의 개념

1) 기저신호(Base Signal)

- 신호의 표현을 바꾸는 데 바탕 역할을 하는 기본 신호
  [예] 빛이나 색의 삼원색, 선형 공간의 직교 단위 벡터와 같은 역할
- 기저신호들의 일차 결합으로 표현 가능

※ *푸리에 급수(Fourier Series)*

$$x(t) = \sum_i c_i \varphi_i(t)$$

- $x(t)$: *임의의 주기신호*
- φ_i: *기저신호*
- c_i: *i 기저신호에 대한 가중치*

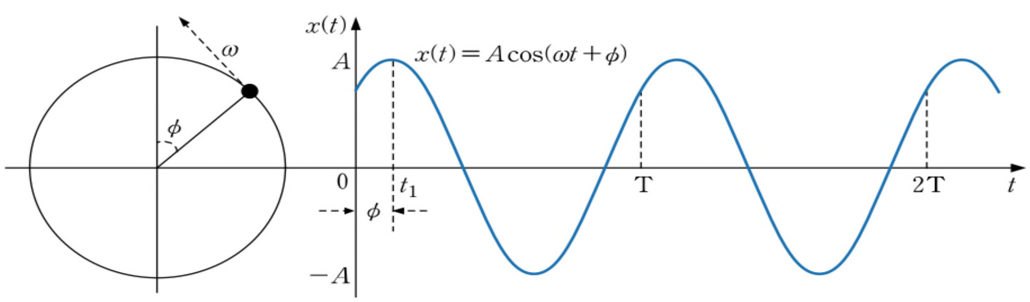
2. 기저신호의 조건

1) 기저신호의 요건

- 형태가 단순, 신호의 표현을 구하기 쉬워야 함
- 다양하고 폭넓은 신호들에 대해 표현이 가능해야 함
- 표현된 신호에 대한 시스템 응답이 편리하게 표기
- 한 주파수에 대해 하나의 기본 신호만 존재

정현파는 가장 바람직한 기저신호 중 하나

$$x(t) = A\cos(\omega t + \emptyset)$$



기저신호

2) 대표적인 기저신호

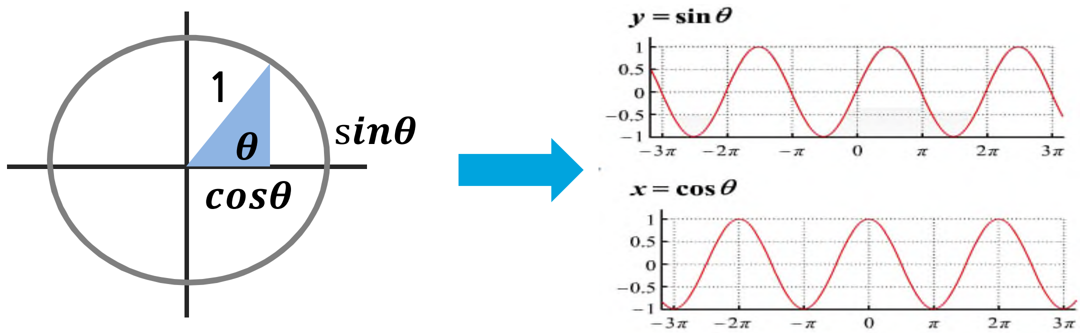
- 신호처리 분야에서 특별한 신호로, 하나의 정현파는 오직 하나의 주파수를 가짐
- 정현파는 신호의 표현을 다른 영역으로 변환하는 과정에서 기본이 되는 신호
- 모든 주기신호는 정현파 신호들의 일차 결합으로 표현 가능함
  → *퓨리에 급수*

정현파 신호

1. 정현파 신호(Sinusoidal Signal)

1) 정의

- 신호와 시스템에서 가장 근본적이고, 기본이 되는 신호(Base Signal)
- 정현파의 주기(T)는 2π
- 정현파인 사인함수와 코사인함수는 각도 θ에 따른 주기함수



2) 코사인 신호

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \emptyset)$ ➔ $x(t)$는 코사인 함수의 각이 변수t의 함수로 표현

- $\emptyset$ → 위상변이(Phase Shift)
- ω_0 → 라디안 주파수(Radian Frequency)
- A → 진폭(Amplitude)

$\omega_0 = 2\pi f$ Radian/sec — 헤르츠 주파수식으로 표현

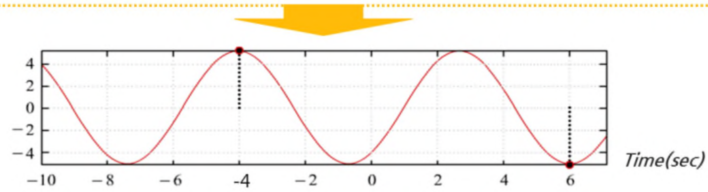
$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ — 주파수와 주기와의 관계 반비례

$x(t) = 5\cos(0.3\pi t + 1.2\pi)$

➔ 진폭 A= 5 ➔ 라디안 주파수 $\omega_0 = 0.3\pi$ ➔ 주기= $T = 1/f$ ➔ 위상변이 $\emptyset$= 1.2π

$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{0.3\pi}{2\pi} = \frac{3}{20}$Hz $20/3sec$

➔ 피크위치 $0.3\pi t + 1.2\pi = 0$ $\therefore t = -4sec$



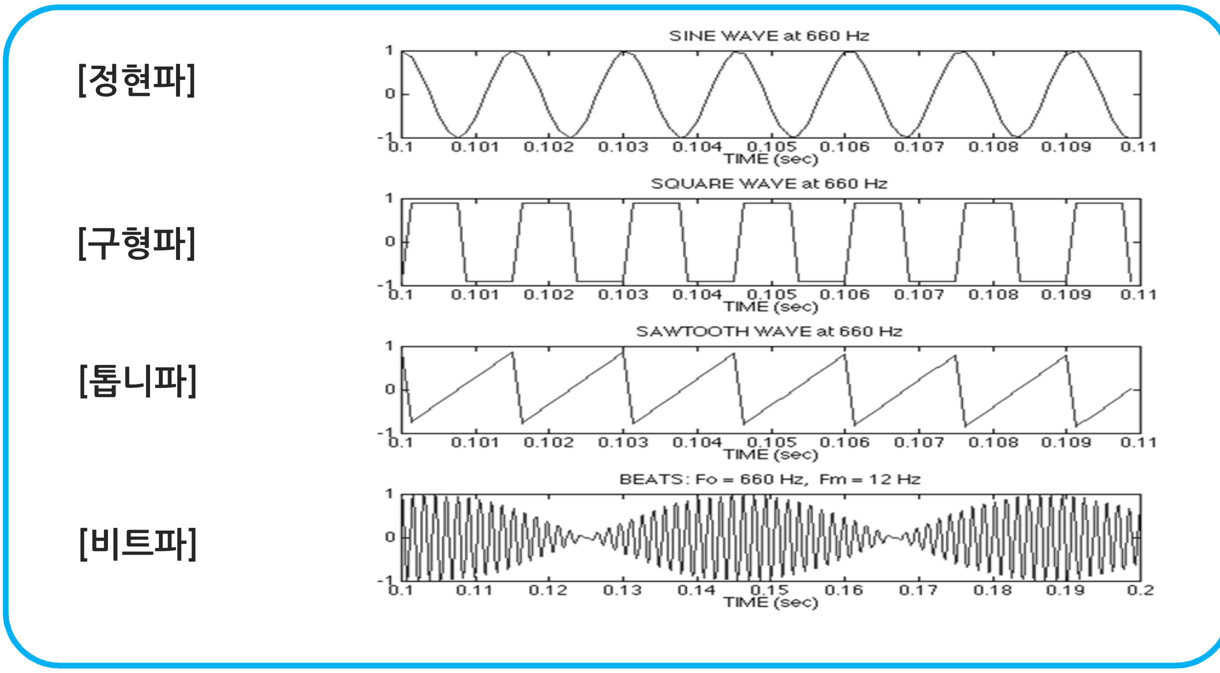
정현파 신호

2. 정현파 신호의 기본 특성

1) 주파수와 음정의 관계

- 주파수와 소리의 음정과 밀접한 관련 있음
  [예] 음정의 도는 주파수 264Hz 정현파 신호

2) 주기함수와 소리의 관계



3) 사인, 코사인 신호의 기본 특성

특성	식
동질성	$\sin\theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$
주기성	$\sin(\theta + 2\pi k) = \sin(\theta)$ $\cos(\theta + 2\pi k) = \cos(\theta)$, k는 정수
우함수	$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
기함수	$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
사인값이 0	$\sin(\pi k) = 0$, k는 정수
코사인값이 1	$\cos(2\pi k) = 1$, k는 정수
코사인값이 -1	$\cos\left(2\pi(k + \frac{1}{2})\right) = -1$, k는 정수

정현파 신호

3. 위상변이와 시간변이의 관계

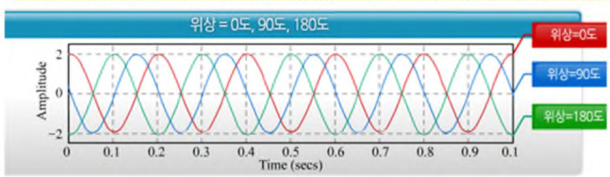
1) 위상변이 변수 ∅

- ∅는 코사인 함수에서 최대치와 최소치의 위치를 결정

$$x(t) = 2cos(2\pi(5)t + \emptyset)$$

➔ $\emptyset = 0$ 이면, 피크가 t=0에서 나타남

➔ $\emptyset \neq 0$ 이면, 위상변이는 최대치가 t=0에서 시간적으로 얼마나 변이 되는가를 결정함



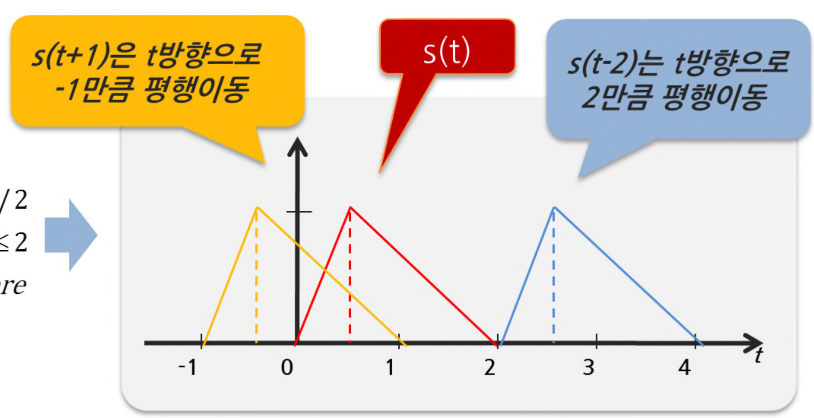
위상변이에 따른
코사인 함수의 피크변화

예제 03-01

다음과 같이 정의되는 s(t) 신호를 그려보자. 또한, 시간적(시간 축)으로 2초만큼 쉬프트된 s(t-2)와 시간적으로 -1초만큼 쉬프트된 s(t+1) 신호도 그려보자.

[예제풀이]

$$s(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1/2 \\ (4-2t)/3, & 1/2 \le t \le 2 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$



- s(t-2)는 s(t)를 시간적으로 지연(Delay)되었다고 함
- s(t+1)는 s(t)를 시간적으로 선행(Advanced)한다고 함

정현파 신호

3. 위상변이와 시간변이의 관계

2) 위상변이와 시간변이

$x(t) = Acos(\omega_0 t)$	위상이 0인 코사인으로 가정
$x(t-t_1) = Acos\left(\omega_0(t-t_1)\right) = Acos(\omega_0 t + \emptyset)$	시간적으로 t_1만큼 지연시킴
$Acos(\omega_0 t - \omega_0 t_1) = Acos(\omega_0 t + \emptyset)$	지연된 시간 t_1은 위상변이 파이
$-\omega_0 t_1 = \emptyset$	모든 t에서 성립, 위상변이 파이
$t_1 = -\dfrac{\emptyset}{\omega_0} = -\dfrac{\emptyset}{2\pi f_0}$	위상변이 파이인 코사인 신호 시간지연 t_1

예제 03-02

$x(t)$신호는 $s(t)$ 신호를 어느 정도 시간 변이한 신호인가?
신호변이 $x(t) = s(t-t_1)$에서 시간변이 t_1을 구하여 보자.

[예제풀이]

- 아래의 식과 같이 $x(t)$라는 신호를 다시 표현할 수 있고, 시간변이 t_1은 1/200
- 즉, 신호 $x(t)$ 코사인 함수는 원래 신호 $s(t)$신호를 시간적으로 1/200초 만큼 지연

$$x(t) = 20\cos(2\pi(40)t - 0.4\pi)$$
$$= 20\cos\left(80\pi(t - \tfrac{1}{200})\right)$$
$$= s\left(t - \frac{1}{200}\right)$$

핵심정리

주파수의 이해

- 주파수: 빛이나 전파의 진동수를 나타내는 측정단위
- 헤르츠(Hz)에 따라 저주파(Low Frequency), 고주파(High Frequency)로 구분
- 주기신호에 대한 주파수(Frequency)와 주기는 반비례함 f=1/T

기저신호

- 신호의 표현을 바꾸는 데 바탕 역할(기본 역할)을 하는 신호
- 퓨리에 급수: 모든 신호는 기저신호들의 일차 결합으로 표현 가능

정현파 신호

- 가장 바람직한 기저신호
- 진폭(A), 주파수 및 위상변이로 표현
- $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \emptyset)$

디지털신호처리

강의노트

Matlab 사용법

2주차 1차시

학습내용

- ❖ Matlab 소개
- ❖ 행렬 및 벡터 생성
- ❖ 기본적 행렬 연산

학습목표

- ❖ Matlab 프로그램의 개요를 이해하고, 기본적인 기능들을 활용할 수 있다.
- ❖ Matlab의 행렬 및 벡터를 생성하는 방법을 설명할 수 있다.
- ❖ Matlab을 이용해 기본적인 행렬 연산 프로그램을 작성할 수 있다.

Matlab 소개

1. Matlab 개요

1) 정의

- MATrix LABoratory의 약어
- 미국의 Mathworks 사에 의해 C++언어로 개발된 컴퓨터소프트웨어
- Matlab는 기본적으로 행렬을 사용하므로 차원이 필요 없음
- 프로그래밍 언어를 사용하지 않고도 쉽게 수치 계산을 수행할 수 있음

2) 응용 분야

- 수학과 관련된 다양한 계산 분야
- 알고리즘 개발
- 상황 모델링과 데이터 분석
- 여러 가지 과학과 공학적인 그래프적인 표현
- GUI에 의한 애플리케이션 개발

3) Toolbox

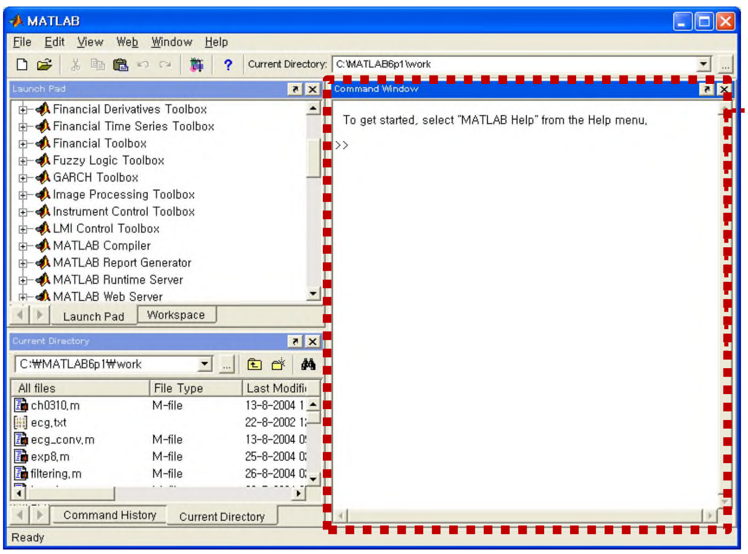
- Matlab은 이용하고자 하는 분들의 전공에 도움을 주고자 Toolbox를 가지고 있음
  → 신호 처리, 통계학, 영상신호 처리, 제어, Fuzzy Logic, 회계, 화학 공정에 대한 다양한 라이브러리 제공
- 해당 전공 부분의 내용을 심도 있게 지원하는 함수들의 도서관과 같은 것
- 특별히 Simulink라는 것이 있는데 주로 동적 시스템의 Simulation에 이용되고 있음
- Matlab은 외부 프로그램(C, Fortran 등)과 링크해서 이용할 수 있는 기능도 제공함

Matlab 소개

2. Matlab의 구성 요소

1) 명령어 창

- Matlab 명령을 실행함

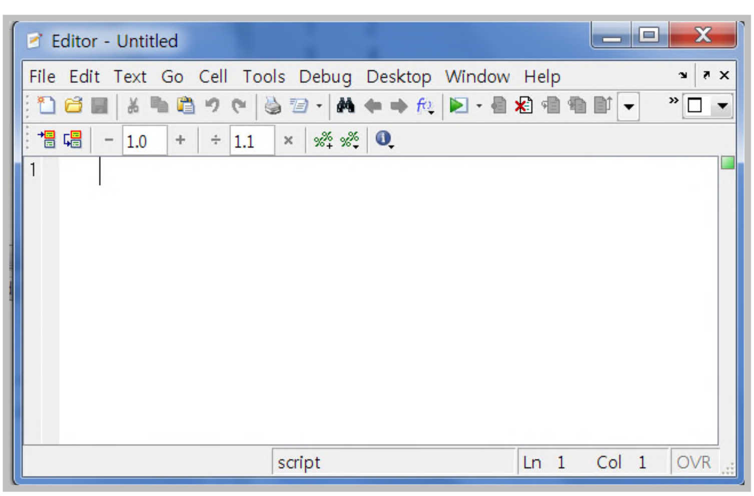


Command Window

Matlab과 대화하기 위한 기본적인 공간

2) 편집기

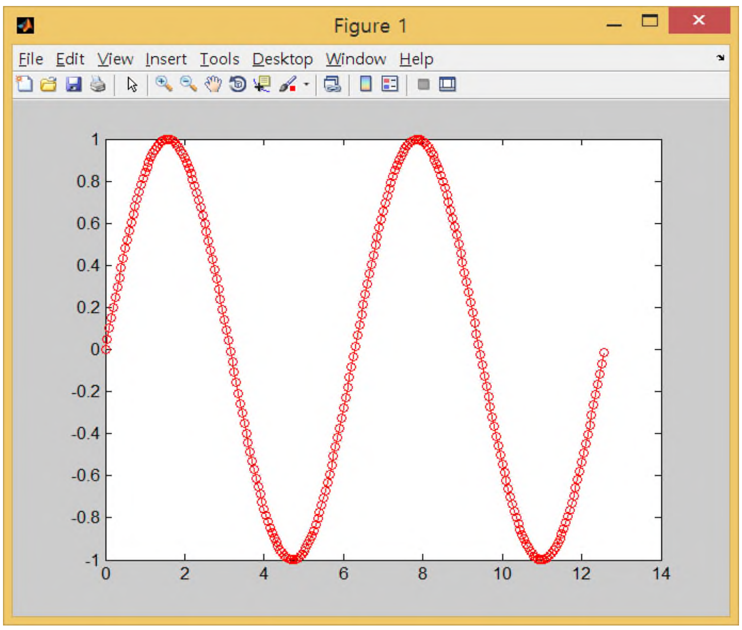
- Matlab 프로그램을 작성함
- M-파일 프로그래밍



Matlab 소개

3) 그림창

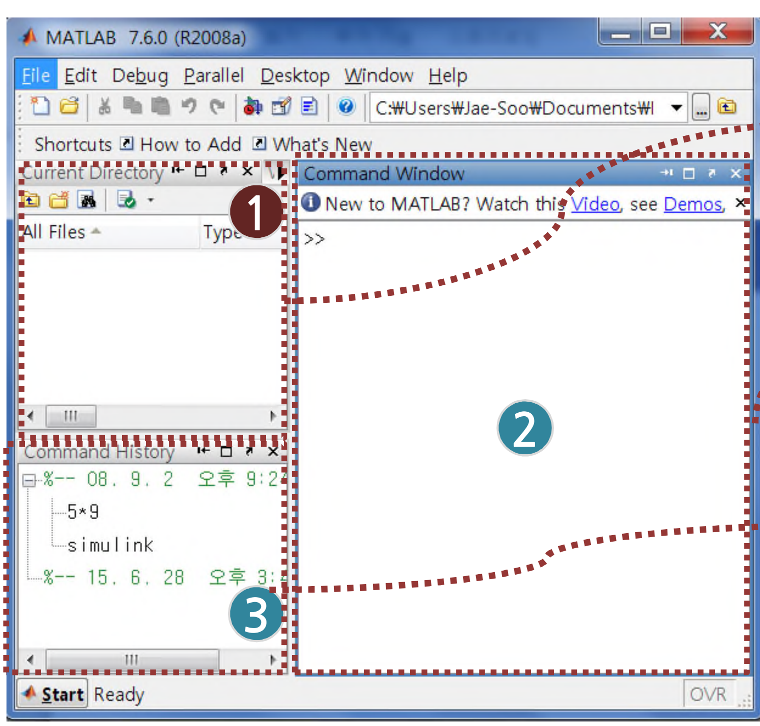
- 명령 수행 결과의 일부



4) SIMULINK

- 여러 가지 모듈을 이용하여 시뮬레이션을 수행

5) Matlab 프로그램 실행



Current Directory
현재 작업하고 있는 디렉토리의
파일들을 보여주는 창

Command Window
명령어창

Command History
명령어창에서 명령어를 실행한
과거 히스토리를 보여주는 창

Matlab 소개

3. 간단한 공학용 계산기 기능

- Matlab은 기본적인 공학 계산이 가능함
- Matlab은 변수명에 대한 규칙을 가지고 있음
- 변수명은 대소문자를 구분함

예 Cost, cost, CoSt, COST는 모두 다른 Matlab 변수들임

행렬 및 벡터 생성

1. 행렬 입력 규칙

1) Matlab에서의 형 선언

- 다른 프로그래밍 언어들과 달리 차원의 선언이나 형 선언이 필요 없음
  → 컴퓨터가 사용 가능한 크기까지 자동적으로 저장 공간을 할당함
- 빈칸 • 쉼표: 각각의 행렬 원소들은 빈칸 또는 쉼표를 사용하여 분리
- 대괄호([ ]): 전체 원소들은 대괄호([ ])로 감쌈
- 세미콜론(;): 원소의 끝에 세미콜론(;)을 붙이면 한 행의 종료를 의미함

예제 04-01

a = [1 2 3] a 라는 변수에 1행 3열의 3개의 행렬원소를 입력하면?

[예제풀이]

```
>> a = [1, 2, 3];  또는
>> a = [1 2 3];
```

예제 04-02

b라는 2행 2열의 변수에 4개의 원소를 입력하면?

[예제풀이]

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>> b = [1, 2 ; 3, 4];  또는
>> b = [ 1,2
         3, 4];
```

2) Matlab에서 사용되는 원소 지정

- Matlab에서 사용되는 임의의 표현들 (수치, 함수, 수식, 문자 등)은 모두 행렬의 원소로 사용될 수 있음

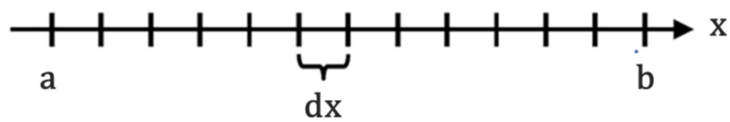
3) Matlab에서 행렬 원소의 추가 및 변경

- 행렬의 원소 중에 어느 한 원소만을 추가하거나 바꾸고 싶을 때는 색인을 지정하고 원하는 값을 입력하면 됨

행렬 및 벡터 생성

2. 벡터의 합을 통한 방법

- a와 b 사이에서 dx 간격으로 n개의 분할된 벡터 값 생성



$$\left.\begin{array}{l} >> x = a : dx : b\,; \\[1em] >> x = \mathrm{linspace}(a, b, n)\,; \end{array}\right\} \text{row vectors}$$

예제 04-03

$$x = [\,0\ 0.1\ 0.2 \cdots 0.9\ 1\,]$$

$$x = 0 : 0.1 : 1$$

[예제풀이]

```
Command Window
>> x = 0:0.1:1

x =

  Columns 1 through 5

         0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000

  Columns 6 through 10

    0.5000    0.6000    0.7000    0.8000    0.9000

  Column 11

    1.0000
```

행렬 및 벡터 생성

2. 벡터의 합을 통한 방법

예제 04-04

$$x = linspace(0,\ 1,\ 10)$$

[예제풀이]

```
Command Window

>> x=linspace(0,1,10)

x =

  Columns 1 through 5

         0    0.1111    0.2222    0.3333    0.4444

  Columns 6 through 10

    0.5556    0.6667    0.7778    0.8889    1.0000
```

기본적인 행렬 연산

1. 행렬 트랜스포즈와 행렬 연결 연산

1) 행렬 트랜스포즈(Transpose) 연산

- A' : 행렬의 행과 열을 바꿈

Command Window

```
A =

     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

```
>> A'

ans =

     1     4     7
     2     5     8
     3     6     9
```

2) 행렬 연결(Concatenation) 연산

- C = [A, B] ,   D = [A;B] : 행렬을 여러 개 연결하여 새로운 행렬을 생성

Command Window

```
>> A
A =
     1  2  3
     4  5  6
     7  8  9
>> B
B =
     1  0  0
     0  1  0
     0  0  1
```

```
>> C = [A,B]
C =
     1  2  3  1  0  0
     4  5  6  0  1  0
     7  8  9  0  0  1
>> D = [A;B]
D =
     1  2  3
     4  5  6
     7  8  9
     1  0  0
     0  1  0
     0  0  1
```

기본적인 행렬 연산

2. 행렬의 덧셈과 뺄셈

- 숫자의 덧셈 및 뺄셈과 마찬가지로 '+'와 '-'기호 사용
- 단 행렬 연산의 대상이 되는 두 행렬의 차원이 같아야 함
- 행렬 또는 벡터의 덧셈과 뺄셈: 각 행렬의 같은 위치, 행렬 상의 색인이 같은 원소끼리 이루어짐
- 1×1 행렬인 스칼라의 경우: 어떤 한 행렬이나 벡터와도 연산이 가능하며 행렬이나 벡터의 모든 원소들에 스칼라를 더하거나 빼면 됨

예제 04-05

□ A=[1 2 3;4 5 6];
□ B=[2 4 6;1 3 5];
□ C=A+B

[예제풀이]

```
C =
     3     6     9
     5     8    11
```

예제 04-06

□ C-5

[예제풀이]

```
ans =

    -2     1     4
     0     3     6
```

기본적인 행렬 연산

3. 행렬의 곱셈과 나눗셈

1) 행렬의 곱셈 연산

- * 연산: 기본적인 두 행렬의 곱셈 경우에만 정의됨
- .* 연산: 배열 연산의 곱셈으로 두 행렬의 차원이 같을 때 각 행렬의 같은 위치에 있는 원소들끼리 곱셈을 하여 새로운 행렬을 구성함

* 연산

X=A * B

```
A =

     1     2
    -3     2

>> B

B =

     1     2
     3     4

>> X=A*B

X =

     7    10
     3     2
```

.* 연산

X=A .* B

```
A =

     1     2
    -3     2

>> B

B =

     1     2
     3     4

>> X=A.*B

X =

     1     4
    -9     8
```

2) 행렬의 나눗셈 연산

- 스칼라와는 달리 일반적으로 좌측 나누기와 우측 나누기의 결과가 일치하지 않음
- 좌측 나누기: X=A₩B → A*X=B의 해 (X = inv(A)*B)
- 우측 나누기: X=A/B → X*B=A의 해 (X = A*inv(B))

좌측 나누기

```
Command Window
>> A=[1 2; -3 2]

A =

     1     2
    -3     2

>> B = [ 1 2 ; 3 4]

B =

     1     2
     3     4

>> X=A₩B
```

- X=A₩B -----> X=A₩B
- A*X=B의 해(X = inv(A)*B)

```
X =

   -0.5000   -0.5000
    0.7500    1.2500
```

우측 나누기

```
Command Window
>> A=[1 2; -3 2]

A =

     1     2
    -3     2

>> B = [ 1 2 ; 3 4]

B =

     1     2
     3     4
```

- X=A₩B -----> X=A/B
- X*B =A의 해 (X = A*inv(B))

```
>> X=A/B

X =

     1     0
     9    -4
```

기본적인 행렬 연산

4. 기타 행렬의 연산

1) 관계연산

- Matlab에서는 차원이 같은 두 행렬에 대하여 적용할 수 있는 6가지의 관계연산자가 있음

연산자	의 미
<	미만(less than)
<=	이하(less than and equal)
>	초과(greater than)
>=	이상(greater than and equal)
==	같음(equal)
~=	같지 않음(not equal)

- 두 행렬의 대응 원소들을 비교 → 그 결과를 0과 1로 구성된 행렬의 형태로 나타냄 (0: 거짓, 1: 참)

2) 논리연산

연산자	의 미
&	그리고(and)
|	또는(or)
~	부정(not)

- C = A & B: 행렬 A와 행렬 B의 대응 원소들이 둘 다 0이 아닐 경우에는 1을 돌려주고 하나라도 0이면 0을 돌려줌
- C = A | B: 행렬 A와 행렬 B의 대응 원소들 중 하나라도 0이 아닐 경우에는 1을. 두 원소들 중에서 어느 하나라도 0이 아닐 경우에는 1을 돌려줌
- B = ~A: A의 원소가 0이 아닐 경우에는 0을 돌려줌. 1이 아닐 경우에는 1을 돌려줌

핵심정리

Matlab 소개

- Matlab: MATrix LABoratory의 약자로 기본적으로 행렬을 사용하여 다양한 응용분야에서 활용되고 있는 컴퓨터 개발 S/W
- Matlab의 구성 요소: Matlab 명령어를 수행하는 명령창, 과거 명령어 히스토리를 보여주는 명령어 히스토리 창, 현재 작업하고 있는 디렉토리의 파일들을 보여주는 디렉토리 창으로 구성

행렬 및 벡터 생성

- 행렬 입력 규칙: 각각의 행렬 원소들은 빈칸 또는 쉼표를 사용하여 분리해서 행렬 값을 입력하고, 전체 원소는 대괄호([ ])로 감싸며, 원소의 끝에 세미콜론(;)을 붙이면 한 행의 종료를 의미함
- x = a:dx:b; 명령어: a와 b 사이에서 dx 간격으로 분할 된 행렬벡터를 생성하는 명령어

기본적인 행렬 연산

- 행렬 연결 연산: 행렬을 여러 개 연결하여 새로운 행렬을 생성하는 연산
- 행렬 트랜스포즈 연산: 행렬의 행과 열을 바꾸는 연산
- 행렬 또는 벡터의 덧셈과 뺄셈: 각 행렬의 같은 위치, 즉 행렬 상의 색인이 같은 원소끼리 이루어짐
- '*‘ 연산: 기본적인 두 행렬의 곱셈
- ‘.*’ 연산: 두 행렬의 차원이 같을 때 각 행렬의 같은 위치에 있는 원소들끼리 곱셈을 하여 새로운 행렬을 구성
- 좌측 나눗셈: X = A₩B는 A*X=B의 해를 의미
- 우측 나눗셈: X= A/B 는 X*B = 의 해를 의미

디지털신호처리

강 의 노 트

그래프와 흐름 제어

2주차 2차시

학습내용

- ❖ 기본적인 그래프 명령어
- ❖ 흐름 제어 명령어
- ❖ M-파일 프로그래밍

학습목표

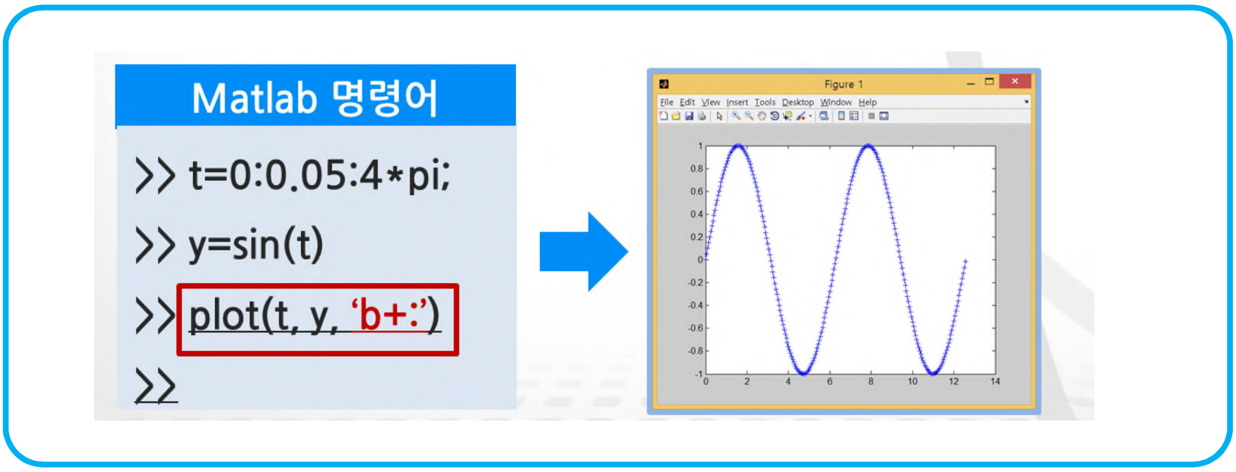
- ❖ 기본적인 그래프 함수 명령어로 그래프를 그릴 수 있다.
- ❖ 다양한 흐름 제어 명령어를 학습하고, 흐름 제어 프로그램에 활용할 수 있다.
- ❖ 2가지 모드의 M-파일 프로그래밍을 할 수 있다.

기본적인 그래프 명령어

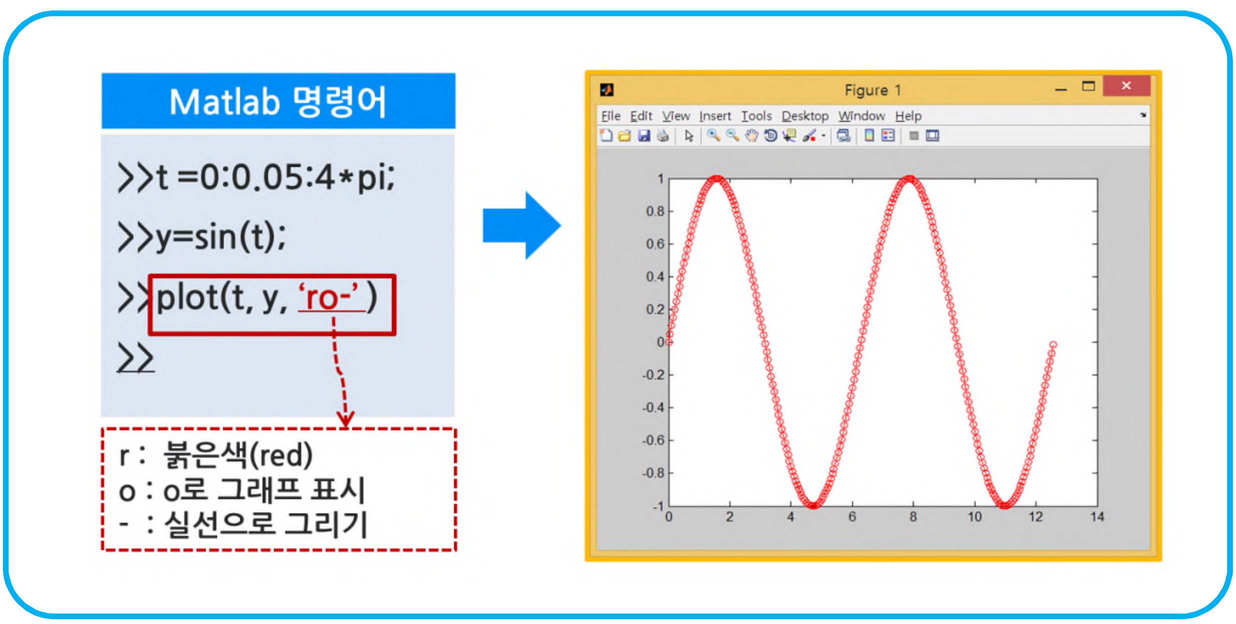
1. 그래프 명령어 plot

1) 정의

- plot(X,Y): 벡터 X에 대한 벡터 Y 값에 대응한 값을 선형 축을 사용하여 그래프로 출력하는 함수
- [예] plot(y), plot(x,y), plot(x,y,s),



2) 2차원 그래프 명령어



기본적인 그래프 명령어

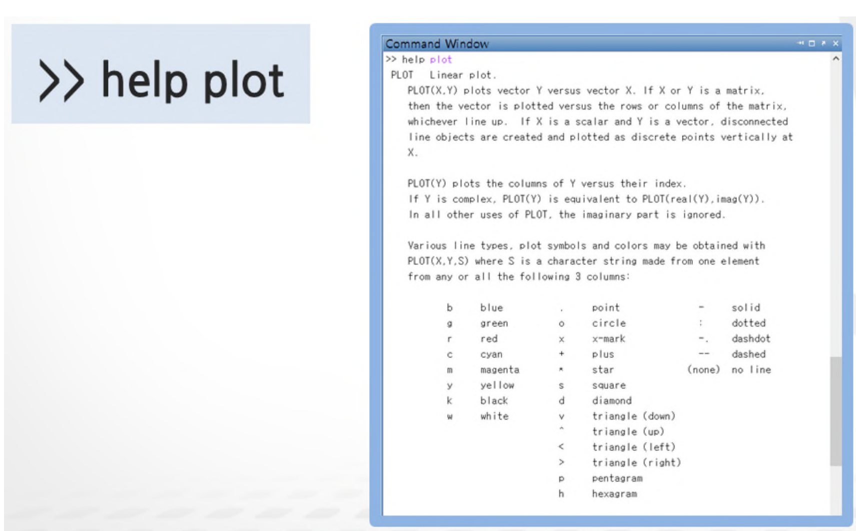
2. 그래프 선 종류/색상

1) 다양한 명령어

기호	선의 종류	기호	색상
.	점	y	노랑색(yellow)
o	원	m	자홍색(magenta)
x	x	c	하늘색(cyan)
+	덧셈	r	빨간색(red)
*	별표	g	녹색(green)
-	실선	b	파란색(blue)
:	점선	w	흰색(white)
-.	일점쇄선	k	검정색(black)
--	쇄선		

2) [참고] Help 명령어 이용 방법

- 명령어 창에서 help 명령어를 입력하면 MATLAB에 관한 도움말을 제공

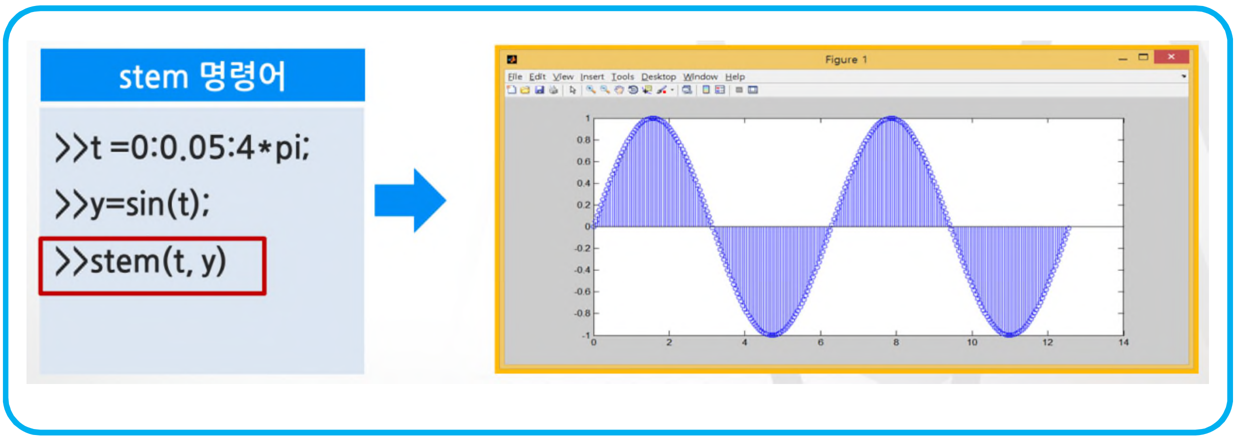


기본적인 그래프 명령어

3. 기타 그래프 명령어

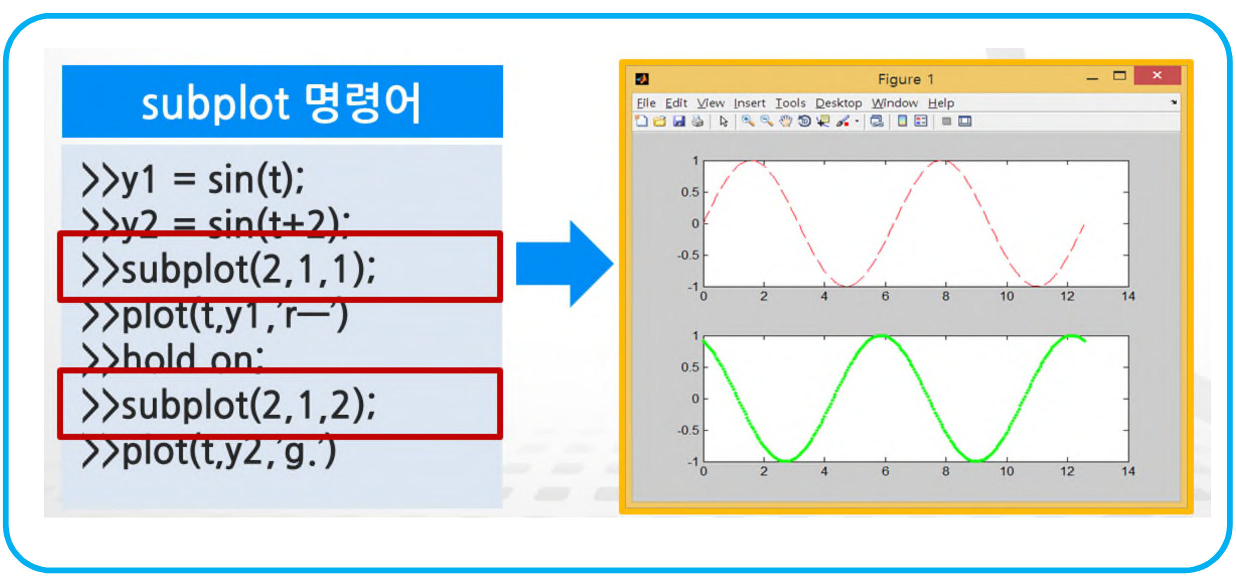
1) stem

- 이산적인 축을 사용하여 이산신호에 대한 그래프를 출력하는 그리기 명령어



2) subplot

- 부그래프를 그릴 수 있도록 하는 명령어
- 그림창 수를 m x n 행렬로 나누고, p번째 위치에 p번째 그림을 그릴 수 있도록 하는 명령어



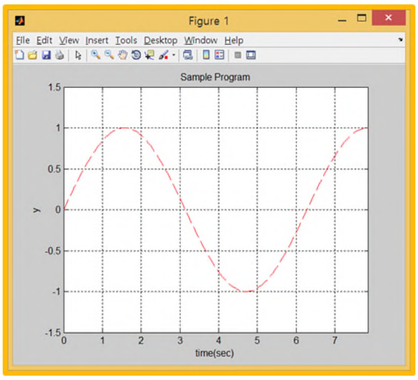
기본적인 그래프 명령어

3) axis, xlabel, ylabel, title, grid

기호	기능
axis	x축과 y축의 크기를 조정
xlabel	x축에 축의 이름을 추가
ylabel	y축에 축의 이름을 추가
grid	격자선을 그래프에 추가
title	그래프의 제목을 추가

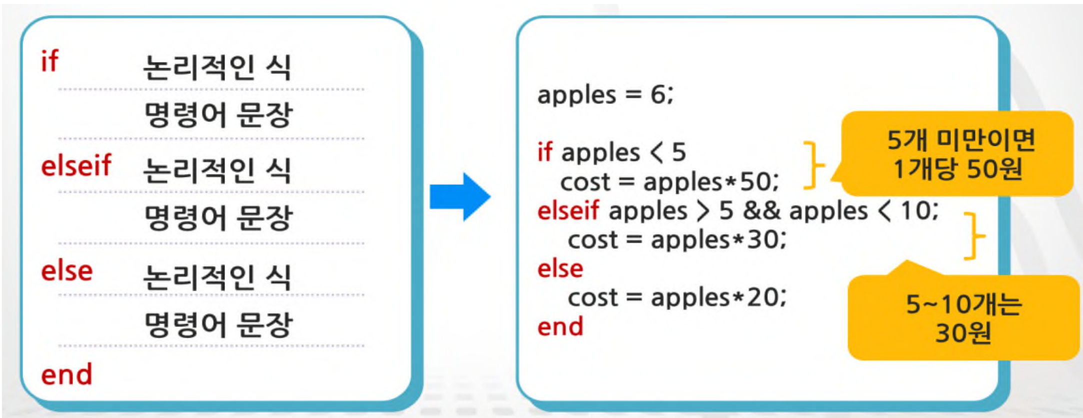
기타 명령어

```
>>t=0:0.05:4*pi;
>>y = sin(t);
>>plot(t,y,'r--');
>>axis([0 2.5*pi -1.5 1.5]);
>>xlabel('time(sec)');
>>ylabel('y');
>>title('Sample Program');
>>grid;
```



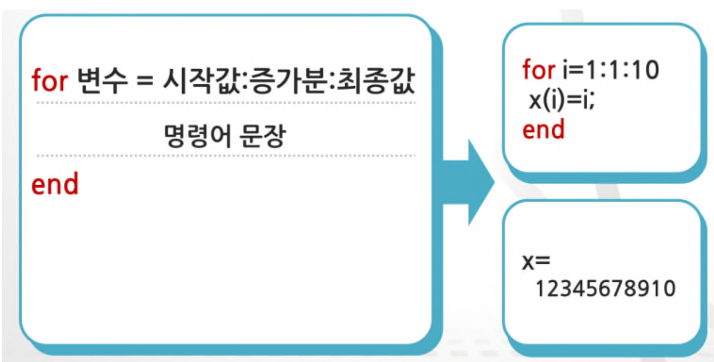
흐름 제어(Flow Control) 명령어

1. if, elseif, else, end 명령어



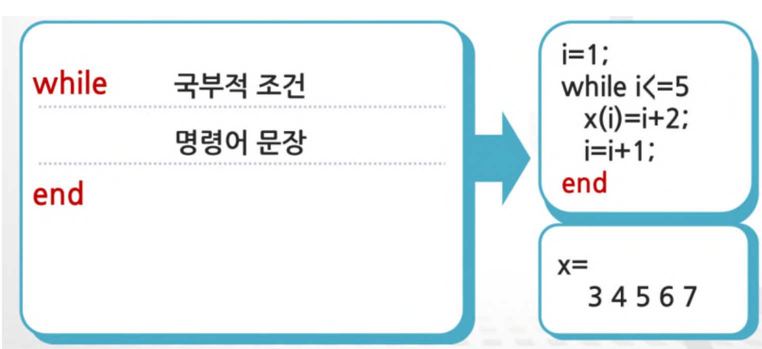
2. for 루프 명령어

- 명령어들이 고정, 미리 결정된 횟수 동안 반복



3. while 명령어

- 국부적인 조건에 따라 하나 이상의 문장들을 불확정적인 횟수만큼 반복



흐름 제어(Flow Control) 명령어

4. switch 명령어

- 변수나 표현에 의해서 임의의 실행문이 선택적으로 수행되는 명령어

```
switch expression(scalar or string)
case value1
case value2
otherwise
end
```

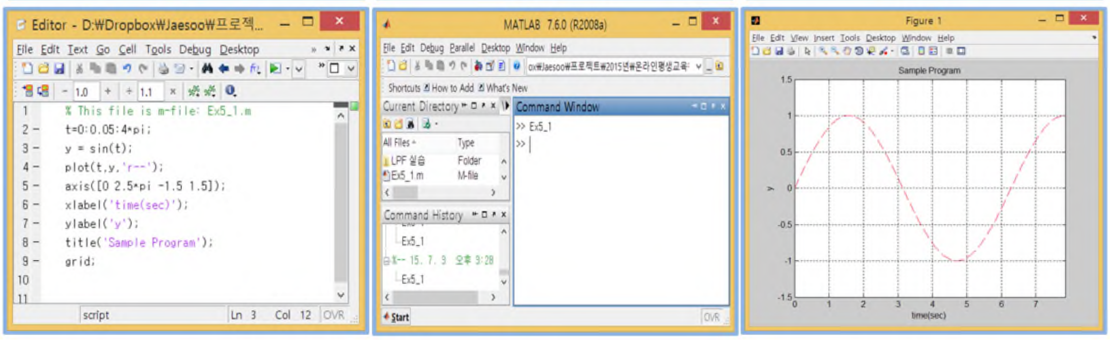
```
switch input_num
    case -1
        disp('negative one');
    case 0
        disp('zero');
    case 1
        disp('positive one');
    otherwise
        disp('other value');
    end
```

M-파일 프로그래밍

1. Script-mode

- 실행할 Matlab 명령어들을 입력한 전체 명령어들을 모아놓은 M-파일을 이용하는 프로그래밍 방법
- M-파일은 Matlab이 제공하는 Text Editor를 이용하여 작성
- 명령어창에서 M-파일을 부르거나, 다른 M-파일 내에서 M-파일을 호출해 M-파일 명령어들을 실행할 수 있음

편집 화면	명령어 화면	그림 화면



2. Function-mode

- 입력매개변수와 출력 매개변수를 다루는 함수 양식으로 프로그래밍하는 것
- M-파일의 함수 이름과 파일의 첫 번째 줄에 있는 함수의 이름은 동일해야 함
- 첫 번째 줄은 **함수 선언줄**이라고 하며, 파일에 있는 마지막 줄이 실행되거나 도중에 return문 실행 시 종료

예제 05-01

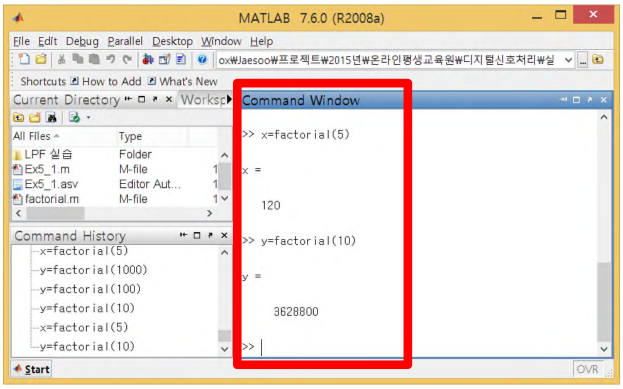
n!를 구하는 함수를 M-파일로 작성해보자.

[예제풀이]

- Function mode M-파일을 작성하려면, “function 출력 변수 = 함수 이름(입력 변수)”의 형태로 함수를 정의함

- 기 작성된 factorial.m을 실행하는 방법

명령창에서 M-파일 함수명 factorial을 사용 후 전달인자로 5(또는 10)를 사용하여 5!값을 계산해서 리턴



핵심정리

기본적인 그래프 함수 명령어

- 기본적인 2차원 그래프 명령어 : plot, stem, subplot, axis, xlabel, ylabel, title, grid 등
- help 명령어: 특별한 명령어의 사용법에 대한 도움말

흐름 제어 명령어

- if, elseif, else 명령어, for, while, switch 명령어

M-파일 프로그래밍

- Script-mode M-파일: 수행해야 할 Matlab 명령어들을 모아놓은 명령어 파일
- Function mode M-파일: 수행하고자 하는 임의의 모듈을 함수 형태로 표현하며 입력 매개변수와 출력 매개변수를 다루는 함수 양식으로 프로그래밍하는 것을 의미

디지털신호처리

강 의 노 트

Matlab 프로그래밍 실습

2주차 3차시

학습내용

- ❖ 행렬 연산
- ❖ 그래프 그리기
- ❖ M-파일 프로그래밍

학습목표

- ❖ Matlab을 이용해 행렬 연산을 수행할 수 있다.
- ❖ Matlab을 이용해 그래프 그리기를 수행할 수 있다.
- ❖ M-파일 프로그래밍을 수행할 수 있다.

행렬 연산

1. 행렬 연산 프로그래밍

실습과제 06-01

두 행렬 A, B에 대해 C와 D의 행렬 연산을 다음과 같이 계산하여 구해 보자.

*1.1 C = A.*B*   *1.2 D = A'*B*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

- Matlab을 실행한 후 명령창에서 행렬 A와 B를 먼저 입력한 후, 두 연산식을 계산기처럼 실행하면 두 행렬에 대한 연산 결과를 다음과 같이 얻을 수 있다.

Command Window

```
>> A=[1 2 3; 7 8 9];
>> B=[4 5 6; 3 2 1];
>> C = A.*B

C =

     4    10    18
    21    16     9

>> D = A'*B

D =

    25    19    13
    32    26    20
    39    33    27

>>
```

행렬 연산

2. 역행렬 구하기

실습과제 06-02

다음과 같은 행렬 A에 대한 역행렬을 계산해 보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

※ 정방행렬(Square Matrix)에 대한 역행렬을 계산하는 명령어는 'inv'이다.

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

- 명령어창에 계산하고자 하는 행렬을 입력하고, 역행렬 명령어 inv를 활용하여 계산한다.

Command Window

```
>> A=[1 3 5; 2 3 1 ; 3 1 4]

A =

     1     3     5
     2     3     1
     3     1     4

>> inv(A)

ans =

   -0.2821    0.1795    0.3077
    0.1282    0.2821   -0.2308
    0.1795   -0.2051    0.0769

>>
```

행렬 연산

3. 입력된 행렬값 내에서 특정원소 변경하기

실습과제 06-03

입력된 행렬원소에서 특정 원소의 값을 변경하는 실습을 수행해 보자.
다음과 같은 3x3 A 행렬에서 2행 2열의 원소 3을 100으로 변경해 보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 100 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

- Matlab의 행렬에서 이미 만들어진 임의의 행렬의 특정원소를 가리키는 인덱스 번호를 사용하면 행렬 안의 값을 바꾸거나 추가 할 수 있다.

Command Window

```
>> A

A =

     1     3     5
     2     3     1
     3     1     4

>> A(2,2)=100

A =

     1     3     5
     2   100     1
     3     1     4

>>
```

그래프 그리기

1. 정현파 그리기

실습과제 06-04

진폭이 2이고, 주파수가 3 Hz인 코사인파를 생성하고, 출력하는 프로그램을 작성하고, 그 파형을 그려보자.

$$y(t) = 2\cos(t)$$

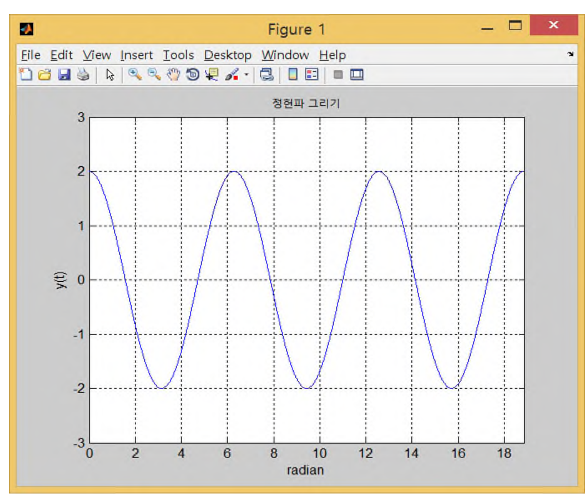
- x 축: $[0 \sim 6\pi]$
- y 축: [-3 ~ 3]
- X 축 레이블: ‘radian’, Y축 레이블: ‘y(t)’
- 전체 프로그램이름: “예제 4 정현파 그리기
- 그래프에 그리드(grid) 삽입

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

Command Window

```
>> t=0:0.01:6*pi;
>> y=2*cos(t);
>> plot(t,y);
>> axis([0 6*pi -3 3]);
>> xlabel('radian');
>> ylabel('y(t)');
>> title('정현파 그리기');
>> grid
>>
>>
```



그래프 그리기

2. 좀더 복잡한 정현파 그리기

실습과제 06-05

다음과 같은 수식에 대한 좀더 복잡한 정현파 그래프를 Matlab을 이용해 그려보자.

$$y(t) = 1.5\cos(\pi t) \cdot \sin(10\pi t)$$

- x축: 0 ~ 1 사이 값, 0.01 간격
- y축: -1.2 ~ 1.2
- y(t) 값을 plot

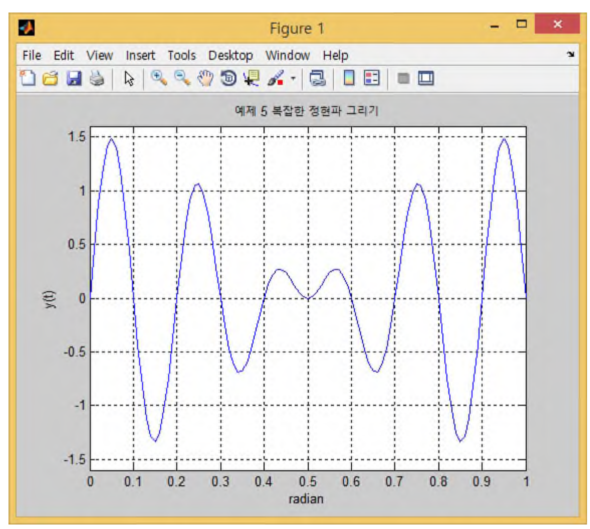
※ 참고, y(t)는 처음 Matlab 소개 시 언급한 정현파 식이다.

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

Command Window

```
>> t=0:0.01:1;
>> y=1.5*cos(pi*t).*sin(10*pi*t);
>> plot(t,y);
>> axis([0 1 -1.6 1.6]);
>> xlabel('radian');
>> ylabel('y(t)');
>> title('예제 5 복잡한 정현파 그리기');
>> grid
>>
```



그래프 그리기

3. 하나의 그림에서 다수의 신호 그리기

실습과제 06-06

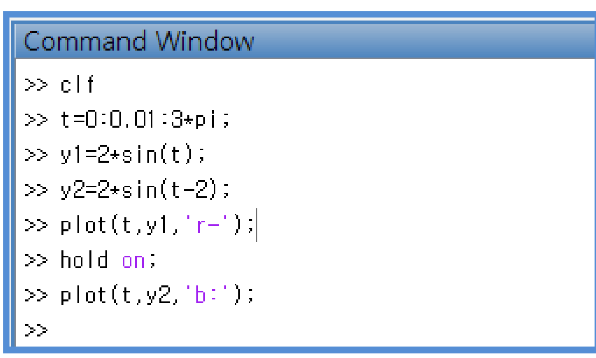
그림창 한 화면에 다음과 같은 두 개의 다른 신호를 함께 그리는 것을 실습해 보자.

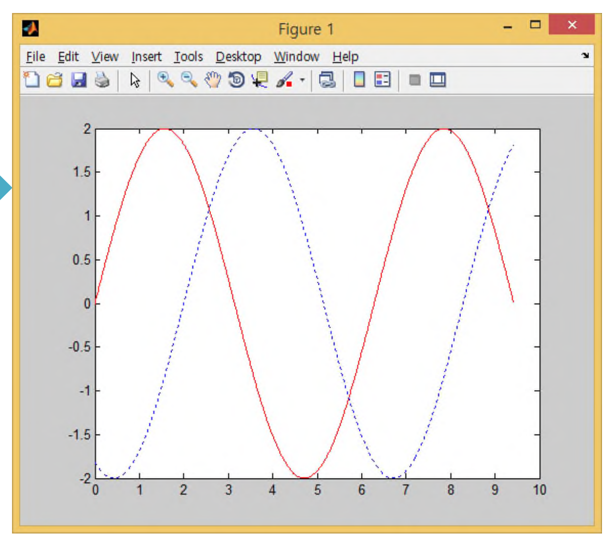
$$y_1(t) = 2\sin(t) \qquad y_2(t) = 2\sin(t-2)$$

- y1(t) 신호는 빨간색(red), 실선(-)으로 그리기
- y2(t) 신호는 파랑색(blue), 점선(:)으로 그리기

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]





그래프 그리기

4. 부그래프 그리기

실습과제 06-07

한 개의 그림 화면에 다수의 부그래프(Subplot)를 그리는 실습을 해 보자.
그린 두 개의 정현파 신호를 한 개의 그래프가 아닌 서로 다른 그래프에 그려보자

$$y_1(t) = 2\sin(t) \qquad y_2(t) = 2\sin(t-2)$$

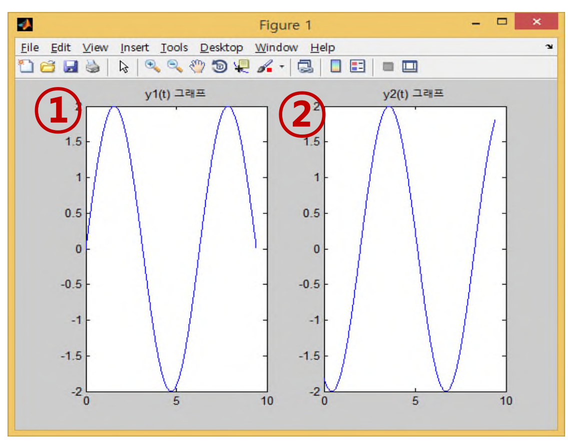
- 1행 2열의 부그래프 그리기
- 2행 1열의 부그래프 그리기

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

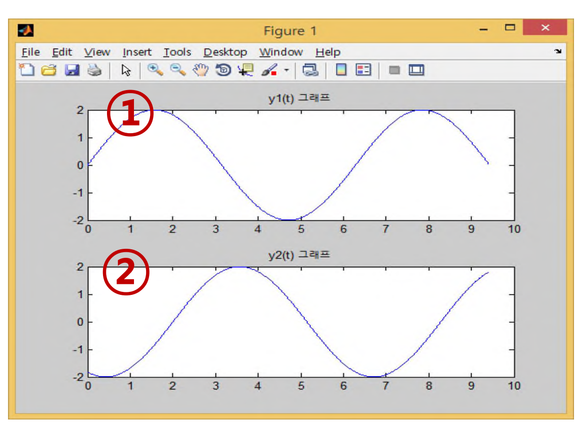
Command Window

```
>> clf
>> t=0:0.01:3*pi;
>> y1 = 2*sin(t);
>> y2 = 2*sin(t-2);
>> subplot(1,2,1);   ①
>> plot(t,y1);
>> title('y1(t) 그래프');
>> subplot(1,2,2);   ②
>> plot(t,y2);
>> title('y2(t) 그래프');
>>
```



Command Window

```
>> clf
>> t=0:0.01:3*pi;
>> y1 = 2*sin(t);
>> y2 = 2*sin(t-2);
>> subplot(2,1,1);   ①
>> plot(t,y1);
>> title('y1(t) 그래프');
>> subplot(2,1,2);   ②
>> plot(t,y2);
>> title('y2(t) 그래프');
>>
```



M-파일 프로그래밍

1. Script-mode M-파일 프로그래밍

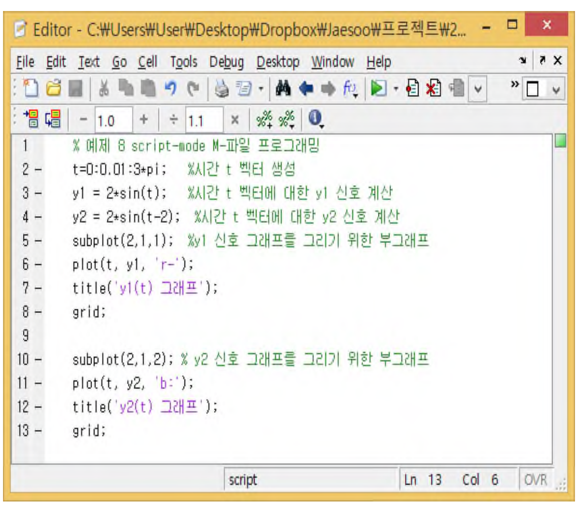
실습과제 06-08

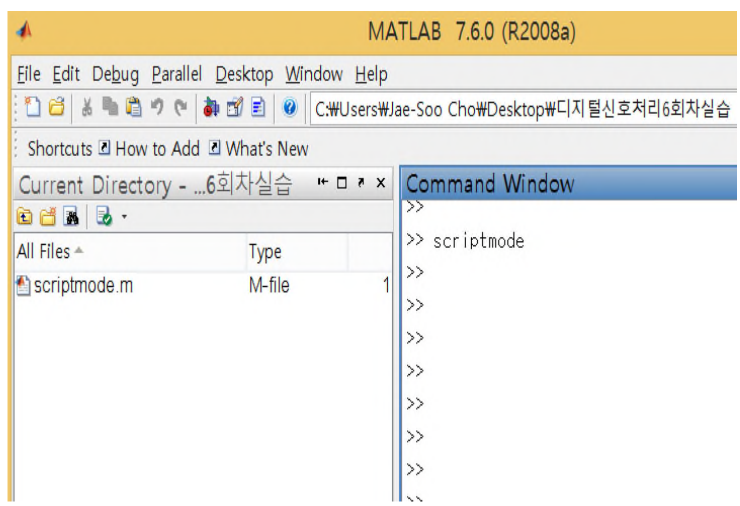
두 개의 정현파 신호를 한 개의 그래프가 아닌 서로 다른 그래프에 그려보는 프로그램을 Script-mode M-파일 프로그램을 작성하고, 임의의 파일명으로 저장한 후, 그 파일명으로 명령어 창에서 실행해 보자.

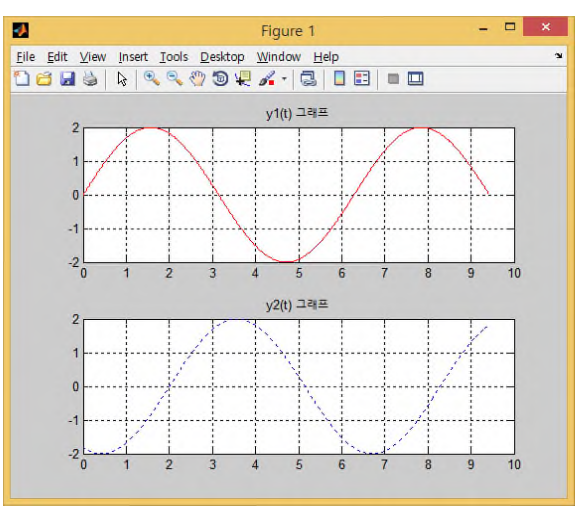
$$y_1(t) = 2\sin(t) \qquad y_2(t) = 2\sin(t-2)$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]







M-파일 프로그래밍

2. Function-mode M-파일 프로그래밍

실습과제 06-09

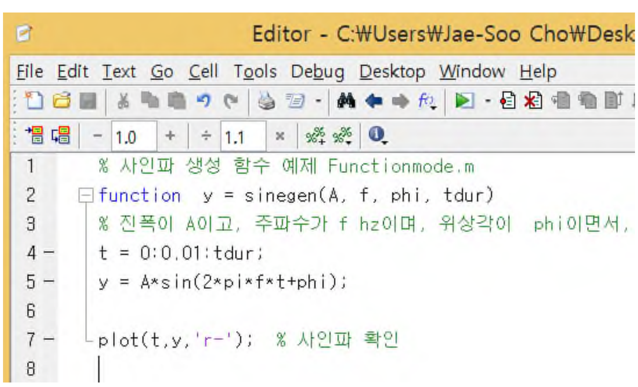
Function-mode M-파일 프로그래밍 기법을 이용하여 원하는 주파수의 정현파를 생성하여 출력하는 프로그램을 작성해 보자.

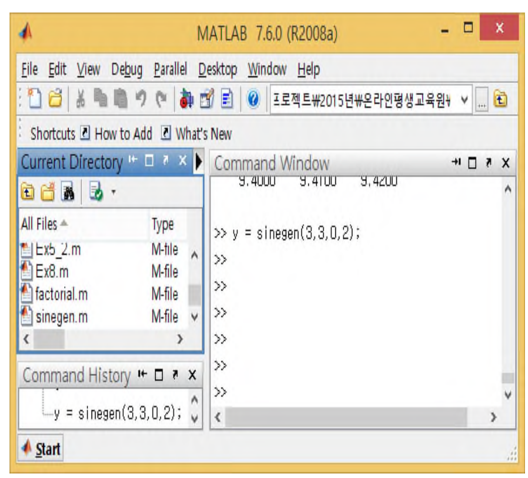
- M-파일명: “sinegen.m”
- function y = sinegen(A, f, phi, tdur)
- A=3, f=3 Hz, phi = 0, rad/sec, tdur = 2 sec

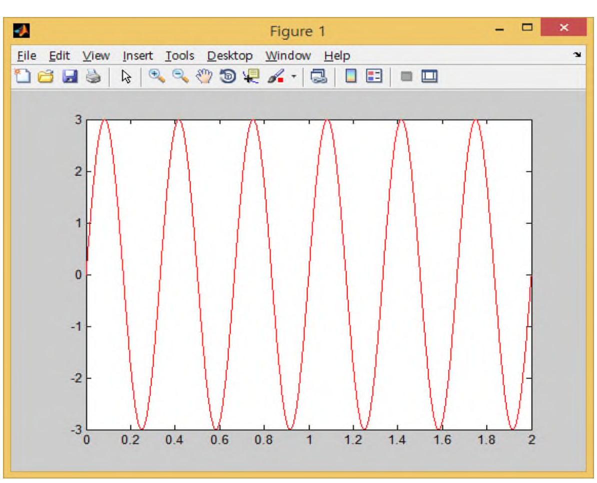
제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

- Matlab의 Editor 창을 이용하여 실행하고자 하는 Function -mode M-파일 프로그램을 작성하고, 파일명을 sinegen.m으로 저장한 후, Matlab의 명령창에서 원하는 매개변수를 전달하여 실행하면 된다.







M-파일 프로그래밍

[한걸음 더] Matlab으로 그래프 파형 그려보기

한걸음 더

다음 수식에 대한 그래프 파형을 매틀랩을 이용해 만들어보고 결과 화면과 비교해보세요. 소스코드의 빈 칸을알맞게 채워본 후 입력 완료 버튼을 누르세요.

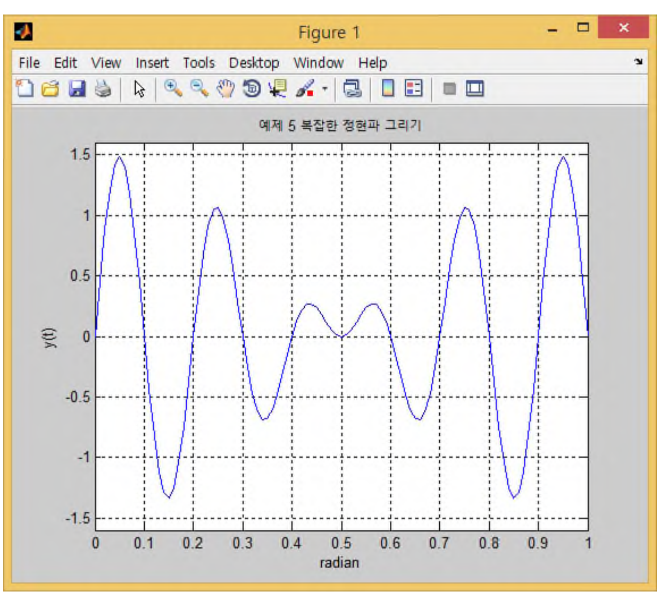
$$y(t) = 1.5\cos(\pi t)\sin(10\pi t)$$

```
t=0:01:1;
y=1.5*cos(pi.t).  sin(10*pi*t);
Plot(t,y);
Axis([0 1 -1.6 1.6]);
xlabel('radian');
ylabel('y(t)');
title
Grid
```

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

- *만 있는 경우는 매트릭스 행렬 곱셈이고, .*인 경우는 Element x Element 곱셈
- 화면의 수식은 Element x Element 곱셈이므로 .*를 입력해야 한다.



핵심정리

행렬 연산

- '*' 연산: 기본적인 두 행렬의 곱셈
  '.*' 연산: 두 행렬의 차원이 같을 때 각 행렬의 같은 위치에 있는 원소들끼리 곱셈을 하여 새로운 행렬을 구성
- 좌측 나눗셈: X = A₩B는 A*X = B의 해, X=A₩B 와 X=inv(A)*B 는 같은 연산
- 우측 나눗셈: X = A/B는 X*B = A의 해, X=A/B 와 X=A*inv(B)는 같은 연산
- 역행렬: A 행렬에 대한 역행렬을 B라고 할 때 명령어는 B=inv(A)임
- 행렬 값에서 특정원소 변경하기: A 행렬의 3행 3열 원소를 5로 변경하는 명령어는 A(3,3)=5임

그래프 그리기

- plot, stem, subplot, axis, xlabel, ylabel, title, grid 등을 활용하여 그래프를 그릴 수 있음

M-파일 프로그래밍

- Script-mode M-파일: 수행해야 할 Matlab 명령어들을 모아놓은 명령어 파일
- Function mode M-파일: 수행하고자 하는 임의의 모듈을 함수 형태로 표현하며 입력매개변수와 출력 매개변수를 다루는 함수 양식으로 프로그래밍하는 것을 의미

디지털신호처리

강 의 노 트

복소수와 복소지수 신호

3주차 1차시

학습내용

❖ 복소수 표현

❖ 복소수의 합

❖ 오일러 공식

❖ 복소지수 신호

학습목표

❖ 복소수를 직각좌표 형식과 극좌표 형식으로 표현할 수 있다.

❖ 복소수의 합을 계산할 수 있다.

❖ 오일러 공식을 이해하고, 활용할 수 있다.

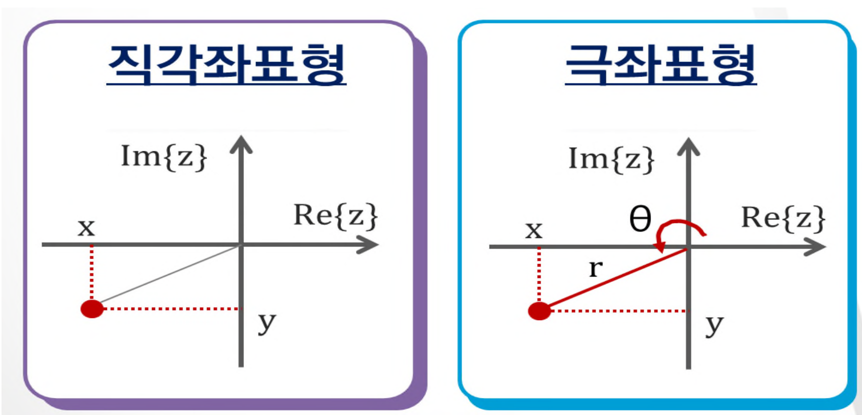
❖ 복소지수 신호의 개념을 이해하고, 복소지수 신호를 사용하는 이유를 설명할 수 있다.

복소수 표현

1. 복소수(Complex Number)

- '복합적이다' → 무엇과 무엇이 복합되어 있는 수
- 실수(Real)와 허수(Imaginary)가 복합되어 있는 수

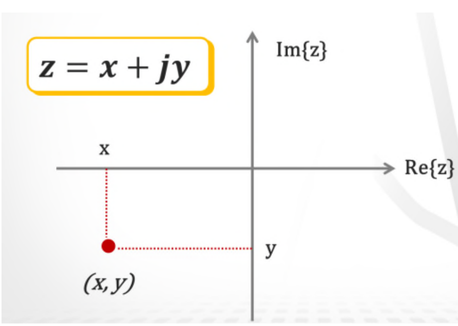
2. 복소수 표현 방법



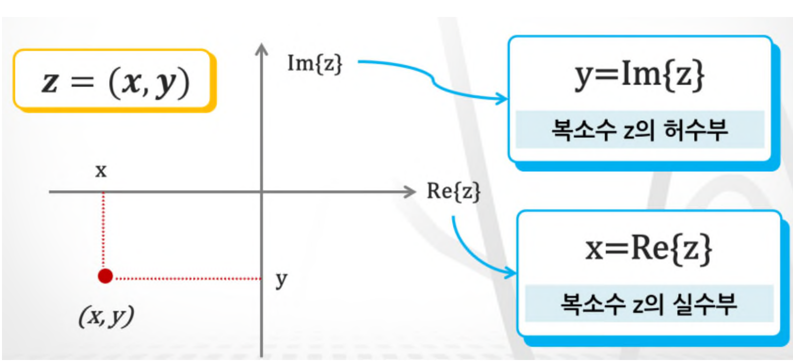
※ 전기전자 쪽에서는 일반적으로 $\sqrt{-1}$ 을 j로 표시함

3. 직각좌표형 복소수 표현

1) 직교 좌표계(Cartesian Coordinate)에서의 복소수 표시



2) 하나의 복소수 z는 실수의 순서쌍으로 표현됨



복소수 표현

[한걸음 더] 극좌표형과 직교좌표형 복소수 바꿔 표현해보기!

한걸음 더

다음에 제시된 복소수를 각각 극 좌표형과 직교좌표형으로 각각 바꾸어 표현해봅시다.

직교좌표형		극좌표현
$z = 0.5 + j0.5$	➡	?

전문가 해설을 통해 풀이를 확인해보세요.

[과제해설]

1) 직교좌표형으로 표현된 복소수를 극좌표형으로 변환하면?

- 복소수 z=(x, y)에 대한 극좌표형 $z = re^{j\theta}$으로의 변환식

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad and \quad \theta = \arctan(\frac{y}{x})$$

$$z = re^{j\theta}, \;\; r = \sqrt{(0.5^2 + 0.5^2)} = 0.707, \;\; \theta = \tan^{-1}(\frac{0.5}{0.5}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore z = 0.707e^{j\pi/4} \quad or \quad z = 0.707\angle\pi/4$$

2) (심화예제) 극좌표형으로 표현된 복소수에 대한 직교좌표형 변환하면?

- 복소수 z=(x,y)에 대한 직교좌표형 $z = re^{j\theta}$으로의 변환식

$$x = r\cos\theta \quad and \quad y = r\sin\theta$$

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$
$$= 5\cos(-2.5) + j5\sin(-2.5) = -4.006 - j2.992$$

$$\therefore z = (-4.006, -2.992)$$

복소수의 합

1. 복소수의 합

[예) Z1과 복소수 Z2를 합해 Z3로 만들 경우]

$z_1 = 4 - j3 \qquad z_2 = 2 + j5$

$z_3 = 6 + j2$

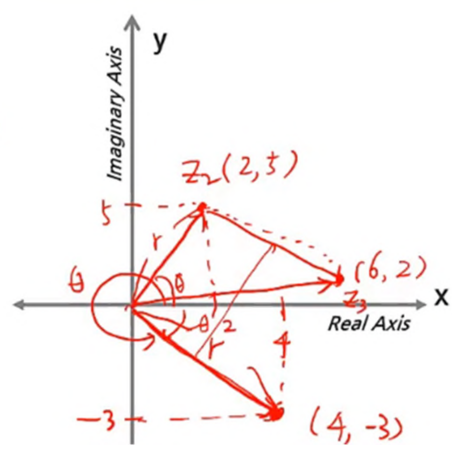
"실수부는 실수부끼리,
허수부는 허수부끼리 더하기"

2. 예제 풀이

$$z_1 = x_1 + jy_1, \quad z_2 = x_2 + jy_2$$

$$z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 + z_2 \\ &= (4 - j3) + (2 + j5) \\ &= (4 + 2) + j(-3 + 5) \\ &= 6 + j2 \end{aligned}$$



※ Imaginary Axis: 허수축, Real Axis: 실수축,
Displaced Version of z1: 벡터합을 위한 이동된 벡터 z1

오일러 공식

1. 좌표형 변환

1) 극좌표형 복소수 표현의 문제

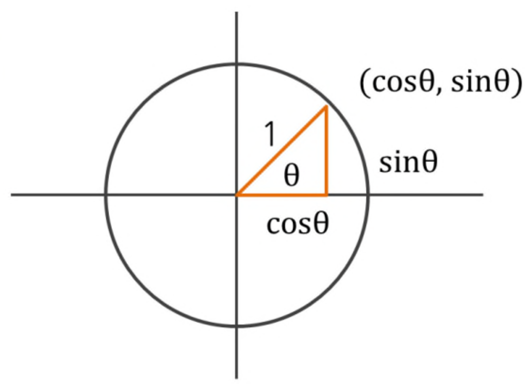
- $Z=r\angle\theta$이 다루기 힘들고 대수적 표현에도 적절하지 않음
- 복소지수의 오일러(Euler) 공식

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

2) 복소지수의 오일러 공식을 이용한 변환

복소지수의 오일러(Euler) 공식

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$



직각좌표 쌍인(cosθ, sinθ)로 반지름이 1인 원 위의 모든 점 표현할 수 있음

- 단위 원이 아닌 크기 r인 원 위의 모든 점의 표현

$$z = re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$$

- 복소지수의 극좌표계 표현은 복소수 곱셈과 나눗셈을 계산하는데 편리함
- 극좌표계 표현법은 복소지수 신호(Complex Exponential Signal)에 대한 중요한 기초가 됨

오일러 공식

2. 오일러 공식과 역오일러 공식

1) 오일러 공식에 대한 정리

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$$

2) 오일러 공식에서 θ=-θ를 대입해 도출

- 식1) $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$
- 식2) $re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

오일러 공식

[한걸음 더] 오일러 공식으로 복소수 변환하기

한걸음 더

극좌표형으로 표현된 복소수의 합을 계산한 후 오일러 공식을 활용해 직교좌표형식의 복소수로 변환해 보세요.

$$3e^{j(\pi/4)} + 4e^{-j(\pi/6)}$$

전문가 해설을 통해 풀이를 확인해보세요.

[과제해설]

- 오일러 공식을 이용해 직교좌표형식 복소수로 변환

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$3e^{j(\pi/4)} + 4e^{-j(\pi/6)} = 3(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}) + 4(\cos(-\frac{\pi}{6}) + j\sin(-\frac{\pi}{6}))$$

$$= 3(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}) + 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + j(-\frac{1}{2})) = 5.5854 + j0.1213$$

복소지수 신호

1. 복소지수 함수

1) 복소지수

- 어떤 수를 밑으로 하고, 지수가 복소수로 되어 있는 수

2) 복소지수 함수

- 지수가 복소수로 되어 있고, 그 복소수가 변수일 때에 얻어지는 값

3) 복소지수 함수가 복소지수 신호가 되는 경우

- 각도변수인 θ가 각속도 **ω**와 시간 t의 변수일 때

$$f(\theta) = re^{j\theta} = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)$$

$$\theta = \omega t$$

$$f(\theta) = f(\omega t) = re^{j\omega t} = r\cos(\omega t) + jr\sin(\omega t)$$

4) 개념과 정의

- 복소지수 함수로 표현되는 복소지수 신호 z(t)의 실수부는 실수 코사인 신호이고, 허수부는 실수 사인 신호임

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}$$

5) 복소지수 신호의 크기와 각도

- 크기 $|z(t)| = A$
- 각도 $\arg\ z(t) = (\omega_0 t + \phi)$

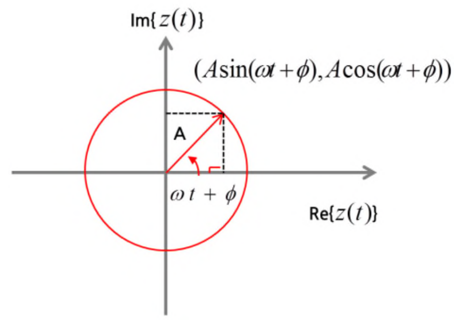
복소지수 신호

2. 복소지수 신호

1) 복소지수 신호에 대한 직교좌표계 표현

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\phi)} = A\cos(\omega_0 t+\phi) + jA\sin(\omega_0 t+\phi)$$

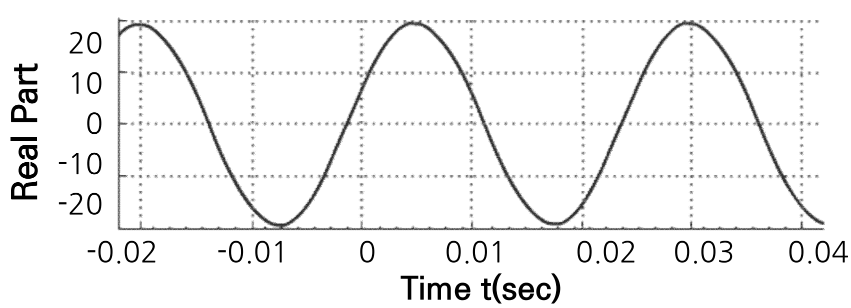
- t에 대한 복소수 함수로 복소평면에서 크기가 A인 길이의 벡터가 ω의 각속도로 반시계 방향으로 회전하는 경우에 대한 신호

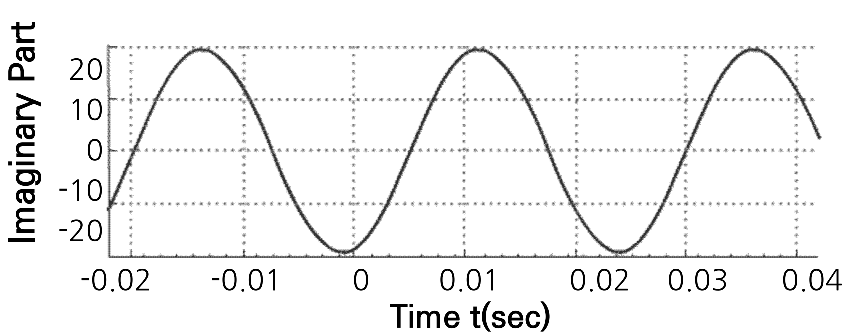


2) 복소지수 신호의 실수부와 허수부

- 시간의 함수인 복소지수 신호의 실수부와 허수부는 모두 실수 정현파 신호
- 위상이 π/2 만큼 차이가 있음
- 복소지수 신호의 예

$$z(t) = 20e^{j(80\pi t-0.4\pi)}$$
$$= 20\cos(80\pi t-0.4\pi) + j20\sin(80\pi t-0.4\pi)$$





복소지수 신호

2) 복소지수 신호의 실수부와 허수부

- 실수부만 취하면 코사인 신호, 허수부만 취하면 사인 신호가 됨

$$x(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\} = \mathrm{Re}\{Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}\} = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$y(t) = \mathrm{Img}\{z(t)\} = \mathrm{Img}\{Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}\} = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

※ 여기서 Re{..} 연산의 의미는 실수부만 선택하는 연산이고, Im{..}은 허수부만 취하는 연산임

- 예시

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\{(-3j)e^{j\omega t}\} \\ &= \mathrm{Re}\{3e^{-j0.5\pi}e^{j\omega t}\} \\ &= \mathrm{Re}\{3e^{j(\omega t-0.5\pi)}\} \\ &= 3\cos(\omega t - 0.5\pi) \end{aligned}$$

3) 복소지수 신호를 사용하는 이유

- 정현파신호를 표현하는 또 하나의 방법
- 많은 계산이 훨씬 간편
  → 모든 삼각함수 계산이 복소지수의 산술적인 연산으로 가능
- 정현파 신호를 분석하고 취급하는데, 복소지수 신호를 이용하면 더욱 간단함

복소수 표현

[한걸음 더] 복소지수 신호 구하기

한걸음 더

복소지수 신호 $z(t) = 5e^{j\pi/3}e^{j10\pi t}$ 에 대해 허수부와 실수부 신호를 구하면?

허수부 신호	$s(t) = \mathrm{Im}\{z(t)\}$
실수부 신호	$r(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\}$

전문가 해설을 통해 풀이를 확인해보세요.

[과제해설]

1) 복소지수 신호의 허수부 신호 $s(t) = Im\{z(t)\}$

$$s(t) = Im\{z(t)\} = Im\{5e^{j\pi/3}e^{j10\pi t}\}$$

$$= 5Im\{e^{j(10\pi t+\pi/3)}\} = 5Im\{cos(10\pi t + \pi/3) + jsin(10\pi t + \pi/3)\}$$

$$= 5sin(10\pi t + \pi/3)$$

2) 복소지수 신호의 실수부 신호 $r(t) = Re\{z(t)\}$

$$r(t) = Re\{z(t)\} = Re\{5e^{j\pi/3}e^{j10\pi t}\}$$

$$= 5Re\{e^{j(10\pi t+\pi/3)}\} = 5Re\{cos(10\pi t + \pi/3) + jsin(10\pi t + \pi/3)\}$$

$$= 5cos(10\pi t + \pi/3)$$

핵심정리

복소수 표현

- 복소수는 실수와 허수의 조합으로 이루어진 수이며, 직교좌표계와 극좌표계 두 형식으로 표현할 수 있음

$$z = x + jy \quad or \quad z = re^{j\theta}$$

오일러 공식

- 복소지수 함수를 직교좌표형식의 복소수로 변환하는 오일러 공식은 다음과 같음

$$re^{j\theta} = r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)$$

복소지수 신호

- 복소지수 함수로 표현되는 복소지수 신호의 실수부는 실수 코사인 신호이고, 허수부는 실수 사인 신호임

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = A\cos(\omega_0 t + \phi) + jA\sin(\omega_0 t + \phi)$$

- 복소지수 신호는 정현파 신호(실수 코사인 신호 또는 사인신호)를 표현하는 또 하나의 방법임

복소지수 신호의 특징

3주차 2차시

학습내용

❖ 복소진폭(페이저)

❖ 복소지수 신호의 특징

❖ 페이저 합 규칙

학습목표

❖ 복소진폭의 의미를 이해하고, 그 의미를 설명할 수 있다.

❖ 복소지수 신호의 특징을 이해하고, 활용할 수 있다.

❖ 페이저 합 규칙을 이해하고, 응용할 수 있다.

복소진폭(페이저)

1. 복소수의 곱

1) '두 개의 복소수의 곱셈에 대해 두 수를 극좌표 형식으로 표현하면?

- 두 복소수의 곱셈은 크기끼리는 곱하고, 지수함수의 특징에 의하여 위상은 더하면 된다는 것을 알 수 있음

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_3 e^{j\theta_3} = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$r_3 = r_1 r_2 \qquad \theta_3 = \theta_1 + \theta_2$$

예제 08-01

두 복소수에 대한 곱셈을 극좌표 형식으로 변환한 후, 곱셈을 수행하고 그 결과를 직각좌표계로 나타내어라. 그리고 두 복소수의 곱셈을 직각좌표계로 계산한 결과와 일치하는지를 확인해 보자.

$$z_1 = 1 + j2 = \sqrt{5} e^{j1.1071} \qquad z_2 = 2 + j = \sqrt{5} e^{j0.4636}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_3 e^{j\theta_3} = ?$$

[예제풀이]

- 곱셈을 극좌표 형식으로 변환한 후, 곱셈을 수행하고 그 결과를 직각좌표계로 나타내기

$$z_1 = 1 + j2 = \sqrt{5} e^{j1.1071} \qquad z_2 = 2 + j = \sqrt{5} e^{j0.4636}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_3 e^{j\theta_3} = \sqrt{5} e^{j1.1071} \times \sqrt{5} e^{j0.4636} = 5 e^{j1.5708} = j5$$

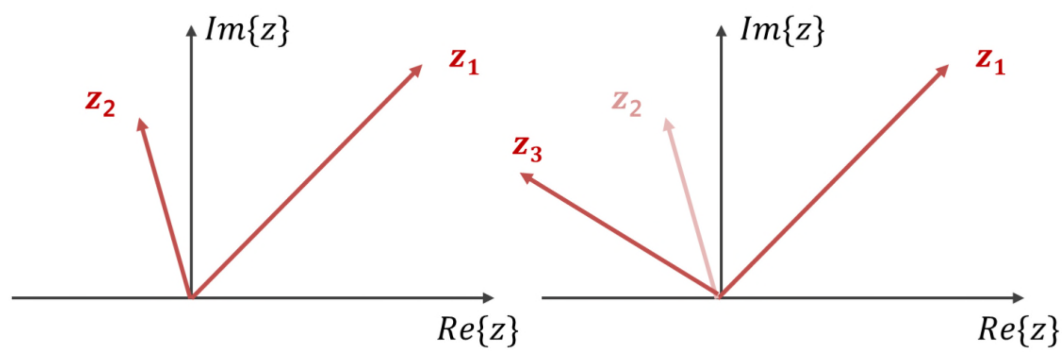
- 직교좌표형식으로의 복소수 곱셈

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (1 + j2) \cdot (2 + j) = j5$$

복소진폭(페이저)

2) 두 복소수의 곱셈 과정을 복소평면의 벡터로 설명하기

- 첫 벡터의 길이에 두 번째 벡터의 길이를 곱하고, 첫 벡터를 두 번째 벡터의 각도만큼 더 회전시키면?
  → 최종적인 두 복소수의 곱 벡터가 됨



$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_3 e^{j\theta_3} = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z_3 = r_3 e^{j\theta_3} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

$$r_3 = r_1 r_2 \qquad \theta_3 = \theta_1 + \theta_2$$

복소진폭(페이저)

2. 복소진폭이란?

1) 복소진폭(페이저, Phasor)

- 두 복소수의 곱셈을 기하학적 관점에서 다시 살펴보면, 복소지수 함수를 시간에 따라 회전하는 복소수 벡터로 설명할 수 있음
- 복소수 X = $Ae^{j\phi}$를 복소지수 함수 $z(t)$에 적용하여 표현하면?

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} = Xe^{j\omega_0 t}$$

→ $z(t)$는 복소수 X와 복소수 함수 $e^{j\omega_0 t}$의 곱으로 표현됨

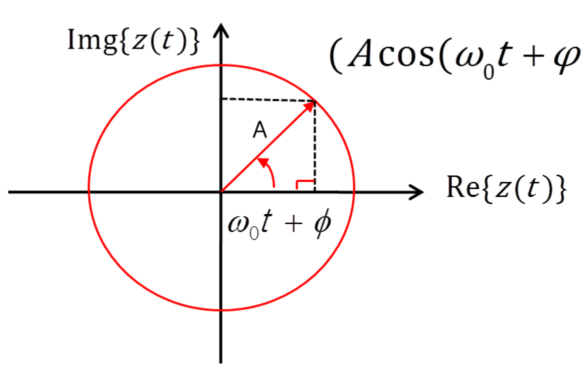
2) 복소수 진폭(Complex Amplitude)

- X = $Ae^{j\phi}$ 는 복소지수 신호의 실수 진폭과 신호의 위상변위로 구성됨
- 복소지수 신호의 복소수 진폭을 다른 표현으로 페이저(Phasor)라고 함

3. 양의 주파수와 음의 주파수

1) 복소평면에서 복소지수 신호의 개념

- 복소평면에서 시간 t에 대한 복소수 함수로 크기 A인 길이의 벡터가 초기각도 ϕ의 위치에서 ω_0의 각속도를 가지고 반시계 방향으로 회전하는 경우에 대한 신호를 의미



$$(A\cos(\omega_0 t + \varphi), A\sin(\omega_0 t + \varphi))$$

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} = Ae^{j\theta(t)}$$

$$\theta(t) = \omega_0 t + \varphi$$

복소진폭(페이저)

2) 회전 페이저(Rotating Phasor)

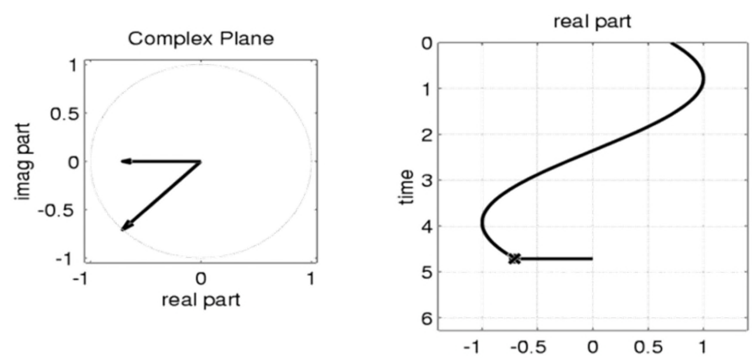
- 복소지수 신호 $z(t)$는 복소평면에서 페이저 $\mathbf{X}$에 $e^{j\omega_0 t}$를 곱하면
  → 고정되었던 페이저 X가 회전하게 되어, 복소지수 신호를 회전 페이저라고 할 수 있음
- 주파수 ω_0가 양수이면 반시계 방향으로 회전하고, 음수이면 시계 방향으로 회전
- 양의 주파수(ω_0): 페이저가 반시계 방향으로 회전하는 신호
- 음의 주파수(-ω_0): 페이저가 시계 방향으로 회전하는 신호
- 회전 페이저(복소지수 신호)인 $\theta(t)$의 주기 = 2π 라디안

복소지수 신호의 특징

1. 복소수의 합

- 회전 페이저와 코사인 파형과의 관계를 보여줌
- 시간 **t**가 증가함에 따라, 회전 페이저 **$z(t)$**는 반시계방향으로 회전
- 실수부 **$x(t)$** 는 실수축을 따라 왼쪽, 오른쪽으로 진동하는 코사인 신호가 됨

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$



예제 08-02

다음 신호를 복소지수 신호로 표현하고, 페이저(또는 복소진폭)를 계산해 보자.

$$x(t) = 3\cos(20\pi t - \pi/4)$$

[예제풀이]

$$x(t) = 3\cos(20\pi t - \pi/4)$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\} = \mathrm{Re}\{Xe^{j\omega_0 t}\} = 3\cos(20\pi t - \pi/4)$$

$$X = Ae^{j\phi} \quad A = 3, \quad \phi = -\pi/4, \quad \omega_0 = 20\pi$$

$$\therefore\ z(t) = Xe^{j\omega_0 t} = 3e^{j(-\pi/4)}e^{j20\pi t}$$

페이저(또는 복소진폭) :

$$X = 3e^{j(-\pi/4)} = 3(\cos(-\pi/4) + j\sin(-\pi/4))$$
$$= 3(1/\sqrt{2} + j(-1/\sqrt{2})) = 2.1213 - j2.1213$$

복소지수 신호의 특징

2. 복소지수 신호를 이용한 정현파 표현

1) 역오일러 공식의 의미

- 역오일러 공식은 정현파 신호는 양과 음의 주파수를 가진 복소지수 신호로 표현할 수 있다는 것을 나타냄

$$\cos(\theta)=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \Rightarrow \cos(\omega t+\varphi)=\frac{e^{j(\omega t+\varphi)}+e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}$$

$$A\cos(\omega t+\varphi)=\frac{Ae^{j(\omega t+\varphi)}+Ae^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}=\frac{1}{2}Xe^{j\omega t}+\frac{1}{2}X^{*}e^{-j\omega t}=\frac{1}{2}z(t)+\frac{1}{2}z^{*}(t)=\mathrm{Re}\{z(t)\}$$

※ 여기서 $X=Ae^{j\phi}$ 이고, $*$ 는 공액 복소수를 의미한다.

- 주파수가 ω인 코사인 신호는 두 개의 복소지수 신호로 이루어짐
  → 하나는 양의 주파수(ω)를 가지고, 또 하나는 음의 주파수($-\omega$)를 가짐
- 양의 주파수를 가지는 복소지수 함수의 복소수 진폭은 $\frac{1}{2}X=\frac{1}{2}Ae^{j\emptyset}$ 이고,
- 음의 주파수를 가지는 복소지수 함수의 복소수 진폭은 $\frac{1}{2}X^{*}=\frac{1}{2}Ae^{-j\emptyset}$ 임
  → 결론적으로 실수 코사인 신호는 서로 공액 관계를 가지는 두 개의 복소 회전 페이저의 합으로 표현됨

예제 08-03

실수 사인(sine) 신호도 다음과 같이 복소지수 신호로 표현할 수 있다. 그 과정을 유도해 보자.

$$\sin(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}Xe^{-j\pi/2}e^{j\omega t}+\frac{1}{2}X^{*}e^{j\pi/2}e^{-j\omega t}$$

※ $X=Ae^{j\varphi}$, $X^{*}=Ae^{-j\varphi}$
이 경우, 사인 신호도 양과 음의 주파수를 가진 두 복소지수 신호의 합으로 표현될 수 있음

[예제풀이]

$$\sin(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}Xe^{-j\pi/2}e^{j\omega t}+\frac{1}{2}X^{*}e^{j\pi/2}e^{-j\omega t}$$

$$\sin(\theta)=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \Rightarrow A\sin(\omega t+\varphi)=\frac{Ae^{j(\omega t+\varphi)}-Ae^{-j(\omega t+\varphi)}}{2j}$$

$$A\sin(\omega t+\varphi)=\frac{Ae^{j(\omega t+\varphi)}-Ae^{-j(\omega t+\varphi)}}{2j}=\frac{1}{2}Ae^{j\varphi}e^{-j\pi/2}e^{j\omega t}+\frac{1}{2}Ae^{-j\varphi}e^{j\pi/2}e^{-j\omega t}$$

$$=\frac{1}{2}Xe^{-j\pi/2}e^{j\omega t}+\frac{1}{2}X^{*}e^{j\pi/2}e^{-j\omega t}$$

$$X=Ae^{j\varphi} \qquad X^{*}=Ae^{-j\varphi}$$

복소지수 신호의 특징

3. 복소지수 신호를 사용하는 이유

- 복소지수 신호 = 정현파 신호 표현을 위한 또 다른 방법
- 복소지수 신호를 이용해 많은 계산을 간편하게 할 수 있음
  → 모든 삼각함수 계산이 복소지수의 산술적인 연산으로 가능함
- 정현파 신호를 간단하게 분석하고 취급할 수 있음

페이저 합 규칙

1. 복소지수 신호의 장점

1) 많은 계산을 간편하게 할 수 있음

- 정현파 신호(실수 코사인 신호 또는 사인신호)를 표현하는 또 하나의 방법으로 복소지수의 특징을 이용하면 많은 계산이 간편해짐
- 두 개의 복소수의 곱셈을 위해 두 수를 극좌표형식으로 표현하고, 복소지수를 결합하는 지수법칙을 이용하면, 복소수의 곱셈을 쉽게 계산할 수 있음

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

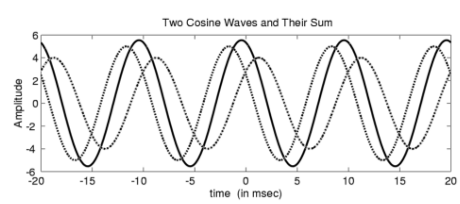
$$z_3 = z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} \times r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

2) 주파수가 같은 두 코사인 신호의 합

- 복소지수 신호를 이용하면 쉽게 하나의 주파수로 표현되는 진폭 A와 위상 ∅를 계산할 수 있음

$$x_1(t) = \cos(77\pi t), \quad x_2(t) = \sqrt{3}\cos(77\pi t + 0.5\pi)$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(77\pi t + \phi)$$



- 주파수가 같은 두 코사인 신호의 합은 다음과 같이 하나의 같은 주파수의 코사인 신호로 표현할 수 있고, 그 결과는 다음과 같음

$$x_1(t) = 1.7\cos(4\pi t + 70\pi/180), \quad x_2(t) = 1.9\cos(4\pi t + 200\pi/180)$$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(4\pi t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \; x_3(t) = A\cos(4\pi t + \varphi) = 1.532\cos(4\pi t + 141.79/180)$$

- A와 ∅위상을 계산하는 방법?
→ 복소지수 신호의 **페이저 합 규칙 이용**

페이저 합 규칙

2. 주파수가 같은 정현파들의 합

1) 주파수가 같은 여러 정현파의 합을 구하는 경우

- [예] 전기 회로에 같은 주파수의 소스 전원을 부하에 인가할 경우 여러 소스 전원의 정현파 합을 구할 필요가 있음
- 진폭과 위상변이는 다르지만 주파수가 같은 N개의 정현파(코사인) 신호를 합하면, 같은 주파수를 가지는 하나의 코사인 신호가 됨

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- 같은 주파수를 가진 정현파의 합은 페이저 합 규칙을 이용하여 간단하게 계산할 수 있음

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \Phi_k) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Re}\{A_k e^{j(\omega_0 t + \Phi_k)}\}$$

어떤 정현파도 복소지수 함수의 실수부를 취하는 연산으로 표현

$$= \mathrm{Re}\{\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j(\omega_0 t + \Phi_k)} e^{j\omega_0 t}\}$$

실수부를 취하는 연산과 합을 하는 연산의 순서를 바꾸어도 등식에 영향이 없음

$$= \mathrm{Re}\{(\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\omega_0 t}) e^{j\omega_0 t}\}$$

합연산 K의 함수가 아니므로 합연산 밖으로 처리 가능함

$$= \mathrm{Re}\{(A e^{j\Phi}) e^{j\omega_0 t}\} = A\cos(\omega_0 t + \Phi)$$

$$\sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\Phi_k} = A e^{j\Phi}$$

2) 임의의 코사인 신호 x(t)의 복소지수 신호 z(t)로 표현하면?

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\{Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{Xe^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{z(t)\}$$

- 복소지수 신호로 변환된 코사인 신호에서 복소진폭,즉 페이저 X는 다음과 같이 계산할 수 있음

$$X = Ae^{j\varphi}$$

- 복소진폭, 즉 페이저는 정현파의 진폭 A와 위상각 ∅에 의해 결정됨

페이저 합 규칙

2. 주파수가 같은 정현파들의 합

예제 08-04

다음 코사인 신호를 먼저 복소지수 신호로 표현하고, 복소진폭(페이저)를 계산해 보자.

$$x(t)=\sqrt{3}\cos(77\pi t+0.5\pi)$$

[예제풀이]

- 다음 코사인 신호에 대한 복소지수 신호는?

$$x(t)=\sqrt{3}\cos(77\pi t+0.5\pi)=\mathrm{Re}\{\sqrt{3}e^{j(77\pi t+0.5\pi)}\}=\mathrm{Re}\{\sqrt{3}e^{0.5\pi}e^{j77\pi t}\}$$

- 복소진폭(페이저) X는? $X=Ae^{j\varphi}=\sqrt{3}e^{j0.5\pi}$

예제 08-05

다음 두 코사인 신호의 합을 페이저 합 규칙을 이용하여 계산해 보자.

$$x_1(t)=\cos(77\pi t)$$
$$x_2(t)=\sqrt{3}\cos(77\pi t+0.5\pi)$$
$$x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)=A\cos(77\pi t+\varphi)$$

[예제풀이]

$$x_1(t)=\cos(77\pi t),\quad x_2(t)=\sqrt{3}\cos(77\pi t+0.5\pi)$$

$$x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)=A\cos(77\pi t+\phi)\qquad \sum_{k=1}^{N}A_k e^{j\phi_k}=Ae^{j\phi}$$

$x_1(t)=\mathrm{Re}\{A_1e^{j\phi_1}e^{j\omega_o t}\}=\mathrm{Re}\{1e^{j0}e^{j77\pi}\}$ ➡ $x_1(t)$의 페이저 $X_1=1e^{j0}$

$x_2(t)=\mathrm{Re}\{A_2e^{j\phi_2}e^{j\omega_o t}\}=\mathrm{Re}\{\sqrt{3}e^{j0.5\pi}e^{j77\pi}\}$ ➡ $x_2(t)$의 페이저 $X_2=\sqrt{3}e^{j0.5\pi}$

$$\sum_{k=1}^{k=2}A_k e^{j\varphi_k}=1e^{j0}+\sqrt{3}e^{j0.5\pi}$$
$$=1+j\sqrt{3}=2e^{j\pi/3}=Ae^{j\varphi}$$ ➡ $A=2,\ \phi=\frac{\pi}{3}$

$$\therefore x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)=A\cos(77\pi t+\phi)=2\cos(77\pi t+\frac{\pi}{3})$$

페이저 합 규칙

3. 페이저 합 규칙

- 1단계) 각 정현파 신호의 페이저 $X_k = A_k e^{j\Phi_k}$ 를 계산한다.
- 2단계) 각 신호의 페이저를 합하여 $X = X_1 + X_2 + ... = Ae^{j\Phi}$ 를 얻는다.
- 3딘계) 그 결과 X에 $e^{j\omega_o t}$ 를 곱하여 $z(t) = Ae^{j\Phi}e^{j\omega_o t}$ 를 얻는다.
- 4단계) 최종적으로 복소지수 신호 z(t)의 실수부만 취한다.

$$x(t) = \mathrm{Re}\{Ae^{j\Phi}e^{j\omega_o t}\} = A\cos(\omega_o t + \Phi) = x_1(t) + x_2(t) + ...$$

페이저 합 규칙

[한걸음 더] 페이저 합 규칙 예제 풀이

한걸음 더

다음 두 코사인 신호의 합을 계산하세요. $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = ?$

$$x_1(t) = 1.7\cos(20\pi t + 70\pi/180)$$
$$x_2(t) = 1.9\cos(20\pi t + 200\pi/180)$$

전문가 해설을 통해 풀이를 확인해보세요.

[과제해설]

- 1단계

$$X_1 = 1.7e^{j(70\pi/180)} \qquad X_2 = 1.9e^{j(200\pi/180)}$$

- 2단계

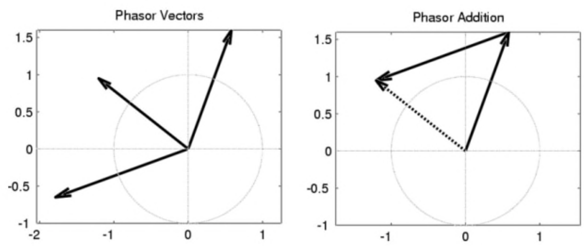
$$X_1 = 1.7e^{j(70\pi/180)} = 0.5814 + j1.597 \quad X_2 = 1.9e^{j(200\pi/180)} = -1.785 - j0.6498$$

- 3단계

$$X_3 = X_1 + X_2 = (0.5814 + (-1.785)) + j(1.597 + (-0.6498)) = -1.204 + j0.9476$$
$$= 1.532e^{j141.79\pi/180}$$

- 4단계

$$X_3 = -1.204 + j0.9476 = 1.532e^{j141.79\pi/180}$$



$$\therefore x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = 1.532\cos(20\pi t + 141.79\pi/180)$$

핵심정리

복소진폭(페이저)의 개념

- 복소진폭(X)는 복소지수 신호(z(t)의 실수 진폭과 신호의 위상변위(Φ)로 구성됨

$$z(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} = Xe^{j\omega_0 t} \qquad X = Ae^{j\varphi}$$

복소지수 신호의 특징

- 정현파는 복소지수 함수를 이용하여 표현할 수 있는데 다음과 같이 복소지수 함수의 실수부를 취함으로써 복소지수 함수로 표현이 가능함

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = \mathrm{Re}\{Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}\} = \mathrm{Re}\{Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}\}$$

페이저 합 규칙

- 진폭과 위상변이는 다르지만 주파수가 같은 N개의 정현파 신호를 합하면, 같은 주파수를 가지는 하나의 코사인 신호가 됨

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \sum_{k=1}^{N} A_k e^{j\varphi_k} = Ae^{j\varphi}$$

- 같은 주파수를 가진 정현파의 합은 페이저 합 규칙을 이용하여 간단하게 계산할 수 있음

디지털신호처리

강의노트

정현파와 복소지수 신호 실습

3주차 3차시

학습내용

❖ 다양한 신호음 생성

❖ 페이저 합 규칙

학습목표

❖ 다양한 주파수의 정현파를 이용하여 화음을 생성하고, 음악을 연주할 수 있는 Matlab 프로그램을 작성할 수 있다.

❖ Matlab 프로그램을 이용하여 정현파 신호를 복소지수 신호로 표현할 수 있다.

❖ Matlab 프로그램으로 페이저 합 규칙을 증명할 수 있다.

다양한 신호음 생성

1. Matlab 음계 확인하기

실습과제 09-01

실제 정현파의 주파수와 음의 높낮이가 어떠한 관계가 있는지 직접
해당되는 정현파의 주파수를 스피커 음으로 확인해 보는 실습을 해 보자.

※ sound(x) :스피커로 x 값을 소리로 재생하는
함수, default sampling rate = 8,191 Hz

실제 한 옥타브에 대한 주파수는 다음과 같다.

음정	도(C4)	레(D4)	미(E4)	파(F4)	솔(G4)	라(A4)	시(B4)	도(C5)
주파수 (Hz)	264	297	330	352	396	440	495	528

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

- % sinegen2.m : f hz = 정현파 주파수 화음을 생성하는 함수

```
% sinegen2.m : f hz 정현파 주파수 화음을 생성하는 함수
function x = sinegen2(f, fs, tdur)
% generate a sine wave, plots some cycles, and plays the tone for tdur
% inputs: frequency f Hz
% sample frequency fs Hz
% duration tdur sec
t = 0:1/fs:tdur;
x = sin(2*pi*f*t);
plot(t,x,'r-');
%axis([0 0.05 -1.1 1.1]); % Sine 파를 좁은 Time 구간에서 확인하기 위해
xlabel('time (s)')
str = sprintf('Ten cycles of %g Hz sine wave', f);
title(str)
sound(x) % 스피커로 생성된 sine 함수를 재생, default sampling frequency = 8,191 Hz
```

>> x = sinegen2(440, 8000, 1);
(440Hz의 싸인파를 1초에 8000번 샘플링한 표본 악보 라(440Hz)를 1초 동안
연주하라는 의미이다.)

다양한 신호음 생성

2. 도레미 화음 연주하기

실습과제 09-02

한 화음(라 : 440 Hz)을 생성하는 모듈을 이용하여 음악의 한 옥타브 (도,레,미,파,솔,라,시,도)를 연주하는 Matlab 프로그램을 작성해 보자.

다음의 음정별 주파수 값을 참고할 것

음정	도(C4)	레(D4)	미(E4)	파(F4)	솔(G4)	라(A4)	시(B4)	도(C5)
주파수 (Hz)	264	297	330	352	396	440	495	528

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
C = 264; D = 297;E = 330;
F = 352; G = 396; A = 440;
B = 495; C5 = 528;

sinegen2(C,8000,0.5); pause(0.5); % 도
sinegen2(D,8000,0.5); pause(0.5); % 레
sinegen2(E,8000,0.5); pause(0.5); % 미
sinegen2(F,8000,0.5); pause(0.5); % 파
sinegen2(G,8000,0.5); pause(0.5); % 솔
sinegen2(A,8000,0.5); pause(0.5); % 라
sinegen2(B,8000,0.5); pause(0.5); % 시
sinegen2(C5,8000,0.5);            % 도
```

〈참고〉 pause(n) : n 초 동안 잠시 모든 동작을 멈추는 명령어

다양한 신호음 생성

3. 학교종 노래 연주하기

실습과제 09-03

악보를 보고 '학교 종'의 1절을 연주하는 Matlab 프로그램을 작성해보자.
※ 한 박자 지속시간은 0.5초로 지정할 것

〈학교종〉 악보

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
% 실습9-3: 학교종이 노래 연주하기, Exp9_3.m

C = 264; D = 297;E = 330;F = 352;
G = 396; A = 440;B = 495;C5 = 528;
R = 0; % 심표

music = [G 1 G 1 A 1 A 1 G 1 G 1 E 2 G 1 G 1 E 1 E 1 D 3 R 1 G 1 G 1 A
1 A 1 G 1 G 1 E 2 G 1 E 1 D 1 E 1 C 3 R 1];

for i=1:2:length(music)
    sinegen2(music(i),8000,0.5*music(i+1));
    pause(0.5*music(i+1));
end;
```

다양한 신호음 생성

[한걸음 더] 정현파를 이용해 다이얼톤 생성하기

한걸음 더

영화나 드라마에서 보면 전화 다이얼 버튼을 누르는 소리를 듣고 범인 등의 전화번호를 맞추는 장면이 나온다. 누름 단추식 다이얼링 전화의 각 숫자 버튼이 일련의 정현파 쌍을 발생시키기 때문인데요,
다음의 표를 참조해 임의의 전화번호에 대한 다이얼톤을 만들어보자.

주파수	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz
697 Hz	1	2	3
770 Hz	4	5	6
852 Hz	7	8	9
941 Hz	*	0	#

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

$$x_1(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t + \phi_1) \qquad x_2(t) = A_2 \sin(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

```
% 두 정현파 신호의 합을 계산하는 함수 : sumsine.m
function [t, y] = sinesum(A1, f1, ph1, A2, f2, ph2, fs, tdur)
% A1, f1, ph1 : 정현파 신호 1의 진폭, 주파수, 위상
% A2, f2, ph2 : 정현파 신호 1의 진폭, 주파수, 위상
% fs: 샘플링 주파수
% tdur : 재생시간

t = 0:1/fs:tdur;
y = A1*sin(2*pi*f1*t+ph1)+A2*sin(2*pi*f2*t+ph2);
sound(y);
```

페이저 합 규칙 실습

1. 정현파 신호에 대한 복소지수 신호 표현

실습과제 09-04

실제 코사인 신호 x1(t)와 이에 대한 복소지수신호 표현 x2(t)가 같은지를 Matlab 프로그램으로 확인해 보자.

$$x_1(t) = 3\cos(6\pi t + \pi / 3)$$

$$x_2(t) = \frac{3}{2}(e^{j(6\pi t + \pi/3)} + e^{-j(6\pi t + \pi/3)})$$

[과제해설]

1) 복소지수 신호의 실수부와 허수부

예

$$x(t) = \mathrm{Re}\{(-3j)e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{3e^{-j0.5\pi}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{3e^{j(\omega t - 0.5\pi)}\}$$
$$= 3\cos(\omega t - 0.5\pi)$$

2) 복소지수 신호의 특징

- 정현파의 표현이 가능함

예

$$A\cos(\omega t + \phi) = \frac{A}{2}(e^{j(\omega t+\phi)} + e^{-j(\omega t+\phi)})$$

```
% Exp9_5.m
dt = 0.05;
t = 0:dt:6*pi;
x1 = 3*cos(t+pi/3); % 정현파표현
x2 = (3/2)*(exp(j*(t+pi/3))+exp(-j*(t+pi/3))); %복소지수
subplot(2,1,1);
plot(t,x1);
axis([0 6*pi -3 3]);
title('코사인 정현파');
subplot(2,1,2);
plot(t,x2);
axis([0 6*pi -3 3]);
title( '복소지수신호표현 정현파');
```

페이저 합 규칙 실습

2. 페이저 합 규칙 실습

실습과제 09-05

Matlab 프로그램으로 두신호의 합과 페이저 합 규칙에 의해 최종적으로 계산된 하나의 정현파가 서로 같은지를 확인해 보자.

$$x_1(t) = \cos(77\pi t), \quad x_2(t) = \sqrt{3}\cos(77\pi t + 0.5\pi)$$

$$\therefore x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(77\pi t + \phi) = 2\cos(77\pi t + \frac{\pi}{3})$$

[과제해설]

```
% Exp9_6.m
dt = 0.05;

t = 0:dt:2*pi;
x1 = cos(77*pi*t);
x2 = sqrt(3)*cos(77*pi*t+0.5*pi);
x3 = x1+x2;

subplot(2,1,1);
plot(t,x3);
axis([0 4 -2.2 2.2]);
title('두 신호의 합 x3');

x4 = 2*cos(77*pi*t+pi/3);

subplot(2,1,2);
plot(t,x4);
axis([0 4 -2.2 2.2]);
title(‘페이저합 규칙에 의한 두 신호의 합 x3');
```

핵심정리

다양한 신호음 생성

- 정현파의 다양한 주파수에 따라서 서로 다른 화음을 생성할 수 있음
- 화음의 고음은 저음에 비하여 상대적으로 주파수가 높은 신호임
- 음정별 주파수

음정	도(C4)	레(D4)	미(E4)	파(F4)	솔(G4)	라(A4)	시(B4)	도(C5)
주파수 (Hz)	264	297	330	352	396	440	495	528

페이저 합 규칙

- 주파수가 같은 여러 개의 정현파 신호는 페이저 합 규칙에 의하여 하나의 주파수의 정현파로 표현할 수 있음

① 각 신호의 페이저 $X_k = A_k e^{j\Phi_k}$를 얻는다.
② 각 신호의 페이저를 합하여 $X = X_1 + X_2 + \ldots = Ae^{j\Phi}$ 를 얻는다.
③ 여기서 극좌표에서 직교좌표로, 직교좌표에서 극좌표로 변환한다.
④ 그 결과 X에 $e^{j\omega_o t}$ 를 곱하여 $z(t) = Ae^{j\Phi}e^{j\omega_o t}$ 를 얻는다.
⑤ 실수부만 취하면 최종적인 여러 코사인 신호의 합을 얻을 수 있다.

$$x(t) = \mathrm{Re}\{Ae^{j\Phi}e^{j\omega_o t}\} = A\cos(\omega_o t + \Phi) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots$$

디지털신호처리

강의노트

신호의 스펙트럼 표현 및 합성

4주차 1차시

학습내용

❖ 스펙트럼 표현

❖ 스펙트럼을 이용한 신호 합성

학습목표

❖ 스펙트럼의 개념을 이해하고, 임의의 정현파 신호에 대해 스펙트럼을 계산할 수 있다.

❖ 시간 영역 표현과 주파수 영역 표현을 설명할 수 있다.

❖ 주파수 영역으로 표현된 스펙트럼을 이용하여 신호를 합성할 수 있다.

스펙트럼 표현

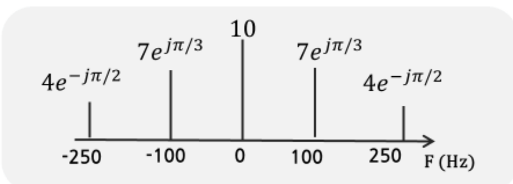
1. 스펙트럼 개요

1) 스펙트럼(Spectrum)이란?

- 신호를 만들어 주는 각각의 정현파 요소를 그래프식으로 표현한 것
  → Frequency Diagram
- 각 주파수 요소와 그들의 진폭과의 상호관계를 빠르고 쉽게 나타낼 수 있음

2) 신호 $x(t)$에 대한 스펙트럼(Frequency Diagram)

$$x(t) = 10 + 14\cos(2\pi(100)t - \pi/3) + 8\cos(2\pi(250)t + \pi/2)$$



- 신호 $x(t)$ = 주파수 성분으로 DC(0 Hz)와 100, 250Hz의 정현파 신호를 포함
- 그 중에서 DC값이 가장 많은 성분을 차지하고 있고, 250Hz의 정현파 보다 100Hz의 정현파 성분이 더 많이(크게) 가지고 있다고 해석할 수 있음

2. 정현파들의 합에 대한 스펙트럼

1) 정현파의 합

- 모든 복잡한 신호들을 기본신호인 정현파들의 합으로 표현할 수 있음
- 선형 중첩 결합을 통해 새 신호를 만들며, 상수와 서로 다른 주파수, 크기, 위상을 갖는 N개의 정현파들의 합으로 구성됨

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

스펙트럼 표현

2) 정현파 요소의 복소지수 신호 표현

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) \Rightarrow x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Re}\{X_k e^{j2\pi f_k t}\}$$

※ $X_0 = A_0$, $X_k = A_k e^{j\varphi_k}$

역오일러 공식에 의해,

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N}\{\frac{X_k}{2} e^{j2\pi f_k t} + \frac{X^*_k}{2} e^{-j2\pi f_k t}\} = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j2\pi f_k t}$$

$$※\ a_k = \begin{cases} A_0 & for\ k = 0 \\ \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} & for\ k \neq 0 \end{cases}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{N}\{\frac{X_k}{2} e^{j2\pi f_k t} + \frac{X^*_k}{2} e^{-j2\pi f_k t}\} = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j2\pi f_k t}$$

- 각 정현파는 두 개의 회전 페이저로 나누어짐
  → 양의 주파수 $f(k)$와 음의 주파수 $-f(k)$의 합으로 표현
- 신호 $x(t)$는 2N+1개의 복소크기와 2N+1개의 주파수로 구성된 정현파들의 양측대역 스펙트럼(Two-sided Spectrum)을 정의할 수 있음
- 스펙트럼은 결국 (주파수, 복소진폭) 쌍의 집합으로 표현할 수도 있음

$$\{(0,X_0),(f_1,\frac{1}{2}X_1),(-f_1,\frac{1}{2}X^*_1),\cdots,(f_k,\frac{1}{2}X_k),(-f_k,\frac{1}{2}X^*_k),\cdots\}$$

- 각 쌍 $(f_k, \frac{1}{2}X_k)$는 주파수 f_k에 기여하는 정현파 요소의 크기와 상대적인 위상을 의미함

3) 정현파 신호 x(t)에 대한 스펙트럼 표현

- 아주 간단한 1개의 정현파 신호 $x(t)$에 대한 스펙트럼 또는 주파수 영역표현도 (Frequency Diagram) 그리기

$$x(t) = 4\cos(14\pi t) \Rightarrow x(t) = 4\cos(14\pi t) = 4 \cdot \frac{1}{2}(e^{j14\pi t} + e^{-j14\pi t})$$

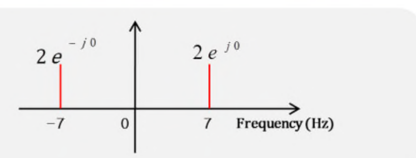
$$= 2e^{j14\pi t} + 2e^{-j14\pi t}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

1. (주파수, 복소 진폭) 집합

$$(f_k, \frac{1}{2}X_k) = \{(7, 2e^{j0}), (-7, 2e^{-j0})\}$$

2. 스펙트럼(Frequency Diagram)



스펙트럼 표현

3) 정현파 신호 x(t)에 대한 스펙트럼 표현

예제 10-01

다음과 같은 sine 정현파에 대한 (주파수, 복소 진폭)을 구하고, 스펙트럼을 그려보자.

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$$

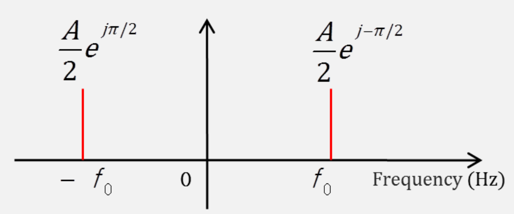
[예제풀이]

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j}(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) = \frac{A}{2}e^{-j\pi/2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{j\pi/2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

1. (주파수, 복소진폭) 집합

$$(f_k, \frac{1}{2}X_k)$$
$$= \{(f_0, \frac{A}{2}e^{j-\pi/2}), (-f_0, \frac{A}{2}e^{j\pi/2})\}$$

2. 스펙트럼(Frequency Diagram)



스펙트럼 표현

3) 정현파 신호 x(t)에 대한 스펙트럼 표현

예제 10-02

정현파들의 합으로 구성된 $x(t)$에 대한 (주파수, 복소 진폭)을 구하고,
스펙트럼을 그려보자.

$$x(t) = 10 + 14\cos(2\pi(100)t - \pi/3) + 8\cos(2\pi(250)t + \pi/2)$$

[예제풀이]

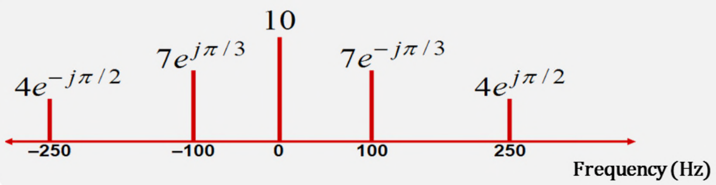
$$\begin{aligned} x(t) &= 10 + 14\cos(2\pi(100)t - \pi/3) + 8\cos(2\pi(250)t + \pi/2) \\ &= 10 + 7e^{j(2\pi(100)t - \pi/3)} + 7e^{-j(2\pi(100)t - \pi/3)} + 4e^{j(2\pi(250)t + \pi/2)} + 4e^{-j(2\pi(250)t + \pi/2)} \\ &= 10 + 7e^{-j\pi/3}e^{j2\pi(100)t} + 7e^{j\pi/3}e^{-j2\pi(100)t} + 4e^{j\pi/2}e^{j2\pi(250)t} + 4e^{-j\pi/2}e^{-j2\pi(250)t} \end{aligned}$$

※ DC 성분: $10 = 10e^{j2\pi 0t}$

1. (주파수, 복소 진폭) 집합

$$(f_k, \frac{1}{2}X_k) = \{(0,10), (100, 7e^{-j\pi/3}), (-100, 7e^{j\pi/3}), (250, 4e^{j\pi/2}), (-250, 4e^{-j\pi/2})\}$$

2. x(t)에 대한 스펙트럼



스펙트럼 표현

3. 정현파들의 곱에 대한 스펙트럼

- 서로 다른 주파수를 갖는 2개의 정현파를 곱하면 비트 음색(Beat Note)의 오디오 효과 제작 가능

$$x(t) = \cos(\pi t)\sin(10\pi t)$$

- [예] 라디오 방송의 AM(Amplitude Modulation)

$$x(t) = v(t)\cos(2\pi f_c t)$$

예제 10-03

5Hz와 ½Hz인 두 정현파들의 곱으로 구성된 비트신호 ***x*(*t*)**에 대한 (주파수, 복소 진폭)을 구하고, 스펙트럼을 그려보자.

$$x(t) = \cos(\pi t)\sin(10\pi t)$$

[예제풀이]

$$x(t) = \cos(\pi t)\sin(10\pi t) = \left(\frac{e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}}{2}\right)\left(\frac{e^{j10\pi t} - e^{-j10\pi t}}{2j}\right)$$

$$= \frac{1}{4j}\left(e^{j11\pi t} - e^{-j9\pi t} + e^{j9\pi t} + e^{-j11\pi t}\right)$$

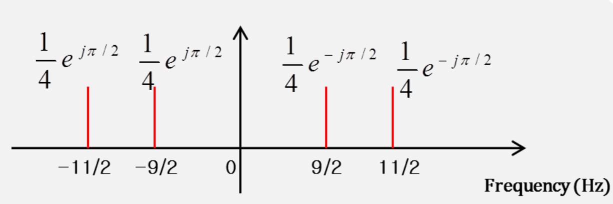
$$= \frac{1}{4j}\left(e^{j11\pi t} - e^{-j11\pi t}\right) + \frac{1}{4j}\left(e^{j9\pi t} - e^{-j9\pi t}\right) = \frac{1}{2}\sin(11\pi t) + \frac{1}{2}\sin(9\pi t)$$

1. (주파수, 복소 진폭) 집합

$$(f_k, \frac{1}{2}X_k) = \{(\frac{9}{2}, \frac{1}{4}e^{-j\pi/2}), (-\frac{9}{2}, \frac{1}{4}e^{j\pi/2}), (\frac{11}{2}, \frac{1}{4}e^{-j\pi/2}), (-\frac{11}{2}, \frac{1}{4}e^{j\pi/2})\}$$

2. 스펙트럼

비트 신호 x(t)에 대한 스펙트럼

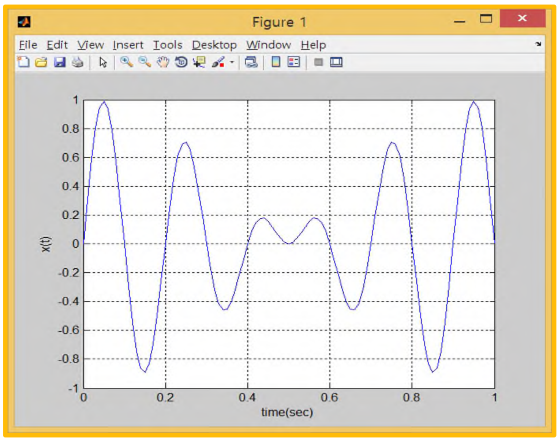


스펙트럼을 이용한 신호 합성

1. 시간 영역 표현과 주파수 영역 표현

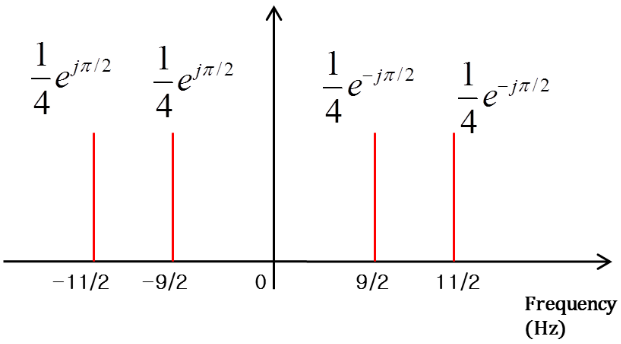
1) 신호에 대한 시간 영역 표현

$$x(t) = \cos(\pi t)\sin(10\pi t)$$



2) 신호에 대한 주파수 영역 표현(스펙트럼 표현)

$$x(t) = \cos(\pi t)\sin(10\pi t)$$

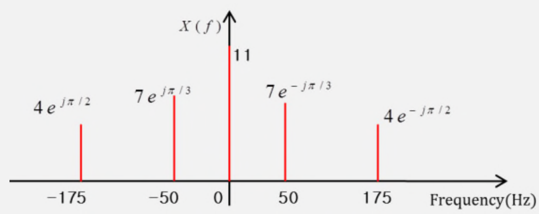


스펙트럼을 이용한 신호 합성

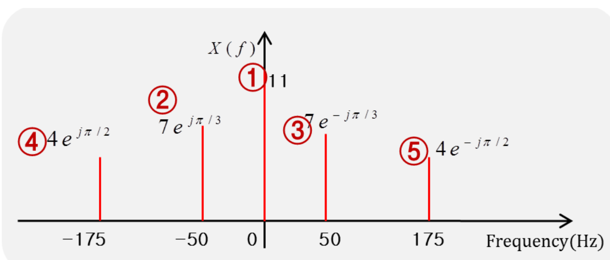
2. 스펙트럼에 의한 신호 합성

예제 10-04

다음은 임의의 신호 $x(t)$에 대한 스펙트럼 $X(f)$이다. 이 스펙트럼에 대한 신호의 시간 영역 $x(t)$를 구해보자.

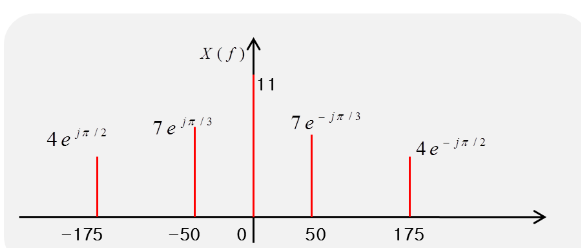


[예제풀이]



$$x(t) = \overset{①}{\boxed{11e^{j0}}} + \overset{②}{\boxed{(7e^{j\pi/3})e^{j2\pi(-50)t}}} + \overset{③}{\boxed{(7e^{-j\pi/3})e^{j2\pi(50)t}}}$$
$$+ \underset{④}{\boxed{(4e^{j\pi/2})e^{j2\pi(-175)t}}} + \underset{⑤}{\boxed{(4e^{-j\pi/2})e^{j2\pi(175)t}}}$$

$$x(t) = 11 + 2\times7\times\left(\frac{e^{j(2\pi(50)t-\pi/3)} + e^{-j(2\pi(50)t-\pi/3)}}{2}\right) + 2\times4\times\left(\frac{e^{j(2\pi(175)t-\pi/2)} + e^{-j(2\pi(175)t-\pi/2)}}{2}\right)$$



스펙트럼을 이용한 신호 합성

스펙트럼 분석 (또는 주파수 분석)

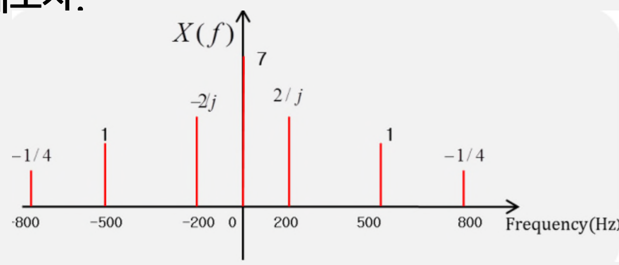
$$x(t) = 11 + 14\cos(2\pi(50)t - \pi/3) + 8\cos(2\pi(175)t - \pi/2)$$

스펙트럼을 이용한 신호 합성

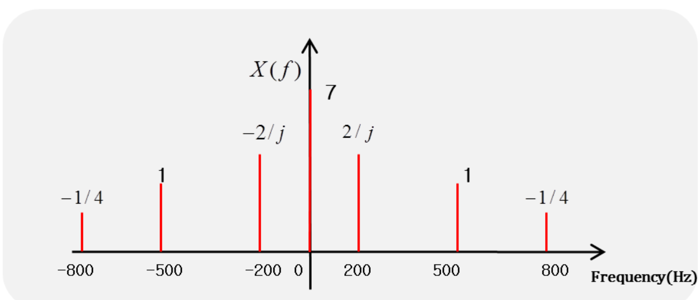
2. 스펙트럼에 의한 신호 합성

예제 10-05

신호 $x(t)$가 다음과 같이 스펙트럼 X(f)로 표현된다. 이 스펙트럼에 대한 신호의 시간 영역 $x(t)$를 구해보자.



[예제풀이]



$$x(t) = 7e^{j0} + \frac{2}{j}(e^{j2\pi(200)t} - e^{-j2\pi(200)t}) + 1(e^{j2\pi(500)t} + e^{-j2\pi(500)t}) - \frac{1}{4}(e^{j2\pi(800)t} + e^{-j2\pi(800)t})$$

$$= 7 + 4\sin(2\pi(200)t) + 2\cos(2\pi(500)t - \frac{1}{2}\cos(2\pi(800)t)$$

핵심정리

스펙트럼 표현

- 스펙트럼: 신호를 만들어 주는 각각의 정현파 요소를 그래프식으로 표현한 것으로 Frequency Diagram이라고도 함
- 신호의 각 주파수 요소와 진폭의 상호관계를 빠르고 쉽게 보여줌

스펙트럼을 이용한 신호 합성

- 신호는 시간 영역, 스펙트럼을 이용한 주파수 영역으로도 표현 가능함
- 주파수 영역으로 표현된 스펙트럼을 이용하여 신호 합성 가능

디지털신호처리

강 의 노 트

퓨리에 급수

4주차 2차시

학습내용

- ❖ 퓨리에 급수(Fourier Series)
- ❖ 퓨리에 분석(Fourier Analysis)
- ❖ 퓨리에 합성(Fourier Synthesis)

학습목표

- ❖ 퓨리에 급수(Fourier Series)에 대하여 이해하고, 그 활용방법을 설명할 수 있다.
- ❖ 퓨리에 분석과 퓨리에 합성에 대하여 설명할 수 있다.
- ❖ 임의의 주기신호에 대한 기본 주파수와 고조파를 이해하고, 스펙트럼을 그릴 수 있다.

퓨리에 급수

1. 기본 주파수와 고조파

1) 복잡한 신호생성

- 모든 복잡한 신호들을 기본신호인 정현파의 합으로 표현가능,
  → 정현파들의 합으로 모든 복잡한 신호들을 생성할 수 있음
- 정현파들로부터 새 신호를 만드는 방법 중 가장 일반적이고 효과적인 방법
  → 선형 중첩 결합: 상수와 서로 다른 주파수, 크기, 위상을 갖는 N개의 정현파들의 합으로 구성

2) 고조파(Harmonics)란?

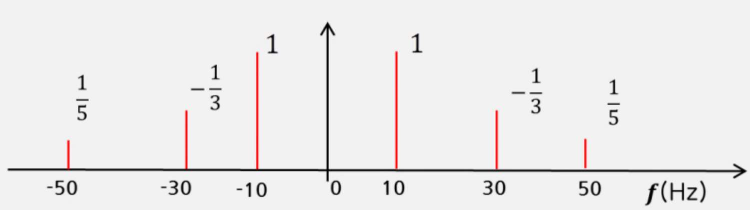
- 기본 주파수의 정수배의 정현파
- 모든 주기신호(T_0)는 두 개 이상의 고조파의 합으로 합성 가능함

$$x_{T_0}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{N} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$$

- 기본 주파수는 $f_0 = \frac{1}{T_0}$이고, $f_k = kf_0$를 만족하는 가장 큰 f_0임
- 고조파는 $f_k = kf_0$, f_0의 정수배 주파수의 정현파

예제 11-01

다음은 임의의 신호에 대한 스펙트럼이다. 이 신호의 기본 주파수는 얼마이고, 고조파(Harmonics)는 얼마인가?



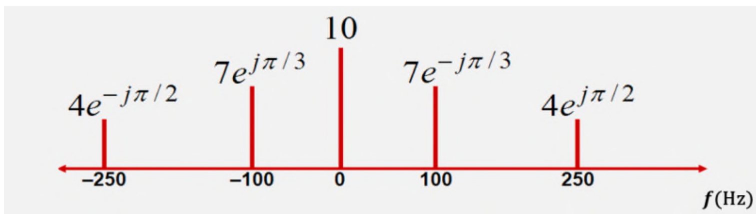
[예제풀이]

- 기본 주파수는 10Hz, 고조파는 30Hz와 50Hz
- 30Hz(3 x 10Hz): 기본 주파수의 3배인 고조파
- 50Hz(5 x 10Hz): 기본 주파수의 5배인 고조파

퓨리에 급수

2) 고조파(Harmonics)란?

- 다음과 같은 스펙트럼에서 기본 주파수는? 100Hz? 또는 50Hz?

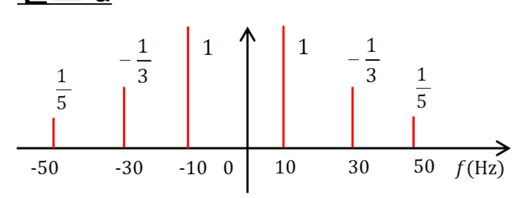


- 이 신호는 주기신호(Periodic Signal)가 아니므로 기본 주파수가 없음
  주기신호일 경우에만 기본 주파수가 존재

예제 11-02

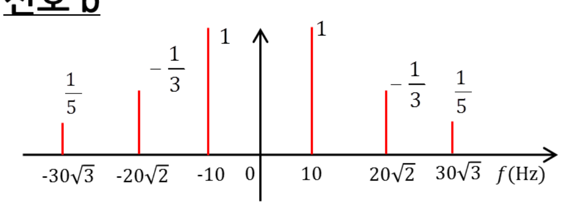
두 스펙트럼 신호(a, b)에 대한 그래프를 그려보고 두 신호 중 주기신호가 어떤 신호인지 확인해 보자.

신호 a



$$x_a(t) = 2\cos(2\pi(10)t) - \frac{2}{3}\cos(2\pi(30)t) + \frac{2}{5}\cos(2\pi(50)t)$$

신호 b

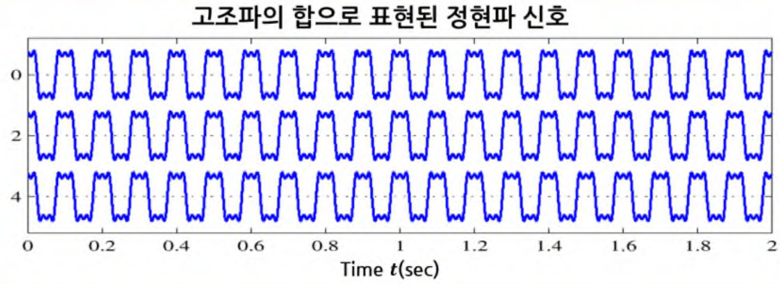


$$x_b(t) = 2\cos(2\pi(10)t) - \frac{2}{3}\cos(2\pi(20\sqrt{2})t) + \frac{2}{5}\cos(2\pi(30\sqrt{3})t)$$

[예제풀이]

$$x_a(t) = 2\cos(2\pi(10)t) - \frac{2}{3}\cos(2\pi(30)t) + \frac{2}{5}\cos(2\pi(50)t)$$

고조파의 합으로 표현된 정현파 신호



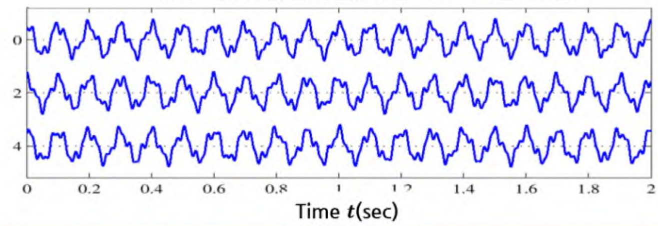
$X_a(t)$ = 주기신호
주기 $T_0 = 0.1sec$ 또는 $f_0 = 10\text{Hz}$

퓨리에 급수

[예제풀이-계속]

$$x_b(t) = 2\cos(2\pi(10)t) - \frac{2}{3}\cos(2\pi(20\sqrt{2})t) + \frac{2}{5}\cos(2\pi(30\sqrt{3})t)$$

고조파가 아닌 정현파들의 합으로 표현된 신호



$X_b(t)$ = 비주기신호

- 스펙트럼에서 기본 주파수의 배수가 아님, 따라서 비주기 신호임
- $X_a(t)$와 $X_b(t)$는 주파수 상에서의 약간의 차이가 시간 파형에는 큰 차이가 있음

2. 주기신호에 대한 스펙트럼

1) 스펙트럼 표현이란?

- 임의의 신호를 만들어 주는 각각의 정현파 요소를 그래프식으로 표현한 것

2) 정현파 신호에 대한 스펙트럼 표현

- 오일러 공식을 이용, 코사인신호를 복소지수 함수로 표현하여 각 주파수 성분을 표현 가능함

$$x(t) = 10 + 14\cos(2\pi(100)t - \pi/3) + 8\cos(2\pi(250)t + \pi/2)$$

3) 오일러 공식을 사용할 수 없는 일반적인 많은 다른 주기신호(예, 구형파, 톱니파)는 스펙트럼으로 표현 가능한가?

- 임의의 다른 주기신호에 대하여서도 스펙트럼으로 표현 가능
  → 퓨리에 급수(Fourier Series)로 가능

퓨리에 급수

3. 퓨리에 급수 개요

1) 퓨리에(Fourier,1768-1830)

- 1700년대의 수학자 전기전자분야 발전에 공헌
- 퓨리에 급수(Fourier Series) 이론 발표

2) 퓨리에 급수

- 어떠한 주기적 신호(**x(t)**)도 고조파로 관계된 정현파의 합으로 합성될 수 있음

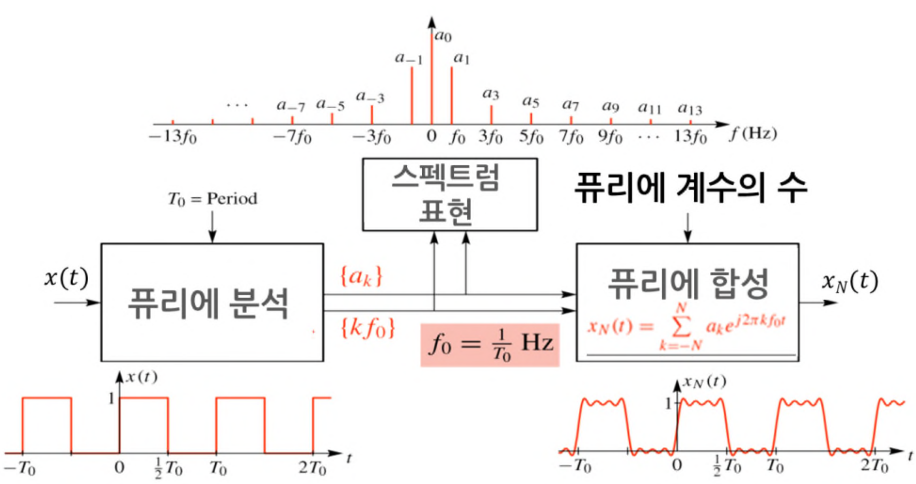
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_o)kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_o kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi f_o)kt}$$

$$where, \quad \boxed{a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\omega_0 kt}dt}$$

퓨리에 계수

T_0: 주기신호 x(t)의 주기 $\quad f_0 = \dfrac{1}{T_0}$: 기본 주파수

3) 퓨리에 분석(Fourier Analysis) & 퓨리에 합성(Fourier Synthesis)



퓨리에 급수

4) 퓨리에 분석(Fourier Analysis)

- 퓨리에 급수식에서 각 복소지수 함수의 크기를 결정하는 진폭 a_k 를 계산하는 식

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

4) 퓨리에 계수 a_k

- 주기신호 x(t)에 복소지수 함수를 곱한 후 퓨리에 급수 적분을 이용해서 한 주기 동안을 계산함

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\omega_0 k t}dt$$

퓨리에 분석

1. 복소지수 신호의 성질

1) 복소지수 신호의 적분 = 0

- 주기 구간 내에서의 복소지수 신호의 적분은 0

$$\int_0^{T_0} e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt = \frac{T_0}{-j2\pi k} e^{-j(2\pi/T_0)kt}\Big|_0^{T_0} \qquad \boxed{k \neq 0}$$

$$= \frac{T_0}{-j2\pi k}(e^{-j2\pi k} - 1)$$

$$\int_0^{T_0} e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt = 0 \qquad \boxed{k \neq 0} \qquad (\because e^{-j2\pi k} = 1)$$

$$\int_0^{T_0} e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt = \underbrace{\int_0^{T_0} \cos((2\pi/T_0)kt)dt}_{0} + j\underbrace{\int_0^{T_0} \sin((2\pi/T_0)kt)dt}_{0} = 0$$

2) 직교(Orthogonality) 특성

- 켤레 관계가 있는 두 복소지수 신호를 곱해서 퓨리에 적분하여 두 복소지수 신호의 주파수가 같으면 1, 서로 주파수가 다르면 0

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)\ell t} e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)(\ell-k)t}dt = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ 1 & k = \ell \end{cases}$$

푸리에 분석

2. 푸리에 분석 유도

- 양변에 똑같은 복소지수 신호를 곱하고, 주기 T_0에 대하여 양변을 적분

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)\ell t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}\right)e^{-j(2\pi/T_0)\ell t}dt$$

- 무한 합과 적분의 순서를 바꾸어도 수식에는 변화가 없으며 두 복소지수의 직교성에 의하여 무한 합에서 $k=\ell$인 경우만 적분 값이 존재하고, 그 외의 경우는 적분 값이 0임

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)\ell t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\left(\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{j(2\pi/T_0)kt}e^{-j(2\pi/T_0)\ell t}dt\right) = a_\ell$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt$$

3. 푸리에 급수 스펙트럼

1) 푸리에 합성식

- 임의의 주기신호 $\mathbf{x}(\mathbf{t})$는 복소지수 함수들에 푸리에 계수 a_k를 합성하여 표현 가능함을 의미
- 복소지수 함수는 오일러공식에 의하여 정현파(삼각함수)를 의미
- 임의의 주기함수는 정현파의 합으로 표현 가능

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$

퓨리에 분석

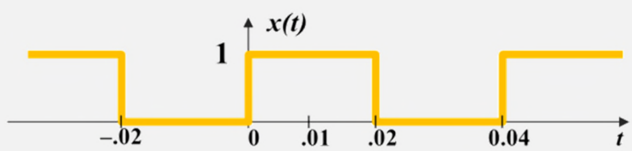
2) 퓨리에 분석식

- 임의의 주기함수가 정현파의 합으로 표현 가능할 때 각각의 정현파 주파수별 계수 값을 계산하는 식

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt$$

예제 11-3

구형파 신호에 대한 스펙트럼 구하기



$$x(t)\begin{cases}1 & 0 \le t < \frac{1}{2}T_0 \quad for\ T_0 = 0.04sec. \\ 0 & \frac{1}{2}T_0 \le t < T_0\end{cases}$$

[예제풀이]

- 임의의 주기신호에 대한 스펙트럼을 구하기 위해서 퓨리에 분석 수행
- 퓨리에 분석 = 퓨리에 급수식의 진폭값 a_k구하기
- $k \neq 0$

$$a_k = \frac{1}{.04}\int_0^{.02} 1e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt = \frac{1}{.04(-j(2\pi/.04)\mathrm{k})}e^{-j(2\pi/.04)kt}\Big|_0^{.02}$$

$$= \frac{1}{(-j2\pi k)}(e^{-j(\pi)k}-1) \qquad \Rightarrow a_k = \frac{1}{(-j2\pi k)}(e^{-j(\pi)k}-1) = \frac{1-(-1)^k}{j2\pi k}$$

$e^{-j\pi} = e^{-j3\pi} = e^{-j5\pi} = \cdots = -1$ (k = 홀수)

$e^{-j2\pi} = e^{-j4\pi} = e^{-j6\pi} = \cdots = 1$ (k = 짝수)

스펙트럼 표현

2) 퓨리에 분석식

[예제풀이-계속]

- $k = 0$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt \qquad (k=0)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}(Area)$$

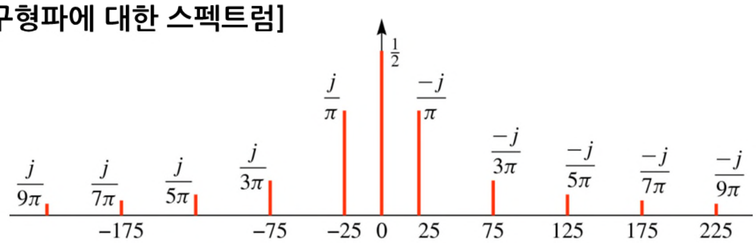
$$a_0 = \frac{1}{.04}\int_0^{.02} 1\,dt = \frac{1}{.04}(.02-0) = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{-j}{\pi k} & k = \pm 1, \pm 3, \ldots \\ 0 & k = \pm 2, \pm 4, \ldots \\ \frac{1}{2} & k = 0 \end{cases}$$

$$\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi / (0.04) = 2\pi(25) = 50\pi$$

$\therefore$ 기본 주파수 $f_0 = 25\ Hz$

[구형파에 대한 스펙트럼]



$$\boxed{a_{-k} = a_k^*}$$

[참고] 신호가 실신호(Real Signal)일 경우 퓨리에 계수는 켤레 복소진폭을 가짐

푸리에 합성

1. 푸리에 합성식

1) 푸리에 급수식 = 합성식

- 임의의 주기신호 $x(t)$는 복소지수신호 또는 정현파 신호들의 합으로 표현할 수 있다는 의미
- 푸리에 합성식

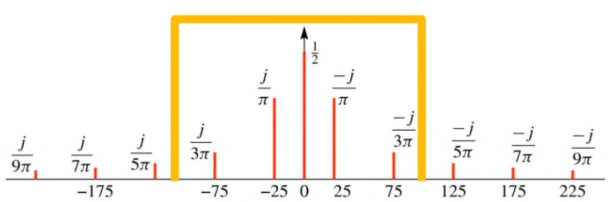
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$

- 무한대의 정현파들의 합을 구한다는 것 = 불가능
- 임의의 N개의 정현파들의 합으로 근사화할 수 있음
- 신호 $x(t)$가 실제신호(Real Signal)이면 푸리에 계수 a_k는 켤레 복소진폭의 성질을 가짐

$$x(t) \cong \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} \qquad a_{-k} = a_k^* \quad \text{when } x(t) \text{ is real}$$

2. 구형파의 신호 합성

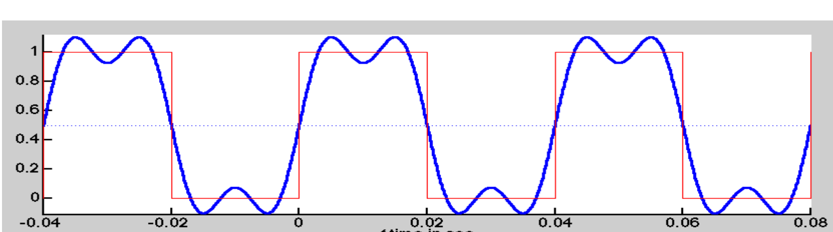
1) 구형파의 스펙트럼



시간영역 표현

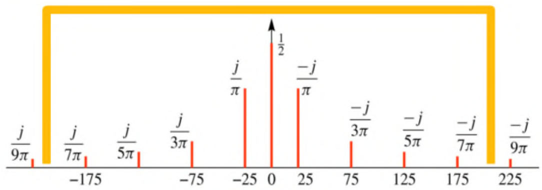
$$x(t) \cong \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(2\pi(25)t - \tfrac{\pi}{2}) + \frac{2}{3\pi}\cos(2\pi(75)t - \tfrac{\pi}{2})$$

- 3개의 고조파까지 합한 신호는 원래 구형파와 많은 차이가 있지만, 어느 정도 구형파와 유사함을 눈으로 확인 가능함



푸리에 합성

1) 구형파의 스펙트럼

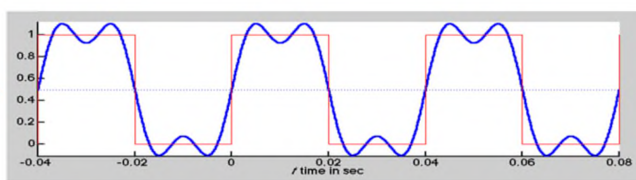


$$x(t) \cong \sum_{k=-7}^{7} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$

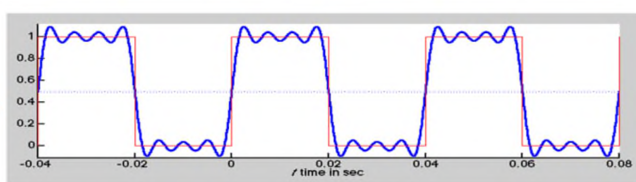
$$x(t) \cong \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(50\pi t - \tfrac{\pi}{2}) + \frac{2}{3\pi}\sin(150\pi t) + \frac{2}{5\pi}\sin(250\pi t) + \frac{2}{7\pi}\sin(350\pi t)$$

- 7번째 고조파까지 합한 신호는 3번째 고조파까지 합한 경우보다 원래 구형파와 더 가까움을 확인 가능

$$x(t) \cong \sum_{k=-3}^{3} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$



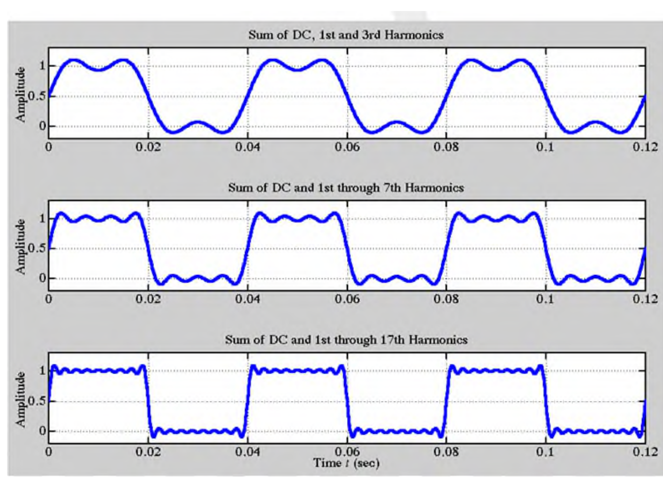
$$x(t) \cong \sum_{k=-7}^{7} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$



2) 신호 합성

- N이 무한대로 커지면 커질수록, 즉 고조파 성분을 많이 포함 할수록 원신호 구형파를 정확하게 합성할 수 있음

$$x(t) \cong \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$



핵심정리

퓨리에 급수

- 임의의 주기 신호를 스펙트럼으로 표현하기 위한 방법
- 임의의 주기 신호가 어떠한 주파수성분을 얼마만큼의 크기로 가지고 있는지를 해석
- 퓨리에 급수식은 퓨리에 합성(Synthesis)식, 퓨리에 분석(Analysis)식으로 표현

퓨리에 분석

- 임의의 주기 신호 x(t)에서 각 정현파의 주파수 성분에 대한 계수를 계산하는 식

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt$$

퓨리에 합성

- 임의의 주기 신호 x(t)는 복소지수 함수(또는 정현파)로 표현 가능하다는 것을 의미
- 즉, 임의의 주기 신호는 기본주파수의 정현파와 고조파들의 합으로 합성할 수 있다는 것을 의미

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$

디지털신호처리

강 의 노 트

스펙트럼 및 퓨리에 급수 실습

한국기술교육대학교
OLEI
온라인평생교육원

학습내용

- ❖ 스펙트럼을 이용한 신호합성 실습
- ❖ 퓨리에 합성 실습

학습목표

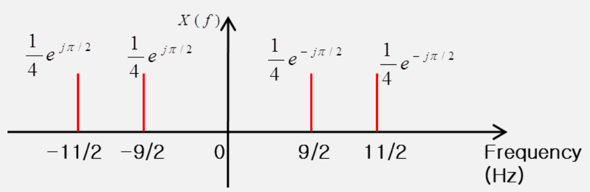
- ❖ 시간 영역의 신호와 스펙트럼을 이용한 합성신호가 같음을 Matlab 프로그램을 이용하여 설명할 수 있다.
- ❖ 퓨리에 급수에 대한 이론을 Matlab 프로그램을 통하여 설명할 수 있다

스펙트럼을 이용한 신호합성 실습

1. 시간 영역 표현과 주파수 영역 표현

실습과제 12-01

다음은 시간 영역에서의 신호 $x(t)$를 스펙트럼 분석을 이용하여 주파수 영역으로 표현한 것이다. 주파수 영역에서 표현된 스펙트럼을 이용하여 신호를 합성하면 원래 시간 영역의 신호 $x(t)$와 같아짐을 Matlab을 통하여 확인해 보자.



$$x(t) = \cos(\pi t)\sin(10\pi t)$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

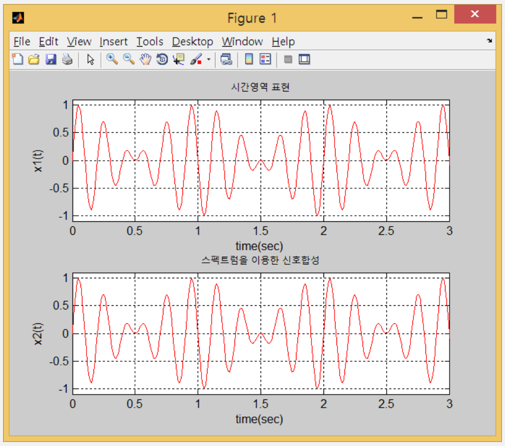
- 먼저 스펙트럼으로 표현된 신호를 합성하여 원본신호를 생성, 그 신호를 $x_2(t)$로 함

$$x_2(t) = (\frac{1}{4}e^{j\pi/2})e^{j2\pi(-\frac{9}{2})t} + (\frac{1}{4}e^{-j\pi/2})e^{j2\pi(\frac{9}{2})t} + (\frac{1}{4}e^{j\pi/2})e^{j2\pi(-\frac{11}{2})t} + (\frac{1}{4}e^{-j\pi/2})e^{j2\pi(\frac{11}{2})t}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{j(2\pi(\frac{9}{2})t-\pi/2)} + e^{-j(2\pi(\frac{9}{2})t-\pi/2)}) + \frac{1}{4}(e^{j(2\pi(\frac{11}{2})t-\pi/2)} + e^{-j(2\pi(\frac{11}{2})t-\pi/2)})$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2\pi(\frac{9}{2})t - \pi/2) + \frac{1}{2}\cos(2\pi(\frac{11}{2})t - \pi/2)$$

```
% 실습 Ex12_1.m
t=0:0.01:2*pi;
x1 = cos(pi*t).*sin(10*pi*t);
x2 = (1/2)*cos(2*pi*(9/2)*t-pi/2)+(1/2)*cos(2*pi*(11/2)*t-pi/2);

subplot(2,1,1);
plot(t,x1,'r-');
axis([0 3 -1.1 1.1]);
xlabel('time(sec)');
ylabel('x1(t)');
title('시간 영역 표현');
grid;

subplot(2,1,2);
plot(t,x2,'r-');
axis([0 3 -1.1 1.1]);
xlabel('time(sec)');ylabel('x2(t)');
title('주파수 영역에서의 신호합성');
grid;
```



스펙트럼을 이용한 신호합성 실습

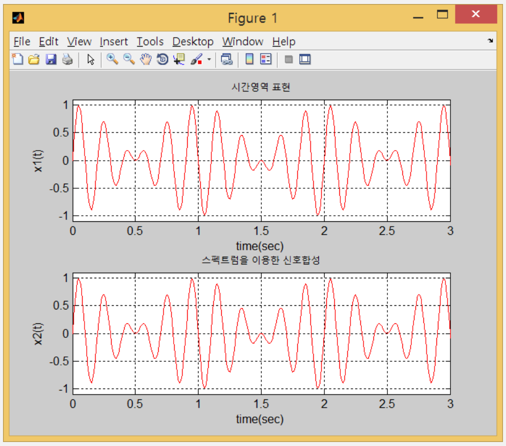
1. 시간 영역 표현과 주파수 영역 표현

[과제해설-계속]

- 참고

$$x_2(t) = (\frac{1}{4}e^{j\pi/2})e^{j2\pi(-\frac{9}{2})t} + (\frac{1}{4}e^{j-\pi/2})e^{j2\pi(\frac{9}{2})t} + (\frac{1}{4}e^{j\pi/2})e^{j2\pi(-\frac{11}{2})t} + (\frac{1}{4}e^{-j\pi/2})e^{j2\pi(\frac{11}{2})t}$$

```
% 실습 12-1-1, Ex12_1_1.m
t=0:0.01:2*pi;
x1 = cos(pi*t).*sin(10*pi*t);
%x2 = (1/2)*cos(2*pi*(9/2)*t-pi/2)+(1/2)*cos(2*pi*(11/2)*t-pi/2);
y1=(1/4)*exp(j*pi/2)*exp(j*2*pi*(-9/2)*t)+(1/4)*exp(j*-pi/2)*exp(j*2*pi*(9/2)*t);
y2 = (1/4)*exp(j*pi/2)*exp(j*2*pi*(-11/2)*t)+(1/4)*exp(j*-pi/2)*exp(j*2*pi*(11/2)*t);

x2 = y1 + y2;
subplot(2,1,1);
plot(t,x1,'r-');
axis([0 3 -1.1 1.1]);
xlabel('time(sec)');
ylabel('x1(t)');
title('시간 영역 표현');
grid;

subplot(2,1,2);
plot(t,x2,'r-');
axis([0 3 -1.1 1.1]);
xlabel('time(sec)');
ylabel('x2(t)');
title('주파수 영역에서의 신호합성');
grid;
```

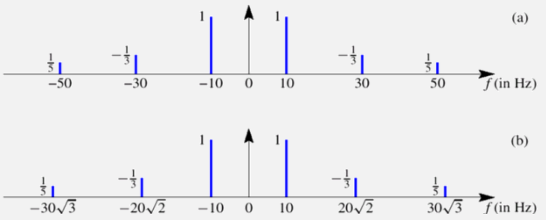


스펙트럼을 이용한 신호합성 실습

2. 스펙트럼에 의한 주기 신호와 비주기 신호

실습과제 12-02

다음 두 스펙트럼 신호(a, b)를 실제 Matlab 프로그램으로 그려보고, 두 신호 중 주기 신호는 어떤 신호인지 확인해 보자.



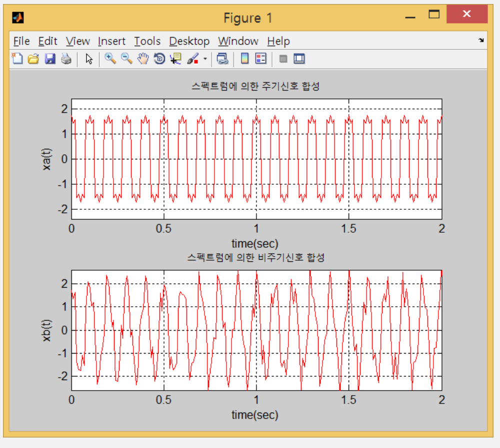
$$x_a(t)=2\cos(20\pi t)-\frac{2}{3}\cos(20\pi(3)t)+\frac{2}{5}\cos(20\pi(5)t)$$

$$x_b(t)=2\cos(20\pi t)-\frac{2}{3}\cos(20\pi(\sqrt{8})t)+\frac{2}{5}\cos(20\pi(\sqrt{27})t)$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
%실습 12-2, 12_2.m  스펙트럼에 의한 주기 신호와 비주기 신호 합성
t=0:0.01:2*pi;

xa = 2*cos(20*pi*t)-(2/3)*cos(20*pi*3*t)+(2/5)*cos(20*pi*5*t);
xb = 2*cos(20*pi*t)-(2/3)*cos(20*pi*sqrt(8)*t)+(2/5)*cos(20*pi*sqrt(27)*t);

subplot(2,1,1);
plot(t,xa,'r-');
axis([0 2 -2.4 2.4]);
xlabel('time(sec)');
ylabel('xa(t)');
title('스펙트럼에 의한 주기 신호 합성');
grid;

subplot(2,1,2);
plot(t,xb,'r-');
axis([0 2 -2.6 2.6]);
xlabel('time(sec)');
ylabel('xb(t)');
title('스펙트럼에 의한 비주기 신호 합성');
grid;
```

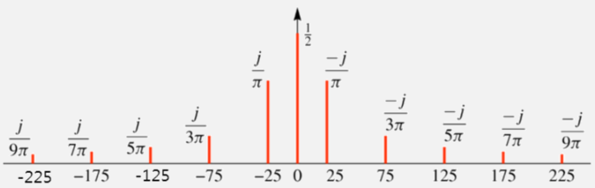


퓨리에 합성 실습

1. 구형파 주기 신호 그리기

실습과제 12-03

다음과 같은 구형파 주기 신호를 Matlab으로 출력(Plot) 해 보자.

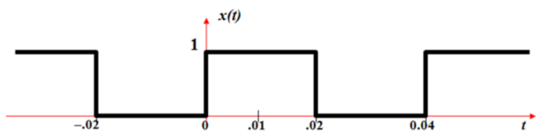


$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \frac{1}{2}T_0 \\ 0 & \frac{1}{2}T_0 \le t < T_0 \end{cases}$$

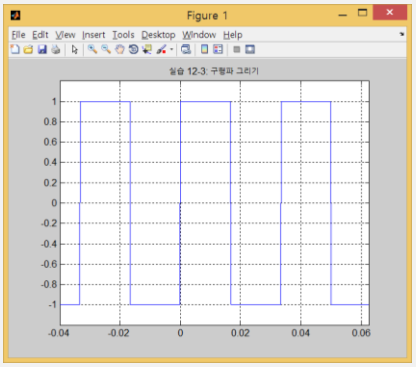
$$\text{for } T_0 = 0.04\,\text{sec.}$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

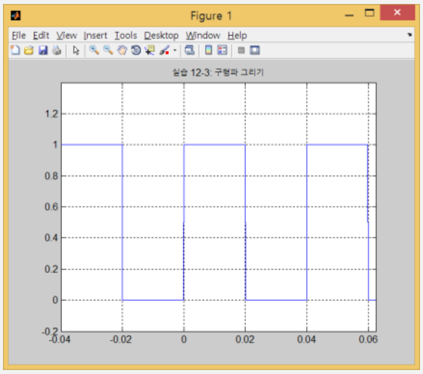
[과제해설]




```
%실습 12-3  Ex12_3_1.m

clf; %현재의 그림 화면을 지운다.
t = -0.04:.0001:.0625;
y = square(2*pi*30*t); % 30Hz 구형파 신호를 생성
plot(t,y);
grid on % 그림화면에 격자를 그린다.
axis([-0.04 0.0625 -1.2 1.2]);
```




```
실습 12-3-2    Ex12_3_2.m

%실습 12_3_2.m
clf; %현재의 그림 화면을 지운다.
t = -0.04:.0001:.0625;
y = 0.5*(square(2*pi*25*t)+1);  % 25Hz 구형파 신호를 생성
plot(t,y);
grid on % 그림화면에 격자를 그린다.
axis([-0.04 0.0625 -1.2 1.2]);
```

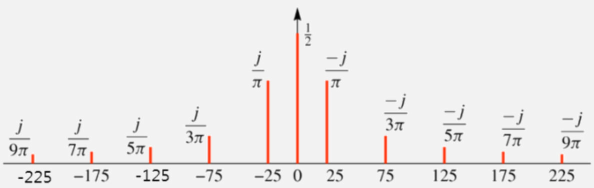


퓨리에 합성 실습

2. 구형파에 대한 퓨리에 합성

실습과제 12-04

다음의 구형파 주기 신호에 대해 퓨리에 합성을 해 보자



$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \frac{1}{2}T_0 \\ 0 & \frac{1}{2}T_0 \le t < T_0 \end{cases}$$

for $T_0 = 0.04\,\text{sec.}$

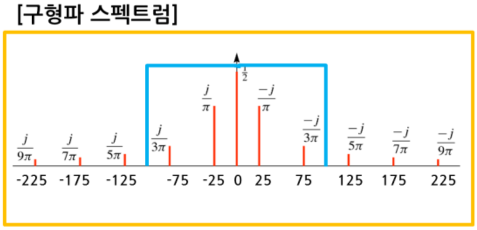
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

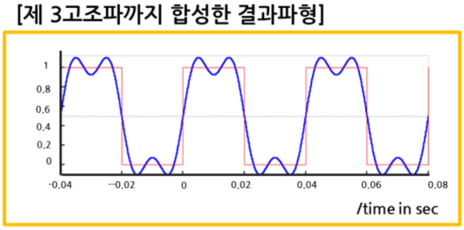
[과제해설]

- 스펙트럼 분석에 의하여 퓨리에 합성을 통한 주기 신호를 복원할 수 있는지를 Matlab을 통하여 확인해 보자.
- 그림과 같이 스펙트럼표현에서 DC값, 기본 주파수(25Hz)와 3번째 고조파(75Hz)를 합성한 신호를 출력해보고 실제 구형파와 합성된 신호가 얼마나 일치하는지 확인해 보자. 제 25번째 고조파까지 또는 101번째 고조파까지도 합성해 보자.

[구형파 스펙트럼]

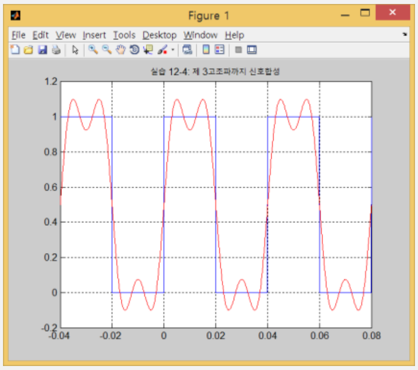


[제 3고조파까지 합성한 결과파형]



- 제 3고조파까지 합성

```
%실습 12-3-3   Ex12_3_3.m, 25번째 고조파까지 합성
clf;
t = -0.04:.0001:0.08;
y = 0.5*(square(2*pi*25*t)+1);  % 25Hz 구형파 신호를 생성
plot(t,y);
grid on % 그림화면에 격자를 그린다.
axis([-0.04 0.08 -0.2 1.2]);
title('실습 12-3-3: 제 3고조파까지 신호합성');
hold on;

y=0.5;   % k=0인 DC 값
n = 3;   % k=3번째 까지의 고조파신호 합성
for k=-n:2:n,
    y=y+(-j/(pi*k))*exp(j*2*pi*k*25*t);
end
plot(t,y,'r-');
grid on
```



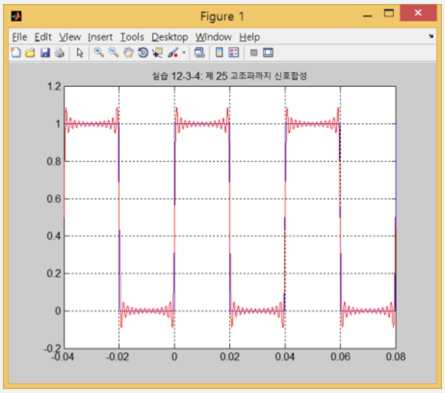
퓨리에 합성 실습

2. 구형파에 대한 퓨리에 합성

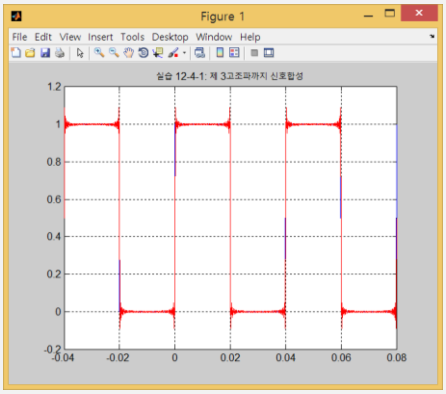
[과제해설-계속]

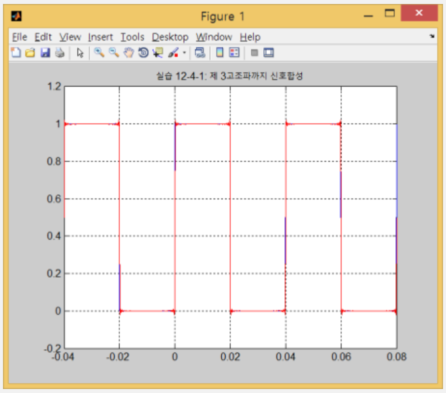
- 제 25고조파까지 합성

```
%실습 12-3-4   Ex12_3_4.m, 25번째 고조파까지 합성
clf;
t = -0.04:.0001:0.08;
y = 0.5*(square(2*pi*25*t)+1);  % 25Hz 구형파 신호를 생성
plot(t,y);
grid on % 그림화면에 격자를 그린다.
axis([-0.04 0.08 -0.2 1.2]);
title('실습 12-3-4: 제 25번째 고조파까지 신호합성');
hold on;

y=0.5;   % k=0인 DC 값
n = 25;   % k=25번째 까지의 고조파신호 합성
for k=-n:2:n,
   y=y+(-j/(pi*k))*exp(j*2*pi*k*25*t);
end
plot(t,y,'r-');
grid on;
```



- 101번째 고조파 / 501번째 고조파까지 합성





핵심정리

스펙트럼을 이용한 신호합성 실습

- 퓨리에 급수
  - 임의의 주기 신호를 스펙트럼으로 표현하기 위한 방법
  - 임의의 주기 신호가 어떠한 주파수 성분을 얼마만큼의 크기로 가지고 있는지를 해석
  - 퓨리에 합성(Synthesis)식과 퓨리에 분석(Analysis)식으로 표현
- 퓨리에 분석
  - 임의의 주기 신호 x(t)에서 각 정현파의 주파수 성분에 대한 계수를 계산하는 식

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j(2\pi/T_0)kt}dt$$

퓨리에 합성 실습

- 퓨리에 합성
  - 임의의 주기 신호 x(t)는 복소지수 함수(또는 정현파)로 표현 가능하다는 것을 의미
  - 즉, 임의의 주기 신호는 기본 주파수의 정현파와 고조파들의 합으로 합성할 수 있다는 것을 의미

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi/T_0)kt}$$

디지털신호처리

강의노트

퓨리에 변환

5주차 1차시

학습내용

- ❖ 비주기 신호에 대한 주파수 표현
- ❖ 퓨리에 변환
- ❖ 임펄스 신호

학습목표

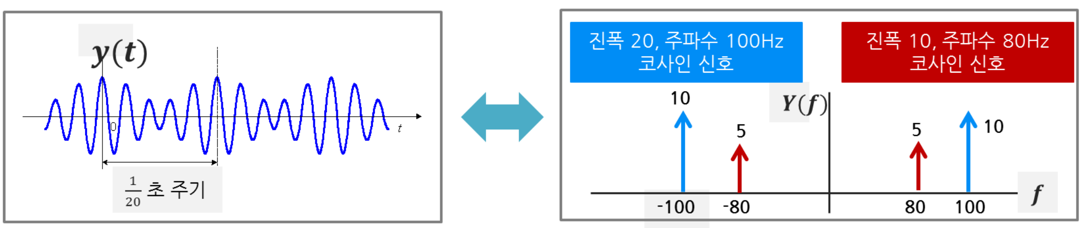
- ❖ 비주기 신호에 대한 스펙트럼을 표현할 수 있다.
- ❖ 퓨리에 변환의 정의와 퓨리에 급수와의 차이점을 설명할 수 있다.
- ❖ 임펄스 신호의 정의를 이해하고, 임펄스 신호에 대한 성질을 설명할 수 있다.

비주기 신호에 대한 주파수 표현

1. 비주기 신호의 주파수 분석

1) 임의의 신호에 대한 시간 축 표현

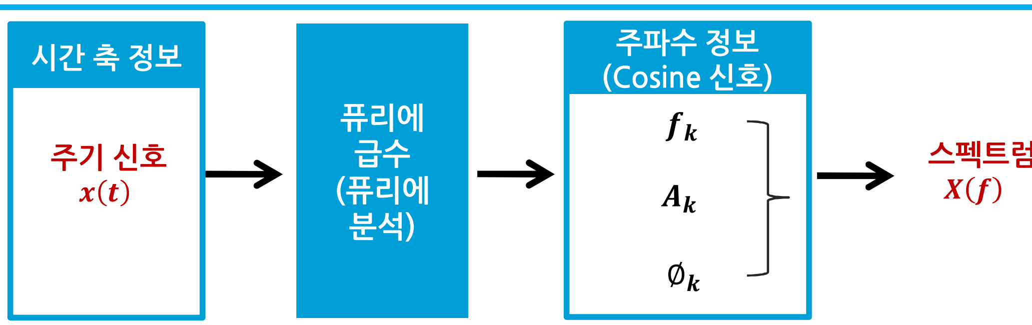
- 임의의 신호에 대한 시간 축인 $y(t)$신호의 의미 파악이 어려움
  → 주파수 영역 표현(스펙트럼 표현)
- 두 개의 주파수의 합으로 주파수 축을 표현(주파수 스펙트럼)하면 효율적인 정보전달 가능



[시간 축에서의 주기 신호 y(t)] [주파수 축에서의 스펙트럼 표현 $Y(f)$]

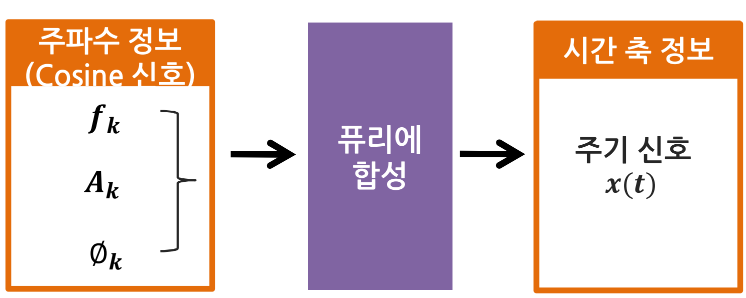
2) 퓨리에 급수(Fourier Series)

- 연속적인 주기 신호 $x(t)$을 퓨리에 분석하면 $x(t)$신호에 대한 스펙트럼 표현 가능



3) 퓨리에 합성

- 주파수 정보를 이용, 퓨리에 합성하면 시간 영역의 주기 신호를 합성 가능함



비주기 신호에 대한 주파수 표현

2. 퓨리에 급수의 시간이동 성질

1) 시간 축 이동과 퓨리에 급수 계수

- 주파수: 시간에 따른 신호의 변화율과 관계 있음
- 시간축 이동: 진폭 및 주파수 성질은 변하지 않으며 기준 시간에 대한 신호의 위치 정보인 위상정보 변화를 의미함

$$x(t) \xrightarrow{\text{퓨리에 분석}} X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi f_0 kt}dt$$

$$x(t-\tau) \xrightarrow{\text{퓨리에 분석}} X_k e^{-j2\pi k f_0 \tau}$$

(시간축 이동)

2) 증명

- $x(t-\tau)$에 대한 퓨리에 계수를 Y_k 라 하면, $Y_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t-\tau)e^{-j2\pi f_0 kt}dt$
- $t-\tau = t'$ 로 정의하면,

$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t')e^{-j2\pi f_0 k(t'+\tau)}dt' = \left(\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t')e^{-j2\pi f_0 kt'}dt'\right)e^{-j2\pi f_0 k\tau} = X_k e^{-j2\pi k f_0 \tau}$$

3) 시간 축 이동과 연속 시간 퓨리에 급수 계수의 위상 변화 관계

$x(t)$ 의 연속 시간 퓨리에 급수 계수 = X_k

우로 $t=\tau$ 이동

$x(t-\tau)$ 의 연속 시간 퓨리에 급수 계수 = $X_k e^{-j2\pi f_0 \tau}$

$x(t+\tau)$ 의 연속 시간 퓨리에 급수 계수 = $X_k e^{j2\pi f_0 \tau}$

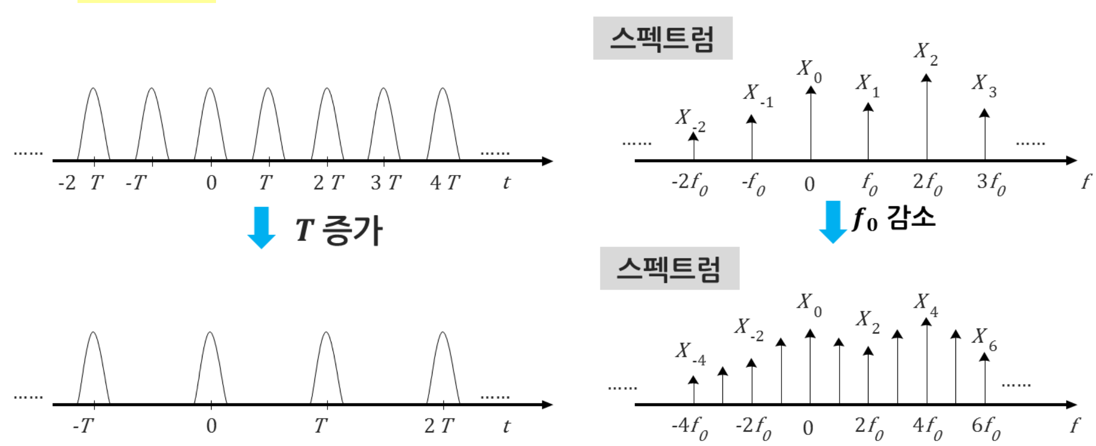
좌로 $t=\tau$ 이동

비주기 신호에 대한 주파수 표현

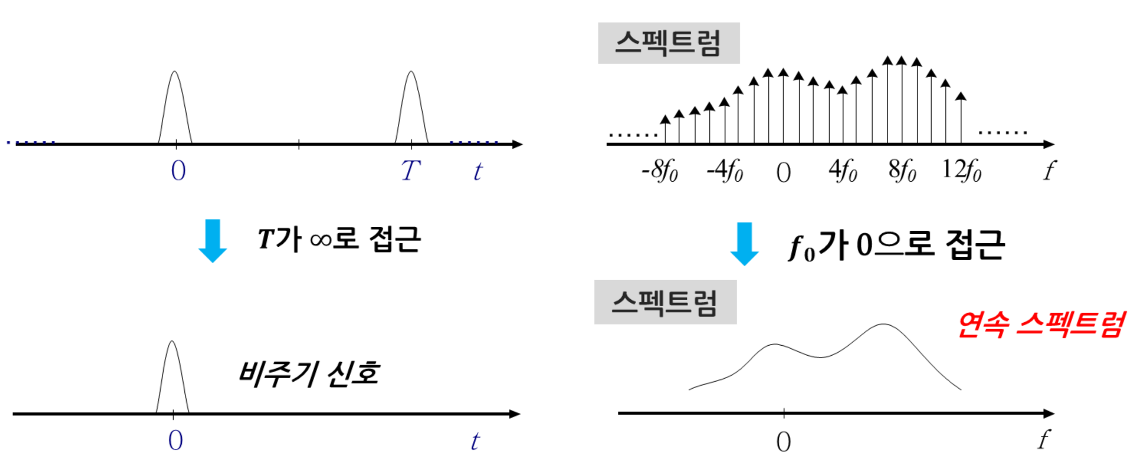
3. 주기와 스펙트럼의 관계

- 주기 T증가 ⇨ 기본주파수 f_0감소 ⇨ 스펙트럼의 간격 감소

$$f_0 = \frac{1}{T}$$



- 주기를 증가시키는 과정을 통하여 연속 시간 퓨리에 급수로부터 연속 시간 퓨리에 변환을 유도하는 과정

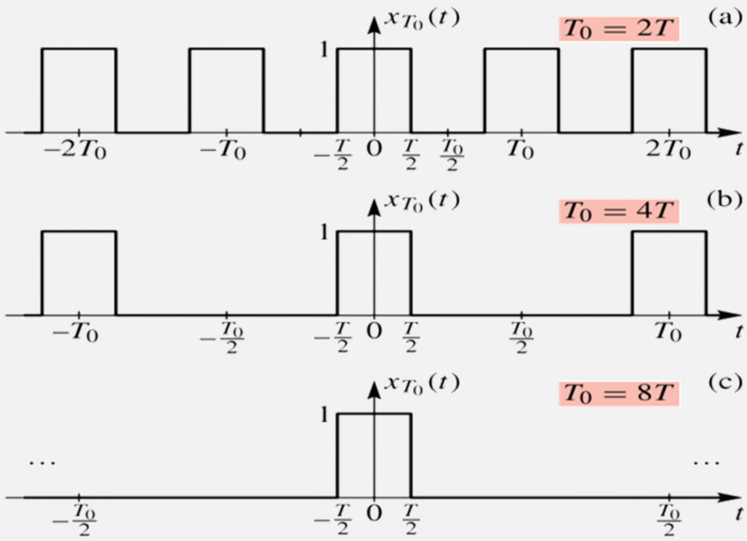


비주기 신호에 대한 주파수 표현

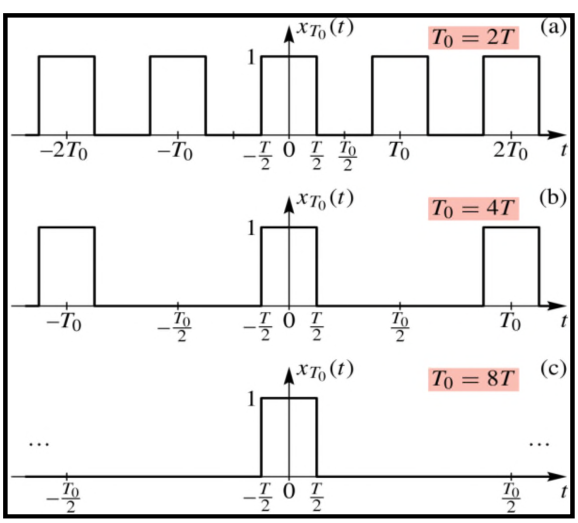
3. 주기와 스펙트럼의 관계

예제 13-01

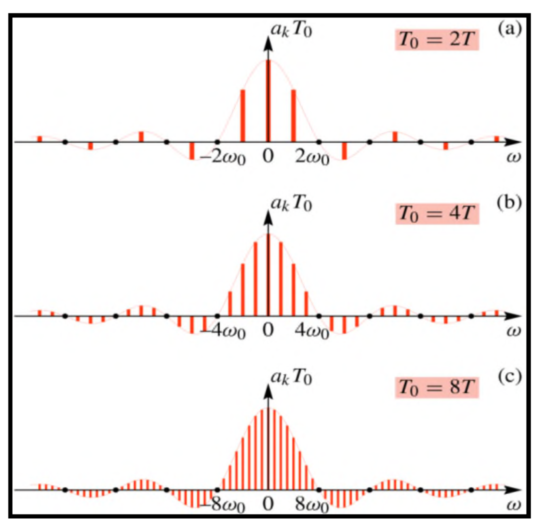
다음 그림과 같이 구형파의 주기가 증가할 때 실제 스펙트럼은 어떻게 변화하는지 확인해 보자.



[예제풀이]



[실제 주기 신호의 주기를 증가시키는 경우의 시간축 신호파형]



[주기에 대한 주파수 스펙트럼의 변화]

푸리에 변환

1. 연속 시간 푸리에 변환

1) 주기 신호

- 주기 T_0인 주기 신호는 푸리에 급수에 의하여 복소지수 신호의 합(정현파 신호)으로 표현가능

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k) e^{j\omega_0 kt} \qquad a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

2) 비주기 신호

- 주기 신호의 주기를 무한대로 하면 비주기 신호
- 비주기 신호의 스펙트럼은 연속된 형태의 스펙트럼

$$\lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = x(t), \quad for \quad -\infty < t < \infty$$

2. 푸리에 변환 정의

1) 연속 시간 푸리에 변환

- 비주기 연속신호 $x(t)$로 부터 $X(j\omega)$ 를 구하는 것

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

2) 연속 시간 푸리에 역변환

- 주파수영역의 푸리에 변환 $X(j\omega)$ 로 부터 "시간영역" $x(t)$를 구하는 것

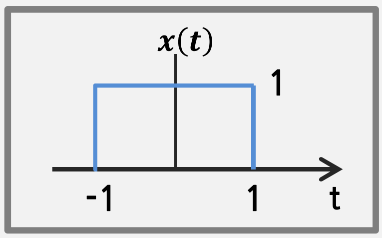
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

푸리에 변환

3. 푸리에 변환 예제

예제 13-02

다음 그림과 같은 연속 비주기 신호 $x(t)$의 스펙트럼(푸리에 변환)을 구해 보자.



[비주기 구형파 신호]

[예제풀이]

- (t)는 비주기 신호, 연속 시간 푸리에 변환을 이용하여 스펙트럼 표현

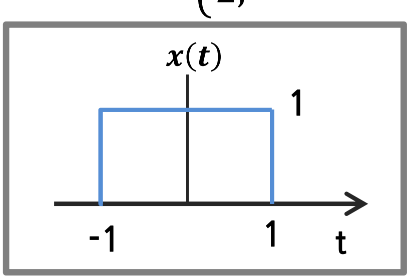
$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-1}^{1}1e^{-j2\pi ft}dt=\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big|_{-1}^{1},\quad f\neq 0$$

$$=\frac{e^{j2\pi f}-e^{-j2\pi f}}{j2\pi f}=\frac{\sin(2\pi f)}{\pi f},\quad f\neq 0$$

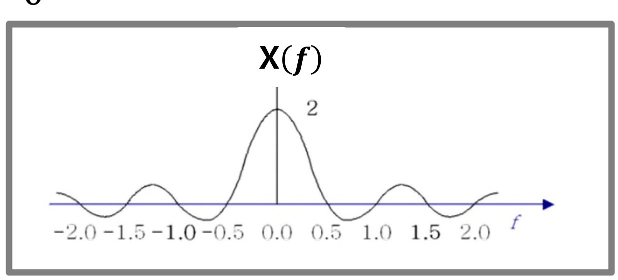
$$=2\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f}=2\sin c(2\pi f),\quad f\neq 0$$

$$X(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi 0t}dt=\int_{-1}^{1}1dt=2,\quad f=0$$

$$X(f)=\begin{cases}2sinc(2\pi f), & f\neq 0\\ 2, & f=0\end{cases}$$



[비주기 구형파 신호]



[비주기 구형파 신호의 스펙트럼]

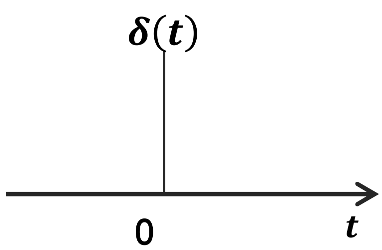
임펄스 신호

1. 임펄스 신호란?

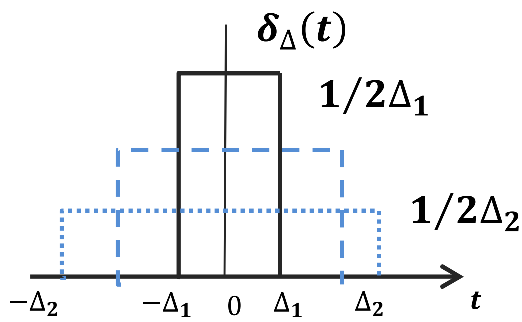
1) 임펄스 함수(Unit Impulse Function)

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t) = \delta(t)$$



[단위 임펄스 함수]



[구형파 함수의 극한]

2) 임펄스 신호의 정의

- t=0 인 경우만 신호가 존재, 신호가 집중되어 있음
- t≠0 구간에서는 모두 0인 신호

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

- 임펄스 신호의 적분 =1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

임펄스 신호

2. 샘플링 성질

- 임의의 신호 $x(t)$에 임펄스 신호를 곱하고, 적분하면 임펄스가 존재하는 순간 값을 (t=0 인 순간) 샘플링하는 성질

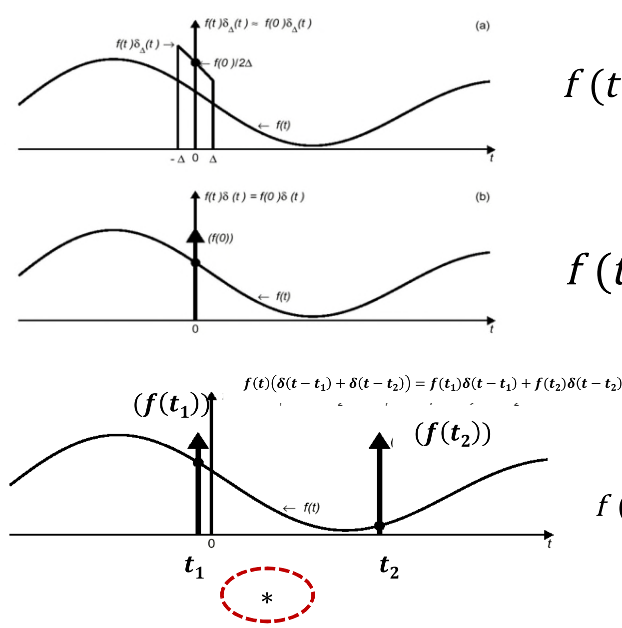
$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad (t_1 < 0 < t_2)$$

- 만약 t_0 가 t_1과 t_2사이의 시간이라고 하면 샘플링 성질에 의하여

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \qquad (t_1 < t_0 < t_2)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t-t_0)dt = 0 \qquad (t_0 < t_1 \ or \ t_2 < t_0)$$

- 임의의 $f(t)$ 연속 신호에 임펄스 함수를 곱한 것을 샘플링 성질이라고 함
- 일정한 주기의 임펄스 신호를 곱해주면 이산 신호를 얻을 수 있음



$$f(t)\delta_\Delta(t) \approx f(0)\delta_\Delta(t)$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

임펄스 신호

2. 샘플링 성질

예제 13-03

다음 연속신호 **$y(t)$**신호를 **$t=1/80$**에서 샘플링 할 경우 임펄스 신호로 샘플링 과정을 표현해 보자.

$$y(t) = \sin(20\pi t)$$

[예제풀이]

$$y(t)\big|_{t=\frac{1}{80}} = \sin(20\pi t)\delta(t-\frac{1}{80}) = \sin(20\pi(\frac{1}{80}))\delta(t-\frac{1}{80})$$
$$= \sin(0.25\pi)\delta(t-\frac{1}{80}) = 0.707\delta(t-\frac{1}{80})$$

- 임펄스 신호의 성질 정리

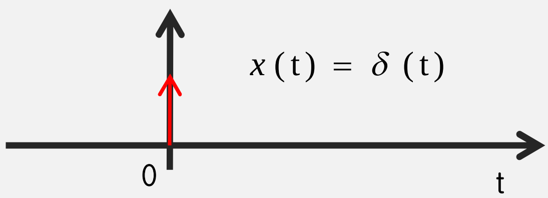
$\delta(t-t_0)=0, \quad t \neq t_0$	$t = t_0$ 순간에만 신호값 존재
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1$	신호의 적분값은 1
$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$	임의의 신호와 곱하면 그 신호를 샘플링
$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$	임의의 함수 $f(t)$에서 하나의 값을 추출

임펄스 신호

3. 임펄스 신호의 푸리에 변환

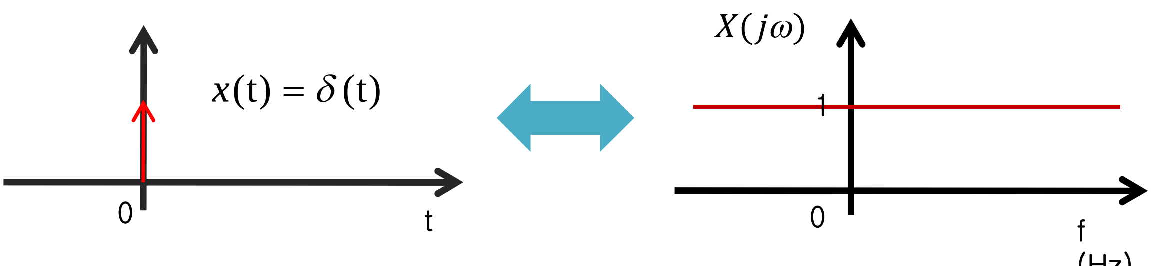
예제 13-04

다음 임펄스 신호(Impulse Signal)에 대한 푸리에 변환(스펙트럼 표현)을 구해 보자.



[예제풀이]

- 푸리에 변환식에 의해, $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$



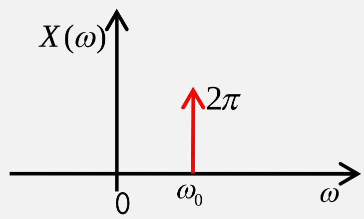
[시간 영역] [주파수 영역]

임펄스 신호

[한걸음 더] 임펄스 신호의 푸리에 변환 예제 풀이

한걸음 더

푸리에 변환 $X(\omega)$가 다음과 같을 때 원신호 $x(t)$는 어떻게 되는가?



$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

전문가 해설을 통해 풀이를 확인해보세요.

[과제해설]

- 푸리에 역변환식은 Radian 주파수 ω에 의하여 다음과 같이 표현됨
- 차이점은 Radian 주파수와 Hz주파수의 상수 2π에 의하여 다음과 같이 표현됨

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

시간 영역	푸리에 변환	주파수 영역
$e^{j\omega_0 t}$	$\Leftrightarrow$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

핵심정리

비주기 신호에 대한 스펙트럼 표현

- 주기 신호에 대한 스펙트럼 표현에서 신호를 단순히 시간 축에서 이동시키면 진폭 및 주파수 성질은 변하지 않고, 시간 축 이동에 따라 위상정보는 변화함
- 주기 T가 증가할 수록 기본주파수 f_0 는 감소, 스펙트럼 간격은 좁아짐
  ⇨ 주기 T가 무한대로 가는 비주기 신호의 경우 스펙트럼은 연속적이 됨
- 비주기 신호에 대한 스펙트럼 표현은 퓨리에 변환으로 가능함

퓨리에 변환

- 비주기 신호의 스펙트럼은 연속된 형태의 스펙트럼, 퓨리에 변환으로 가능

퓨리에 변환식	퓨리에 역변환식
$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$	$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$

임펄스 신호

- 임의의 한 순간에만 신호가 집중되고, 임펄스 신호를 적분하면 단위면적 1을 가지며, 샘플링 성질을 가지고 있는 신호

디지털신호처리

강 의 노 트

퓨리에 변환의 특징

5주차 2차시

학습내용

- ❖ 연속 시간 신호에 대한 퓨리에 변환
- ❖ 주기 신호에 대한 퓨리에 변환

학습목표

- ❖ 연속 시간 신호에 대하여 퓨리에 변환을 수행할 수 있다.
- ❖ 주기 신호에 대한 퓨리에 변환을 수행할 수 있다.

연속 시간 신호에 대한 퓨리에 변환

1. 다양한 신호에 대한 퓨리에 변환과 역변환

예제 14-01

지수 신호 ***x*(*t*)**에 대한 퓨리에 변환 ***X*(*jw*)**를 구해보자.

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \qquad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

[예제풀이]

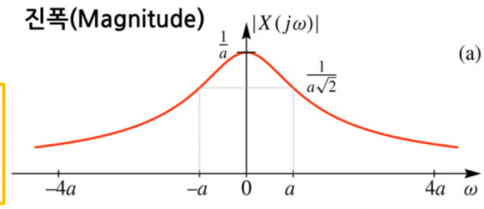
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a+j\omega}$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

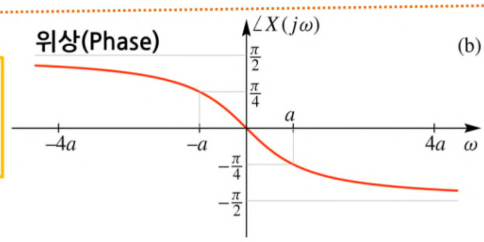
[시간 영역] [주파수 영역]

$$X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$



$$\left|\frac{1}{a+j\omega}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\right|$$

$$X(-j\omega) = X^{*}(j\omega)$$



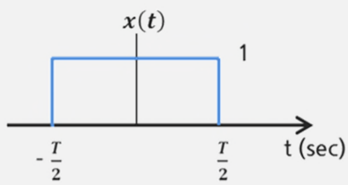
$$\angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

연속 시간 신호에 대한 퓨리에 변환

1. 다양한 신호에 대한 퓨리에 변환과 역변환

예제 14-02

다음 구형파 신호에 대한 퓨리에 변환을 구해보고, 실제 스펙트럼을 그려보자.

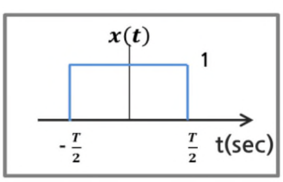


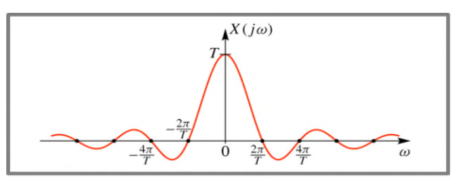
$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < {}^{T}/_{2} \\ 0 & |t| > {}^{T}/_{2} \end{cases}$$

[예제풀이]

$$X(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} (1) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}}{-j\omega}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \Leftrightarrow X(j\omega) = T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}$$



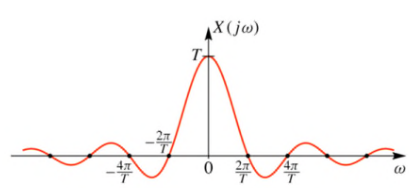


$X(j\omega) = T \sin c(\omega T/2)$

- 참고: 싱크(sinc) 함수

- 신호와 시스템에서 많이 사용되는 함수, 진폭이 감소하는 사인신호

$$X(j\omega) = T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = T \cdot \sin c(\omega T/2)$$



- **ω=0 에서의 값은 구형파의 면적**
- sinc 함수 = 0이 되는 값은 sin 함수 = 0 되는 주파수

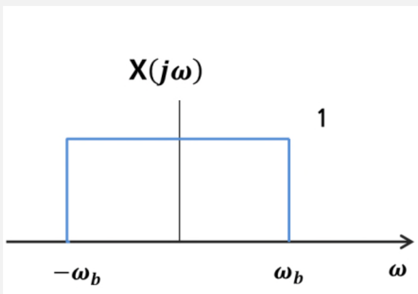
$$\sin(\omega T/2) = 0 \quad 즉, \omega T/2 = \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots, \omega = \pm\frac{2\pi}{T}, \pm\frac{4\pi}{T}, \cdots$$

연속 시간 신호에 대한 퓨리에 변환

1. 다양한 신호에 대한 퓨리에 변환과 역변환

예제 14-03

퓨리에 변환이 X($j\omega$)인 경우 시간 영역의 $x(t)$를 계산하기

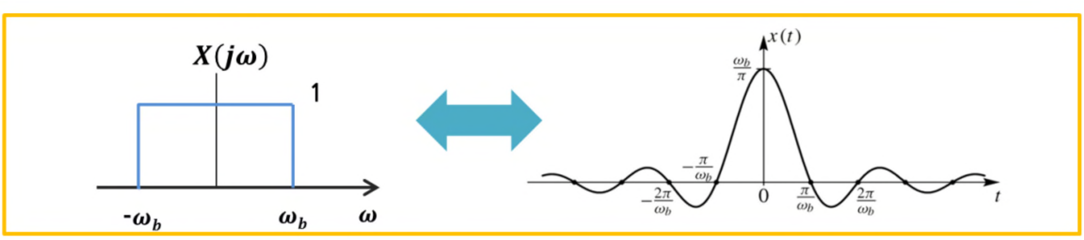


$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_b \\ 0 & |\omega| > \omega_b \end{cases}$$

[예제풀이]

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_b}^{\omega_b} 1e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega t}}{jt}\bigg|_{-\omega_b}^{\omega_b} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega_b t} - e^{-j\omega_b t}}{jt}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega_b t} - e^{-j\omega_b t}}{jt} \qquad x(t) = \frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t}$$



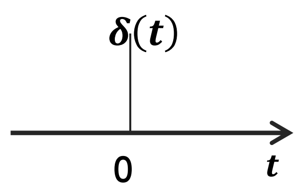
$$x(t) = \frac{\sin(\omega_b t)}{\pi t} = \frac{\omega_b}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_b t) \Leftrightarrow X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_b \\ 0 & |\omega| > \omega_b \end{cases}$$

- 주파수 영역의 대역폭 ω_b가 커지면 커질수록 시간 영역에서 처음으로 0이 되는 위치는 $t=0$에 더 가깝게 이동, 시간폭은 더 작아짐

연속 시간 신호에 대한 퓨리에 변환

2. 임펄스 신호에 대한 퓨리에 변환과 역변환

- 임펄스 함수 임의의 한 순간에만 신호가 집중되고, 임펄스 신호를 적분하면 단위면적 1을 가지며,
  샘플링 성질을 가지고 있는 신호



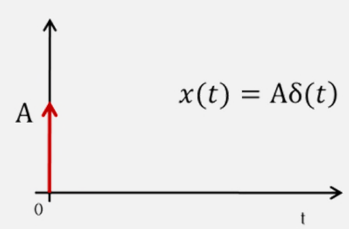
[단위 임펄스 함수]

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$$

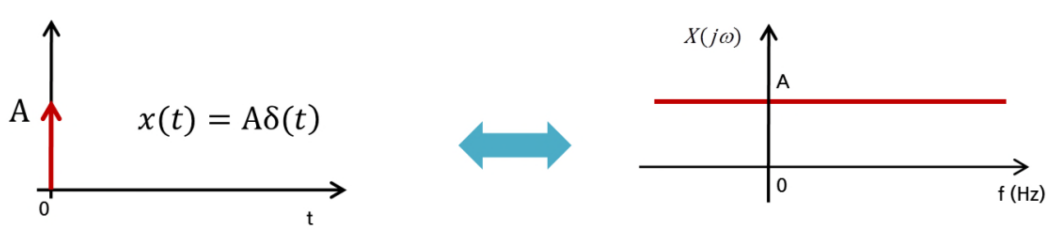
예제 14-04

다음 임펄스 신호에 대한 퓨리에 변환(스펙트럼 표현)을 구해 보자.



[예제풀이]

- 퓨리에 변환식에 의하여 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t) e^{-j\omega t} dt = A$



[시간 영역] [주파수 영역]

주기 신호에 대한 푸리에 변환

1. 정현파 신호에 대한 푸리에 변환

- 주파수 ω_0의 복소지수 신호는 주파수 ω_0 에서만 0이 아닌 푸리에 변환을 가짐

$$e^{j\omega_0 t} \quad \xleftrightarrow{\text{푸리에 변환}} \quad 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

[시간 영역] [주파수 영역]

예제 14-05

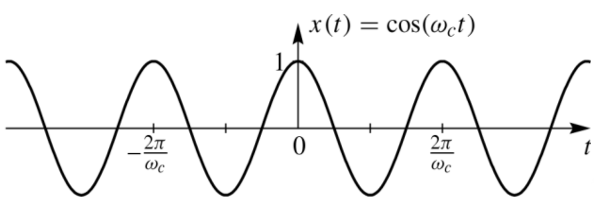
다음 정현파 신호에 대한 푸리에 변환은?

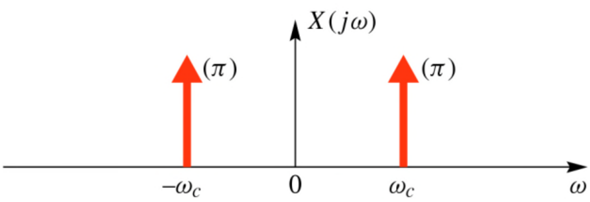
$$x(t)=\cos(\omega_c t)$$

[예제풀이]

$$x(t)=\cos(\omega_c t)=\frac{e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}}{2}=\frac{1}{2}e^{j\omega_c t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_c t}$$

$$\therefore X(j\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c)$$





$$x(t)=A\cos(\omega_c t+\varphi) \quad \longleftrightarrow \quad X(j\omega)=\pi Ae^{j\varphi}\delta(\omega-\omega_c)+\pi Ae^{-j\varphi}\delta(\omega+\omega_c)$$

주기 신호에 대한 퓨리에 변환

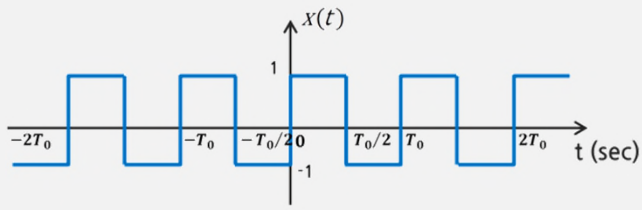
2. 일반적인 주기 신호에 대한 퓨리에 변환

- 주기가 T_0 인 신호 $x(t)$는 퓨리에 급수

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

예제 14-06

다음 구형파 신호에 대한 퓨리에 변환은?

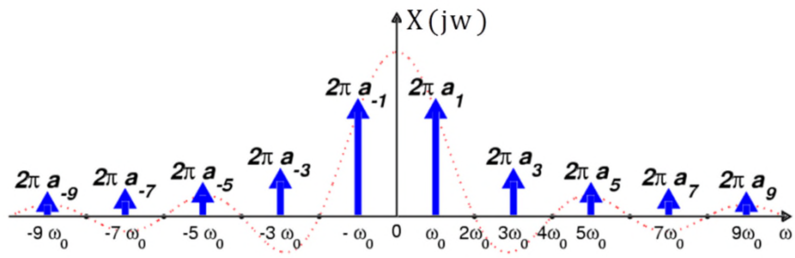


[예제풀이]

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2}(1)e^{-j\omega_0kt}dt+\frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0}(-1)e^{-j\omega_0kt}dt=\left.\frac{e^{-j\omega_0kt}}{-j\omega_0kT_0}\right|_0^{T_0/2}-\left.\frac{e^{-j\omega_0kt}}{-j\omega_0kT_0}\right|_{T_0/2}^{T_0}$$

$$=\frac{1-e^{-j\pi k}}{j\pi k}$$

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$



핵심정리

연속 시간 신호에 대한 퓨리에 변환

- 다양한 신호에 대한 퓨리에 변환식

$$x(t) = e^{-t}u(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}$$

$$x(t) = A\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = A$$

주기 신호에 대한 퓨리에 변환

- 정현파 신호

$$x(t) = \cos(\omega_c t) \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_c) + \pi\delta(\omega + \omega_c)$$

- 일반적인 주기 신호

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

디지털신호처리

강 의 노 트

퓨리에 변환의 성질과 실습

5주차 3차시

학습내용

- ❖ 퓨리에 변환 성질
- ❖ 퓨리에 변환 실습

학습목표

- ❖ 퓨리에 변환의 성질을 설명할 수 있다.
- ❖ 간단한 퓨리에 변환 실습을 통하여 퓨리에 변환의 특징을 설명할 수 있다.

퓨리에 변환 성질

1. 선형성(Linearity Property)

- 퓨리에 변환은 선형성을 가짐
- 선형성: 중첩의 원리가 성립한다는 뜻

시간영역	퓨리에 변환	주파수 영역
$x_1(t)$	$\Leftrightarrow$	$X_1(j\omega)$
$x_2(t)$		$X_2(j\omega)$
$ax_1(t)+bx_2(t)$		$aX_1(j\omega)+bX_2(j\omega)$

2. 시간 지연(Time Delay Property)

- 시간 이동(지연·선행)에 따라 스펙트럼의 진폭에는 변화가 없고, 위상이 변화함

시간영역	퓨리에 변환	주파수 영역
$x(t)$	$\Leftrightarrow$	$X(j\omega)$
$x(t-t_d)$		$e^{-j\omega t_d}X(j\omega)$

$$\because Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-t_d)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t')e^{-j\omega(t'+t_d)}dt'=e^{-j\omega t_d}\int_{-\infty}^{\infty}x(t')e^{-j\omega t'}dt'$$

$$=e^{-j\omega t_d}X(j\omega)$$

※ $t'=t-t_d,\ t=t'+t_d,\ dt'=dt$

퓨리에 변환 성질

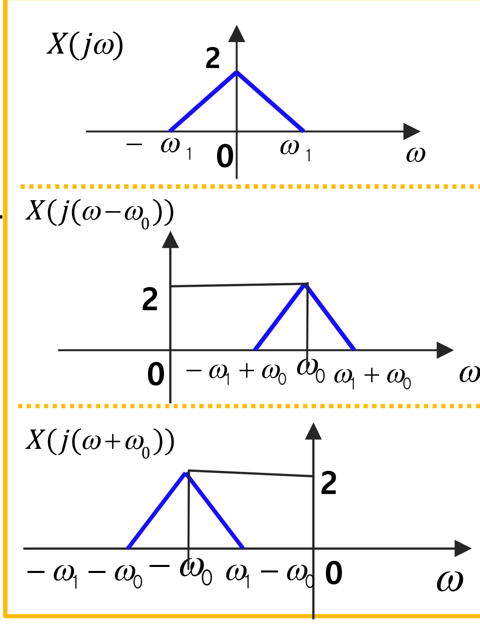
3. 주파수 이동(Frequency Shifting)

- 시간영역에서 임의의 신호 $x(t)$에 복소지수 함수의 곱은 스펙트럼 $X(j\omega)$를 주파수 이동하는 효과가 있음

시간영역		주파수 영역
$x(t)$	퓨리에 변환 ⟷	$X(j\omega)$
$x(t)e^{j\omega_0 t}$		$X(j(\omega-\omega_0))$

$$\because Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}\, e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega' t}dt$$

$$=X(j\omega')=X(j(\omega-\omega_0))$$ ※ $\omega'=\omega-\omega_0$ 로 두면,

시간영역		주파수 영역
$x(t)$		
$x(t)e^{j\omega_0 t}$	퓨리에 변환 ⟷	
$x(t)e^{-j\omega_0 t}$		

푸리에 변환 성질

4. 크기 조정(Scaling)

1) 크기 조정이란?

- 시간영역에서 시간 신호를 늘리면, 푸리에 변환은 압축되는 성질
- 시간 신호를 압축하면, 푸리에 변환은 늘어나는 성질

시간영역	푸리에 변환	주파수 영역
$x(t)$	$\Longleftrightarrow$	$X(j\omega)$
$x(at)$		$\frac{1}{\lvert a \rvert} X(j(\frac{\omega}{a}))$

$$\because Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j(\frac{\omega}{a})t'} (\frac{1}{a} dt') = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j(\frac{\omega}{a})t'} dt'$$

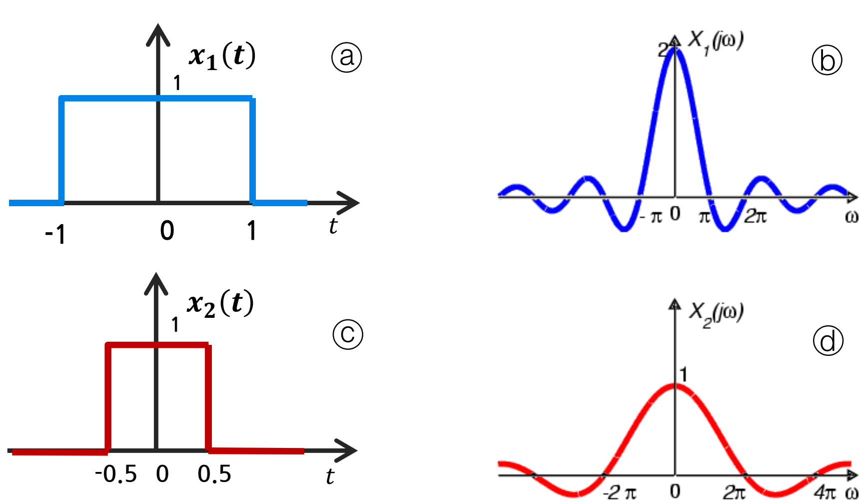
$$= \frac{1}{a} X(j(\frac{\omega}{a}))$$

※ $a>0$ 그리고 $t'=at$ 로 두면, $dt'=adt$

2) 특징

$$x(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{\lvert a \rvert} X(j(\frac{\omega}{a}))$$

$$x_2(t) = x_1(2t)$$



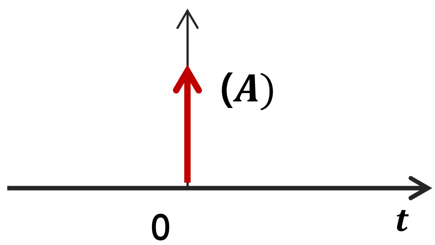
퓨리에 변환 성질

4. 크기 조정(Scaling)

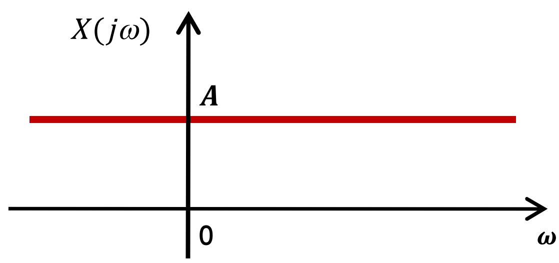
3) 임펄스 신호

- 신호의 대역폭(Bandwidth)을 설명할 때 유용
- 짧은 길이 신호는 광대역(Wide Bandwidth)
  → 신호의 지속시간이 0인 임펄스 신호는 무한대 대역폭의 퓨리에 변환을 가짐

$$x(t) = A\delta(t)$$



[임펄스 함수]



[임펄스 신호에 대한 퓨리에 변환]

퓨리에 변환 실습

1. 진폭(Magnitude)과 위상(Phase) 스펙트럼

실습과제 15-01

다음 $(t) = e^{-at}u(t)$ 신호에 대한 퓨리에 변환의 진폭 및 위상 스펙트럼을 Plot 해 보자. a값을 변경하면, 스펙트럼은 어떻게 변하는지 Matlab으로 확인해 보자.

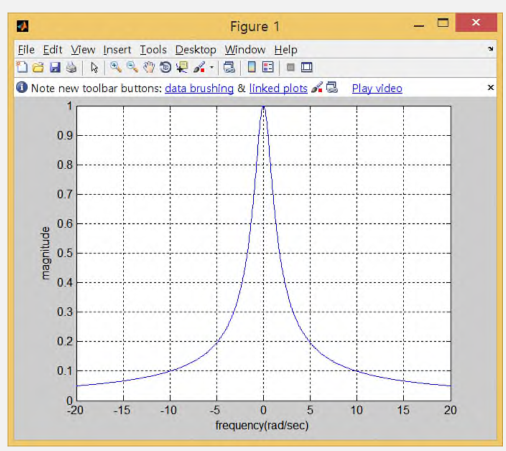
$$x(t) = e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

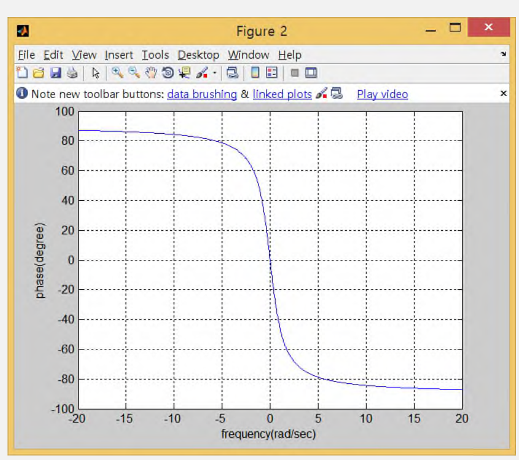
$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \qquad \angle X(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
% 실습 15-1: Exp15_1.m
% X = 1/(a+jw);
a = 1;
w = -20:.05:20;
X = 1./(a+j*w);
mag = abs(X);
plot(w,mag);
axis([-20 20 0 1]);
xlabel('frequency(rad/sec)');
ylabel('magnitude');
grid on
phase = angle(X);
phase = phase*180/pi; % 각도 degree로 변환
figure
plot(w,phase);
xlabel('frequency(rad/sec)');
ylabel('phase(degree)');
grid on
```





퓨리에 변환 실습

2. 시간영역의 변화에 대한 주파수의 관계

실습과제 15-02

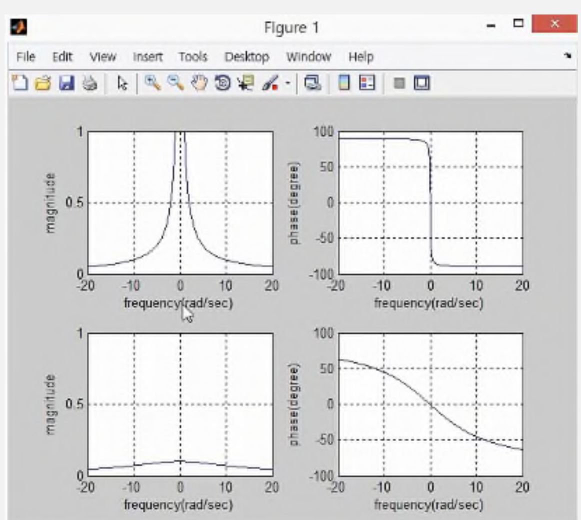
실습 1에서 지수 신호의 a 값의 크기를 변화(a=0.1, 1, 5, 10, 20) 하면서 a값의 변화에 대한 시간 영역에서의 신호와 퓨리에 변환한 주파수 영역에서의 스펙트럼을 Plot 한 후, 시간 영역의 변화에 대한 주파수 영역에서의 주파수가 어떠한 관계가 있는지 주파수 스펙트럼을 보고 주요 확인 내용을 참고하여 확인해 보자.

- a값이 커질수록, 시간영역에서의 특징은 어떠한가?
- 신호의 변화가 더 커지는가 작아지는가? 즉, 시간영역에서 a 값이 커질수록 고주파 성분/저주파 성분이 더 많아지는가?
- 이러한 점을 고려하여 이때 주파수적인 측면은 어떻게 변하는가?

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
% 실습 15-1: Exp15_1_2.m
% X = 1/(a+jw);
a = 0.1;
w = -20:.05:20;
X = 1./(a+j*w);
mag = abs(X);

subplot(2,2,1);
plot(w,mad);
axis([-20 20 0 1]);
xlabel('frequency(rad/sec)');
ylabel('magnitude');
grid on
phase = angle(X);
phase = phase*180/pi; % 각도 degree로 변환

subplot(2,2,2);
plot(w,phase(degree)');
xlabel('frequency(rad/sec)');
ylabel('phase(degree)');
grid on

a = 10;
w = -20:.05:20;
X = 1./(a+j*w);
mag = abs(X);
```

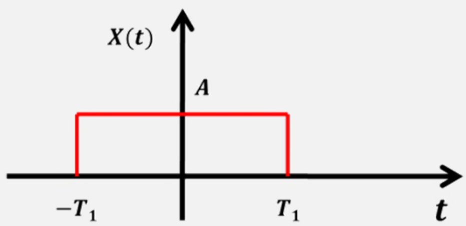


퓨리에 변환 실습

3. 구형파 신호에 대한 퓨리에 변환

실습과제 15-02

그림 같은 구형파 신호에 대한 퓨리에 변환은 다음과 같다. T_1 값의 변화에 따라서 주파수 영역의 X($j\omega$)가 어떻게 변화하는지 Matlab 프로그램으로 확인해 보고, T_1 값이 증가 함에 따라 시간적인 측면에서의 신호의 특징과 주파수적인 측면에서의 특징을 비교·분석해 보자.

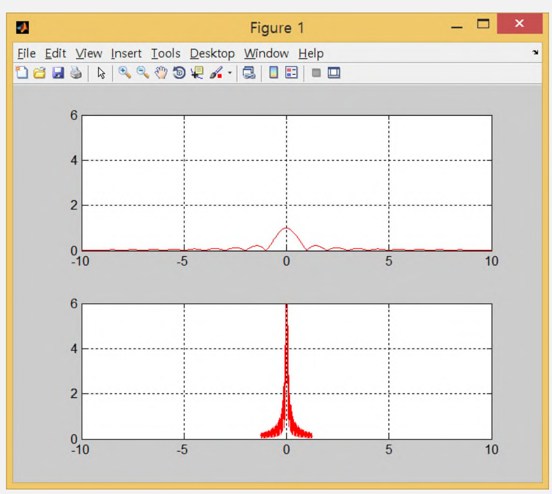


$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} A e^{-j\omega t} dt = 2A\frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
% 실습 15_2.m, 구형파 주기 신호 퓨리에 변환
%A = 1, T1 = 1인 경우
A = 1; T1 = 1;
f=-4*2*pi/T1:0.01:4*2*pi/T1;

mag = abs(2*A*sin(2*pi*f*T1)./(2*pi*f));
subplot(2,1,1);
plot(f, mag,'r-');
axis([-10 10 0 6]);
grid on;

%A = 1, T1 = 20 인 경우
A = 1; T1 = 20;
f=-4*2*pi/T1:0.01:4*2*pi/T1;

mag = abs(2*A*sin(2*pi*f*T1)./(2*pi*f));
subplot(2,1,2);
plot(f, mag,'r-');
axis([-10 10 0 6]);
grid on;
```



핵심정리

푸리에 변환 성질

- 선형성(Linearity Property): 직선의 성질을 가짐
- 시간지연(Time Delay Property): 시간 이동(지연 또는 선행)에 따라 스펙트럼의 진폭에는 변화가 없고, 위상이 변화함
- 주파수 이동(Frequency Shifting): 시간영역에서 임의의 신호 x(t)에 복소지수 함수의 곱은 주파수영역의 스펙트럼 $x(j\omega)$를 주파수 이동하는 효과가 있음
- 크기 조정(Scaling): 시간영역에서 시간 신호를 늘리면, 그 푸리에 변환은 압축되며 시간 신호를 압축하면, 그 푸리에 변환은 늘어남

다양한 신호 및 시스템의 이해

6주차 1차시

학습내용

❖ 신호의 분류

❖ 시스템의 분류

학습목표

❖ 기본적인 신호에 대해 표현할 수 있다.

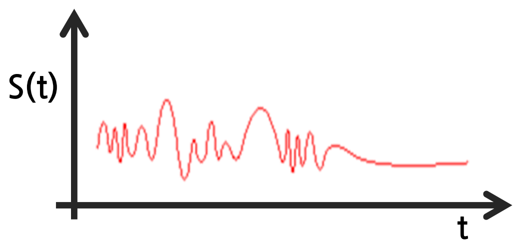
❖ 다양한 시스템의 종류를 이해하고 설명할 수 있다.

신호의 분류

1. 연속 신호와 이산 신호, 디지털 신호

1) 연속 신호

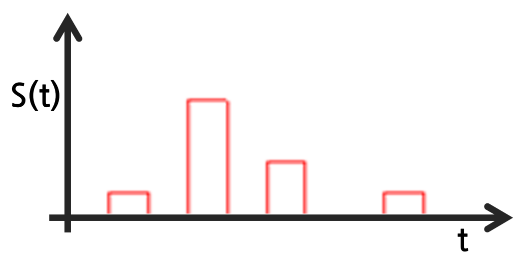
- 모든 연속적인 시간 t에 대하여 정의



[연속 신호 또는 아날로그 신호]
(Continuous or Analog Signal)

2) 이산 신호

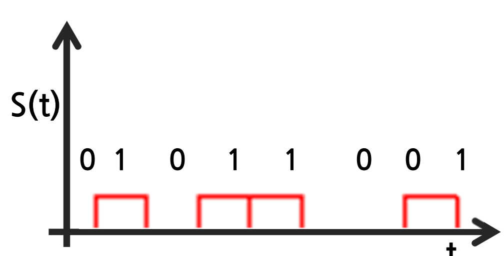
- 특정한 시각에서만 값을 갖는 신호



[이산 신호]
(Discrete Time Signal)

3) 디지털 신호

- 이산적인 특징을 가지고 있으면서 0과 1의 값만으로 이루어진 신호

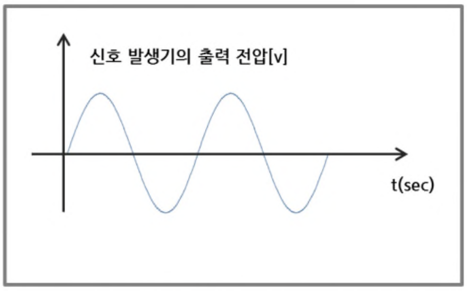


[디지털 신호]
(Digital Signal)

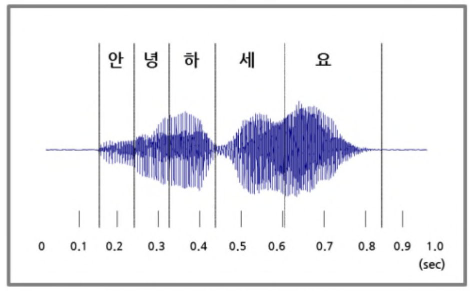
신호의 분류

1. 연속 신호와 이산 신호, 디지털 신호

4) 연속 신호의 예

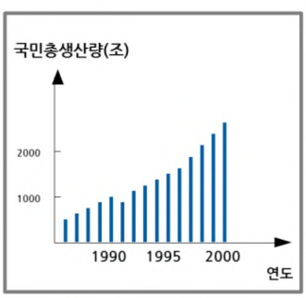


[신호발생기에서 출력되는 정현파 신호]

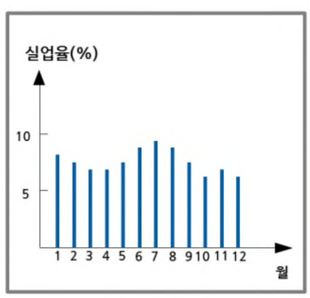


[사람의 음성 신호]

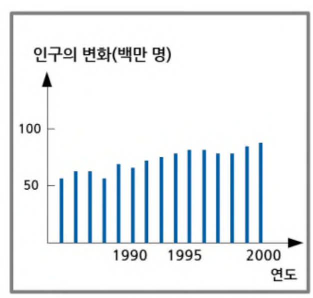
5) 이산 신호의 예



[연도별 국민총생산량(GDP)]

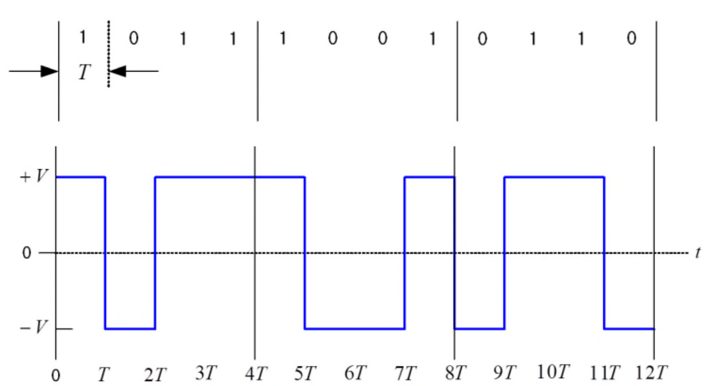


[월별 실업율]



[연도별 인구의 변화]

6) 디지털 신호의 예(2진 데이터)



신호의 분류

2. 결정적 신호와 랜덤 신호

1) 결정적 신호(Deterministic Signal)

- [예] 정현파 신호

2) 랜덤 신호(Random Signal)

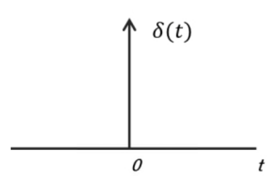
- 불규칙 신호(Undeterministic Signal)라고도 함
- [예] 백색 잡음 신호

2. 단위 임펄스 신호와 단위 계단 신호

1) 신호의 차이

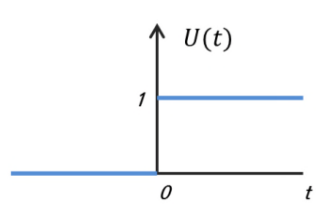
- 단위 임펄스 신호

$$\delta(t) = 0, t \neq 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$$



- 단위 계단 신호

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



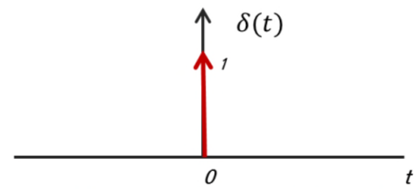
신호의 분류

2) 단위 임펄스 신호와 단위 계단 신호와의 관계

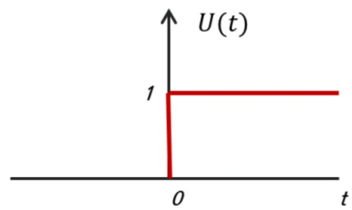
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

ⓐ



ⓑ

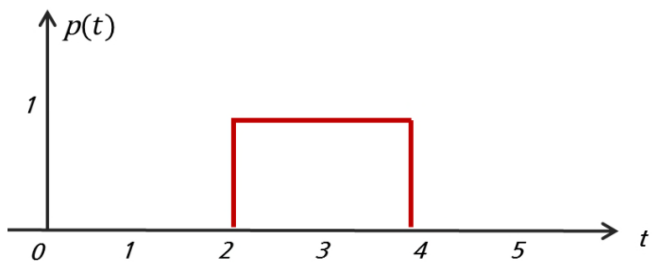


예제 16-01

수식으로 표현된 $p(t)$ 신호를 그려보세요.

$$p(t) = u(t-2) - u(t-4)$$

[예제풀이]

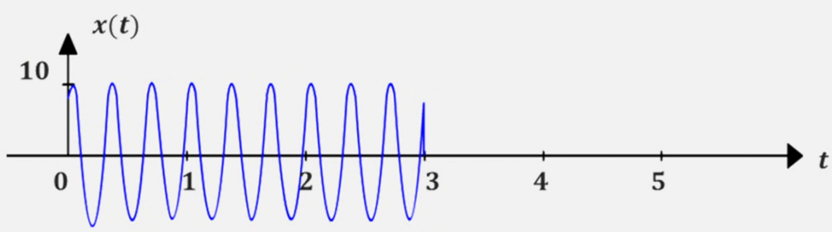


신호의 분류

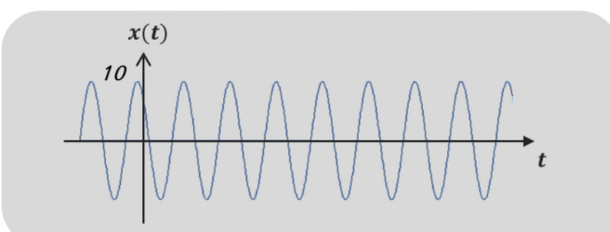
2) 단위 임펄스 신호와 단위 계단 신호와의 관계

예제 16-02

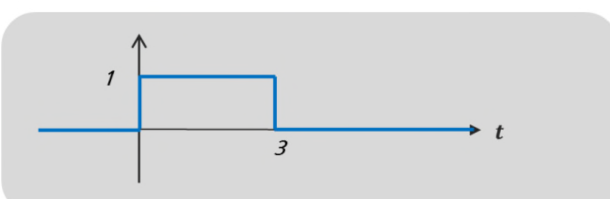
다음과 같은 연속신호를 수식으로 표현해 보자.
(단, 정현파로 표현된 부분은 $10\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\omega t})$이다.



[예제풀이]



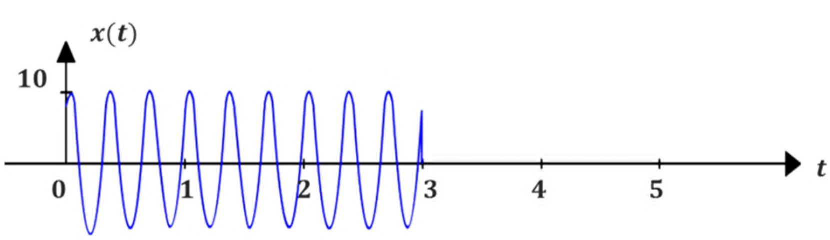
$$y(t) = 10\cos(\omega t)$$



$$p(t) = u(t) - u(t-3)$$

$$x(t) = y(t) * p(t) = 10\cos(\omega t)(u(t) - u(t-3))$$

- [예제1]을 참고하면, $\boldsymbol{x(t)}$는?

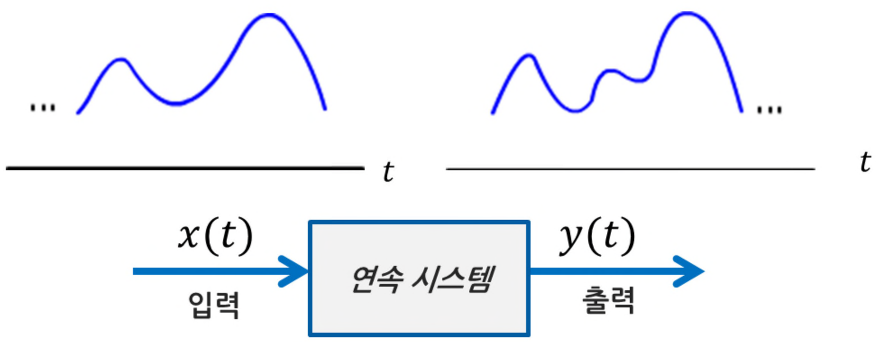


시스템의 분류

1. 연속 시스템과 이산 시스템

1) 연속 시스템

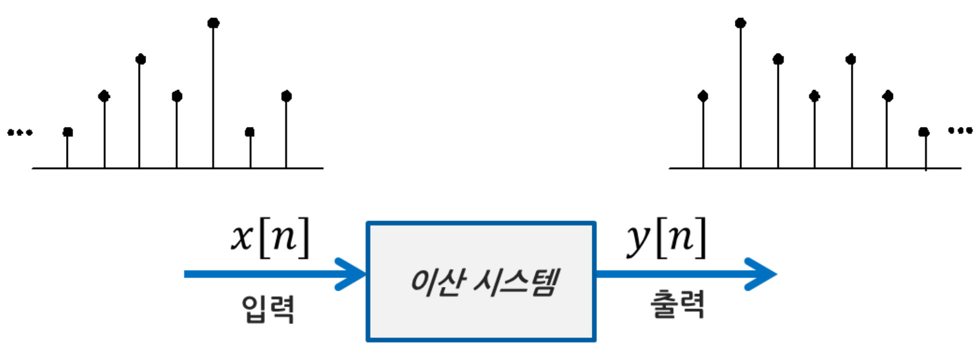
- 연속 신호를 받아들여 출력 신호도 연속 신호를 내보내는 모든 시스템



$$y(t) \equiv S\{x(t)\}$$

2) 이산 시스템

- 이산 신호를 가지고 정해진 연산을 수행하도록 하는 어떤 장치나 알고리즘



$$y[n] \equiv S\{x[n]\}$$

시스템의 분류

2. 선형 시스템과 비선형 시스템

1) 정의

- 선형 시스템(Linear System): 중첩의 원리를 만족하는 시스템
- 비선형 시스템(Non-linear System): 중첩의 원리가 성립되지 않는 시스템

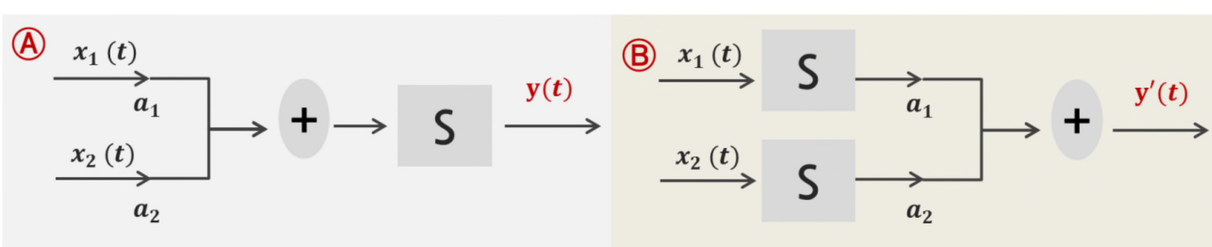
2) 중첩의 원리

- 임의의 입력 신호 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 에 임의의 상수 a_1, a_2가 곱해지고 합해진 입력 신호에 의한 시스템의 출력 신호 $y(t)$
- 두 신호를 각각 입력 신호로 하여 출력된 신호에 각 상수배한 출력 신호의 합이 $y'(t)$
- $y(t)$= $y'(t)$이면, 중첩의 원리를 만족하는 시스템

$$\underbrace{S\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\}}_{y(t)}=\underbrace{a_1S\{x_1(t)\}+a_2S\{x_2(t)\}}_{y'(t)}$$

3) 선형 시스템과 비선형 시스템의 판별

- 만일, $y(t)=y'(t)$이면 시스템(S)은 선형 시스템이라고 판단할 수 있음



$$\underbrace{S\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\}}_{Ⓐ\ y(t)}=\underbrace{a_1S\{x_1(t)\}+a_2S\{x_2(t)\}}_{Ⓑ\ y'(t)}$$

시스템의 분류

3) 선형 시스템과 비선형 시스템의 판별

예제 16-03

다음 입출력 관계를 가지는 시스템이 선형 시스템인지 비선형 시스템인지 판별해 보자.

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \longrightarrow \boxed{\text{시스템}} \longrightarrow \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$$

$$y(t) \equiv S\left\{x(t)\right\} = 4x(t) + 1$$

[예제풀이]

- 선형-비선형의 판별을 위해 중첩의 원리가 성립하는지 확인하여야 함

① 입력: $a_1x_1(t)$, 출력: $y_1(t) = 4\{a_1x_1(t)\} + 1 = 4a_1x_1(t) + 1$

② 입력: $a_2x_2(t)$, 출력: $y_2(t) = 4\{a_2x_2(t)\} + 1 = 4a_2x_2(t) + 1$

③ 입력: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$,
출력: $y_3(t) = 4\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} + 1 = 4a_1x_1(t) + 4a_2x_2(t) + 1$

- $\therefore y_3(t) \neq (y_1(t) + y_2(t))$
중첩의 원리가 성립하지 않으므로 선형 시스템이 아님

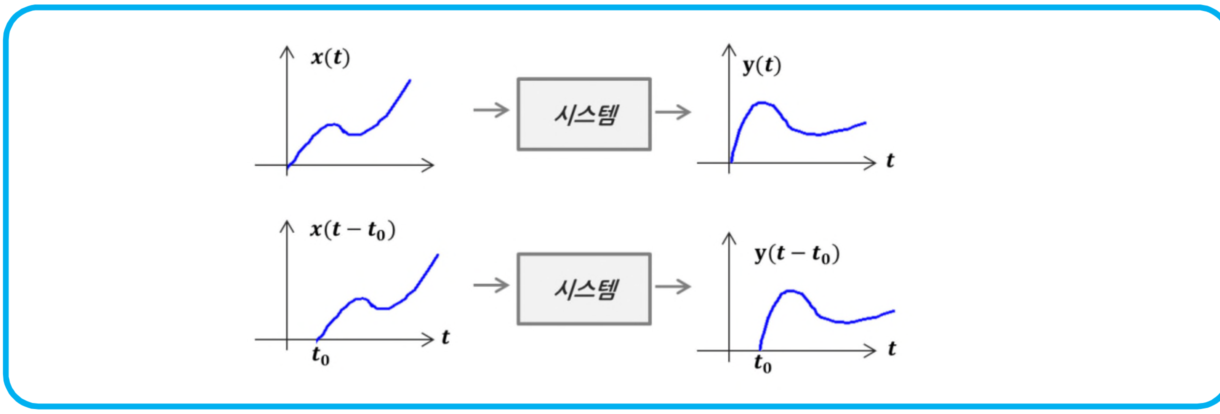
시스템의 분류

3. 시변 시스템과 시불변 시스템

1) 정의

- 시변 시스템(Time-Varying System): 시스템의 특성이 시간에 따라 변하는 시스템
- 시불변 시스템(Time-Invariant System): 시스템의 특성이 시간에 따라 변하지 않는 시스템

2) 시불변 시스템의 입출력 관계

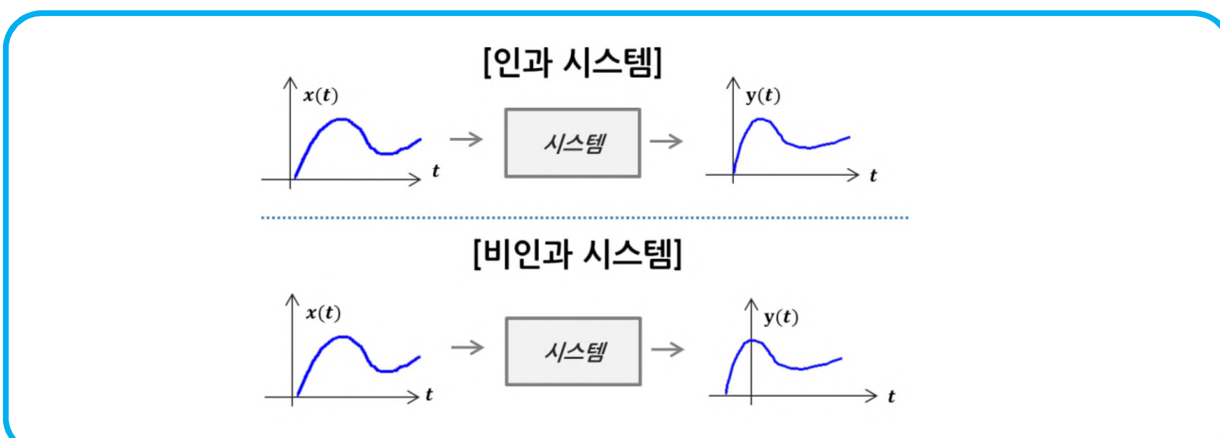


4. 인과 시스템과 비인과 시스템

1) 정의

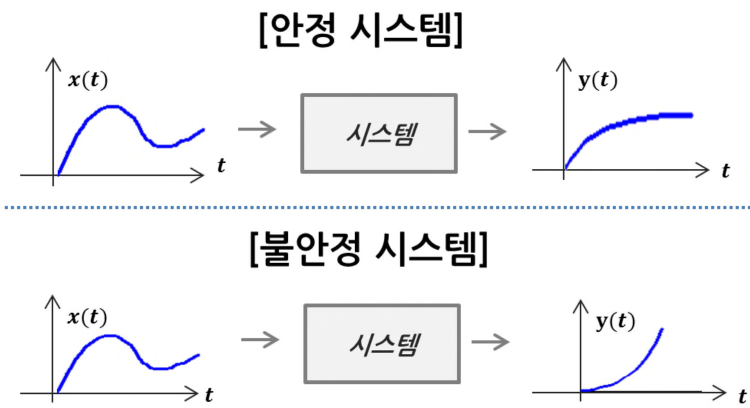
- 인과 시스템(Casual System): 어느 시각 t에서 시스템의 출력이 t 이전의 입력 값에 의하여 결정되는 시스템
- 비인과 시스템(Non-Casual System) : 어느 시각 t에서 시스템의 출력이 t 이전의 입력 값에 의해서만 결정되지 않고, 미래의 입력신호에 의해서도 결정되는 시스템

2) 인과 시스템과 비인과 시스템의 관계



시스템의 분류

5. 안정(Stable) 시스템과 불안정(Unstable) 시스템의 관계

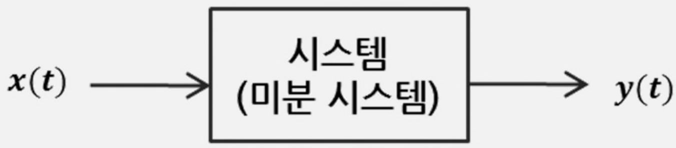


시스템의 분류

[한걸음 더] 선형 시스템 판별 예제 풀이

한걸음 더

다음과 같은 입출력 관계를 가지는 시스템이 선형 시스템인지 비선형 시스템인지 판별하여 보자.



$$y(t) \equiv S\{x(t)\} = \frac{d}{dt}x(t)$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

① 입력: $a_1x_1(t)$, 출력: $y_1(t) = \frac{d}{dt}\{a_1x_1(t)\} = a_1\frac{d}{dt}x_1(t)$

② 입력: $a_2x_2(t)$, 출력: $y_2(t) = \frac{d}{dt}\{a_2x_2(t)\} = a_2\frac{d}{dt}x_2(t)$

③ 입력: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$,
출력: $y_3(t) = \frac{d}{dt}\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1\frac{d}{dt}x_1(t) + a_2\frac{d}{dt}x_2(t)$

$\therefore y_3(t) = (y_1(t) + y_2(t))$

중첩의 원리가 성립하기 때문에 이 시스템은 선형 시스템임

핵심정리

신호의 분류

- 연속 신호: 모든 연속적인 시간 t에 대하여 정의
- 이산 신호: 특정한 시각에서만 값을 갖는 신호
- 디지털 신호: 이산적인 특징을 가지며 0과 1의 값만으로 이루어진 신호
- 결정 신호: 정현파 신호를 예로 들 수 있음
- 불규칙 신호: 랜덤 신호라고도 하며, 백색 잡음 신호를 예로 들 수 있음
- 임펄스 신호와 단위 계단 신호: 단위 계단 신호를 미분하면 임펄스 신호가 됨

시스템의 분류

- 연속 시스템: 연속 신호를 받아들여 출력 신호도 연속 신호를 내보내는 모든 시스템
- 이산 시스템: 이산 신호를 가지고 정해진 연산을 수행하도록 하는 어떤 장치나 알고리즘
- 선형시스템(Linear System): 중첩의 원리를 만족하는 시스템
- 중첩의 원리

$$\underbrace{S\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\}}_{y(t)}=\underbrace{a_1S\{x_1(t)\}+a_2S\{x_2(t)\}}_{y'(t)}$$

- 시변 시스템: 시스템의 특성이 시간에 따라 변화
- 시불변 시스템: 시간에 따라 변하지 않음
- 인과 시스템과 비인과 시스템: 어느 시각 t에서 시스템의 출력이 t 이전의 입력 값에 의하여 결정된다면 인과적(Causal)

핵심정리

시스템의 분류

- 안정 시스템과 비안정 시스템: 유한한 Mx와 My에 대해 모든 t에 대하여 다음과 같은 성질을 만족하면 안정 시스템 또는 BIBO(Bounded Input Bounded Output) 안정 시스템

$$|x(t)| \le M_x < \infty \quad , \quad |y(t)| \le M_y < \infty$$

연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

6주차 2차시

학습내용

- ❖ 연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답
- ❖ 컨볼루션 적분

학습목표

- ❖ 연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답을 구할 수 있다.
- ❖ 컨볼루션 적분이 무엇이고, 어디에 사용되는지 이해하고, 그 성질을 설명할 수 있다.

연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

1. 연속 선형 시불변 시스템의 정의

1) 연속 선형 시불변 시스템 (Continuous Linear Time-invariant System)

- 연속 시스템 + 선형 시스템 + 시불변 시스템
- 선형 시불변 시스템(LTI System)은 입출력에 대한 미분방정식으로 표현 가능

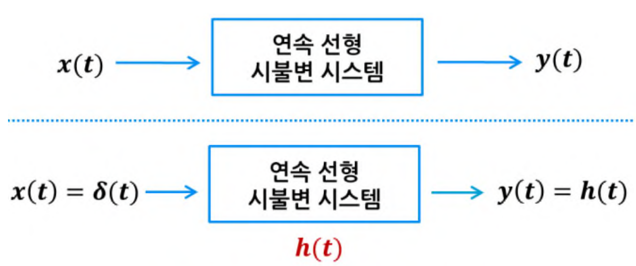
$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

2) 목적 및 질문

- 시스템의 해석이 매우 복잡하고 고난도의 수학이 필요하므로 과정의 범위를 벗어나기 때문에 선형 시불변 시스템으로 한정함
- 임의의 연속 입력 신호 $x(t)$에 대한 시스템($S\{..\}$)의 응답 $y(t)$는? 즉, 시스템 표현 방법은?
- 연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답은 어떻게 구할까?

2. 임펄스 응답

- 연속 선형 시불변 시스템의 입력으로 임펄스 신호를 가했을 때, 출력신호 $\boldsymbol{h(t)}$



[임펄스 응답(Impulse Response)]

연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

3. 컨볼루션 적분

1) 임의의 입력신호 $x(t)$에 대한 시스템($S\{..\}$)의 응답 $y(t)$는?

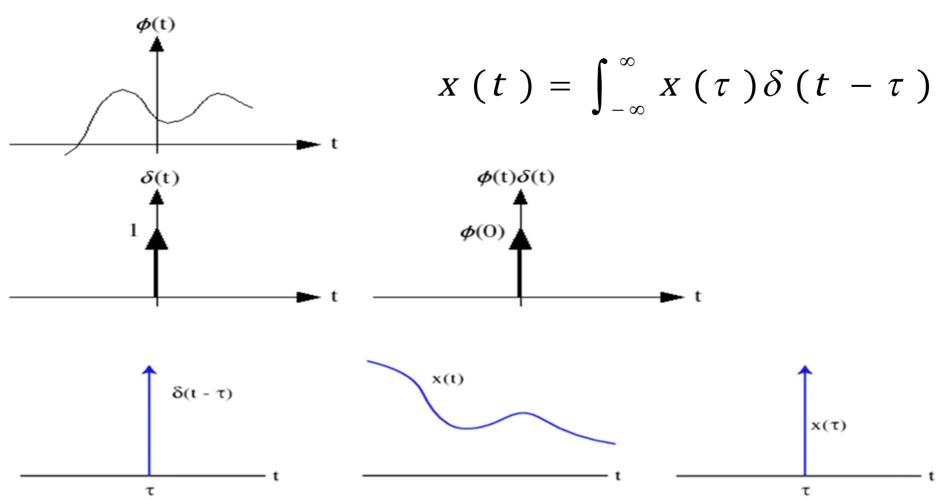
- 출력신호 $\boldsymbol{y(t)}$는 입력신호 $\boldsymbol{x(t)}$와 연속 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 $\boldsymbol{h(t)}$와의 컨볼루션 적분식으로 표현 가능함

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

2) 단위 임펄스 신호의 체질 성질

- 시스템의 선형성과 시불변 성질 및 단위 임펄스 신호의 체질성질을 활용, '컨볼루션 적분' 이라는 결과식 도출
- 단위 임펄스 신호의 체질 성질(Shifting Property): 임의의 신호 $\boldsymbol{x(t)}$는 가중치가 곱해진 단위 임펄스의 적분합으로 표현 가능함

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$



3) 임의의 입력 $x(t)$가 단위 임펄스 함수의 가중 선형 조합으로 표현된다면 시스템 응답 $y(t)$는?

$$y(t) = S[x(t)] = S\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

선형 시스템, 중첩의 원리

시스템의 시불변의 특성

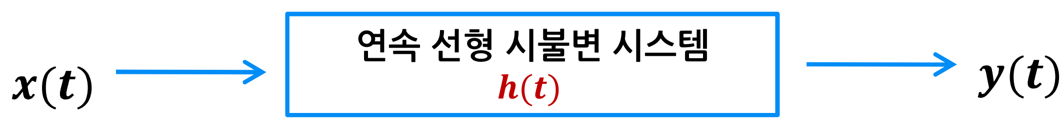
$x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t)$

$x(t) = \delta(t-\tau) \rightarrow y(t) = h(t-\tau)$

연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

4) 교환 법칙

- 컨볼루션 적분은 교환 법칙이 성립

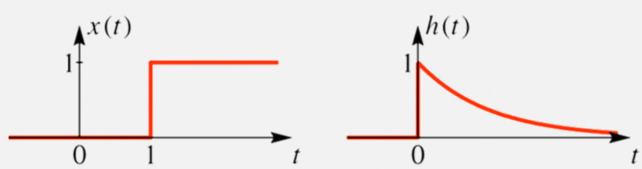


$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t)*x(t)$$

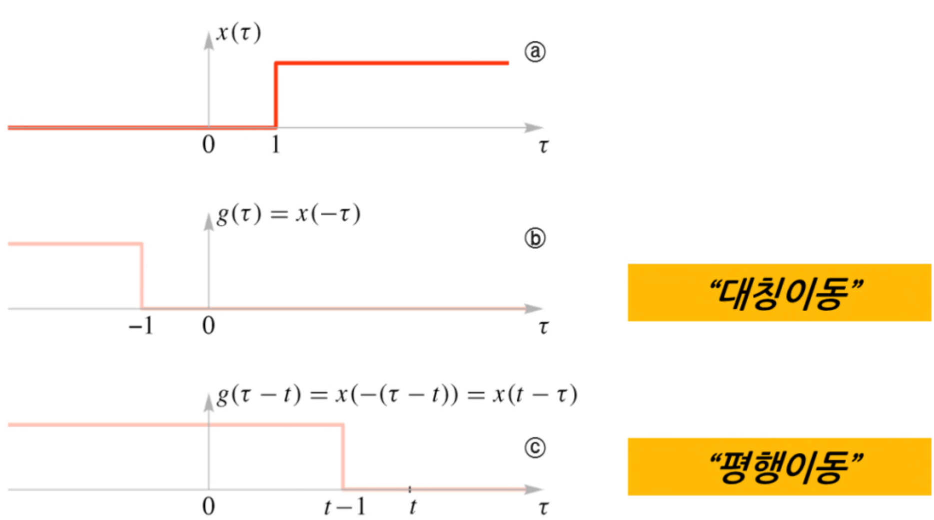
예제 17-01

다음과 같은 연속 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 $\boldsymbol{h(t)}$와 입력신호 $\boldsymbol{x(t)}$가 다음과 같을 때 시스템 출력 $\boldsymbol{y(t)}$를 구해 보자.



ⓐ $x(t)=u(t-1)$ ⓑ $h(t)=e^{-t}u(t)$

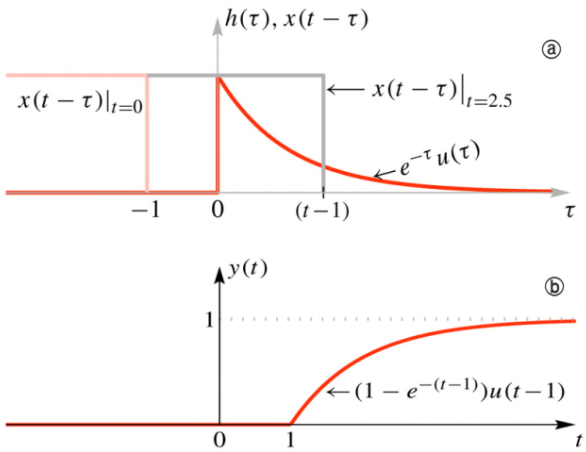
[예제풀이]



연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

4) 교환 법칙

[예제풀이-계속]



$$y(t)=\begin{cases} 0 & t-1<0 \\ \boxed{\displaystyle\int_0^{t-1} e^{-\tau}d\tau \qquad t-1>0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{t-1} e^{-\tau}d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^{t-1} \\ &= 1-e^{-(t-1)} \qquad t\geq 1 \end{aligned}$$

컨볼루션 적분

1. 컨볼루션 적분 개요

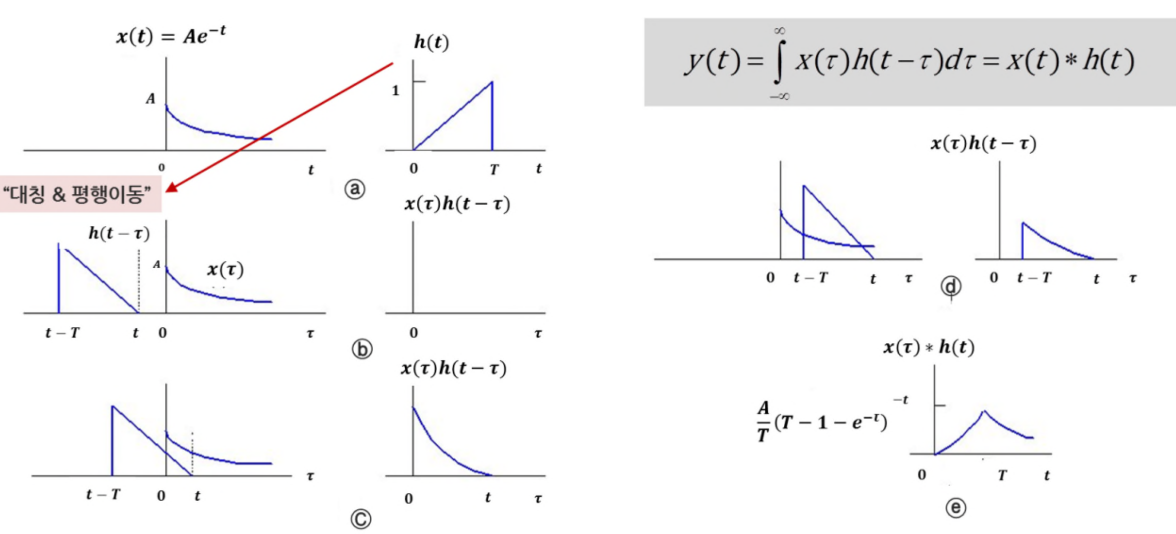
1) 컨볼루션 적분식

- 연속 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답은 $\boldsymbol{h(t)}$
- 입력 신호 $x(t)$에 대한 시간 응답 계산은?
  → 입력 신호 $x(t)$와 임펄스 응답 $h(t)$와의 컨볼루션 적분으로 가능

$\boldsymbol{x(t)}$ → 연속 선형 시불변 시스템 $\boldsymbol{h(t)}$ → $\boldsymbol{y(t)}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

2) 컨볼루션 적분



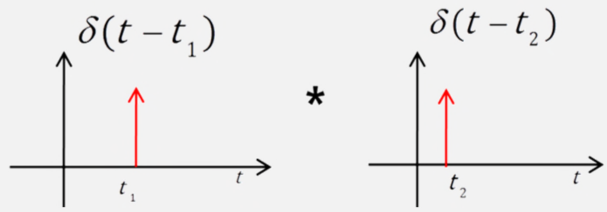
컨볼루션 적분

2. 임펄스 신호의 컨볼루션 적분

1) 두 임펄스 신호의 컨볼루션 적분 예제

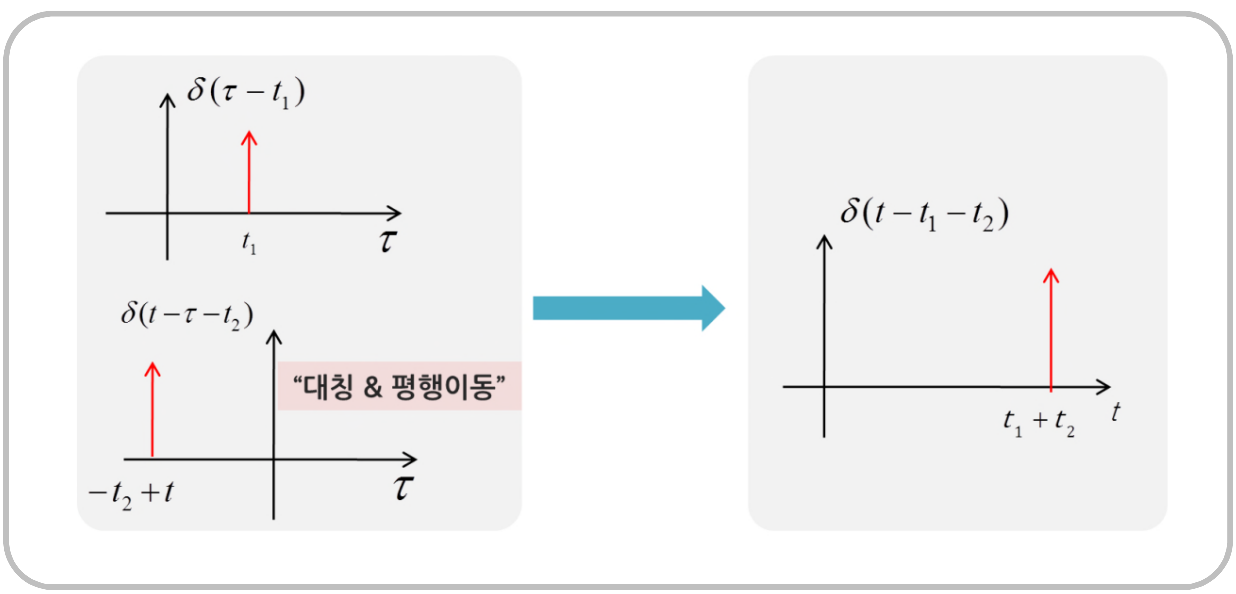
예제 17-02

다음과 같은 수식으로 표현되는 두 개의 임펄스 신호에 대한 컨볼루션 적분을 계산해 보자



$$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = ?$$

[예제풀이]

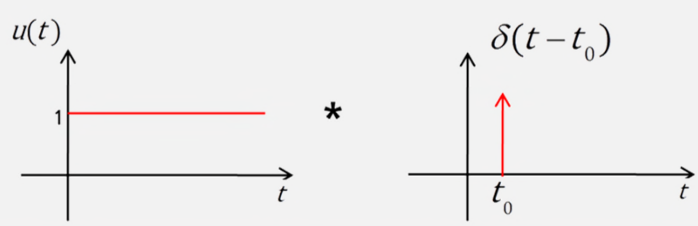


컨볼루션 적분

2) 단위 계단신호와 임펄스 신호의 컨볼루션 적분 예제

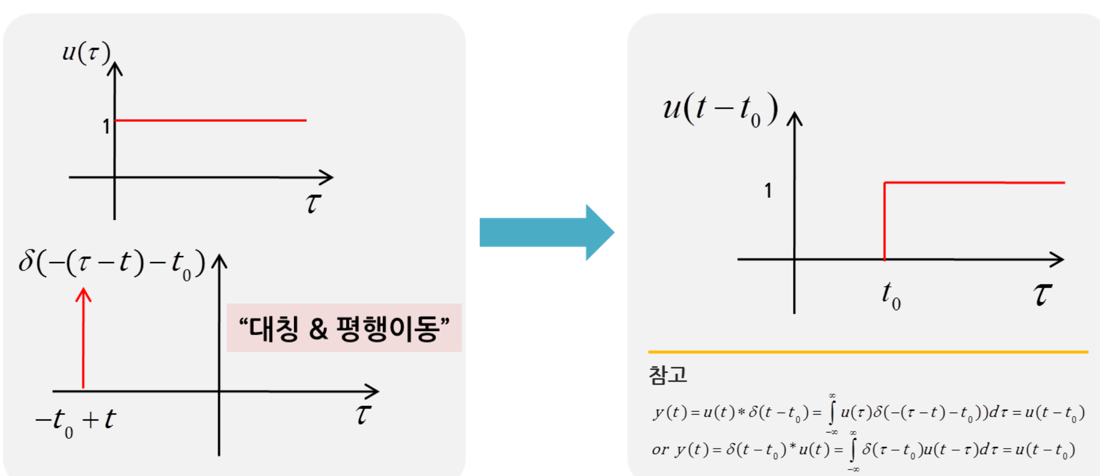
예제 17-03

다음과 같은 단위 계단신호와 임펄스 신호에 대한 컨볼루션 적분을 수행해 보자.



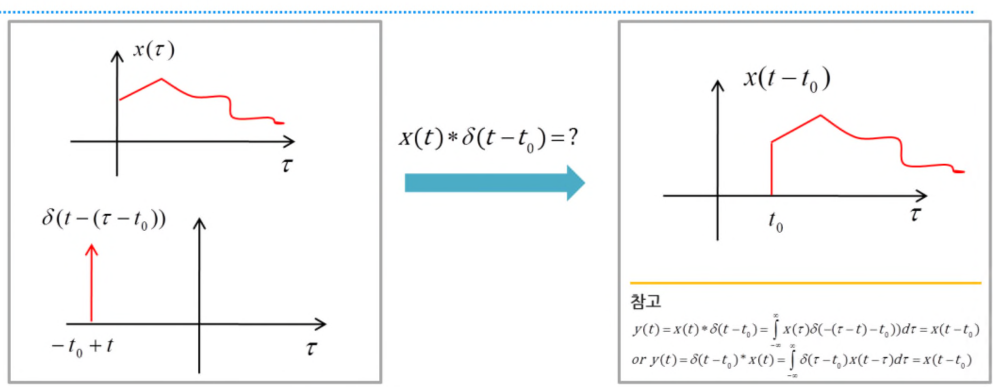
$$u(t)*\delta(t-t_0)=?$$

[예제풀이]



3) 참고

$$x(t)*\delta(t-t_0)=? \qquad x(t-t_0)$$



컨볼루션 적분

4) 지연 시스템

- 임의의 연속 선형 시불변 시스템이 t_0 시간만큼 지연시키는 시스템이라고 가정
- 시스템에서 $x(t)$를 입력하면, 출력 신호 $y(t)$는 시간 t_0만큼 지연된 신호가 출력됨을 의미

$$y(t) = x(t - t_0)$$

4) 지연 시스템 컨볼루션 적분 검증

- 1단계: 이 시스템에 대한 임펄스 응답은 다음과 같음

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

- 2단계: 입력으로 $x(t)$신호를 주었을 때 출력 신호는 앞에서 배운 것과 같이 입력 신호 $x(t)$와 임펄스 응답 $h(t)$와의 컨볼루션 적분으로 계산

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

- 3단계: 이미 우리가 알고 있는 이 시스템이 t_0만큼 시간 지연시키는 시스템이라는 것과 일치함

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

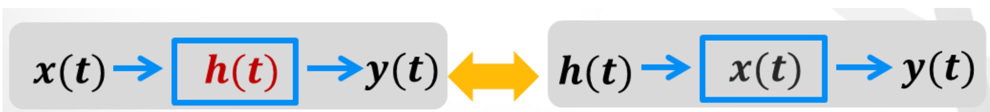
컨볼루션 적분

3. 컨볼루션 적분의 성질

1) 교환 법칙

- 컨볼루션 적분: 시간영역에서의 선형 시불변 시스템의 입·출력 해석 방법
- 교환 법칙이 성립함

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$



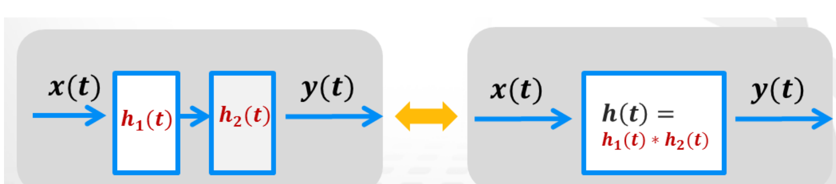
2) 교환 법칙의 수학적 증명

$$\begin{aligned}
h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\
&\quad \text{let } \sigma = t-\tau \text{ and } d\sigma = -d\tau \\
h(t) * x(t) &= -\int_{\infty}^{-\infty} h(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma = x(t) * h(t)
\end{aligned}$$

3) 결합 법칙

- 두 개의 시스템이 종속 연결된 경우 두 시스템의 임펄스 응답의 컨볼루션을 새로운 임펄스 응답으로 갖는 하나의 시스템으로 대체 가능함

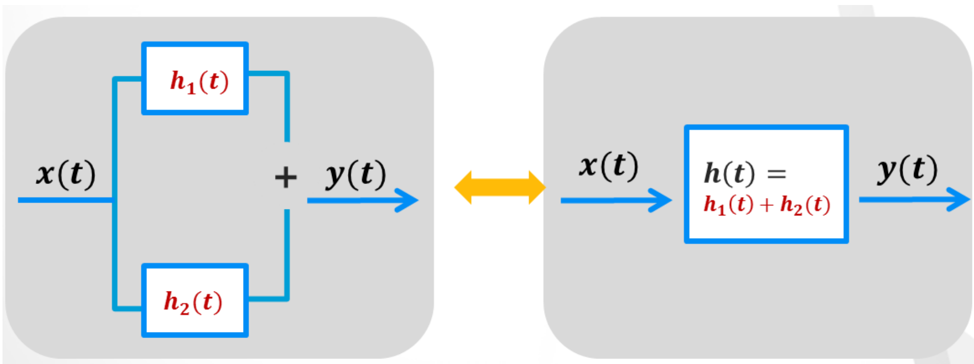
$$\left[x(t) * h_1(t)\right] * h_2(t) = x(t) * \left[h_1(t) * h_2(t)\right]$$



컨볼루션 적분

4) 배분 법칙

$$x(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)\right]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$



핵심정리

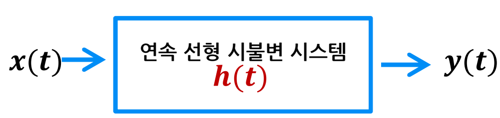
연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답

- 연속 선형 시불변 시스템(Continuous Linear Time-invariant System): 연속 시스템 + 선형 시스템 + 시불변 시스템을 의미
- 선형 시불변 시스템(LTI System)은 입출력에 대한 미분방정식으로 표현 가능함
- 출력신호 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$는 입력신호 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$와 연속 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})$와의 컨볼루션 적분식으로 표현됨
- 단위 임펄스 신호의 체질 성질(Shifting Property)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

컨볼루션 적분

- 컨볼루션 적분: 입력 신호 $x(t)$와 임펄스 응답 $h(t)$와의 컨볼루션 적분으로 시간 응답 계산 가능하며 시간영역에서의 선형 시불변 시스템의 입·출력 해석 방법임



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t)*x(t)$$

- 컨볼루션 적분 성질

교환 법칙 $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

결합 법칙 $\left[x(t)*h_1(t)\right]*h_2(t)=x(t)*\left[h_1(t)*h_2(t)\right]$

배분 법칙 $x(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)\right]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$

디지털신호처리

강 의 노 트

연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답 실습

6주차 3차시

학습내용

❖ 간단한 그래프 그리기
❖ 연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답
❖ 컨볼루션 적분

학습목표

❖ 실습을 통해 간단한 신호 그래프를 그릴 수 있다.
❖ 연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답을 구할 수 있다.
❖ 컨볼루션 적분이 무엇이고, 어디에 사용되는지 이해하고, 그 성질을 설명할 수 있다.

간단한 그래프 그리기

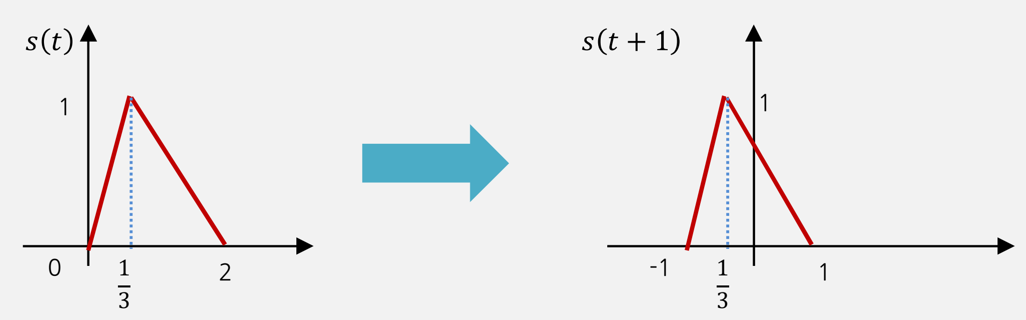
실습과제 18-01

다음과 같은 신호 $s(t)$에 대하여 $s(t+1)$그래프를 직접 손으로 그려보자.

$$s(t)=\begin{cases} 2t, 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}(4-2t), \frac{1}{2} \le t \le 2 \\ 0, elsewhere \end{cases}$$

전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

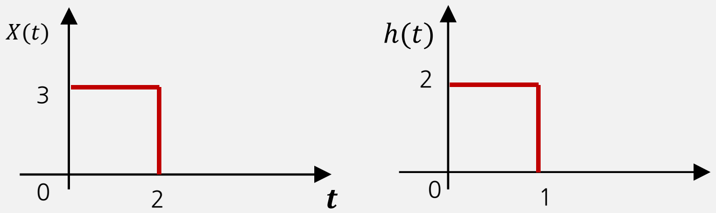
[과제해설]



연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답 실습

실습과제 18-02

다음과 같은 연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답$\boldsymbol{y(t)}$를 구해보자.



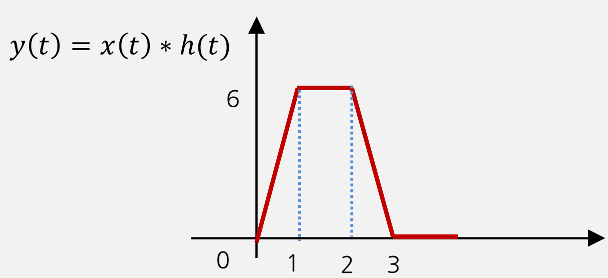
$$\boldsymbol{y(t) = x(t) * h(t)}$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

$$\boldsymbol{y(t) = x(t) * h(t)} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

I. $t < 0,\ y(t) = 0$
II. $0 \le t \le 1,\ y(t) = 6t$
III. $1 \le t \le 2,\ y(t) = 6$
IV. $2 \le t < 3,\ y(t) = 18 - 6t = 0$
V. $3 \le t,\ y(t) = 0$



$\boldsymbol{t}$

컨볼루션 적분 실습

실습과제 18-03

교육용 Matlab Graphical User Interfaces를 이용하여 연속 컨볼루션 적분을 실습 해보자.

- 데모프로그램 URL
http://users.ece.gatech.edu/mcclella/matlabGUIs/

전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

- 1단계: 연속 컨볼루션 적분 Demo 프로그램 다운·실행
- 2단계: 실습 2에서 손으로 계산한 컨볼루션 적분을 데모 프로그램으로 확인
- 3단계: 다양한 입력신호들 $x(t)$와 임펄스 응답 $h(t)$에 대한 연속 선형 시불변 시스템의 시간 응답 확인

핵심정리

연속 선형 시불변 시스템 시간 응답

- 연속 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답이 $h(t)$일 때 입력 신호 $x(t)$에 대한 시간 응답은 입력 신호 $x(t)$와 그 시스템의 임펄스 응답 $h(t)$와의 컨볼루션 적분으로 계산됨

$\boldsymbol{x(t)}$ → **연속 선형 시불변 시스템** $\boldsymbol{h(t)}$ → $\boldsymbol{y(t)}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t)*x(t)$$

디지털신호처리

강 의 노 트

연속 선형 시불변 시스템의 주파수 해석

8주차 1차시

학습내용

❖ 시간 영역과 주파수 영역

❖ 시간·주파수 영역 해석

학습목표

❖ 시간 영역과 주파수 영역에 대한 개념을 이해하고 설명할 수 있다.

❖ 시간 이동과 주파수 이동 성질을 설명할 수 있다.

❖ 연속 선형 시불변 시스템의 주파수 응답이 무엇인지 이해하고 주파수 영역에서 시스템을 해석할 수 있다.

시간 영역과 주파수 영역

1. 주요 연속 시간 신호의 퓨리에 변환

1) 연속 시간 신호의 퓨리에 변환과 역변환

퓨리에 변환

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

퓨리에 역변환

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

※ 참고

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \;\Longleftrightarrow\; x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$$

2) 퓨리에 변환과 역변환

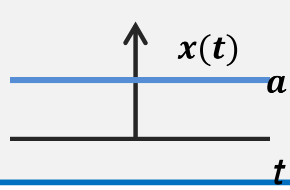
시간 영역		주파수 영역
$x(t)$	퓨리에 변환 → ← 퓨리에 역변환	$X(f)$

3) 시간 영역과 주파수 영역

시간 영역

$x(t) = a$

$x(t) = a$



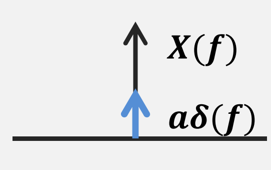
퓨리에 변환 →

← 퓨리에 역변환

주파수 영역

$X(f) = a\delta(f)$

$x(t) = 1$



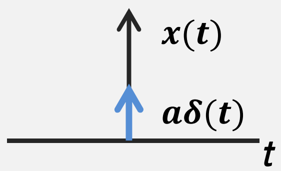
시간 영역과 주파수 영역

3) 시간 영역과 주파수 영역(계속)

시간 영역

$x(t)=\delta(t)$

$x(t)=\delta(t)$



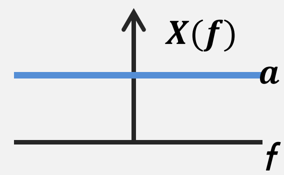
퓨리에 변환

퓨리에 역변환

주파수 영역

$x(t)=\delta(t)$

$x(t)=a\delta(t)$



시간 영역

$$X(f)=1$$

$$X(f)=a$$

주파수 영역

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi a t}e^{-j2\pi ft}dt$$

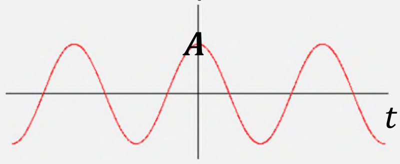
$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-a)t}dt$$

$$=\delta(f-a)$$

$$X(f)=A\delta(f-a)$$

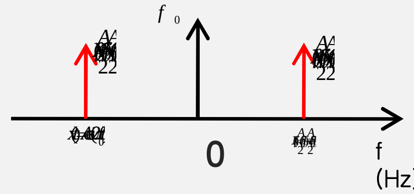
시간 영역

$x(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$



주파수 영역

$$x(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$$



시간 영역과 주파수 영역

2. 시간 이동 성질

시간 영역	주파수 영역
$x(t)$	$x(f)$
$x(t-a)$	$X(f)e^{-j2\pi fa}$
$x(t+a)$	$X(f)e^{j2\pi fa}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-j2\pi f\tau}$

예제 19-01

퓨리에 변환의 시간 이동 성질을 이용하여 다음 신호에 대한 퓨리에 변환을 구해보자.

시간 영역	주파수 영역
$x(t-a)$	$X(f)e^{-j2\pi fa}$

$$x(t)=\delta(t+1)+2\delta(t)+\delta(t-1)$$

[예제풀이]

$$x(t)=\delta(t) \Longleftrightarrow X(f)=1$$

$$x(t-a) \Longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi fa}$$

$$X(f)=FT\{\delta(t+1)\}+FT\{2\delta(t)\}+FT\{\delta(t-1)\}$$

$$=e^{j2\pi f}+2+e^{-j2\pi f} \qquad =2+2\cos(2\pi f)$$

시간 영역과 주파수 영역

3. 주파수 이동 성질

1) 시간 영역과 주파수 영역

시간 영역	주파수 영역
$x(t)$	$x(f)$
$x(t)e^{j2\pi at}$	$X(f-a)$
$x(t)e^{-j2\pi at}$	$X(f+a)$
1	$\delta(f)$
$e^{-j2\pi at}$	$\delta(f-a)$

예제 19-02

다음과 같은 퓨리에 변환의 주파수 이동 성질을 증명해 보자.

시간 영역		주파수 영역
$x(t)e^{j2\pi at}$	$\Leftrightarrow$	$X(f-a)$

[예제풀이]

- 퓨리에 변환 공식을 이용하여 복소지수 함수가 곱해진 $y(t) = x(t)e^{j2\pi at}$ 신호의 퓨리에 변환

$$y(t) = x(t)e^{j2\pi at}$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)e^{j2\pi at})e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-a)t}\,dt = X(f-a)$$

$$\because X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$\therefore\ x(t)e^{j2\pi at} \Leftrightarrow X(f-a)$$

시간 영역과 주파수 영역

3. 주파수 이동 성질

예제 19-03

다음과 같이 신호 $x(t)$에 대한 퓨리에 변환이 $X(f)$라고 할 때 코사인 신호가 곱해진 신호 $y(t)$에 대한 주파수 영역 표현을 구해보자.

시간 영역		주파수 영역
$y(t)=x(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$Y(f)=?$

[예제풀이]

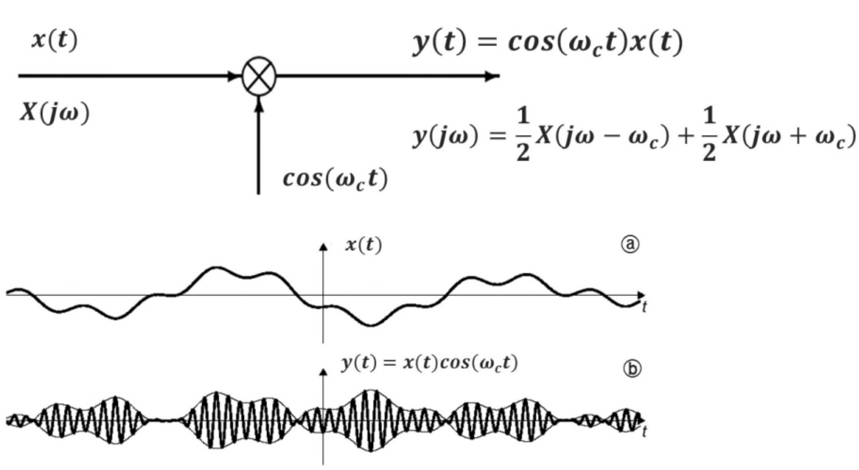
$$y(t)=x(t)\cdot\cos(\omega_0 t)=x(t)\left(\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right)=\boxed{\frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t}}+\boxed{\frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2}X(f-f_0)} \qquad \boxed{\frac{1}{2}X(f+f_0)}$$

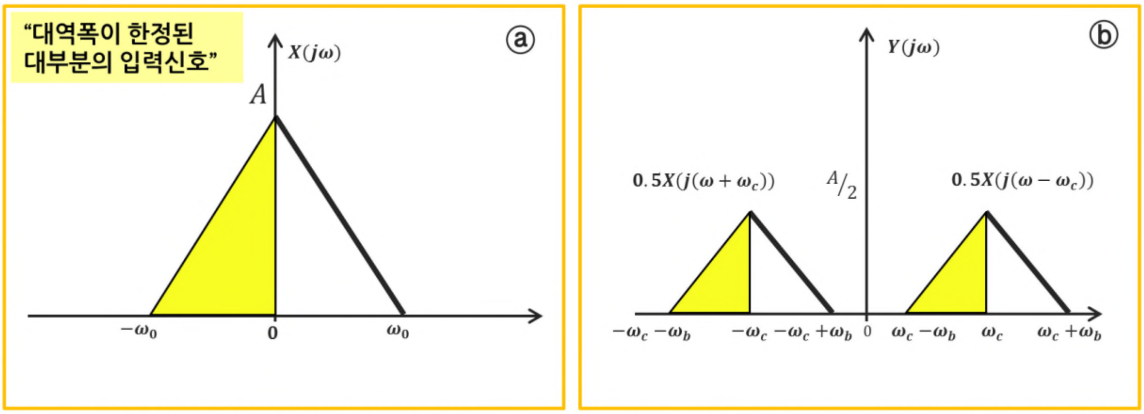
$$\therefore\ y(t)=x(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow Y(f)=\frac{1}{2}X(f-f_0)+\frac{1}{2}X(f+f_0)$$

2) [적용 사례] AM 방송 - 변조기(Modulator)



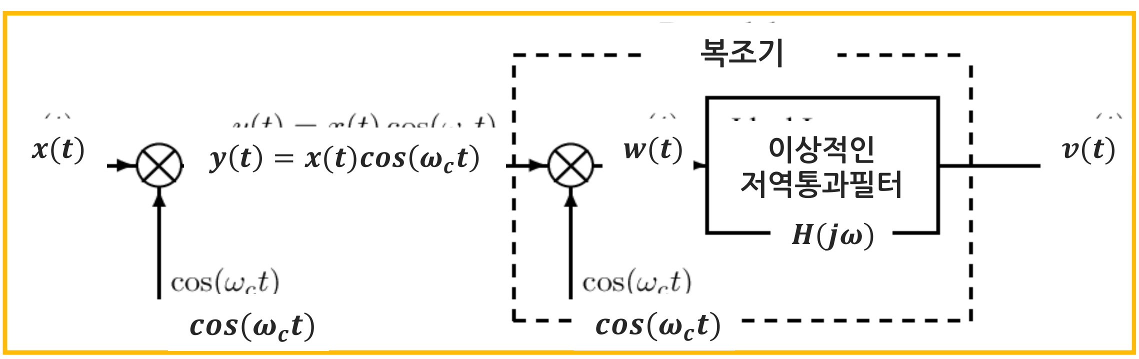
시간 영역과 주파수 영역

2) [적용 사례] AM 방송 - 변조기(Modulator) (계속)



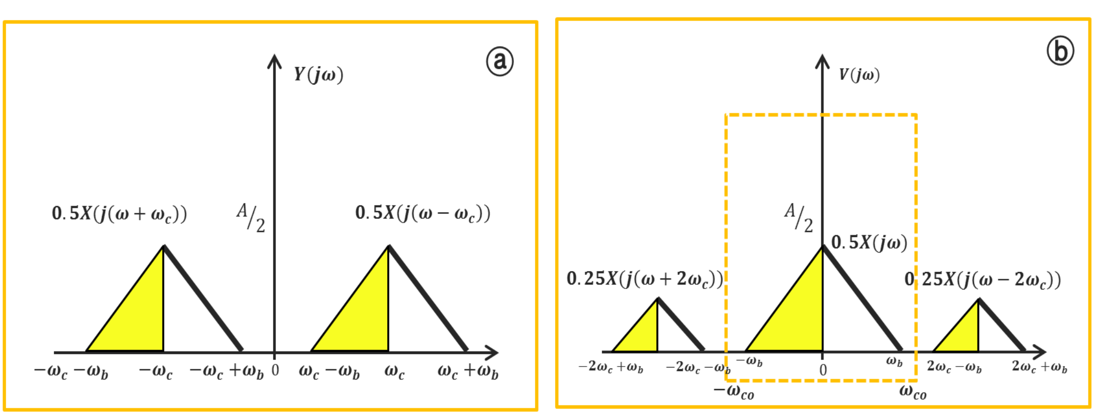
[입력신호에 대한 주파수 변환] [AM 변조된 신호에 대한 주파수 변환]

3) [적용 사례] AM 방송 - 복조기(Demodulator)



$$w(t) = x(t)\cdot[\cos(\omega_c t)]^2 = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t)$$

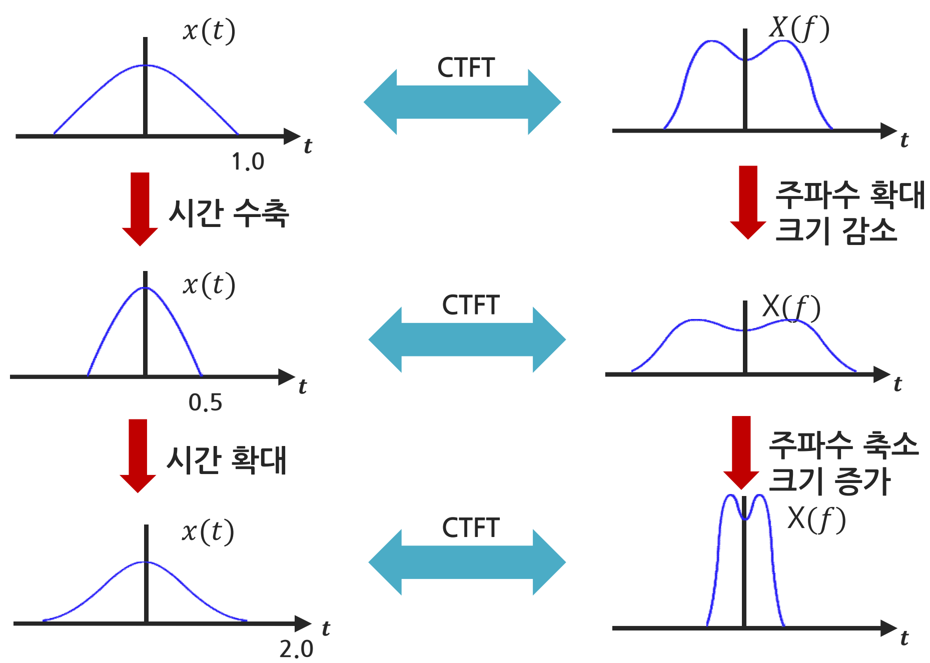
$$W(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega) + \frac{1}{4}X(j(\omega-2\omega_c)) + \frac{1}{4}X(j(\omega+2\omega_c))$$



시간·주파수영역 해석

1. 시간·주파수 척도 조절 성질

1) 연속 시간 퓨리에 변환의 시간·주파수 척도 조절



2. 컨볼루션 연산과 곱 연산

1) 컨볼루션 연산과 곱 연산의 관계

- 시간 영역에서 두 신호의 곱에 대한 퓨리에 변환은 각각의 퓨리에 변환을 주파수 영역에서 컨볼루션한 결과와 같음

$$F\{x(t)\cdot y(t)\} = F\{x(t)\} * F\{y(t)\}$$

- 반대로, 시간 영역에서의 두 신호의 컨볼루션 결과에 대한 퓨리에 변환은 각각의 신호를 퓨리에 변환한 후 곱한 결과와 같음

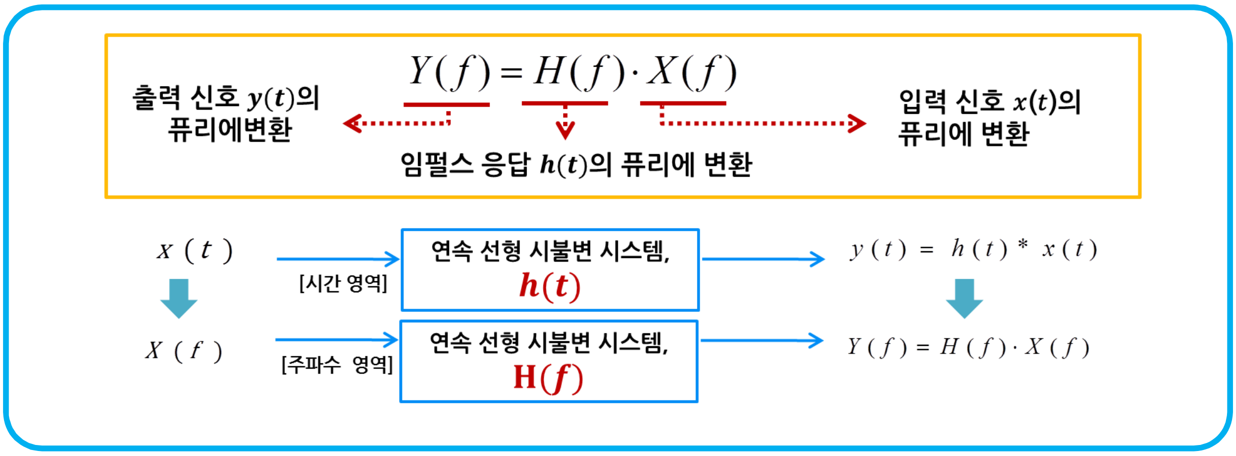
$$F\{x(t) * y(t)\} = F\{x(t)\}\cdot F\{y(t)\}$$

※ 참고: $F\{\cdot\}$는 퓨리에 변환

시간·주파수영역 해석

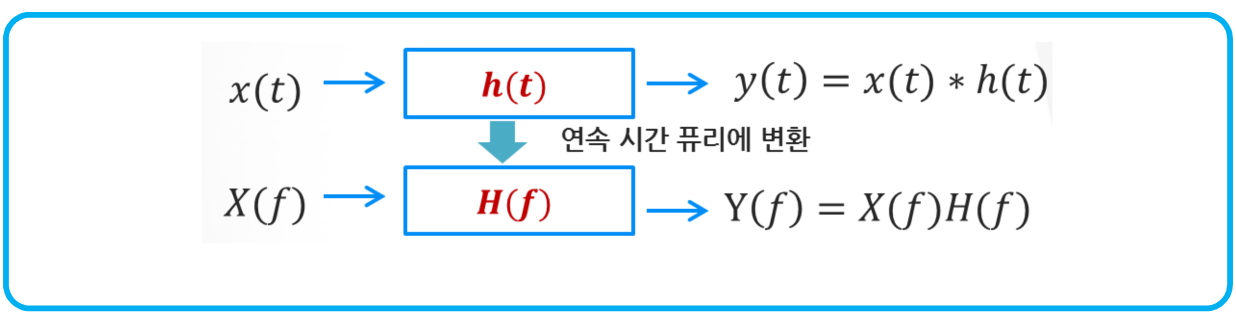
2. 컨볼루션 연산과 곱 연산

- 컨볼루션 연산과 곱 연산 관계는 연속 선형 시불변 시스템 해석을 위해 매우 중요
- 시간 영역에서의 연속 선형 시불변 시스템을 주파수 영역으로 변환



3. 연속 선형 시불변 시스템의 주파수 응답

- 출력 신호의 f = f1에서의 성분은 입력 신호의 f1 성분과 H(f1)의 곱이 됨
- 입력 신호가 시스템을 통과하면서 각 주파수 별로 ***H*(*f*)**만큼의 이득이 곱하여짐
- ***H*(*f*)**는 주파수 별 시스템의 동작을 정의
- ***H*(*f*)** = 임펄스 응답의 퓨리에 변환 = 시스템의 주파수 응답



시간·주파수영역 해석

3. 연속 선형 시불변 시스템의 주파수 응답

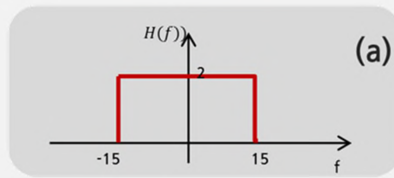
예제 19-04

시스템의 주파수 응답이 그림 (a)로 주어지고, 이 시스템에 입력 신호 $x(t)$=$2cos(2\pi 10t)$+$4sin(2\pi 20t)$가 입력될 때의 출력신호 $y(t)$를 계산해 보자.

$x(t) \rightarrow$ 연속 선형 시불변 시스템 $h(t)$ $\rightarrow y(t)$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

[시간 영역에서의 시간 영역 해석(시간응답)]

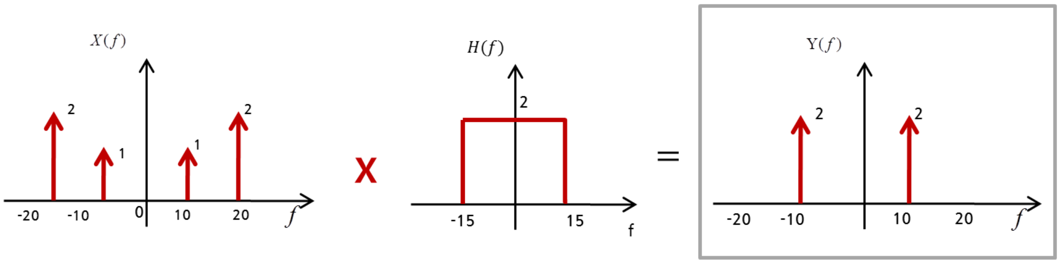


[연속 선형 시불변 시스템의 주파수응답]
(저역 통과 필터(Low-Pass Filter))

[예제풀이]

$$x(t) = 2cos(2\pi 10t) + 4sin(2\pi 20t) \; * \; h(t) \; = \; y(t) = 4cos(2\pi 10t)$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$



시간·주파수영역 해석

[한걸음 더] 연속 선형 시불변 시스템의 주파수 응답 예제

한걸음 더

두 신호 $x(t)$와 $y(t)$가 다음과 같을 때 $z(t)=x(t)*y(t)$를 구해보자.

$$x(t)=\cos(2\pi 5t)$$

$$y(t)=\cos(2\pi 10t)$$

전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

- 컨볼루션 적분 공식을 이용해서 $z(t)$는 계산하는 것은 매우 어려움
- 시각영역에서의 두 신호의 컨볼루션 = 주파수 영역에서 두 신호의 퓨리에 변환의 곱 성질을 이용함

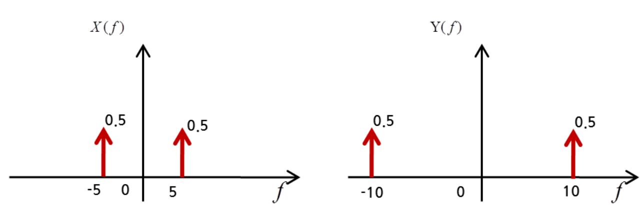
$$F\{z(t)\} = F\{x(t)*y(t)\} = X(f)Y(f)$$

$$x(t)=\cos(2\pi 5t)$$

$$y(t)=\cos(2\pi 10t)$$

$$Z(f)=X(f)Y(f)=0$$

$$\boxed{\therefore z(t)=0}$$



핵심정리

시간 영역과 주파수 영역

- 주요 연속시간 신호의 퓨리에 변환

시간 영역	주파수 영역
$x(t)=1$	$X(f)=\delta(f)$
$x(t)=\delta(t)$	$X(f)=1$
$x(t)=e^{j2\pi at}$	$X(f)=\delta(f-a)$
$x(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$	$X(f)=\frac{A}{2}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$

- 시간 이동 성질

시간 영역	주파수 영역
$x(t)$	$X(f)$
$x(t-a)$	$X(f)e^{-j2\pi fa}$
$x(t+a)$	$X(f)e^{j2\pi fa}$
$\delta(t-\tau)$	$e^{-j2\pi f\tau}$

- 주파수 이동 성질

시간 영역	주파수 영역
$x(t)$	$X(f)$
$x(t)e^{j2\pi at}$	$X(f-a)$
$x(t)e^{-j2\pi at}$	$X(f+a)$
1	$\delta(f)$
$e^{-j2\pi at}$	$\delta(f-a)$

핵심정리

시간 · 주파수 영역 해석

- 컨볼루션 연산과 곱 연산

  - 시간 영역에서의 두 신호의 곱에 대한 퓨리에 변환은 각각의 퓨리에 변환을 주파수 영역에서 컨볼루션한 것과 같음

$$F\{x(t)\cdot y(t)\} = F\{x(t)\} * F\{y(t)\}$$

  - 반대로 시간영역에서의 두 신호의 컨볼루션한 결과에 대한 퓨리에 변환은 각각의 신호를 퓨리에 변환한 후 두 퓨리에 변환의 곱과 같음

$$F\{x(t) * y(t)\} = F\{x(t)\}\cdot F\{y(t)\}$$

- 연속 선형 시불변 시스템의 주파수 응답

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

연속 시간 퓨리에 변환

$$X(f) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow Y(f) = X(f)H(f)$$

디지털신호처리

강의노트

샘플링 이론

8주차 2차시

학습내용

❖ 샘플링 이론

❖ 샘플링 이론 증명

학습목표

❖ 샘플링 이론에 대해 이해하고 설명할 수 있다.

❖ 샘플링 이론을 증명할 수 있다.

샘플링 이론

1. 아날로그·디지털 시스템

1) 아날로그와 디지털

- 아날로그 시계 vs. 디지털 시계
- 아날로그 TV vs. 디지털 TV
- 아날로그 영화(아날로그 카메라, 필름) vs. 디지털 영화(디지털 카메라, 파일)
- 비디오 테이프 레코더 vs. 디지털 비디오 레코더

2) 정의

- 입력 $x(t)$을 변경하여 출력 신호 $y(t)$ 생성
- 입력 신호 $x(t)$를 개선 [예] 이미지 개선(Image Enhancement)
- $x(t)$에서 원하는 정보 신호 $y(t)$를 추출

3) 아날로그 시스템과 디지털 시스템의 비교- 아날로그 시스템

- 아날로그 부품들:저항(Resistor), 커패시터(Capacitor), 증폭기(Op-amps)

4) 아날로그 시스템과 디지털 시스템의 비교- 디지털 시스템

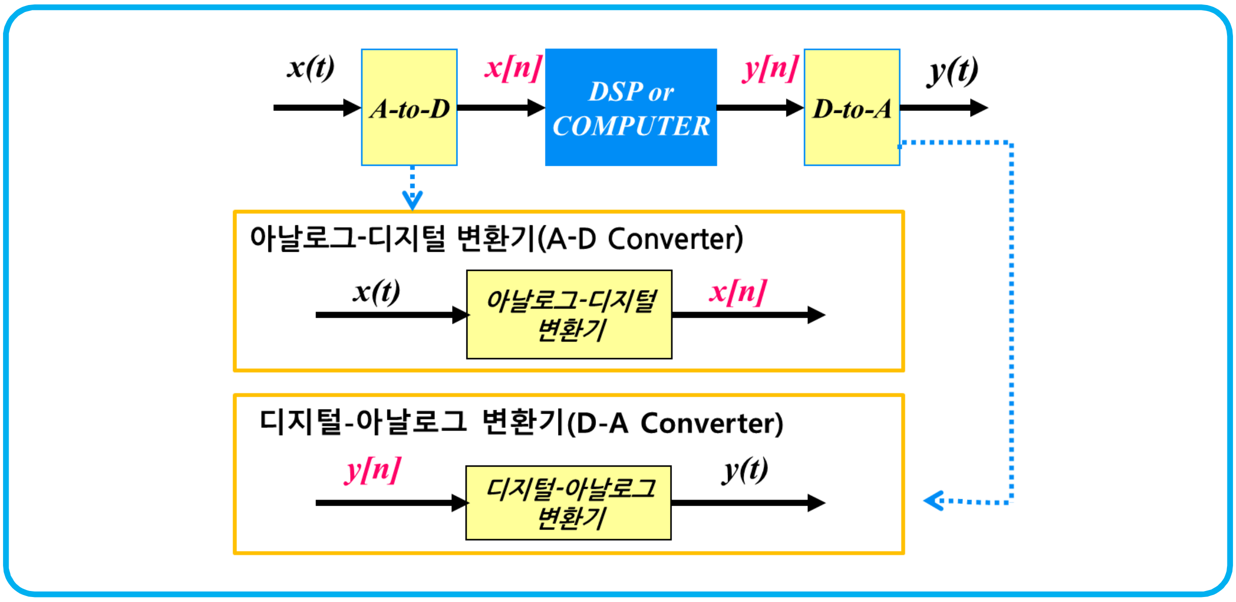
- 마이크로프로세서(Microprocessor), 다양한 디지털 신호 처리 알고리즘인 DSP(Digital Signal Processor)

5) [예] 블러링(Blurring) 신호 처리하는 디지털 시스템

샘플링 이론

2. 아날로그·디지털 변환기(A-D변환기)

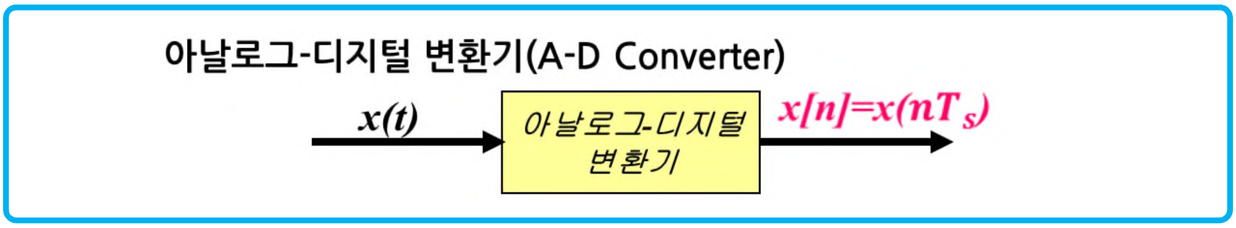
1) 개념



- 샘플링 과정: 연속 신호 $x(t)$를 이산 신호 $x[n]$으로 변환하는 과정
- Uniform Sampling: 일정한 간격의 시간($t = nT_s$) 에서의 샘플링

$$x[n] = x[nT_s]$$

2) 샘플링 주파수(Sampling Frequency, f_s)



- $f_s = {}^{1}/_{T_s}$: 1초에 샘플링하는 샘플 수
- [예] $T_s = 125\mu sec$ 일 때, $f_s = 1/(125 \times 10^{-6}) = 8,000\ samples/sec$

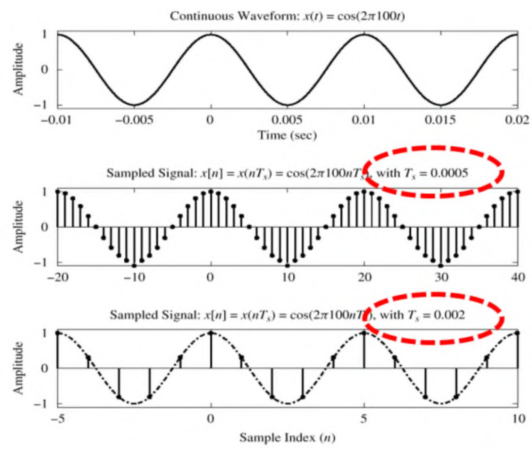
샘플링 이론

2) 샘플링 주파수(Sampling Frequency, f_s) (계속)

$f = 100\text{Hz}$

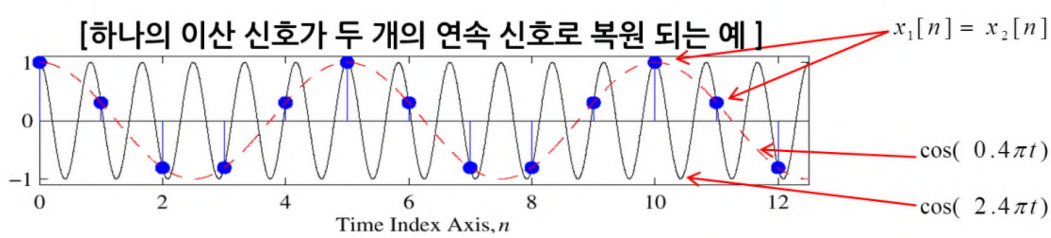
$f_s = 2kHz$

$f_s = 500Hz$



3) 디지털 신호의 모호성

- 이산 신호 $x[n]$으로부터 연속 신호 $x(t)$의 복원(Reconstruction)은?



$x_1[n] = \cos(0.4\pi n)$

$x_2[n] = \cos(2.4\pi n)$

n이 정수인 경우

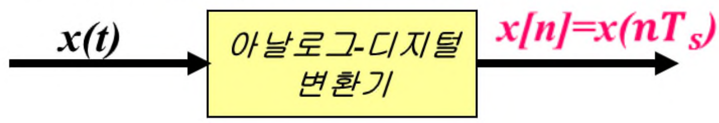
$\cos(0.4\pi n) = \cos(2.4\pi n)$

샘플링 이론

3. 샘플링 이론이란?

1) 정의

아날로그-디지털 변환기(A-D Converter)



- 아날로그·디지털 변환기에서 입력 신호 $x(t)$를 이산 신호 $x[n]$으로 변환하기 위해 얼마나 자주 샘플링 해야 할까? 즉, 샘플링 주파수 f_s?
  → 섀논의 샘플링 이론(Shannon's Sampling Theorem)

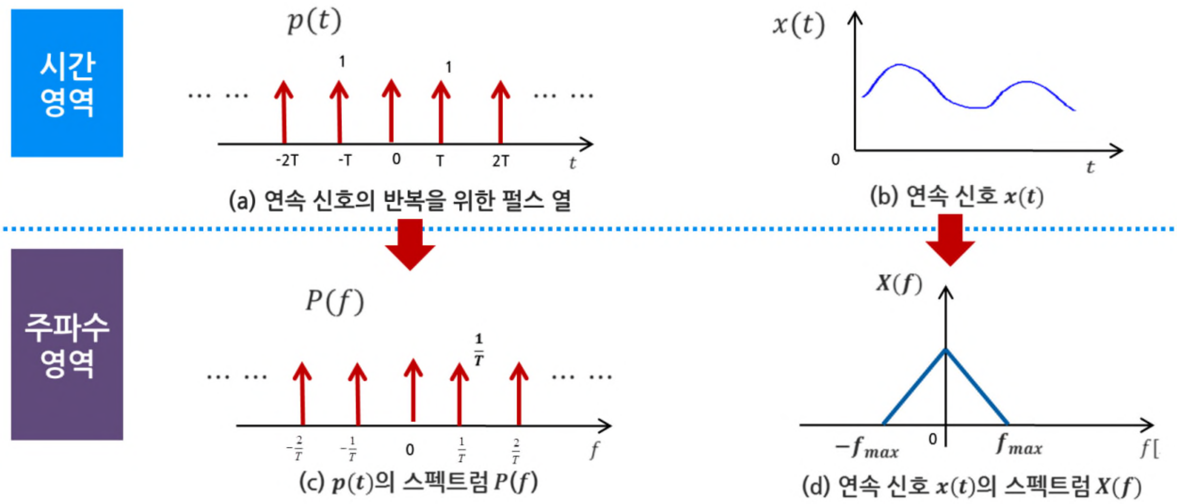
2) 섀논의 샘플링 이론(Shannon's Sampling Theorem)

- 연속 신호 $x(t)$의 최대 주파수가 f_{max} 이고, 이산 신호 $x[n]=x(nT_s)$으로 부터 정확하게 복원하기 위해서는 연속 신호 $x(t)$에 대한 샘플링 주파수 f_s 는 입력 신호의 최대 주파수의 2배($2f_{max}$)이상임

$$f_s \geq 2f_{max}$$

샘플링 이론 증명

1. 샘플링 이론 증명



(a) 연속 신호의 반복을 위한 펄스 열

(b) 연속 신호 $x(t)$

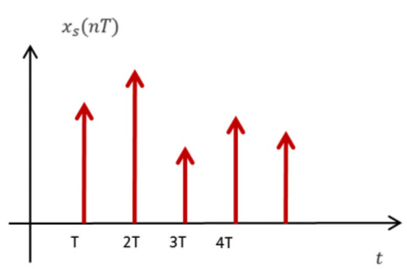
(c) $p(t)$의 스펙트럼 $P(f)$

(d) 연속 신호 $x(t)$의 스펙트럼 $X(f)$

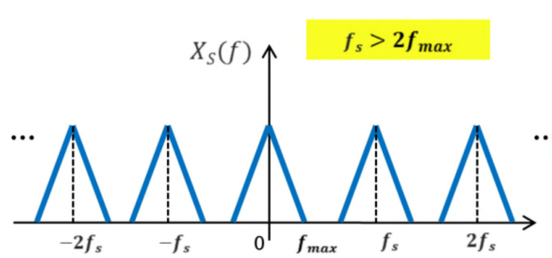
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 kt} \qquad \omega_o = 2\pi f_0, \quad f_0 = \frac{1}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T}$$ 모든 k에 대하여

$$x_s(nT) = x(t)p(t) \Rightarrow X_s(f) = X(f) * P(f)$$

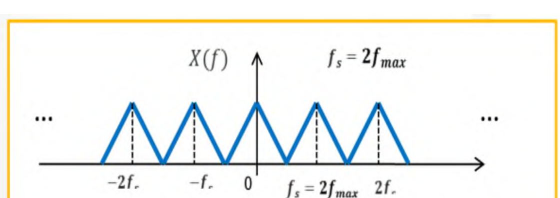


(a) 샘플링된 이산 신호

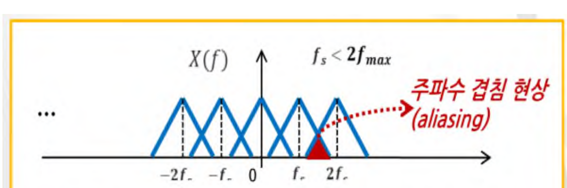


(b) 샘플링된 이산 신호의 스펙트럼, $X_s(f)$

- 샘플링 된 이산 신호의 스펙트럼



(a) $f_s = 2f_{max}$ 일 때의 샘플링 된 이산 신호의 스펙트럼



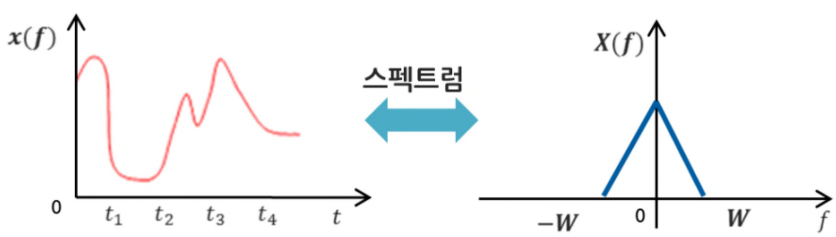
(a) $f_s < 2f_{max}$ 일 때의 샘플링 된 이산 신호의 스펙트럼

샘플링 이론 증명

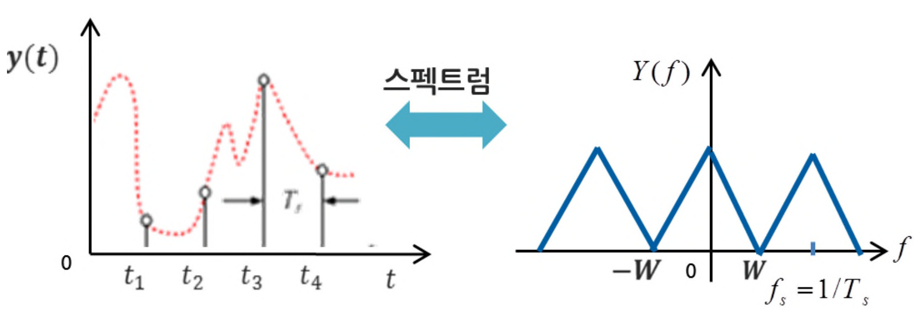
2. 나이키스트 샘플링률(Nyquist Sampling Rate)

1) 아날로그 신호와 이산 신호의 스펙트럼

- 아날로그 신호



- 이산 신호



2) 정의

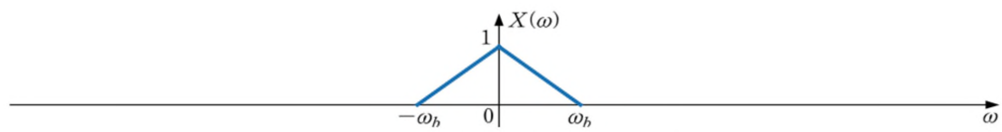
- 아날로그 입력 신호 $x(t)$의 주파수 성분 중 최대 주파수를 f_m 이라 하면, 샘플링 주파수 f_s 가 $f_s = 2f_m$ 이 되는 주파수

$$f_{Nyquist\ Sampling\ Rate} = 2f_m$$

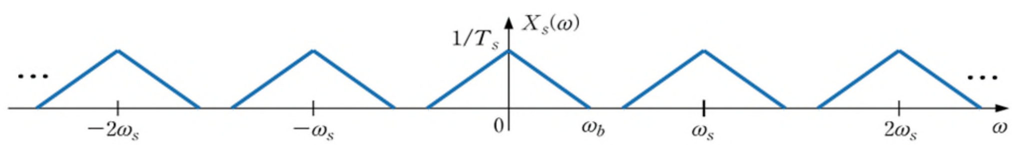
샘플링 이론 증명

3. 주파수 겹침 현상(Aliasing)

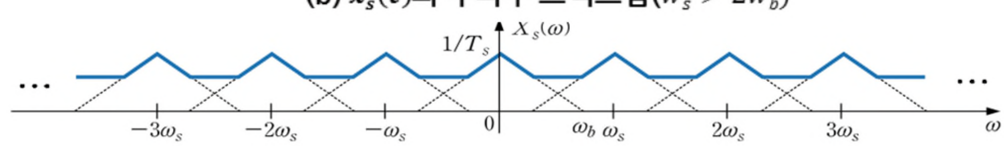
- 아날로그 신호를 디지털 신호 변환 과정에서 샘플링 주파수 < 나이키스트 샘플링률 (Nyquist Sampling Rate)로 원래의 신호를 복원하지 못하고, 왜곡이 발생하는 현상
- 샘플링 효과와 LP필터를 이용한 신호 복원
  → 샘플링 이론에 의하여, 연속 신호를 샘플링할 때 주파수 겹침 현상이 발생하면 원신호를 제대로 복원할 수 없음



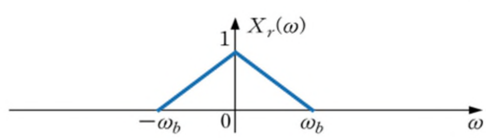
(a) $x(t)$의 주파수스펙트럼



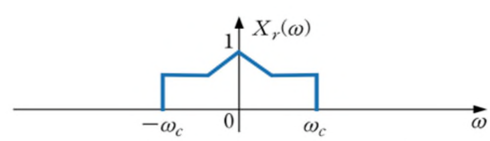
(b) $x_s(t)$의 주파수 스펙트럼($w_s > 2w_b$)



(c) $x_s(t)$의 주파수 스펙트럼($w_s < 2w_b$)



(d)복원된 신호의 주파수 스펙트럼 ($w_s < 2w_b$



(e)복원된 신호의 주파수 스펙트럼 ($w_s < 2w_b$)

핵심정리

샘플링 이론

- 연속 신호 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$의 최대 주파수가 $\boldsymbol{f_{max}}$이고, 이산 신호 $x[n]=x(\boldsymbol{nT_s})$으로 부터 정확하게 복원하기 위해서는 연속 신호 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$에 대한 샘플링 주파수 $\boldsymbol{f_s}$ 는 입력 신호의 최대 주파수의 2배$(\boldsymbol{2f_{max}})$이상임

$$\boldsymbol{f_s \geq 2f_{max}}$$

샘플링 이론 증명

- 나이키스트 샘플링률(Nyquist Sampling Rate): 아날로그 입력 신호 $x(t)$의 주파수 성분 중 최대 주파수를 $\boldsymbol{f_m}$ 이라 하면, 샘플링 주파수 $\boldsymbol{f_s}$ 가 $\boldsymbol{f_s = 2f_m}$ 이 되는 주파수

$$\boldsymbol{f_{Nyquist\ Sampling\ Rate} = 2f_m}$$

- 주파수 겹침 현상(Aliasing): 아날로그 신호를 디지털 신호로 변환하는 과정에서 샘플링 주파수를 나이키스트 샘플링률(Nyquist Sampling Rate)보다 작게 하여 원래의 신호를 복원하지 못하고, 왜곡이 발생하는 현상

샘플링 이론 실습

8주차 3차시

학습내용

❖ 정현파 신호에 대한 샘플링 실습

❖ 샘플링 주파수에 따른 스펙트럼 실습

학습목표

❖ Matlab 프로그램을 활용하여 정현파 신호에 대한 다양한 샘플링 주파수로 샘플링 할 수 있다.

❖ 샘플링 주파수에 따른 연속 신호의 실제 주파수 스펙트럼을 그려보고 설명할 수 있다.

정현파 신호에 대한 샘플링 실습

1. 정현파 신호에 대한 다양한 샘플링 주파수로 샘플링하기

실습과제 21-01

연속 신호 (정현파 신호) 에 대해 아래의 참고 자료를 활용하여 다양한 주파수에 대해 샘플링 주파수를 변경하면서 샘플링 해보자.

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

참고 자료 1

샘플링 주기에 따라서 이산 정현파 신호를 생성하는 함수(sample_signal.m)

```
% 샘플링 주기에 따른 이산 정현파를 생성해서 그리는 함수
function sample_signal(ti, tf, dt, Ts, A, fo, rs, cs, r)
t = ti:dt:tf; % 연산시간 t를 ti부터 tf까지 dt 간격으로 증가시킴
xc = A*cos(2*pi*fo*t); % 주파수 fo인 연속신호 정현파 생성
n = ti:Ts:tf; % t를 샘플링 주기 Ts 간격으로 샘플링하여 n을 생성
xd = A*cos(2*pi*fo*n); % 이산 정현파 신호 생성
subplot(rs, cs, r); % 그림 rs 행 cs 열 분할 그림 창의 r번째 창
plot(t, xc, ':r'); % 연속정현파 신호를 plot
axis([ti tf -(1.2*A) 1.2*A]);
hold on;
stem(n, xd); % 샘플링 주기가 Ts인 이산 정현파 plot
```

참고 자료 2

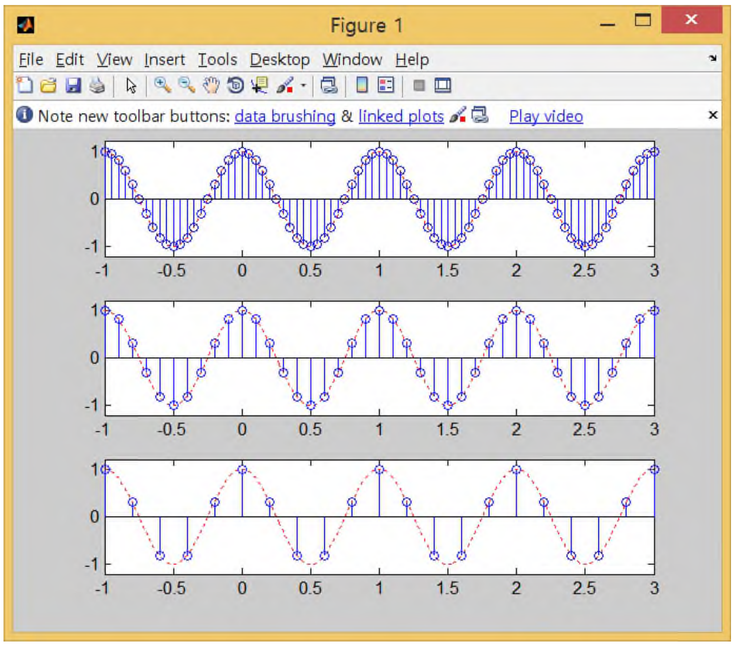
다양한 샘플링 주기(샘플링 주파수)를 이용한 이산신호 그리기(Ex1.m)

```
Ts = [0.05 0.1 0.2]; % 샘플링 주기 설정
sample_signal(-1,3,0.01,Ts(1),1,1,3,1,1); % 샘플링주기가 0.05
sample_signal(-1,3,0.01,Ts(2),1,1,3,1,2); % 샘플링주기가 0.1
sample_signal(-1,3,0.01,Ts(3),1,1,3,1,3); % 샘플링 주기가 0.2
```

정현파 신호에 대한 샘플링 실습

1. 정현파 신호에 대한 다양한 샘플링 주파수로 샘플링하기

[과제해설]



[그림 1] 주파수1 Hz의 정현파 신호에 대한 다양한 샘플링 주파수로 샘플링 된 이산신호

샘플링 주파수에 따른 스펙트럼 실습

1. 이산 신호 x[n]에 대한 주파수 스펙트럼

실습과제 24-02

정현파 연속 신호 $S(T) = COS(2\pi(100)t)$ 를 샘플링 주파수 $f_s = 75Hz$로 샘플링 하고, 샘플 수 N=1024개를 이용하여 샘플된 이산신호, 에 대한 주파수 스펙트럼을 참고자료의 plot_spectrum.m 프로그램을 이용하여 Plot 해 보자.
이때 원신호 x(t)의 주파수 스펙트럼과 일치하는지 확인해 보자.

참고 자료 1

이산신호 x[n]에 대한 주파수 스펙트럼 프로그램

```
% 샘플링된 신호 x의 진폭 스펙트럼을 그려주는 함수
function plot_spectrum(x,fs)
N=1024; % 이산퓨리에변환시 샘플포인트 수
df = fs/N; % 주파수 해상도 계산
X = fft(x); % 고속 퓨리에변환에 의한 스펙트럼 계산
X=fftshift(X); % 스펙트럼을 좌우대칭에 되게 정렬
f = df *[-N/2+1:N/2]; % 스펙트럼을 그리기 위한 주파수축 설정
Xmag = abs(X)/max(abs(X)); %(규준화된) 진폭 스펙트럼 계산
plot(f, Xmag); % 진폭 스펙트럼을 그린다.
axis([f(1) f(length(f)) 0 1.2]); % x축 및 y축 그림 영역 설정
title('\bf{샘플링된 신호의 진폭 스펙트럼}'); %그림 제목
xlabel('\bf{f(Hz)}'); % x 축 라벨 표시
```

참고 자료 2

이산신호 x[n]에 대한 주파수 스펙트럼 프로그램, Ex2.m

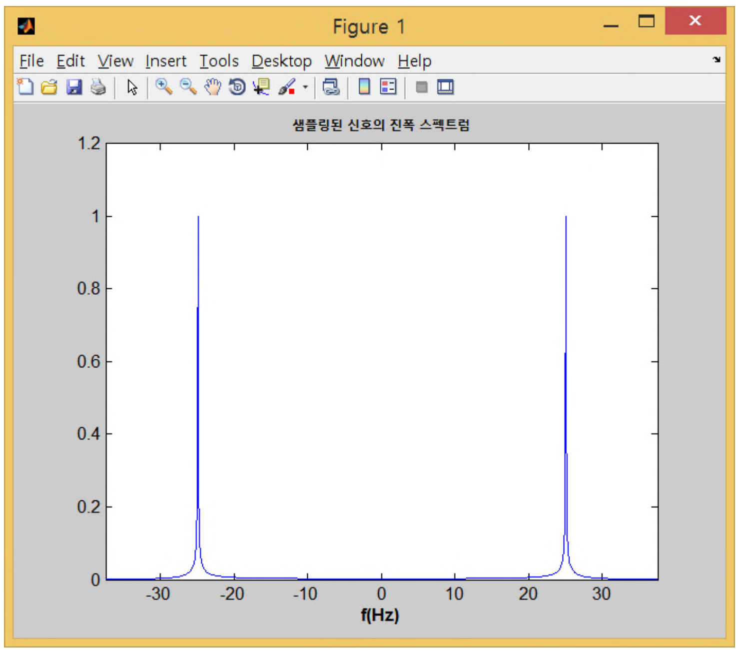
```
fs = 75; % 샘플링 주파수 설정
fo = 100; % 연속 정현파 신호 x(t)의 주파수
Ts = 1/fs; % 샘플링 주기 계산
N = 1024; % 샘플링하는 입력신호의 전체 샘플 수
n=0:Ts:(N-1)*Ts; % 샘플 추출시간 설정
x = cos(2*pi*fo*n); % 샘플링된 신호 x[n] 생성
plot_spectrum(x,fs); %fs = 75인 샘플링된 신호의 진폭 스펙트럼을 그린다.
```

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

샘플링 주파수에 따른 스펙트럼 실습

1. 이산 신호 x[n]에 대한 주파수 스펙트럼

[과제해설]



[그림 2] 샘플링 주파수, 75 Hz로 샘플링 했을 때의 주파수 스펙트럼

샘플링 주파수에 따른 스펙트럼 실습

2. 다양한 주파수 스펙트럼

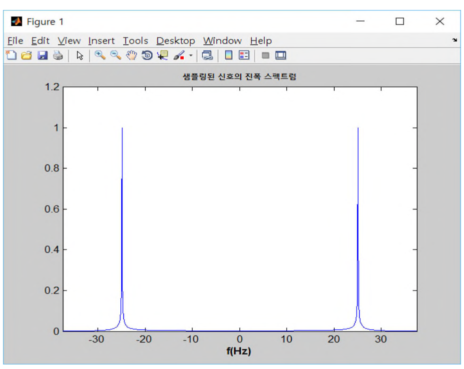
실습과제 24-03

샘플링 주파수를 다음과 같이 다양한 샘플링 주파수로 샘플링하고, 샘플링 된 이산 신호에 대한 주파수 스펙트럼을 그려보자.
다양한 샘플링 주파수에서 샘플링 이론을 만족하는 주파수는 어떠한 주파수들인가?

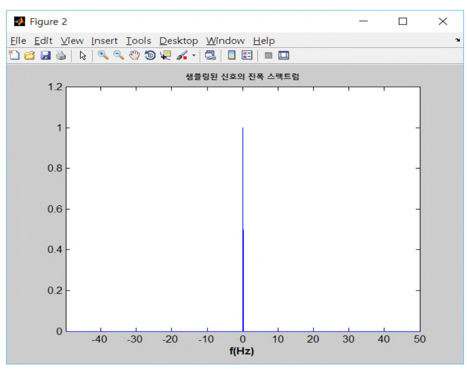
$$f_s = 100 \ , 125 \ , 175 \ , 210 \ , 400 \ , 1{,}000 \ \ Hz$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

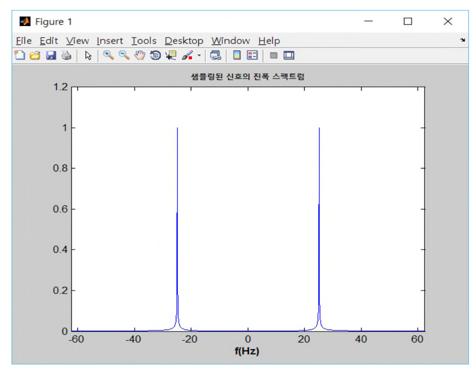
[과제해설]



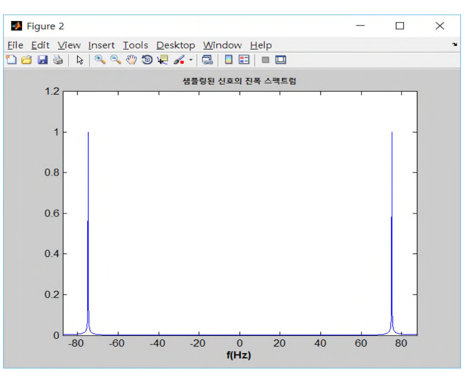
[fs = 75 일 때]



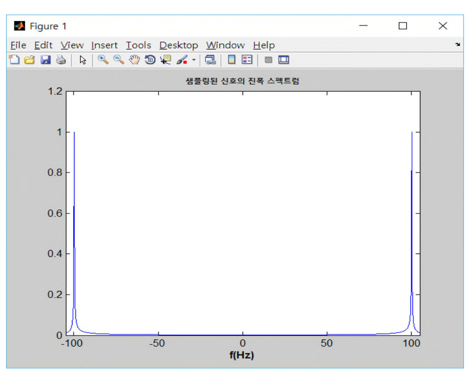
[fs = 100 일 때]



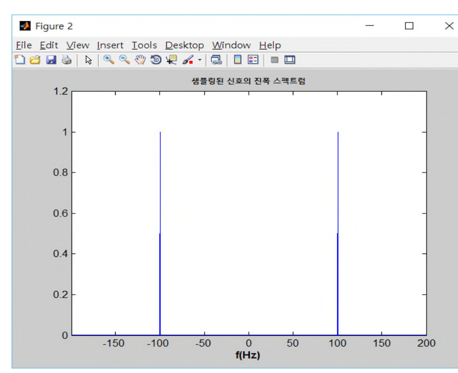
[fs = 125 일 때]



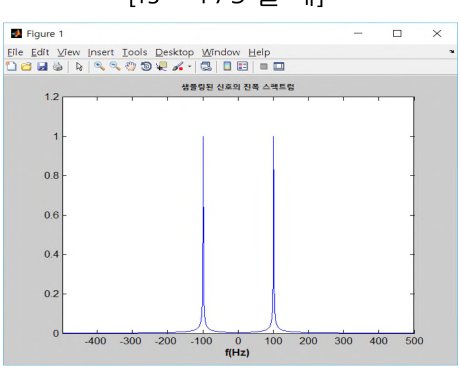
[fs = 175 일 때]



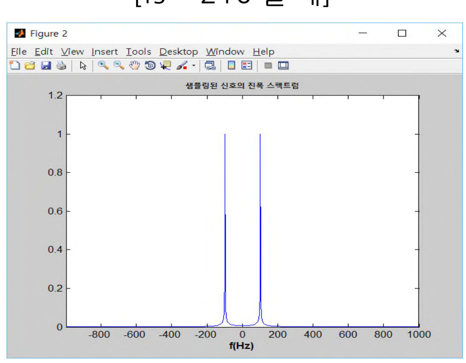
[fs = 210 일 때]



[fs = 400 일 때]



[fs = 1000 일 때]

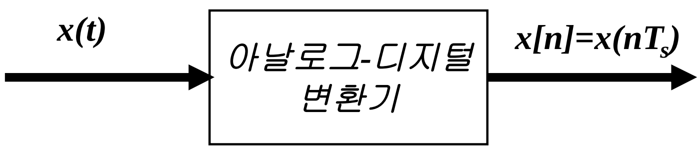


[fs = 2000 일 때]

핵심정리

정현파 신호에 대한 샘플링 실습

- 샘플링 이론(Sampling Theorem)



[아날로그-디지털 변환기(A-D Converter)]

- 연속 신호 x(t)의 최대 주파수가 $f_{\max}$ 라고 하면, 이산 신호 $x[n]=x(nT_s)$ 으로부터 정확하게 복원(Reconstruction)하기 위해서는 연속 신호 x(t)에 대한 샘플링 주파수 f_s 는 입력 신호의 최대 주파수의 2배, $2f_{\max}$ 이상 이여야 함

$$f_s \geq 2f_{\max}$$

샘플링 주파수에 따른 스펙트럼 실습

- 나이키스트 샘플링률(Nyquist Sampling Rate)이란?

  아날로그 입력 신호 x(t)의 주파수 성분가운데 최대 주파수를 f_m 이라 하면, 샘플링 주파수 $f_s = 2f_m$이 되는 주파수

$$f_{Nyquist\ \ Sampling\ \ Rate} = 2f_m$$

- 주파수 겹침 현상(에일리어싱)이란?

  아날로그 신호를 디지털 신호로 변환하는 과정에서 샘플링 주파수를 나이키스트 샘플링률(Nyquist Sampling Rate)보다 작게 하여 원래의 신호를 복원하지 못하고, 왜곡이 발생하는 현상

디지털신호처리

강 의 노 트

A-D/D-A 변환기의 원리 이해

9주차 1차시

학습내용

❖ 아날로그-디지털 변환기

❖ 디지털-아날로그 변환기

학습목표

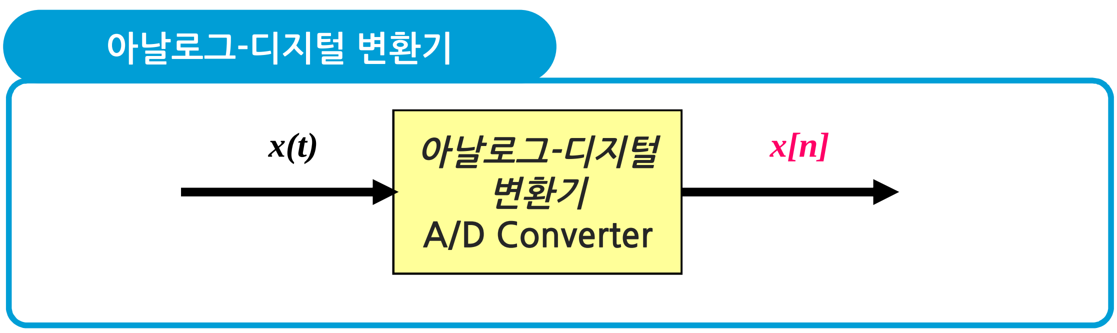
❖ 아날로그-디지털 변환기의 원리를 이해하고 설명할 수 있다.

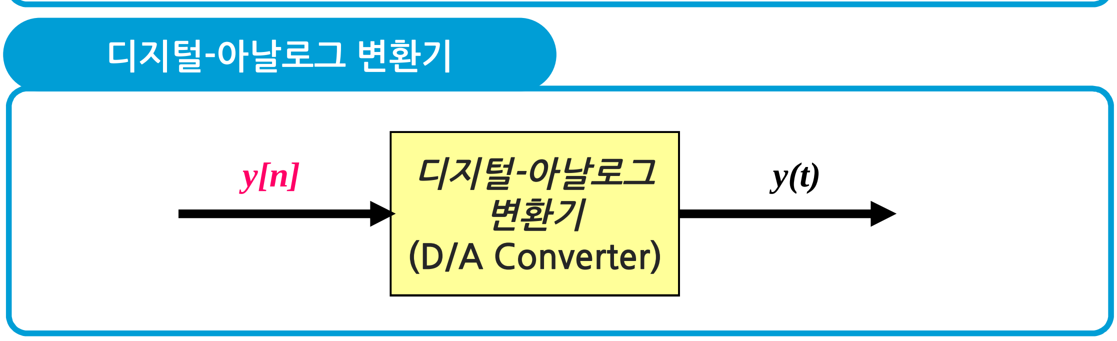
❖ 디지털-아날로그 변환기의 원리를 이해하고 설명할 수 있다.

아날로그-디지털 변환기

1. 반주파수 중첩 필터(Anti-aliasing Filter)

1) 아날로그-디지털 vs. 디지털-아날로그 변환기

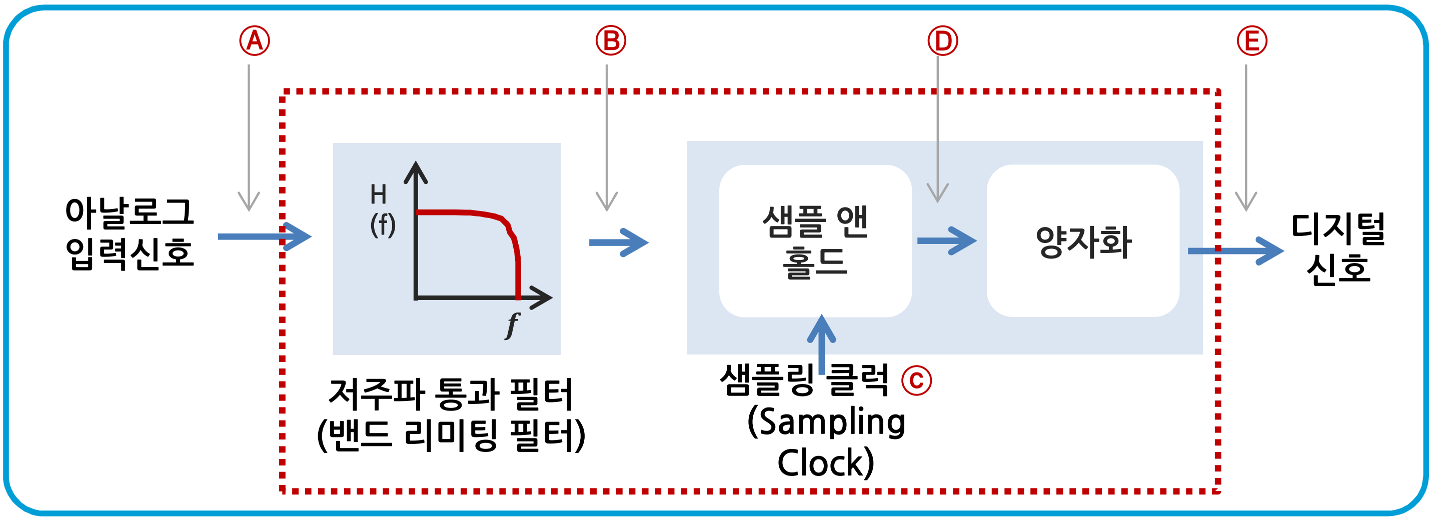




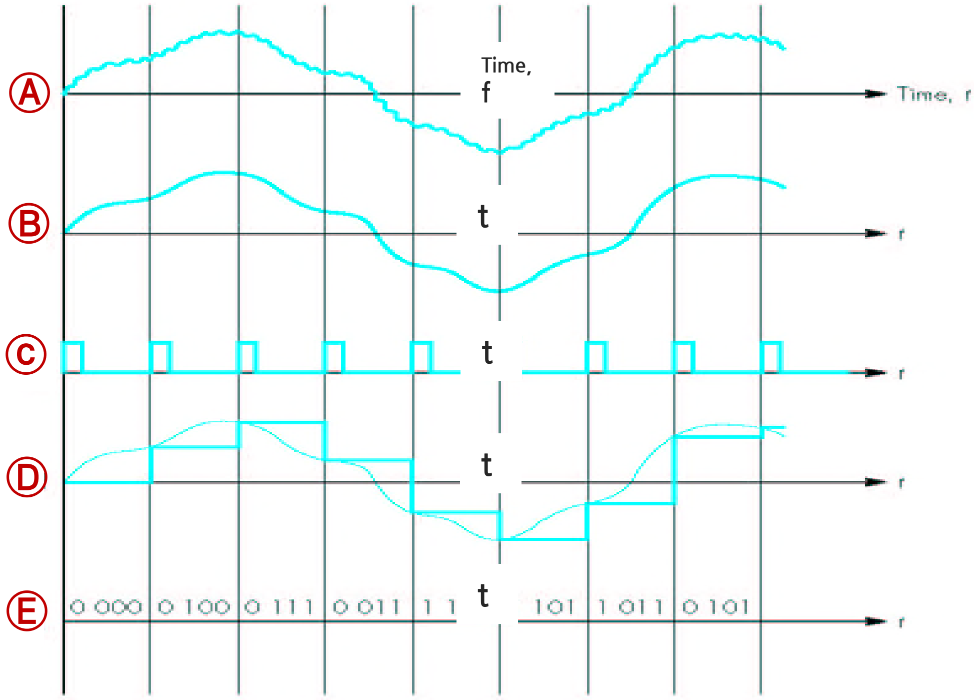
아날로그-디지털 변환기

1. 반주파수 중첩 필터(Anti-aliasing Filter)

2) 아날로그-디지털 변환기(A/D Converter)



3) A/D 변환기 각 단계에서의 신호 파형



아날로그-디지털 변환기

1. 반주파수 중첩 필터(Anti-aliasing Filter)

4) 저주파 통과 필터 또는 반주파수 중첩 필터

- 샘플링에 앞서 신호의 주파수 범위를 제한
- 주파수 중첩을 방지하기 위해 입력 아날로그 신호의 최대 주파수를 설정
- 임의의 주파수까지만 통과하도록 하는 필터로뒤쪽 샘플링 클럭(Sampling Clock)과 연동
- 신호에 섞여 들어오는 고주파 잡음이나 간섭 신호의 영향을 배제

5) 샘플링 클럭(Sampling Clock)

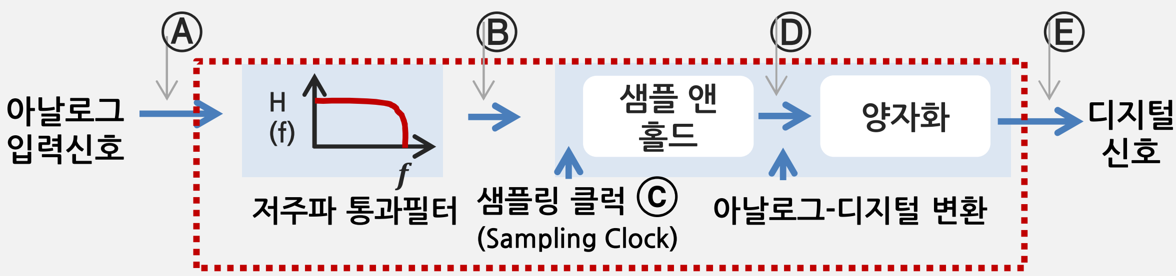
- 나이퀴스트 샘플링이론에 의하여 입력 아날로그 신호의 최대 주파수의 2배 이상의 주파수로 아날로그 신호를 샘플
  [예] 디지털 전화: 아날로그 음성 신호를 보통 8,000[Hz]의 샘플링 주파수로 샘플링함
  ➪ 사람의 음성 신호 통화 품질을 보장을 위해 3,000[Hz]이하의 주파수 성분들만으로도 충분
  ➪ 참고, 인간의 가청 주파수는 20Hz ~ 20KHz

아날로그-디지털 변환기

1. 반주파수 중첩 필터(Anti-aliasing Filter)

예제 22-01

아날로그 입력 신호의 스펙트럼이 15Hz에서 최대 10kHz 사이의 주파수를 가진다고 한다. 이러한 아날로그 신호를 디지털 신호로 변환하기 위해 다음과 같은 아날로그-디지털 변환기의 저주파 통과 필터의 대역폭(Bandwidth)과 샘플링 주파수(Sampling Rate)를 결정해 보자.



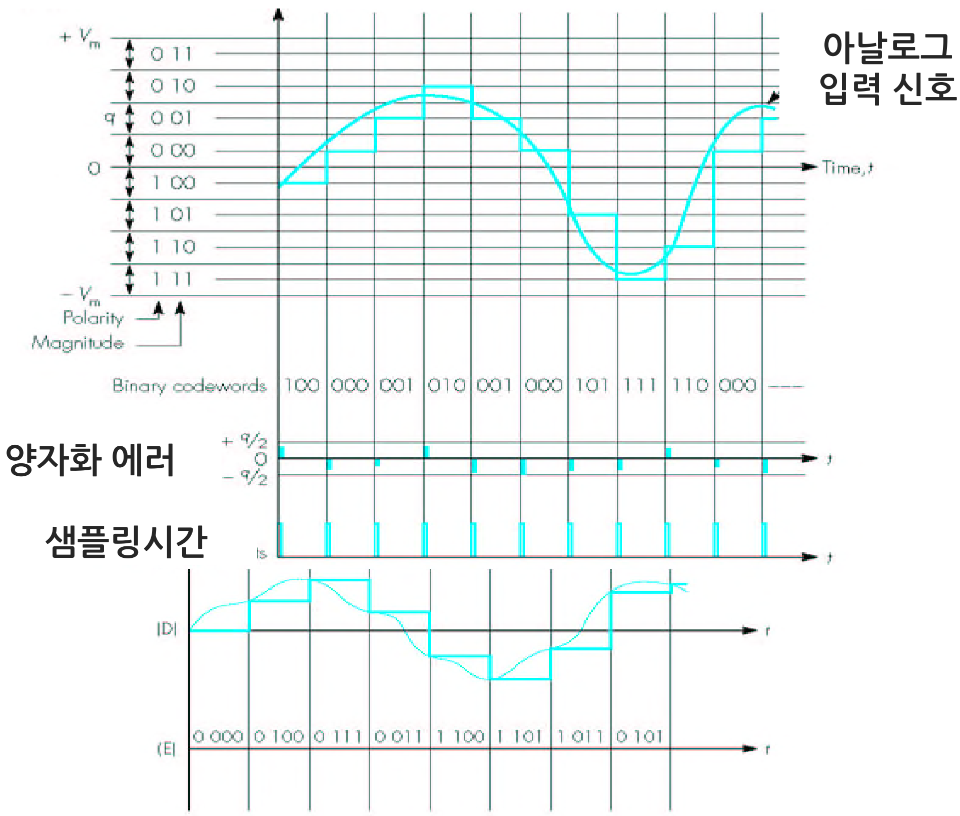
[예제풀이]

- 아날로그 입력 신호의 스펙트럼이 15Hz에서 최대 10kHz 사이의 주파수를 가지므로, 저주파 통과 필터의 대역폭(Bandwidth)은 0Hz ~ 10kHz를 통과하도록 설정
- 샘플링 주파수는 입력 신호의 최대 주파수의 2배 이상 즉, 20kHz 이상으로 샘플링

아날로그-디지털 변환기

2. 양자화기

- 이산 신호를 크기에 대해 이산화시켜 디지털 신호로 변환
- 디지털 신호 B 비트로 이진화할 경우, 입력 아날로그 신호의 전체 범위를 2^B 레벨로 나누어 실제 아날로그 값 대신 가까운 레벨 값의 디지털비트로 변환



3. 양자화 에러

1) 정의

- 양자화 과정에서 소실되는 원본 아날로그 신호
- 아날로그 신호의 전체 범위를 2^B 레벨로 나누어 실제 아날로그 값 대신 가까운 레벨 값의 디지털 비트로 변환할 때
  ⇨ 한 레벨의 크기가 q, 양자화 오차는 $^{-q}/_{2} \sim {}^{q}/_{2}$
- 디지털 비트 수를 늘리면 양자화 오차는 감소함

아날로그-디지털 변환기

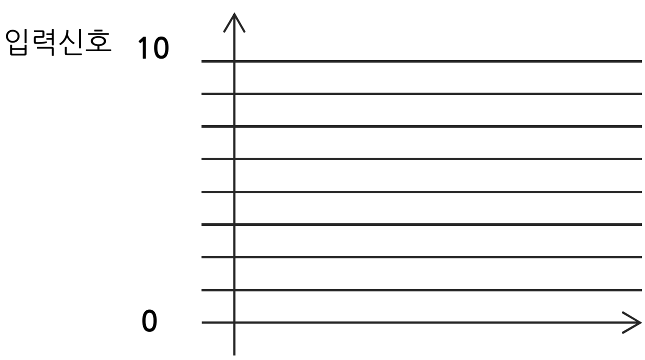
3. 양자화 에러

예제 22-02

아날로그 입력 신호의 진폭이 0~10까지 변하는 입력 신호 x가 있다고 가정하자. 이러한 아날로그 신호를 3비트의 디지털 신호로 변환해 보고, 이 때의 양자화 에러(Quantization)를 구해보자.

[예제풀이]

- 비트로 표현하기 위해서는 $2\wedge3=8$ 이기 때문에, 입력신호 0부터 10까지의 신호는 8레벨로 나눌 수 있음
  ⇨ 한 레벨은 $q=1.25$
- 따라서, 각 아날로그 입력 레벨 값에 따라 3비트로 디지털화 되고, 양자화 오차는 -0.625 ~ 0.625가 됨



$8.75 \le x < 10$	111
$7.5 \le x < 8.75$	110
$6.25 \le x < 7.5$	101
$5.0 \le x < 6.25$	100
$3.75 \le x < 5.0$	011
$2.5 \le x < 3.75$	010
$1.25 \le x < 2.5$	001
$0 \le x < 1.25$	000

예제 22-03

만약 [예제 2]에서 디지털 신호의 비트 수를 4비트로 할 경우 양자화 에러는 어떻게 되나? 양자화 에러는 얼마나 줄어드는가?

[예제풀이]

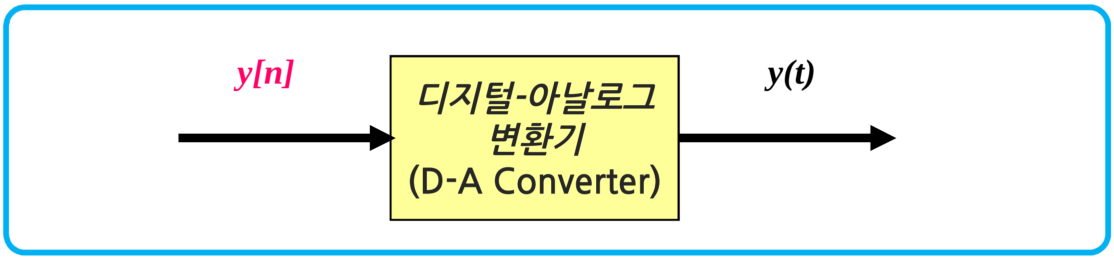
- 입력 신호 10의 크기를 4비트로 표현할 때, $2^4=16$ 레벨로 나눌 수 있음
  ⇨ 한 레벨의 크기는 0.625 (10/16 = 0.625 =q)
- 결론적으로, 양자화 오차는 -0.3125 ~ +0.3125 가 되고, 3비트로 양자화 한 경우보다 양자화 오차가 줄어들게 됨

디지털-아날로그 변환기

1. 아날로그 신호 복원

1) 정의

- 디지털 신호 처리를 위해 아날로그 신호를 디지털 신호로 변환 후,
  ⇨ 디지털 CPU에 의해 처리된 결과를 원래의 아날로그 신호로 복원하는 과정



2) 목적

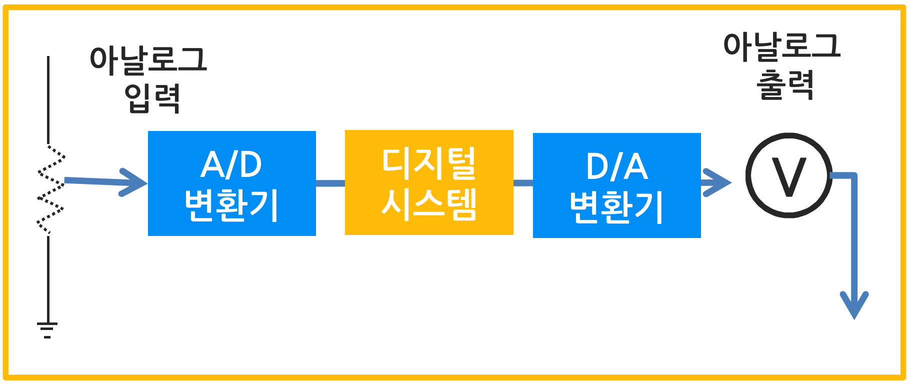
- 신호의 전송, 처리 및 저장을 위해
  ⇨ 원본 아날로그 신호를 디지털 신호로 변환하여 디지털 프로세서를 이용, 디지털 처리
  ⇨ 디지털 신호 처리 된 최종적인 신호는 다시 원래의 아날로그 장치에 필요한 아날로그 신호로 변경

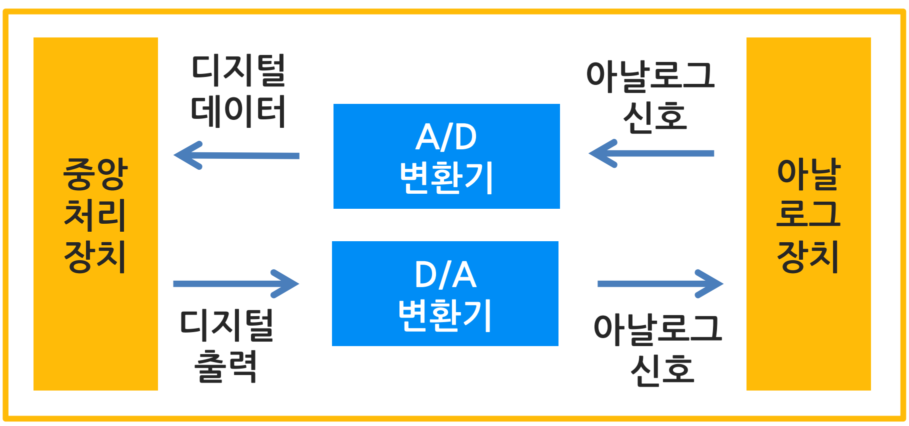
[예] TV, 스피커 등

디지털-아날로그 변환기

1. 아날로그 신호 복원

- 신호 처리의 최종 장치는 아날로그 장치이기 때문에 디지털 시스템에서 처리된 신호를 다시 원래의 아날로그 신호로 복원

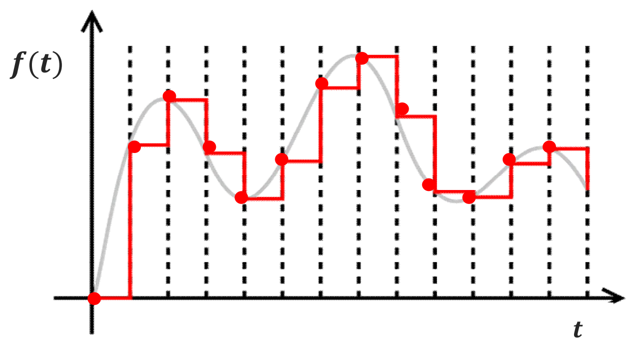




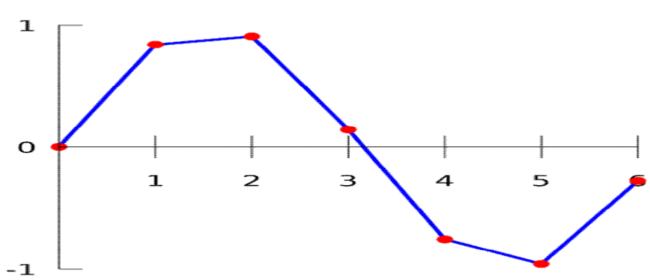
디지털-아날로그 변환기

1. 아날로그 신호 복원

- 디지털 신호를 아날로그 신호로 변환하기 위해 필요한 것은?
  ⇨ 샘플 사이에 정의되지 않은 구간에서 "어떻게 보간할 것인가"임
  (Interpolation)



[영차 홀드(Zero-hold Interpolation)]



[일차 홀드 또는 선형 보간(Linear Interpolation)]

- [예] 대표적인 아날로그-디지털 변환기와 디지털-아날로그 변환기

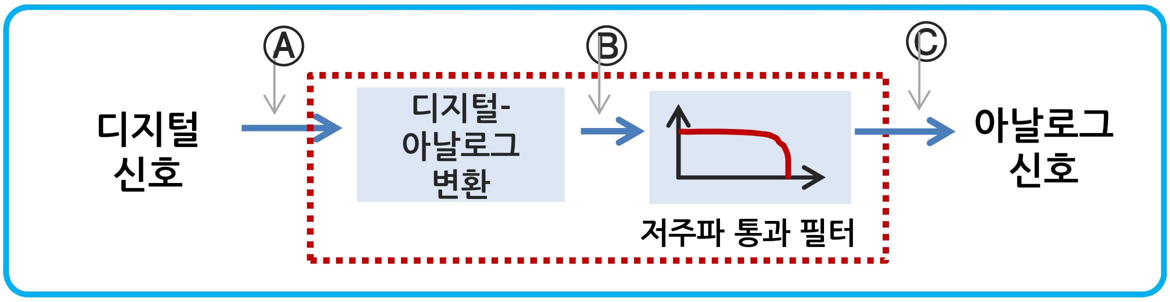
[CD 오디오 시스템에서의 신호 처리 과정]

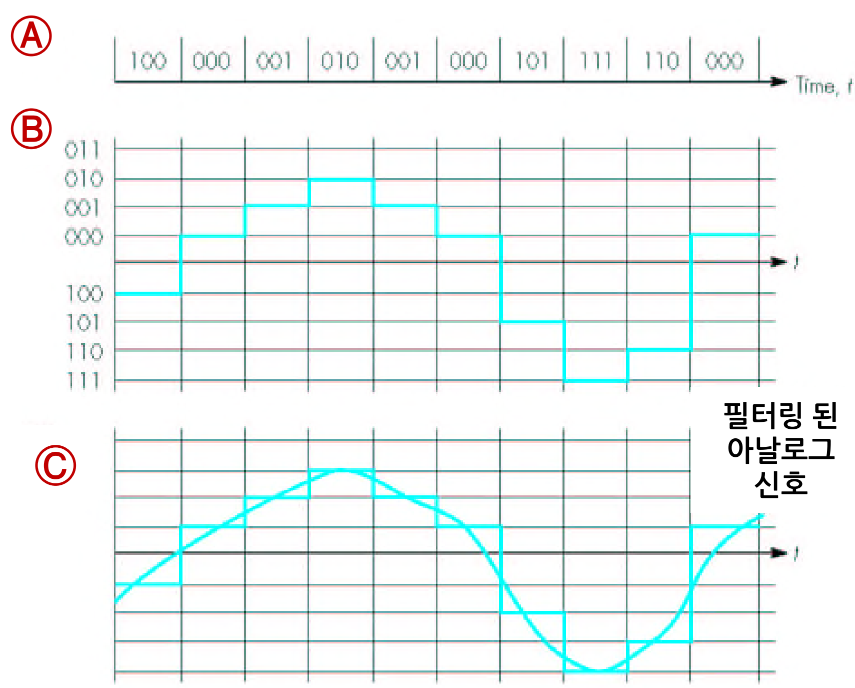
디지털-아날로그 변환기

2. 디지털-아날로그 변환

1) 정의

- 디지털 값은 DAC를 거치면서 이산 신호가 되고 이러한 이산 신호가 저주파 통과 필터를 통과하면 원래의 아날로그 신호가 됨



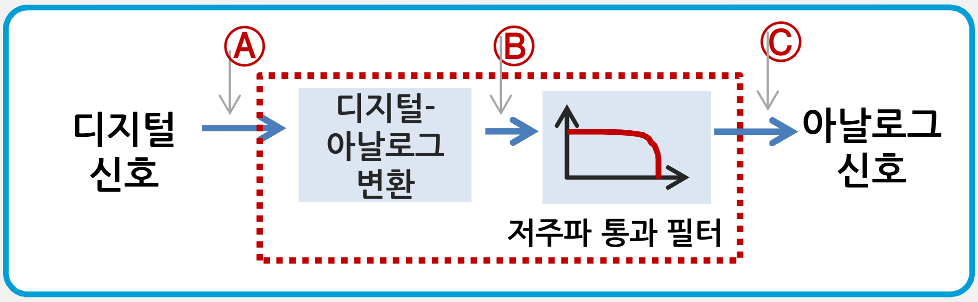


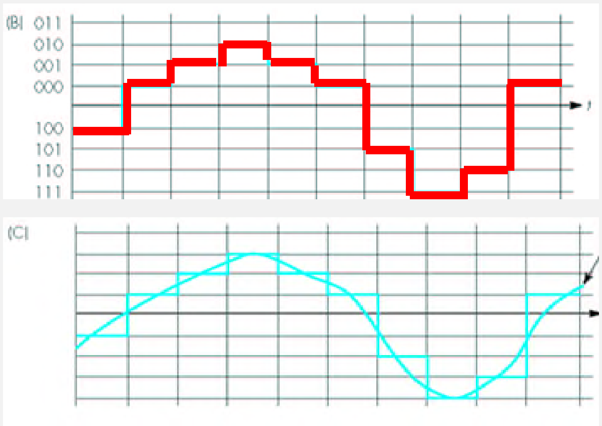
디지털-아날로그 변환기

2. 디지털-아날로그 변환

예제 22-04

다음 디지털-아날로그 변환기에서 (B)에서의 파형이 저주파 통과 필터를 통과한 (C)의 파형처럼 되는 이유를 간단하게 설명해 보자.

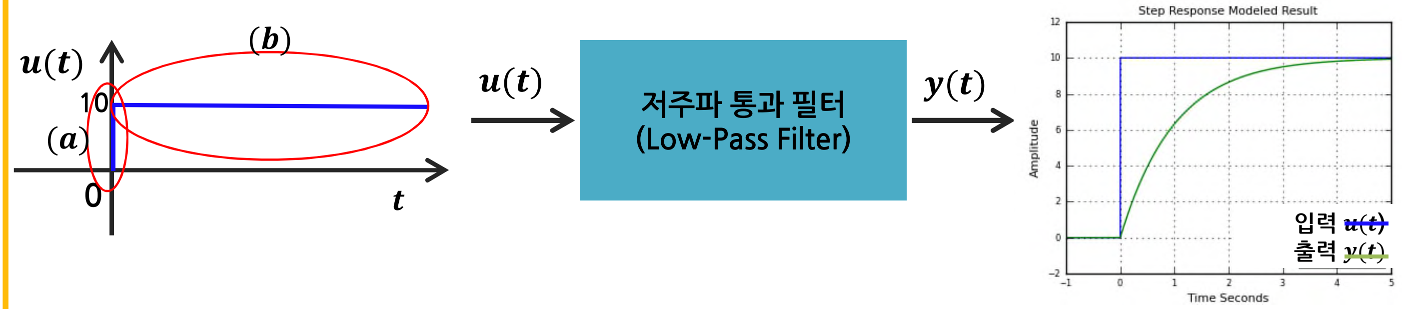




[예제풀이]

- 단위 스텝 신호 $u(t)$에서 (a)영역은 (b)영역에 비해 고주파 성분을 많이 포함
- 디지털-아날로그 변환기에서 저주파 통과 필터를 통과하기 전의 (B)신호는 순간적으로 변화가 심한 영역(a)들로 구성
- 그래서 단위 스텝 신호가 저주파 통과 필터를 지나면서 고주파가 통과하지 못해 신호가 갑자기 변하지 않는 비교적 부드러운 신호를 출력하게 됨

[단위 스텝 신호를 저주파 통과 필터를 통과한 출력 신호]

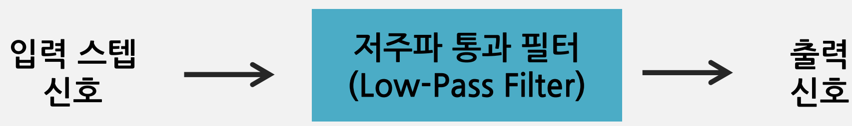


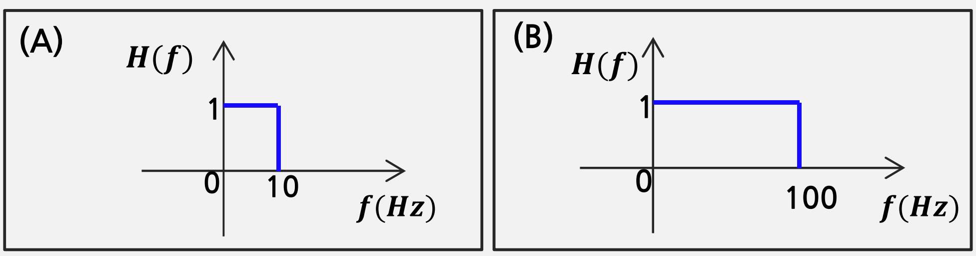
디지털-아날로그 변환기

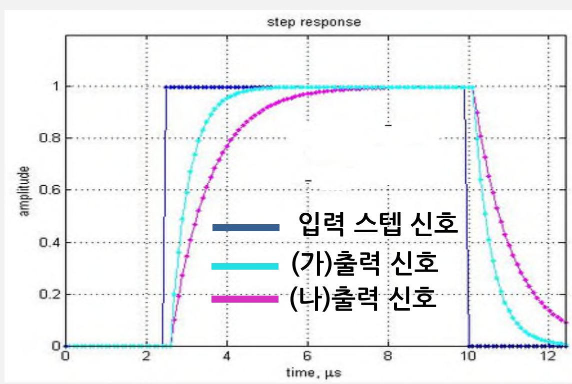
2. 디지털-아날로그 변환

예제 22-05

다음과 같이 두 가지(A, B)의 저주파 통과 필터에 입력 스텝 신호를 입력한 후, 각각의 출력 결과를 한 화면에 출력하였다.
이 때, 두 가지 저주파 통과 필터에 해당하는 출력 결과를 결정해 보자.







[예제풀이]

- 저주파 통과 필터의 Cutoff 주파수가 높을수록 입력 신호의 고주파수가 많이 통과되어 입력 스텝 신호에 가깝게 출력됨
- 저주파 통과 필터의 Cutoff 주파수가 낮을수록 입력 신호의 고주파수가 많이 통과되지 못해서 좀 더 천천히 변하게 됨

디지털-아날로그 변환기

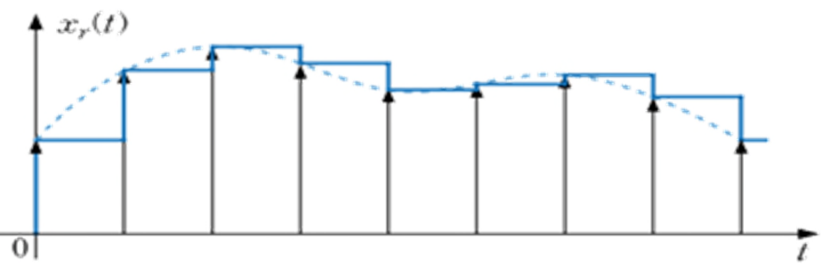
3. 영차 홀드와 일차 홀드

1) 영차 홀드를 이용한 신호 복원

- 다음 샘플 값 발생까지, 직전의 샘플 값을 유지
- 가장 단순, 실제적, 일반적인 신호 복원방법

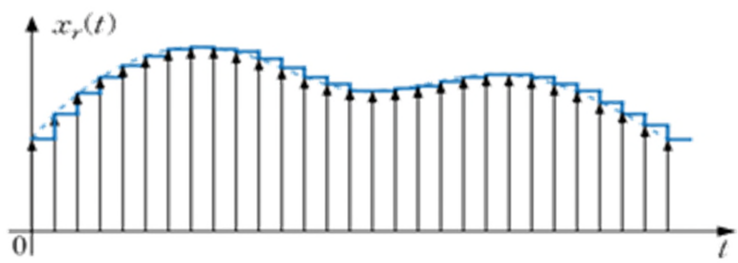
낮은 샘플링 주파수일 경우

[영차 홀드 디지털-아날로그 신호복원]



높은 샘플링 주파수일 경우

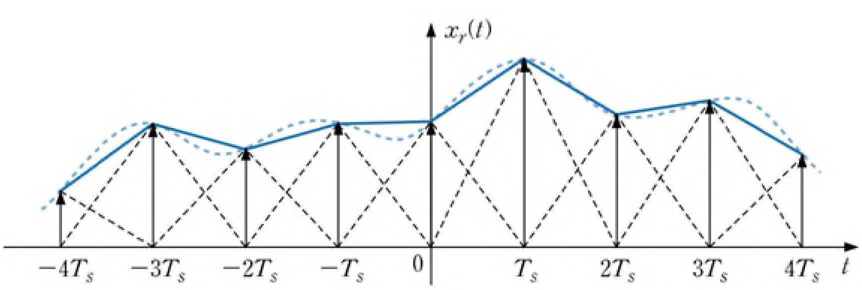
[영차 홀드 디지털-아날로그 신호복원]



2) 일차 홀드(선형 보간)를 이용한 신호 복원

- 인접한 샘플들을 직선으로 연결, 연속 신호를 얻는 방법
- 영차 홀드보다는 복잡하나 비교적 단순, 쓸모 있는 신호 복원 방법

[일차 홀드를 이용한 아날로그 신호 복원]

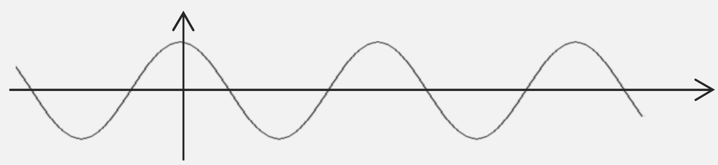


디지털-아날로그 변환기

3. 영차 홀드와 일차 홀드

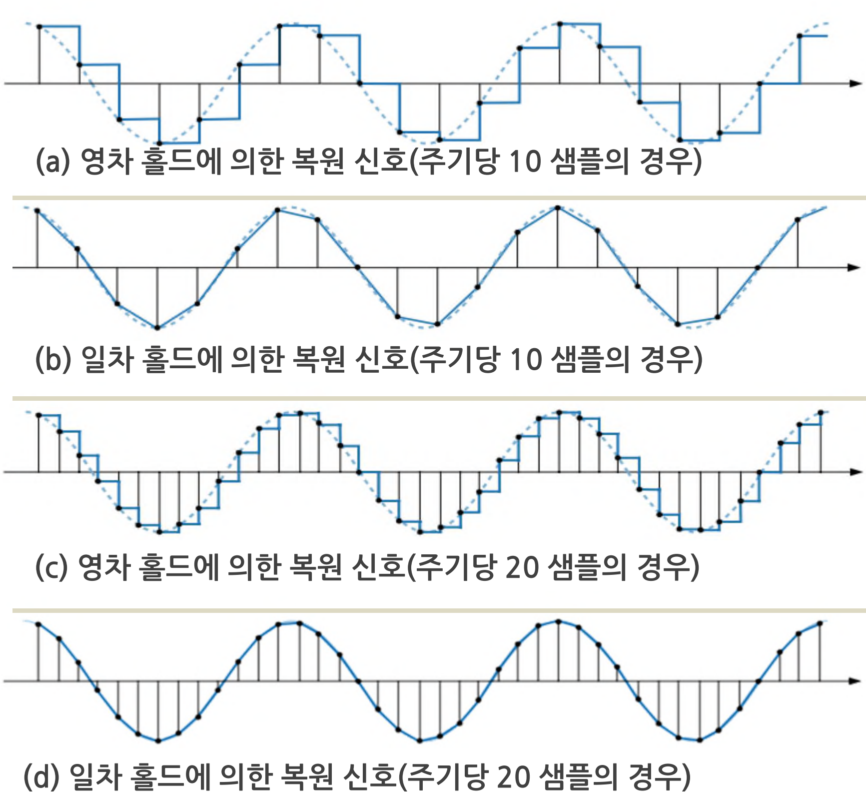
예제 22-06

다음과 같은 연속 정현파 신호를 주기당 10샘플과 20샘플로 샘플링 한 이산 신호로부터 영차 홀드와 일차 홀드를 이용하여 연속 신호로 복원한 결과를 그려 보자.



[연속 정현파 신호]

[예제풀이]



(a) 영차 홀드에 의한 복원 신호(주기당 10 샘플의 경우)

(b) 일차 홀드에 의한 복원 신호(주기당 10 샘플의 경우)

(c) 영차 홀드에 의한 복원 신호(주기당 20 샘플의 경우)

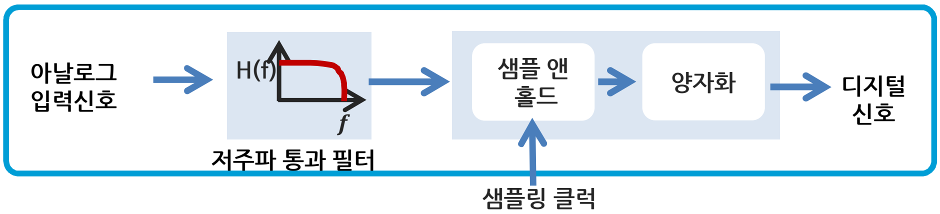
(d) 일차 홀드에 의한 복원 신호(주기당 20 샘플의 경우)

- (a), (b) : 정현파의 한 주기마다 10 샘플로 샘플링
- (c), (d) : 정현파의 한 주기마다 20 샘플로 샘플링

⇨ 샘플링율이 높을수록, 일차 홀드 복원이 더 정현파에 가까움

핵심정리

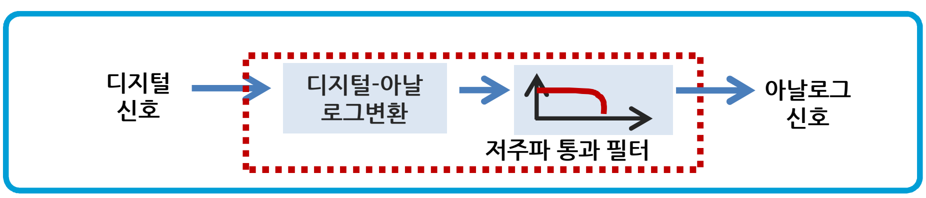
아날로그-디지털 변환기



[A-D 변환기의 블록도]

- A-D 변환기에서 저주파 필터: 주파수 중첩을 방기하기 위해 입력 아날로그 신호의 최대 주파수를 설정
- 샘플링 클럭: 입력 아날로그 신호의 최대주파수의 2배 이상의 주파수로 신호를 샘플함
- 양자화 에러: 양자화 과정에서 소실되는 원본 아날로그 신호

디지털-아날로그 변환기



[D-A 변환기의 블록도]

- D-A 변환기: 디지털-아날로그 변환을 통해 디지털 값이 이산 신호가 되고, 이산 신호가 저역 통과 필터를 통과하면 아날로그 신호로 변환됨
- 디지털-아날로그 변환은 영차 홀드와 일차 홀드 방법을 통하여 디지털 신호를 아날로그 신호로 변환함

디지털신호처리

강 의 노 트

이산 시간 신호 및 시스템

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

❖ 이산 시간 신호

❖ 이산 시간 시스템

학습목표

❖ 이산 신호의 정의와 표현에 대해 이해하고 간단한 이산 신호 변환을 할 수 있다.

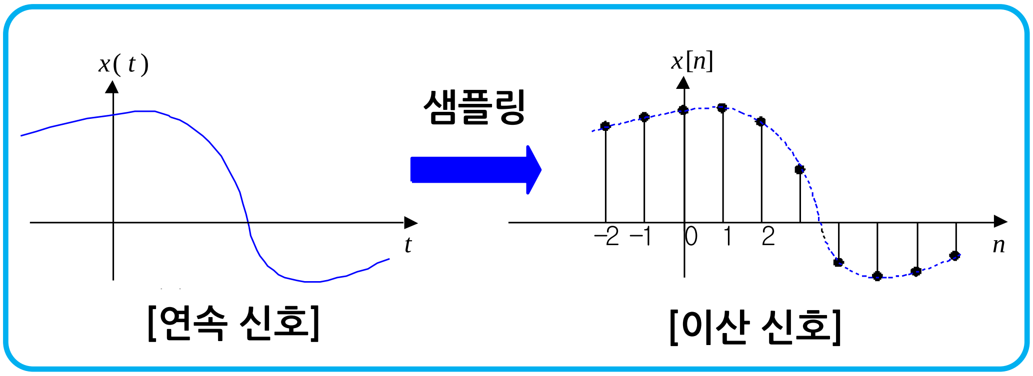
❖ 이산 시간 시스템에 대하여 이해하고 설명할 수 있다.

이산 시간 신호

1. 이산 시간 신호의 정의 및 표현

1) 정의

- 연속 신호: 모든 연속적인 시간 t에 대하여 정의
- 이산 신호: 특정한 시각에서만 값을 갖는 신호
- 연속 신호 $x(t)$를 T_s의 일정한 간격으로 샘플링하면 이산 신호 $x[n] = x(nT_s)$



이산 시간 신호

1. 이산 시간 신호의 정의 및 표현

2) 표현

함수

$$\mathrm{x[n]} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{n} = \mathbf{1,3} \\ \mathbf{4}, & \boldsymbol{n} = \mathbf{2} \\ \mathbf{0}, & \text{그 이외에} \end{cases}$$

표

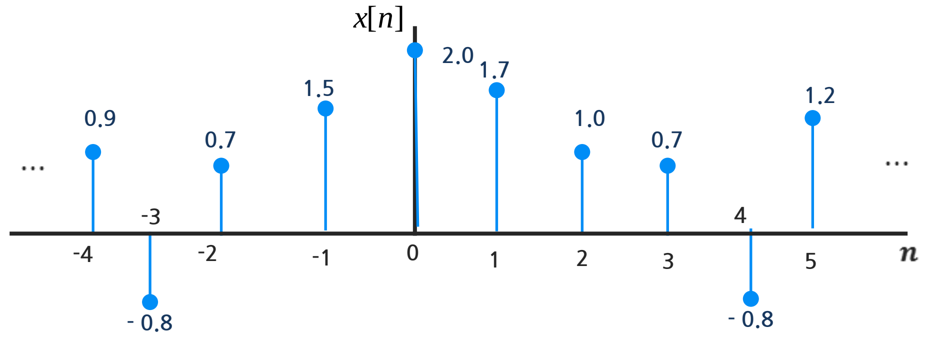
n	---	-2	-1	0	1	2	3	4	5	---
$x[n]$	---	0	0	0	1	4	1	0	0	---

수열

심볼 ↑에 의해 표현되는 원점(n=0)을 갖는
무한 구간 신호 또는 수열 표현

$$\mathrm{x[n]} = \{\ldots\, \mathbf{0}, \underset{\uparrow}{\mathbf{0}}, \mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots\}$$

그래프

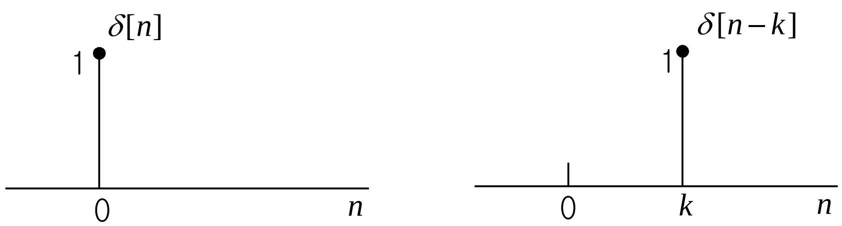


이산 시간 신호

2. 기본적인 이산 시간 신호

1) 단위 임펄스 신호(Unit Impulse Signal)

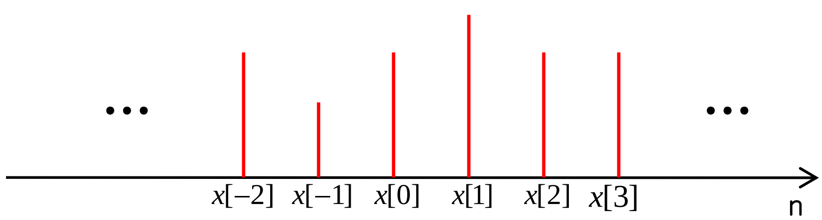
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



(a) [단위 임펄스 함수]

(b) [시간 이동된 단위 임펄스 함수]

- 임의의 이산 시간 신호 $x[n]$을 임펄스 신호로 표현



$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

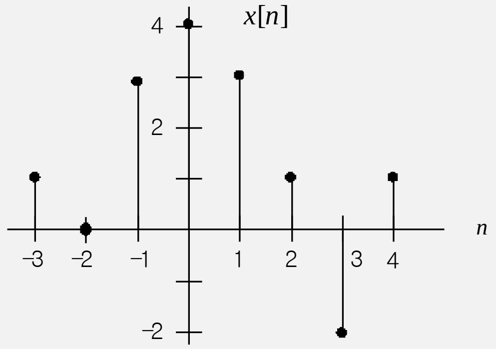
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

이산 시간 신호

2. 기본적인 이산 시간 신호

예제 23-01

단위 임펄스 신호를 이용하여 다음 그림과 같은 이산 신호 $x[n]$을 표현해 보자.



[예제풀이]

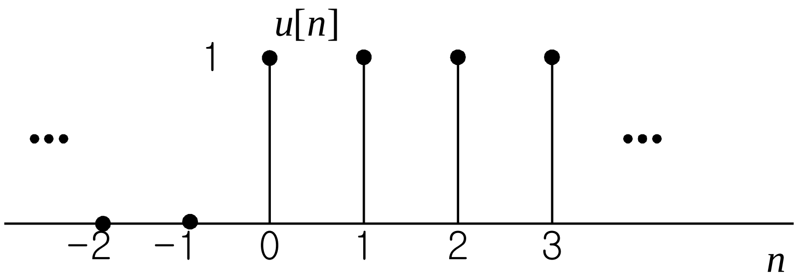
$$x[n] = \delta[n+3] + 3\delta[n+1] + 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2] - 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

이산 시간 신호

2. 기본적인 이산 시간 신호

2) 이산 단위 계단 신호(Unit Step Signal)

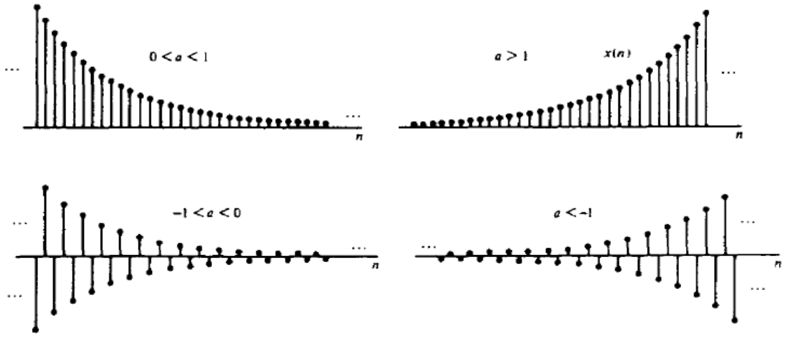
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



[단위 계단 신호]

3) 지수 신호

$x[n] = a^n,$ 모든 $\boldsymbol{n}$에 대하여



이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

1) 독립 변수(시간)의 변환

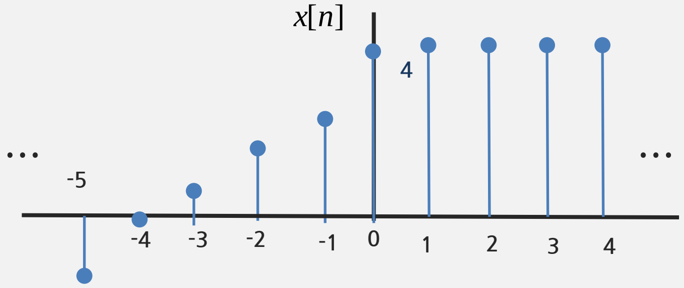
- 수열 $x[n]$의 독립 변수 n을 $n-k$(k는 정수)로 변형함으로써 신호 $x[n]$은 시간축 상에서 이동
- $x[n]$과 $x[n-k]$의 관계
  ⇨ k = 양의 정수, 시간 이동은 k 만큼 오른쪽으로 신호의 지연(Delay)을 의미
  ⇨ k = 음의 정수, 시간 이동은 k 만큼 왼쪽으로 진전된 시간 이동을 의미

이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

예제 23-02

신호 $x[n]$이 다음 그림과 같을 때, 신호 $x[n-3]$과 $x[n+2]$에 대해 그래프로 표현해 보자.

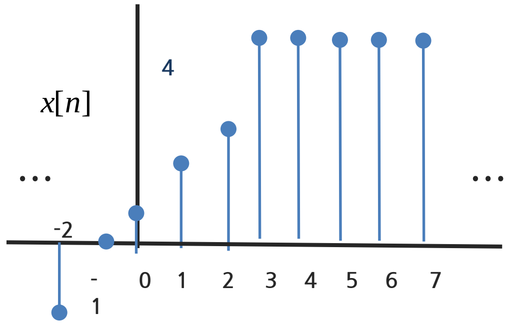


[예제풀이]

신호 $x[n-3]$

시간축 상에서 $x[n]$을 3개의 샘플 단위만큼 지연시키는 신호

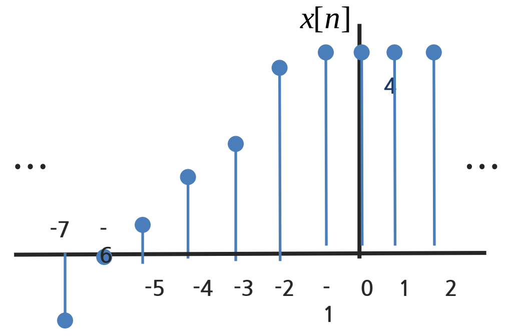
오른쪽으로 시프트



신호 $x[n+2]$

시간축 상에서 2개의 샘플 단위만큼 x[n]을 진전시키는 신호

왼쪽으로 시프트



이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

2) 시간 스케일링 변환

- 다운 샘플링(Down Sampling)과 업 샘플링(Up Sampling)
- $y[n] = x[\mu n]$으로 변환되는 $y[n]$ 신호는 이산 신호 $x[n]$를 시간축으로 다운 샘플링 또는 업 샘플링하는 변환
  ※ 참고: μ는 정수

3) [예] 다운 샘플링 된 영상 신호

원본 영상 신호
(640x480)

2배 다운 샘플된 영상 신호
(320x240)

4배 다운 샘플된 영상 신호
(160x120)

※ 이미지 출처: www.iclickart.com

4) [예] 업 샘플링 된 영상 신호

원본 영상 신호
(160x120)

2배 업 샘플된 영상 신호
(320x240)

4배 업 샘플된 영상 신호
(640x480)

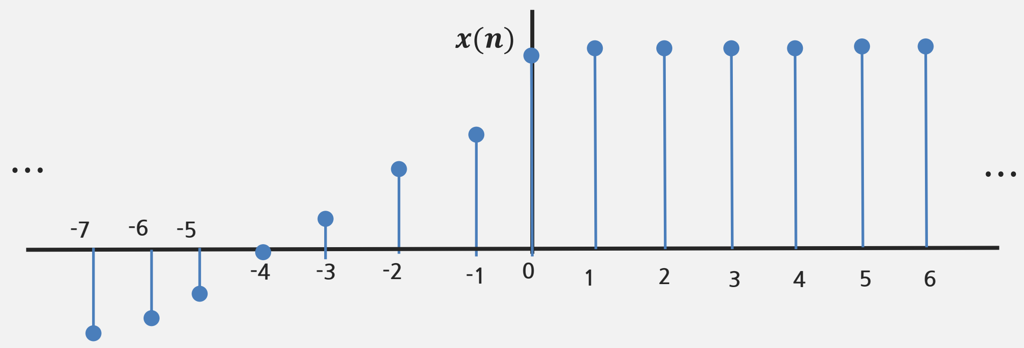
※ 이미지 출처: www.iclickart.com

이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

예제 23-03

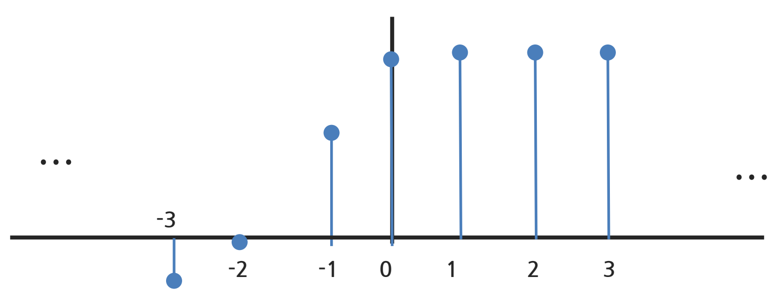
이산 신호 $x[n]$이 다음 그림과 같을 때, 이산 신호 $y[n]$ = $x[2n]$을 그래프로 나타내어 보자. 이 때 신호 $y[n]$은 이산 신호 $x[n]$을 다운 샘플링한 연산인지 확인해 보자.



[예제풀이]

- 신호 $y[n]$은 $x[0]$에서 시작되는 $x[n]$으로 부터 서로 다른 샘플들을 취함으로써 얻어지는 신호로,

n	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4	0
$y[n]$ $= x[2n]$	0	0	0	0	-2	0	2	4	4	4	4	0	0	0	0



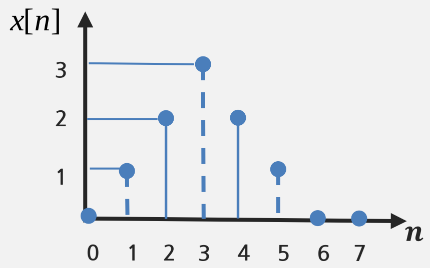
- 신호 $x[n]$이 아날로그 신호 $x_a\ (t)$에 대한 샘플링을 통해 얻어진다면 $x[n]=x_a\ (nT)$가 성립, T는 샘플링 간격, $y[n]=x[2n]=x\_a\ (2Tn)$
- 스케일링 연산은 $1/T$에서 $1/2T$로 샘플링율을 변화시키는 것과 동일 즉, 샘플링율은 두 배 감소 ⇨ 다운샘플링 연산

이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

예제 23-04

이산 신호의 업 샘플링은 원 신호 샘플 사이에 새로운 샘플을 생성하는 문제가 발생한다. 다음과 같은 이산 신호 $x[n]$에 대하여 업 샘플링한 $y[n]=x[n/2]$ 신호를 계산해 보자.



[예제풀이]

- 다음과 같은 이산신호 $x[n]$에 대하여 업 샘플링한 $y[n]=x[n/2]$ 신호를 계산해 보면

n (y의 n)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
y[n]	*x[0] =0*	*x[0.5] = ?*	*x[1] = 1*	*x[1.5] = ?*	*x[2] = 2*	*x[2.5] = ?*	*x[3]=3*	*x[3.5]=?*
n (y의 n)	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	
y[n]	*x[4]=2*	*x[4.5]=?*	*x[5]=1*	*x[5.5]=?*	*x[6]=0*	*x[6.5]=?*	*x[7]=0*	

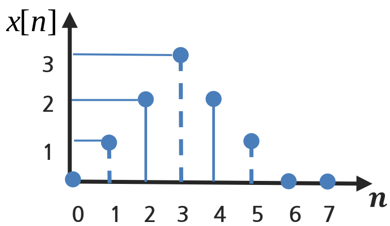
- 이산신호의 업 샘플링의 경우 실제 샘플 된 값보다 더 많은 양의 신호를 필요함에 따라 정의되지 않은 $x[0.5], x[1.5], x[2.5], x[3.5], x[4.5]$ =???의 값을 어떻게 생성하느냐가 중요
- 실제 이산신호 x[n]의 값에서는 정의되지 않은 신호임
  ⇨ 이들의 값을 정할 수 있는 방법은? 보간법
- 대표적으로 영차 보간법과 일차(선형) 보간법이 있음

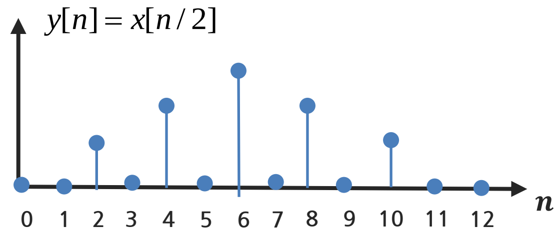
이산 시간 신호

3. 이산 시간 신호의 간단한 변환

[예제풀이]

- 영차 보간법에 의한 업 샘플링

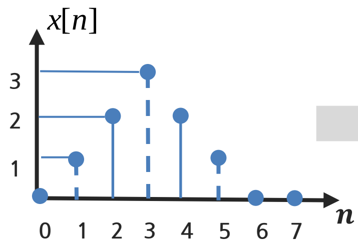


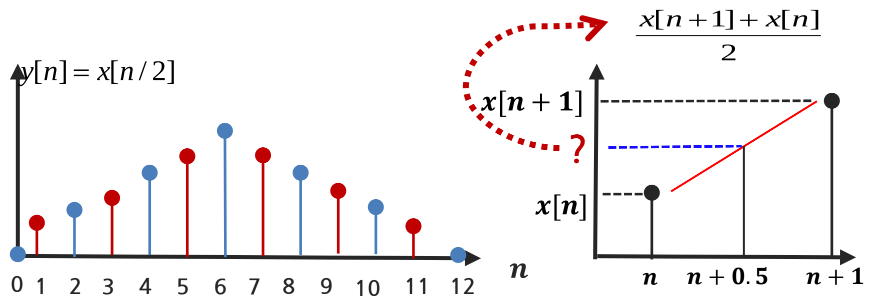


정의되지 않은 값에 0을 삽입하여 신호를 업 샘플링

n (y의 n)	0	1	2	3	4	5	6	7
y[n]	x[0] =0	x[0.5] = 0	x[1] = 1	x[1.5] = 0	x[2] = 2	x[2.5] = 0	x[3]=3	x[3.5]=0
n (y의 n)	8	9	10	11	12	13	14	
y[n]	x[4]=2	x[4.5]=0	x[5]=1	x[5.5]=0	x[6]=0	x[6.5]=0	x[7]=0	

- 일차(선형) 보간법에 의한 업 샘플링





정의되지 않은 값에 선형 보간함으로써 업 샘플링

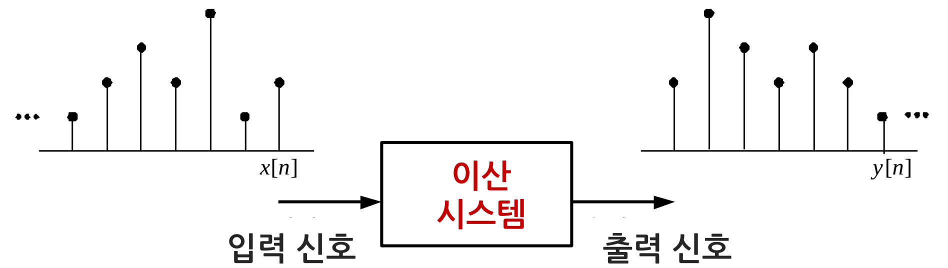
n (y의 n)	0	1	2	3	4	5	6	7
y[n]	x[0] =0	x[0.5] = 0.5	x[1] = 1	x[1.5] = 1.5	x[2] = 2	x[2.5] = 2.5	x[3]=3	x[3.5]=2.5
n (y의 n)	8	9	10	11	12	13	14	
y[n]	x[4]=2	x[4.5]=1.5	x[5]=1	x[5.5]=0.5	x[6]=0	x[6.5]=0	x[7]=0	

이산 시간 시스템

1. 이산 시간 시스템의 정의

1) 이산 시간 시스템(Discrete System)

- 다양한 디지털 신호처리 응용에서 이산 시간 신호를 입력 신호로 받아 다양한 연산을 수행하도록 하는 어떤 장치나 알고리즘

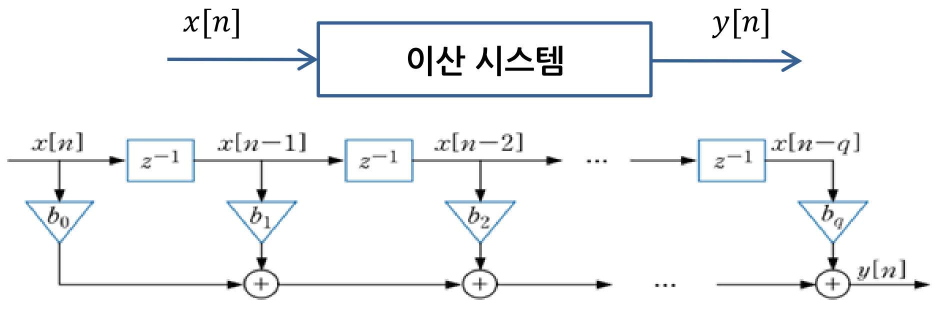


2. 이산 시간 시스템의 입출력 표현

1) 표현 방법

- 입출력 신호 사이의 관계를 명확히 정의하는 수학적 표현 또는 규칙으로 구성

블록선도



차분 방정식

$$y[n] \equiv S\{x[n]\}$$

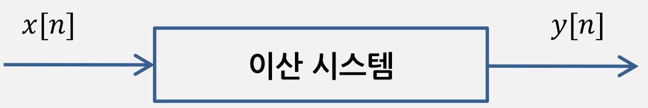
$$y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_p y[n-p] = b_0 x[n] + \cdots + b_q x[n-q]$$

이산 시간 시스템

2. 이산 시간 시스템의 입출력 표현

예제 23-05

다음과 같은 이산 시스템의 입력 신호 $\boldsymbol{x[n]}$과 출력 신호 $\boldsymbol{y[n]}$이 다음과 같이 수학적으로 표현된다. 출력 신호, $\boldsymbol{y[n]}$을 구하고, 그래프로 나타내보자.



$$x[n] = \begin{cases} |n|, & -2 \le n \le 2 \\ 0, & elsewhere \end{cases} \qquad y[n] = \frac{1}{2}(x[n-1] + x[n])$$

[예제풀이]

$$x[n] = \{\cdots 0, 2, 1, 0, 1, 2, 0, \cdots\}$$

n=0

$$y[-3] = \frac{1}{2}(x[-4] + x[-3]) = \frac{1}{2}(0+0) = 0$$

$$y[-2] = \frac{1}{2}(x[-3] + x[-2]) = \frac{1}{2}(0+2) = 1$$

$$y[-1] = \frac{1}{2}(x[-2] + x[-1]) = \frac{1}{2}(2+1) = 3/2$$

$$y[0] = \frac{1}{2}(x[-1] + x[0]) = \frac{1}{2}(1+0) = 1/2$$

$$y[1] = \frac{1}{2}(x[0] + x[1]) = \frac{1}{2}(0+1) = 1/2$$

$$y[2] = \frac{1}{2}(x[1] + x[2]) = \frac{1}{2}(1+2) = 3/2$$

$$y[3] = \frac{1}{2}(x[2] + x[3]) = \frac{1}{2}(2+0) = 1$$

$$y[4] = \frac{1}{2}(x[3] + x[4]) = \frac{1}{2}(0+0) = 0$$

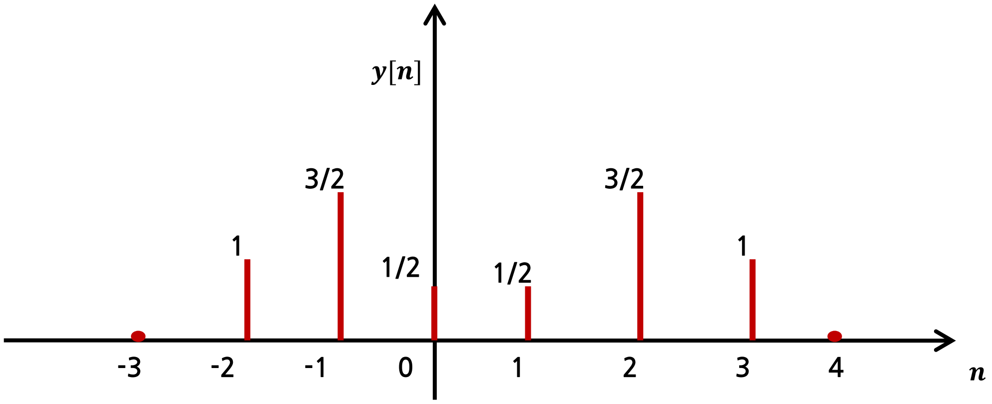
이산 시간 시스템

2. 이산 시간 시스템의 입출력 표현

[예제풀이] (계속)

$$y[n] = \{\cdots 0, 1, \frac{3}{2}, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1,\ 0, \cdots\}$$

n=0

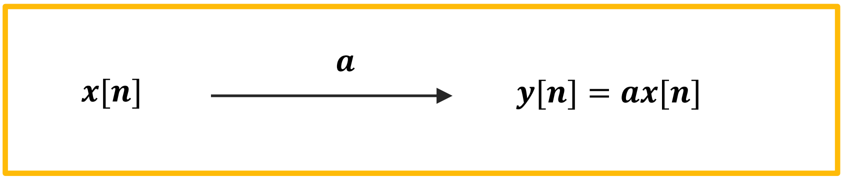


이산 시간 시스템

3. 이산 시간 시스템의 블록도 표현

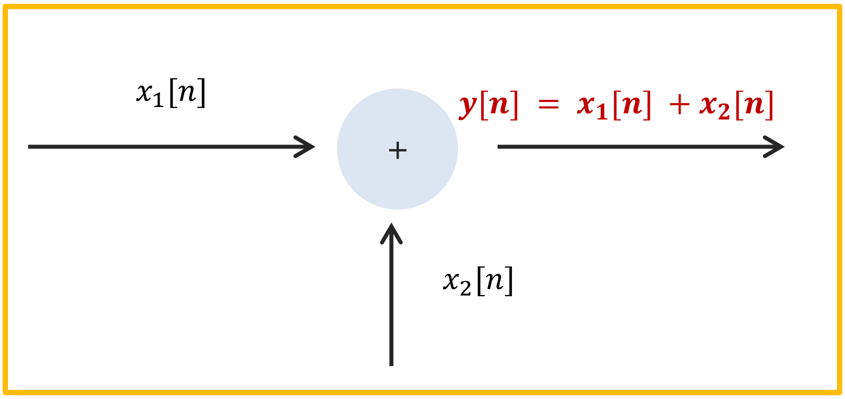
1) 이산 신호 상수 곱셈기

- 기본적인 이산 신호 블록을 이용하여 이산 시간 시스템을 블록선도로 표현 가능
- 이산 신호 상수 곱셈기(Constant Multiplier) 이산 신호의 크기를 상수배하는 동작을 수행



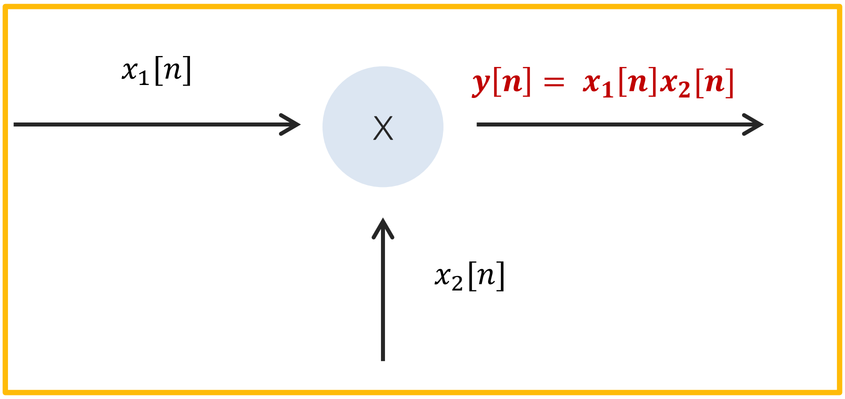
2) 이산 신호 덧셈기

- 두 이산 신호를 더하는 동작을 수행



3) 이산 신호 곱셈기

- 신호를 곱해서 다른 신호로 만드는 동작

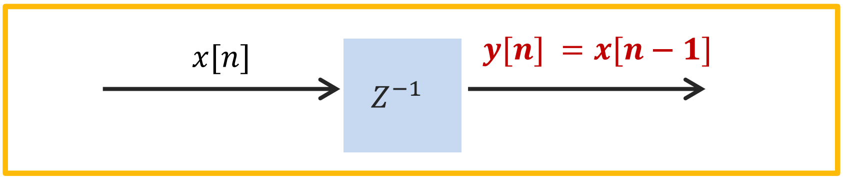


이산 시간 시스템

3. 이산 시간 시스템의 블록도 표현

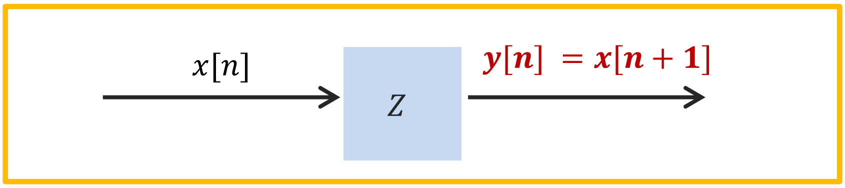
4) 단위 시간 지연기

- 통과하는 신호를 단순히 한 개의 샘플만큼 지연시키는 동작



5) 단위 시간 선행기

- 단위 시간 지연기와는 반대로 입력 신호를 한 샘플씩 먼저 출력



이산 시간 시스템

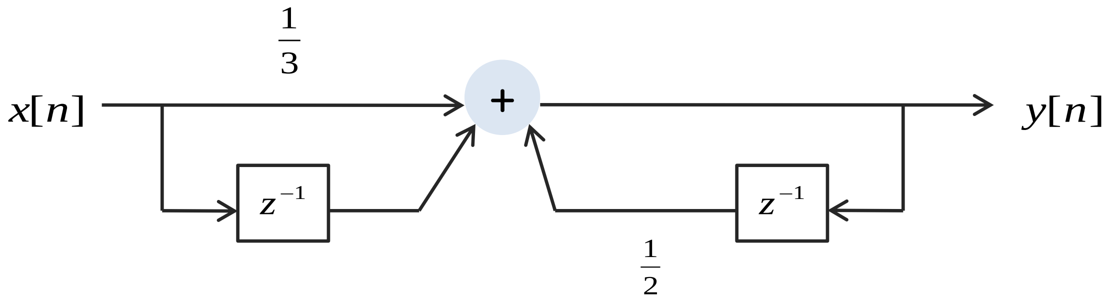
3. 이산 시간 시스템의 블록도 표현

예제 23-06

이산 시간 시스템의 연산에 대한 구성 요소들을 가지고, 다음 입출력 관계를 가지는 이산 시간 시스템의 블록도를 그려보자.

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{3}x[n] + x[n-1]$$

[예제풀이]



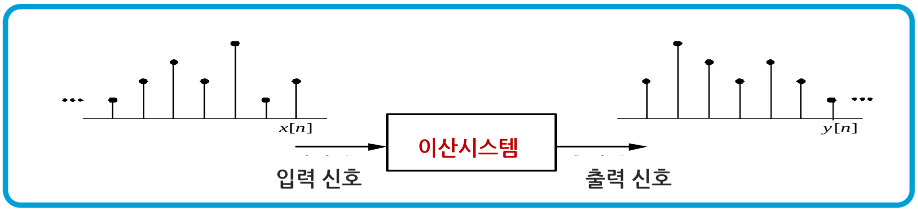
핵심정리

이산 시간 신호

- 이산 신호: 연속 신호가 모든 연속적인 시간 t에 대하여 정의되는 반면 특정한 시각에서만 값을 갖는 신호
- 함수, 표, 수열 및 그래프 등으로 다양하게 표현할 수 있다.
- 단위 임펄스 신호, 단위 스텝신호, 지수신호 등이 있다.
- $\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}]=\boldsymbol{x}[\boldsymbol{\mu n}]$으로 변환되는 $\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}]$ 신호는 이산 신호 $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$를 시간 축으로 다운 샘플링 또는 업 샘플링하는 변환임
- 이산시간 신호의 업 샘플링의 경우 보간법(Interpolation)이 필요하고, 영차보간법과 일차 보간법을 이용하여 업 샘플링함

이산 시간 시스템

- 이산 시스템: 이산 신호를 가지고 정해진 연산을 수행하도록 하는 어떤 장치나 알고리즘



- 블록선도 표현과 차분 방정식으로 입출력을 표현 가능함

디지털신호처리

강 의 노 트

이산 신호와 보간법 실습

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

❖ 다양한 이산 신호 그리기 및 이산 신호 변환 실습

❖ 이산 시간 신호를 연속 신호로 복원하기

학습목표

❖ 다양한 이산 신호를 Matlab 프로그램을 활용하여 표현할 수 있고, 다운 샘플링 변환을 구현할 수 있다.

❖ 이산 신호에서 연속 신호를 복원하는 영차 홀드 방법과 일차 홀드 방법을 직접 구현할 수 있고, 설명할 수 있다.

다양한 이산 신호 그리기 및 이산 신호 변환 실습

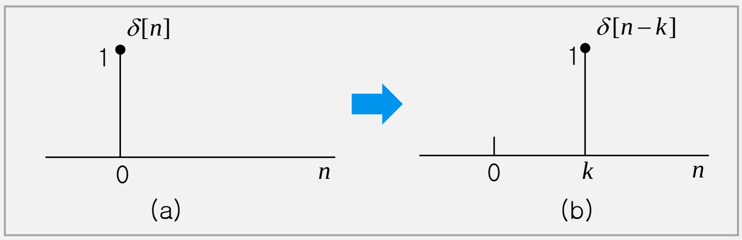
1. 다양한 이산 신호 그리기

실습과제 24-01

다음의 참고 자료를 확인하여 보고 다양한 이산 신호를 그려보자.

단위 임펄스 신호

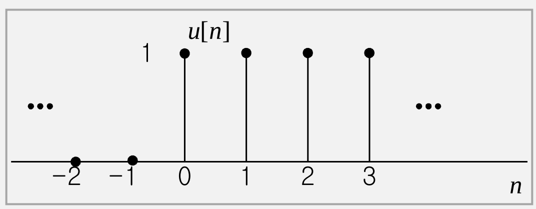
$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$



[시간 이동된 단위 임펄스 함수]

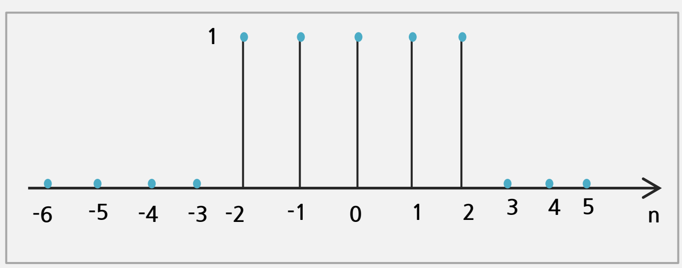
단위 계단 신호

$$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



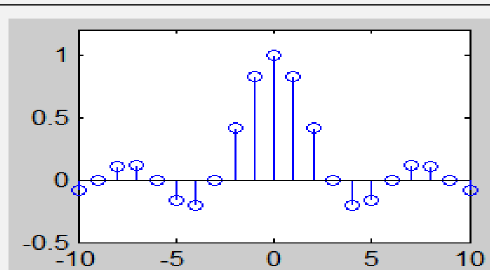
사각 펄스 신호

$$rect\left[\frac{n}{N}\right]=\begin{cases}1, & -\frac{N}{2}\leq n\leq\frac{N}{2}\\ 0, & \text{그외}\end{cases}$$



Sinc 신호

$$\sin c\left[\frac{n}{a}\right]=\frac{\sin\left[\frac{\pi n}{a}\right]}{\frac{\pi n}{a}}$$

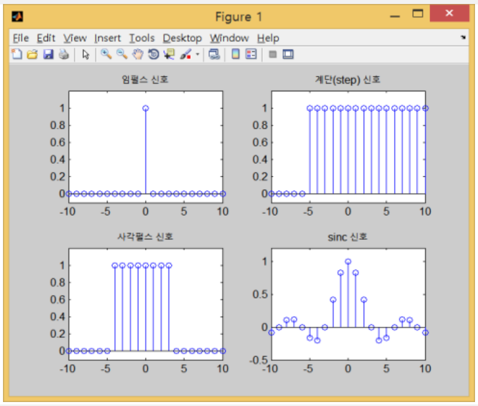


다양한 이산 신호 그리기 및 이산 신호 변환 실습

1. 다양한 이산 신호 그리기

[과제해설]

```
%% 다양한 이산 신호 그리기, discretesignal.m
n = [-10:1:10];          % 이산 시간축 설정 (n은 -10에서 10까지 1씩 증가)
xa = (n == 0);      % n = 0 일 때 1, 즉 임펄스 신호
                    % xa = (n == p) 명령어는 n 벡터의 값에서 그 값이 p인 경우에만
                         1을 리턴 하고, 그 외의 값에는 0을 리턴 하는 명령어이다.

%xa = (n == 3);          % n = 3일때 1인 임펄스 신호
%xb = stepfun(n,-5);   % 계단신호 u[n+5], stepfun(n,m): n < m 일때 0, n >= m 일 때 1
%xb = stepfun(n, 5);    % 계단신호 u[n-5]

xb = (n >= -5);          % 계단신호 u[n+5]
xc=rectpuls(n/8);         % 사각펄스 신호 rect[n/8]
xd = sinc(n/3);          % sinc 함수 신호

subplot(2,2,1);
stem(n,xa);
title('임펄스 신호'); axis([-10 10 -0.1 1.2]);

subplot(2,2,2);
stem(n,xb);
title('계단(step) 신호'); axis([-10 10 -0.1 1.2]);

subplot(2,2,3);
stem(n,xc);
title('사각펄스 신호'); axis([-10 10 -0.1 1.2]);

subplot(2,2,4);
stem(n,xd);
title('sinc 신호'); axis([-10 10 -0.5 1.2]);
```



다양한 이산 신호 그리기 및 이산 신호 변환 실습

2. 이산 신호 다운 샘플링 변환하기

실습과제 24-02

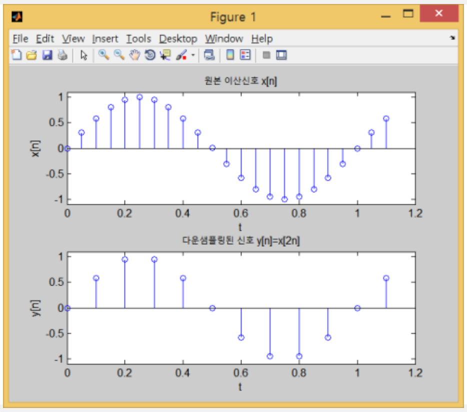
다음과 같은 정현파 연속 신호를 샘플링 주기 $Ts = 0.05$로 샘플링 한 $x[n]$ 신호를 그리고, $x[n]$ 이산 신호를 다운 샘플링한 $y[n] = x[2n]$신호를 Matlab으로 그려보자.

$$x(t) = \sin(2\pi t)$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
%% 이산 신호 다운 샘플링 변환하기 downsample.m
t1 = 0: 0.05:1.1;
x = sin(2*pi*t1);     % 원본 이산 신호 x[n]

subplot(2,1,1);
stem(t1,x);
axis([0 1.2 -1.1 1.1]);
xlabel('t');  ylabel('x[n]');  title('원본 이산 신호 x[n]');

n=length(x);       % 샘플링된 이산 신호 x 의 길이
y = x(1:2:n);      % y = x[2n]으로 다운 샘플링된 이산 신호
t2 = t1(1:2:n);    % 신호 값과 마찬가지로 시간에 대한 다운 샘플링
m=length(y);

subplot(2,1,2);
stem(t2,y);
axis([0 1.2 -1.1 1.1]);
xlabel('t');  ylabel('y[n]');   title('다운 샘플링된 신호 y[n]=x[2n]');
```



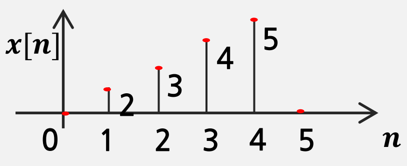
[downsample.m 실행 결과]

이산 시간 신호를 연속 신호로 복원하기

1. 영차 홀드와 일차 홀드 그래프 그리기

실습과제 24-03

다음과 같은 간단한 이산 시간 신호를 영차 홀드(Zero-hold)로 연속 신호로 복원하는 경우와 일차 홀드(First-order Hold)로 복원하는 경우에 대한 그래프를 그려보자.

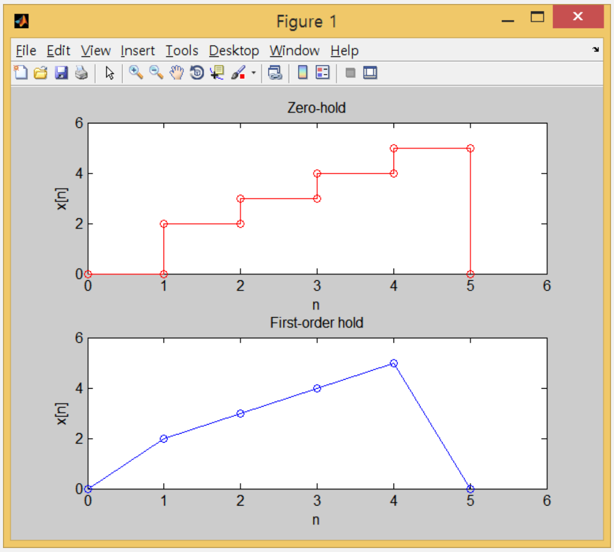


$$n \;=\; [0\;1\;2\;3\;4\;5]$$
$$x[n] \;=\; [0\;2\;3\;4\;5\;0]$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
%% zerofirst.m : 영차 홀드와 일차 홀드 신호그래프

n = [0 1 2 3 4 5]; % 이산시간 벡터
Xn = [0 2 3 4 5 0]; % 이산시간에 따른 이산 신호값

%% 영차 홀드 신호 그래프 그리기
subplot(2,1,1);
stairs(n,Xn,'-ro');   %영차 홀드 신호
axis([0 6 0 6]);
xlabel('n');
ylabel('x[n]');
title('Zero-hold');

%% 일차 홀드 신호 그래프 그리기
subplot(2,1,2);
plot(n, Xn, '-bo');   %일차 홀드 신호
axis([0 6 0 6]);
xlabel('n');
ylabel('x[n]');
title('First-order hold');
```



이산 시간 신호를 연속 신호로 복원하기

2. 이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원하기

실습과제 24-04

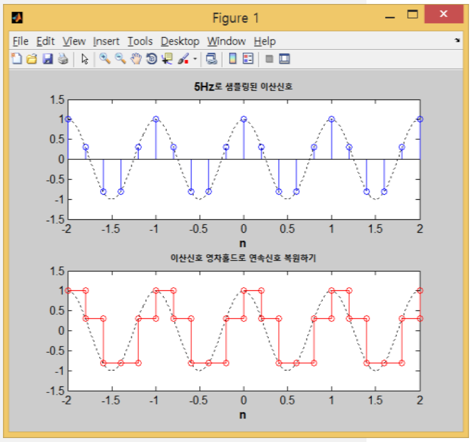
정현파 신호 $x(t)=cos(2\pi t)$를 샘플링 주파수를 각각 $F\_s=5[Hz]$, $20[Hz]$ 로 하여 샘플링한 이산 신호에 대해 영차 홀드(zero-hold)를 이용하여 원래의 연속 신호를 복원해 보자.

1) 이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원(5Hz 샘플링)
2) 이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원(20Hz 샘플링)
3) 이산 신호 일차 홀드로 연속 신호 복원(5Hz 샘플링)
4) 이산 신호 일차 홀드로 연속 신호 복원(20Hz 샘플링)

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설] 이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원하기(5Hz 샘플링)

```
%% 이산 신호 영차 홀드로 복원하기 %% Zerohold1.m
%% 1. 원래의 연속 신호 그리기
t=-2:0.0001:2;      % 원래의 연속 신호
xt = cos(2*pi*t);   % 원래의 연속 신호 x(t)
subplot(2,1,1);     % 1행 2열 첫번째 그림창
plot(t,xt, 'k:')        % 원래의 연속 신호 x(t) 그리기
axis([-2 2 -1.5 1.5]);
hold on
%% 2. 5 Hz로 샘플링한 이산 신호 그리기
Fs = 5;             %% 이산시간 신호 샘플링 주파수
n = -2:1/Fs:2;      % 샘플링 주파수에 따른 샘플이산 시간 벡터 설정
xn = cos(2*pi*n); % 5Hz로 샘플링한 이산시간 신호 xn 생성
stem(n, xn);        % 샘플링된 이산 신호 x[n]을 그린다.
xlabel('₩bf{n}');
title('₩bf{샘플링된 이산 신호}');
%% 3. 이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원하기
subplot(2,1,2); % 2행 2열 두번째 그림창
plot(t,xt, 'k:')    % 원래의 연속 신호 x(t) 그리기
axis([-2 2 -1.5 1.5]);
hold on;
stairs(n, xn,'-ro'); % 샘플링된 이산 신호 x[n]을 영차 홀드로 연속 신호 복원하기
title('₩bf{이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원하기}');
xlabel('₩bf{n}');
```

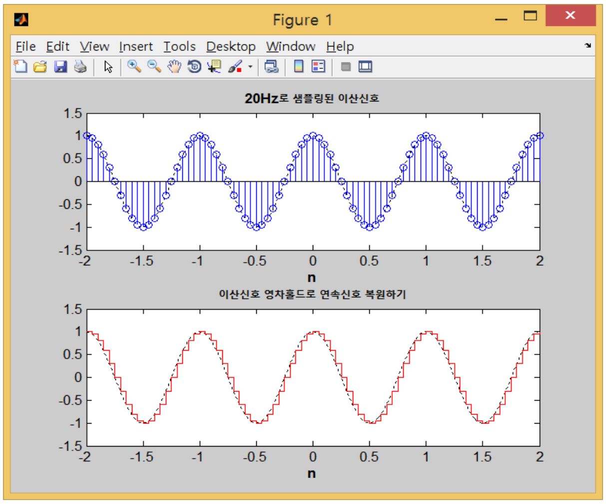


이산 시간 신호를 연속 신호로 복원하기

2. 이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원하기

[과제해설] 이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원하기(20Hz로 샘플링)

```
%% 이산 신호 영차 홀드로 복원하기 %% Zerohold2.m
%% 1. 원래의 연속 신호 그리기
clf; % 초기 그림 지우기
t=-2:0.0001:2;     % 원래의 연속 신호
xt = cos(2*pi*t);  % 원래의 연속 신호 x(t)
subplot(2,1,1);    % 1행 2열 첫번째 그림창
plot(t,xt, 'k:')       % 원래의 연속 신호 x(t) 그리기
axis([-2 2 -1.5 1.5]);
hold on
%% 2. 20 Hz로 샘플링한 이산 신호 그리기
Fs = 20;            %% 이산시간 신호 샘플링 주파수
n = -2:1/Fs:2;     % 샘플링 주파수에 따른 샘플이산 시간 벡터 설정
xn = cos(2*pi*n); % 5Hz로 샘플링한 이산시간 신호 xn 생성
stem(n, xn);       % 샘플링된 이산 신호 x[n]을 그린다.
xlabel('₩bf{n}');
title('₩bf{샘플링된 이산 신호}');
%% 3. 이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원하기
subplot(2,1,2); % 2행 2열 두번째 그림창
plot(t,xt, 'k:')    % 원래의 연속 신호 x(t) 그리기
axis([-2 2 -1.5 1.5]);
hold on;
stairs(n, xn,'-r'); % 샘플링된 이산 신호 x[n]을 영차 홀드로 연속 신호 복원하기
title('₩bf{이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원하기}');
xlabel('₩bf{n}');
```

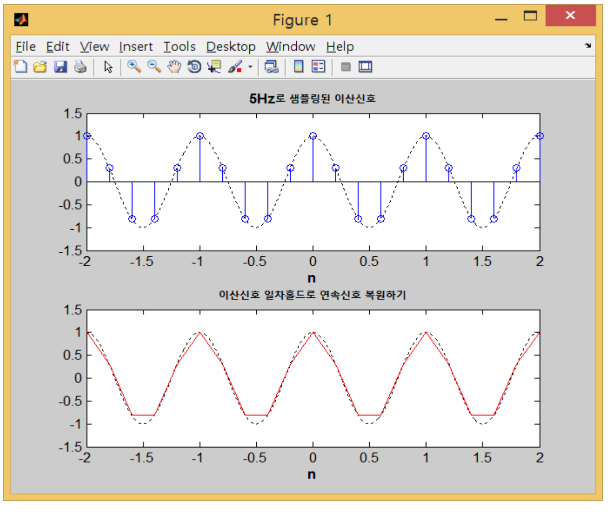


이산 시간 신호를 연속 신호로 복원하기

2. 이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원하기

[과제해설] 이산 신호 일차 홀드로 연속 신호 복원하기(5Hz 샘플링)

```
%%  이산 신호 일차 홀드로 복원하기 %% Firsthold1.m
%% 1. 원래의 연속 신호 그리기
t=-2:0.0001:2;     % 원래의 연속 신호
xt = cos(2*pi*t);   % 원래의 연속 신호 x(t)
subplot(2,1,1);     % 2행 1열중 첫번째 그림창
plot(t,xt, 'k:')        % 원래의 연속 신호 x(t) 그리기
axis([-2 2 -1.5 1.5]);
hold on
%% 2. 5 Hz로 샘플링한 이산 신호 그리기
Fs = 5;              %% 이산시간 신호 샘플링 주파수
n = -2:1/Fs:2;      % 샘플링 주파수에 따른 샘플이산 시간 벡터 설정
xn = cos(2*pi*n); % 5Hz로 샘플링한 이산시간 신호 xn 생성
stem(n, xn);        % 샘플링된 이산 신호 x[n]을 그린다.
xlabel('₩bf{n}');
title('₩bf{샘플링된 이산 신호}');
%% 3. 이산 신호 일차 홀드로 연속 신호 복원하기
subplot(2,1,2); % 2행 1열중 두번째 그림창
plot(t,xt, 'k:')     % 원래의 연속 신호 x(t) 그리기
axis([-2 2 -1.5 1.5]);
hold on;
plot(n, xn,'-r'); %샘플링된 이산 신호 x[n]을 일차 홀드로 연속 신호 복원하기
title('₩bf{이산 신호 일차 홀드로 연속 신호 복원하기}');
xlabel('₩bf{n}');
```

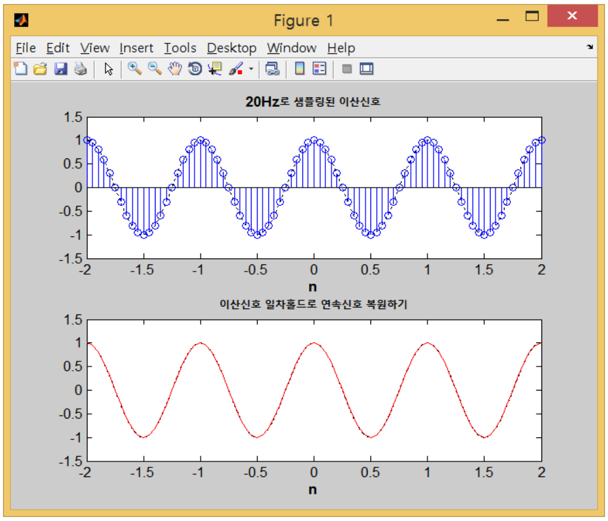


이산 시간 신호를 연속 신호로 복원하기

2. 이산 신호 영차 홀드로 연속 신호 복원하기

[과제해설] 이산 신호 일차 홀드로 연속 신호 복원하기(20Hz 샘플링)

```
%% 이산 신호 일차 홀드로 복원하기 %% Firsthold2.m
%% 1. 원래의 연속 신호 그리기
t=-2:0.0001:2;     % 원래의 연속 신호
xt = cos(2*pi*t);   % 원래의 연속 신호 x(t)
subplot(2,1,1);     % 1행 2열 첫번째 그림창
plot(t,xt, 'k:')       % 원래의 연속 신호 x(t) 그리기
axis([-2 2 -1.5 1.5]);
hold on
%% 2. 20 Hz로 샘플링한 이산 신호 그리기
Fs = 20;               %% 이산시간 신호 샘플링 주파수
n = -2:1/Fs:2;     % 샘플링 주파수에 따른 샘플이산 시간 벡터 설정
xn = cos(2*pi*n); % 20 Hz로 샘플링한 이산시간 신호 xn 생성
stem(n, xn);       % 샘플링된 이산 신호 x[n]을 그린다.
xlabel('₩bf{n}');
title('₩bf{샘플링된 이산 신호}');
%% 3. 이산 신호 일차 홀드로 연속 신호 복원하기
subplot(2,1,2); % 2행 1열 두번째 그림창
plot(t,xt, 'k:')    % 원래의 연속 신호 x(t) 그리기
axis([-2 2 -1.5 1.5]);
hold on;
plot(n, xn,'-r'); % 샘플링된 이산 신호 x[n]을 일차 홀드로 연속 신호 복원하기
title('₩bf{이산 신호 일차 홀드로 연속 신호 복원하기}');
xlabel('₩bf{n}');
```



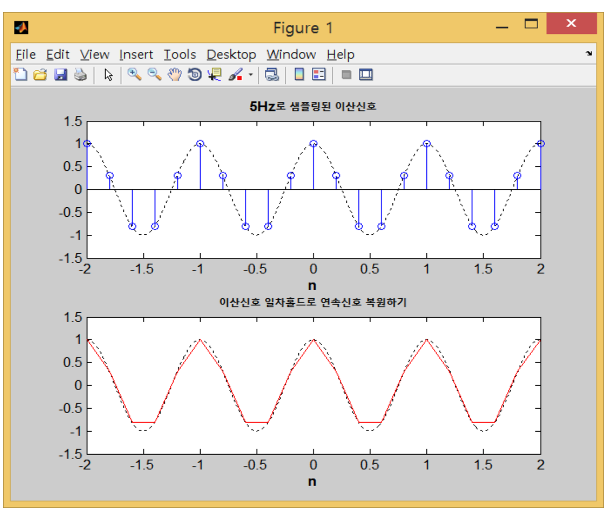
핵심정리

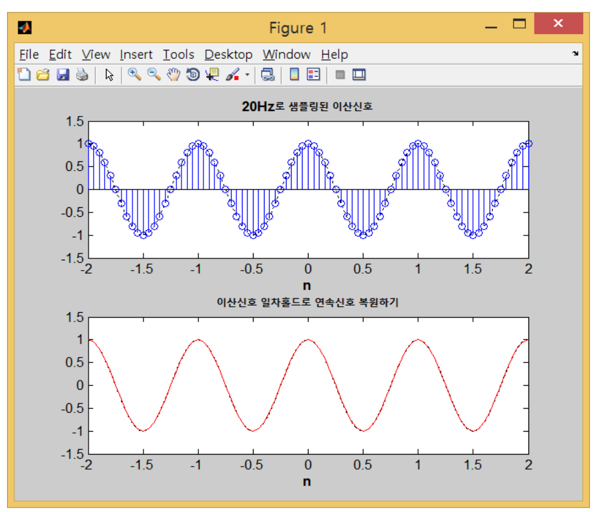
다양한 이산 신호 그리기 및 이산 신호 변환 실습

- 이산 신호: 연속 신호가 모든 연속적인 시간 t에 대하여 정의되는 반면 특정한 시각에서만 값을 갖는 신호
- 함수, 표, 수열 및 그래프 등으로 다양하게 표현할 수 있음
- 단위 임펄스 신호, 단위 스텝신호, 지수신호 등이 있음
- $y[n]=x[\mu n]$으로 변환되는 $y[n]$ 신호는 이산 신호 $x[n]$를 시간 축으로 다운 샘플링 또는 업 샘플링하는 변환임

이산 시간 신호를 연속 신호로 복원하기

- 이산 시간 신호의 업 샘플링의 경우 보간법(Interpolation)이 필요하고, 영차 보간법과 일차 보간법을 이용하여 업 샘플링함





디지털신호처리

강 의 노 트

이산 시스템의 분류와 시간 응답

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

❖ 이산 시간 시스템의 분류

❖ 이산 시스템의 시간 응답

학습목표

❖ 이산시스템의 분류에 대한 개념을 설명할 수 있다.

❖ 이산 시불변 시스템의 정의 및 임펄스 응답에 대해 설명하고, 시간 응답을 구할 수 있다.

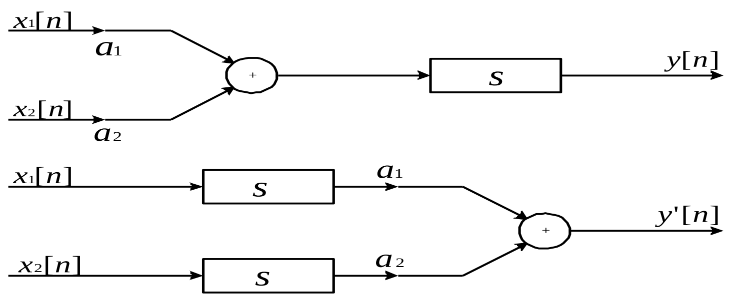
이산 시간 시스템의 분류

1. 선형 시스템과 비선형 시스템

1) 정의

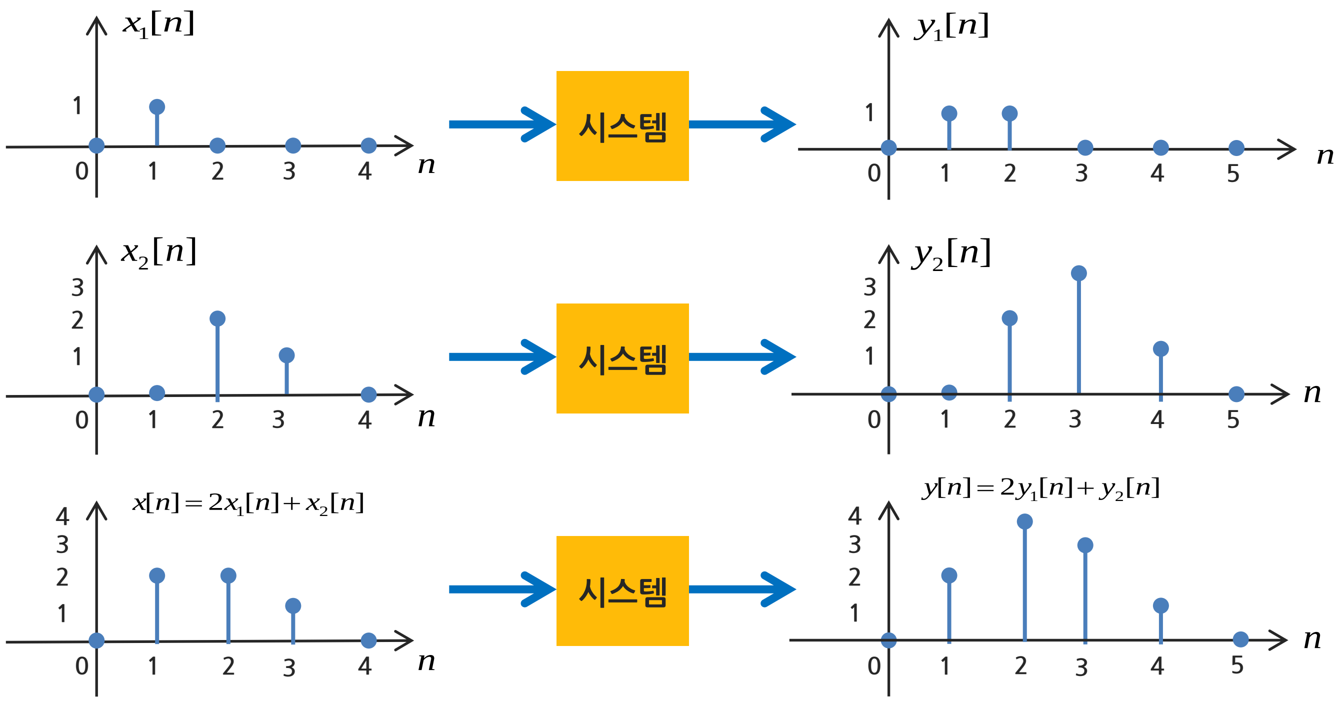
- 이산 선형 시스템: 임의의 신호에 대하여 중첩의 원리가 만족되는 시스템

*y[n]=y'[n]*이면, 이산 선형 시스템



$$S\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}=a_1S\{x_1[n]\}+a_2S\{x_2[n]\}$$

2) [예] 중첩의 원리가 성립하는 선형 시스템 개념

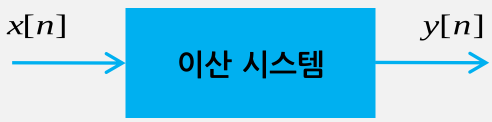


이산 시간 시스템의 분류

1. 선형 시스템과 비선형 시스템

예제 25-01

다음 입출력관계를 가지는 이산 시스템이 선형 시스템인지 비선형 시스템인지를 판별해 보자.



$$y[n] = 2x[n] + 3$$

[예제풀이]

이산 시스템이 중첩의 원리가 성립하는지 확인 $y[n] = 2x[n] + 3$

$$\begin{aligned}
&if \quad x[n] = a_1 x_1[n], \quad y_1[n] = 2a_1 x_1[n] + 3 \\
&if \quad x[n] = a_2 x_2[n], \quad y_2[n] = 2a_2 x_2[n] + 3 \\
&if \quad x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n], \; y_3[n] = 2(a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]) + 3
\end{aligned}$$

$$\therefore y_3[n] \neq y_1[n] + y_2[n]$$

중첩의 원리가 성립되지 않기 때문에 비선형 시스템

이산 시간 시스템의 분류

2. 정적(무기억) 시스템과 동적(기억) 시스템

1) 비교

정적(무기억) 시스템

임의의 순간 n에서 시스템의 출력이
입력의 이전 또는 이후의 샘플이 아닌
동일한 시간에서의 입력신호에
대부분 의존하는 시스템

$$y[n] = 3x[n]$$
$$y[n] = nx[n] + 2x^2[n]$$

동적(기억) 시스템

임의의 순간 n에서 시스템의 출력이
동일한 시간에서의 입력신호뿐만 아니라
이전 또는 이후의 샘플에도 **의존하는 시스템**

$$y[n] = x[n-1] + 2x[n-2] + 3x[n+1]$$

이산 시간 시스템의 분류

3. 시변 시스템과 시불변 시스템

1) 정의

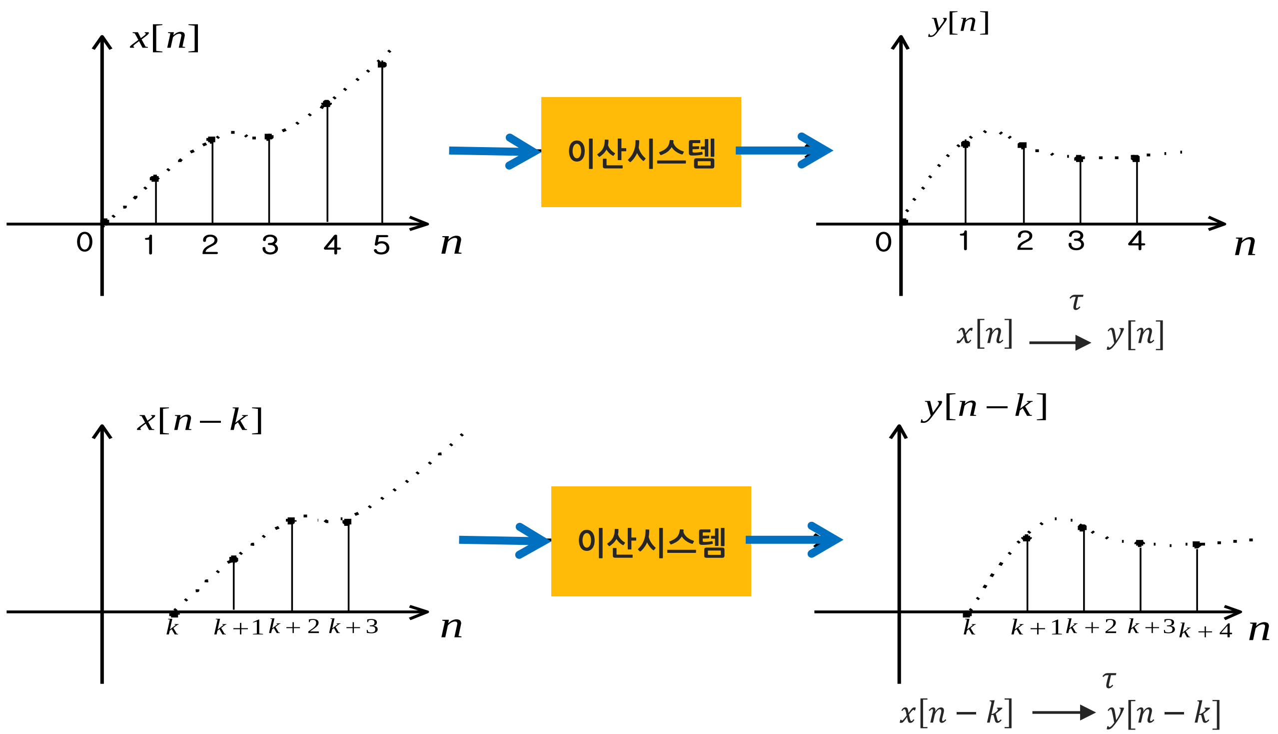
시변 시스템(Time-Varying System)

- 시스템의 특성이 시간에 따라 변하는 시스템

시불변 시스템(Time-Invariant System)

- 시스템의 특성이 시간에 따라 변하지 않는 시스템

2) [예]시불변 시스템의 입출력 관계

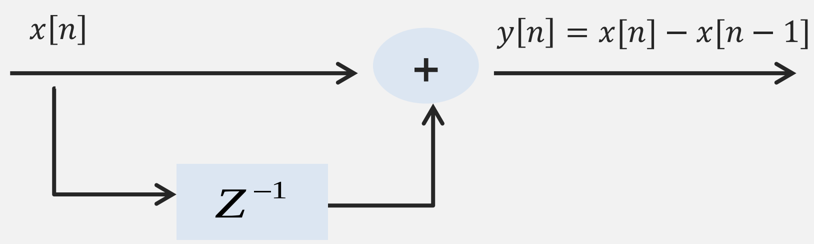


이산 시간 시스템의 분류

3. 시변 시스템과 시불변 시스템

예제 25-02

다음과 같은 이산신호 시스템은 이산신호를 미분하는 시스템이다. 이러한 미분 시스템이 시변 시스템인지 시불변 시스템인지를 판별해 보자.



[예제풀이]

$y[n] = x[n]-x[n-1]$	만약 시간적으로 k단위만큼 지연된 입력신호가 입력될 때 그 출력값	$y(n, k) = x[n-k] - x[n-k-1]$
$y[n] = x[n]-x[n-1]$	시간적으로 $n \rightarrow n\text{-}k$ 만큼 지연된 출력 값	$y[n-k] = x[n-k] - x[n-k-1]$

$\therefore\ y[n-k] = y(n,k)$ *이 시스템은 시불변 시스템임*

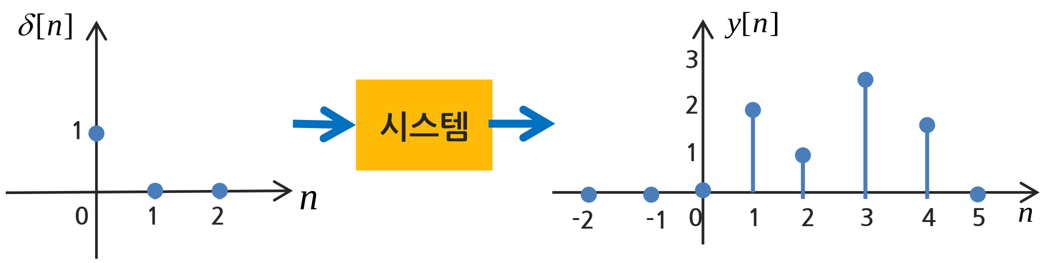
이산 시간 시스템의 분류

4. 인과 시스템과 비인과 시스템

1) 정의

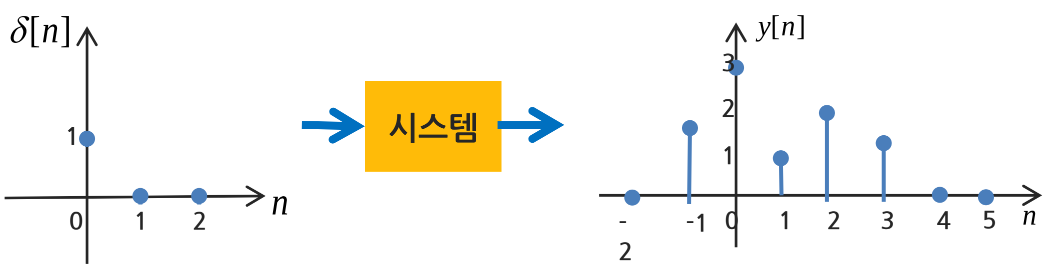
인과 시스템 (Casual System)

- 어떤 시스템의 시각 n에서의 **출력이 과거나 현재의 입력 값에만 의존하고 미래의 입력 값과는 무관**한 시스템



비인과 시스템 (Non-Casual System)

- 어떤 시스템의 시각 n에서의 출력이 **과거나 현재의 입력 값에만 의존하지 않는 시스템**



이산 시간 시스템의 분류

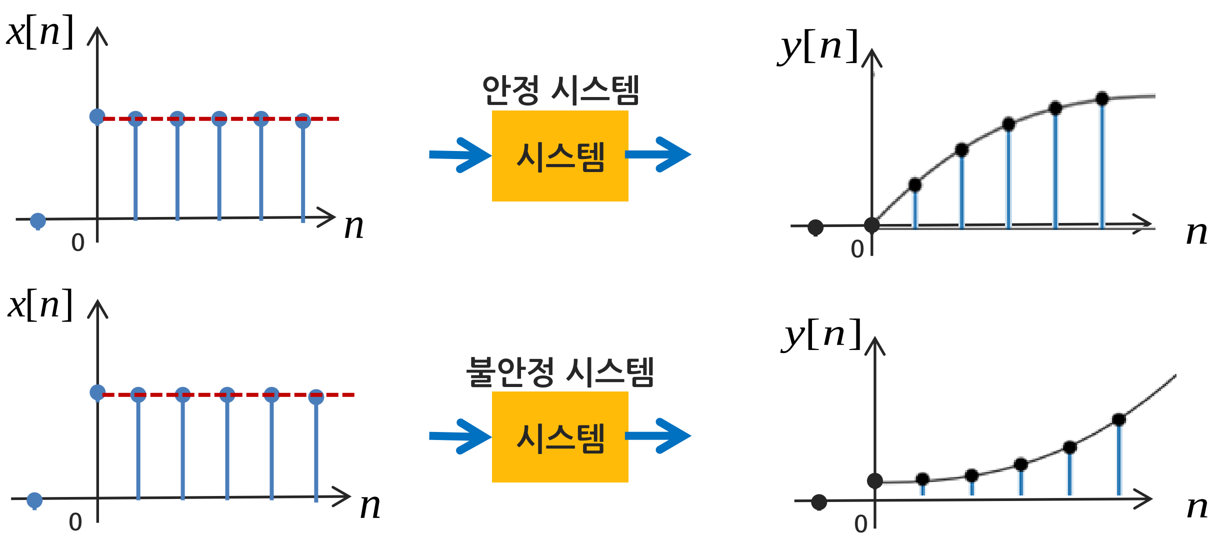
5. 안정 시스템과 불안정 시스템

1) 정의

- 유한 입력 유한 출력 안정도(BIBO: Bounded Input Bounded Output)
- 시스템에 인가된 유한한 입력에 대한 시스템의 출력 특성을 정의한 것
- 유한한 Mx와 My에 대해 모든 n에 대하여 아래 식을 만족하면 시스템은 BIBO 안정함

$$|x(t)| \le M_x < \infty \quad , \quad |y(t)| \le M_y < \infty$$

2) 안정 시스템과 불안정 시스템 비교



이산 시스템의 시간 응답

1. 이산 선형 시불변 시스템 정의

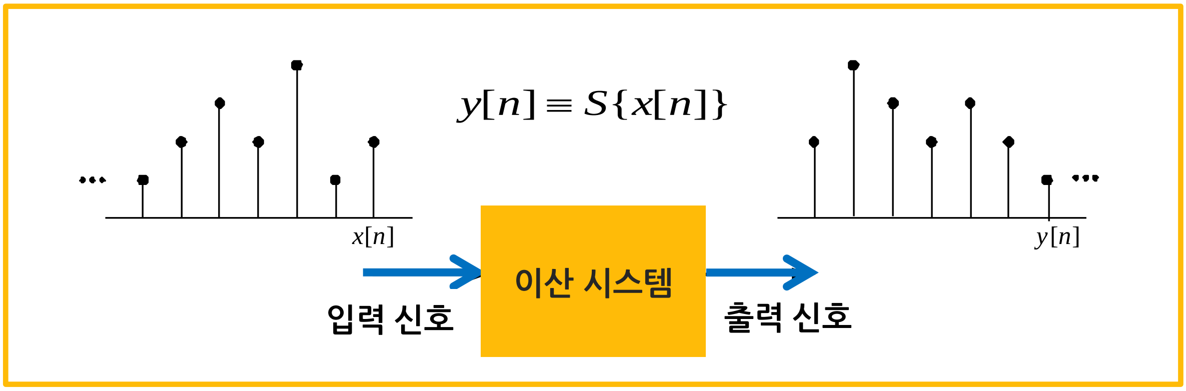
1) 이산 선형 시불변(LTI: Linear Time Invariant)

- 이산 신호 시스템이 선형(Linear) 시스템이면서 시불변(Time-Invariant) 시스템인 경우

2. 임펄스 응답

1) 정의

- 입력신호 x[n]에 대한 이산시스템의 응답을 y[n]이라고 하면,



시스템의 임펄스 응답 *h[n]*: 단위 임펄스 입력 신호에 대한 이산 시스템 응답

$$h[n] \equiv S\{\delta[n]\}$$

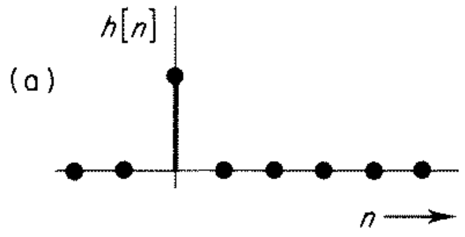
이산 시스템의 시간 응답

2. 임펄스 응답

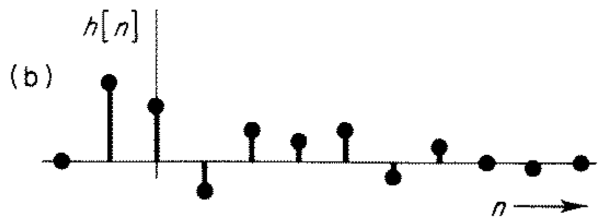
2) 다양한 형태의 임펄스 응답

이산 선형 시불변 시스템

이산 선형 시불변 시스템



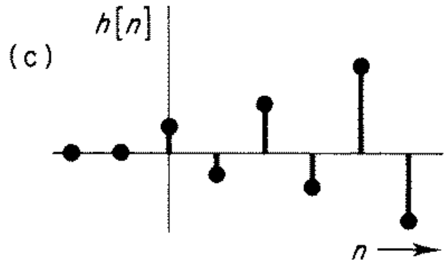
이산 선형 시불변 시스템



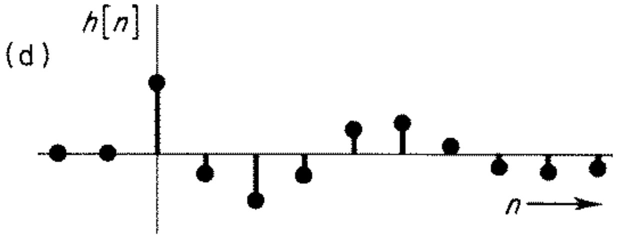
이산 시스템의 시간 응답

2) 다양한 형태의 임펄스 응답

이산 선형 시불변 시스템



이산 선형 시불변 시스템



대표적인 디지털 신호처리 응용에서 관심 있는 시스템

이산 시스템의 시간 응답

2. 임펄스 응답

예제 25-03

임의의 이산 선형 시불변 시스템의 입력 신호 x[n]과 출력신호 y[n]이 다음과 같은 차분 방정식으로 표현된다고 한다. 이러한 이산 선형 시불변 시스템에서 임펄스 응답 h[0], h[1], h[2] 값을 구해 보자.
단, 이 시스템은 n < 0은 경우 h[n] = 0인 인과시스템이라고 가정하자.

$x[n] \rightarrow$ 이산 선형 시불변 시스템 $\rightarrow y[n]$

$$y[n] = 1.5y[n-1] - 0.85y[n-2] + x[n]$$

[예제풀이]

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = y[n]$$

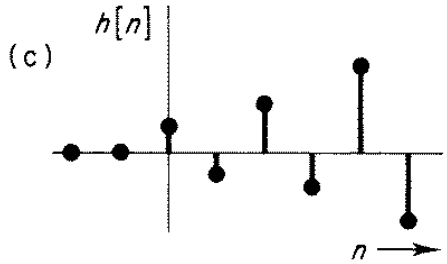
$$h[n] = 1.5h[n-1] - 0.85h[n-2] + \delta[n]$$

n=0 일 때, *h[0]* ?	$h[0] = 1.5h[-1] - 0.85h[-2] + \delta[0] = 1$
n=1 일 때, *h[1]* ?	$h[1] = 1.5h[0] - 0.85h[-1] + \delta[1] = 1.5$
n=2 일 때, *h[2]* ?	$h[2] = 1.5h[1] - 0.85h[0] + \delta[2] = 1.5*1.5 - 0.85 = 1.4$

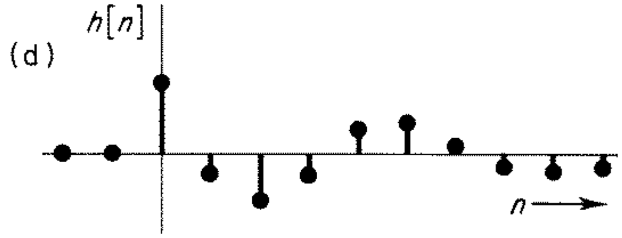
이산 시스템의 시간 응답

2) 다양한 형태의 임펄스 응답

이산 선형 시불변 시스템



이산 선형 시불변 시스템

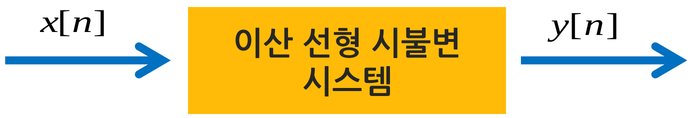


대표적인 디지털 신호처리 응용에서 관심 있는 시스템

이산 시스템의 시간 응답

3. 이산 선형 시불변 시스템의 시간 응답

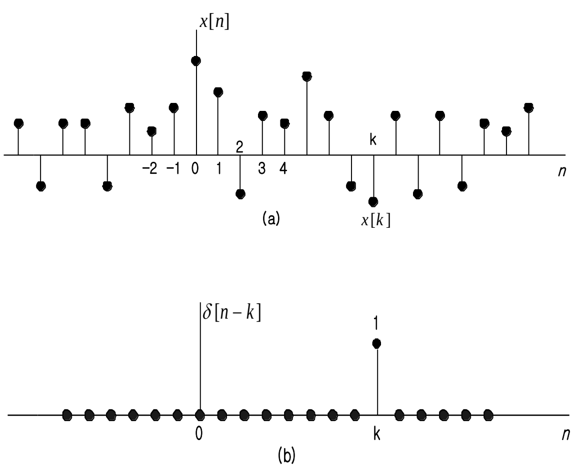
- 입력 신호가 주어졌을 때 이산 선형 시불변 시스템의 동작을 해석하는 방법?
  ⇨ 주어진 입력을 어떤 기본 신호의 합으로 분해하는 것

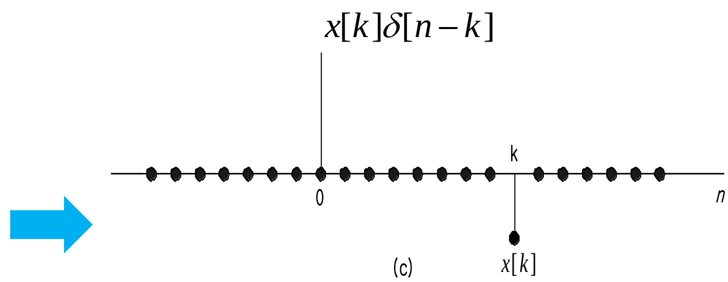


$$x[n]=\sum_k c_k x_k[n]$$

- 만약 기본 신호 ***xk*[*n*]**에 대한 시스템 응답을 ***yk*[*n*]**이라 하면, 선형시스템이므로

$$y[n]=S\{x[n]\}=S\{\sum_k c_k x_k[n]\}=\sum_k c_k S\{x_k[n]\}\ =\sum_k c_k y_k[n]$$





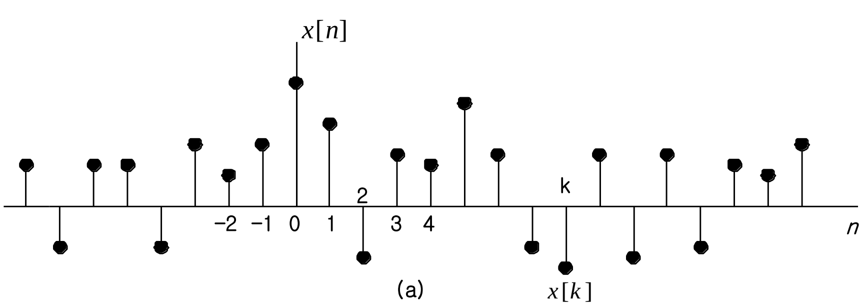
이산 신호 $x[n]$에 $n=k$에서의
임펄스 신호 $\delta[n-k]$를
곱한 신호

- 이산 신호 x[n]은 단위 임펄스 신호 $\delta[n]$을 기본 신호로 임펄스의 가중된 합으로 표현 가능함

$$x[n]\delta[n-k]=x[k]\delta[n-k]$$

$$x[n]=\cdots+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+\cdots$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

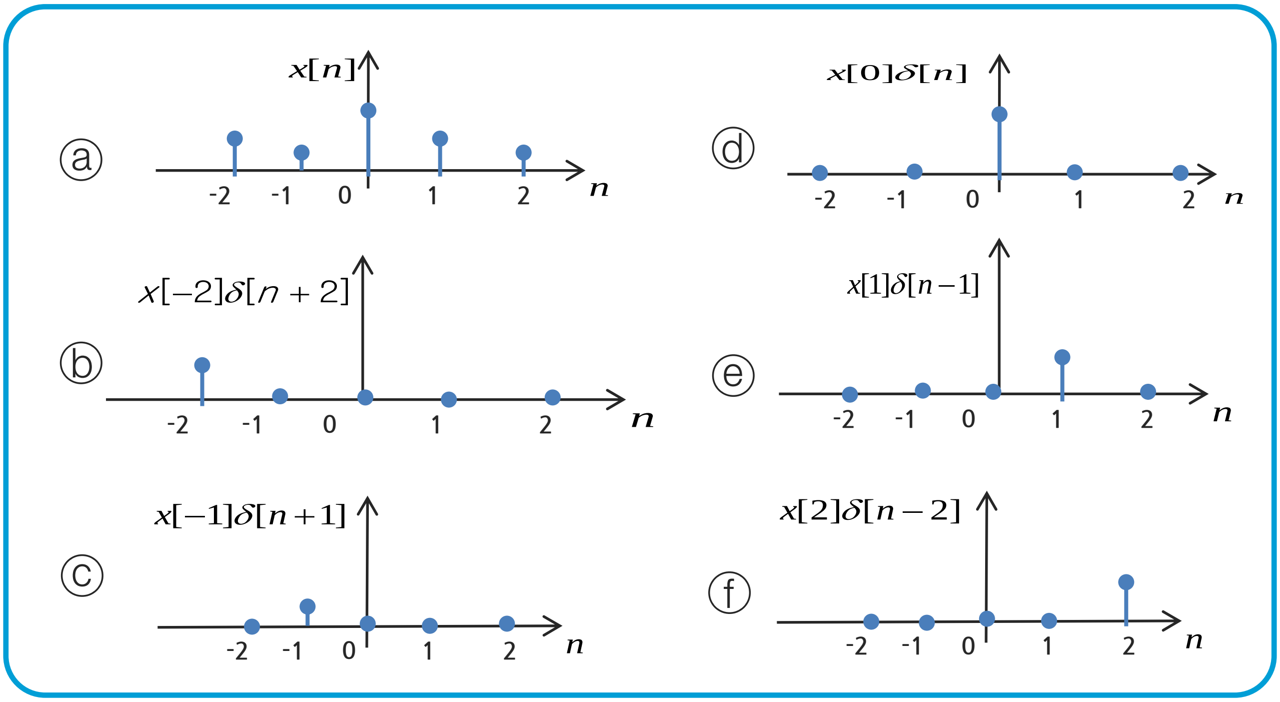


이산 시스템의 시간 응답

3. 이산 선형 시불변 시스템의 시간 응답

1) 다양한 형태의 임펄스 응답

- 가중되고 시간 이동된 단위 임펄스 신호들의 집합을 이용한 디지털신호의 표현



이산 시스템의 시간 응답

3. 이산 선형 시불변 시스템의 시간 응답

예제 25-04

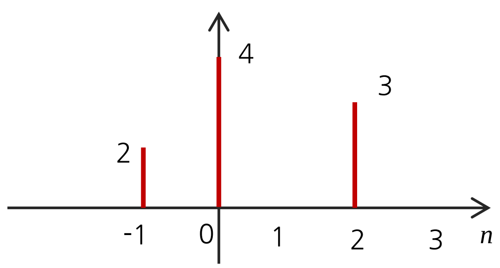
다음 식과 같이 주어진 입력신호 x[n]에 대해 기본 신호인 임펄스 신호의 합으로 나타내보자.

$$x[n]=\{2,\underset{\uparrow}{4},0,3\}$$

[예제풀이]

- 수열 *x[n]*은 *n=-1, 0,2*인 순간에는 *0*이 아니므로, 지연 값 *k=-1,0,2*일 때에 해당하는 세 개의 임펄스를 필요로 함

$$x[n]=2\delta[n+1]+4\delta[n]+3\delta[n-2]$$



*x[n]*에 대한 그래프 표현

이산 시스템의 시간 응답

3. 이산 선형 시불변 시스템의 시간 응답

2) 임의의 입력 x[n]에 대한 시스템의 응답

- n=k 에서의 임펄스 응답을 h[n,k]라고 정의,
  시스템이 시불변이라고 가정하였기 때문에 h[n, k] = h[n-k]가 됨

$$\boxed{\begin{aligned} h[n,k] &= S\{\delta[n-k]\} \\ &= h[n-k] \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= S\{x[n]\} \\ &= S\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]S\{\delta[n-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

선형시스템에 대한 중첩의 원리

시스템의 시불변 특성

- 이산 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답이 h[n]이고, 입력이 x[n]일 경우
  ⇨ 출력 y[n]은 컨볼루션합으로 계산할 수 있음

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{이산 선형 시불변 시스템}} \rightarrow y[n]$$

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$$

핵심정리

이산 시간 시스템의 분류

- 이산 선형 시스템: 중첩의 원리가 성립되는 시스템

정적(무기억) 시스템과 동적(기억) 시스템	임의의 순간 n에서 시스템의 출력이 입력의 이전 또는 이후의 샘플이 아닌 동일한 시간에서의 입력신호에 대부분 의존하는 시스템을 정적(무기억) 시스템, 이와 다른 경우 동적(기억) 시스템이라고 함
시변 시스템과 시불변 시스템	시스템의 입력과 출력의 특성이 시간에 따라 변하면 시변 시스템, 변하지 않으면 시불변 시스템이라고 함
인과 시스템과 비인과 시스템	어떤 시스템의 시각 n에서의 출력이 과거나 현재의 입력 값에만 의존하고 미래의 입력 값과는 무관한 시스템은 인과 시스템, 그렇지 않으면 비인과 시스템이라고 함
안정시스템과 불안정시스템	유한한 M_x와 M_y에 대해 모든 n에 대하여, 유한한 입력에 대한 유한한 출력 신호를 가지면 BIBO(Bounded Input Bounded Output) 안정 시스템, 그렇지 않으면 불안정시스템 이라고 함 $\lvert x[n]\rvert \le M_x < \infty$ $\quad$ $\lvert y[n]\rvert \le M_y < \infty$

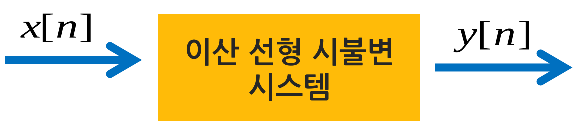
핵심정리

이산 시간 시스템의 시간 응답

- 이산 선형 시불변 시스템: 이산 시스템이 선형(Linear)이고, 시불변(Timeinvariant)인 시스템
- 이산 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 h[n]: 입력 신호로 단위 임펄스 입력신호에 대한 이산 시스템의 응답

$$h[n] \equiv S\{\delta[n]\}$$

- 이산 선형 시불변 시스템의 시간응답 y[n]: 입력 신호 x[n]과 임펄스 응답 h[n]과의 컨볼루션 연산으로 계산할 수 있음



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

디지털신호처리

강 의 노 트

이산 선형 시불변 시스템의 시간 응답 특징

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

❖ 컨볼루션 연산

❖ 컨볼루션의 성질과 LTI 시스템의 상호연결

❖ 선형 시불변 시스템의 인과성과 안정성

학습목표

❖ 이산 컨볼루션 연산을 수행할 수 있다.

❖ 이산 컨볼루션 연산의 성질과 LTI 시스템의 상호연결에 대해 설명할 수 있다.

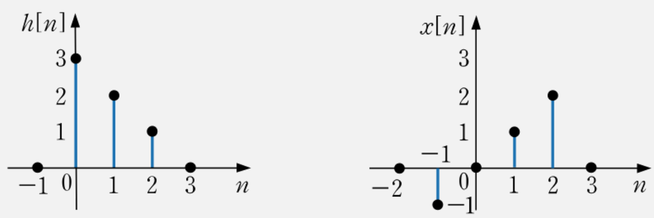
❖ 선형 시불변 시스템의 인과성과 안정성에 대해 설명할 수 있다.

컨볼루션 연산

1. 수식적 연산

예제 26-01

다음 그림은 이산 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 h[n]과 입력 신호 x[n]을 나타낸 것이다. 이 입력 신호에 대한 시스템의 출력을 계산해 보자



임펄스 응답 입력 신호

[예제풀이]

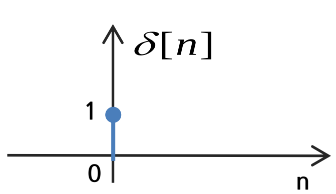
- 입력신호 *x[n]*은 임펄스 신호의 합으로 표현하면,

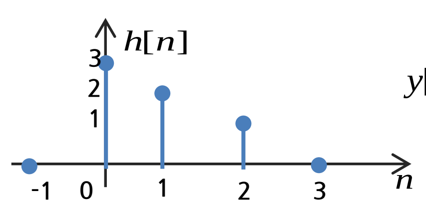
$$
\begin{aligned}
x[n] &= -1 \bullet \delta[n+1] + 0 \bullet \delta[n] + 1 \bullet \delta[n-1] + 2 \bullet \delta[n-2] \\
&= x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] \\
&= \sum_{k=-1}^{2} x[k]\delta[n-k]
\end{aligned}
$$

- *x[n]*신호를 임펄스의 합으로 표현한 뒤 중첩의 원리를 적용하여 각 임펄스 성분 $x[n]\delta[n-k]$에 대한 시스템 응답을 모두 더하면 시스템의 출력 *y[n]을 얻을 수 있음*

$$y[n] = \sum_{k=-1}^{2} x[k]h[n-k]$$

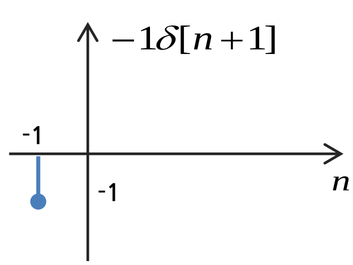
$x[n] = \delta[n]$

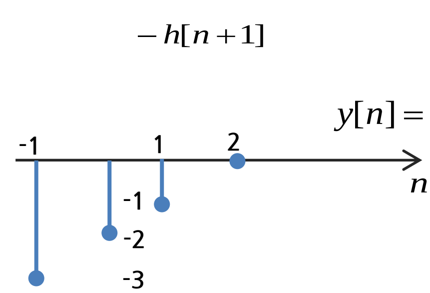




$y[n] = h[n]$

$x[n] = -1\delta[n+1]$





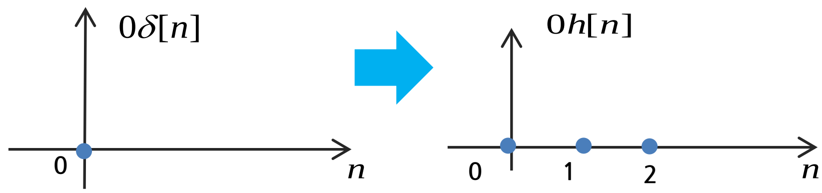
$y[n] = -1h[n+1]$

컨볼루션 연산

1. 수식적 연산

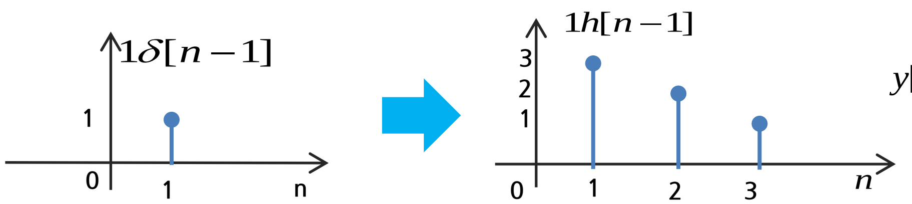
[예제풀이] (계속)

$x[n]=0\delta[n]$



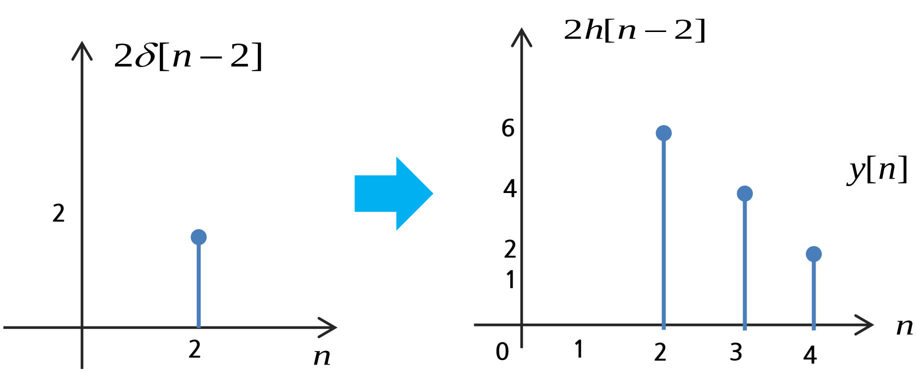
$y[n]=0h[n]$

$x[n]=1\delta[n-1]$



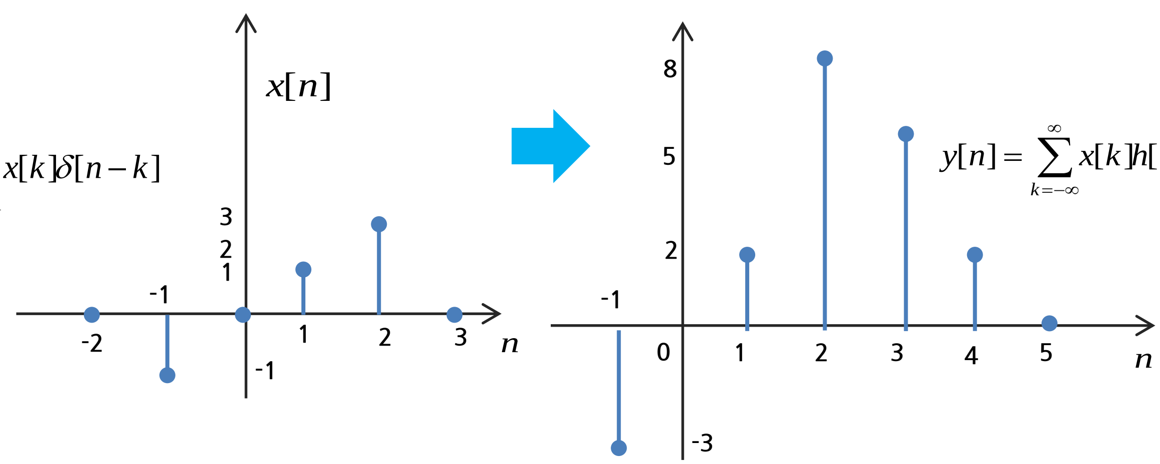
$y[n]=1h[n-1]$

$x[n]=2\delta[n-2]$



$y[n]=2h[n-2]$

$x[n]=\sum_{k=-1}^{2} x[k]\delta[n-k]$



$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

- 이와 같이 입력 신호 $x[n]$이 임펄스 중첩에 의한 이산 시스템 출력 계산은 컨볼루션 연산의 개념과 원리를 이해하기에는 좋지만, 만약 $x[n]$의 길이가 긴 경우에는 비효율적이므로 바람직한 컨볼루션 계산법은 아님

컨볼루션 연산

2. 그래프적 연산

1) 연산 과정

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \qquad -\infty \le n \le \infty$$

대칭 이동

h[n] → *h[k]*로 변수변환
*h[-k]*를 얻기 위해
*h[k]*를 $k = 0$에 대해 대칭이동함

시프트 이동

h[-k] 그래프에서 *h[n-k]* 그래프를 얻기 위해서
*n*이 양(음)이라면,
오른쪽(왼쪽)으로 *n*만큼 *h[-k]*를 이동

곱셈

곱 수열
$v_n[k] = x[k]h[n-k]$ 를 계산

합

모든 k에 대한 곱 수열 $v_n[k] = x[k]h[n-k]$을
합해서 출력 *y[n]*을 계산
이 때, 모든 $-\infty \le n \le \infty$ 범위 내의
모든 시간에 대한 출력 값 *y[n]*을 계산

컨볼루션 연산

2. 그래프적 연산

예제 26-02

이산 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 h[n]과 입력 신호 x[n]이 다음과 같을 때 출력 신호 y[n]을 컨볼루션 연산을 통하여 계산해 보자.

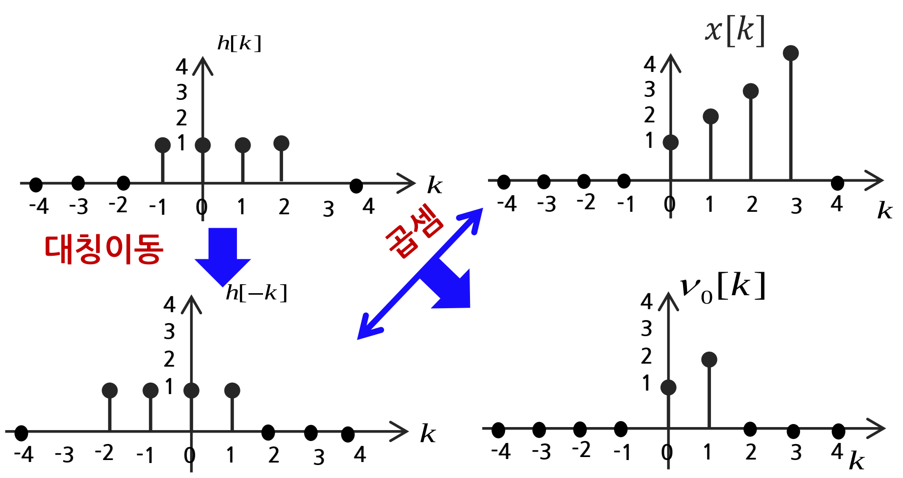
$$h[n] = \{1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1\}, \qquad x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$$

[예제풀이]

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$n = 0$ 일 때, $y[0] = ?$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_0[k]$$
$$= 1 + 2 = 3$$



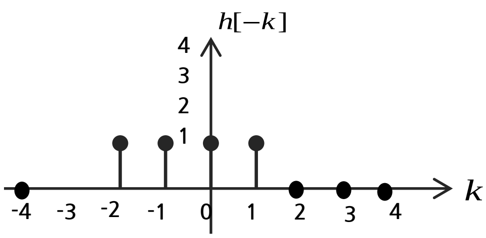
컨볼루션 연산

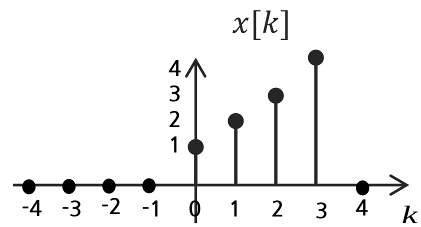
2. 그래프적 연산

[예제풀이] (계속)

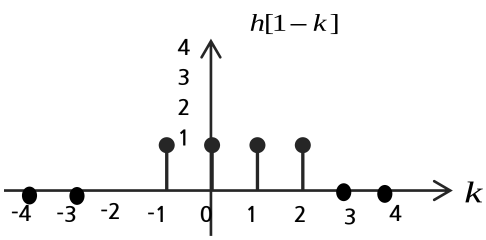
***n* = 1 일 때, *y[1]* = ?**

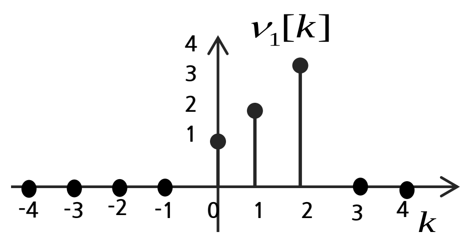
$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[1-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v_1[k]$$
$$=1+2+3=6$$





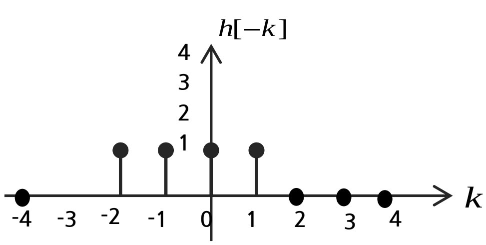
+1만큼
시프트

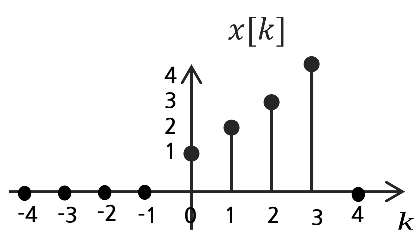




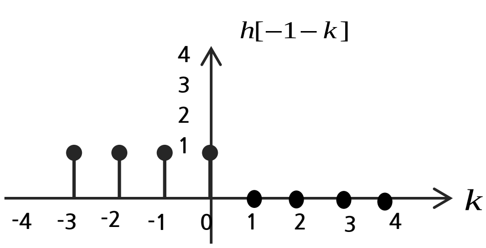
***n* = -1 일 때, *y[-1]* = ?**

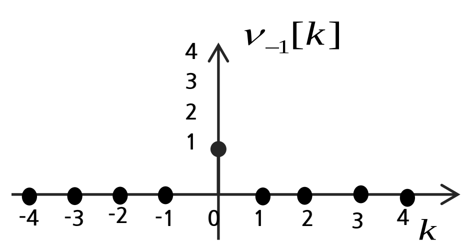
$$y[-1]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[-1-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}v_{-1}[k]$$
$$=1$$





-1만큼
시프트





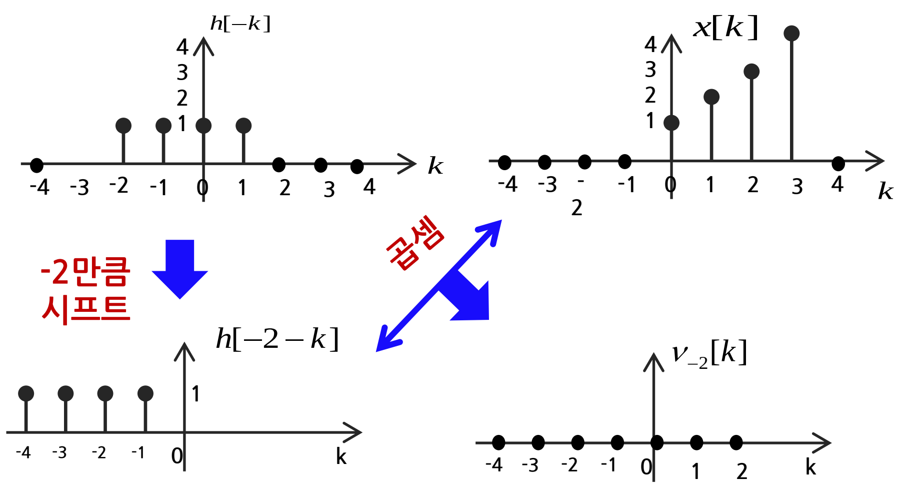
컨볼루션 연산

2. 그래프적 연산

[예제풀이] (계속)

***n* = -2 일 때, *y[-2]* = ?**

$$y[-2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-2-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{-2}[k]$$
$$= 0$$

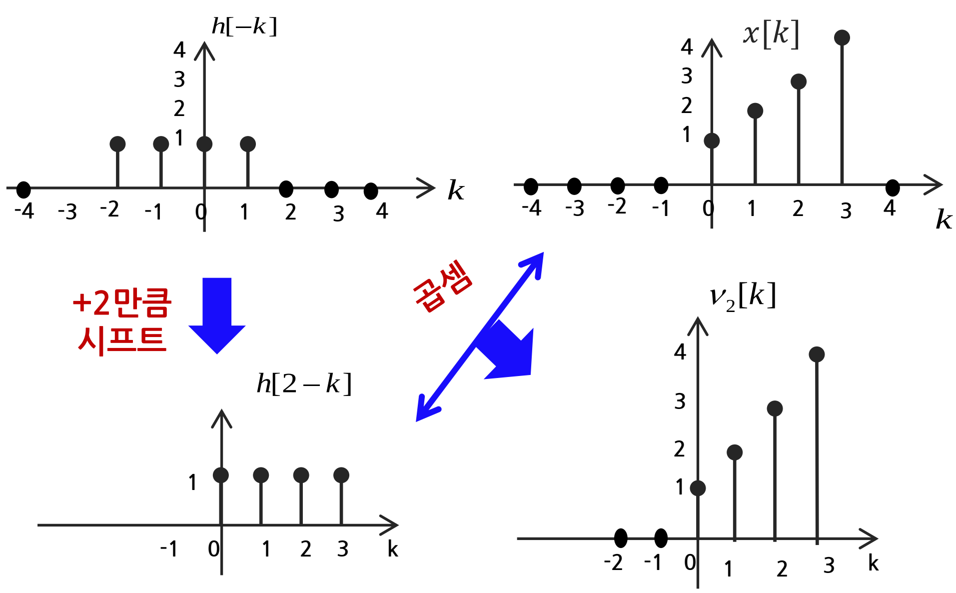


***n* =-3 일 때, *y[-3]*= ?**

n=-3 이하는 모두 *y[n]* = *0* 임

***n* = 2, *y[2]* = ?**

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{2}[k]$$
$$=1+2+3+4=10$$



컨볼루션 연산

2. 그래프적 연산

[예제풀이] (계속)

***n* = 3, 4, 5**

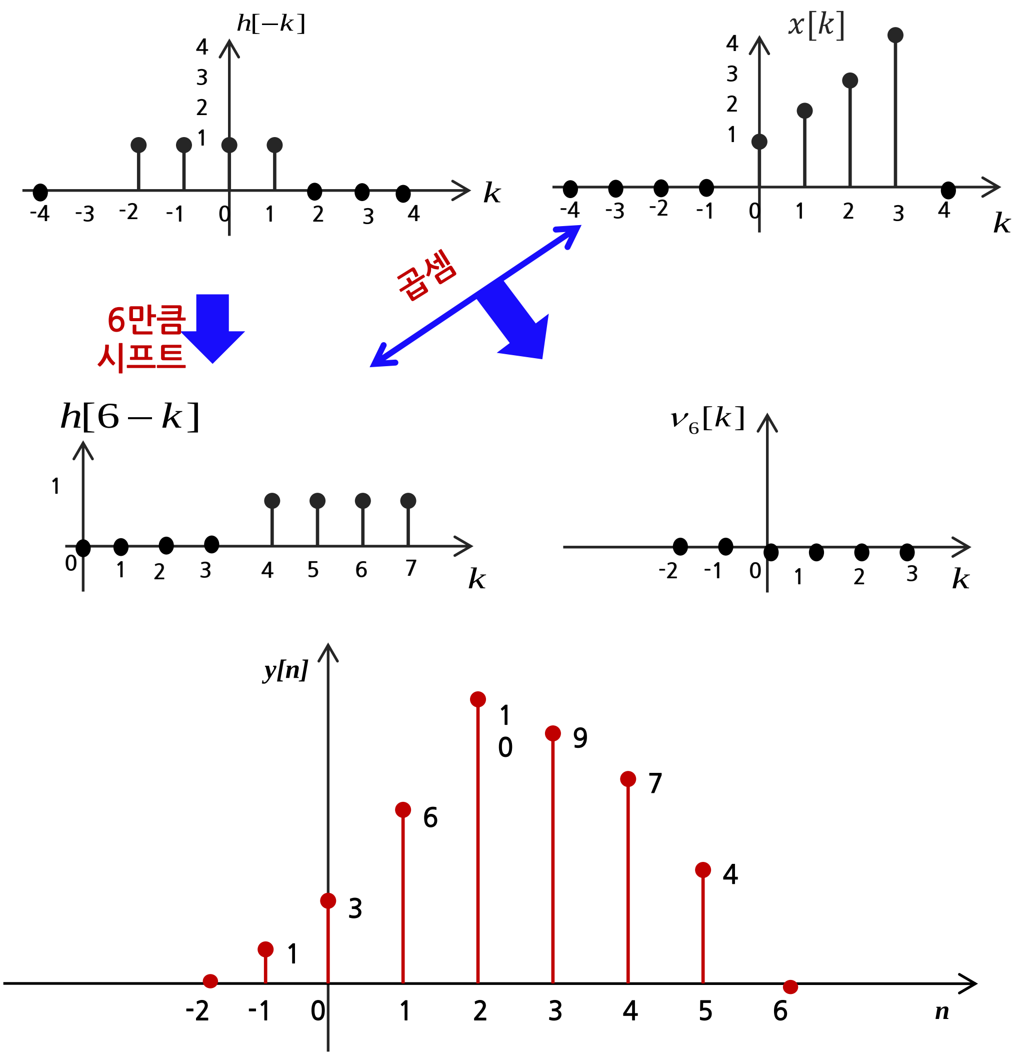
$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_3[k] = 2+3+4 = 9$$

$$y[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[4-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_4[k] = 3+4 = 7$$

$$y[5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[5-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_5[k] = 4$$

***n* = 6, *y[6]* = ?**

n= 6 이상에 대한 y[n] = 0 임 $y[n] = 0, \quad n \geq 6$



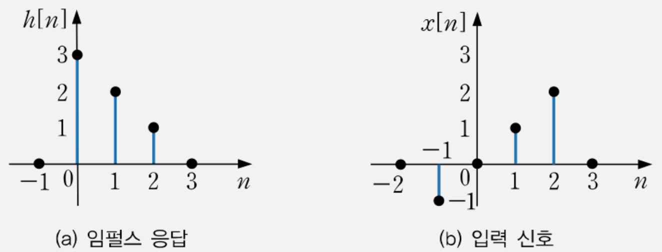
$$y[n] = \{1, \underset{\uparrow}{3}, 6, 10, 9, 7, 4\}$$

컨볼루션 연산

2. 그래프적 연산

예제 26-03

예제1의 컨볼루션 연산을 그래프적 연산방법을 통하여 출력 신호 y[n]을 계산한 후, 예제1의 결과와 같은지 확인해 보자.

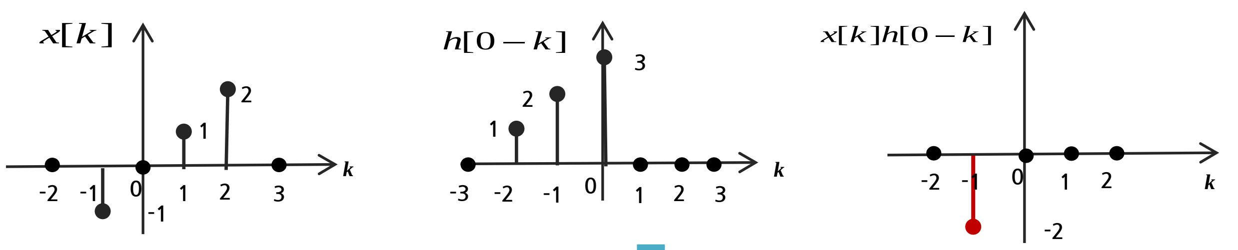


(a) 임펄스 응답 (b) 입력 신호

[예제풀이]

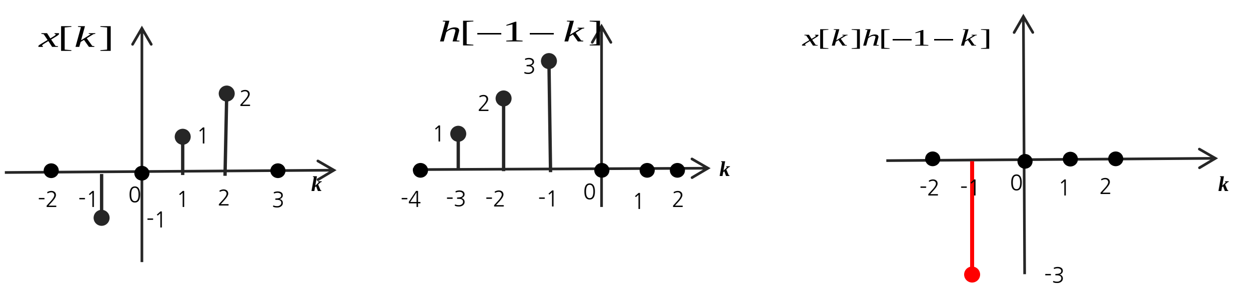
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

n = 0 일 때, *y[0] = -2*



-1 시프트

n = -1 일 때, *y[-1] = -3*

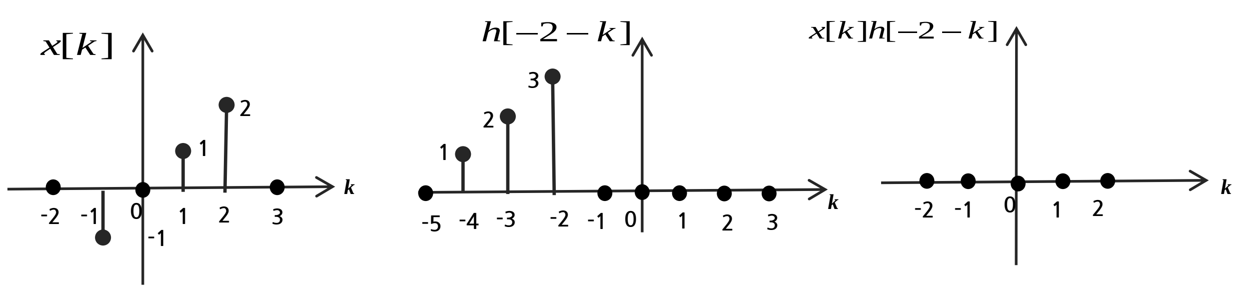


컨볼루션 연산

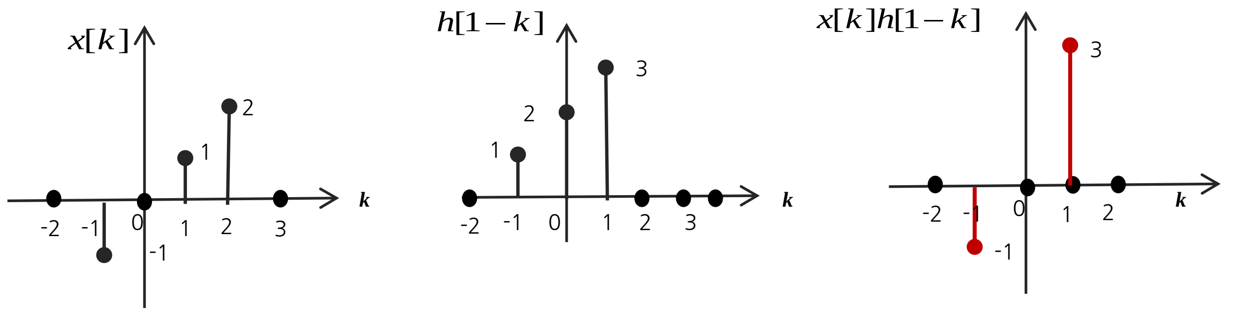
2. 그래프적 연산

[예제풀이] (계속)

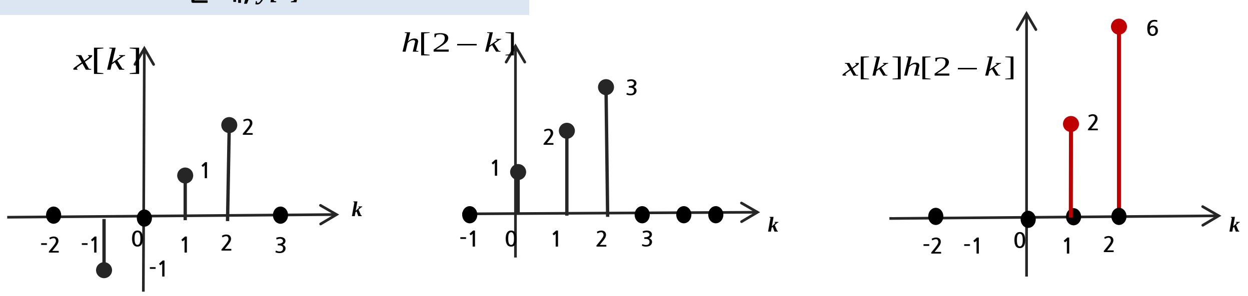
$n = -2$ 일 때, $y[-2] = 0$



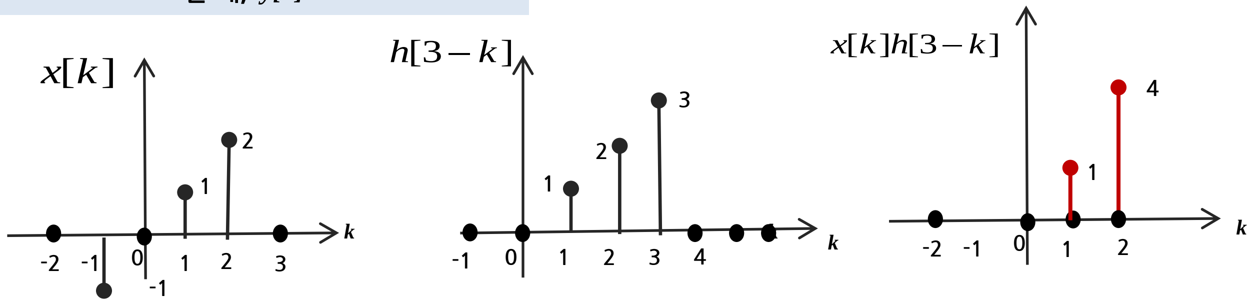
$n = 1$ 일 때, $y[1] = -1+3 = 2$



$n = 2$ 일 때, $y[2] = 2+6 = 8$



$n = 3$일 때, $y[3] = 1+4 = 5$

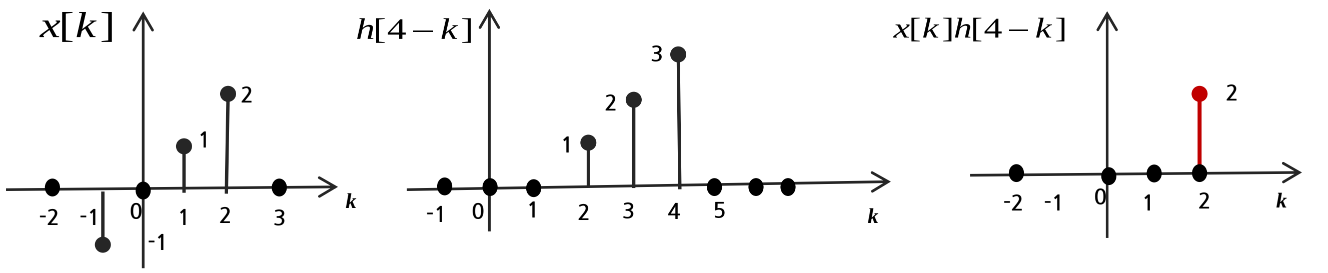


컨볼루션 연산

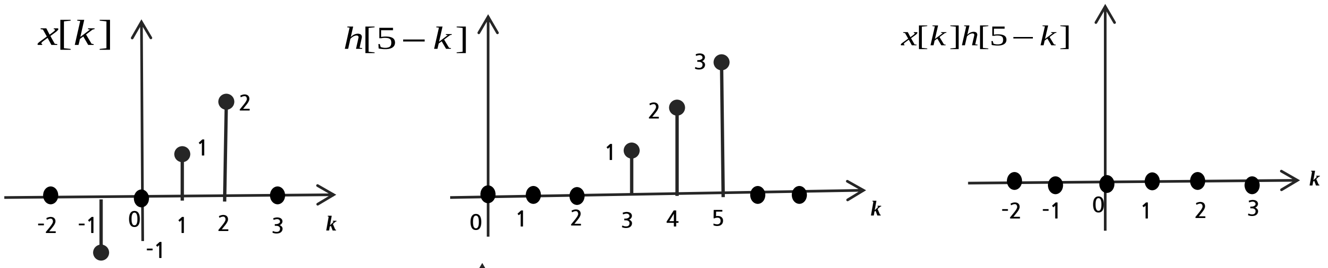
2. 그래프적 연산

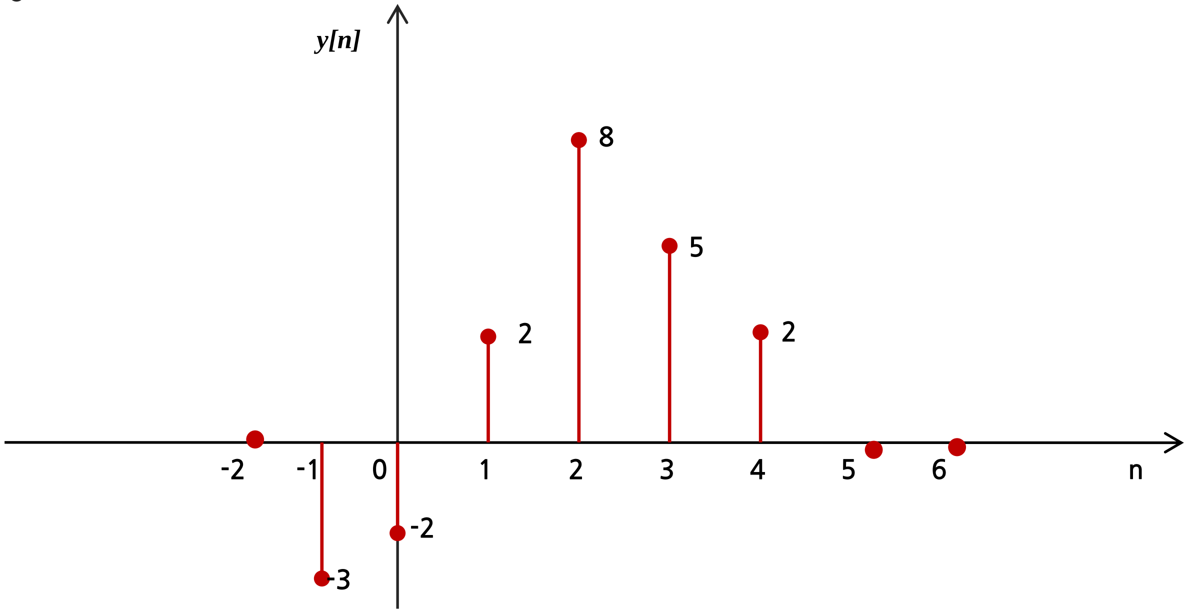
[예제풀이] (계속)

***n* = 4 일 때, *y*[4] =2**



***n* = 5일 때, *y*[5] = 0**





$$y[n] = \{0, -3, -2, 2, 8, 5, 2, 0\}$$

컨볼루션의 성질과 LTI 시스템의 상호연결

1. 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙

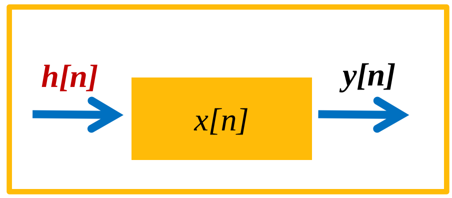
1) 교환법칙

- 컨볼루션 연산은 두 신호 x[n]과 h[n]에 대해 다음과 같이 교환법칙이 성립

$$y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$= h[n]*x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

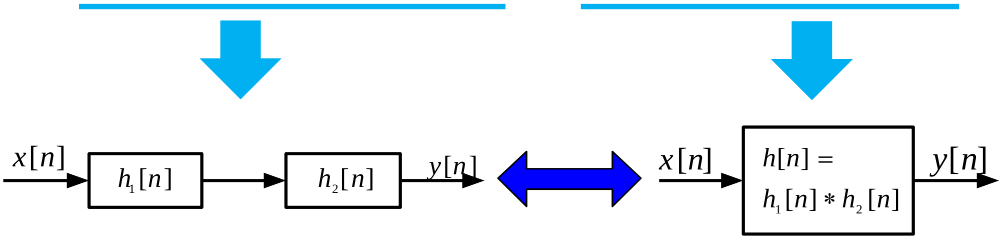
=



2) 결합법칙

- 좌변은 종속접속을 갖는 두 LTI 시스템에 대응,
  우변은 한 개의 임펄스 응답 h[n] = h1[n]*h2[n]을 갖는 하나의 LTI 시스템으로 대체할 수 있음

$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n] = x[n]*\{h_1[n]*h_2[n]\}$$



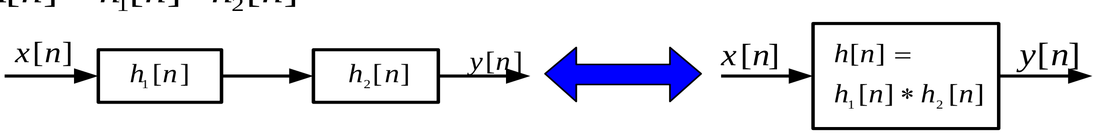
- 두 개 이상의 LTI 시스템이 종속 접속된 LTI 시스템에 대한 결합법칙은 일반화 가능함

$$h[n] = h_1[n]*h_2[n]*\cdots*h_L[n]$$

- 컨볼루션 연산에 대한 교환,결합법칙은 임의의 LTI 시스템은 다양한 부LTI 시스템의 종속적인 상호연결로 분리될 수 있음을 의미함
- 컨볼루션 연산이 결합법칙과 교환법칙이 성립하기 때문에 시스템적인 측면에서 두 LTI 시스템은 결합법칙이 성립

$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n] = x[n]*\{h_1[n]*h_2[n]\}$$

$$h[n] = h_1[n]*h_2[n]$$



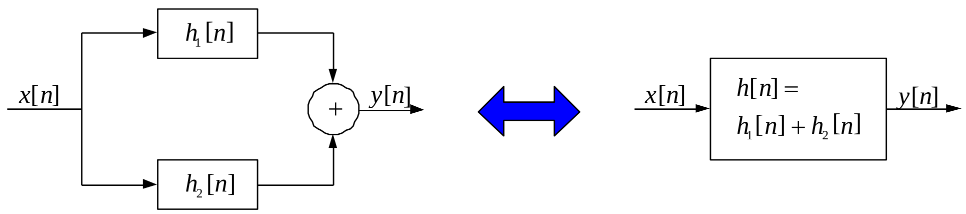
컨볼루션의 성질과 LTI 시스템의 상호연결

1. 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙

3) 분배법칙

- 동일한 입력 신호 x[n]에 의한 임펄스응답이 h1[n]과 h2[n]인 경우, 두 응답의 합은 각각의 임펄스 응답의 합을 임펄스 응답을 갖는 시스템과 동일함

$$x[n]*\{h_1[n]+h_2[n]\}=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$
$$h[n]=h_1[n]+h_2[n]$$



2. 항등성과 이동성

1) 항등성

- 단위 임펄스 신호 $\delta[n]$은 컨볼루션 연산에 대해 항등 원소임

$$y[n]=x[n]*\delta[n]=x[n]$$

2) 이동성

- 만약 $\delta[n-k]$ 을 k 만큼 이동시키면, 컨볼루션 연산 또한 k 만큼 이동됨

$$y[n]=x[n]*\delta[n-k]=x[n-k]$$

선형 시불변 시스템의 인과성과 안정성

1. LTI 시스템의 인과성

1) 인과성이란?

- 인과시스템(Causal System) : n 번째 현재 출력 신호가 현재나 과거의 입력 신호에 대해서만 영향을 미치고, 미래의 입력에 대해서는 고려하지 않는 시스템
- 즉, n=n0 의 시간에서 시스템의 출력은 $n \le n_0$ 인 입력 신호 x[n] 값에 의해서만 좌우되는 시스템

- 선형 시불변(LTI) 시스템의 인과성은 임펄스 응답 조건에 따라 변형 가능함
- 시간 n0를 기준으로 과거와 현재의 입력 성분과 미래의 입력 성분을 구분

$$y[n_0] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n_0 - k] + \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n_0 - k]$$

$$= \underbrace{\{h[0]x[n_0] + h[1]x[n_0 - 1] + h[2]x[n_0 - 2] + \cdots\}}_{\text{시간 } n_0 \text{ 를 기준으로 과거와 현재의 입력에 의한 출력 값}} + \underbrace{\{h[-1]x[n_0 + 1] + h[-2]x[n_0 + 2] + \cdots\}}_{\text{시간 } n_0 \text{ 를 기준으로 미래의 입력에 의한 출력 값}}$$

2) 조건

- LTI 시스템이 인과적이기 위해서는 임펄스 응답이 다음 관계식을 만족하여야 함

$$h[n] = 0 \qquad n < 0$$

인과 선형 시불변 시스템의 응답	$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$

※ 입력신호인 x[n] =0, n<0 일 때, 인과 선형 시불변 시스템의 응답은 더욱 한정

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k]$$

선형 시불변 시스템의 인과성과 안정성

2. LTI 시스템의 안정성

1) 안정성이란?

- 안정성은 실제적인 시스템을 구현할 때 반드시 고려되어야 하는 중요한 성질
- 유한한 크기의 입력신호 x[n]에 대해 유한한 크기의 신호 y[n]이 출력되면 BIBO 안정하다고 함
- 즉, 다음 식과 같이 모든 n에 대해 만족되어야 함

$$|x[n]| \le M_x < \infty \qquad |y[n]| \le M_y < \infty$$

2) 조건

- 유한한 입력과 임펄스 응답 h[n]이 다음 조건을 만족하면 LTI 시스템은 BIBO 안정함

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

3) 증명

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \le M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

$\therefore |y[n]| \le \infty$ 가 되기 위해서는 시스템의 임펄스 응답이 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

핵심정리

컨볼루션 연산

- 그래프적 컨볼루션 연산 과정

1) 대칭 이동 → 2) 시프트 이동 → 3) 곱셈 → 4) 합

1) h[-k]를 얻기 위해서 h[k]를 k = 0에 대해 대칭 이동함

2) h[n-k]를 얻기 위해서 n이 양(음)이라면, 오른쪽(왼쪽)으로 n만큼 h[-k]를 이동

3) 곱 수열 $v_n[k] = x[k]h[n-k]$ 를 계산

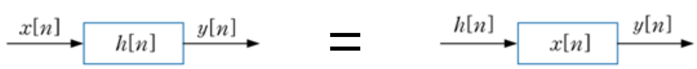
4) 모든 k에 대한 곱 수열 $v_n[k] = x[k]h[n-k]$ 을 합해서 출력 y[n]을 계산

이 때, 모든 $-\infty \le n \le \infty$ 범위 내의 모든 시간에 대한 출력 값 y[n]을 계산

컨볼루션의 성질과 LTI 시스템의 상호연결

교환법칙

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$



결합법칙

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

배분법칙

$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$
$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

핵심정리

선형 시불변 시스템의 인과성과 안정성

- 선형 시불변 시스템의 인과성: n 번째 현재 출력신호가 현재나 과거의 입력신호에 대해서만 영향을 미치고, 미래의 입력에 대해서는 고려하지 않는 시스템을 인과시스템(Causal System)이라고 함

$n = n_0$ 의 시간에서 시스템의 출력은 $n \le n_0$인 입력신호 x[n]

- LTI 시스템이 인과적이기 위해서는 임펄스 응답이 다음 관계식을 만족하여야 함

$$h[n] = 0 \qquad n < 0$$

- LTI 시스템에서 BIBO 안정(Stable)하기 위한 임펄스 응답 h[n]은 다음 조건을 만족하여야 함

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

디지털신호처리

강 의 노 트

이산 컨볼루션 연산 실습

한국기술교육대학교
온라인평생교육원
OLEI

학습내용

- ❖ 컨볼루션 연산 실습
- ❖ 컨볼루션 연산에 대한 결합법칙과 분배법칙

학습목표

- ❖ 컨볼루션 연산을 직접 계산하고 Matlab을 활용하여 컨볼루션 연산을 계산할 수 있다.
- ❖ 컨볼루션 연산이 교환법칙, 결합법칙 및 분배법칙이 성립하는 것을 Matlab 프로그램을 통해 증명할 수 있다.

컨볼루션 연산 실습

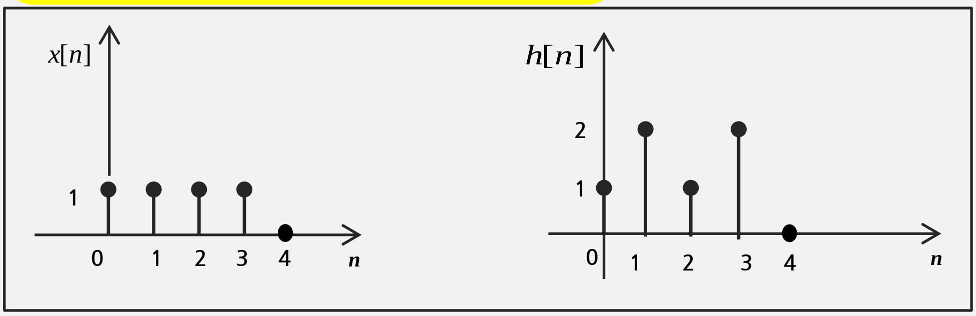
1. 컨볼루션 연산 계산 하기

실습과제 27-01

이산 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답 h[n]이 다음과 같을 때 입력 신호 x[n]에 대한 출력 신호 y[n]을 직접 계산해 보자.

$$x[n]=[\underset{\uparrow}{1}\ 1\ 1\ 1\ 0] \qquad h[n]=[\underset{\uparrow}{1}\ 2\ 1\ 2\ 0]$$

입력 신호와 임펄스 응답 그래프



$$x[n]=[\underset{\uparrow}{1}\ 1\ 1\ 1\ 0] \qquad h[n]=[\underset{\uparrow}{1}\ 2\ 1\ 2\ 0]$$

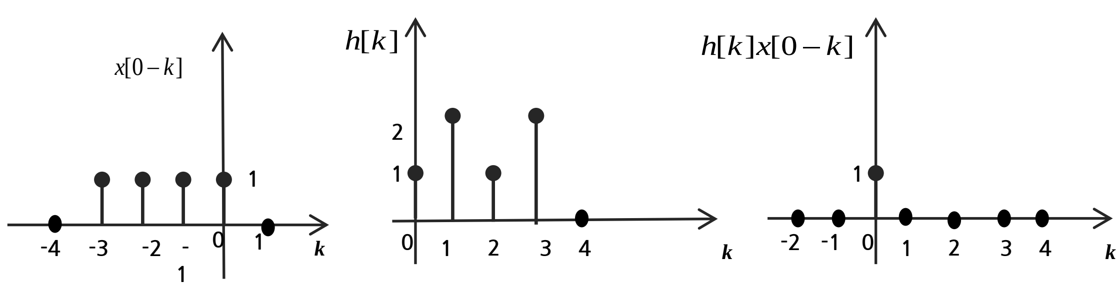
제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

$$y[n]=x[n]*h[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

n = 0 일 때,

y[0] = 1



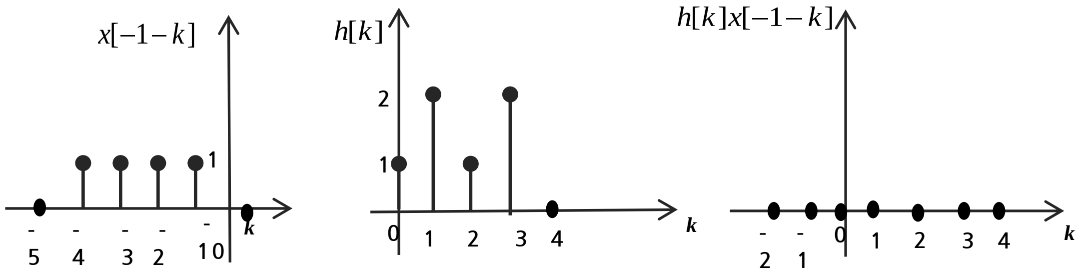
컨볼루션 연산 실습

1. 컨볼루션 연산 계산 하기

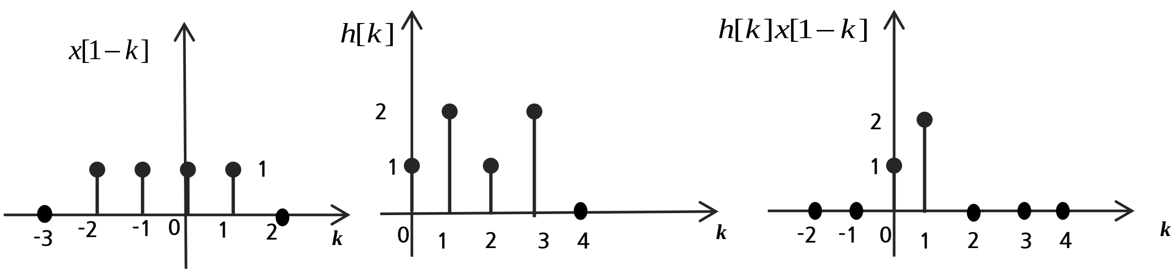
[과제해설] (계속)

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

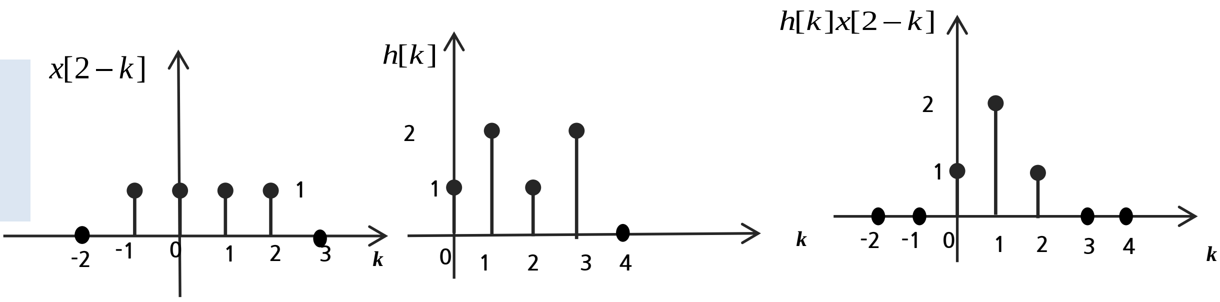
n = -1 일 때,
y[-1] = 0



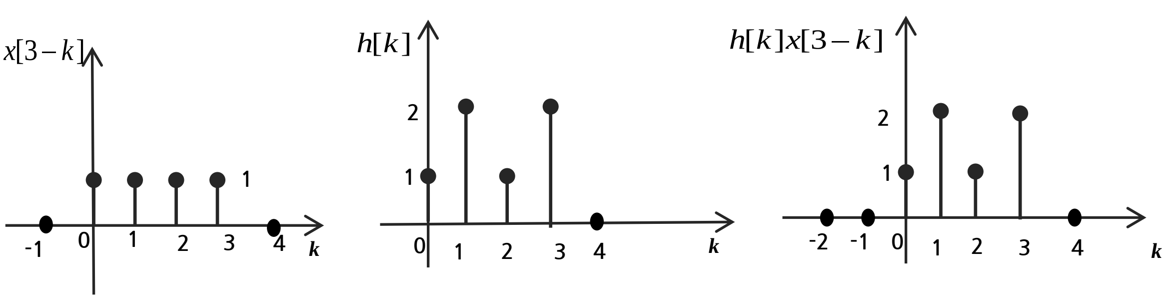
n = 1 일 때,
y[1] = 1+2 = 3



n = 2 일 때,
y[2] = 1+2+1 = 4



n = 3 일 때,
y[3] = 1+2+1+2 = 6



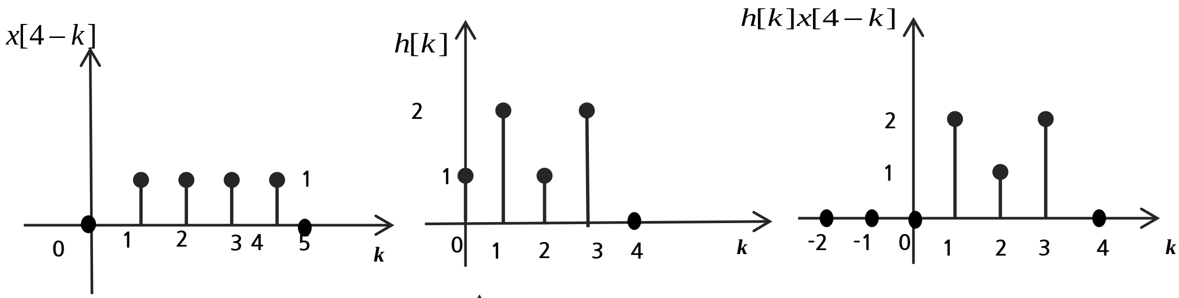
컨볼루션 연산 실습

1. 컨볼루션 연산 계산 하기

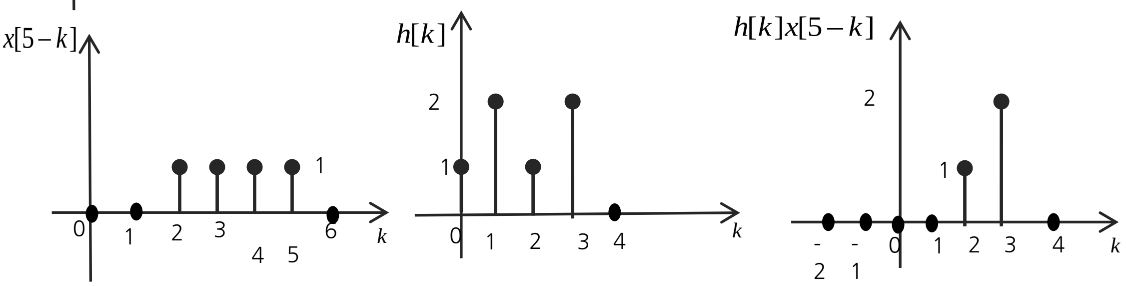
[과제해설] (계속)

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

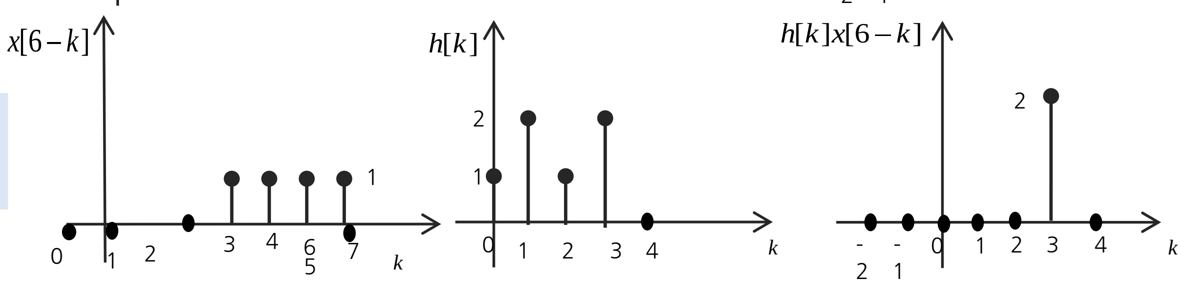
n = 4 일 때,
y[4] = 2+1+2
= 5



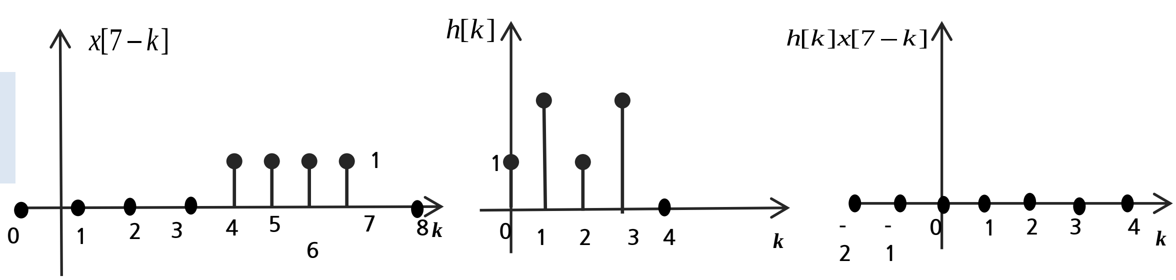
n = 5 일 때,
y[5] = 1+2
= 3

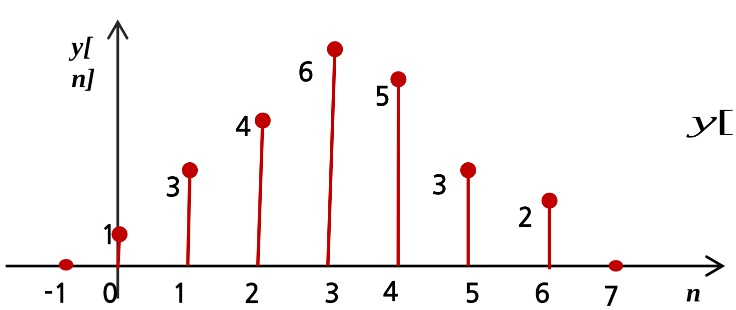


n = 6 일 때,
y[6] = 2



*n = 7*일 때,
y[7] = 0





$$y[n] = \{1,3,4,6,5,3,2,0\}$$

컨볼루션 연산 실습

2. Matlab 프로그램 실습 및 교환법칙 성립 확인하기

실습과제 27-02

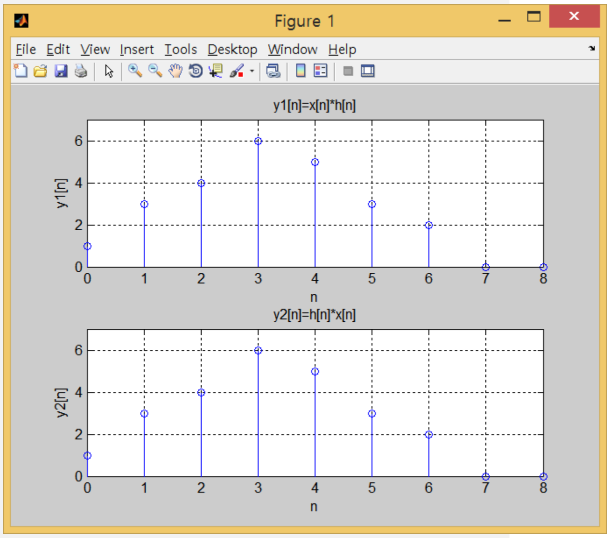
실습 1-1에서 수행한 컨볼루션 연산을 Matlab 프로그램으로 확인하고, 다음과 같이 교환법칙이 성립하는지도 확인해 보자.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$
$$= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
%% Ex27_1_1.m, 컨볼루션 연산 실습 및 교환 법칙 확인하기

xn = [1 1 1 1 0]; % 입력신호 x[n]
hn = [1 2 1 2 0]; % 임펄스 응답, h[n] 신호

n = 0 : 1 : 8;

yn_1 = conv(xn,hn);  % y[n] = x[n] * h[n]
subplot(2,1,1);
stem(n,yn_1);
axis([0 8 0 7]);
xlabel('n');
ylabel('y1[n]');
title('y1[n]=x[n]*h[n]');
grid on;

yn_2 = conv(hn, xn);  % y[n] = h[n] * x[n]
subplot(2,1,2);
stem(n,yn_2);
axis([0 8 0 7]);
xlabel('n');
ylabel('y2[n]');
title('y2[n]=h[n]*x[n]');
grid on;
```



컨볼루션 연산에 대한 결합법칙과 분배법칙

1. 컨볼루션 연산 결합법칙 확인하기

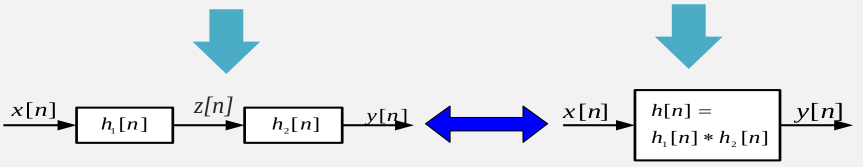
실습과제 27-03

다음과 같이 컨볼루션 연산의 결합법칙을 Matlab 프로그램을 통하여 확인해 보자.

$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]=x[n]*\{h_1[n]*h_2[n]\}$$

결합법칙

$$\underline{\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]} = \underline{x[n]*\{h_1[n]*h_2[n]\}}$$



$x[n] = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0]$ $h_1[n] = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0]$ $h_2[n] = [2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 0]$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

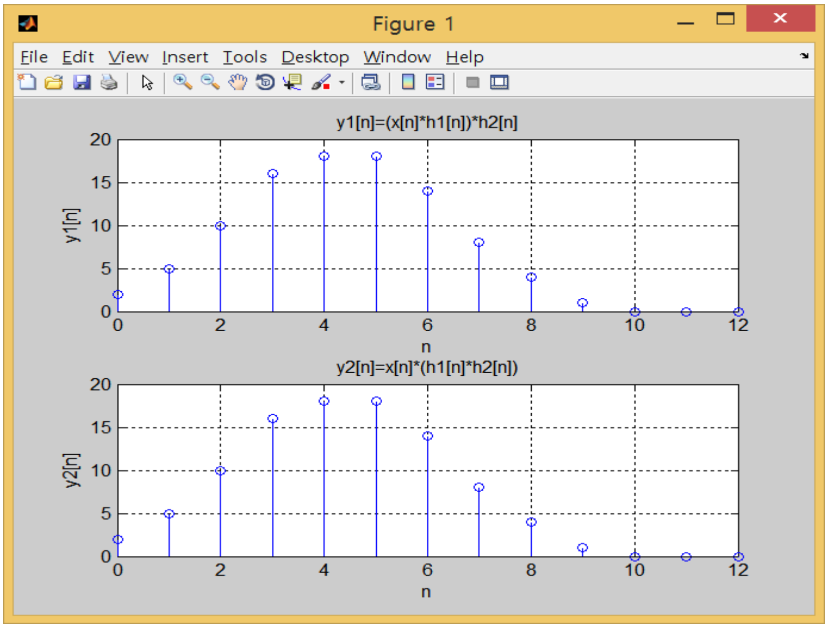
```
%% 실습 27_2_1.m, 결합법칙 확인하기
xn = [1 1 1 1 0]; % 입력신호, x[n] 신호
h1 = [1 1 1 1 0]; % 임펄스 응답, h1[n] 신호
h2 = [2 1 2 1 0]; % 임펄스 응답, h2[n] 신호

% LTI system1 : h1[n] 응답 z[n]= x[n]*h1[n]
n = 0 : 1 : length(xn)+length(h1)-2;
zn = conv(xn,h1);

% LTI system2 : h2[n] 응답 y1[n] = z[n]*h2[n]
n = 0 : 1 : length(zn)+length(h2)-2;
y1 = conv(zn, h2);

(계속)
```

컨볼루션 연산에 대한 결합법칙과 분배법칙

1. 컨볼루션 연산 결합법칙 확인하기

[과제해설] (계속)

```
subplot(2,1,1);
stem(n,y1);
xlabel('n');
ylabel('y1[n]');
title('y1[n]=(x[n]*h1[n])*h2[n]');
grid on;

% LTI system1과 system2에 대한 컨볼루션 결합 : h[n] = h1[n]*h2[n]
hn = conv(h1, h2);

% 결합된 LTI system h[n]에 대한 입력신호 x[n] 응답: y2[n] = x[n] * h[n]
n = 0 : 1 : length(hn)+length(xn)-2;
y2 = conv(xn, hn);

subplot(2,1,2);
stem(n,y2);
xlabel('n');
ylabel('y2[n]');
title('y2[n]=x[n]*(h1[n]*h2[n])');
grid on;
```



y1[n] = y2[n] 이므로 결합법칙이 성립

컨볼루션 연산에 대한 결합법칙과 분배법칙

2. 컨볼루션 연산 분배법칙 확인하기

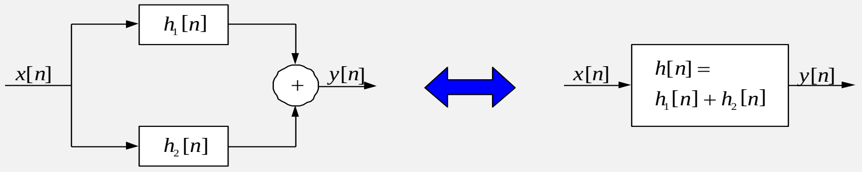
실습과제 27-04

다음과 같이 컨볼루션 연산의 분배법칙을 Matlab 프로그램을 통하여 확인해 보자.

$$x[n]*\{h_1[n]+h_2[n]\}=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$
$$h[n]=h_1[n]+h_2[n]$$

분배법칙

$$x[n]*\{h_1[n]+h_2[n]\}=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$
$$h[n]=h_1[n]+h_2[n]$$



$x[n]$ = [1 1 1 1 0]　　$h_1[n]$ = [1 1 1 1 0]　　$h_2[n]$ = [2 1 2 1 0]

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

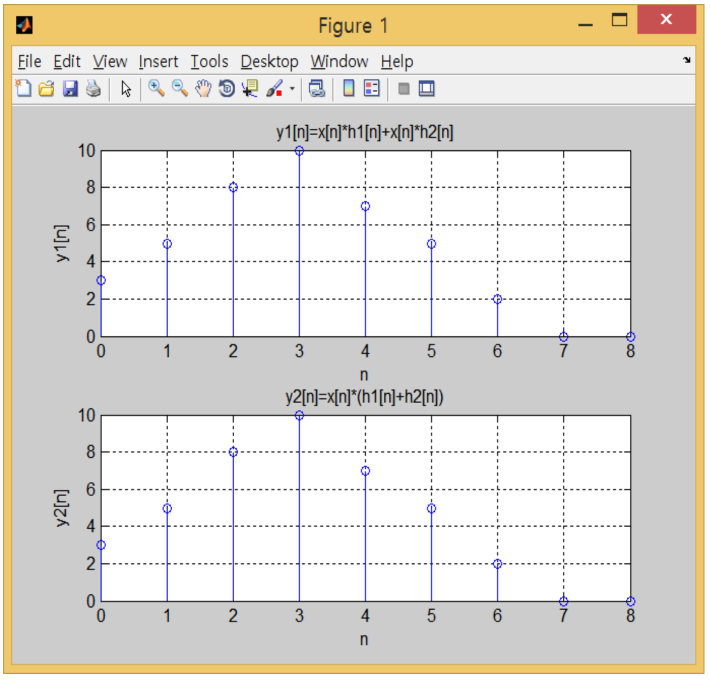
```
%% 실습 27_2_2.m, 분배법칙 확인하기
xn = [1 1 1 1 0]; % 입력신호, x[n] 신호
h1 = [1 1 1 1 0]; % 임펄스 응답, h1[n] 신호
h2 = [2 1 2 1 0]; % 임펄스 응답, h2[n] 신호
n = 0 : 1 : length(xn)+length(h1)-2;

% 두 개의 병렬연결 LTI system 응답 : y[n]= x[n]*{h1[n]+h2[n]}
y1 = conv(xn,h1) + conv(xn,h2);

% LTI system2 : h[n] = h1[n]+h2[n]
hn = h1 + h2;
y2 = conv(xn, hn);   % y2 = x[n] * h[n]

(계속)
```

컨볼루션 연산에 대한 결합법칙과 분배법칙

1. 컨볼루션 연산 결합법칙 확인하기

[과제해설] (계속)

```
subplot(2,1,1);
stem(n,y1);
xlabel('n');
ylabel('y1[n]');
title('y1[n]=x[n]*h1[n]+x[n]*h2[n]');
grid on;

subplot(2,1,2);
stem(n,y2);
xlabel('n');
ylabel('y2[n]');
title('y2[n]=x[n]*(h1[n]+h2[n])');
grid on;
```

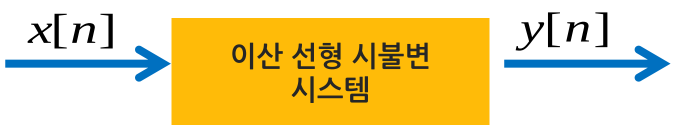


y1[n] = y2[n] 이므로 분배법칙이 성립

핵심정리

컨볼루션 연산 실습

- 이산 컨볼루션 연산



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- 이산 선형 시불변 시스템의 임펄스 응답이 h[n]이고, 입력신호가 x[n]일 경우, 출력 y[n]은 이산 컨볼루션 합으로 계산할 수 있음

컨볼루션 연산에 대한 결합법칙과 분배법칙

- 컨볼루션 연산은 교환법칙이 성립함

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

- 컨볼루션 연산은 결합법칙이 성립함

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

- 컨볼루션 연산은 분배법칙이 성립함

$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

디지털신호처리

강 의 노 트

FIR-IIR 및
재귀-비재귀 이산 시스템

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

- ❖ 유한 임펄스 응답 시스템과 무한 임펄스 응답 시스템
- ❖ 재귀 시스템과 비재귀 시스템

학습목표

- ❖ 유한 임펄스 응답 시스템과 무한 임펄스 응답 시스템을 비교하여 설명할 수 있다.
- ❖ 재귀 시스템과 비재귀 시스템의 의미를 이해하고, 그 차이점을 설명할 수 있다.

유한 임펄스 응답 시스템과 무한 임펄스 응답 시스템

1. 유한 임펄스 응답 시스템

1) 유한 임펄스 응답(Finite -duration Impulse Response: FIR)

- 임펄스 응답을 가진 선형 시불변 시스템으로 임펄스 응답이 어느 유한한 구간 외에는 응답이 0의 값을 갖는 시스템

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{이산 시스템}} \rightarrow y[n]$$

$$h[n] = 0 \qquad n < 0\text{과 } n \geq M$$

FIR 시스템 출력식	$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{FIR 시스템 } h[n]} \rightarrow y[n]$$

- 임의의 시점 n에서 FIR시스템의 출력 값 $y[n]$은 입력 신호 샘플의 가중화된 선형조합으로 얻어짐
  $(x[n], x[n-1], \dots, x[n-M+1])$
- 가장 최근 입력된 M개의 입력 신호 샘플을 임펄스 응답 $h[k]$, (k=0, 1, ⋯, $M-1$)의 값으로 가중시키고, 그 M개의 값들을 더함으로써 출력 값이 생성됨
- 출력 값을 생성할 때에, 가장 최근의 M개의 입력신호 샘플들을 저장할 유한 메모리가 필요하고, 가장 최근 M개의 샘플 외의 신호($x[n-M]$, $x[n-M-1]$), ⋯,)은 무시됨

유한 임펄스 응답 시스템과 무한 임펄스 응답 시스템

2. 무한 임펄스 응답 시스템

1) 무한 임펄스 응답(Infinite-duration Impulse Response: IIR)

- 이산 시스템의 임펄스 응답이 무한구간에서 존재하는 시스템

IIR 시스템 출력식	$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$

- 출력 값은 무한개의 입력신호 샘플 $x[n]$, $x[n-1]$, $x[n-2]$, ⋯, 의 가중된 선형조합으로 결정
- IIR 시스템의 경우에는 무한한 덧셈과 곱셈과정,무한 메모리를 필요
  ⇨ 무한한 임펄스 응답 $h[n]$과 입력 신호 $x[n]$의 컨볼루션 연산을 이용한 계산이 불가능

?

컨볼루션 연산을 사용하지 않고 다른 형태로 IIR 시스템을 구현할 수 있는 방법?

⇨ 차분 방정식(Difference Equation)으로 구현 가능
IIR 특성의 시스템들은 디지털 필터 구현, 물리적인 현상, 물리적인 시스템의 모델링 문제와 같은 다양하고, 실질적인 응용분야에서 이용됨

재귀 시스템과 비재귀 시스템

1. 재귀(Recursive) 시스템

1) 필요성

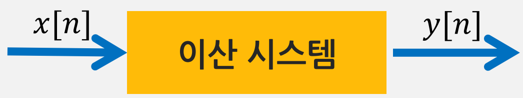
- 이산시스템의 컨볼루션 공식은 오직 입력 신호와 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$만으로 선형 시불변 시스템의 출력을 표현
- 하지만, 입력 신호의 현재와 과거 값뿐만 아니라 이미 발생된 출력의 과거 값이 필요한 시스템이 존재

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

예제 28-01

입력 신호 $x[n]$의 누적 평균값을 계산해서 출력하는 이산시스템을 구현해 보자.

※ k=0, 1, 2, ⋯, n 까지 입력신호가 입력될 때 출력 $y[n]$은 각 입력 신호에 대한 누적 평균값을 출력한다.



[예제풀이]

[예]

$k=0$	$x[0]$입력	$y[0]=x[0]$
$k=1$	$x[0],x[1]$입력	$y[1]=(x[0]+x[1])/2$
$k=2$	$x[0]x[1],x[2]$입력	$y[2]=(x[0]+x[1]+x[2])/3$
$k=3$	$x[0],x[1],x[2],x[3]$입력	$y[3]=(x[0]+x[1]+x[2]+x[3])/4$
…		

$k=n$ 일 때, $x[0],x[1],x[2],\ldots,x[n]$입력

$$y[n]=\frac{1}{n+1}\{x[0]+x[1]+x[2]+\cdots+x[n]\}$$
$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x[k],\quad n=0,1,2\cdots,$$

재귀 시스템과 비재귀 시스템

1. 재귀(Recursive) 시스템

[예제풀이]

$$y[n]=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x[k],\quad n=0,1,2\cdots,\quad 0\le k\le n$$

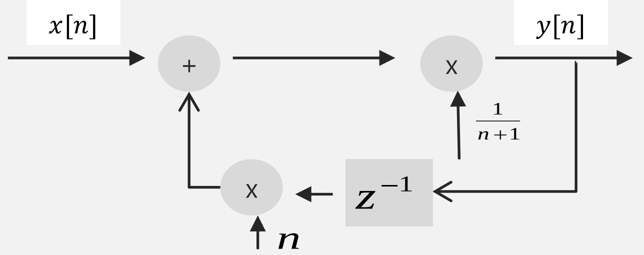
- $y[n]$을 계산하는 과정상 $0\le k\le n$내의 모든 입력 샘플 $x[k]$를 저장할 메모리를 필요로 하고, 이러한 메모리는 n이 증가함에 따라 시간에 정비례 관계로 증가함
- 그런데, 이전의 출력 값 $y[n-1]$을 이용하여 계산하면, 출력 값 $y[n]$은 더욱 효율적으로 구할 수 있음
- 출력 값 $\boldsymbol{y[n]}$ 계산식을 수학적인 재배열을 통해 차분 방정식을 구할 수 있음

$$y[n]=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x[k] \quad\Rightarrow\quad (n+1)y[n]=\sum_{k=0}^{n-1}x[k]+x[n]$$

$$=ny[n-1]+x[n]$$

$$y[n]=\frac{n}{n+1}y[n-1]+\frac{1}{n+1}x[n]$$

- 결론적으로 $\boldsymbol{y[n]}$은 이전 출력 값 $\boldsymbol{y[n-1]}$에 $\boldsymbol{n/(n+1)}$을 곱하고, 현재 출력 값 $\boldsymbol{x[n]}$에 $\boldsymbol{1/(n+1)}$을 곱한 값을 더해 줌으로써 누적 평균 $\boldsymbol{y[n]}$을 순환적으로 계산할 수 있음



[재귀 구조의 누적 평균 시스템의 구현]

- 순환 구조의 누적 평균 시스템의 구현은 두 개의 곱셈기와 한 개의 덧셈기, 한 개의 메모리를 이용하여 구현할 수 있음
- 시간 n에서 출력 $y[n]$은 $y[n-1]$, $y[n-2]$, $\cdots$, 와 같은 과거 출력값에 따라 결정되므로 이를 재귀 시스템이라고 함

- 재귀 시스템의 계산과정을 좀 더 자세하게 알아보면,

$$y[0]=x[0] \qquad y[1]=\frac{1}{2}y[0]+\frac{1}{2}x[1] \qquad y[2]=\frac{2}{3}y[1]+\frac{1}{3}x[2]$$

- 임의의 시간 $\boldsymbol{n=n_0}$에서의 출력 값 $\boldsymbol{y[n_0]}$는 이전 출력 값 $\boldsymbol{y[n_0-1]}$와 현재 입력 신호 $\boldsymbol{x[n_0]}$만 알고 있다면 다음 식을 통해 계산 가능함

$$\boxed{y[n_0]=\frac{n_0}{n_0+1}y[n_0-1]+\frac{1}{n_0+1}x[n_0]}$$

재귀 시스템과 비재귀 시스템

1. 재귀(Recursive) 시스템

2) 초기 조건(Initial Condition)

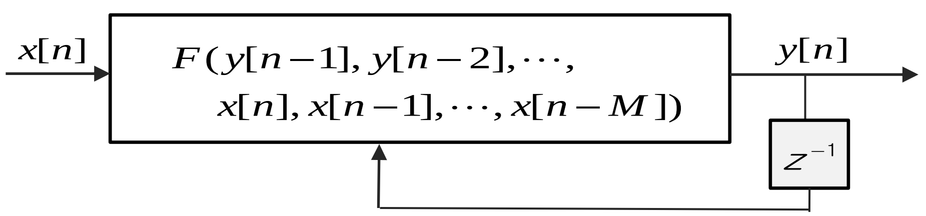
$$y[n_0] = \frac{n_0}{n_0+1} y[n_0-1] + \frac{1}{n_0+1} x[n_0]$$

- 만약 $n = n_0$일 때, 입력 신호 $x[n]$에 대해 이산 시스템의 출력 값 $y[n_0]$를 계산할 경우 이전 출력 값 $y[n_0-1]$의 값과 $n \geq n_0$일 때의 입력 신호 $x[n]$을 알고 있어야 함

시스템의 초기 조건

- 과거 출력 값과 현재와 과거의 입력 값으로 이루어진 출력 $y[n]$의 복잡한 재귀 시스템의 실제 구현을 위해서는 유한개의 메모리가 필요함

[구현 가능한 재귀 시스템의 기본 구조]



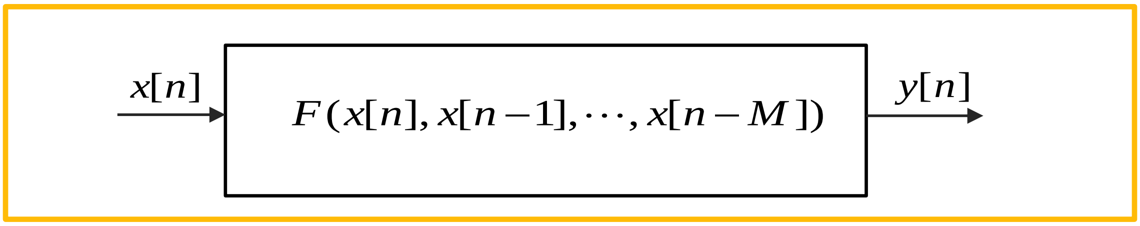
※ $F[\cdot]$은 괄호 안의 성분에 대한 임의의 함수

재귀 시스템과 비재귀 시스템

2. 비재귀 (Non-recursive) 시스템

1) 정의

- 출력 값 $\boldsymbol{y[n]}$이 현재와 과거의 입력 값에만 영향을 받는 시스템



- 선형 시불변 FIR 이산 시스템이 인과적일 경우 비재귀 시스템이라고 할 수 있음

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] \\ &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots h[M]x[n-M] \\ &= F(x[n], x[n-1], \cdots, x[n-M]) \end{aligned}$$

- IIR 이산 시스템은 재귀 시스템

재귀 시스템과 비재귀 시스템

2. 비재귀 (Non-recursive) 시스템

예제 28-02

다음 이산 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$인 시스템의 입출력 표현식을 구하고, 재귀 시스템인지 비재귀 시스템인지, 시스템이 FIR 시스템인지 IIR 시스템인지 판별해 보자.

[예제풀이]

$$h[n] = (0.5)^n u[n]$$

- 이 시스템은 임펄스 응답의 길이가 무한하므로 기본적으로 IIR 시스템임
  이 때 입출력 관계를 컨볼루션 합으로 나타내면 다음과 같음

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k x[n-k]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k x[n-k] \\ &= x[n] + 0.5x[n-1] + (0.5)^2 x[n-2] + \cdots + (0.5)^k x[n-k] + \cdots \end{aligned} \quad \text{(식 1)}$$

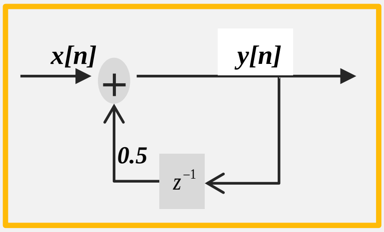
$$\begin{aligned} y[n-1] &= \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-1-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k x[n-1-k] \\ &= x[n-1] + 0.5x[n-2] + \cdots + (0.5)^{k-1} x[n-k] + \cdots \end{aligned} \quad \text{(식 2)}$$

(식 1) - (0.5)x(식 2)하면 다음의 결과값 도출

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] \qquad y[n] = 0.5y[n-1] + x[n] \quad \text{(식 3)}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k x[n-k] \quad \text{(식 1)}$$

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n] \quad \text{(식 3)}$$



결론적으로 (식1)의 경우 무한개의 시간 지연 소자와 곱셈기, 그리고 덧셈기가 필요하므로 물리적으로 구현이 불가능하지만, (식3)과 같은 차분 방정식 구현은 시간 지연 소자, 곱셈기, 덧셈기가 각각 하나씩만 있으면 되는 재귀 시스템임

핵심정리

유한 임펄스 응답 시스템과 무한 임펄스 응답 시스템

- 유한 임펄스 응답(FIR) 시스템: 임펄스 응답을 가진 선형 시불변 시스템
  임펄스 응답이 어느 유한한 구간 외에는 응답이 0의 값을 갖는 시스템을 의미

FIR 시스템 출력식	$y[n]=\sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$

- 무한 임펄스 응답(IIR) 시스템: 이산시스템의 임펄스 응답이 무한 구간에서 존재하는 시스템을 의미

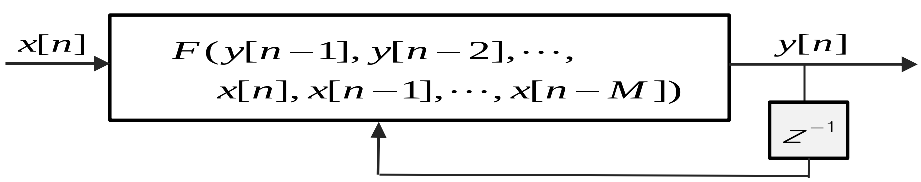
IIR 시스템 출력식	$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$

- 무한 임펄스 응답 시스템은 컨볼루션 연산으로 출력 신호를 구할 수 없고,
  차분 방정식으로 모델링되어 구현됨

재귀 시스템과 비재귀 시스템

- 재귀(Recursive) 시스템: 입력 신호의 현재와 과거 값 뿐만 아니라
  이미 발생된 출력의 과거값을 필요로 하는 시스템
- 일반적으로 과거 출력 값과 현재와 과거의 입력 값으로 이루어진 출력 $y[n]$의
  복잡한 재귀 시스템이 현실적으로 구현되기 위해서는 유한개의 메모리가 필요함
- 구현 가능한 재귀 시스템(Recursive System)
  $y[n]=F(y[n-1], y[n-2], \cdots, x[n], x[n-1], \cdots, x[n-M])$

[구현 가능한 재귀 시스템의 기본 구조]



※ $F[\cdot]$은 괄호 안의 성분에 대한 임의의 함수

핵심정리

재귀 시스템과 비재귀 시스템

- 비재귀 시스템(Non-recursive System): 출력 값 y[n]이 현재와 과거의 입력 값에만 영향을 받는 시스템

  $y[n] = F(x[n], x[n-1], \cdots, x[n-M])$

[비재귀 시스템의 기본 구조]

$$x[n] \longrightarrow \boxed{F(x[n], x[n-1], \cdots, x[n-M])} \longrightarrow y[n]$$

디지털신호처리

강 의 노 트

차분 방정식과 FIR 필터

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

- ❖ 차분 방정식의 특징과 해
- ❖ FIR 필터

학습목표

- ❖ 차분 방정식으로 표현되는 선형 시불변 시스템의 특징을 설명할 수 있으며 차분 방정식의 해를 구할 수 있다.
- ❖ FIR 필터의 특징을 이해하고 구현할 수 있다.

차분 방정식의 특징과 해

1. 차분 방정식으로 표현된 선형 시불변 시스템의 특징

1) 정의

- 모든 이산 선형 시불변 시스템(재귀·비재귀 시스템)은 상수 계수를 갖는 차분 방정식으로 표현 가능함

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

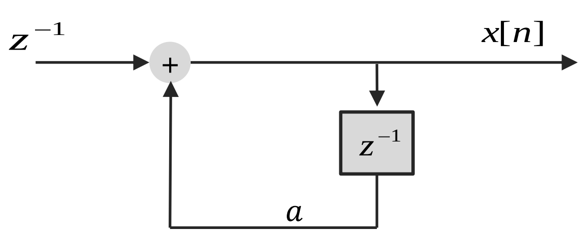
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad a_0 \equiv 1$$

※ a_k, b_k: 상수, 정수 N: 차분 방정식의 차수 결정

- 시간 영역에서 이산 선형 시불변 시스템의 응답은 컨볼루션 연산과 더불어 차분 방정식의 해를 구하는 것

2) 1차 차분 방정식으로 표현된 재귀시스템

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$



- 입력 신호 $x[n]$은 $n \geq 0$ 동안 주어지고, 초기 조건 $y[-1]$은 임의의 초기값으로 가정
- 차분 방정식의 수식을 전개하여 이산 시스템의 출력을 명확하게 구할 수 있음

$n = 0$	$y[0] = ay[-1] + x[0]$
$n = 1$	$y[1] = ay[0] + x[1] = a^2 y[-1] + ax[0] + x[1]$
$n = 2$	$y[n]$

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] = a^{n+1} y[-1] + a^n x[0] + a^{n-1} x[1] + \cdots ax[n-1] + x[n]$$

보다 간단히 정리하면,

$$y[n] = a^{n+1} y[-1] + \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \quad n \geq 0$$

차분 방정식의 특징과 해

2) 1차 차분 방정식으로 표현된 재귀시스템

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \Rightarrow y[n] = \boxed{a^{n+1}y[-1]} + \boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k]}, \quad n \geq 0$$

시스템의 초기조건에 대한 출력응답 / 입력 신호 x[n]에 대한 시스템 응답

- n=0에서 시스템의 초기 조건 $y[-1]$ =0 이라면 (즉, 메모리 값 = 0)
  ⇨ 시스템의 초기 조건에 의한 출력 응답은 0

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \Rightarrow y[n] = a^{n+1}y[-1] + \boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k]}, \quad n \geq 0$$

영상태 응답

영상태 응답 Zero-state Response

영상태에 대한 출력을 의미

※ 시스템의 메모리는 '상태(State)', 시스템은 영상태(Zero-state)

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \quad n \geq 0$$

- 입력 신호에 따른 강제적인 출력을 갖는 응답이므로 시스템의 강제 응답이라고도 함

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \Rightarrow y[n] = \boxed{a^{n+1}y[-1]} + \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \quad n \geq 0$$

영입력 응답 (고유 응답, 자유 응답)

영입력 응답 Zero-input Response

입력 신호 $x[n] = 0$이고,
초기 상태 $y[n] \neq 0$ 인 시스템 응답

$$y_{zi}[n] = a^{n+1}y[-1], \quad n \geq 0$$

- 0이 아닌 초기 조건을 갖는 재귀 시스템은 입력이 가해지지 않아도 출력 값을 생성할 수 있고, 이러한 영입력 응답은 시스템의 메모리에 기인함

차분 방정식의 특징과 해

2. 차분 방정식의 해

1) 1차 차분 방정식과 이산 시스템

- 1차 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템은 가장 간단하게 구현할 수 있는 재귀 시스템

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

※ 정수 N: 차분 방정식의 차수 ,시스템의 차수

- 차분 방정식의 해 = 영입력 응답+ 영상태 응답

2) 차분 방정식의 해를 구하는 방법

① 차분 방정식의 해는 출력 값 $n=0, 1, 2, \cdots, n$ 에 대한 $y[n]$을 순차적으로 구할 수 있음
② 해석적인 방법으로 영입력 응답과 영상태 응답의 합으로 구할 수 있음
③ Z-변환을 이용하여 구할 수 있음

차분 방정식의 특징과 해

2. 차분 방정식의 해

예제 31-01

다음 차분 방정식에 대한 해를 두 가지 방법(순차적인 $y[n]$ 계산 방법, 해석적인 방법)으로 구해 보자.

$$y[n]+0.5y[n-1]=x[n]$$
$$y[-1]=-1$$
$$x[n]=u[n]$$

[예제풀이]

- 차분 방정식의 해1) 순차적인 $\boldsymbol{y[n]}$계산 방법

$y[n]+0.5y[n-1]=x[n],\quad y[-1]=-1,\quad x[n]=u[n]$

$n=0$	$y[0]+0.5y[-1]=x[0]\ y[0]=-0.5y[-1]+x[0]=0.5+1=1.5$
$n=1$	$y[1]=-0.5y[0]+x[1]=-0.5*1.5+1=0.25$
$n=2$	$y[2]=-0.5y[1]+x[2]=-0.5*0.25+1=0.875$
$n=3$	$y[3]=-0.5y[2]+x[3]=-0.5*0.875+1=0.5625$

- 차분 방정식의 해2) 해석적인 방법

$y[n]+0.5y[n-1]=x[n],\quad y[-1]=-1,\quad x[n]=u[n]$

$y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]$

i) 먼저 $\boldsymbol{x[n]=0}$인 경우에 대한 영입력 응답을 구하면 $y[n]=y_{zi}[n]$

$y_{zi}[n]=\lambda^n$ 이라고 가정하면, $\lambda^n+0.5\lambda^{n-1}=0$

$\lambda^n+0.5\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(\lambda+0.5)=0$

$\lambda=-0.5$ 가 되고, 영입력 응답은 $y_{zi}[n]=C\lambda^n=C(-0.5)^n$

이 때, 초기조건에 의해 $y[-1]=-1$이므로, $C=0.5$가 됨

ii) 영상태 응답을 구하면 $y[n]=y_{zs}[n]$

먼저, 입력이 $n\geq 0$에서 입력 신호는 상수, 영상태 응답도 상수라고 가정 $y_{zs}[n]=Ku[n]$

여기서, K는 원래의 차분 방정식을 만족하도록 결정되어야 하는 상수

$Ku[n]+0.5Ku[n-1]=u[n]$

$n\geq 1$에 대해 $K+0.5K=1$이 되고, $K=1/1.5$

$$y_{zs}[n]=Ku[n]=\frac{1}{1.5}u[n]$$

FIR 필터

1. FIR 필터의 특징

1) FIR 시스템(Finite-duration Impulse Response)

- 유한 임펄스 응답: 임펄스 응답이 어느 유한한 구간 외에는 응답이 0의 값을 갖는 시스템

$x[n] \rightarrow$ 이산 시스템 $\rightarrow y[n]$

$h[n]=0 \qquad n<0$과 $n \geq M$

FIR 시스템 출력식	$y[n]=\sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$

2) 특징

$x[n] \rightarrow$ FIR시스템 $h(n)$ $\rightarrow y[n]$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$$

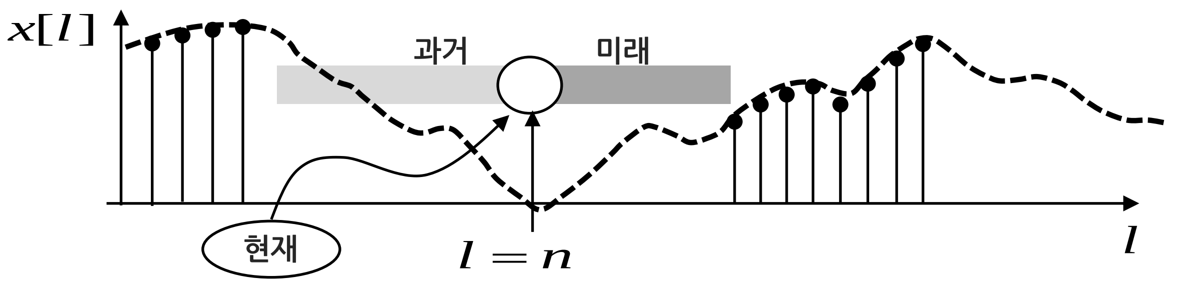
- 일반 차분 방정식에 하나의 특별한 경우가 FIR 필터임
- $M+1$개의 입력 신호 샘플에 가중치가 곱해진 이동 평균기(Weighted Running Average)라고도 함
- $y[n]$을 계산하는 데는 $l=n,n-1,n-2,\cdots,n-M$에 대하여 $x[l]$값이 필요함
- 미래의 입력 값을 이용하지 않음 ⇨ 인과성을 가짐

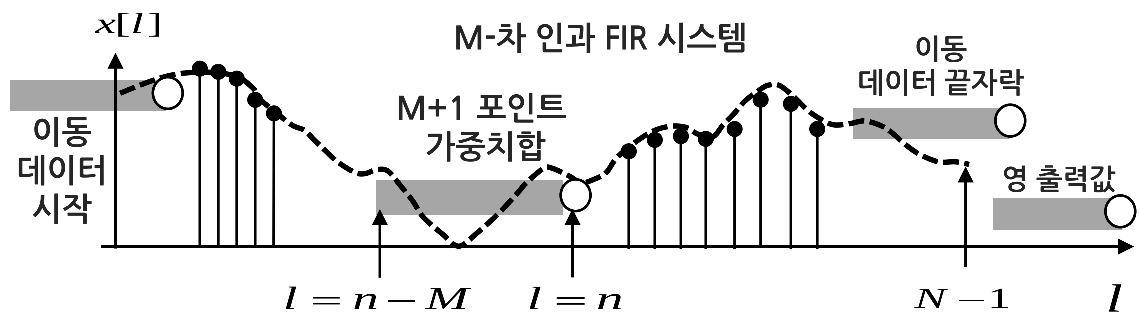
FIR 필터

2) 특징

- 이동 평균 필터(Moving Average/Running Average): FIR 필터의 한 종류임
  두 개 이상의 연속된 입력 값의 평균을 계속적으로 계산하는 것으로 평균 이산 시간 신호를 간단하게 변화시키며 유용함
- 현재 시간(l=n)에서의 이동 평균 필터 계산에서는 슬라이딩 윈도우 내(회색영역)의 값들을 사용함
  ➪ 옅은 회색영역 과거(l<n) / 진한 회색영역은 미래(l>n)를 나타냄

FIR 필터 (과거, 현재 및 미래 값들의 가중치 합)





$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- M+1개의 점으로 이루어진 슬라이딩 윈도우의 여러 위치를 보여주는 M차 인과성 FIR 필터의 작용
- 그림에서 가중치가 주어진 평균값을 구함
- 입력 신호 $x[l]$이 유한(N점)할 때, 결과적으로 얻는 출력도 유한한 길이를 가짐

$$\boxed{y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

- FIR 필터 계수 {b_k}가 주어지면 FIR 필터는 완전히 정의됨
  [예] {b_k}={3,-1,2,1}이면, M=3이고, 필터의 길이가 4되어 4점 차분 방정식이 됨

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]=\sum_{k=0}^{3} b_k x[n-k]$$
$$=3x[n]-x[n-1]+2x[n-2]+x[n-3]$$

- 인자 M은 FIR 필터의 차수(Order)라고 함

FIR 필터

2. 이산 컨볼루션과 FIR 필터

1) 이산 컨볼루션과 FIR 필터 관계

FIR 필터 시스템		이산 컨볼루션
$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$	⟷	$y[n]=\sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$

?

FIR 필터 계수 $\{b_k\}$와 임펄스 응답 $h[n]$의 관계는?

⇨ 임펄스 응답 $h[n]$이 FIR 필터 계수 b_k임

FIR 필터 계수와 임펄스 응답 $h[n]$의 관계

n	$n < 0$	0	1	2	3	$\cdots$	M	$M+1$	$n > M+1$
$x[n]=\delta[n]$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$y[n]=h[n]$	0	b_0	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_M	0	0

$$h[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]=\begin{cases} b_n, & n=0,1,2,\cdots,M \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

FIR 필터 계수 b_k = 임펄스 응답 $h[n]$

FIR 필터

2. 이산 컨볼루션과 FIR 필터

예제 31-02

4-point 이동 평균 필터의 입출력 관계식(차분 방정식)은 다음과 같다.
이러한 4-point 이동 평균 필터의 임펄스 응답 $\boldsymbol{h[n]}$을 구해보자.

$$y[n]=\frac{1}{4}(x[n]+x[n-1]+x[n-2]+x[n-3])$$

[예제풀이]

- 임펄스 응답은 입력 신호가 임펄스일 때의 출력 신호이므로,

$x[n]=\delta[n]$ 일 때

$$y[n]=\tfrac{1}{4}(\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3])$$

$$h[n]=\tfrac{1}{4}(\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3])$$

$$h[n]=\{\cdots,0,0,\underset{\uparrow}{\frac{1}{4}},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0,0,0,\cdots\}$$

핵심정리

차분 방정식의 특징과 해

- 모든 이산 선형 불변 시스템(재귀/비재귀 시스템)은 상수 계수를 갖는 차분 방정식으로 표현됨

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

여기서, a_k 와 b_k는 상수, 정수 N은 차분 방정식의 차수를 결정

- 시간 영역에서 이산 선형 시불변 시스템의 응답은 컨볼루션 연산과 더불어 차분 방정식의 해를 구하는 것임

- 일반적인 차분 방정식의 해(전체 이산 시스템의 응답)는 다음과 같이 영입력 응답과 영상태 응답의 합과 같음

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

- 차분 방정식의 해는 다음과 같이 3가지 방법으로 그 해를 구할 수 있음

방법 1) 출력 값 n=0, 1, 2, ⋯, n 에 대한 y[n]을 순차적으로 구할 수 있음

방법 2) 해석적인 방법으로 영입력 응답(Zero-input Response) 과 영상태 응답(Zero-state Response)의 합으로 구할 수 있음

방법 3) Z-변환을 이용한 차분 방정식의 해로 구할 수 있음

핵심정리

FIR 필터

- FIR(Finite-duration Impulse Response: 유한 임펄스 응답) 시스템
  임펄스 응답이 어느 유한한 구간 외에는 응답이 0의 값을 갖는 시스템을 의미
- FIR 이산 시스템의 출력식

$x[n]$ → 이산 시스템 → $y[n]$

$h[n]=0 \qquad n<0$과 $n \geq M$

FIR 시스템 출력식	$y[n]=\sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$

- FIR 필터: M+1개의 입력 신호 샘플에 가중치가 곱해진 이동 평균기 (Weighted Running Average)라고도 함
- y[n]을 계산하는 데는 $l=n, n-1, n-2, \cdots, n-M$에 대하여 $x[l]$값이 필요함
- FIR 필터 시스템은 미래의 입력 값을 이용하지 않기 때문에 인과성을 가짐

디지털신호처리

강 의 노 트

차분 방정식의 해와 FIR 필터 실습

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

- ❖ 차분방정식의 해 실습
- ❖ FIR 필터 실습

학습목표

- ❖ 차분방정식의 해를 Matlab 프로그램을 활용하여 문제를 해결 할 수 있다.
- ❖ FIR 필터를 Matlab 프로그램을 활용하여 구현할 수 있다.

차분 방정식의 해 실습

1. 차분 방정식의 영입력 응답

실습과제 30-01

다음과 같이 차분 방정식으로 표현되는 선형 시불변 이산 시스템에 대하여 영입력 응답(Zero-input Response)를 Matlab 프로그램을 사용하여 구해 보자.

$$y[n]-1.6y[n-1]+0.64y[n-2] = 0.04x[n-2]$$

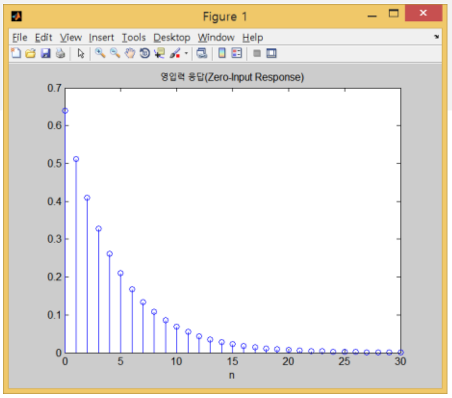
(여기서, 초기 조건 $y[-2]=1, y[-1]=0.8$)

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
% Ex1_1.m 차분방정식의 영입력응답 구하기

a=[1.6 -0.64];   % 차분방정식의 a 계수 값
b=[0 0 0.04];     % 차분방정식의 b 계수 값
n=0:30;            % 이산시간 벡터, n은 0 ~ 30, 총 31개
y0=[1 0.8];        % 출력 y의 초기조건, y[-2]=1, y[-1]=0.8
yy=[y0 zeros(1, length(n))];      % 출력 y의 데이터 초기화, y[-2], y[-1] ~ y[30]; 총 33개 데이터
x =[0 0 zeros(1, length(n))];      % 영입력 응답으로 입력값 모두 0 설정, x[-2], x[-1], ~ x[30]까지 : 총 33개 데이터
N=length(a); M = length(b)-1;     % 차분방정식의 계수 차수

for k=0:length(n)     % 차분방정식의 반복대입법에 의한 출력값 계산하기
    yy(k+3)=a(1)*yy(k+2)+a(2)*yy(k+1)+b(3)*x(k+1);       % y[n] 계산 식: y[n] = a1*y[n-1]+a2*y[n-2]+b2*x[n-2]
end
y_zi=yy(N+1:N+length(n));    % y[n] 재배열(초기값 y0 제외한 출력 y[n])
stem(n,y_zi);                       % 영입력 응답(Zero-Input Response)
title('영입력 응답(Zero-Input Response)');
xlabel('n');
```

$$y[n]=1.6y[n-1]-0.64y[n-2]+0.04x[n-2]$$



차분 방정식의 해 실습

2. 차분 방정식의 영상태 응답

실습과제 30-02

다음과 같이 차분 방정식으로 표현되는 선형 시불변 이산 시스템에 대한 영상태 응답 (Zero-state Response)를 Matlab 프로그램을 사용하여 구해 보자. (입력 신호 x[n]은 u[n]으로 단위 스텝 신호)

$$y[n]-1.6y[n-1]+0.64y[n-2] = 0.04x[n-2]$$

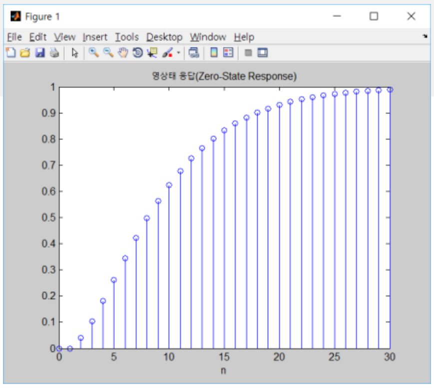
(여기서, 초기 조건 $y[-2]=0, y[-1]=0$ 임)

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
% Ex1_2.m 차분방정식의 영상태응답 구하기
a=[1.6 -0.64];       % 차분방정식의 a 계수 값
b=[0 0 0.04];        % 차분방정식의 b 계수 값
n=0:30;              % 이산시간 벡터, n은 0 ~ 30, 총 31개
y0=[0 0];            % 출력 y의 초기조건, y[-2]=0, y[-1]=0
yy=[y0 zeros(1, length(n))];       % 출력 y의 데이터 초기화, y[-2], y[-1] ~ y[30]; 총 33개 데이터
x =[0 0 ones(1, length(n))];       % 영상태 응답으로 입력값 1 설정, x[-2], x[-1], ~ x[30]까지 : 총 33개 데이터
N=length(a); M = length(b)-1;     % 차분방정식의 계수 차수

for k=0:length(n)
    yy(k+3)=a(1)*yy(k+2)+a(2)*yy(k+1)+b(3)*x(k+1); % y[n] 계산 식
end

y_zs = yy(N+1:N+length(n)); % y[n] 재배열(초기값 y0 제외한 출력 y[n])

stem(n,y_zs);               % 영상태 응답(Zero-Sate Response)
title('영상태 응답(Zero-State Response)');
xlabel('n');
```

$$y[n] = 1.6y[n-1] - 0.64y[n-2] + 0.04x[n-2]$$



차분 방정식의 해 실습

3. 차분 방정식의 완전해

실습과제 30-03

다음과 같이 차분 방정식으로 표현되는 선형 시불변 이산 시스템에 대한 완전해를 Matlab 프로그램을 사용하여 구해 보자. (입력 신호 x[n]은 u[n]으로 단위 스텝 신호)

$$y[n]-1.6y[n-1]+0.64y[n-2] = 0.04x[n-2]$$

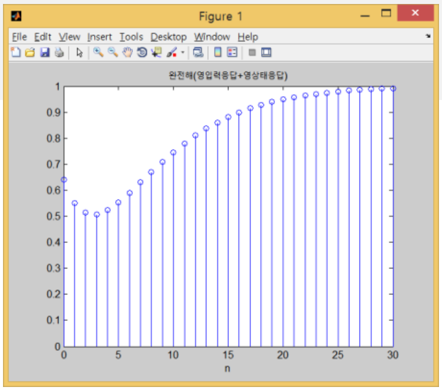
(여기서, 초기 조건 $y[-2]=1, y[-1]=0.8$임)

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
% Ex1_3.m 차분방정식의 완전해 구하기
a=[1.6 -0.64];         % 차분방정식의 a 계수 값
b=[0 0 0.04];          % 차분방정식의 b 계수 값

n=0:30;                % 이산시간 벡터, n은 0 ~ 30, 총 31개
y0=[1 0.8];            % 출력 y의 초기조건, y[-2]=1, y[-1]=0.8
yy=[y0 zeros(1, length(n))];% 출력 y의 데이터 초기화, y[-2], y[-1] ~ y[30]; 총 33개 데이터
x =[0 0 ones(1, length(n))];% 입력값 1 설정,x[-2], x[-1], ~ x[30]까지 : 총 33개 데이터
N=length(a); M = length(b)-1;       % 차분방정식의 계수 차수

for k=0:length(n)
    yy(k+3)=a(1)*yy(k+2)+a(2)*yy(k+1)+b(3)*x(k+1);    % y[n] 계산 식: y[n] = a1*y[n-
1]+a2*y[n-2]+b2*x[n-2]
end

y=yy(N+1:N+length(n));       % y[n] 재배열(초기값 y0 제외한 출력 y[n])
stem(n,y); % 완전해 = 영입력 응답(Zero-Input Response) + 영상태 응답(Zero-Sate Response)
title('완전해(영입력응답+영상태응답)');
xlabel('n');
```

$$y[n]=1.6y[n-1]-0.64y[n-2]+0.04x[n-2]$$



FIR 필터 실습

1. 3점/7점 이동 평균 필터 구현하기

실습과제 30-02

임의의 송신단에서 신호 $s[n]=(1.02)^n$ 를 송신하였는데 수신 과정에서 잡음이 섞여 수신단에 수신되었다. 수신단에서는 수신기에 FIR 필터를 연결하여 잡음을 제거하고자 한다. 3점/7점 이동 평균 필터를 이용하여 잡음을 제거해 보자.

$$x[n]_{\text{수신신호}} \rightarrow \boxed{\text{FIR 필터 이산 시스템 } h[n]} \rightarrow y[n]$$

송신 신호 및 잡음이 섞인 신호 정보

$$s[n] \rightarrow \boxed{\text{통신선로}} \rightarrow x[n]$$

$\delta[n]$ 잡음

$$\delta[n]=0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{8}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x[n]=s[n]+\delta[n]=(1.02)^n+0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{8}+\frac{\pi}{4}\right)$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

- 3점 이동 평균 필터는 다음과 같이 가장 최근의 3개의 입력 신호 값의 평균을 출력으로 내는 FIR 필터이고, 7점 이동평균필터는7개의 입력 신호 값의 평균을 출력으로 내는 FIR 필터임

$$y_3[n]=\sum_{k=0}^{M-1}h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{1}{3}\right)x[n-k]$$ [3점 이동평균필터]

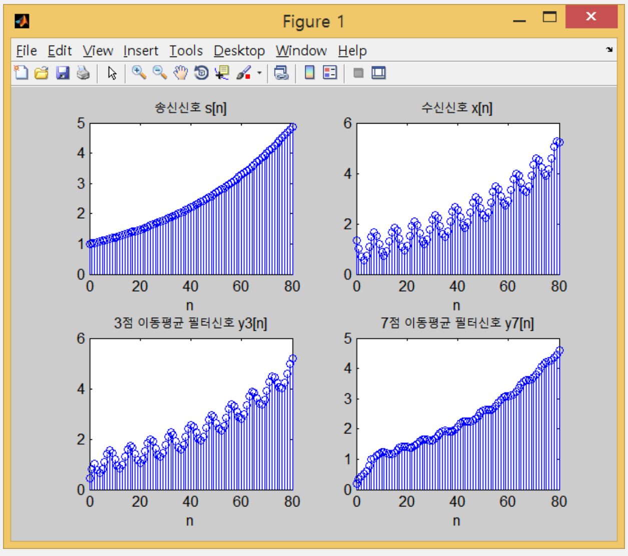
$$y_7[n]=\sum_{k=0}^{M-1}h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{6}\frac{1}{7}x[n-k]$$ [7점 이동평균필터]

FIR 필터 실습

1. 3점/7점 이동 평균 필터 구현하기

[과제해설] (계속)

```
% Ex2_1.m 3점/7점 이동평균필터(Moving Average) 구현하기
n=0:80;                          % 이산시간 시간 벡터 생성, n은 0 ~ 80
s = 1.02.^n;                     % 송신신호 s[n] 생성
delta = 0.5*cos(2*pi*n/8 + pi/4);   % 잡음신호 생성
x = s + delta;                     % 잡음이 포함된 수신신호 생성

h3=ones(3,1)/3;                   % 3점 이동평균 필터 계수
y3 = conv(h3,x);                 % 잡음 필터링된 y[n] = h[n]*x[n]

h7=ones(7,1)/7;                  % 3점 이동평균 필터 계수
y7 = conv(h7,x);                 % 잡음 필터링된 y[n] = h[n]*x[n]

subplot(2,2,1);
stem(n,s);
title('송신신호 s[n]');
xlabel('n');

subplot(2,2,2);
stem(n,x);
title('수신신호 x[n]');
xlabel('n');
subplot(2,2,3);
stem(n,y3(1:length(n)));
title('3점 이동평균 필터신호 y3[n]');
xlabel('n');
subplot(2,2,4);
stem(n,y7(1:length(n)));
title('7점 이동평균 필터신호 y7[n]');
xlabel('n');
```



핵심정리

차분방정식의 해

- 다음과 같은 차분 방정식으로 표현되는 이산시스템에서

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- 여기서, a_k 와 b_k는 상수, 정수 N은 차분 방정식의 차수를 결정
- 시간 영역에서 이산 선형 시불변 시스템의 응답은 컨볼루션 연산과 더불어 차분 방정식의 해를 구하는 것임
- 일반적인 차분 방정식의 해(전체 이산 시스템의 응답)는 영입력 응답과 영상태 응답의 합과 같음

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

FIR 필터

- FIR(Finite-duration Impulse Response: 유한 임펄스 응답) 시스템
  임펄스 응답이 어느 유한한 구간 외에는 응답이 0의 값을 갖는 시스템을 의미
- FIR 이산 시스템의 출력식

$x[n] \rightarrow$ 이산 시스템 $\rightarrow y[n]$

$h[n] = 0 \qquad n < 0$과 $n \geq M$

FIR 시스템 출력식	$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$

핵심정리

FIR 필터

- FIR 필터: M+1개의 입력 신호 샘플에 가중치가 곱해진 이동 평균기 (Weighted Running Average)라고도 함
- y[n]을 계산하는 데는 $l = n, n-1, n-2, \cdots, n-M$에 대하여 $x[l]$값이 필요함
- FIR 필터 시스템은 미래의 입력 값을 이용하지 않기 때문에 인과성을 가짐

디지털신호처리

강 의 노 트

이산 시간 퓨리에 급수

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

❖ 이산 정현파 신호

❖ 이산 시간 퓨리에 급수

학습목표

❖ 이산 정현파 신호의 정의와 특징에 대해 설명할 수 있다.

❖ 이산 시간 퓨리에 급수 및 변환의 필요성에 대해 이해하고 이산 시간 퓨리에 분석식과 퓨리에 합성식의 의미를 설명할 수 있다.

이산 정현파 신호

1. 이산 정현파 신호의 정의

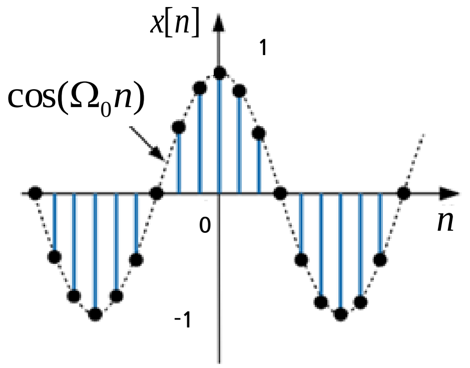
1) 이산 복소지수 신호

$x[n]$	$e^{j\Omega n} = \cos(\Omega n) + j\sin(\Omega n)$

- ω : 연속 신호 각주파수
- Ω : 이산 신호 각주파수

2) 이산 정현파 신호

- 이산 복소지수 신호로부터 실수부나 허수부를 취하여 표현할 수 있음



$$x[n] = Re\{e^{j\Omega n}\} = \cos(\Omega n)$$

$$x[n] = Im\{e^{j\Omega n}\} = \sin(\Omega n)$$

이산 정현파 신호

2. 이산 정현파 신호의 특징

- 연속 신호의 정현파 신호는 항상 주기 신호, 이산 정현파 신호는 반드시 그렇지는 않음
- 복소지수 신호 $x[n]$이 주기 신호(주기가 N)가 되려면 다음의 조건을 반드시 만족시켜야 함

$$x[n] = e^{j\Omega n} \qquad x[n] = x[n+N]$$

$$x[n+N] = e^{j\Omega(n+N)} = e^{j\Omega n} e^{j\Omega N}$$

$x[n] = x[n+N]$ 을 만족 시키기 위해서 $e^{j\Omega N} = 1$

$e^{j\Omega N} = 1$ 이 성립하려면 ΩN 이 2π의 정수배가 되어야 함

- 즉, 이산 정현파 신호가 주기 신호가 되려면 디지털 주파수가 유리수여야 함

각 주파수를 2π로 나눈 값

$$\frac{\Omega}{2\pi} = F = \frac{k}{N}$$

k, N: 정수, F: 디지털 주파수

- 주기 N 은 k=1인 경우에 대한 이산 시간

$$N = \frac{1}{F}$$

이산 정현파 신호

3. 이산 정현파 신호의 주기성

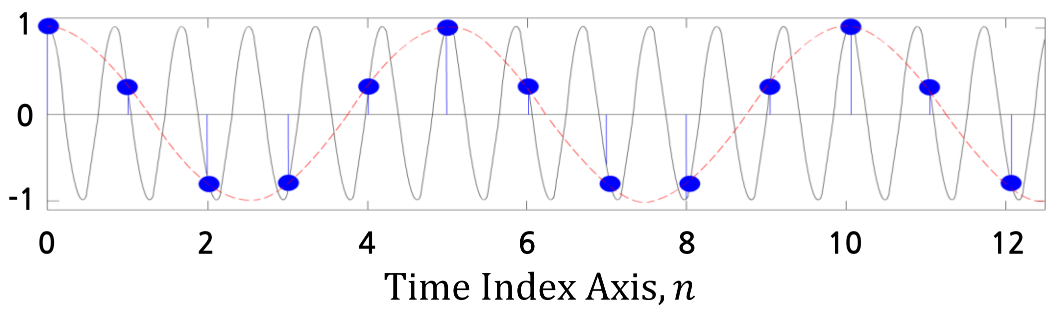
1) 정의

- **2π**의 정수배만큼 떨어진 주파수를 갖는 이산 정현파 신호들은 서로 구분되지 않음
  ⇨ 이산 신호의 모호성과 같은 원리

$$e^{j(\Omega+2\pi k)n}=e^{j\Omega n}e^{j2\pi kn}=e^{j\Omega n}$$

2) [예] 실제 신호

동일한 샘플 값을 가진 두 개의 서로 다른 주파수의 연속 코사인 함수

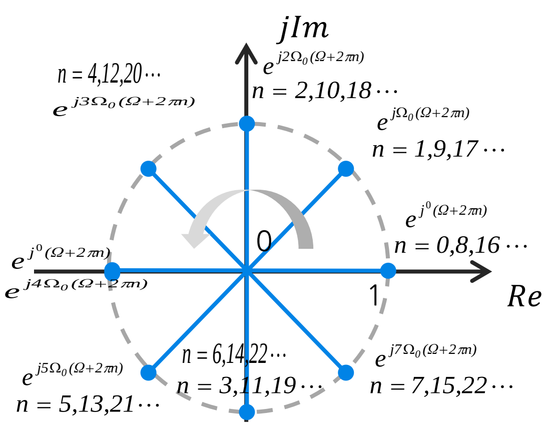


$x_1[n]=\cos(0.4\pi n)$ $x_2[n]=\cos(2.4\pi n)$

n이 정수일 경우, $\cos(0.4\pi n)=\cos(2.4\pi n)$

3) [예] $x[n]=x[n+8]$인 이산 복소지수 신호의 주기성

$$e^{j(\Omega+2\pi k)n}=e^{j\Omega n}e^{j2\pi kn}=e^{j\Omega n}$$



- n이 커짐에 따라 복소평면을 반시계 방향으로 돌면서 한 번에 위상이 $\Omega_0=\frac{2\pi}{8}$ 씩 자리이동을 함
- n이 8번 증가하면 한 바퀴 돌아서 정확히 회전 직전의 원래 위치로 돌아오게 됨
  ⇨ 주기가 $N=8$로 동일한 패턴의 이산 신호가 반복됨

이산 정현파 신호

3. 이산 정현파 신호의 주기성

예제 31-01

이산 정현파 신호가 가질 수 있는 최대 각주파수를 개념적으로 계산해 보자.

[예제풀이]

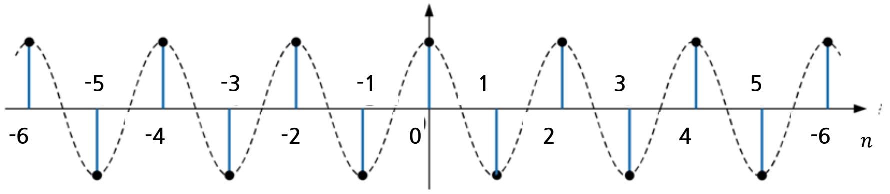
- 주파수는 신호의 주기에 반비례하므로 주파수가 높으려면 주기가 짧아야 함

주기 $N = 1$인 경우

이산 신호 값이 모든 시간 변수 n 에 대해 같게 되며, 주파수는 0으로 최저인 직류신호(DC)가 됨

주기 $N = 2$인 경우

다음 그림과 같이 n 의 증가에 따라 최대값과 최소값이 번갈아가며 나타나는 형태의 신호로, 이산 정현파들 중에 주기가 가장 짧게 되므로 주파수가 제일 높음



$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

모든 이산 정현파는 $-\pi \le \Omega \le \pi$ 에서만 정의해도 최저 주파수부터 최고 주파수까지 모두 나타낼 수 있다.

이산 정현파 신호

3. 이산 정현파 신호의 주기성

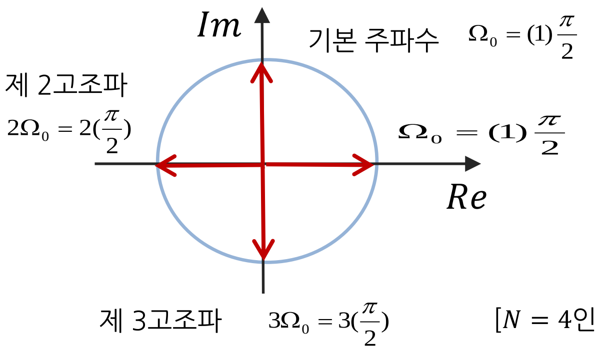
예제 31-02

다음과 같은 이산 주기 신호에 대한 주기(N)을 구해 보자.

$$x[n] = 1 + 2\cos\frac{\pi}{2}n$$

[예제풀이]

- $x[n]$신호는 두 개의 신호가 합성된 것
- 먼저 1은 DC 값 즉 주파수가 0인 신호이고, 코사인신호의 합으로 구성된 신호로 코사인 신호의 주기가 $x[n]$ 신호의 주기가 됨
- 코사인 신호의 주파수 $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}\ rad/sec$ 디지털 주파수 $F_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{4}Hz$
  주기 N=4



[N = 4인 이산 정현파 신호에 대한 복소평면]

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

1. 이산 시간 퓨리에 급수의 개요

1) 이산 퓨리에 변환 및 급수의 필요성

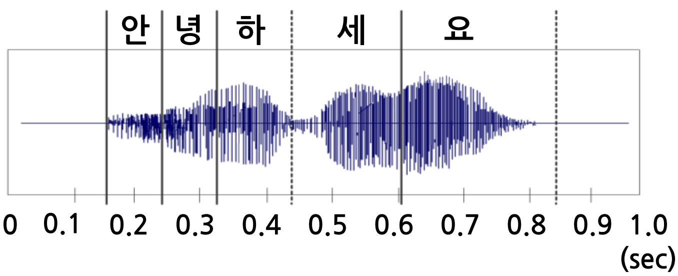
- 디지털신호처리 알고리즘과 시스템의 설계는 주파수 영역에서의 특성을 정의하는 것부터 시작됨
  [예] 저주파통과필터(LPF), 고주파 통과필터(HPF), 대역저지필터(BSF)등은 입력신호의 주파수 범위를 넓히거나 좁힐 것을 결정

- 컴퓨터는 디지털 데이터만 처리, 우리가 다루는 대부분의 신호와 스펙트럼은 연속함수임
  ⇨ 컴퓨터로 계산할 수 있는 이산 신호와 이산 스펙트럼으로 변환을 위해 새로운 종류의 퓨리에 급수 및 변환이 필요

연속 신호 $x(t)$ 퓨리에 변환	$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$

?

다음과 같은 사람의 음성신호
즉, 연속 신호 $x(t)$에 대한 퓨리에 변환은?
음성 신호 $x(t)$는 수학적 표현은?



⇨ 음성 신호 $x(t)$를 수학적인 수식으로 표현할 수 없고,
연속 신호 $x(t)$에 대한 퓨리에 변환식으로 주파수 스펙트럼을 계산할 수 없음

따라서, 디지털 컴퓨터를 통한 이산 퓨리에 급수 및 변환 필요

연속 신호 —샘플링→ 이산 신호 —?→ 이산 신호 주파수 스펙트럼

연속 시간 영역 | 이산 시간 영역 | 이산 신호의 주파수 영역

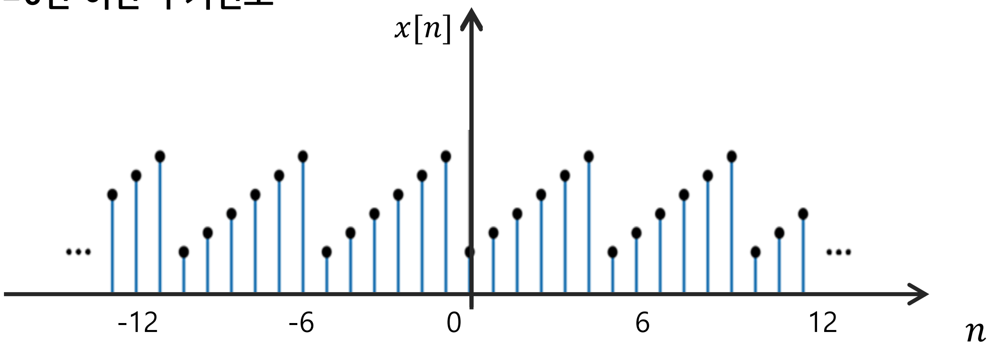
- 시간영역과 마찬가지로 주파수 영역의 연속적인 스펙트럼도 등간격으로 샘플링한다면, 신호와 스펙트럼 모두 이산데이터가 되어 컴퓨터로 쉽게 처리할 수 있음
- 이산 시간 퓨리에 급수 및 변환은 이산 신호의 주파수 영역 해석을 위한 이론적 토대가 됨

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

1. 이산 시간 퓨리에 급수의 개요

2) 개요

- 이산 주기신호 $x[n]=x[n+N]$
- 주기 N인 신호의 한 주기 구간은 $n=[0\ N-1]$
  [예] N=6인 이산 주기신호



3) 이산 시간 퓨리에 급수

- 주기적인 이산 신호는 이산 퓨리에 급수로 표현가능하며 주기적인 아날로그 신호와 같이 선 스펙트럼을 가짐
- 임의의 주기적인 이산 신호의 선 스펙트럼 계수($X[k]$)은 이 이산 신호에 포함된 다양한 주파수 성분을 나타냄

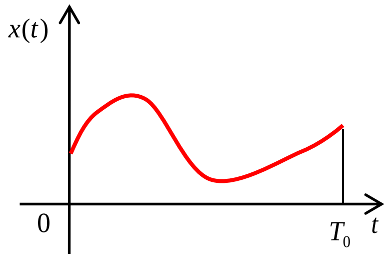
이산 퓨리에 급수의 분석식	$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

※ k는 고조파, $k=1$는 기본주파수, $k=2$는 제2고조파를 의미함
N은 이산 시간 신호의 한 주기내에 포함된 샘플의 수를 의미

이산 주기

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

2. 이산 시간 퓨리에 급수의 유도

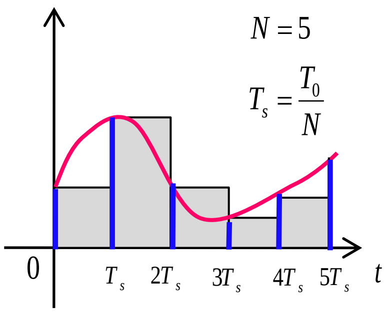


(a) 임의의 연속 신호 $x(t)$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j\omega_0 kt}dt$$

근사화 $t = nT_s$

$x(nT_s) = x[n]$



(b) 일련의 직각 펄스들을 사용한 적분 근사화

$$a_k \approx \frac{1}{T_0}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-jk\omega_0 nT_s}\cdot T_s$$

$$T_s = \frac{T_0}{N}$$

$$\approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-jk\omega_0 nT_s}$$

$$T_s = \frac{T_0}{N},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}n\frac{T_0}{N}}$$

$$\approx \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = X[k]$$

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- 퓨리에 계수 $X[k]$, k=0,1, ..., $N-1$은 주파수 영역에서의 $x[n]$에 대한 표현임
- 연속 신호 퓨리에 급수와 같이 주파수 성분과 결합된 진폭과 위상정보를 나타냄

$$s_k[n] = e^{j2\pi kn/N} = e^{j\Omega_k n} \quad ※\Omega_k = 2\pi k/N$$

- 복소지수 함수 $S_k\ [n]$은 주기 N을 갖는 주기신호로 $S_k\ [n]=S_k\ [n+N]$임
- 마찬가지로, 이산 퓨리에 계수 $X[k]$ 또한 다음과 같이 주기성을 가짐

$$X[k+N] = X[k]$$

$$X[k+N] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} = X[k])$$

$$(\because e^{-j2\pi kNn/N} = e^{-j2\pi kn} = 1) \quad k, n\text{: 정수}$$

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

2. 이산 시간 퓨리에 급수의 유도

$$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X[k+N]=X[k]$$

- 이산 퓨리에 계수 $X[k]$는 기본 주기 N을 갖는 주기수열이고, 신호 주기 N을 가진 주기 신호 $x[n]$의 스펙트럼은 주기 N을 가진 주기 수열임
- N개의 연속하는 신호 샘플과 그 신호에 대한 N 개의 주파수 스펙트럼은 시간 영역과 주파수 영역에서 신호에 대한 완벽한 묘사를 제공함
- 만약 $x[n]$이 실함수인 경우에는 스펙트럼이 대칭이기 때문에 $N/2$개의 주파수로도 표현이 가능함
- 이산 신호의 주파수 영역에서 관심 구간이 $0 \le k \le N-1$ 일 경우, 주파수 범위는 $0 \le \Omega_k = 2\pi k/N < 2\pi$
- 주파수 범위가 $-\pi \le \Omega_k = 2\pi k/N < \pi$ 인 경우, 관심 구간은 $-N/2 < k \le N/2$
- N은 되도록이면 짝수로 설정하는 것이 계산에 편리함
- 이산 신호의 샘플링 주파수가 F_s일 경우, 범위 $0 \le k \le N-1$ 은 주파수 범위 $0 \le F < F_s$ 에 해당함

3. 이산 퓨리에 급수의 합성식

1) 합성식

이산 퓨리에 급수의 합성식	$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kn/N}$

- 주기 N인 이산 주기 신호 $x[n]$은 N개의 고조파 관계를 갖는 복소지수 함수의 합으로 표현 가능함 $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k=0,1,\cdots,N-1$
- 기본 주기 N을 갖는 이산 시간 신호는 $\Omega = 2\pi/N$ 라디안 또는 $F = 1/N$ 사이클씩 떨어져 있는 주파수 성분들로 구성됨

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

3. 이산 퓨리에 급수의 합성식

예제 31-01

다음 이산 신호에 대한 주기성과 스펙트럼을 구해 보자.

(a) $x[n] = \cos\sqrt{2}\pi n$

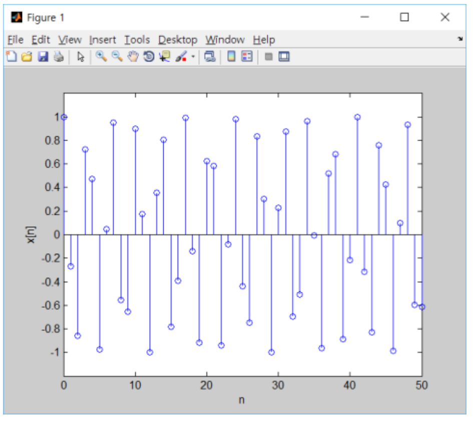
(b) $x[n] = \cos(\pi n/3)$

(c) $x[n]$은 주기 $N = 4$로서 주기적이고, $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1},1,0,0\}$

[예제풀이]

(a) $x[n] = \cos\sqrt{2}\pi n$

- 이산 신호 $x[n]$의 주파수 $\Omega_0 = \sqrt{2}\pi$ radian
  디지털 주파수 $F_0 = 1/\sqrt{2}$ 로 F_0 가 유리수가 아님
- 따라서, 신호는 주기적이지 않으므로, 이 신호는
  이산 퓨리에 급수로 전개될 수 없음
- 하지만 이 이산 신호는 스펙트럼을 가지고 있고,
  그 스펙트럼은 $\Omega = \Omega_0 = \sqrt{2}\pi$ 에서의 단일 주파수
  성분으로 구성되어 있음



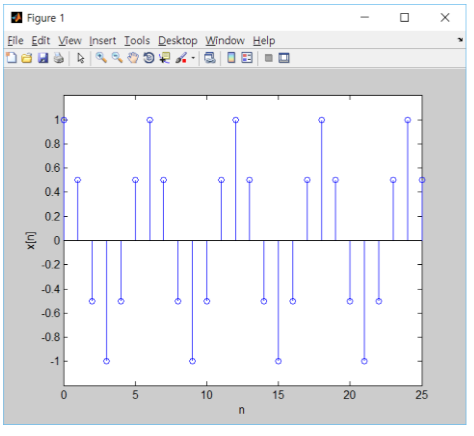
(b) $x[n] = \cos(\pi n/3)$

- 이산 신호 $x[n]$의 주파수 $\Omega_0 = \pi/3$ radian
  디지털 주파수 $F_0 = 1/6$ 로 F_0 가 유리함수임
- 따라서, 신호는 주기적임(기본 주기 N=6)
- 이산 퓨리에 급수 분석식으로부터 퓨리에 급수
  계수 $X[k]$를 얻을 수 있음

$$X[k] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{6}n}, \quad k = 0,1,\cdots,5$$

- 또한, 특별히 $x[n]$ 신호가 이산 정현파 신호이므로
  오일러 공식으로 표현 가능함

$$x[n] = \cos\frac{2\pi n}{6} = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6}$$



이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

3. 이산 퓨리에 급수의 합성식

[예제풀이] (계속)

(b) $x[n] = \cos(\pi n/3)$

$$X[k] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{6}n}, \quad k = 0,1,\cdots,5$$

$$x[n] = \cos\frac{2\pi n}{6} = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6} = \sum_{k=0}^{5} X[k]e^{jk\frac{2\pi}{6}n}$$

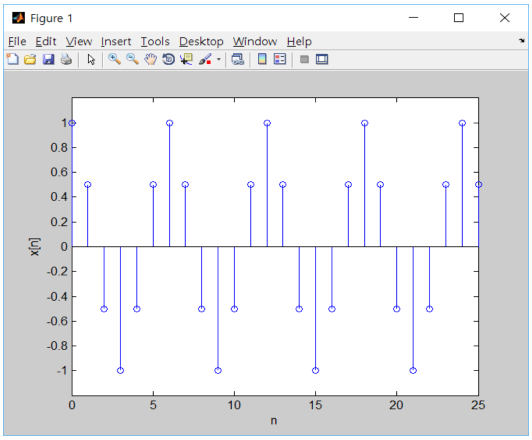
- $x[n]$에 대한 복소지수 함수 표현은 그 자체가 바로 퓨리에 급수로 표현된 것이고,

$$\frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6} = X[-1]e^{j2\pi n(-1)/6} = X[-1]e^{j2\pi n(5-6)/6} = X[5]e^{j2\pi n(5)/6}$$

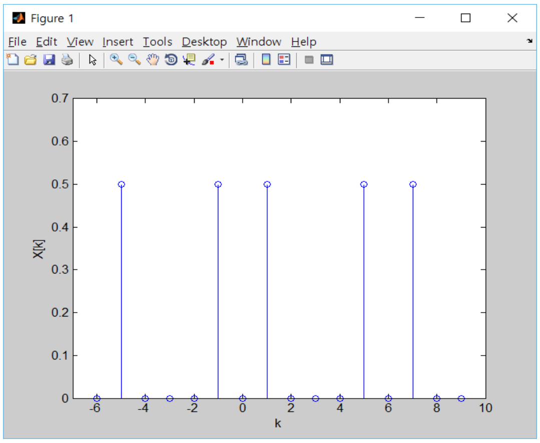
$$(\because X[-1] = X[5], e^{j2\pi n(-6)/6} = 1)$$

- $X[1]$= ½ , $X[5]$= ½ 다른 퓨리에 계수들은 $X[0]$=$X[2]$=$X[3]$=$X[4]$=0임

$x[n] = \cos(\pi n/3)$ $\qquad$ $X[k] = \{0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\}$



시간 영역 $x[n]$



주파수영역 $X[k]$

이산 시간 퓨리에 급수 (DTFS: Discrete Time Fourier Series)

3. 이산 퓨리에 급수의 합성식

[예제풀이] (계속)

(c) $x[n]$은 주기 $N = 4$로서 주기신호이고, $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 0, 0\}$

- 스펙트럼 $X[k]$는 다음과 같이 계산할 수 있음

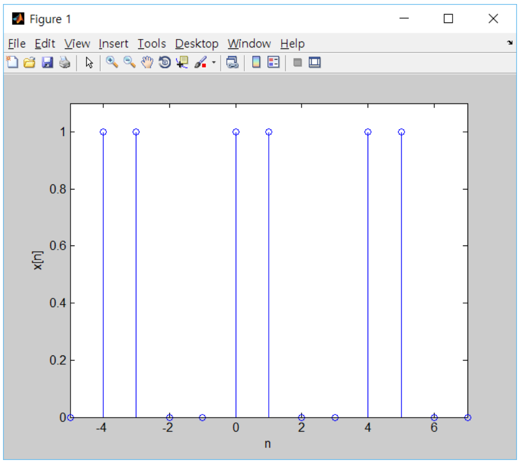
$$X[k] = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{4}n} = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi k/2}), \quad k = 0,1,2,3$$

- k=0,1,2,3에 대하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있음

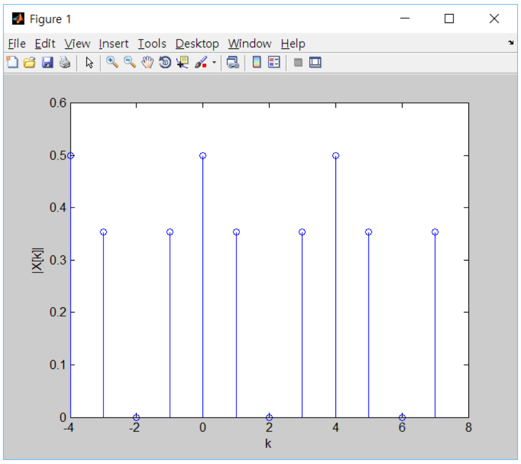
$$X[0] = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi(0)/2}) = \frac{1}{2} \qquad X[1] = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi(1)/2}) = \frac{1}{4}(1 - j)$$

$$X[2] = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi(2)/2}) = \frac{1}{4}(1 - 1) = 0 \qquad X[3] = \frac{1}{4}(1 + e^{-j\pi(3)/2}) = \frac{1}{4}(1 + j)$$

- 주파수 스펙트럼에 대한 진폭 스펙트럼은 다음과 같음



시간영역 이산 주기신호 $x[n]$



주파수영역 퓨리에 계수 $X[k]$

핵심정리

이산 정현파 신호

- 이산 복소지수 신호 x[n]은 다음과 같음

$$x[n] = e^{j\Omega n} = \cos(\Omega n) + j\sin(\Omega n)$$

- 이산 복소지수 신호 또는 이산 정현파 신호 x[n]이 주기가 N인 주기 신호가 되려면 다음의 조건을 반드시 만족시켜야 함

$$\frac{\Omega}{2\pi} = F = \frac{k}{N}, \quad k, N \text{은 정수} \quad F: \text{디지털주파수}$$

- 모든 이산 정현파의 주파수 범위 $-\pi \le \Omega \le \pi(-0.5 \le F \le 0.5)$

이산 시간 퓨리에 급수

- 대부분의 실제 연속 신호(예, 음성 신호)를 수학적인 수식으로 표현할 수 없고, 연속 신호에 대한 퓨리에 변환 수식을 통해 주파수 스펙트럼을 계산할 수 없기 때문에 디지털 컴퓨터를 통한 이산 퓨리에 급수/변환이 필요함
- 임의의 이산 주기 신호 $x[n]=x[n+N]$에 대한 이산 퓨리에 급수의 분석식

이산 퓨리에 급수의 분석식	$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

- 이산 퓨리에 계수 $X[k]$는 주기성을 가짐 $X[k+N] = X[k]$
- 이산 퓨리에 급수의 스펙트럼 계수 X[k]로 부터 이산 신호 x[n]은 다음과 같은 합성식에 의하여 구할 수 있음

이산 퓨리에 급수의 합성식	$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}$

- 기본 주기 N을 갖는 이산 시간 신호는 $\Omega = 2\pi / N$ 라디안 또는 $F = 1/N$ 사이클씩 떨어져 있는 주파수 성분들로 구성됨

디지털신호처리

강 의 노 트

비주기 이산 신호 퓨리에 변환

한국기술교육대학교
온라인평생교육원
OLEI

학습내용

- ❖ 이산 퓨리에 급수의 특징
- ❖ 비주기 이산 신호 퓨리에 변환

학습목표

- ❖ 이산 퓨리에 급수의 특징에 대해 나열하여 설명할 수 있다.
- ❖ 비주기 이산 신호 퓨리에 변환에 대해 설명할 수 있다.

이산 퓨리에 급수의 특징

1. 이산 퓨리에 급수의 분석식과 합성식

이산 퓨리에 급수 (DTFS)의 분석식	$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ ➡	$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$
이산 퓨리에 급수의 합성식	$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}$ ➡	$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{jk\Omega_0 n}$

- 기본파($\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$)와 고조파($\Omega_k = k\frac{2\pi}{N} = k\Omega_0$)로 신호 성분 표현
- 단지 N개의 서로 다른 주파수 성분 존재(연속계의 경우 무한개 존재)
- **2π**: 주기성에 의해 k고조파와 $N+k, 2N+k, \cdots$ 고조파는 동일 신호
- 스펙트럼 이 **2π**구간으로 대역 제한 되어 주기적으로 반복됨
  ⇨ 신호도 주기 N, 스펙트럼도 주기 N인 주기 함수

1) 이산 시간 퓨리에 급수(DTFS)

이산 시간 분석식 (퓨리에 급수)	$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$
이산 시간 합성식 (퓨리에 급수)	$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{jk\Omega_0 n}$

- 분석식과 합성식 모두 동일한 유한개 항의 합
  ⇨ 수치 계산에 매우 적합함

2) 진폭 및 위상 스펙트럼

- 퓨리에 계수 $X[k]$는 복소수 ⇨ 극좌표 형태로 표현

$$X[k] = |X[k]|e^{j\angle X(k)}$$

진폭 스펙트럼	$\lvert X[k]\rvert$
위상 스펙트럼	$\angle X[k]$

- 퓨리에 급수 및 변환의 시간·주파수 쌍대성

시간 영역	⟷	주파수 영역
주기 신호 이산 신호		이산 스펙트럼 주기 스펙트럼

이산 퓨리에 급수의 특징

2. 이산 퓨리에 급수의 주요 성질

1) 선형성(Linearity)

$x_1[n] \Leftrightarrow X_1[k]$ 이고, $x_2[n] \Leftrightarrow X_2[k]$ 이면

$$Ax_1[n] + Bx_2[n] \Leftrightarrow AX_1[k] + BX_2[k]$$

2) 시간 이동(Time-shifting)

$x[n] \Leftrightarrow X[k]$ 이면,

$$x[n-n_0] \Leftrightarrow X[k]e^{-j2\pi kn_0/N} = X[k]e^{-jkn_0\Omega_0}$$

- 신호를 시간 영역에서 n_0샘플만큼 지연 또는 이동했을 경우,
  주파수 영역에서는 위상의 변화만 있고, 진폭에는 변화가 없음을 의미
- [예] $n_0 = N$일 경우
  $x[n-N] \Leftrightarrow X[k]e^{-j2\pi kN/N} = X[k]e^{-j2\pi k} = X[k]$

3) 시간 컨볼루션

$x_1[n] \Leftrightarrow X_1[k]$ 이고, $x_2[n] \Leftrightarrow X_2[k]$ 일 경우

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[n-m] \Leftrightarrow NX_1[k]X_2[k]$$

※ 기호 $\otimes$: 원형 컨볼루션(Circular Convolution)

- 시간영역에서의 컨볼루션은 주파수 영역에서 곱셈이 된다는 성질

4) 주파수 컨볼루션

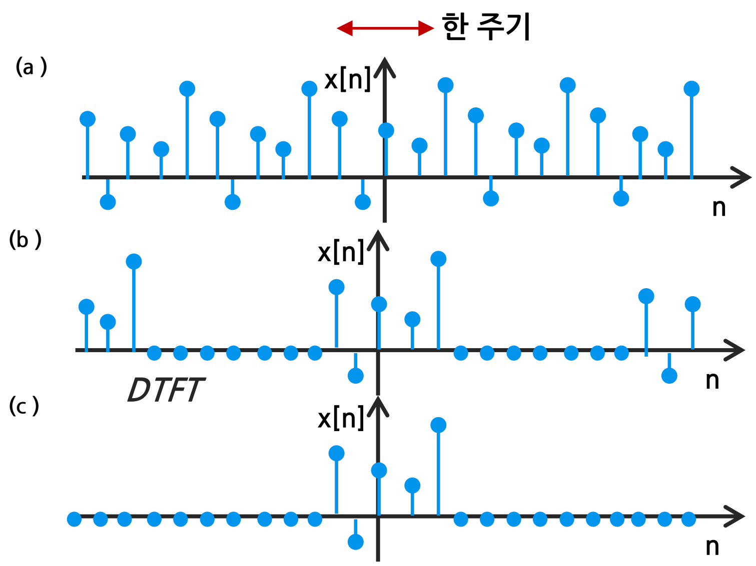
$$x_1[n]x_2[n] \Leftrightarrow X_1[k] \otimes X_2[k] = \sum_{m=0}^{N-1} X_1[m]X_2[k-m]$$

- 시간영역에서의 곱셈은 주파수 영역에서 컨볼루션으로 계산됨
- 시간영역과 주파수 영역에 대한 쌍대성(Duality)이 성립함

비주기 이산 신호 퓨리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

1. 비주기 이산 신호에 대한 퓨리에 변환 유도

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$



- (a) 이산 신호의 주기 N=5
- 이산주기신호 (a)에서 한 주기만 (5개의 샘플)을 선택하여 (b) 부분과 같이 다른 주기를 가지도록 함
- 그 사이를 0으로 채우면, (b)신호는 주기 N=12의 주기신호
- 이 과정을 더 진행하여 0을 더 채워 넣으면서 주기가 무한대인 이산 신호를 만들 수 있음
- (c) 신호는 주기 $N=\infty$인 이산 신호 즉 비주기 이산 신호가 됨

? 이런 방법으로 비주기 신호를 만든다면 스펙트럼 $X[k]$는 어떻게 변화할까?

- 주기 N이 계속해서 증가함에 따라서 (1/N)의 곱셈 때문에 진폭 $X[k]$의 크기는 점점 작아짐 $N \rightarrow \infty$
- 기본 주파수 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$는 주기 N이 증가하면서 점점 작아지면 인접한 $X[k]$는 점점 가까워지며, $N\rightarrow\infty$의 극한에서는 모든 주파수 성분들이 점점 가까워져 궁극적으로 이산 스펙트럼의 분포가 연속적인 스펙트럼으로 변화

$$k\Omega_0 = k\frac{2\pi}{N} \rightarrow \Omega$$

비주기 이산 신호 퓨리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

1. 비주기 이산 신호에 대한 퓨리에 변환 유도

주기 N인 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 급수(DTFS)

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 변환(DTFT)

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

- 주기 N이 무한대로 커지면서 각각의 스펙트럼 계수 $X[k]$가 0으로 가는 것을 방지
- 스펙트럼 계수에 N을 곱하고($N \times X[k]$) n의 범위도 $n=\pm\infty$ 구간으로 확장된 비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 변환 $X(\Omega)$를 얻을 수 있음

비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 변환	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$

- $X(\Omega)$는 주기적임 (2π의 배수만큼 주파수 차가 나는 이산 복소 정현파는 동일)

$$X(\Omega + 2m\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\Omega+2m\pi)n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}e^{-j2m\pi n} = X(\Omega)$$

주기 N인 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 합성식

$$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 역변환

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

- 연속적인 이산 퓨리에 변환 $X(\Omega)$ 로 부터 시간영역 이산 신호 $x[n]$은 이산 퓨리에 역변환을 통하여 생성가능함
- 이산 퓨리에 역변환은 연속 스펙트럼 $X(\Omega)$로 부터 어떻게 시간영역 신호 $x[n]$을 합성하고 재생성할 수 있는지를 나타냄
- 이산 신호의 주파수 스펙트럼은 연속 신호와 달리 반복적인 특성을 가짐
  이는 샘플링에 따른 결과로, 디지털 신호의 모호성을 나타내는 것임

비주기 이산 신호 퓨리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

2. 비주기 이산 신호 퓨리에 변환 수렴 조건

1) 절대 총합 가능

- $x[n]$이 절대 총합 가능(Absolutely Summable)하면 퓨리에 변환은 존재함

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

3. 비주기 이산 신호에 대한 진폭과 위상 스펙트럼

1) 진폭과 위상 스펙트럼

$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\angle X(\Omega)}$

진폭 스펙트럼 $|X(\Omega)|$ → 주기가 2π인 주기함수

$x[n]$의 복소지수 성분들의 **상대적인 크기를** 나타냄

위상 스펙트럼 $\angle X(\Omega)$ → 주기가 2π인 주기함수

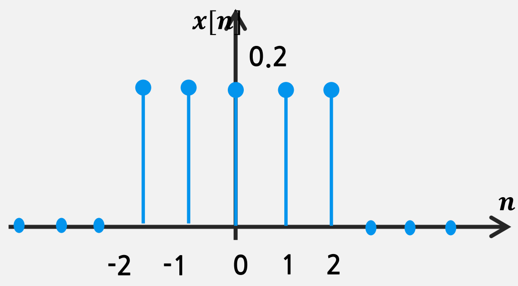
$x[n]$의 복소지수 성분들의 **상대적인 위상을** 나타냄

비주기 이산 신호 퓨리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

3. 비주기 이산 신호에 대한 진폭과 위상 스펙트럼

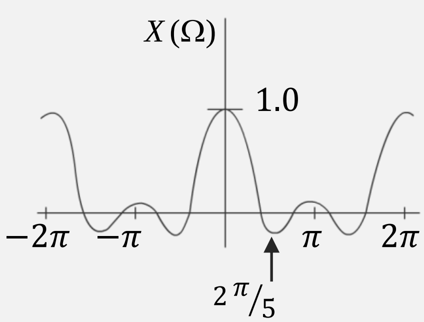
예제 32-01

다음과 같은 비주기 이산 신호에 대한 퓨리에 변환을 구해 보자.



[예제풀이]

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}=0.2e^{-j2\Omega}+0.2e^{-j\Omega}+0.2e^{j0}+0.2e^{j\Omega}+0.2e^{j2\Omega}$$
$$=0.2(1+2\cos\Omega+2\cos 2\Omega)$$



샘플링 정리에 의한 결과로 주파수 스펙트럼은 주기가 2π인 주기적인 연속 스펙트럼임

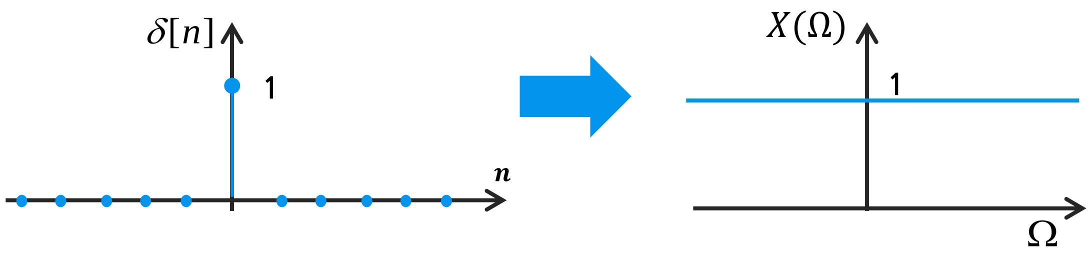
비주기 이산 신호 퓨리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

4. 주요 이산 신호에 대한 이산 퓨리에 변환

1) 임펄스 신호

- 단위 임펄스 신호 $x[n]=\delta[n]$ 의 이산 시간 퓨리에 변환

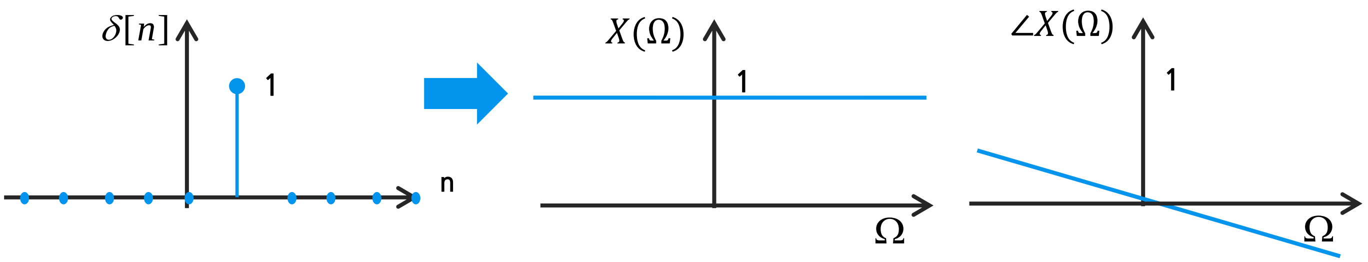
$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]e^{-j\Omega n}=1$$



⇨ 임펄스 신호는 모든 주파수 성분을 포함함

2) 시간 지연된 임펄스 신호

$$x[n]=\delta[n-1] \qquad X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-1]e^{-j\Omega n}=e^{-j\Omega}$$



⇨ 스펙트럼의 크기는 1이지만, 주파수에 비례하는 위상을 가짐

비주기 이산 신호 퓨리에 변환(Discrete Time Fourier Transform)

4. 주요 이산 신호에 대한 이산 퓨리에 변환

3) 정현파 신호

$$e^{j\Omega_0 n} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega=e^{j\Omega_0 n}$$

⇨ 오일러 공식을 이용하여 정현파는 복소 정현파로 바꾸어 나타내면

$$F\{\cos\Omega_0 n\}=F\left\{\frac{e^{j\Omega_0 n}+e^{-j\Omega_0 n}}{2}\right\}=\pi\delta(\Omega-\Omega_0)+\pi\delta(\Omega+\Omega_0)$$

$$\boxed{\cos\Omega_0 n \Leftrightarrow \pi\delta(\Omega-\Omega_0)+\pi\delta(\Omega+\Omega_0)}$$

4) 이산 주기 신호

- 이산 주기 신호의 주파수 스펙트럼은 같은 파형을 가진 비주기 신호의 이산 퓨리에 변환을 샘플링한 이산함수임 ⇨ 스펙트럼 간격은 **2π**임

$$X_N(\Omega)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_N(\Omega)e^{j\Omega n}d\,\Omega=\sum_{k=0}^{N-1}X_k e^{jk\Omega n}=x_N[n]$$

핵심정리

이산 퓨리에 급수의 특징

이산 시간 분석식 (퓨리에 급수)	$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$
이산 시간 합성식 (퓨리에 급수)	$x[n]=\sum_{n=0}^{N-1}X[k]e^{jk\Omega_0 n}$

- 이산 퓨리에 급수의 주요성질
  - 선형성(Linearity)

    $x_1[n] \Leftrightarrow X_1[k]$ 이고 $x_2[n] \Leftrightarrow X_2[k]$ 이면

    $Ax_1[n]+Bx_2[n] \Leftrightarrow AX_1[k]+BX_2[k]$
  - 시간이동(Time-shifting)

    $x[n] \Leftrightarrow X[k]$ 이면, $x[n-n_0] \Leftrightarrow X[k]e^{-j2\pi kn_0/N}=X[k]e^{-jkn_0\Omega_0}$
  - 시간 컨볼루션 $x_1[n]\otimes x_2[n]=\sum_{m=0}^{N-1}x_1[m]x_2[n-m] \Leftrightarrow NX_1[k]X_2[k]$
  - 주파수 컨볼루션 $x_1[n]x_2[n] \Leftrightarrow X_1[k]\otimes X_2[k]=\sum_{m=0}^{N-1}X_1[m]X_2[k-m]$

비주기 이산 신호에 대한 퓨리에변환

주기 N인 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 급수(DTFS)		비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 변환(DTFT)
$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$	→	$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$

주기 N인 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 합성식		비주기 이산 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 역변환
$x[n]=\sum_{n=0}^{N-1}X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	→	$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$

이산 신호 퓨리에 변환의 성질과 실습

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

- ❖ 이산 신호 퓨리에 변환의 성질
- ❖ 이산 시스템의 주파수 영역 해석
- ❖ 이산 신호 퓨리에 급수 및 퓨리에 변환 실습

학습목표

- ❖ 이산 신호 퓨리에 변환의 성질에 대해 설명할 수 있다.
- ❖ 주파수 영역에서 이산 시스템을 해석할 수 있다.
- ❖ 이산 신호 퓨리에 급수와 퓨리에 변환을 Matlab 프로그램을 이용하여 실행할 수 있다.

이산 신호 퓨리에 변환의 성질

1. 주기성, 선형성, 대칭성

1) 주기성

- 이산 신호 퓨리에 변환 $X(\Omega)$ 는 주기 **2π**로 주파수 축 Ω 상에서 주기적으로 나타남
  ⇨ 모든 이산신호의 스펙트럼은 주기 함수임

$$
\begin{aligned}
X(\Omega+2m\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\Omega+2m\pi)n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}e^{-j2m\pi n} \\
&= X(\Omega)
\end{aligned}
$$

2) 선형성

- 두 신호 $x[n]$과 $y[n]$에 대한 DTFT를 각각 $X[\Omega]$, $Y[\Omega]$ 이라고 하면

$$DTFT\{\alpha x[n]+\beta y[n]\} = \alpha X(\Omega)+\beta Y(\Omega)$$

3) 대칭성

- $x[n]$이 실수이면 $x^*[n]=x[n]$이므로,

$$X^*(\Omega) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{-j\Omega n}\right)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{-j\Omega n} = X(-\Omega)$$

- DTFT의 실수부는 우함수 대칭 / 허수부는 기함수 대칭

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} \\ \mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\} \end{cases}$$ $x[n]$: 실수

- 진폭 스펙트럼은 우함수 대칭 / 위상 스펙트럼은 기함수 대칭

$$\begin{cases} |X(\Omega)| = |X(-\Omega)| \\ \angle X(\Omega) = -\angle X(\Omega) \end{cases}$$ $x[n]$: 실수

이산 신호 퓨리에 변환의 성질

2. 시간 이동 및 주파수 이동 성질

1) 시간 이동

- 진폭 스펙트럼은 불변, 위상 스펙트럼만 선형적으로 변화함

$$
\begin{aligned}
DTFT\{x[n-n_0]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\Omega(m+n_0)} \\
&= e^{-j\Omega n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\Omega m} \\
&= e^{-jn_0\Omega}X(\Omega)
\end{aligned}
$$

2) 주파수 이동

- 주파수 영역에서 퓨리에 스펙트럼을 Ω_0만큼 이동시키면, 시간 영역에서 이와 동일한 주파수를 갖는 복소 정현파 $e^{j\Omega_0 n}$을 시간 영역 신호 $x[n]$에 곱하는 것과 같음
⇨ 진폭 변조 성질

$$
\begin{aligned}
DTFT^{-1}\{X(\Omega-\Omega_0)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega')e^{j\Omega' n}e^{j\Omega_0 n}d\Omega' \\
&= e^{j\Omega_0 n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega')e^{j\Omega' n}d\Omega' \\
&= e^{j\Omega_0 n}x[n]
\end{aligned}
$$

- 실제로는 신호에 정현파를 곱하는 진폭 변조 동작으로 활용

$$x[n]\cos\Omega_0 n = \frac{1}{2}x[n](e^{j\Omega_0 n}+e^{-j\Omega_0 n})$$

$$x[n]\cos\Omega_0 n \Leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\Omega-\Omega_0)+X(\Omega+\Omega_0)]$$

이산 신호 퓨리에 변환의 성질

3. 시간 컨볼루션과 주파수 컨볼루션 성질

1) 시간 컨볼루션과 주파수 컨볼루션

시간 컨볼루션

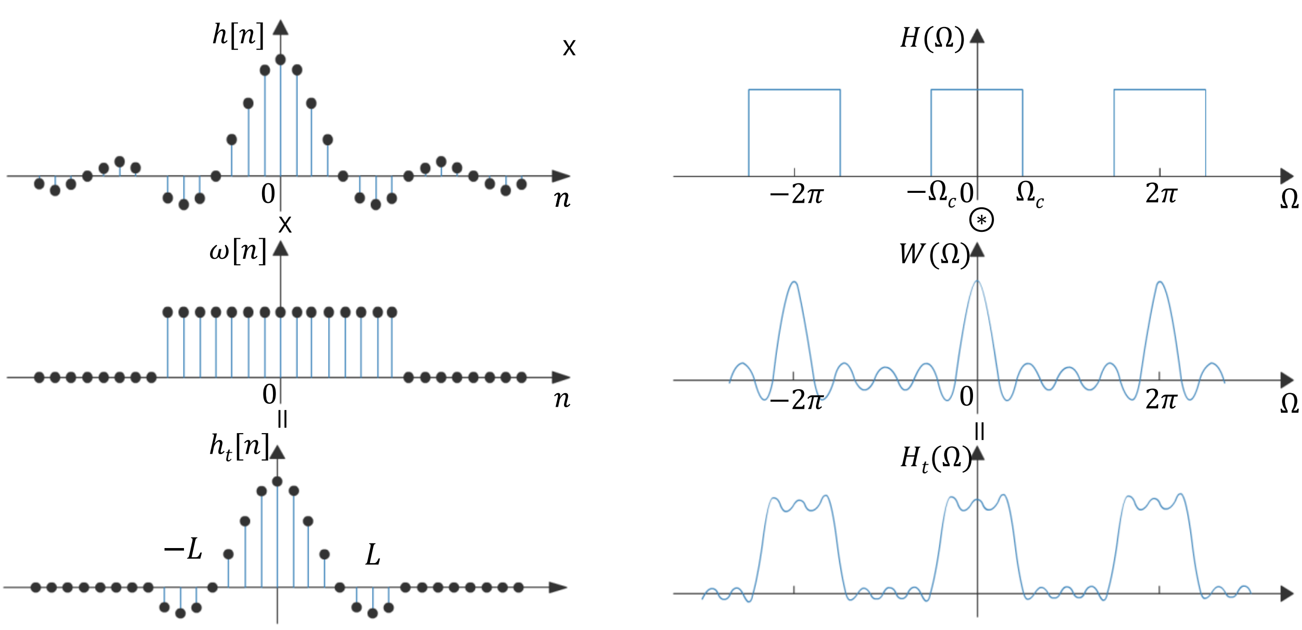
- 시간 영역에서 두 신호의 컨볼루션은 주파수 영역에서 스펙트럼의 곱

$$x[n] * h[n] \longleftrightarrow X(\Omega)H(\Omega)$$

주파수 컨볼루션

$$x[n] \times h[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * H(\Omega)$$

2) 주파수 컨볼루션



이산 시스템의 주파수 영역 해석

1. 이산 시스템의 주파수 영역 해석의 이점

1) 퓨리에 변환의 이점

① 신호와 시스템의 주파수 특성을 직관적이고 명확하게 나타냄
② 시스템의 입출력 관계가 컨볼루션일 경우, 퓨리에 변환에 의해 주파수 영역에서는 곱으로 표현됨
⇨ 쉽게 결과를 얻을 수 있음
③ 시스템의 입출력 관계가 차분 방정식일 경우, 퓨리에 변환의 시간 이동의 성질을 이용
⇨ 해석이 용이함

2. 이산 시스템의 주파수 응답

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \qquad\qquad X(\Omega) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow Y(\Omega)$$

(a) 임펄스 응답 표현 (b) 주파수 응답 표현

1) 임펄스 응답

- 시스템의 입출력 관계: 시간영역에서 컨볼루션 → 주파수영역에서 곱

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \Leftrightarrow Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

2) 주파수 응답 표현

- 임펄스 응답 $h[n]$에 대한 퓨리에 변환

$$H(\Omega) = DTFT\{h[n]\} = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

3) 정의

- 입력의 주파수의 변화에 대한 시스템의 응답 특성
  ⇨ 주파수에 따라 신호 크기를 증폭 또는 감쇠
  ⇨ 주파수에 따라 신호 위상을 증가 또는 감소
- 입력 신호와 출력 신호를 각각 퓨리에 변환한 것의 비

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = |H(\Omega)| e^{j\angle H(\Omega)}$$

이산 시스템의 주파수 영역 해석

4) 주파수 응답과 DTFT를 이용한 LTI 시스템의 출력 계산

- 출력 진폭 스펙트럼 = 입력 진폭 스펙트럼 × 주파수 응답의 진폭 응답

$$|Y(\Omega)| = |X(\Omega)||H(\Omega)|$$

- 출력 위상 스펙트럼 = 입력 위상 스펙트럼 + 주파수 응답의 위상 응답

$$\angle Y(\Omega) = \angle X(\Omega) + \angle H(\Omega)$$

5) 차분 방정식과 주파수 응답

- 주파수 응답은 시스템의 차분 방정식 표현으로부터 직접 구할 수 있음

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \xrightarrow{DTFT} \begin{aligned} &Y(\Omega) + a_1 e^{-j\Omega} Y(\Omega) + \cdots + a_p (e^{-j\Omega})^p Y(\Omega) \\ &= b_0 X(\Omega) + b_1 e^{-j\Omega} X(\Omega) + \cdots + b_q (e^{-j\Omega})^q X(\Omega) \end{aligned}$$

$$\boxed{H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + \cdots + b_q (e^{-j\Omega})^q}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + \cdots + a_p (e^{-j\Omega})^p} = \frac{\sum_{i=0}^{q} b_i (e^{-j\Omega})^i}{\sum_{i=0}^{p} a_i (e^{-j\Omega})^i}}$$

- 차분 방정식의 계수들에 의해 주파수 응답이 결정: 주파수 응답은 시스템이 바뀌지 않으면 달라지지 않으며 입력에는 무관함

이산 신호 퓨리에 급수 및 퓨리에 변환 실습

1. 이산 주기 신호에 대한 스펙트럼 표현

실습과제 33-01

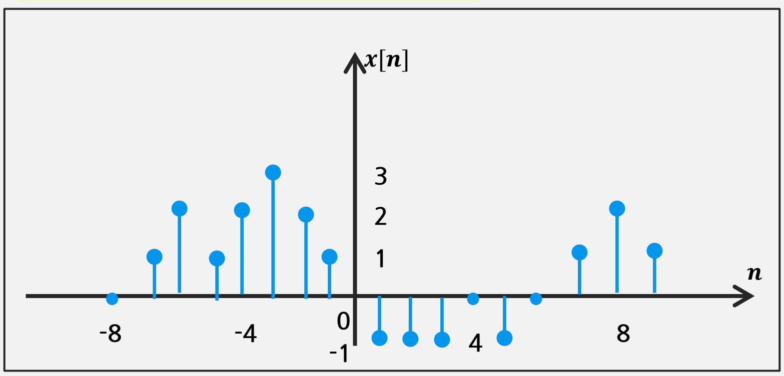
다음 그림과 같은 주기 N=18인 이산 주기신호 x[n]의 이산 시간 퓨리에 급수(DTFS) 표현의 계수(X[k])를 Matlab 프로그램을 통하여 구하고, 그 계수에 대한 스펙트럼을 그려보자.

$$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

$$x[n]=\{0\ 1\ \ 2 1\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 1\}$$

n=0

이산 주기신호 x[n]



제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
%% Ex1_1.m 이산 주기신호 퓨리에 급수를 통한 스펙트럼 구하기
N = 18;
xn = [ 0 1 2 1 2 3 2 1 0 -1 -1 -1 0 -1 0 1 2 1];
n = -N/2+1:N/2;  % 이산 시간 n = -8 부터 ~ 9까지, N = 18
w0 = 2*pi/N;      % 이산 신호에 대한 기본 주파수
Wn = exp(-j*w0*n); % 복소지수 신호
for m=1:N


(계속)
```

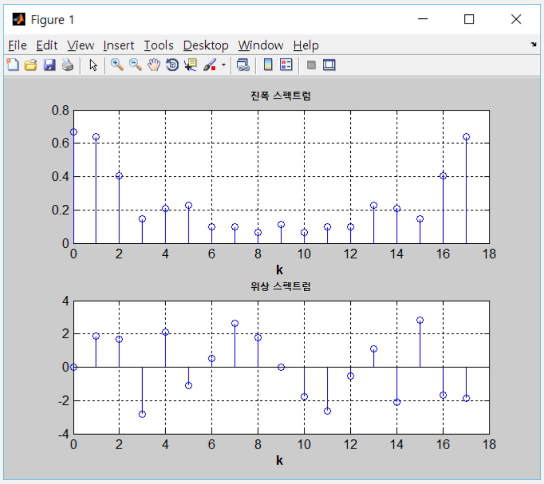
이산 신호 퓨리에 급수 및 퓨리에 변환 실습

1. 이산 주기 신호에 대한 스펙트럼 표현

[과제해설] (계속)

```
  Xk(m)=sum(xn.*Wn.^(m-1))/N; % 퓨리에 계수 Xk 계산
end
k=0:N-1; % 주파수 벡터 생성
subplot(2,1,1);
stem(k,abs(Xk)); % 진폭 스펙트럼 그리기
title('₩bf{진폭 스펙트럼}'); % 제목
xlabel('₩bf{k}'); grid on;
subplot(2,1,2);
stem(k, angle(Xk)); % 위상 스펙트럼 그리기
title('₩bf{위상 스펙트럼}');
xlabel('₩bf{k}'); grid on;
```

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$



[표] 신호 $x[n]$에 대한 이산 퓨리에 급수(DTFS)의 퓨리에 계수

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$X[k]$	0.6667	-0.1832 + 0.6147i	-0.0459 + 0.4032i	-0.1389 - 0.0481i	-0.1078 + 0.1796i	0.1011 - 0.2028i	0.0833 + 0.0481i	-0.0845 + 0.0485i	-0.0130 + 0.0651i	0.1111 + 0.0000i

k	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
$X[k]$	0.6667	-0.1832 - 0.6147i	-0.0459 - 0.4032i	-0.1389 + 0.0481i	-0.1078 - 0.1796i	0.1011 + 0.2028i	0.0833 - 0.0481i	-0.0845 - 0.0485i	-0.0130 - 0.0651i	0.1111 + 0.0000i

- 퓨리에 계수들이 이산 주파수 $k = N/2 = 9$ 를 대칭축으로 하여 공액 대칭 (실수부는 우함수 대칭, 허수부는 기함수 대칭)을 만족함

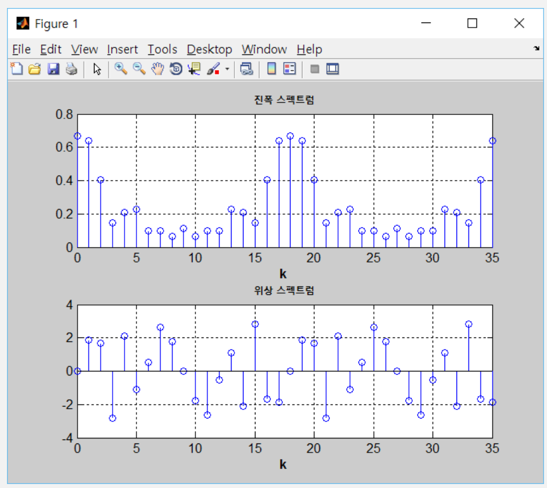
이산 신호 퓨리에 급수 및 퓨리에 변환 실습

1. 이산 주기 신호에 대한 스펙트럼 표현

[과제해설] (계속)

```
%% Ex1_2.m k = 0 ~ 2N-1까지 두 주기 스펙트럼 계산하기
N = 18;
xn = [ 0 1 2 1 2 3 2 1 0 -1 -1 -1 0 -1 0 1 2 1];
n = -N/2+1:N/2;  % 이산 시간 n = -8 부터 ~ 9까지, N = 18
w0 = 2*pi/N;      % 이산 신호에 대한 기본 주파수
Wn = exp(-j*w0*n); % 복소지수 신호
for m=1:2*N           % 주파수 k= 0 ~ 2N-1 까지 계산
   Xk(m)=sum(xn.*Wn.^(m-1))/N;  % 퓨리에 계수 Xk 계산
end
k=0:2*N-1;            % 주파수 k= 0 ~ 2N-1 까지 계산
subplot(2,1,1);
stem(k,abs(Xk)); % 진폭스펙트럼 그리기
title('₩bf{진폭 스펙트럼}'); % 제목
xlabel('₩bf{k}'); grid on;
subplot(2,1,2);
stem(k, angle(Xk)); % 위상 스펙트럼 그리기
title('₩bf{위상 스펙트럼}');
xlabel('₩bf{k}'); grid on;
```

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

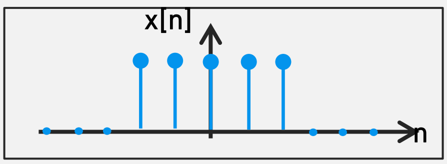


이산 신호 퓨리에 급수 및 퓨리에 변환 실습

2. 비주기 이산 신호에 대한 퓨리에 변환

실습과제 33-02

다음과 같은 비주기 이산 신호에 대한 퓨리에 변환에서 진폭스펙트럼을 Matlab프로그램을 이용하여 그려보자. 그리고 샘플링 정리에 의한 결과로 주파수 스펙트럼은 주기가 2π인 주기적인 스펙트럼이다. 주파수 영역에서 스펙트럼이 주기적인지 확인해보자.



샘플링 정리 결과

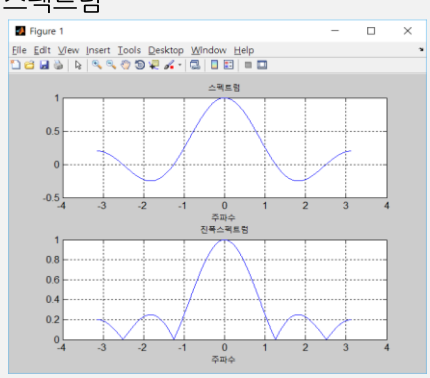
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$
$$= 0.2e^{-j2\Omega} + 0.2e^{-j\Omega} + 0.2e^{j0} + 0.2e^{j\Omega} + 0.2e^{j2\Omega}$$
$$= 0.2(1 + 2\cos\Omega + 2\cos 2\Omega)$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

```
%%   Ex2_1.m 비주기 신호 퓨리에 변환
x = [0.2 0.2 0.2 0.2 0.2];
n = -2:2;
w = -pi:1/200:pi;                  % 주파수 벡터 설정, 주기 -pi ~ pi
Xf = 0.2+0.4*cos(w)+0.4*cos(2*w); % 비주기 신호 이산퓨리에 변환

subplot(2,1,1);
plot(w,Xf);
grid on;

subplot(2,1,2)
plot(w,abs(Xf));      % 비주기 신호 이산 퓨리에 변환 진폭 스펙트럼
grid on;
```

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = 0.2(1 + 2\cos\Omega + 2\cos 2\Omega)$$



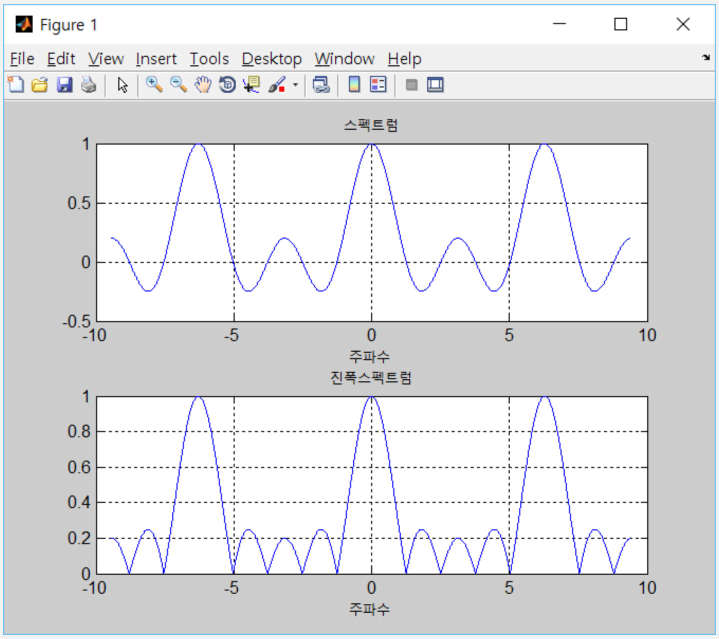
이산 신호 퓨리에 급수 및 퓨리에 변환 실습

2. 비주기 이산 신호에 대한 퓨리에 변환

[과제해설]

```
%% Ex2_2.m 비주기신호 퓨리에 변환
w = -3*pi:1/200:3*pi;      % 주파수 범위 설정: -3pi ~ +3pi
Xf = 0.2+0.4*cos(w)+0.4*cos(2*w);

subplot(2,1,1);
plot(w,Xf);
xlabel('주파수');
title('스펙트럼');
grid on;

subplot(2,1,2)
plot(w,abs(Xf));
xlabel('주파수');
title('진폭스펙트럼');
grid on;
```

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = 0.2(1+2\cos\Omega + 2\cos 2\Omega)$$



이산 신호 퓨리에 급수 및 퓨리에 변환 실습

3. 이동 평균 시스템의 주파수 응답

실습과제 33-03

다음과 같은 두 개의 이동 평균 시스템이 있다. 시스템 1은 연속 이산입력 값을 평균하는 시스템이고, 시스템 2는 연속 이산입력 값의 차를 구하는 시스템이다. 이 때 다음과 같은 예측이 옳은지 주파수 응답을 구하여 확인해 보자.

이산 시스템 1	이산 시스템 2
$y_1[n] = \dfrac{x[n]+x[n-1]}{2}$	$y_2[n] = \dfrac{x[n]-x[n-1]}{2}$
고주파 성분을 줄이고, 저주파 성분은 잘 통과시키는 시스템	저주파 성분을 줄이고, 고주파 성분은 잘 통과시키는 시스템

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

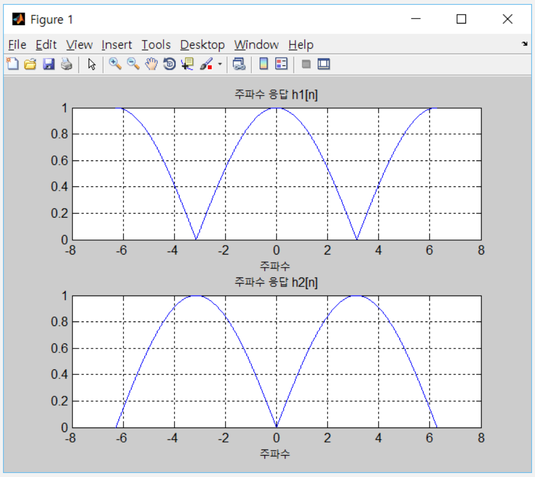
- **먼저 두 시스템에 대한 임펄스 응답을 구하면,** $x[n]=\delta[n]$**일 때**

$$y_1[n]=h_1[n]=\frac{\delta[n]+\delta[n-1]}{2} \qquad y_2[n]=h_2[n]=\frac{\delta[n]-\delta[n-1]}{2}$$

- **두 시스템의 주파수 응답은**

$$H_1(\Omega)=FT\{h_1[n]\}=\frac{1}{2}(1+e^{-j\Omega}) \qquad H_2(\Omega)=FT\{h_2[n]\}=\frac{1}{2}(1-e^{-j\Omega})$$

```
%% Ex3_1.m 이동평균 시스템의 주파수 응답
w = -2*pi:1/200:2*pi;   % 주파수 범위 설정: -2pi ~ +2pi
H1 = (1+exp(-j*w))/2;
H2 = (1-exp(-j*w))/2;

subplot(2,1,1);
plot(w,abs(H1));
xlabel('주파수');
title('주파수 응답 h1[n]');
grid on;
subplot(2,1,2)
plot(w,abs(H2));
xlabel('주파수');
title('주파수 응답 h2[n]');
grid on;
```



핵심정리

이산 퓨리에 변환의 성질

- 이산 신호 퓨리에 변환은 다음과 같은 성질을 가짐

  - 주기성 $X(\Omega) = X(\Omega + 2m\pi)$
  - 선형성 $DTFT\{\alpha x[n] + \beta y[n]\} = \alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega)$
  - 대칭성 $\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} \\ \mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\} \end{cases}$ $\begin{cases} |X(\Omega)| = |X(-\Omega)| \\ \angle X(\Omega) = -\angle X(\Omega) \end{cases}$
  - 시간 이동 $x[n-n_0] \Leftrightarrow e^{-jn_0\Omega} X(\Omega)$
  - 주파수 이동 $x[n]\cos\Omega_0 n \Leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\Omega-\Omega_0) + X(\Omega+\Omega_0)]$
  - 시간 컨볼루션 $x[n] * h[n] \Leftrightarrow X(\Omega)H(\Omega)$
  - 주파수 컨볼루션 $x[n] \times w[n] \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * H(\Omega)$

이산 시스템의 주파수 영역 해석

- 이산 선형시불변 시스템의 주파수 영역 해석

(a) 임펄스 응답 표현 (b) 주파수 응답 표현

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \Leftrightarrow Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

- 이산 시스템의 주파수 응답 $H(\Omega) = DTFT\{h[n]\} = \dfrac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$

디지털신호처리

강 의 노 트

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

❖ 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계

❖ 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

학습목표

❖ 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계에 대해 설명할 수 있다.

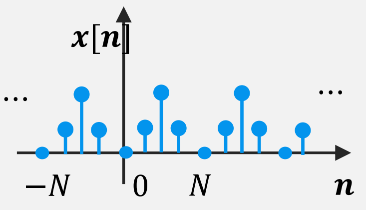
❖ 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)을 정의할 수 있다.

이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계

1. 이산 퓨리에 급수와 비주기 이산 신호 퓨리에 변환 요약

1) 이산 시간 신호

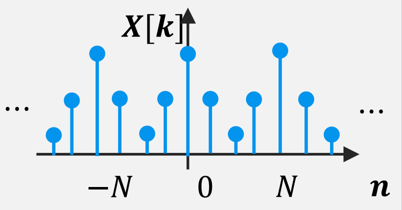
시간 영역



$$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

이산 및 주기적 특징

주파수 영역

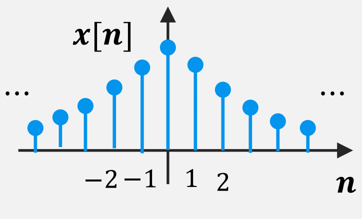


$$x[n]=\sum_{n=0}^{N-1}X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

이산 및 주기적 특징

2) 이산 및 비주기적 특징

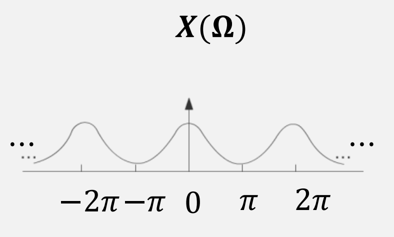
시간 영역



$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$$

이산 및 비주기적 특징

주파수 영역

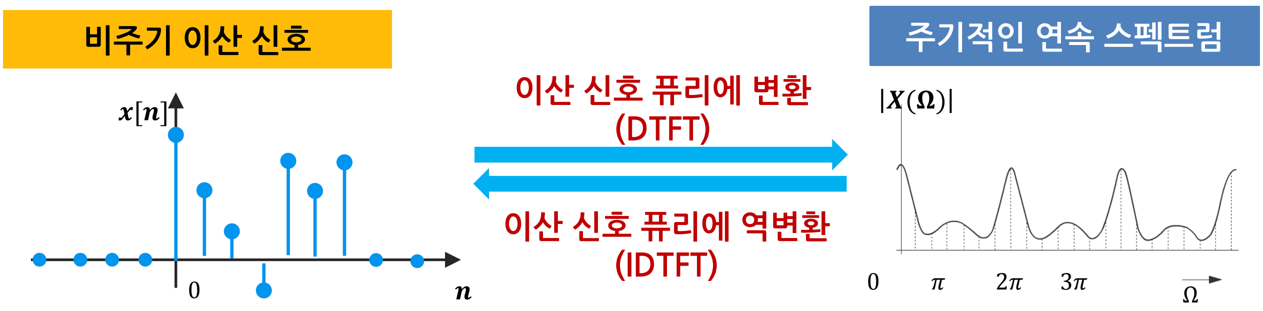


$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

연속 및 주기적 특징

이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계

2. 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계



- DTFT는 신호 $\boldsymbol{x[n]}$을 $-\infty \leq \boldsymbol{n} \leq \infty$ 에 대하여 알고 있다고 가정

  ⇨ 실제 대부분의 데이터는 유한 개이며, 그 수는 작음
- 신호 $\boldsymbol{x[n]}$ 은 이산이지만 스펙트럼 $\boldsymbol{X(\Omega)}$는 주파수 $\boldsymbol{\Omega}$ 에 대한 연속 함수

  → 디지털 컴퓨터를 사용한 수치적 계산 불가

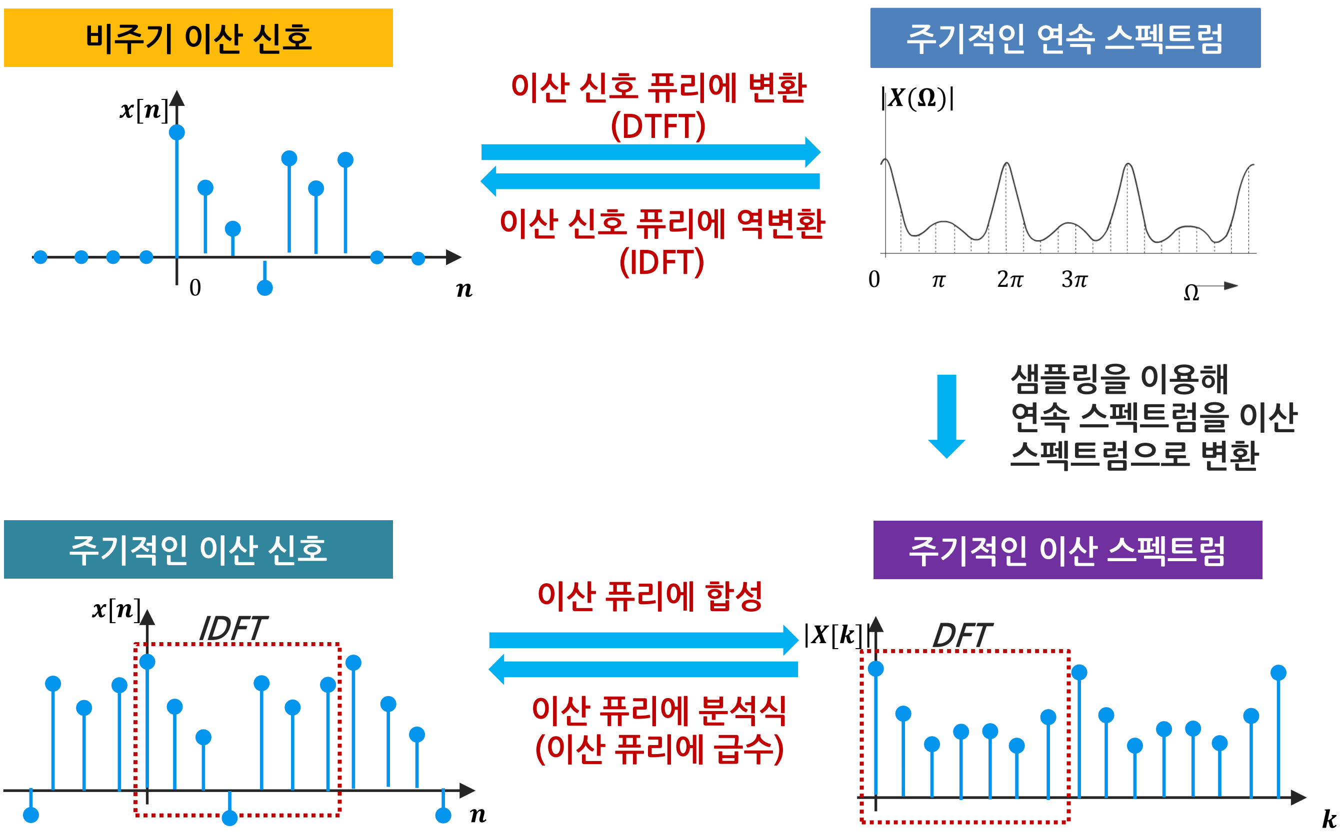
  ⇨ 유한 개 데이터로 부터 계산 가능 & 유한 개 이산 주파수 스펙트럼을 만드는 퓨리에 변환의 근사화 필요

  이산 퓨리에 변환(DFT: Discrete Fourier Transform)
- 디지털시스템을 이용한 신호 처리를 위한 전제 조건: 신호와 스펙트럼 모두 이산이어야 함

  ⇨ 이 전제가 충족되지 않을 경우 샘플링(시간 영역, 주파수 영역)으로 해결

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

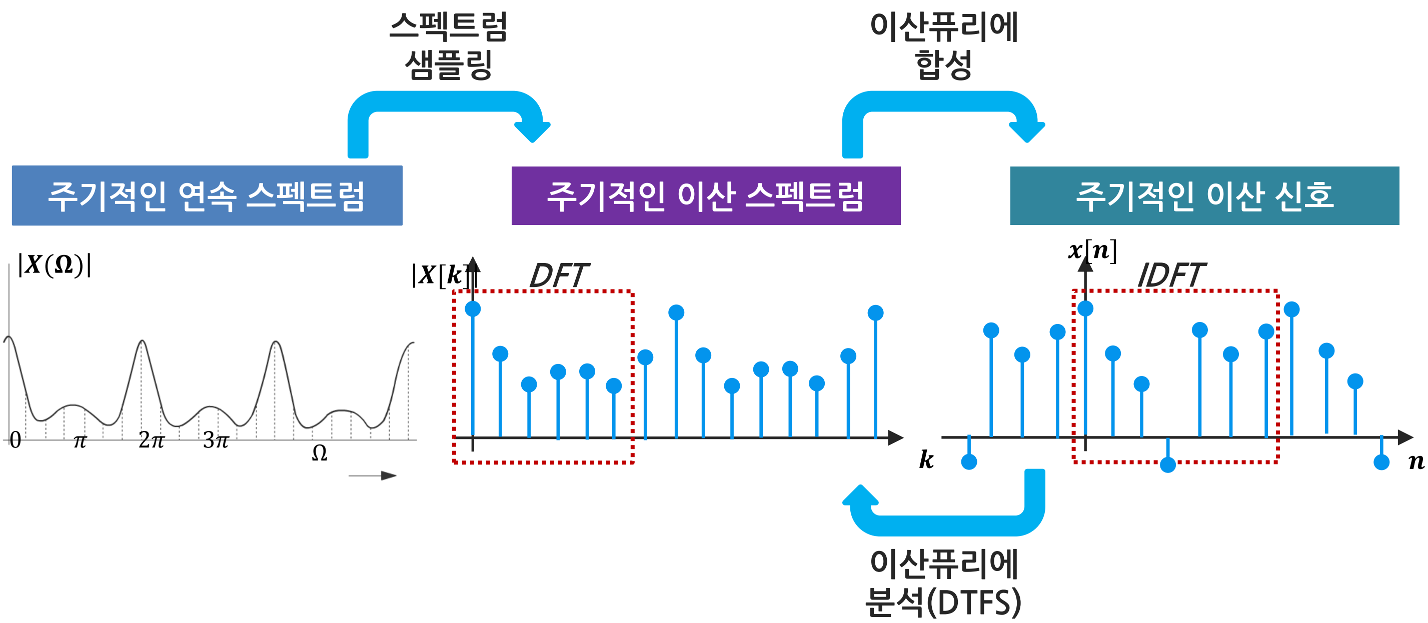
1. 이산 퓨리에 급수(DTFS)와 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 관계



- 비주기 이산 신호 $x[n]$은 이산 퓨리에 변환(DTFT)에 의하여 주기적인 연속 스펙트럼을 얻음 (주기는 2π)
- 주기적인 스펙트럼을 얻는 이유: 연속 신호를 이산 신호로 샘플링하면서 발생되는 현상
- 이 경우 이산 신호가 실신호(Real Signal)이면 0부터 π 사이의 스펙트럼 는 π~2π 사이의 스펙트럼과 대칭임

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

1. 이산 퓨리에 급수(DTFS)와 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 관계



$$X(\Omega) = F\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n} \xrightarrow[\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}]{\text{N-주파수 샘플링}} X_N(\Omega) = X(k\Delta\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0,1,\cdots,N-1$$

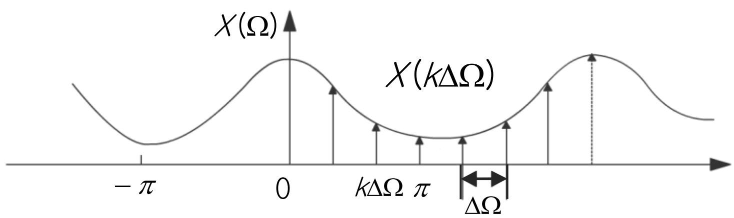
- 주기적인 연속 스펙트럼 $|X(\Omega)|$에 대해 M개 샘플링하면, 주기적인 이산 스펙트럼 $X_N(\Omega) = X(k\Delta\Omega)$ 이 됨
- 이산 주기 스펙트럼을 역변환(시간 신호로 변환)하면 $x[n]$을 주기 N으로 반복한 주기신호 $x_N[n]$이 됨
- 역으로 주기적인 이산 신호는 이산 퓨리에 급수를 통하여 주기적인 이산 스펙트럼 즉, 이산 퓨리에 계수 $X[k]$을 얻을 수 있음

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

2. 주파수 영역 샘플링

1) 이산 퓨리에 변환(Discrete Fourier Transform: DFT)

$$X(\Omega) = F\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n} \xrightarrow[\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}]{\text{N-주파수 샘플링}} X_N(\Omega) = X(k\Delta\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0,1,\cdots,N-1$$



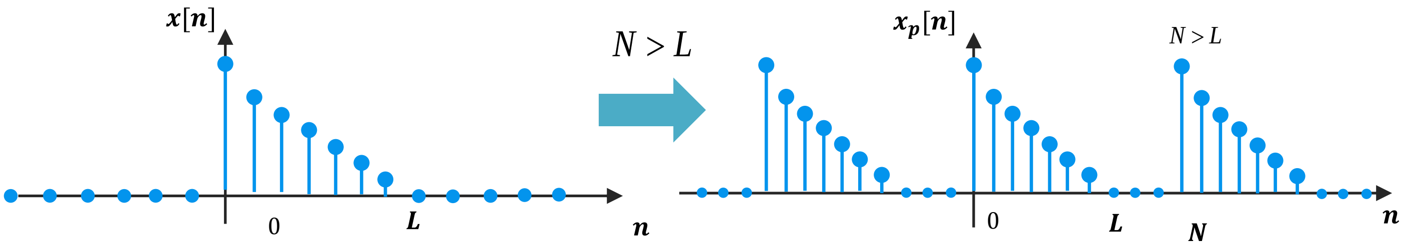
- DFT는 연속 함수로 표현된 이산 시간 신호를 주파수 표현
  ⇨ 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT) 계산에 필요함
- 연속적인 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)을 주파수 영역에서 N개의 주파수를 샘플링한 것 ⇨ DFT

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

3. 이산 신호 복원

1) 역이산 퓨리에 변환(Inverse Discrete Fourier Transform: IDFT)

비주기 이산 신호 $x[n]$ | 주기 이산 신호 $x_p[n]$



$$x[n]=\begin{cases} x_p[n], & 0\le n\le N-1 \\ 0, & elsewere \end{cases}$$

$$x_p[n]=\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]$$

이산 퓨리에 급수(DTFS) 분석식	이산 퓨리에 급수 (DTFS) 합성식
$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x_p[n]e^{-j2\pi kn/N}=\frac{1}{N}X(\frac{2\pi}{N}k),$ $k=0,1,\cdots,N-1$	$x_p[n]=\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kn/N}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(\frac{2\pi}{N}k)e^{j2\pi kn/N}$ $n=0,1,2,\cdots,N-1$

$$x_p[n]=\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kn/N}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(\frac{2\pi}{N}k)e^{j2\pi kn/N},\quad n=0,1,2,\cdots,N-1 \qquad \text{(식1)}$$

$$x[n]=x_p[n],\quad 0\le n\le N-1 \qquad \text{(식2)}$$

- (식1): 이산 신호 스펙트럼 $X(\Omega)$의 주파수 샘플 $X(\frac{2\pi}{N}k)$로 부터 주기 신호 **x_p [n]**을 복원
- (식 2): 복원된 **x_p [n]**신호로 부터 원본 비주기 신호 **x[n]**을 복원

이산 신호 스펙트럼의 주파수 샘플 $X(\frac{2\pi}{N}k)$ 로부터 원본 비주기 신호 $x[n]$을 복원

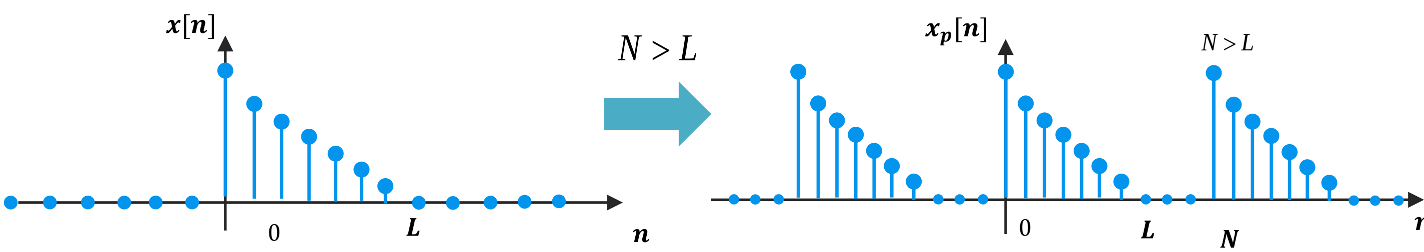
⇨ 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

1) 역이산 퓨리에 변환(Inverse Discrete Fourier Transform: IDFT)

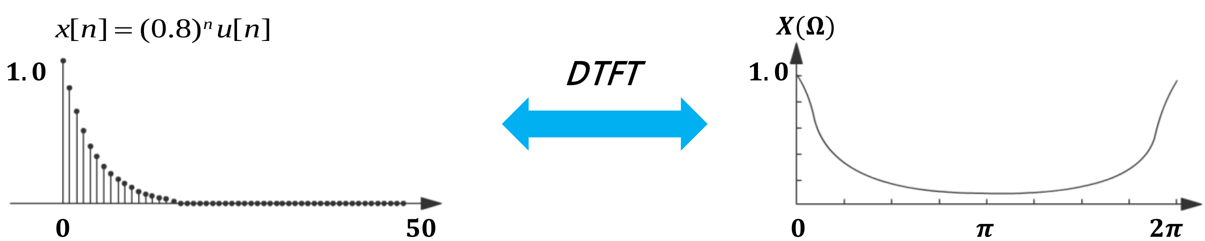
비주기 이산 신호 $x[n]$

주기 이산 신호 $x_p[n]$



$$x[n] = x_p[n], \quad 0 \le n \le N-1$$

- 하지만, 만약 그림과 같이 $N < L$이면 시간 영역 에일리어싱으로 주기적으로 확장된 ***x_p* [*n*]** 신호로 부터 원본 신호 ***x*[*n*]을 복원하는 것은 불가능**
- 만약 $N \ge L$이면, 주파수 $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ 에서의 N-주파수 샘플 $X(\frac{2\pi}{N}k)$로 부터 유한 구간 L을 갖는 비주기 이산 신호 $x[n]$을 정확하게 복원 가능함



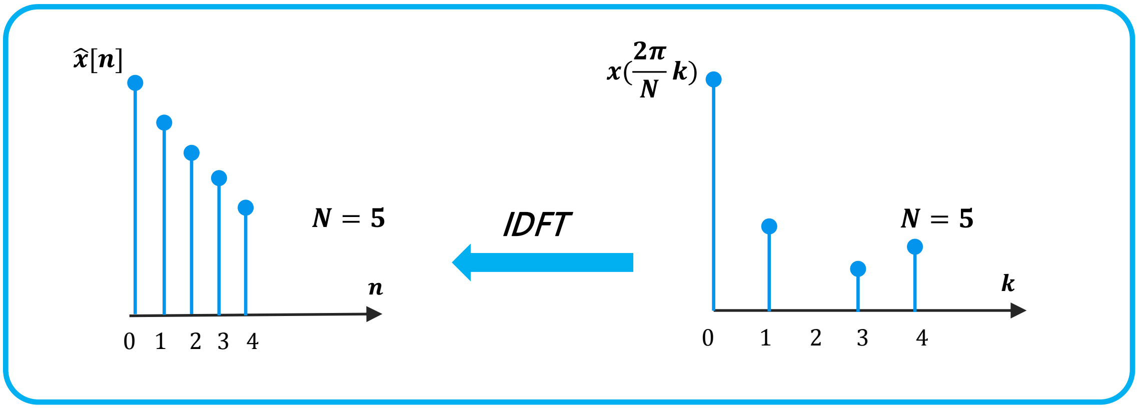
- 이산퓨리에 변환으로부터 시간영역 이산 신호를 복원 시
⇨ 주파수 영역의 샘플 수가 부족하다면 시간 영역 겹칩 효과(시간 영역 에일리어싱)가 발생함
- 일반적으로 등간격 주파수 샘플 $X(\frac{2\pi}{N}k), k = 0, 1, \cdots, N-1$은 ***x*[*n*]**의 구간이 무한히 길 때 원래의 이산 신호 수열 ***x*[*n*]**을 유일하게 표현하지 못함

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

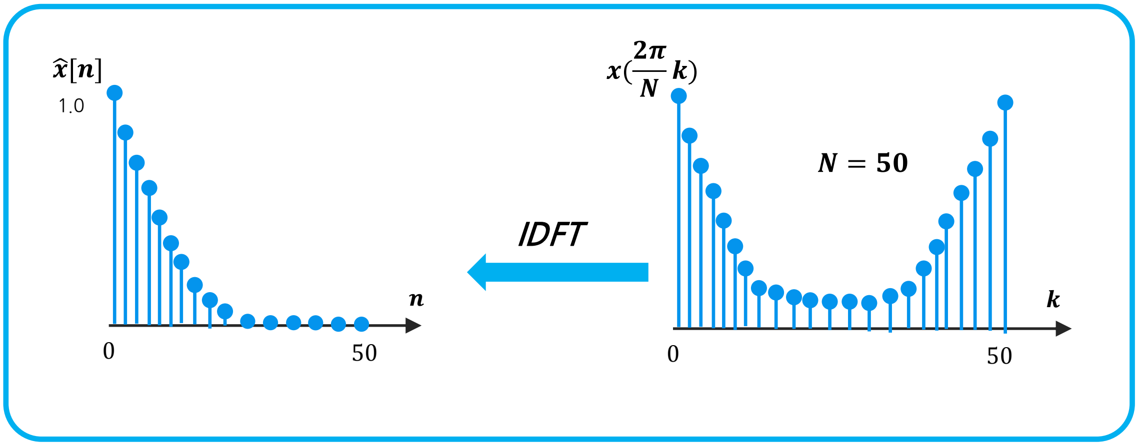
3. 이산 신호 복원

1) 역이산 퓨리에 변환(Inverse Discrete Fourier Transform: IDFT)

- N=5인 경우에 원본 이산 신호 복원
  ⇨ 에일리어싱의 영향이 심한 경우



- N=50인 경우에 원본 이산 신호 복원
  ⇨ 에일리어싱의 영향이 감소된 경우



이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

4. 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

1) 역이산 퓨리에 변환(Inverse Discrete Fourier Transform: IDFT)

이산 퓨리에 변환(DFT)	↔	역이산 퓨리에 변환(IDFT)
$X(\frac{2\pi}{N}k) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$		$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

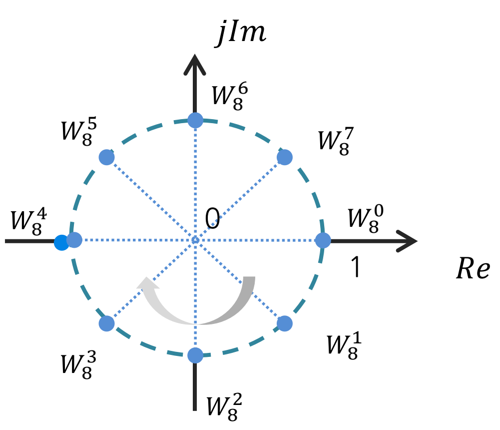
이산 퓨리에 급수 분석식(DTFS)	↔	이산 퓨리에 급수 합성식
$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$		$x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

- DTFS: 이산 주기 신호를 퓨리에 변환 → 이산 주기 스펙트럼
- DFT: 연속 스펙트럼을 샘플링하여 이산 스펙트럼
  → 그 결과로 이에 대응되는 시간 신호가 이산 주기 신호가 됨

2) 이산 퓨리에 변환(DFT)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}$$

[회전인자 N=8인 예]



$W_N^{kn} = e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$: 회전 인자

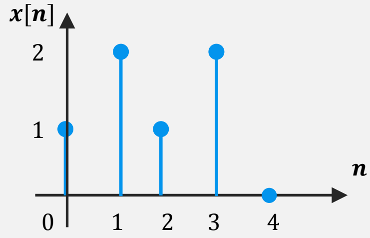
- 복소 평면 단위원을 N등분한 점
  회전 인자 W_N^{kn} 은 주기 N인 주기 함수
  $W_N^{kn+N} = W_N^{kn}$
- N이 정해지면 데이터와 상관없이 W_N^{kn}값을 미리 계산 가능

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

4. 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

예제 35-01

다음 그림과 같은 유한 구간 신호 $x[n]$의 이산 퓨리에 변환(DFT)을 구해 보자. (단, N=4)



$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

[예제풀이]

- 이산 퓨리에 변환식에 의하여

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{4}n}$$

$$W_N^{kn} = e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = W_4^{kn} = (e^{-j\frac{2\pi}{4}})^{kn} = (-j)^{kn}$$

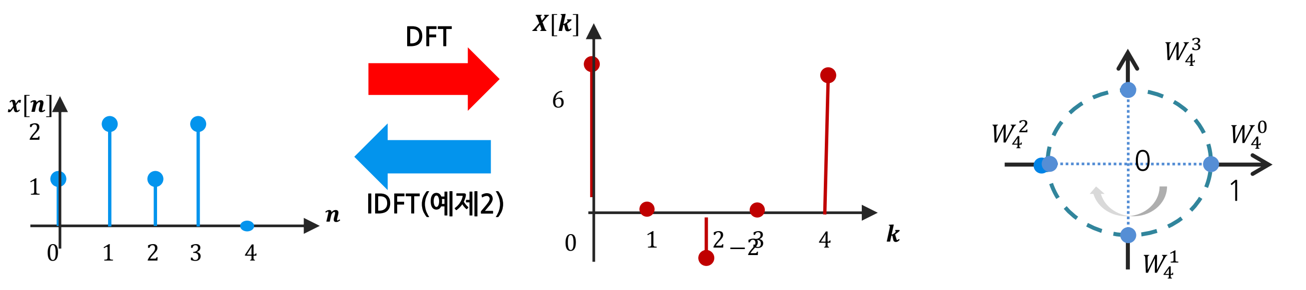
$$X(0) = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{4}n} = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{kn} = x[0]W_4^0 + x[1]W_4^0 + x[2]W_4^0 + x[3]W_4^0 = (1)(1) + (2)(1) + (1)(1) + (2)(1) = 6$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{kn} = x[0]W_4^0 + x[1]W_4^1 + x[2]W_4^2 + x[3]W_4^3 = (1)(1) + (2)(-j) + (1)(-1) + (2)(j) = 0$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{kn} = x[0]W_4^0 + x[1]W_4^2 + x[2]W_4^4 + x[3]W_4^6 = (1)(1) + (2)(-1) + (1)(1) + (2)(-1) = -2$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^{3} x[n] W_4^{kn} = x[0]W_4^0 + x[1]W_4^3 + x[2]W_4^6 + x[3]W_4^9 = (1)(1) + (2)(j) + (1)(-1) + (2)(-j) = 0$$

[이산 신호] [이산 퓨리에 변환: 샘플 스펙트럼] [회전 인자]

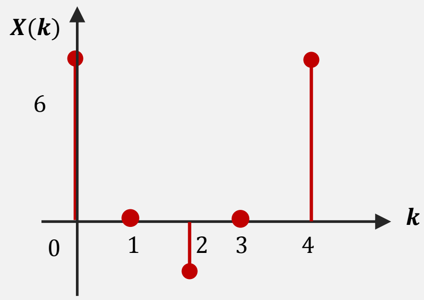


이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

4. 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

예제 35-02

[예제 1]의 이산 퓨리에 변환 $X(k)$로 부터 역이산 퓨리에 변환을 수행하여 이산 신호 $x[n]$을 계산해 보자.



[예제풀이]

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}$$

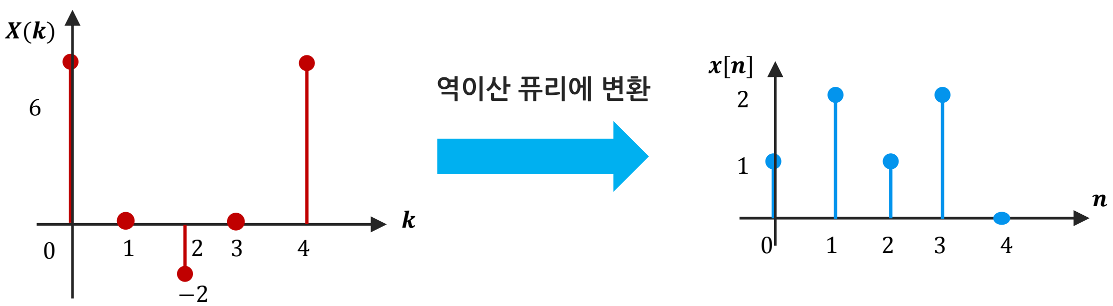
$$W_N^{-kn} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = (e^{j\frac{2\pi}{4}})^{kn} = (j)^{kn} \qquad x[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)W_4^{-kn} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)(j)^{kn}$$

$$x[0] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)(j)^0 = \frac{1}{4}(X[0]+X[1]+X[2]+X[3]) = \frac{1}{4}(6+0+(-2)+0) = 1$$

$$x[1] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)(j)^k = \frac{1}{4}(X[0](j)^0 + X[1](j)^1 + X[2](j)^2 + X[3](j)^3) = \frac{1}{4}(6+0+(-2)(-1)+0) = 2$$

$$x[2] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)(j)^{2k} = \frac{1}{4}(X[0](j)^0 + X[1](j)^2 + X[2](j)^4 + X[3](j)^6) = \frac{1}{4}(6+0+(-2)(1)+0) = 1$$

$$x[3] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)(j)^{3k} = \frac{1}{4}(X[0](j)^0 + X[1](j)^3 + X[2](j)^6 + X[3](j)^9) = \frac{1}{4}(6+0+(-2)(-1)+0) = 2$$



$$x[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)W_4^{-kn} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)(j)^{kn} = \{1, 2, 1, 2\}$$

이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

4. 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

3) 정리

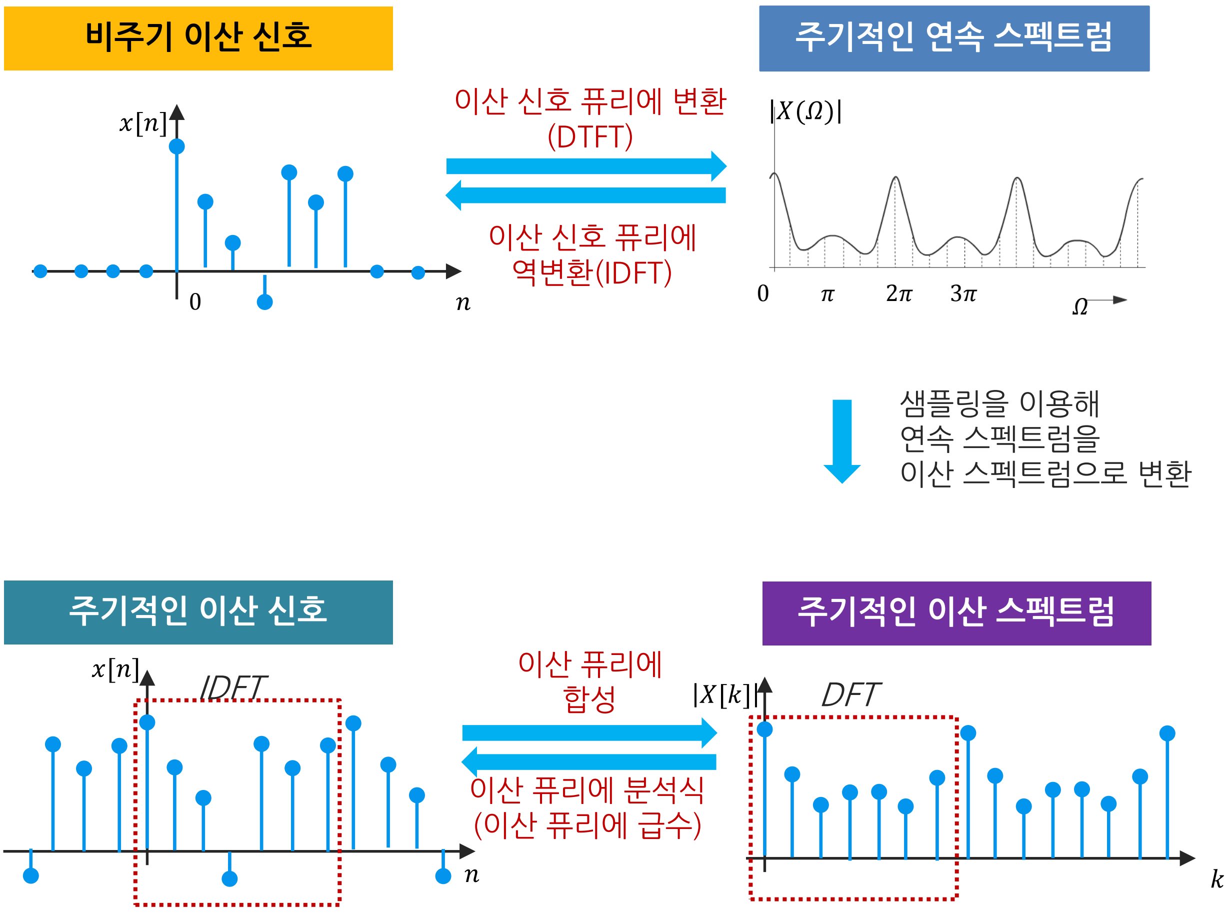
- 이산 퓨리에 변환(역변환)과 이산 퓨리에 급수의 분석식·합성식의 차이점?
  ⇨1/N이 곱해진 위치 (이외에는 동일함)
- 이산 퓨리에 변환(DFT)은?
  ⇨실제 연속신호(예, 음성신호)에 대한 퓨리에 계수를 수식적으로 계산하는 방법
- 이산 퓨리에 변환 시 고려할 사항은?
  ⇨ Ts의 간격으로 연속 신호의 N개 표본들을 취하고, 이산 퓨리에 변환식을 디지털 컴퓨터로 계산하면 됨

단, 표본 수 N이 커지거나 표본화 간격이 짧아질수록
스펙트럼 근사화는 더 정확해지지만
N이 증가함에 따라 DFT를 수식적으로 결정하는 것은
더 많은 메모리와 계산을 필요로 함

⇨ 더 빠른 DFT 계산을 위해 FFT(Fast Fourier Transform)

핵심정리

이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 한계



핵심정리

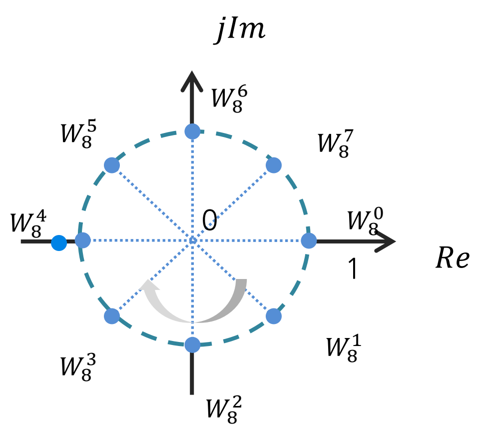
이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

이산 퓨리에 변환(DFT)	역이산 퓨리에 변환(IDFT)
$X(\frac{2\pi}{N}k) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$	$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

- 이산 퓨리에 변환(DFT)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn},\quad \text{여기서,}\quad W_N^{kn} = e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} : \text{회전인자}$$

- 회전인자 N=8인 예



디지털신호처리

강 의 노 트

이산 퓨리에 변환의 성질과 고속 퓨리에 변환(FFT)

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

❖ 이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

❖ 이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에 변환(FFT)

학습목표

❖ 이산 퓨리에 변환(DTFT)의 해상도에 대해 설명할 수 있다.

❖ 이산 퓨리에 변환의 성질과 고속 퓨리에 변환에 대해 설명할 수 있다.

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

1. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

1) 이산 퓨리에 변환과 해상도

- 이산 퓨리에 변환(DFT)은 신호의 전체 스펙트럼이 아닌 연속된 스펙트럼 $X(\Omega)$에서 샘플링된 이산 스펙트럼 $X(k)$을 얻는 것
- 스펙트럼 샘플의 간격이 너무 넓어서 실제 스펙트럼의 변화를 적절히 보여주지 못하는 문제가 발생할 수 있다.

  ⇨ 이산 퓨리에 변환의 해상도를 고려함

2) DFT에 의한 주파수 스펙트럼 해상도

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N} \quad \text{또는} \quad \Delta F = \frac{1}{N}$$

- DFT에 의한 주파수 스펙트럼 해상도는 $x[n]$의 샘플 수(N)에 의존
- 더 높은 주파수 해상도가 요구되면 더욱 많은 데이터 샘플을 사용해야 함

3) 연속 신호 관점

- 연속 신호(지속 시간)를 ***T_s***간격으로 샘플링할 때 주파수 중첩을 피하기 위한 조건

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2 f_{\max}$$

- DFT에 의해 얻어진 샘플 스펙트럼의 샘플간 간격 (해상도- 연속신호 관점에서)

$$\Delta f = \frac{\text{한주기 구간에 해당하는 주파수}}{\text{샘플 개수}} = \frac{f_s}{N}$$

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

1) 영 채우기에 의한 해상도 증가

- 시간 영역에서의 N_1개의 유효 데이터이나, 주파수 영역에서 N_2 샘플이 요구될 경우
  ⇨ 만약 $N_1 < N_2$, 주파수 해상도 $\Delta\Omega=2\pi/ N_2$
  ⇨ 강제로 데이터 샘플 수를 증가시켜야 함
  → $N_2 - N_1$개의 0을 첨가
  (∵ 데이터 수는 증가,스펙트럼 형태 변화는 없도록)
- 영 채우기에 의한 해상도 증가는 스펙트럼 정확도를 증가시키지 않음
  ⇨ 관찰의 정확성은 신호의 유효 샘플 수 **N_1**을 더 늘려야 함
  ∵ 유효 샘플 수 N_1의 증가
  ⇨ 해상도 향상 & 주파수 중첩 감소

예제 35-01

다음과 같은 길이 L인 유한 구간 수열에 $N \geq L$인 경우 N-점 DFT를 결정해보고 $N = 50$인 경우와 $N = 100$인 경우의 DFT를 비교해 보자. (단, $L = 10$)

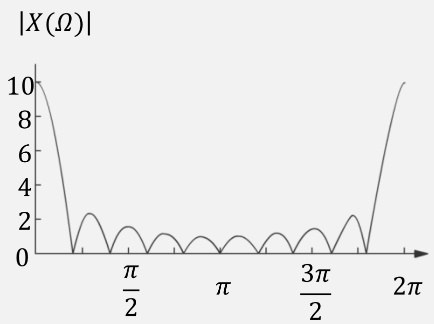
$$x[n] = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, L \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

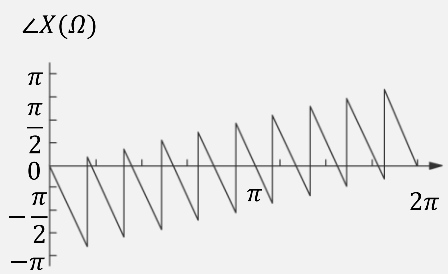
[예제풀이]

[신호 x[n] 대한 이산신호 퓨리에 변환(DTFT)]

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1-e^{-j\Omega L}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{\sin(\Omega L/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega(L-1)/2}$$

[$L = 10$인 경우 $X(\Omega)$ 의 크기와 위상 스펙트럼]





이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

[예제풀이] (계속)

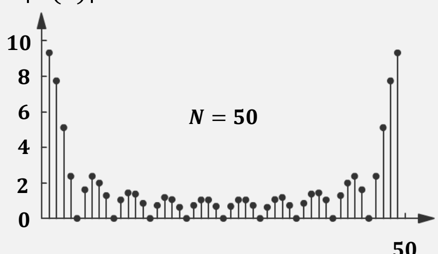
[$\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$의 N-점 DFT)]
N개의 등간격 주파수에서 단순히 $X(\Omega_k)$를 계산 한 것

$$\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k,\ k = 0,1,\cdots,N-1$$

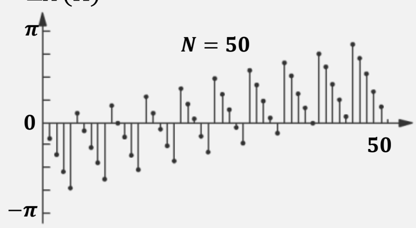
$$X(\Omega_k) = X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N})k} = \frac{1-e^{-j(\frac{2\pi}{N})kL}}{1-e^{-j(\frac{2\pi}{N})k}} = \frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)} e^{-j\pi(L-1)/N}$$

i) $N = 10\ (N = L)$ $\quad X(k) = \begin{cases} L, & k=0 \\ 0, & k = 1, 2, \ldots, L-1 \end{cases}$

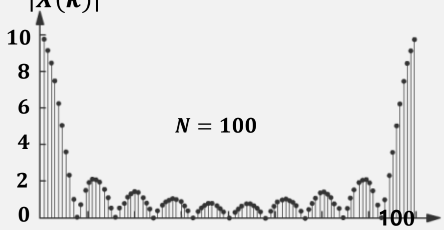
ii) $N = 50$ $\quad |X(k)|$



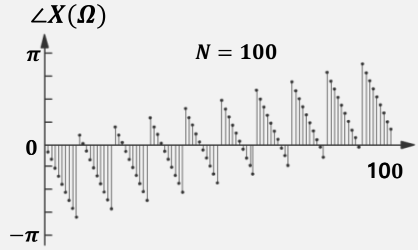
$\angle X(\Omega)$



iii) $N = 100$ $\quad |X(k)|$



$\angle X(\Omega)$



이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

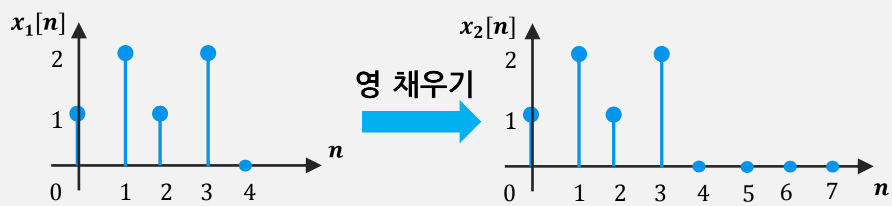
2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

[예제풀이] (계속)

- 주파수 영역에서 L-점 DFT가 신호 $x[n]$을 유일하게 표현하기에 충분하지만, $x[n]$의 자세한 스펙트럼 특성을 파악하기에는 충분하지 못함
- L-점 신호 $x[n]$에서 $N-L$개의 영을 첨가함으로써(Zero Padding), 신호의 크기를 L-점에서 N-점으로 확장하는 것으로 볼 수 있음
  이 때, N-점 DFT는 L-점 DFT보다 훨씬 자세한 스펙트럼 해상도를 제공함

예제 35-02

$x_1[n]$에 대해 네 개의 0을 추가하여 $N=8$일 때($x_2[n]$)의 DFT를 구한 후, $N=4$인 경우와 스펙트럼을 비교해 보자.



$$x_1[n]=\{x[0],x[1],x[2],x[3]\}$$
$$=\{1,2,1,2\}$$

$$x_2[n]=\begin{cases} x_1[n], & 0\le n\le 3 \\ 0, & 4\le n\le 7\end{cases}$$
$$=\{x[0],x[1],x[2],x[3],0,0,0,0\}$$
$$=\{1,2,1,2,0,0,0,0\}$$

[예제풀이]

- 영 채우기 된 신호 $\boldsymbol{x\_2}$ $[\boldsymbol{n}]$에 대한 DFT를 구하면

$$x_2[n]=\{1,2,1,2,0,0,0,0\}$$

$$X_2[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x_2[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{n=0}^{7}x_2[n]W_8^{kn}$$

$$W_N^{kn}=e^{-jk\frac{2\pi}{7}n}=W_8^{kn}=(e^{-j\frac{2\pi}{8}})^{kn}=((\cos(-\frac{\pi}{4})+j\sin(-\frac{\pi}{4}))^{kn}=(\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}})^{kn}$$

(계속)

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

[예제풀이] (계속)

$W_8^0 = (\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}})^0 = 1$ $W_8^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$ $W_8^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = -j$

$W_8^3 = (\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}})^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$ $W_8^4 = (\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}})^4 = -1$

$W_8^5 = (\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}})^5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$ $W_8^6 = j$

$$X_2[0] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(0)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^0 + x_2[2]W_8^0 + x_2[3]W_8^0$$
$$= (1)(1) + (2)(1) + (1)(1) + (2)(1) = 6$$

$$X_2[1] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(1)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^1 + x_2[2]W_8^2 + x_2[3]W_8^3$$
$$= (1)(1) + (2)(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}) + (1)(-j) + (2)(-\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$= 1 - j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$X_2[2] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(2)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^2 + x_2[2]W_8^4 + x_2[3]W_8^6$$
$$= (1)(1) + (2)(-j) + (1)(-1) + (2)(j) = 0$$

$$X_2[3] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(3)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^3 + x_2[2]W_8^6 + x_2[3]W_8^9$$
$$= (1)(1) + (2)(-\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}) + (1)(j) + (2)(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$= 1 - j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

[예제풀이] (계속)

$$X_2[4] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(4)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^4 + x_2[2]W_8^0 + x_2[3]W_8^4$$
$$= (1)(1) + (2)(-1) + (1)(1) + (2)(-1) = -2$$

$$X_2[5] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(5)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^5 + x_2[2]W_8^2 + x_2[3]W_8^7$$
$$= (1)(1) + (2)(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}) + (1)(-j) + (2)(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$= 1 + j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$X_2[6] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(6)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^6 + x_2[2]W_8^4 + x_2[3]W_8^2$$
$$= (1)(1) + (2)(-j) + (1)(-1) + (2)(-j) = 0$$

$$X_2[7] = \sum_{n=0}^{7} x_2[n]W_8^{(7)n} = x_2[0]W_8^0 + x_2[1]W_8^7 + x_2[2]W_8^6 + x_2[3]W_8^5$$
$$= (1)(1) + (2)(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}) + (1)(j) + (2)(-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$= 1 + j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore X_2[k] = \{6, 1 - j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0, 1 - j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -2, 1 + j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0, 1 + j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\}$$

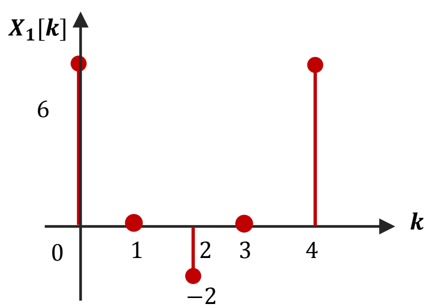
이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

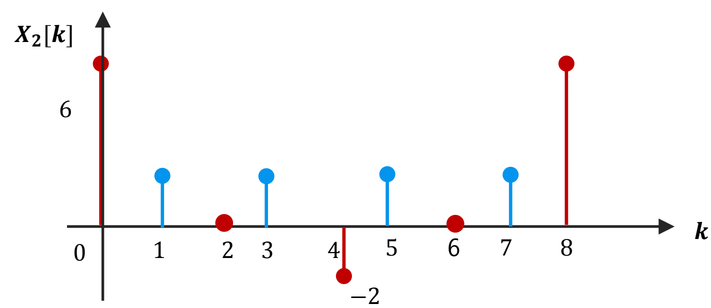
2. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 영 채우기(Zero Padding)

[예제풀이] (계속)

$X_1[k]=\{6,\ 0,\ -2,\ 0\}$

$X_2[k]=\{6, 1-j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0, 1-j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -2, 1+j\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0, 1+j\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\}$





- 두 스펙트럼을 비교하면, 영 채우기 한 $X_2[k]$신호의 스펙트럼 1,3,5,7번째의 스펙트럼 샘플은 $X_2[0], X_2[2], X_2[4], X_2[6]$ $X_1[k]$ 의 스펙트럼 결과와 일치
- 해상도를 두 배로 높인 2,4,6,8번째의 스펙트럼 샘플 $X_2[1], X_2[3], X_2[5], X_2[7]$은 이전 스펙트럼에서 볼 수 없었던 새로운 스펙트럼 값들이 추가되어 이산 퓨리에 변환의 해상도가 증가됨

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

[한걸음 더] 이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

한걸음 더

1초 구간의 아날로그 신호 x(t)에 대해 등간격으로 256개의 샘플을 취하여 DFT를 계산하였다. 이 때, DFT로 구한 스펙트럼에 대한 연속 신호 관점에서의 주파수 해상도는 얼마인가?

A. 1
B. 2

[예제풀이]

정답: A

$F_s = 256\ Hz$ 현재 이산신호의 샘플링 주파수

$f_{max} = 256\ Hz$ DFT로 구한 스펙트럼에서 나타나는 가장 높은 주파수는 이산 신호 스펙트럼의 한 주기에 해당하고, 이산 신호 스펙트럼의 한 주기는 연속 신호의 샘플링 주파수 해당

DFT로 구한 스펙트럼의 주파수 해상도 (연속신호 관점)

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{256}{256} = 1\ Hz$$

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

1. 이산 퓨리에 변환(DFT)의 기본 성질

1) 6가지 기본 성질

이산 퓨리에 급수(DTFS), 이산 신호 퓨리에 변환(DTFT)의 성질과 매우 비슷함

① **주기성** $x[n]=x[n+N] \Leftrightarrow X[k]=X[k+N]$

② **선형성** $\alpha x[n]+\beta y[n] \Leftrightarrow \alpha X[k]+\beta Y[k]$

③ **대칭성** $X^*[k]=X[-k]$, $x[n]$은 실수

$$\begin{cases} RE\{X[k]\}=RE\{X[-k]\} \\ \mathrm{Im}\{X[k]\}=-\mathrm{Im}\{X[-k]\} \end{cases} \quad x[n]\text{은 실수}$$

$$\begin{cases} |X[k]|=|X[-k]| \\ \angle X[k]=-\angle X[k] \end{cases} \quad x[n]\text{은 실수}$$

④ **시간 이동** $x[n-n_0] \Leftrightarrow X[k]W_N^{kn_0}$

⑤ **시간 컨볼루션** $x[n]\otimes y[n] \Leftrightarrow X[k]Y[k]$

⑥ **주파수 컨볼루션** $x[n]y[n] \Leftrightarrow \frac{1}{n}X[k]\otimes Y[k]$

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)에 기초한 선형 필터링

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

(a) 임펄스 응답 표현

$$X(\Omega) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow Y(\Omega)$$

(b) 주파수 응답 표현

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \Leftrightarrow Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

- 출력 신호 $y[n]$은 주파수 응답 표현에서 스펙트럼을 역퓨리에 변환하면 얻을 수 있음
- 주파수 영역표현의 문제점: 계산하는데 있어서 $X(\Omega), H(\Omega), Y(\Omega)$가 연속변수 Ω의 함수인 것임
  ⇨ DFT와 IDFT를 이용하면 디지털 컴퓨터 계산에 매우 적합
- DFT에 기초한 주파수 영역 접근법은 시간 영역 컨볼루션 보다 계산에서 훨씬 효과적임
  ⇨ DFT 계산을 훨씬 효율적으로 계산할 수 있는 FFT(Fast Fourier Transform: 고속 퓨리에 변환) 알고리즘이 있기 때문

1) 선형 필터링 방법 I

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

(a) 임펄스 응답 표현

$$X(\Omega) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow Y(\Omega)$$

(b) 주파수 응답 표현

$\boldsymbol{x[n] = 0, n < 0}$ 그리고 $\boldsymbol{n \geq L}$

$\boldsymbol{h[n] = 0, n < 0}$ 그리고 $\boldsymbol{n \geq M}$, 여기서 $\boldsymbol{h[n]}$은 $\boldsymbol{FIR}$ 필터의 임펄스 응답

- 시간 영역에서 출력 신호 $y[n]$은 입력 신호 $x[n]$과 임펄스 응답 $h[n]$과 선형 컨볼루션으로 표현
  ⇨ $\boldsymbol{h[n]}$과 $\boldsymbol{x[n]}$은 유한 구간 신호이므로 그 컨볼루션 결과 $y[n]$ 역시 구간이 유한하고 구간은 $L+M-1$이 됨

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

2) 선형 필터링 방법 II

(a) 임펄스 응답 표현 (b) 주파수 응답 표현

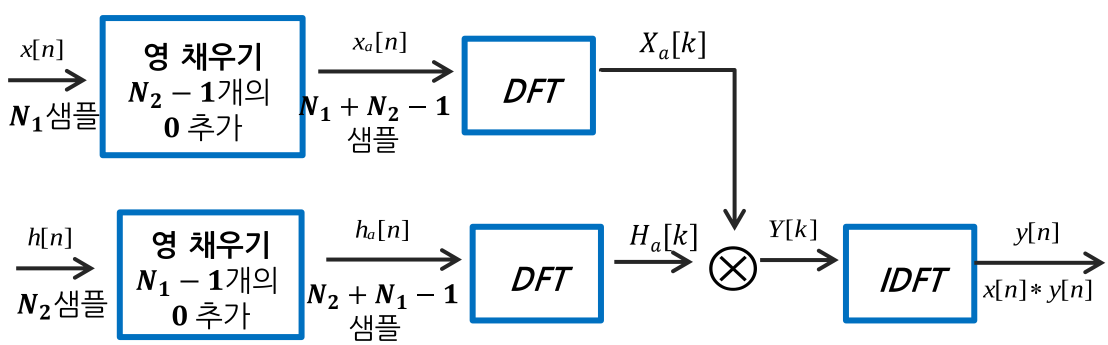
- 주파수 영역 표현식은 $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$, 이산 주파수에서 스펙트럼 $Y(\Omega)$를 샘플링해서 유일하게 표현한다면 샘플수 N은 $L+M-1$이상이여야 함
- 주파수 영역에서 $\{y[n]\}$을 표현하기 위해 DFT의 크기는 $N \geq L+M-1$를 요구

$$Y(k) \equiv Y((\Omega)|_{\Omega=2\pi k/N}, k = 0,1,\cdots, N-1$$
$$= X(\Omega)H(\Omega)|_{\Omega=2\pi k/N}, k = 0,1,\cdots, N-1$$

$$Y(k) = X(k)H(k), k = 0,1,\cdots, N-1$$
$$y[n] = IDFT\{Y(k)\}$$

※여기서, $X[k]$: 입력 신호 $x[n]$ N-점 DFT, $H[k]$: 임펄스 응답 $h[n]$ N-점 DFT,
$y[n]$: $Y[k]$를 N-점 DFT한 시간영역 출력 신호

3) DFT-IDFT에 기초한 선형 필터링 계산 전체 블록도



이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)에 기초한 선형 필터링

예제 35-03

DFT와 IDFT를 이용하여 다음 임펄스 응답 (FIR 필터)과 입력 신호 $x[n]$에 대하여 FIR 필터링 한 $y[n]$을 계산해 보고, 시간 영역에서 선형 컨볼루션으로 계산한 결과와 같은지를 확인해 보자.

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] \qquad X(\Omega) \rightarrow \boxed{H(\Omega)} \rightarrow Y(\Omega)$$

(a) 임펄스 응답 표현 (b) 주파수 응답 표현

$h[n] = \{1, 2, 3\}$ $x[n] = \{1, 2, 2, 1\}$

[예제풀이]

- 입력 신호의 길이는 $L=4$이고, 임펄스 응답의 길이는 $M=3$
이 두 신호의 선형 컨볼루션 길이는 $L+M-1=6$, DFT의 N은 적어도 6이상
간단히 $N=8$인 8-점 DFT를 계산하면

$$x[n] = \{1, 2, 2, 1\} \xrightarrow{DFT} X(k) = \sum_{n=0}^{7} x(n)e^{-j2\pi kn/8}$$

$$= 1 + 2e^{-j\pi k/4} + 2e^{-j\pi k/2} + e^{-j3\pi k/4}, k = 0.1.\dots, 7$$

$X[0] = 6$ $X[1] = \frac{2+\sqrt{2}}{2} - j(\frac{4+\sqrt[3]{2}}{2})$ $X[2] = -1 - j$ $X[3] = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + j(\frac{4-\sqrt[3]{2}}{2})$

$X[4] = 0$ $X[5] = \frac{2-\sqrt{2}}{2} - j(\frac{4-\sqrt[3]{2}}{2})$ $X[6] = -1 + j$ $X[7] = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + j(\frac{4+\sqrt[3]{2}}{2})$

$$h[n] = \{1, 2, 3\} \xrightarrow{DFT} H[k] = \sum_{n=0}^{7} h(n)e^{-j2\pi kn/8}$$

$$= 1 + 2e^{-j\pi k/4} + 3e^{-j\pi k/2}$$

$H[0] = 6$ $H[1] = 1 + \sqrt{2} - j(3 + \sqrt{2})$ $H[2] = -2 - j2$ $H[3] = 1 + \sqrt{2} - j(3 - \sqrt{2})$

$H[4] = 2$ $H[5] = 1 - \sqrt{2} - j(3 - \sqrt{2})$ $H[6] = -2 + j2$ $H[7] = 1 + \sqrt{2} + j(3 + \sqrt{2})$

(계속)

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

2. 이산 퓨리에 변환(DFT)에 기초한 선형 필터링

[예제풀이] (계속)

$$Y(k) = X(k)H(k),\ k = 0,1,\cdots,N-1$$

$Y[0] = 36$ $\quad Y[1] = -14.07 - j17.48$ $\quad Y[2] = j4$ $\quad Y[3] = 0.07 + j0.515$

$Y[4] = 0$ $\quad Y[5] = 0.07 - j0.515$ $\quad Y[6] = -j4$ $\quad Y[7] = -14.07 + j17.48$

$$y[n] = IDFT\{Y(k)\} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} Y(k)e^{j2\pi kn/8},\ n = 0,1,\cdots,7$$

$$\Downarrow$$

$$y[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 4, 9, 11, 8, 3, 0, 0\}$$

- 시간 영역에서 에일리어싱은 DFT의 크기가 L+M-1보다 작을 때 발생할 수 있음

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에변환(FFT)

3. 고속 퓨리에 변환(FFT: Fast Fourier Transform)

1) DFT 계산: N-샘플 $x[n] \leftrightarrow \boldsymbol{X}[\boldsymbol{k}]$간의 대수 방정식 계산 문제

$$\begin{cases} DFT : X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, k = 0, \ldots, N-1 \\ IDFT : x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-kn}, k = 0, \ldots, N-1 \end{cases}$$

2) DFT 계산: 직접 계산시의 계산량(곱셈×과 덧셈+의 수)

$$X[k] = x[0]W_N^0 + x[1]W_N^k + x[2]W_N^{2k} + \cdots + x[N-1]W_N^{(N-1)k}$$

- 각 k당 N번의 복소수 곱셈과 $N-1$번의 복소수 덧셈
- 총 N^2번의 복소수 곱셈과 $N(N-1)$번의 복소수 덧셈
- N이 커지면 계산량이 늘어남

  ⇨ 효과적인 계산 방법이 요구됨

3) DFT 계산

- W_N^{kn}은 $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{kn} \leq (\boldsymbol{N}-\mathbf{1})^2$의 항
  → 실제로 N개의 서로 다른 값만 존재
- W_N^{kn}의 성질을 이용하면 계산량을 줄일 수 있음

$$\begin{cases} \text{대칭성} \quad : \boldsymbol{W_N^{k(N-n)}} = (\boldsymbol{W_N^{kn}})^* \\ \text{주기성} \quad : \boldsymbol{W_N^{kn}} = \boldsymbol{W_N^{k(n+N)}} \end{cases}$$

⇨ Cooley & Tukey 고속 퓨리에 변환(FFT)

4) 역할

- DFT를 효과적으로 계산하기 위한 컴퓨터 처리 알고리즘
- 주어진 신호를 여러 개의 길이가 짧은 신호로 분할하여 분할된 신호들의 DFT를 구한 후 그 결과들을 적절하게 결합하여 원래 주어진 긴 신호의 DFT를 수행

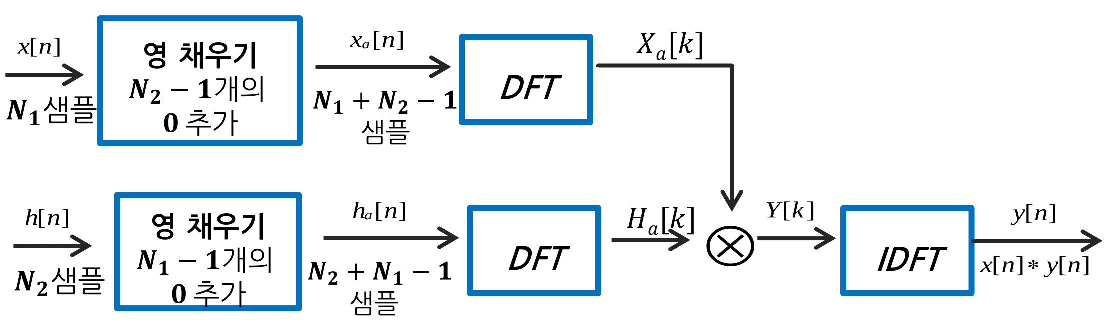
핵심정리

이산 퓨리에 변환(DFT)의 해상도

- 이산 퓨리에 변환(DFT): 신호의 전체 스펙트럼이 아니라 단지 연속된 스펙트럼에서 샘플링된 스펙트럼만을 얻는 것
- 더 높은 주파수 해상도가 요구되면 더 많은 데이터 샘플을 사용해야 함
- 영 채우기에 의한 해상도 증가는 스펙트럼 정확도를 증가시키지 않음
  → 관찰의 정확성은 신호의 유효 샘플 수 N^1 을 더 늘려야 함

이산 퓨리에 변환(DFT)의 성질과 고속 퓨리에 변환(FFT)

- DFT에 기초한 주파수 영역 접근법은 시간영역 컨볼루션 보다 계산에서 훨씬 효과적임
  → DFT 계산을 훨씬 효율적으로 계산할 수 있는 FFT(Fast Fourier Transform: 고속 퓨리에 변환) 알고리즘이 있기 때문임
- DFT-IDFT에 기초한 선형 컨볼루션 계산 전체 블록도



- 고속 퓨리에 변환(FFT): DFT를 효과적으로 계산하기 위한 알고리즘
- 주어진 신호를 여러 개의 길이가 짧은 신호로 분할하여 분할된 신호들의 DFT를 구한 후 그 결과들을 적절하게 결합하여 원래 주어진 신호의 DFT를 수행하는 알고리즘

디지털신호처리

강 의 노 트

이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

- ❖ 이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습
- ❖ 이산 및 역이산 퓨리에 변환에 기초한 선형 필터링 실습

학습목표

- ❖ 이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT)을 수행할 수 있다.
- ❖ 이산 및 역이산 퓨리에 변환에 기초한 선형 필터링을 Matlab 프로그램을 이용하여 실행할 수 있다.

이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습

1. 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)의 관계 실습

실습과제 36-01

이산 비주기 신호 x[n]에 대하여 4점-DFT 및 IDFT를 수행해 보자. 그리고 DFT의 결과를 DTFT(Discrete Time Fourier Transform)과 비교해 보자.

$$x[n]=[1,\ 2,\ 2,\ 1]$$

이산 퓨리에 변환(DFT), 이산신호 퓨리에 변환(DTFT), 역이산 퓨리에 변환(IDFT)

이산 퓨리에 변환 (DFT)	$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$
이산 신호 퓨리에 변환 (DTFT)	$X(\Omega)=F\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n}$
역이산 퓨리에 변환 (IDFT)	$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

이산 퓨리에 변환 (DFT)	$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

[DFT와 DTFT의 관계]

$$\underbrace{X(\Omega)=F\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n}}_{\text{DTFT}} \xrightarrow[\Delta\Omega=\frac{2\pi}{N}]{\text{N 샘플링}} X_N(\Omega)=\underbrace{X(k\Delta\Omega)}_{X[k]\ \text{DFT}}=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\ k=0,1,\cdots,N-1$$

```
%%% Ex1.m DFT와 DTFT와의 관계 실습

N=4;                    % 이산 신호의 샘플 개수
x=[1 2 2 1];            % 신호 x[n] 벡터
n=0:N-1;                % 시간축 이산신호
k=0:N-1;                % 주파수 축 샘플주파수
WN = exp(-j*2*pi/N).^n; % 회전인자 WN 계산

(계속)
```

이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습

1. 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)의 관계 실습

[과제해설]

```
for m = 1:N
    X(m)=sum(x.*WN.^(m-1));     % DFT 수행
end

df = 1/500; f=df*[0:500];       % DTFT 스펙트럼의 주파수축 설정
W=exp(-j*2*pi.*f);              %                계산
Xf = zeros(1, length(f));       % DTFT 0으로 초기화

for m = 1: N
   Xf = Xf+x(m)*W.^(m-1);      % DTFT 계산
end

for m=1:N
    x(m) = sum(X.*(WN.^(-1)).^(m-1))/N;   % IDFT에 의한 x[n] 계산
end

subplot(3,1,1);
stem(k,abs(X),'r');             % DFT의 진폭스펙트럼 그리기
xlabel('₩bf F');
ylabel('|X[k]|');
title('4-점 DFT 진폭스펙트럼');
grid on;
hold on;
plot(f*N,abs(Xf),'--b');        % DTFT의 진폭스펙트럼 그리기

subplot(3,1,2);
stem(k,angle(X),'r');           % DFT의 위상스펙트럼 그리기
axis([0 4 -5 5]);
xlabel('₩bf F');
ylabel('X[k]의 위상');
title('4-점 DFT 위상스펙트럼');
grid on;

subplot(3,1,3);
stem(n,x,'r');                  % IDFT에 의한 원본신호 x[n] 그리기xlabel('₩bf n');
ylabel('x[n]');
axis([0 4 0 2.5]);
title('IDFT에 의한 원본신호 x[n]');
grid on;
```

이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습

1. 이산 퓨리에 변환(DFT)과 역이산 퓨리에 변환(IDFT)의 관계 실습

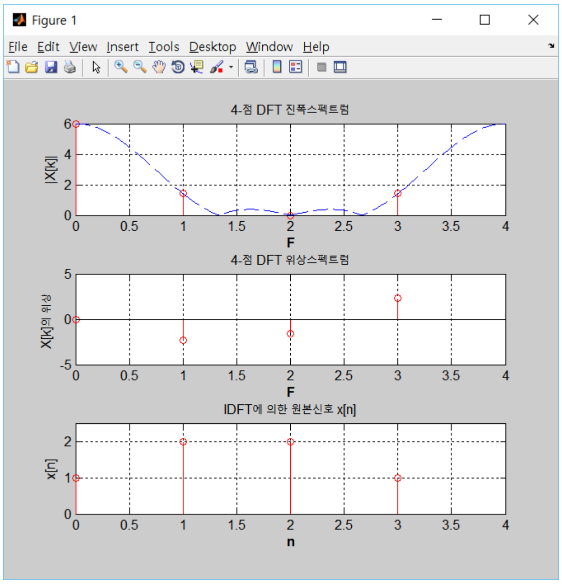
[과제해설]

[원본 이산신호]

$x[n] = [1, 2, 2, 1]$

[신호 $x[n]$에 대한 4점 DFT와 IDFT 결과]

n/k	$X[k]$	$x[n]$
0	6	1
1	-1-j1	2
2	0	2
3	-1+j1	1



이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습

2. 영 채우기(Zero-padding) 효과 실습

실습과제 36-02

[실습 1]에서 수행한 이산 비주기 신호 x[n]에 대하여 원본 신호에
영 채우기(Zero-padding)를 수행하여 8점-DFT 및 IDFT, 16점-DFT 및 IDFT를 수행
해 보고, 원래 4점-DFT 및 IDFT와의 차이점을 서로 비교해 보자.

$x[n] = [1, 2, 2, 1]$ 원본 신호

$x_1[n] = [1, 2, 2, 1, \boxed{0, 0, 0, 0}]$

N=8을 위해 원본신호에 4개의 영채우기

$x_2[n] = [1, 2, 2, 1, \boxed{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}]$

N=16을 위해 원본신호에 12개의 영채우기

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설] 8점 DFT

```
%%% Ex2.m 영채우기(zero-padding)의 효과 실습
N = 8;                    % 이산 신호의 샘플 개수
x=[1 2 2 1];              % 원본 신호 x[n] 벡터
x1=[x zeros(1,N-length(x))];    % Zero-Padding : 4개의 0 채우기
n=0:N-1;                  % 시간축 이산신호
k=0:N-1;                  % 주파수 축 샘플주파수

%%% DTFT 스펙트럼 계산하기
df = 1/500; f=df*[0:500];     % DTFT 스펙트럼의 주파수축 설정
W=exp(-j*2*pi.*f);            %             계산
Xf = zeros(1, length(f));     % DTFT 0으로 초기화

for m = 1: N
  Xf = Xf+x1(m)*W.^(m-1); % DTFT 계산
end
```

이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습

2. 영 채우기(Zero-padding) 효과 실습

[과제해설] 8점 DFT (계속)

```
%%%%%% 8점 - DFT 계산하기
Xk = fft(x1);            % 이산신호 x에 대한 DFT - FFT 알고리즘 활용
subplot(3,1,1);
stem(k,abs(Xk),'r');
xlabel('₩bf F');
ylabel('|X[k]|');
title('8-점 DFT 진폭스펙트럼');
grid on;
hold on;
plot(f*N,abs(Xf),'--b');            % DTFT의 진폭스펙트럼 그리기

subplot(3,1,2);
stem(k, angle(Xk),'r');
axis([0 8 -5 5]);
xlabel('₩bf F');
ylabel('X[k]의 위상');
title('8-점 DFT 위상스펙트럼');
grid on;

%%%%%% IDFT를 이용한 x[n] 계산하기
xn = ifft(Xk); % IDFT
subplot(3,1,3);
stem(n, xn,'r');
axis([0 8 0 2.5]);
xlabel('n');
ylabel('x[n]');
title('IDFT에 의한 원본신호 x[n]');
grid on;
```

이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습

2. 영 채우기(Zero-padding) 효과 실습

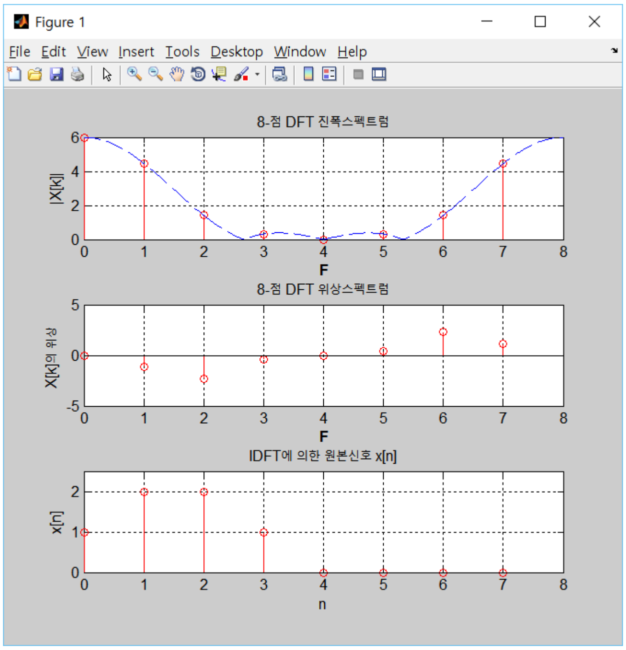
[과제해설] 8점 DFT (계속)

[원본 이산신호]

$$x_1[n] = [\underset{\uparrow}{1}, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0]$$

[신호 $x_1[n]$에 대한 8점 DFT와 IDFT 결과]

n/k	$X[k]$	$x[n]$
0	6	1
1	1.707-j4.121	2
2	-1.0-j1.0	2
3	0.293-j0.121	1
4	0	0
5	0.293+j0.121	0
6	-1.0+j1.0	0
7	1.707+j4.121	0



이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습

2. 영 채우기(Zero-padding) 효과 실습

[과제해설] 16점 DFT

```
%%% Ex2_2.m 영채우기(zero-padding)의 효과 실습
N = 16;                      % 이산 신호의 샘플 개수
x=[1 2 2 1];                 % 원본 신호 x[n] 벡터
x1=[x zeros(1,N-length(x))];    % Zero-Padding : 12개의 0 채우기
n=0:N-1;                     % 시간 축 이산신호
k=0:N-1;                     % 주파수 축 샘플주파수

%%% DTFT 스펙트럼 계산하기
df = 1/500; f=df*[0:500];     % DTFT 스펙트럼의 주파수축 설정
W=exp(-j*2*pi.*f);            %                 계산
Xf = zeros(1, length(f));       % DTFT 0으로 초기화

for m = 1: N
  Xf = Xf+x1(m)*W.^(m-1); % DTFT 계산
end

%%%%%% 16점 - DFT 계산하기
Xk = fft(x1);              % 이산신호 x에 대한 DFT - FFT 알고리즘 활용

subplot(3,1,1);
stem(k,abs(Xk),'r');
xlabel('₩bf F');
ylabel('|X[k]|');
title('16-점 DFT 진폭스펙트럼');
grid on;
hold on;
plot(f*N,abs(Xf),'--b');              % DTFT의 진폭스펙트럼 그리기

subplot(3,1,2);
stem(k, angle(Xk),'r');
axis([0 16 -5 5]);
xlabel('₩bf F');
ylabel('X[k]의 위상');
title('8-점 DFT 위상스펙트럼');
grid on;



(계속)
```

이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습

2. 영 채우기(Zero-padding) 효과 실습

[과제해설] 16점 DFT (계속)

```
%%%%%% IDFT를 이용한 x[n] 계산하기
xn = ifft(Xk); % IDFT
subplot(3,1,3);
stem(n, xn,'r');
axis([0 16 0 2.5]);
xlabel('n');
ylabel('x[n]');
title('IDFT에 의한 원본신호 x[n]');
grid on;
```

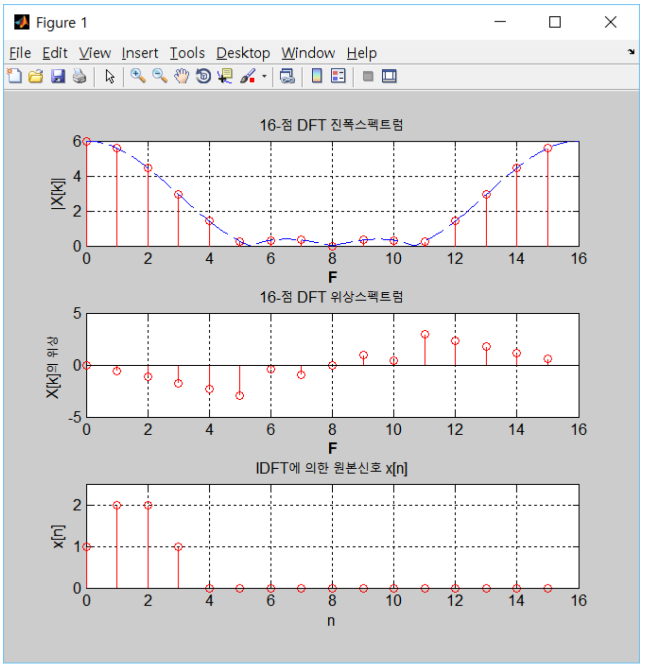
[원본 이산신호]

$$x_2[n] = [1, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

[신호 $x_2[n]$에 대한 16점 DFT와 IDFT 결과]

n/k	$X[k]$	$x[n]$
0	6	1
1	4.645-j3.104	2
2	1.707-j4.121	2
3	-0.573-j2.879	1
4	-1.0-j1.0	0
5	-0.256-j0.051	0
6	0.293-j0.121	0
7	0.184-j0.275	0

n/k	$X[k]$	$x[n]$
8	0	0
9	0.184+j0.275	0
10	0.293+j0.121	0
11	-0.256+j0.051	0
12	-1.0+j1.0	0
13	-0.573+j2.879	0
14	1.707+j4.121	0
15	4.645+j3.104	0

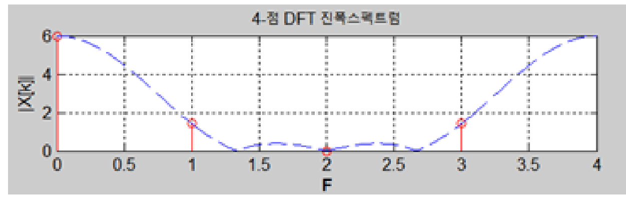


이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습

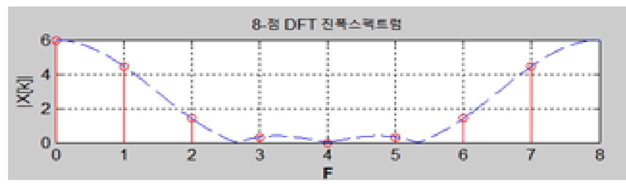
2. 영 채우기(Zero-padding) 효과 실습

[과제해설] 4점, 8점, 16점 DFT 비교

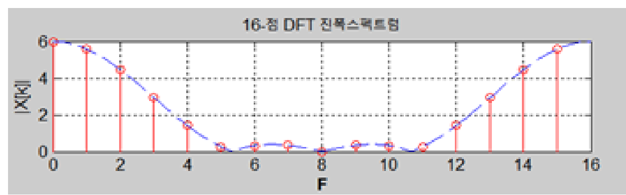
$x[n] = [1, 2, 2, 1]$



$x_1[n] = [1, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0]$



$x_2[n] = [1, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$



영채우기(Zero-padding) 효과는 DFT에 의한 샘플 스펙트럼의 해상도는 높아 졌지만,
스펙트럼 자체의 정확도는 달라지지 않음

이산 및 역이산 퓨리에 변환에 기초한 선형 필터링 실습

1. 이산 및 역이산 퓨리에 변환에 기초한 선형 필터링 실습

실습과제 36-03

DFT와 IDFT를 이용하여 다음 임펄스 응답(FIR 필터)과 입력신호 x[n]에 대하여 FIR 필터링 한 y[n]을 계산하는 Matlab 프로그램을 작성해 보자. 그리고 시간 영역에서 선형컨볼루션으로 계산한 결과와 같은지를 확인해 보자. i) N=L+M-1인 경우와 ii) N = 10인 경우, iii) N = 20인 경우에 대하여 각각 실시해 보자.

$$h[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3\} \qquad M = 3 \qquad L = 4$$

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 2, 1\}$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설] 8점 DFT

```
%%% Ex3_1.m DFT-IDFT에 기초한 선형 필터링 실습
L=4;            % 신호 x[n]의 길이
M=3;            % FIR 필터의 길이

%%%% 1. 시간 영역에서의 선형 컨볼루션에 의한 y[n] 계산하기
hn = [1 2 3];
xn = [1 2 2 1];
yn1 = conv(hn, xn);
subplot(2,1,1);
stem(yn1);
grid on;
xlabel('n');
ylabel('y[n]=h[n]*x[n]');
title('₩bf 시간 영역에서 선형 컨볼루션에 의한 출력 y[n]');


(계속)
```

이산 및 역이산 퓨리에 변환에 기초한 선형 필터링 실습

1. 이산 및 역이산 퓨리에 변환에 기초한 선형 필터링 실습

[과제해설] (계속)

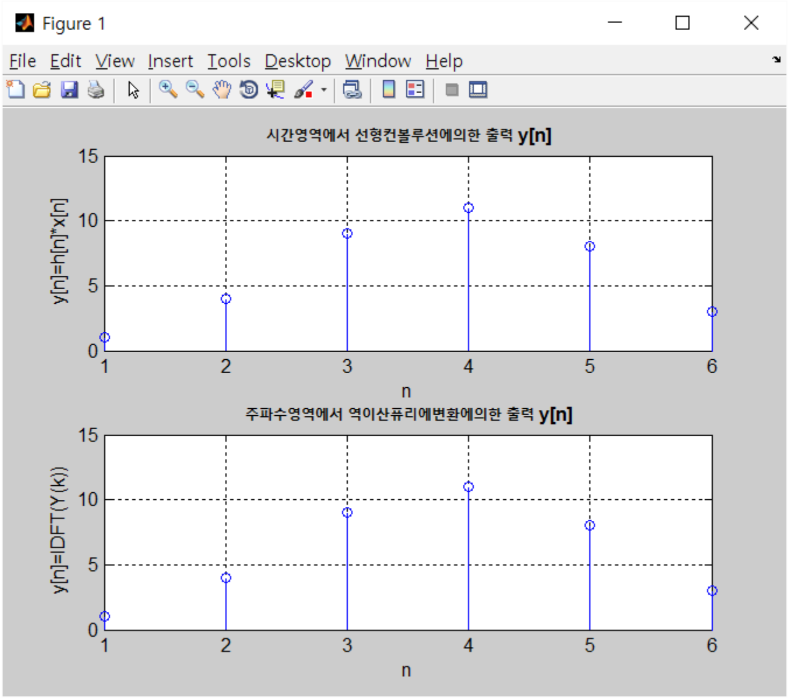
```
%%%% 2. DFT와 IDFT를 이용한 주파수 영역에서의 출력신호 y[n] 계산하기
N = L+M-1;        % N-DFT
Xk=fft(xn,N);
Hk=fft(hn,N);
Yk=Xk.*Hk;

yn2 = ifft(Yk,N);
subplot(2,1,2);
stem(yn2);
grid on;
xlabel('n');
ylabel('y[n]=IDFT(Y(k))');
title('₩bf 주파수 영역에서 역이산 퓨리에 변환에 의한 출력 y[n]');

%%% Ex3_2.m DFT-IDFT에 기초한 선형 필터링 실습 (N=8, N=10)
%%%% 1. 시간 영역에서의 선형 컨볼루션에 의한 y[n] 계산하기

hn = [1 2 3];
xn = [1 2 2 1];
yn1 = conv(hn, xn);
subplot(3,1,1);
stem(yn1);
axis([1 10 0 20]);
grid on;
xlabel('n');
ylabel('y[n]=h[n]*x[n]');
title('₩bf 시간 영역에서 선형 컨볼루션에 의한 출력 y[n]');

%%%% 2. DFT와 IDFT를 이용한 주파수 영역에서의 출력신호 y[n] 계산하기
N = 8;              % 8-DFT
Xk=fft(xn,N);
Hk=fft(hn,N);
Yk=Xk.*Hk;

yn2 = ifft(Yk,N);


(계속)
```

이산 및 역이산 퓨리에 변환에 기초한 선형 필터링 실습

1. 이산 및 역이산 퓨리에 변환에 기초한 선형 필터링 실습

[과제해설] (계속)

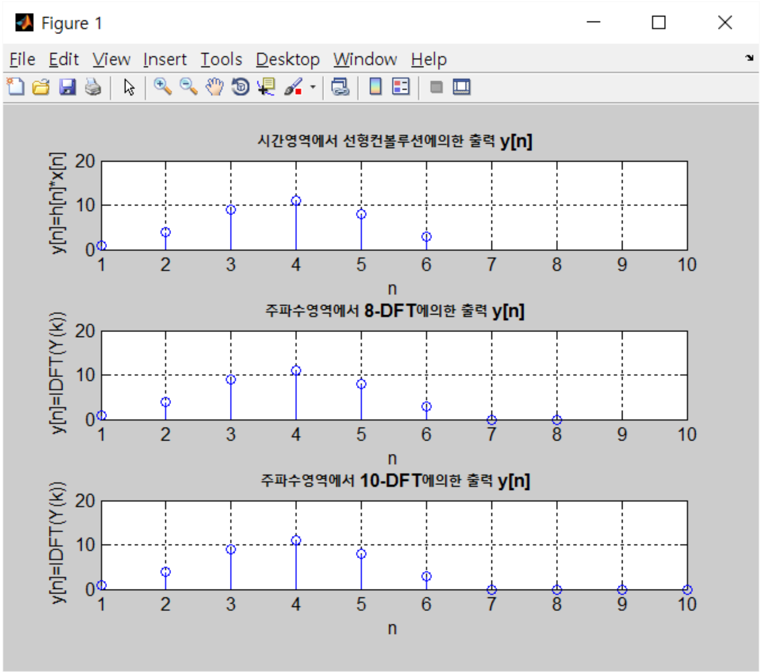
```
subplot(3,1,2);
stem(yn2);
axis([1 10 0 20]);
grid on;
xlabel('n');
ylabel('y[n]=IDFT(Y(k))');
title('₩bf 주파수 영역에서 8-DFT에 의한 출력 y[n]');

%%%% 2. DFT와 IDFT를 이용한 주파수 영역에서의 출력신호 y[n] 계산하기

N = 10;          % 10-DFT
Xk=fft(xn,N);
Hk=fft(hn,N);
Yk=Xk.*Hk;

yn3 = ifft(Yk,N);
subplot(3,1,3);
stem(yn3);
axis([1 10 0 20]);
grid on;
```



이산 및 역이산 퓨리에 변환에 기초한 선형 필터링 실습

1. 이산 및 역이산 퓨리에 변환에 기초한 선형 필터링 실습

[과제해설] (계속)



8-DFT를 위해 $x[n]$ 및 $h[n]$에 영 채우기 필요

10-DFT를 위해 $x[n]$ 및 $h[n]$에 영 채우기 필요

핵심정리

이산 퓨리에 변환(DFT) 및 역이산 퓨리에 변환(IDFT) 실습

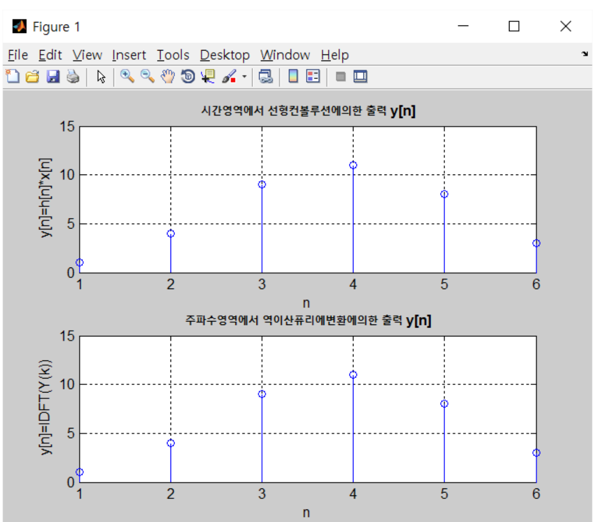
- **이산 LTI 시스템의 표현**

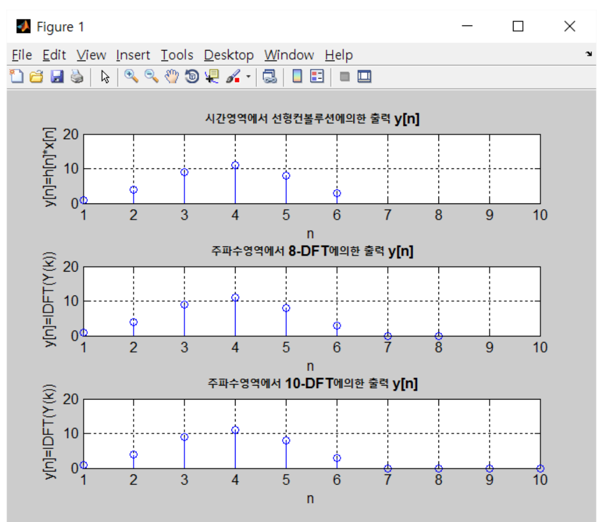
$$\underbrace{X(\Omega) = F\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n}}_{\text{DTFT}} \xrightarrow[\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}]{\text{N 샘플링}} X_N(\Omega) = \underbrace{X(k\Delta\Omega)}_{X[k]\ \text{DFT}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\ k = 0,1,\cdots,N-1$$

이산 및 역이산 퓨리에 변환에 기초한 선형 필터링 실습

- DFT에서 영 채우기(Zero-padding)의 효과

영 채우기(Zero-padding) 효과는 DFT에 의한 샘플 스펙트럼의 해상도는 높아지지만, 스펙트럼 자체의 정확도는 달라지지 않음





디지털신호처리

강 의 노 트

Z-변환과 Z-역변환

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

- ❖ Z-변환
- ❖ Z-역변환

학습목표

- ❖ Z-변환의 정의와 주요 신호의 Z-변환, Z-변환의 성질에 대해 설명할 수 있다.
- ❖ Z-역변환의 정의와 멱급수 전개 및 부분분수 전개에 의한 Z-역변환에 대해 알아보고 비교하여 설명할 수 있다.

Z-변환

1. Z-변환의 개념과 정의

1) 개념

- 신호 및 시스템에서의 표현영역

  → 시간 영역(t, n-영역), 주파수영역(f), Z-영역

- 신호와 시스템을 서로 다른 표현영역으로 변환했을 때의 이점

  → 한 영역에서의 어려운 분석이 때때로 다른 표현 영역에서는 더 쉬워질 수 있음

  [예] n-영역과 Z-영역

2) 정의

- 이산 신호 $x[n]$의 Z-변환은 멱급수(Power Series)로 정의됨
- 이산 신호나 시스템을 표현 및 분석, 설계에 사용하기 편리한 수학적인 변환임

$$\mathrm{X(z)} \equiv \mathrm{Z\{x[n]\}}$$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

※ 여기서 z: 복소수 변수

3) n-영역과 z-영역

n-영역(시간 영역)	Z-변환	z-영역
$x[n]$	⟺	$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$

- Z-변환은 무한급수의 합으로 표현됨으로 그 합이 유한하지 않으면 무의미함
- Z-변환의 수렴 영역(Region of Convergence: ROC)

  → Z-변환이 수렴하는 영역, $X(z)$의 값들이 유한한 영역

Z-변환

1. Z-변환의 개념과 정의

4) Z-변환과 이산 시간 퓨리에 변환(DTFT)과의 관계

DTFT $$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

- $z=e^{j\Omega}$ 로 두면 Z-변환과 동일함
- DTFT: Z-변환을 z평면의 단위원 상에서 값을 취한 경우에 해당

5) Z-변환의 의미

- 퓨리에 해석에 기반을 둔 주파수 영역 해석
- 퓨리에 표현에 비해 간결하고 더 일반적인 표현
- 전달함수 표현에 의해 극-영점 해석 가능
- 차분방정식을 대수방정식으로 변환

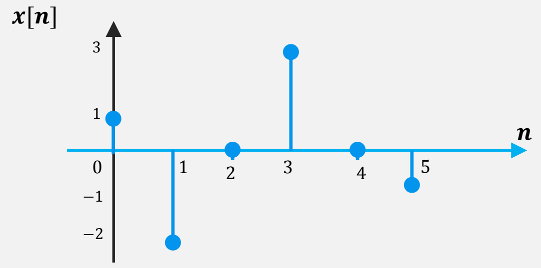
  → 이산 시스템 해석을 단순화

Z-변환

1. Z-변환의 개념과 정의

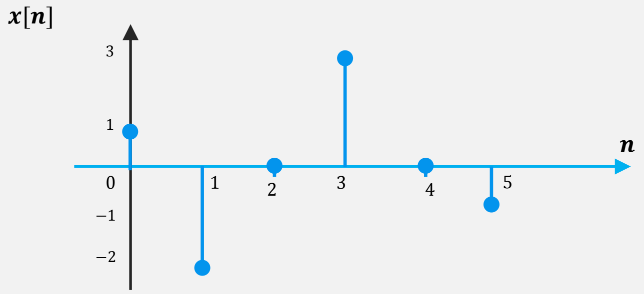
예제 37-01

다음과 같은 이산 신호 $x[n]$에 대한 Z-변환 $X[z]$를 구하고, 수렴 영역을 구해 보자.



$$x[n] = \{1, -2, 0, 3, 0, -1\}$$
$$= \delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3] - \delta[n-5]$$

[예제풀이]



i) Z-변환

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} - 1z^{-5}$$

ii) 수렴 영역(ROC)

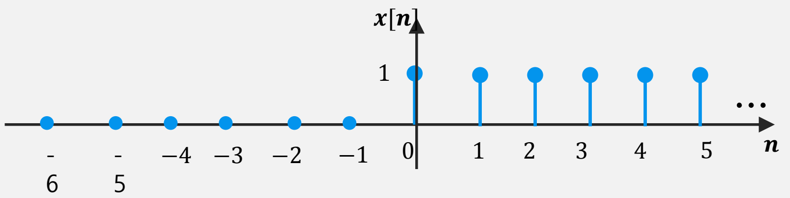
$X(Z)$가 존재하는 z-영역으로 $z = 0$을 제외한 z의 모든 영역

Z-변환

1. Z-변환의 개념과 정의

예제 37-02

다음과 같은 이산 신호 $x[n]$에 대한 Z-변환 $X[z]$를 구하고, 수렴 영역을 구해 보자. (단, $x[n]$ 신호는 Unit-step 함수)



$$x[n]=\begin{cases}1, 0 \le n \le \infty \\ 0, n<0\end{cases}$$

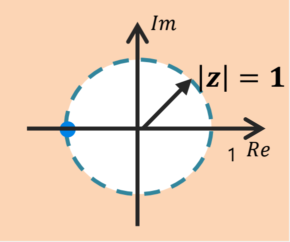
[예제풀이]

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = 1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots$$

- $X(z)$는 공비 $r=z$^(−1)인 무한등비급수
  $X(z)$가 수렴하기 위해서는 공비 |r|=|z^(−1) |<1, 즉 |z|>1이면, 수렴함
  ⇨ 수렴 값

$$x[n]=\begin{cases}1, 0 \le n \le \infty \\ 0, n<0\end{cases}$$

- 수렴 영역(ROC): z-평면에서 |z|>1 보다 큰 전체영역



Z-변환

2. 주요 신호에 대한 Z-변환

1) 임펄스 신호

$$x[n] = \delta[n]$$

$$\delta[n] \Leftrightarrow 1$$

$$※\, x[n] = \delta[n - n_0] \rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[n_0]z^{-n_0} = z^{-n_0}$$

2) (단위) 계단신호

$$x[n] = u[n]$$

$x[0] = x[1] = \cdots = x[n] = \cdots = 1$ 이므로

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-n} + \cdots, |z| > 1$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$\therefore u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

3) (단위) 램프 신호

$$x[n] = nu[n]$$

$$\begin{cases} X(z) = 0 + z^{-1} + 2z^{-2} + \cdots + nz^{-n} + \cdots \\ z^{-1}X(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + \cdots + nz^{-n-1} + \cdots \end{cases}$$

$$\rightarrow (1 - z^{-1})X(z) = z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-n} + \cdots$$

$$\therefore X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}, |z| > 1$$

$$\therefore nu[n] \Leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}, |z| > 1$$

4) (단위) 지수 신호

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

Z-변환

3. Z-변환의 특징

1) 선형 변환

- Z-변환은 선형성(Linearity)을 가짐

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \quad \xleftrightarrow{\text{Z-변환}} \quad \begin{aligned} X[z] &= \sum_{n=0}^{N} (ax_1[n] + bx_2[n]) z^{-n} \\ &= a\sum_{n=0}^{N} x_1[n] z^{-n} + b\sum_{n=0}^{N} x_1[n] z^{-n} \\ &= aX_1(z) + bX_2(z) \end{aligned}$$

2) 시간 지연

- 시간영역에서 단위-지연 연산자 D는 $\boldsymbol{z}$^(−**1**)과 상호 교환적으로 사용됨

$$x[n-1] \quad \xleftrightarrow{\text{Z-변환}} \quad z^{-1}X(z)$$

$$x[n-k] \quad \xleftrightarrow{\text{Z-변환}} \quad z^{-k}X(z)$$

$$y[n] = D\{x[n]\} = x[n-1] \equiv x[n] \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow x[n-1]$$

3) 두 이산 신호의 컨볼루션

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad \xleftrightarrow{\text{Z-변환}} \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

※참고) 증명

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

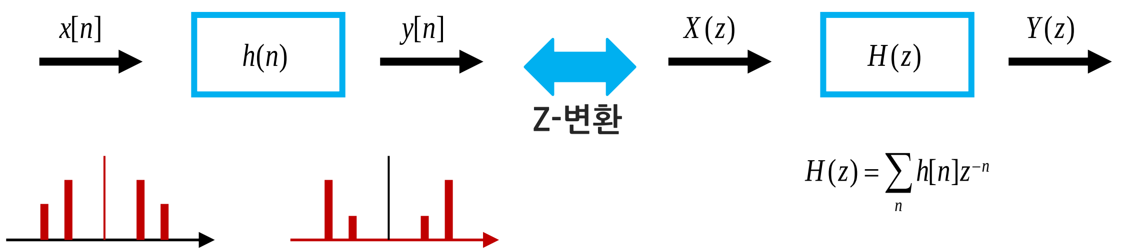
$$Y(z) = \sum_{k=0}^{M} h[k](z^{-k}X(z)) = (\sum_{k=0}^{M} h[k]z^{-k})X(z) = H(z)X(z)$$

Z-변환

3) 두 이산 신호의 컨볼루션

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad \overset{\text{Z-변환}}{\longleftrightarrow} \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

이산 시간 n-영역	z-영역



$$H(z) = \sum_n h[n] z^{-n}$$

Z-역변환

1. Z-역변환의 정의

1) 정의

- 주어진 Z-변환으로부터 n-영역의 이산 신호로 복구하는 것

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_c X(z)z^{n-1}dz$$

2) Z-역변환 수행 방법

Z-변환 활용

- 주어진 Z-변환으로부터 n-영역의 이산 신호로 복구

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_c X(z)z^{n-1}dz$$

- 하지만, Z-역변환식인 복소 적분식을 통하여 이산 신호 $x[n]$을 계산하지 않음

멱급수 전개법

- 장제법(Long Division)을 이용한 멱급수 전개
- 신호의 처음 몇 개 샘플의 값을 구하고자 할 때 유용

부분분수 전개법

- 부분분수로 전개하여 Z-변환쌍표에 있는 함수들의 합으로 표현
- 가장 많이 사용

2. 멱급수 전개법에 의한 Z-역변환

1) 멱급수 전개법

- $X(z)$에 대해 분자를 분모로 직접 나누어 z^{-1}의 멱급수 형태로 전개

  ⇨ 급수의 계수가 바로 $x[0], x[1], \cdots x[n], \cdots$에 해당
- $x[n]$을 직접 구할 수 있지만 닫힌 꼴의 해를 제공하지 못함

Z-역변환

2. 멱급수 전개법에 의한 Z-역변환

예제 37-03

다음 식으로 주어진 Z-변환 $X(z)$를 역변환하여 $x[n]$을 구해 보자.

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} - z^{-5}$$

[예제풀이]

$$X(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} - z^{-5}$$

Z-변환 수식에 의하여 $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$

$x[0] = 1,\ x[1] = -2,\ x[2] = 0,\ x[3] = 3,\ x[4] = 0,\ x[5] = -1$

$$\begin{aligned} x[n] &= \{1, -2, 0, 3, 0, -1\} \\ &= \delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3] - \delta[n-5] \end{aligned}$$

예제 37-04

다음과 같은 $X(z)$에서 장제법에 의한 Z-역변환을 이용하여 $x[n]$ 신호를 구해 보자.

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 2z^{-2}}$$

[예제풀이]

$X(z)$의 분자항을 분모항으로 나누면

$$\begin{array}{r l}
 & 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + -4z^{-3} + \cdots \\
1 - z^{-1} + 2z^{-2} \,\big) & 1 + 2z^{-1} + z^{-2} \\
 & \underline{1 - z^{-1} + 2z^{-2}} \\
 & 3z^{-1} - z^{-2} \\
 & \underline{3z^{-1} - 3z^{-2} + 6z^{-3}} \\
 & 2z^{-2} - 6z^{-3} \\
 & \underline{2z^{-2} - 2z^{-3} + 4z^{-4}} \\
 & -4z^{-3} - 4z^{-4}
\end{array}$$

$$X(z) = 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} - 4z^{-3} + \cdots$$

$$\therefore\ x[n] = \{1, 3, 2, -4, \ldots, \}$$

Z-역변환

3. 부분분수 전개법에 의한 Z-역변환

1) 부분분수 전개법

- $X(z)$를 Z-변환표에 나타나 있는 함수들의 합으로 표현하여 변환

$$a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

- $X(z)$를 Z-변환표에 나타나 있는 함수들의 합으로 표현하여 변환

$$X[z] = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_p z^{-p}} = \frac{b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \cdots + b_q z^{p-q}}{z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots + a^p} = \sum_{i=1}^{p} \frac{K_i}{z - p_i}$$

⇨분자에 z항이 없기 때문에 $X(z)/z$를 부분분수로 전개 한 후 양변에 z를 곱함

예제 38-05

다음 Z-변환의 역변환을 부분분수 전개에 의한 방법으로 구해 보자.

$$X(z) = \frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}, \quad ROC : |z| > 1$$

[예제풀이]

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.5}$$

양변에 $(z-1)(z-0.5)$를 곱하면 $\quad z = (z-0.5)A_1 + (z-1)A_2$

z=0.5를 양변에 대입하면, $\quad 0.5 = (0.5-1)A_2 \quad \therefore A_2 = -1$

z=1을 양변에 대입하면, $\quad 1 = (1-0.5)A_1 \quad \therefore A_1 = 2$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.5} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0.5}$$

$$\therefore X(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} \quad \xLeftrightarrow{\text{Z-역변환}} \quad x[n] = 2u[n] - (0.5)^n u[n]$$

$$u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

핵심정리

Z-변환

- 이산신호 x[n]에 대한 Z-변환은 다음과 같이 정의됨

n-영역(시간 영역)	Z-변환	z-영역
$x[n]$	⟺	$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$

- 주요신호에 대한 Z-변환

임펄스 신호 $\delta[n] \Leftrightarrow 1$	(단위)계단 신호 $u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-1},\ \lvert z\rvert > 1$
(단위)램프신호 $n u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2},\ \lvert z\rvert > 1$	(단위)지수 신호 $a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-a},\ \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

- Z-변환의 특징

선형성 $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ $\xleftrightarrow{\text{Z-변환}}$ $X[z] = aX_1(z) + bX_2(z)$

시간지연특징 $x[n-k]$ $\xleftrightarrow{\text{Z-변환}}$ $z^{-k}X(z)$

컨볼루션 연산 $y[n] = h[n] * x[n]$ $\xleftrightarrow{\text{Z-변환}}$ $Y(z) = H(z)X(z)$

Z-역변환

Z-변환 활용 $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_c X(z)z^{n-1}dz$

- Z-역변환은 주어진 Z-변환으로부터 n-영역의 이산신호로 복구하는 것 하지만, Z-역변환식인 복소 적분식을 통하여 이산 신호 x[n]을 계산하지 않음

멱급수 전개법

- 긴 나눗셈에 의한 멱급수 전개법에 의한 Z-역변환
  - 장제법(Long Division)을 이용한 멱급수 전개

부분분수 전개법

- 부분분수 전개법에 의한 Z-역변환
  - 부분분수로 전개하여 Z-변환쌍표에 있는 함수들의 합으로 표현

디지털신호처리

강 의 노 트

Z-변환의 응용과 디지털 필터 기초

한국기술교육대학교
온라인평생교육원

학습내용

❖ 이산 시스템 전달 함수

❖ 디지털 필터 기초

학습목표

❖ 이산 시스템의 전달 함수와 시스템의 특성에 대해 이해하고 설명할 수 있다.

❖ 디지털 필터의 기초 개념에 대해 이해하고
디지털 필터 응용 분야에 대해 설명할 수 있다.

이산 시스템 전달 함수

1. 이산 시스템 전달 함수의 정의

1) 정의

- 시스템이 입력을 출력 쪽으로 전달한 정도를 보여주는 함수
- z-영역에서 표시된 입력과 출력의 비

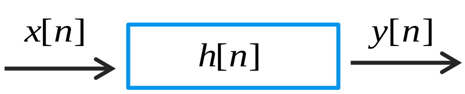
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{Q(z)}{P(z)}$$

2) 임펄스 응답의 Z-변환

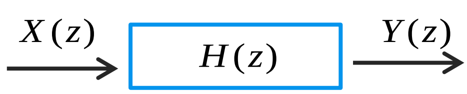
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*y[n]\rightarrow Y(z)=H(z)X(z)$$

$$\therefore H(z)=Z\{h[n]\}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

- 이산 LTI 시스템의 표현



(a) 임펄스 응답 표현



(b) 전달 함수 표현

3) 차분 방정식으로 전달 함수 구하기

$$y[n]+a_1y[n-1]+\cdots+a_py[n-p]=b_0x[n]+\cdots+b_qx[n-q]$$

$$Y(z)+a_1z^{-1}Y(z)+\cdots+a_pz^{-p}Y(z)=b_0X(z)+\cdots+b_qz^{-q}X(z)$$

$$\therefore H(z)=\frac{Q(z)}{p(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_qz^{-q}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_pz^{-p}}=\frac{\sum_{i=0}^{q}b_qz^{-i}}{\sum_{i=0}^{p}a_iz^{-i}}=\frac{b_0z^{p}+b_1z^{p-1}+\cdots+b_qz^{p-q}}{z^{p}+a_1z^{p-1}+\cdots+a_p}=\frac{\sum_{i=0}^{q}b_qz^{p-i}}{\sum_{i=0}^{p}a_iz^{p-i}}$$

※ $P(z)=z^{p}+a_1z^{p-1}+\cdots+a_p=0$: 시스템의 특성 방정식

전달 함수는 시스템이 바뀌지 않는 한 불변 & 입력의 형태와는 무관함

이산 시스템 전달 함수

1. 이산 시스템 전달 함수

예제 38-01

다음과 같이 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템의 시스템 전달 함수 $H(z)$를 구해 보자.

$$y[n] = 0.5y[n-1] + 2x[n]$$

[예제풀이]

- 차분 방정식의 양변을 Z-변환하면

$$y[n] = 0.5y[n-1] + 2x[n]$$

$$Y(z) = 0.5z^{-1}Y(z) + 2X(z)$$

$$(1-0.5z^{-1})Y(z) = 2X(z)$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1-0.5z^{-1}} = \frac{2z}{z-0.5}$$

이산 시스템 전달 함수

2. 전달 함수의 극점과 영점

1) 시스템의 극과 영점

시스템의 극

- 특성 방정식 $P(z)=0$를 만족하는 해
- 시스템의 고유한 특성을 결정하는 요소
- 과도응답, 안정도 등의 시스템 동작 특성 지배

시스템의 영점

- 전달 함수 $H(z)$의 분자 =0
- $Q(z)=0$을 만족하는 점
- 시스템과 입력의 연관 작용을 결정하는 요소

※극과 영점 모두 복소수 값을 가질 경우에는 공액으로 존재

이산 시스템 전달 함수

2. 전달 함수의 극점과 영점

예제 38-02

다음과 같은 전달 함수를 갖는 시스템에서 극점과 영점을 z-평면에 그려보자.

$$H_1(z)=\frac{z^2(z+1)}{(z-0.5+j0.5)(z-0.5-j0.5)(z-0.8)}$$

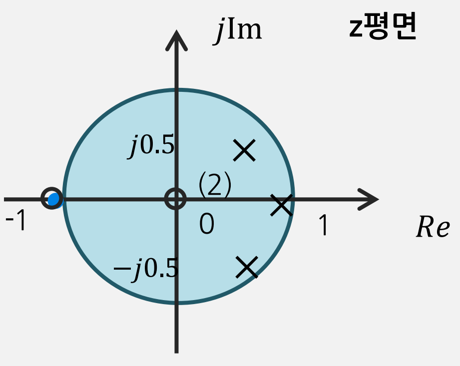
$$H_2(z)=\frac{(z^3-1)(z^2+1)}{z^5}$$

[예제풀이]

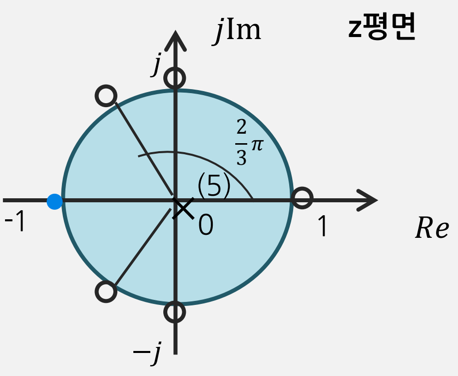
$$H_1(z)=\frac{z^2(z+1)}{(z-0.5+j0.5)(z-0.5-j0.5)(z-0.8)}$$

$$H_1(z)=\frac{z^2(z+1)}{(z-0.5+j0.5)(z-0.5-j0.5)(z-0.8)}$$

[$H_1(z)$의 극과 영점]



[$H_2(z)$의 극과 영점]



이산 시스템 전달 함수

3. 전달 함수와 시스템의 특성

1) 인과성

- 전달 함수 ***H*(*z*)에 *z*^(*n*_0)의 항을 포함하면** 비인과적 시스템임

$$y[n] = x[n+n_0] \rightarrow H(z) = z^{n_0}$$

미래 입력에 의해 현재 출력이 결정

- 인과 시스템의 경우 전달 함수 ***H*(*z*)**의 **분자가 분모보다 고차일 수 없음**

[예]

$$H(z) = \frac{z^2 + 0.4z + 0.9}{z - 0.6} = z + \frac{z + 0.9}{z - 0.6}$$

비인과

2) 안정성

- 전달 함수 ***H*(*z*)**의 주요 역할
  → **디지털 필터의 안정도를 판별**하는 것

- 전달 함수의 극점(Pole)이 **단위원 안**에 있으면 안정함 (단위원은 포함되지 않음)
  ※참고) 인과 LTI 시스템의 BIBO 안정조건 $\sum_{n=0} |h[n]| < \infty$

- FIR 필터의 전달 함수에는 극점이 없음
  → **FIR 필터**는 항상 **안정**, **IIR 필터**의 **안정도를 고려**

?

전달 함수의 극점(pole)이 단위원 안에 있으면 안정한 이유는?

⇨ 1차 디지털 필터에 대한 시스템 함수(***H*(*z*)**)를 갖는 시스템의 임펄스 응답(***h*[*n*]**)

Z-역변환

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} \quad \Longleftrightarrow \quad h[n] = b \cdot (a)^n u[n]$$

- ***Z*=*a***에 하나의 극점을 갖는 IIR 시스템의 임펄스응답

$$If \quad |a| < 1, \quad \lim_{n \to \infty} h[n] = 0$$

$$If \quad |a| > 1, \quad \lim_{n \to \infty} h[n] = \infty$$

⇨ **극점이 단위원 안에 존재**할 때, 시스템은 출력 값이 어느 한계 내에 있는 **안정한 시스템**이 됨

이산 시스템 전달 함수

3. 전달 함수와 시스템의 특성

예제 38-03

두 개의 순허수 극점을 가지는 인과 LTI 시스템의 전달 함수가 다음과 같을 때,
이 시스템의 안정도를 판별해 보자.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z - ja)(z + ja)}$$

[예제풀이]

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z - ja)(z + ja)}$$

전달 함수로부터, $z^2 Y(z) + a^2 Y(z) = X(z)$

$$Y(z) + a^2 z^{-2} Y(z) = z^{-2} X(z)$$

시스템의 차분 방정식은 $y[n] + a^2 y[n-2] = x[n-2]$

시스템의 임펄스 응답 $x[n] = \delta[n]$ 일 때의 출력 $h[n] = -a^2 h[n-2] + \delta[n-2]$

반복적 대입법을 이용하여 $h[n] = \{0, 0, 1, 0, -a^2, 0, a^4, 0, -a^6, 0, \cdots\}$

$$h[n] = \{0, 0, 1, 0, -a^2, 0, a^4, 0, -a^6, 0, \cdots\}$$

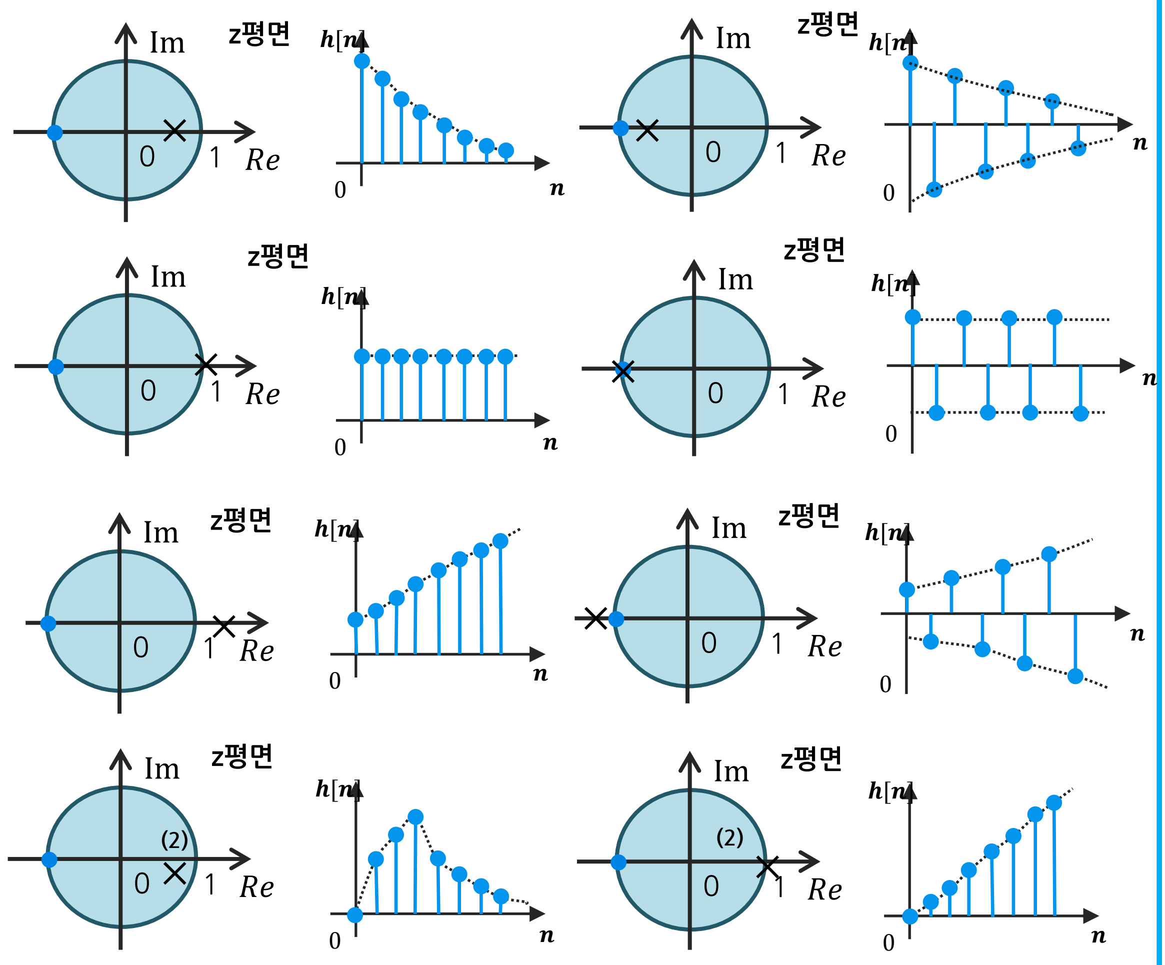
i) $\lvert a \rvert > 1$	임펄스 응답 $h[n]$은 발산
ii) $\lvert a \rvert = 1$	단위원상에 허수근이 존재하는 경우, 1과 -1이 번갈아가면서 반복되어, 불안정한 상태
iii) $\lvert a \rvert < 1$	전달 함수의 극이 단위 원 내에 존재하는 경우, n이 증가하면서 $h[n] \to 0$으로 수렴하게 되어 전체 시스템은 안정

전달 함수의 극점이 단위원 내에 존재하면 그 시스템은 BIBO 안정

이산 시스템 전달 함수

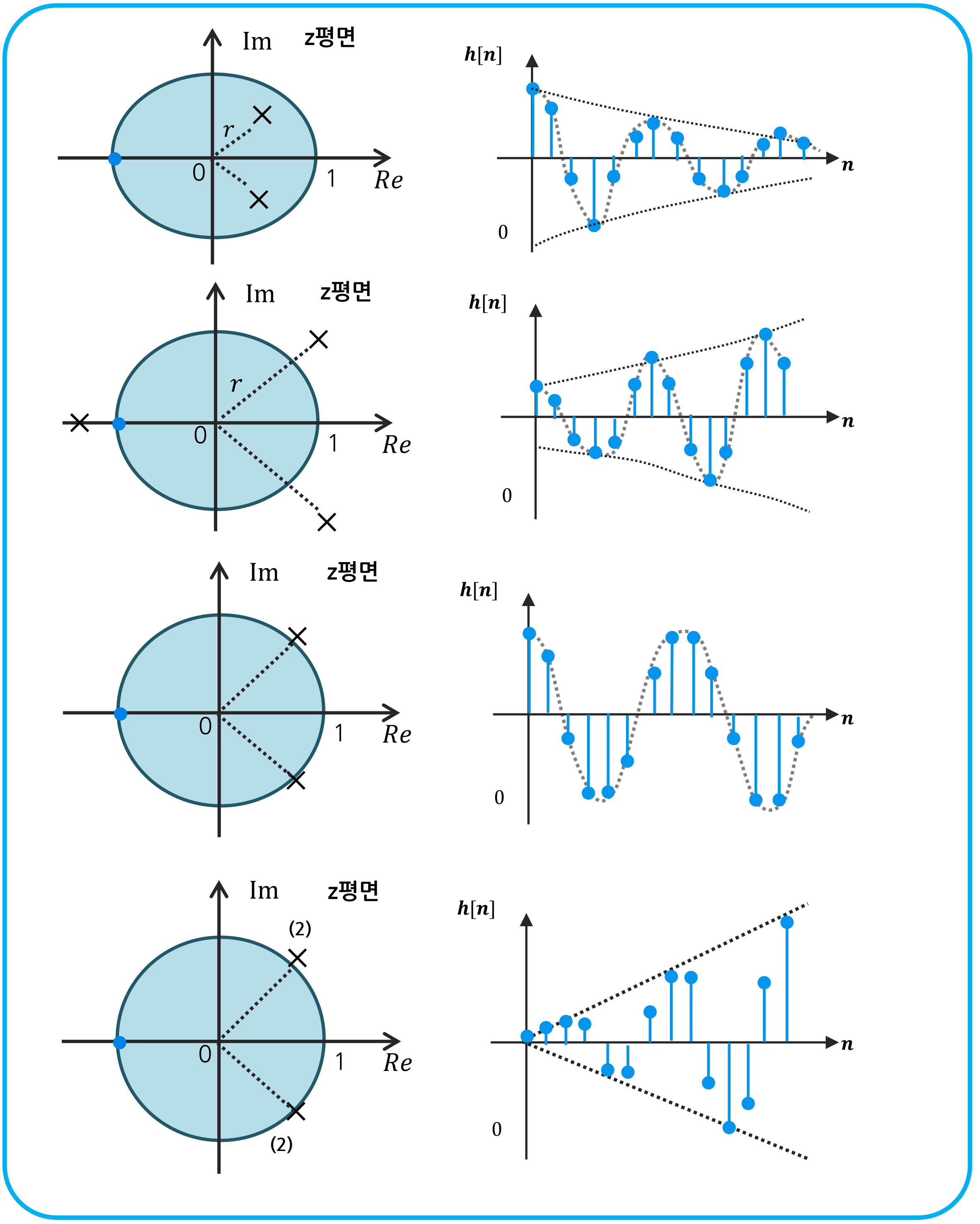
3. 전달 함수와 시스템의 특성

3) 전달 함수가 실수 극점을 가지는 경우, 임펄스 응답의 형태



이산 시스템 전달 함수

4) 전달 함수가 공액 복소수 극점을 가지는 경우, 임펄스 응답의 형태



이산 시스템 전달 함수

4. 전달 함수와 시스템의 주파수 응답

1) 주파수 응답

- 전달 함수를 복소평면의 단위원 $z = e^{j\Omega}$ 을 따라 계산한 값

$$\begin{cases} H(\Omega) = DTFT\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{j\Omega n} \\ H(z) = Z\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \end{cases}$$

$$\therefore H(\Omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$

2) 전달 함수의 극점과 영점에 대한 주파수 응답의 의존성

- 주파수 응답은 전달 함수 $H(z)$의 극·영점 위치에 의해 결정

$$H(\Omega) = b_0 \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_q)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_p)}\bigg|_{z=e^{j\Omega}}$$

$$|H(\Omega)| = b_0 \frac{|z-z_1||z-z_2|\cdots|z-z_q|}{|z-p_1||z-p_2|\cdots|z-p_p|}\bigg|_{z=e^{j\Omega}} = b_0 \frac{\prod_{i=1}^{q}|e^{j\Omega}-z_i|}{\prod_{i=1}^{p}|e^{j\Omega}-p_i|} \qquad b_0 \frac{\text{각 영점에서 } e^{j\Omega}\text{까지 거리의 곱}}{\text{각 극에서 } e^{j\Omega}\text{까지 거리의 곱}}$$

$$\angle H(\Omega) = \Big[\{\angle(z-z_1)+\cdots+\angle(z-z_p)\} - \{\angle(z-p_1)+\cdots+\angle(z-p_p)\}\Big]_{z=e^{j\Omega}}$$

디지털 필터 기초

1. 디지털 필터 개요

1) 필터(Filter)

- 신호에 포함된 불필요한 성분을 걸러내고 **필요한 정보**만 뽑아내 제공
- 신호의 **특성을 변경**하거나 **구성 요소를 제거**하는 시스템

2) 신호 분리와 신호 복구

신호 분리

- 한꺼번에 섞여 있는 여러 신호들 중에서 **특정한 신호**만 뽑아냄
- [예] 공중파 방송용 튜너(Tuner)
  다수의 방송 전파 중 특정 방송국의 전파만 선택

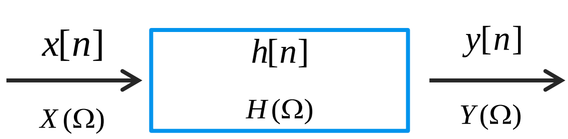
신호 복구

- 잡음 등으로 인해 **훼손된 신호**를 말끔한 상태로 재건
- [예] 이미지 화질 개선
  뭉개진 이미지를 깨끗한 이미지로 보정

3) 차분 방정식으로 전달 함수 구하기

- 입력 스펙트럼 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\Omega})$를 주파수 응답 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Omega})$에 의해 변형시켜 $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{\Omega})$를 생성

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$



디지털 필터 기초

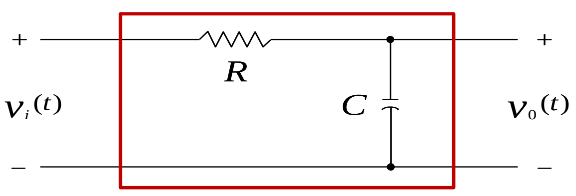
4) 필터의 설계

- 필터의 특성은 전달 함수(주파수 응답)에 따라 결정됨
- 필터 설계: 전달 함수의 극/영점의 결정 또는 필터 계수의 결정
- 동일한 필터에 대해서도 물리적인 구현은 다를 수 있음

5) 아날로그 필터와 디지털 필터

	아날로그 필터	디지털 필터
수식	미분 방정식 $\sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^{p-i}y(t)}{dt^{p-i}} = \sum_{i=0}^{q} b_i \frac{d^{q-i}x(t)}{dt^{q-i}}$	차분 방정식 $\sum_{i=0}^{p} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{q} b_i x[n-i]$
변환	라플라스 변환 $\int_0^{\infty} h(t)e^{-st}dt$	Z-변환 $\sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$
전달 함수	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$	$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$
주파수 응답	$H(\omega) = H(s)\big\|_{s=j\omega}$	$H(\Omega) = H(z)\big\|_{z=e^{j\Omega}}$
물리적 구현	하드웨어	하드웨어, 소프트웨어

아날로그 필터



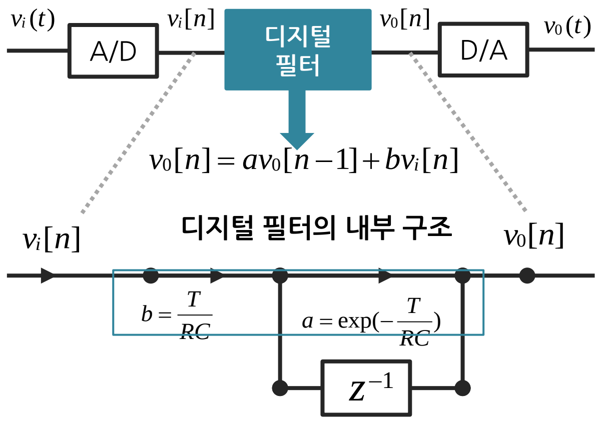
[아날로그 RC 필터]

$$\frac{dv_0(t)}{dt} + (1/RC)v_0(t) = (1/RC)v_i(t)$$

$$h(t) = (1/RC)e^{-(1/RC)t}$$

$$v_0(t) = h(t) * v_i(t)$$

디지털 필터



[아날로그 RC 필터에 대한 디지털 필터 등가 회로]

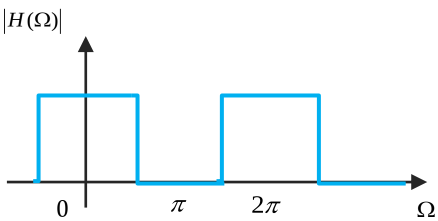
디지털 필터 기초

2. 주파수 응답/전달 함수와 필터 특성

1) 주파수 선택 특성에 따른 필터의 종류

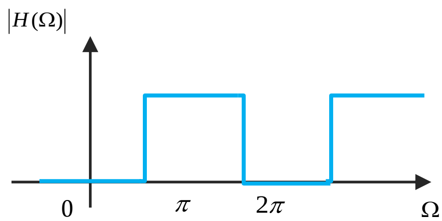
저역 통과 필터 (Low Pass : LP)

낮은 주파수 대역 신호만 통과



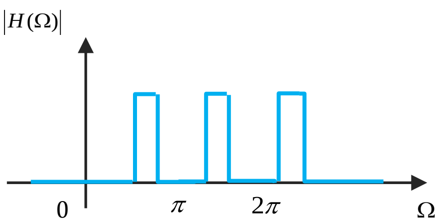
고역 통과 필터 (High Pass : HP)

높은 주파수 대역 신호만 통과



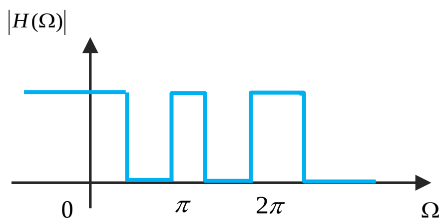
대역 통과 필터 (Band Pass : BP)

특정 주파수 대역 신호만 통과



대역 저지 필터 (Band Stop : BS)

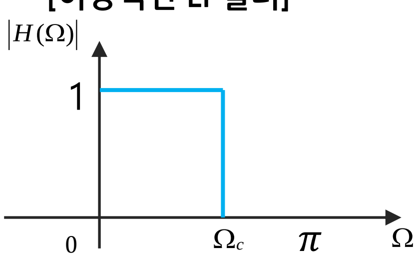
특정 주파수 대역 신호만 저지



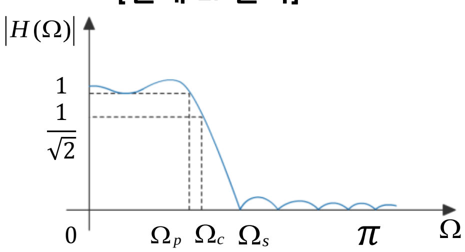
2) 주파수 응답과 필터의 특성

- 필터의 특성은 주파수 영역에서 주파수 응답으로 표현

[이상적인 LP필터]



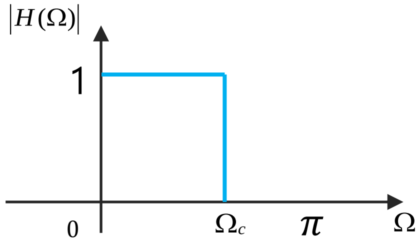
[실제 LP필터]

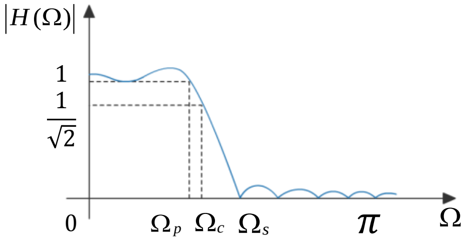


Ω_p 통과 대역의 이득이 최저가 되는 경계 주파수
Ω_c 차단 주파수(입력과 출력의 전력비가 반이 되는 주파수)
Ω_s 저지대역 경계 주파수

디지털 필터 기초

2) 주파수 응답과 필터의 특성





통과 대역

- 큰 이득으로 입력을 통과시켜 출력으로 내보내는 주파수 범위
- 이상적인 필터: 차단 주파수 Ω_c까지의 주파수 범위
- 실제적 필터: 통과 대역 경계 주파수 Ω_c까지의 주파수 범위

저지 대역

- 작은 이득으로 입력을 통과시켜 출력으로 내보내는 주파수 범위
- 이상적인 필터: 차단 주파수 Ω_c 이후의 주파수 범위
- 실제적 필터: 통과 대역 경계 주파수 Ω_c 이후의 주파수 범위

천이대역

- 통과 대역에서 저지 대역으로 옮겨가는 주파수 범위

차단 주파수

- 입력이 실효적으로 차단되기 시작하는 주파수
- 이상적인 필터: 통과 대역과 지지 대역의 경계 주파수
- 실제적인 필터: 반전력 주파수, 즉, 이득이 -3dB인 주파수

$$\left.\frac{P_y}{P_x}\right|_{\Omega=\Omega_c} = \left|H(\Omega)\right|^2_{\Omega=\Omega_c} = \frac{1}{2}$$

대역폭

- 입력이 실효적으로 통과되는 차단 주파수까지의 주파수 범위

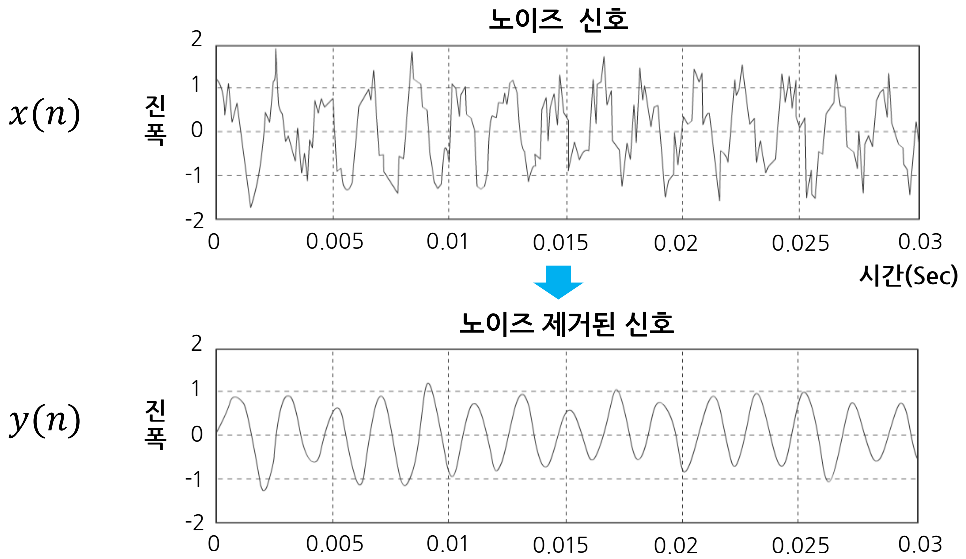
대역폭

- 천이 대역의 이득이 직선적으로 감소하는 기울기
  ⇨ 양호한 차단 특성을 위해 천이 대역 폭을 좁게, 즉 감쇠율이 크게 설계

디지털 필터 기초

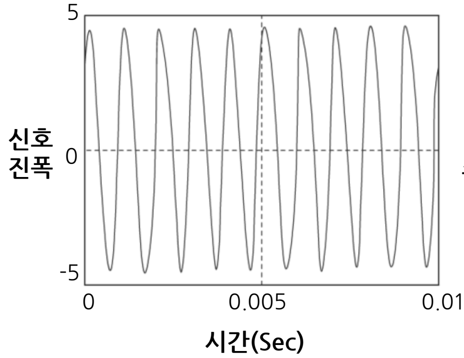
3. 디지털 필터 응용분야

1) 노이즈를 제거하는 디지털 필터링

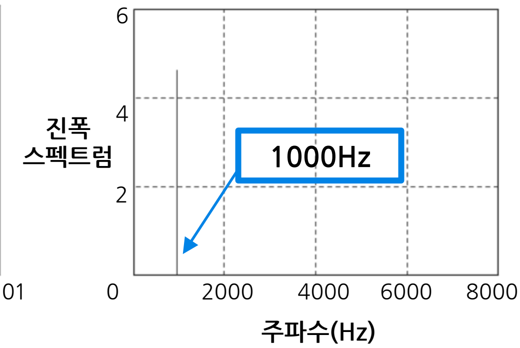


디지털 필터 기초

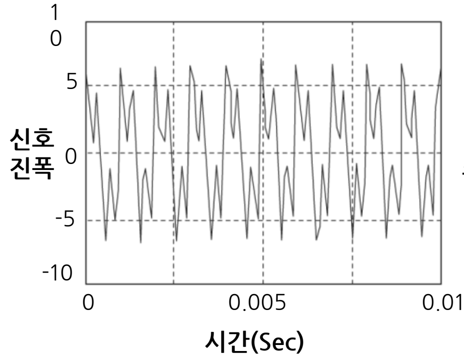
2) 주파수 성분을 분석하는 스펙트럼 분석



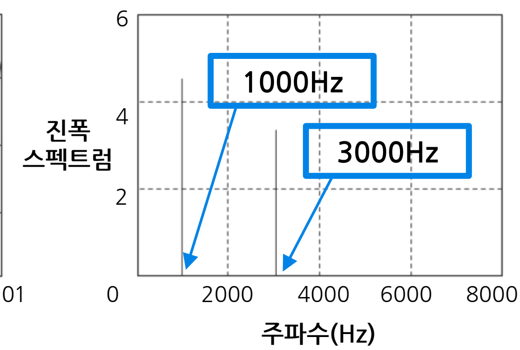
[A]



[B]

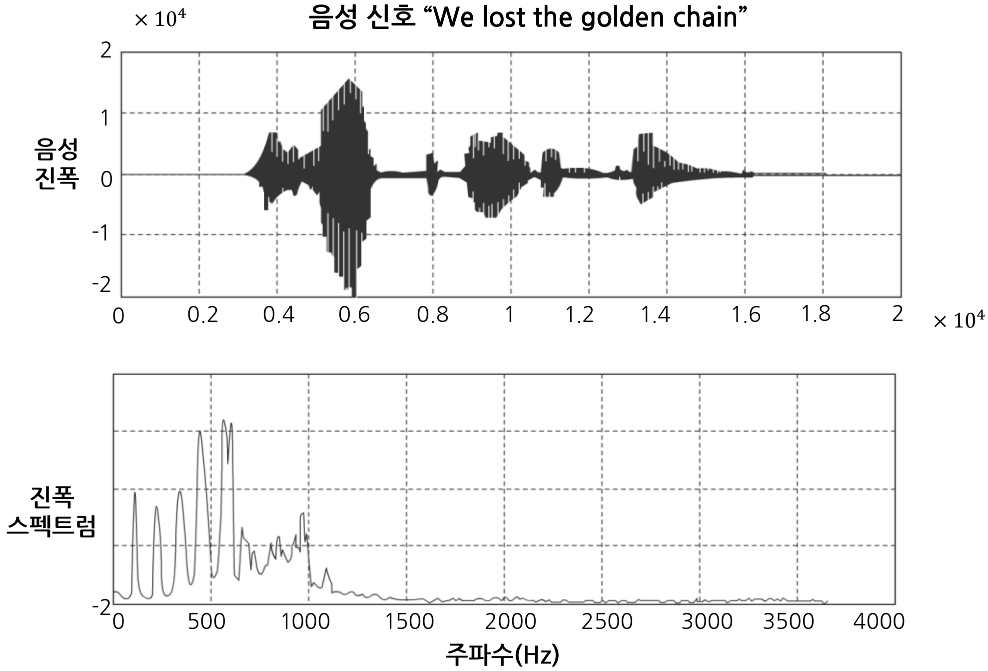


[C]



[D]

음성 신호 “We lost the golden chain”



디지털 필터 기초

3) 디지털 영상에서의 영상 화질 개선

[원본 이미지]

[향상된 이미지]

※ 이미지 출처: www.iclickart.com

핵심정리

이산시스템 전달 함수

- 시스템이 입력을 출력 쪽으로 전달한 정도를 보여주는 함수
- z 영역에서 표시된 입력과 출력의 비

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{Q(z)}{P(z)}$$

- 임펄스 응답의 Z-변환

$$\therefore H(z)=Z\{h[n]\}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

- 시스템의 극

- 특성 방정식 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=\mathbf{0}$를 만족하는 해

- 시스템의 고유한 특성을 결정하는 요소

- 과도응답, 안정도 등의 시스템 동작 특성 지배

- 시스템의 영점

- 전달 함수 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z})$의 분자 =0

- $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{z})=\mathbf{0}$을 만족하는 점

- 시스템과 입력의 연관 작용을 결정하는 요소

- 전달 함수와 시스템의 안정성

- 전달 함수(H(z)의 용도 중 가장 중요한 것은 디지털 필터의 안정도를 판별하는 것임

- 전달 함수의 극점(pole)이 단위원 안에 있으면 안정(단위원은 포함되지 않음)

- 주파수 응답은 전달 함수를 복소평면의 단위원 $e^{j\Omega n}$ 을 따라 계산한 값

$$\begin{cases} H(\Omega)=DTFT\{h[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{j\Omega n} \\ H(z)=Z\{h[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n} \end{cases}$$

$$\therefore H(\Omega)=H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

핵심정리

디지털 필터 기초

- 필터
  신호에 포함된 불필요한 성분을 걸러내고 필요한 정보만 뽑아내 제공하거나 신호의 특성을 변경 하거나 어떤 구성 요소를 제거하는 시스템
- 필터의 특성
  전달 함수(주파수 응답)에 따라 결정되고, 필터를 설계하는 것은 전달 함수의 극/영점(또는 필터 계수)을 결정하는 것
- 주파수 선택 특성에 따른 필터의 종류: 저역통과필터, 고역통과필터, 대역통과필터, 대역저지필터
- 디지털 필터가 응용되는 분야: 노이즈를 제거하는 디지털 필터링, 주파수 성분을 분석하는 스펙트럼 분석, 디지털 영상의 화질을 개선하는 영상화질 개선 등

디지털신호처리

강 의 노 트

Z-변환 응용과 디지털 필터 실습

한국기술교육대학교 온라인평생교육원

학습내용

- ❖ Z-변환과 Z-역변환을 이용한 시스템 응답
- ❖ 버터워스 필터의 특징
- ❖ 버터워스 필터를 활용한 저주파 통과 필터 및 고주파 통과 필터

학습목표

- ❖ 주파수영역에서 Z-변환과 Z-역변환을 이용하여 이산 시스템에 대한 응답을 구할 수 있다.
- ❖ 버터워스 필터의 특징에 대해 설명할 수 있다.
- ❖ 버터워스 필터를 활용한 저주파통과필터 및 고주파통과필터를 구현할 수 있다.

Z-변환과 Z-역변환을 이용한 시스템 응답

1. Z-변환과 Z-역변환을 이용한 출력신호 y[n] 구하기

실습과제 39-01

선형 컨볼루션식($y[n] = x[n] * h[n]$)을 이용하여 $y[n]$을 계산한 결과와 Z-변환과 Z-역변환을 이용하여 $y[n]$을 계산한 결과가 일치하는지 확인해 보자.

시간 영역	$x[n]=\{2,\ 1,\ -1,\ 0.5\},\ h[n]=\{1,\ 0.7,\ 0.3\}$	➡	$y[n]=h[n]*x[n]$
주파수 영역	$Y[z]=H(z)X(z)$	➡	$y[n]=Z^{-1}\{Y[z]\}$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여
직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

i) 시간 영역에서 출력 응답 $y[n]$ 구하기 - 선형 컨볼루션 이용

$$x[n]=\{2,\ 1,\ -1,\ 0.5\},\ h[n]=\{1,\ 0.7,\ 0.3\}$$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

$$y[n]=\{2,\ 2.8,\ 1,\ 0.1,\ 3.2,\ 1.5\}$$

i) 시간 영역에서 출력 응답 $y[n]=\{2,\ 2.8,\ 1,\ 0.1,\ 3.2,\ 1.5\}$

ii) Z-변환과 Z-역변환 이용

$x[n]=\{2, 1, -1, 0.5\}$	Z-변환 ➡	$X(z)=2+z^{-1}-z^{-2}+0.5z^{-3}$
$h[n]=\{1, 0.7, 0.5\}$		$H(z)=1+0.7z^{-1}+0.5z^{-2}$

$$\begin{aligned}Y(z)&=H(z)\cdot X(z)=(1+0.7z^{-1}+0.5z^{-2})\cdot(2+z^{-1}-z^{-2}+0.5z^{-3})\\&=2+2.8z^{-1}+z^{-2}+0.1z^{-3}+3.2z^{-4}+1.5z^{-5}\end{aligned}$$

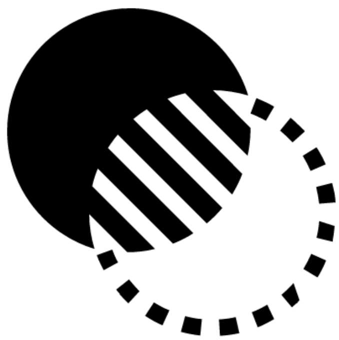
$$\begin{aligned}y[n]&=Z^{-1}\{Y(z)\}\\&=2\delta[n]+2.8\delta[n-1]+\delta[n-2]+0.1\delta[n-3]+3.2\delta[n-4]+1.5\delta[n-5]\\&=\{2, 2.8, 1, 0.1, 3.2, 1.5\}\end{aligned}$$

버터워스 필터의 특징

1. 버터워스 필터의 특징

1) 버터워스(Butterworth) 필터

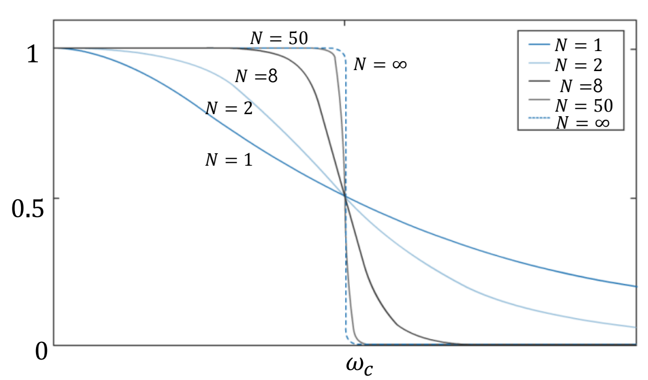
- 아날로그 필터 중에서 설계가 가장 **쉽고 간편한** 필터
- 다른 필터에 비해 **필터 효과가 낮은 편임**



2) N-차 버터워스 필터의 진폭제곱 특성

- 필터 차수에 상관 없이 $|H(0)|^2=1$, 차단 주파수 $\omega=\omega_c$ 에서 $|H(\omega_c)|^2=1/2$
- 필터 차수가 **증가**하면 **이상적인 LPF의 특성에 가까워짐**
- $\omega\rightarrow\omega_c$ 로 갈수록 **감쇠가 커지고**, $\omega=0$근처에서 **최대로 평탄함**

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+(\frac{\omega}{\omega_c})^{2N}}$$



버터워스 필터의 특징

3) 버터워스 필터의 차수 N에 대한 전달 함수 분모 다항식(ω_c=1)

필터 차수 N	분모 다항식 $P(s)$
1	$s+1$
2	$s^2+\sqrt{2}s+1$
3	s^3+2s^2+2s+1
4	$s^4+2.6131s^3+3.4142s^2+2.6131s+1$
5	$s^5+3.2361s^4+5.2361s^3+5.2361s^2+3.2361s+1$
6	$s^6+3.8637s^5+7.4641s^4+9.1416s^3+7.4641s^2+3.8637s+1$

4) Matlab 디지털 필터 설계 및 디지털 필터링 명령어

[B, A] = BUTTER(N, Wn);

- Nth Order Lowpass Digital Butterworth Filter
- 디지털 필터 전달 함수의 분자(B)와 분모(A)의 N+1개 계수 값 반환
- Wn : 정규화된 Cutoff Frequency, 0.0 〈 Wn 〈 1.0
  Wn = 1.0 은 샘플링 주파수의 반에 해당하는 값

[예] [B, A] = BUTTER(N, Wn, ‘ftype’); ‘ftype’ = ‘high‘, ‘low’, ‘stop’, ‘bandpass’
만약 ‘bandpass’ 이면, Wn = [W1 W2]인 두 개의 원소를 갖는 벡터이고,
2N Bandpass Filter에 대한 계수 값 반환, 통과밴드는 W1 〈 w 〈 W2

Y = FILTER(B, A, X);

- X벡터 신호를 디지털 필터링한 결과 값 Y를 반환
- 디지털 필터는 다음과 같은 차분 방정식으로 표현되는 필터
  $a(1)*y(n)= b(1)*x(n)+ b(2)*x(n-1)+ \cdots + b(nb+1)$
  $*x(n-nb)- a(2)*y(n-1) - \cdots - a(na+1)*y(n-na)$

버터워스 필터를 활용한 저주파 통과 필터 및 고주파 통과 필터

1. 저주파 통과 필터

실습과제 39-02

아날로그 신호 $x(t)$를 저주파 통과 필터(LPF)를 통해 고주파수의 노이즈 성분을 제거해 보고 저주파 통과 필터를 통과하기 전의 시간 영역 신호와 필터를 통과한 후의 시간 영역 신호를 그려서 실제 고주파수 노이즈가 제거되었는지를 Matlab 프로그램으로 확인해보자.

(단, 저주파 통과 필터는 버터워스필터를 활용, Cutoff 주파수는 10Hz)

$$x(t) = \underbrace{5\cos(2\pi(3)t)}_{\text{(실제 신호)}} + \underbrace{3\cos(2\pi(40)t)}_{\text{(고주파 노이즈)}}$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

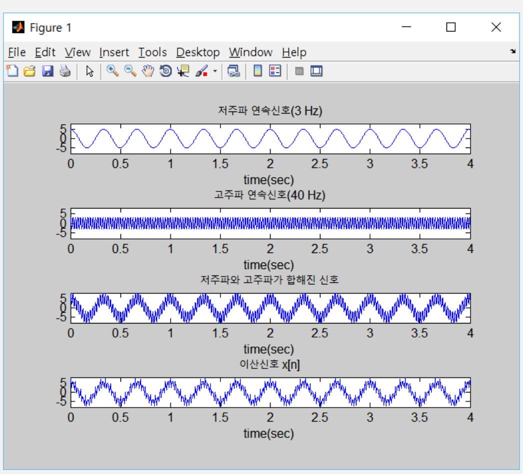
```
%% Ex2_1.m 저주파 통과 필터(LPF) 실습
%  1) 저주파(3Hz) 신호와 고주파(40Hz)의 노이즈가 합성된 연속신호

t = 0:0.001:4                  % 시간벡터 생성
x_low = 5*cos(2*pi*3*t);       % 저주파 신호
x_high = 3*cos(2*pi*40*t);     % 고주파 노이즈신호
xa = x_low + x_high;           % 저주파와 고주파신호가 합해진 신호

subplot(4,1,1);  plot(t,x_low);
axis([0 4 -8 8]); xlabel('time(sec)');
title('저주파 연속신호(3 Hz)');

subplot(4,1,2);  plot(t,x_high);
axis([0 4 -8 8]); xlabel('time(sec)');
title('고주파 연속신호(40 Hz)');

subplot(4,1,3);  plot(t,xa);
axis([0 4 -8 8]); xlabel('time(sec)');
title('저주파와 고주파가 합해진 신호');

(계속)
```

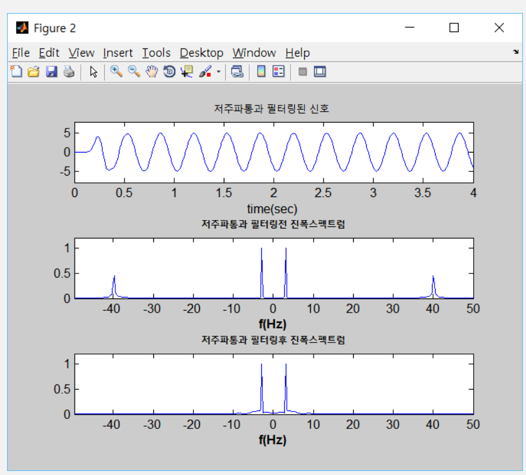
버터워스 필터를 활용한 저주파 통과 필터 및 고주파 통과 필터

1. 저주파 통과 필터

[과제해설]

```
% 2) 저주파와 고주파가 합해진 연속신호에 대해 샘플링을 통해 이산신호 생성하기
Fs = 100;                                      % 연속신호 샘플링 주파수(Hz)
Ts = 1/Fs;                                     % 샘플링 주기(second)
tn=0:Ts:4;                                     % Ts 간격의 이산신호 시간벡터 생성
xn = 5*cos(2*pi*3*tn) + 3*cos(2*pi*40*tn);    % 이산신호 생성

subplot(4,1,4);   plot(tn,xn);
axis([0 4 -8 8]);  xlabel('time(sec)');
title('이산신호 x[n]');

% 3) 저주파 통과 필터를 통해 고주파 신호 제거하기: 버터워스 필터 활용
N = 20;                                 % 필터의 차수
fc = 10;                                % Low-Pass Filter Cutoff 주파수
fn = Fs/2;                              % 샘플링 주파수의 반에 해당하는 주파수
ftype = 'low';                          % 필터종류: Low-Pass Filter
[b, a] = butter(N, fc/fn, ftype);       % 버터워스(Butterworth) 필터계수
y = filter(b,a,xn);                     % Low-Pass Filtering

figure; subplot(3,1,1);
plot(tn,y);  axis([0 4 -8 8]); xlabel('time(sec)');
title('저주파통과 필터링된 신호 ');

% 4) 주파수 스펙트럼 확인하기
plot_spectrum(xn, Fs,3,1,2);                       % 필터링 전 스펙트럼 확인
title('₩bf{저주파통과 필터링전 진폭스펙트럼}');      % 그림 제목

plot_spectrum(y, Fs, 3,1,3);                       %  필터링 후 스펙트럼 확인
title('₩bf{저주파통과 필터링후 진폭스펙트럼}');      % 그림 제목
```





버터워스 필터를 활용한 저주파 통과 필터 및 고주파 통과 필터

2. 고주파 통과 필터

실습과제 39-03

실습1에서 제시된 아날로그 신호 $x(t)$를 이산 퓨리에 변환(DFT)을 이용하여 고주파 통과 필터링 하기 전의 스펙트럼과 고주파 통과 필터링한 후의 스펙트럼을 비교하여 저주파수 성분이 제거되었는지 확인해 보자.

$$x(t) = \underbrace{5\cos(2\pi(3)t)}_{\text{(실제 신호)}} + \underbrace{3\cos(2\pi(40)t)}_{\text{(고주파 노이즈)}}$$

제공된 실습자료를 다운로드 받은 후 전문가의 동영상 강의를 참고하여 직접 실습과제를 해결해보세요.

[과제해설]

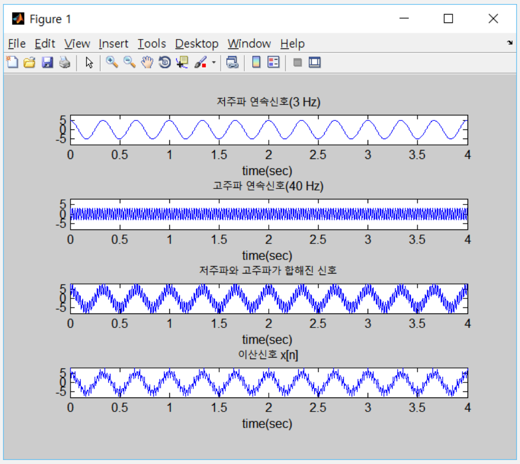
```
%% Ex2_2.m 고주파 통과 필터(High-Pass Filter) 실습
% 1) 저주파(3Hz) 신호와 고주파(40Hz) 신호가 결합된 연속신호
t = 0:0.001:4                          % 시간벡터 생성
x_low = 5*cos(2*pi*3*t);
x_high = 3*cos(2*pi*40*t);
xa = x_low + x_high;                   % 저주파와 고주파신호가 합해진 신호

subplot(4,1,1);  plot(t,x_low);
axis([0 4 -8 8]); xlabel('time(sec)');
title('저주파 연속신호(3 Hz)');

subplot(4,1,2); plot(t,x_high);
axis([0 4 -8 8]); xlabel('time(sec)');
title('고주파 연속신호(40 Hz)');

subplot(4,1,3);  plot(t,xa);
axis([0 4 -8 8]); xlabel('time(sec)');
title('저주파와 고주파가 합해진 신호');

% 2) 저주파와 고주파가 합해진 신호에 대해  이산신호 생성하기
Fs = 100;                             % 연속신호 샘플링 주파수(Hz)
Ts = 1/Fs;                            % 샘플링 주기(second)
tn=0:Ts:4;                            % Ts 간격의 이산신호 시간벡터 생성
xn = 5*cos(2*pi*3*tn) + 3*cos(2*pi*40*tn);     % 이산신호 생성

(계속)
```

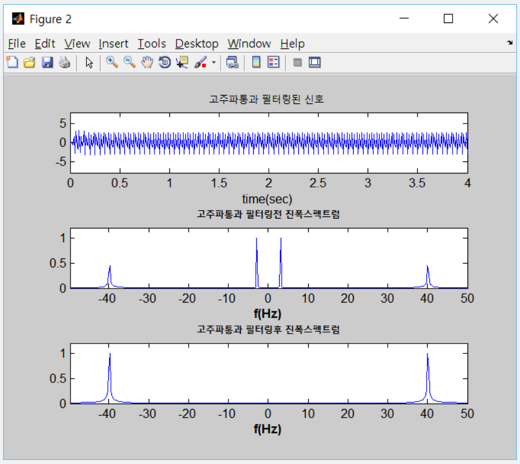
버터워스 필터를 활용한 저주파 통과 필터 및 고주파 통과 필터

1. 고주파 통과 필터

[과제해설]

```
subplot(4,1,4);  plot(tn,xn); axis([0 4 -8 8]);
xlabel('time(sec)'); title('이산신호 x[n]');

%% 3) 고주파 통과 필터를 통해 저주파 신호 제거하기
N = 20;                          % 필터의 차수
fc = 20;                         % High-Pass Filter Cutoff 주파수
fn = Fs/2;                       % 샘플링 주파수의 반에 해당하는 주파수
ftype = 'high';                  % 필터종류: High-Pass Filter
[b, a] = butter(N, fc/fn, ftype);  % 버터워스(Butterworth) 필터계수
y = filter(b,a,xn);              % High-Pass Filtering

figure;  subplot(3,1,1);  plot(tn,y); axis([0 4 -8 8]);
xlabel('time(sec)'); title('고주파통과 필터링된 신호 ');

% 4) 주파수 스펙트럼 확인하기
plot_spectrum(xn, Fs,3,1,2);                 % 고주파통과필터링전 스펙트럼확인
title('₩bf{고주파통과 필터링전 진폭스펙트럼}');      % 그림 제목

plot_spectrum(y, Fs, 3,1,3);                  % 고주파통과필터링후 스펙트럼확인
title('₩bf{고주파통과 필터링 후 진폭스펙트럼}');     % 그림 제목
```





핵심정리

Z-변환과 Z-역변환을 이용한 시스템 응답

- 이산 LTI 시스템의 표현

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] \qquad\qquad X(z) \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow Y(z)$$

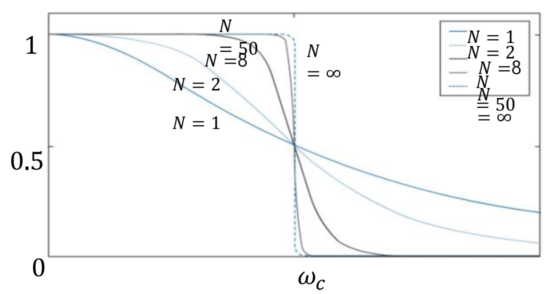
(a) 임펄스 응답 표현 (b) 주파수 영역(Z-영역) 이산 시스템 표현

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad \Longleftrightarrow \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

버터워스(Butterworth) 필터의 특징

- 아날로그필터 중에서 설계가 가장 쉽고 간편한 필터
- 다른 필터에 비해 필터 효과는 낮은 편임

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\frac{\omega}{\omega_c})^{2N}}$$



버터워스 필터를 활용한 저주파 통과 필터 및 고주파 통과 필터

```
[B, A] = BUTTER(N, Wn);
```

- Nth Order Lowpass Digital Butterworth Filter
- 디지털 필터 전달 함수의 분자(B)와 분모(A)의 N+1개 계수 값 반환
- Wn : 정규화된 Cutoff Frequency, 0.0 < Wn < 1.0
  Wn = 1.0 은 샘플링 주파수의 반에 해당하는 값

```
Y = FILTER(B, A, X);
```

- X벡터 신호를 디지털 필터링한 결과 값 Y를 반환
- 디지털 필터는 다음과 같은 차분 방정식으로 표현되는 필터

$$a(1)*y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + \cdots + b(nb+1)$$
$$*x(n-nb) - a(2)*y(n-1) - \cdots - a(na+1)*y(n-na)$$