红黑树

强烈建议去看pdf或ppt辅助理解插入操作

Part 1：2-3-4树

BST：在随机插入时效果很好，树是比较均匀的，但当数据有序插入时，会退化成链表，时间复杂度的优势消失

2-3树：效率不太高，但顺序插入时能**自平衡**，解决了BST的缺点

特点：

1. 一个节点最多有四个子节点
2. 最多三个节点"相连"
3. 操作：上溢

插入实例：

见"2-3-4树插入.pdf"

注：此处以2-3-4树为例，2-3树有相似的原理，也能实现相似的效果(可参考61b和算法4)

Part 2 红黑树

可以说，红黑树是2-3-4树的别称

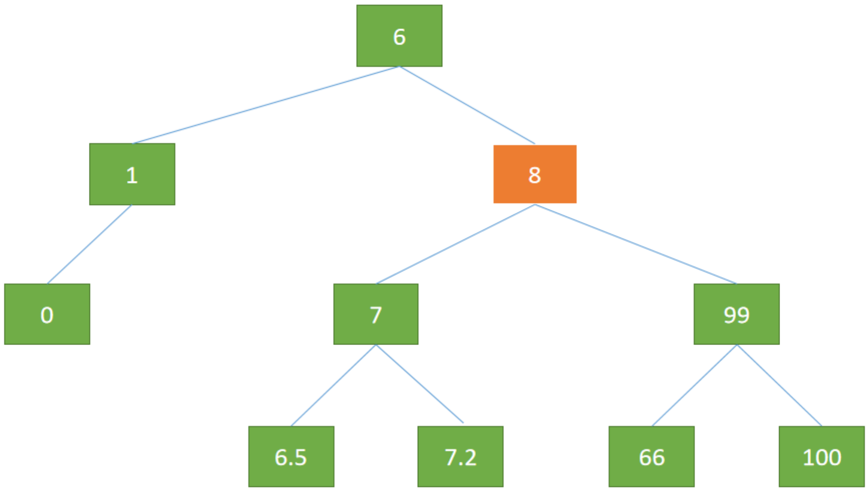
特点

1. 每个节点要么红要么黑
2. 根节点永远为黑
3. 叶节点为黑
4. 不会有两个相连的红节点
5. 对每个节点，从该节点到其所有后代叶节点的简单路径上，均包含相同数目的黑丝节点
6. 每一棵红黑树都对应着一棵2-3-4树(或2-3树)

注：
叶节点因不储存值，通常不重要；在所有的演示图中叶节点都会被忽略
可以使用一个哨兵(sentinel)节点代所有的叶节点

练习1：

判断下列树是否为红黑树：



优势证明

结论：一棵有n个内部节点的红黑树高度至多为2lg(n+1)

> 所以红黑树是一种自平衡树

推导如下：

$$\text{不妨记}a_{bh(x)}\text{为以}x\text{为根、黑色树高为}bh(x)\text{的树中包含内部节点的个数}$$

bh(x) > 0时，有：

$$a_{bh(X)} >= 2a_{bh(x)-1} + 1$$

于是，类似主方法的推导，有：

$$a_{bh(x)} >= \Sigma_{i=0}^{bh(x)-2} 2^i + 2^{bh(x)-1} * a_1$$

易知：a0 >= 0，故a1 >= 1
有：

$$a_{bh(x)} >= 2^{bh(x)-1} - 1 + 2^{bh(x)-1} = 2^{bh(x)} - 1$$

故：

$$\text{以}x\text{为根的树至少包含}2^{bh(x)} - 1\text{个内部节点}$$

设h为树的高度
根据特点4，从根到叶节点的任何一条简单路径上都至少有一半的节点为黑色
因此：hx(root) >= h/2
结合上述不等式：

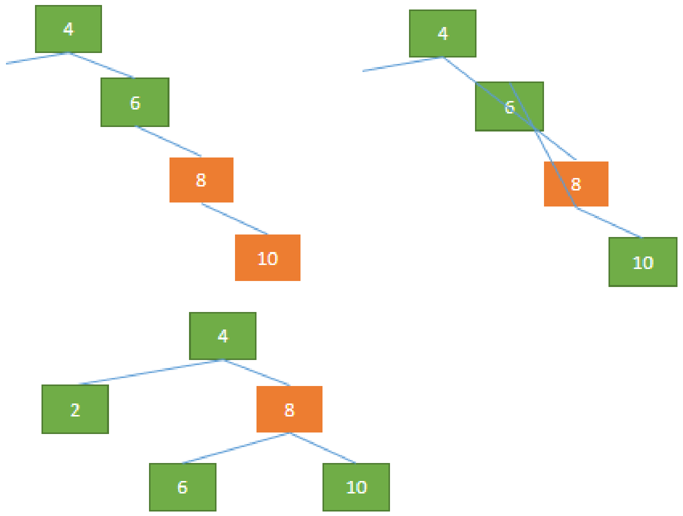
$$n >= 2^{h/2} - 1 \rightarrow 2\lg(n+1) >= h$$

即得.
注：算法导论中使用数学归纳法，证明起来比较简单

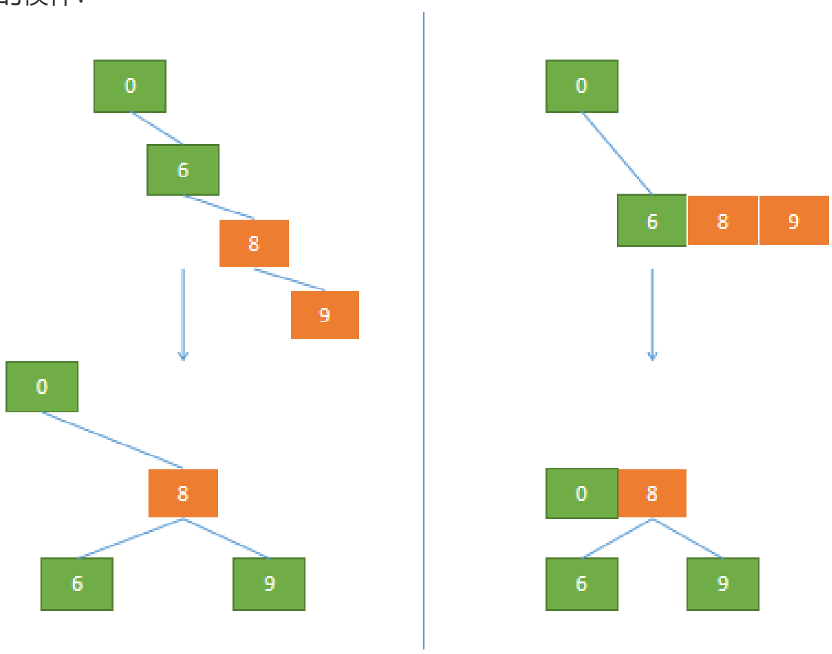
操作与2-3-4树的对应关系

1. 左旋(右旋)

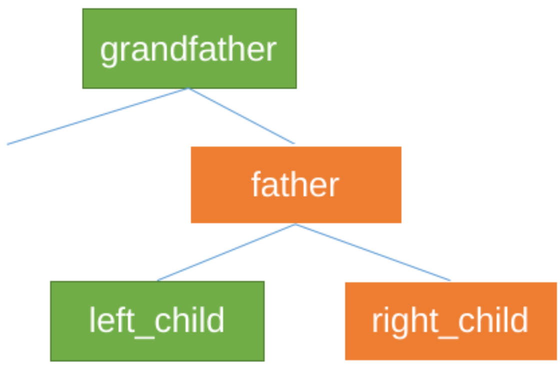
   指针变化：



   2-3-4树的模样：



   图示+伪代码：



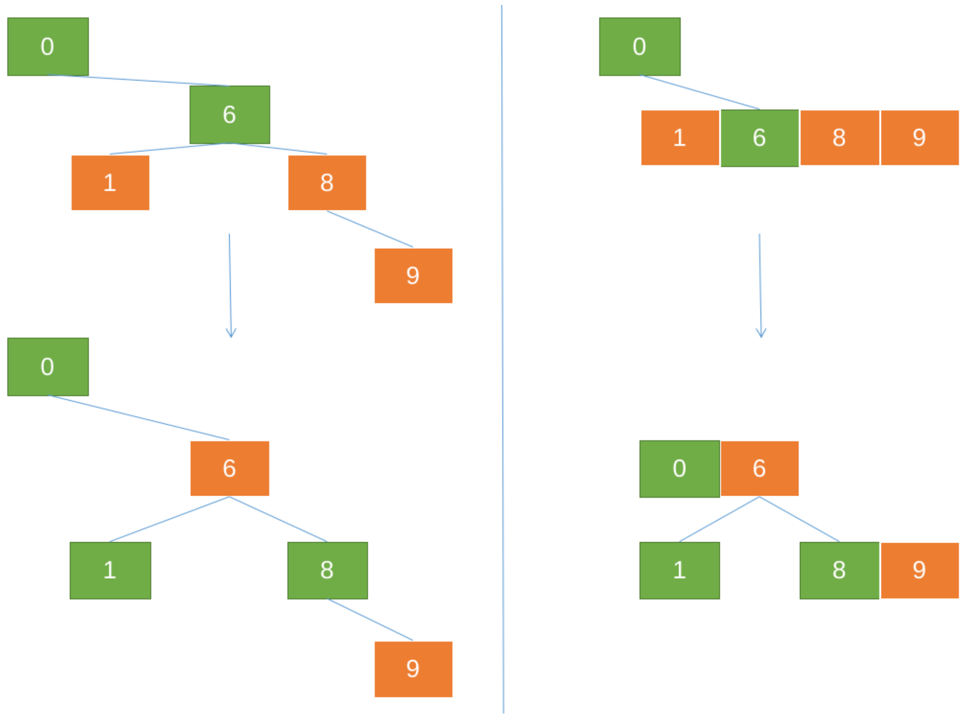

```
#左旋函数
def LEFT_ROTATE(T,father):

    #定义临时变量（方便理解）
```

```
    left_child = father.leftchild
    right_child = father.rightchild
    grandfather = father.father

    #指针变化
    #Connect grandfather and right_child
    grandfather.rightchild = right_child
    right_child.father = grandfather

    #Connect right_child's leftchild and father
    if rightchild.leftchild != T.nil:
        father.rightchild = right_child.leftchild
        right_child.leftchild.father = father.rightchild

    #Connect right_child and father
    right_child.leftchild = father
    father.father = right_child

    #综合判定
    if right_child.father == T.nil:
        T.root = right_child
```

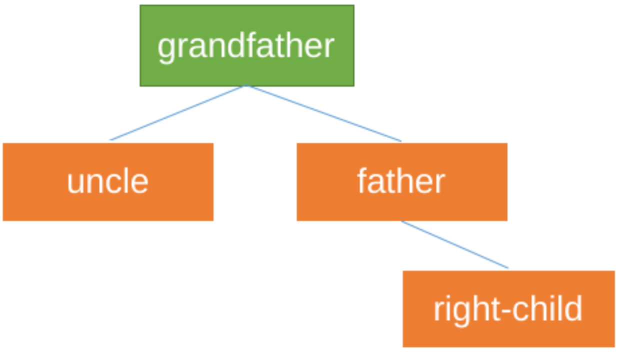
注：右旋的操作是镜像的　（借用一下python的语法结构）

2. 变色

2-3-4树的模样：



图示+伪代码:




```
#改变颜色
def CHANGE_COLOR(father,uncle,grandfather):
   grandfather.color = red
   father.color = black
   uncle.color = black
```

3. 搜索(基本同BST)

插入

实例：详见"红黑树插入.pdf"

伪代码:

```
#已定义：树T、被插入节点z(key已被赋值)
#x,y是两个辅助指针
def RB_INSERT(T,z):
   x = T.root
   y =T.nil

   #一直访问到目标节点（插入到目标节点的子节点）
   #最后目标节点为y
   while x != Nil:
      y = x

      if z.key < x.key:
         x = x.left
      else:
         x = x.right

   #z的父节点设为y
   z.father = y

   #z插入到
   if y == T.nil:
      T.root = z
   else if z.key < y.key:
      y.left = z
   else:
      y.right = z
```

```
        #设置节点z
        z.left = T.nil
        z.right = T.nil
        z.color = red

        #维护红黑树
        RB-INSERT-FIXUP(T,z)
```

连续两个红节点相连时需要维护
维护有三种情况:

1. 叔叔节点为红色
   >>>变色
2. 叔叔节点为黑色 && 父节点和子节点均为其父的右(或左)节点
   >>>左旋(右旋)
3. 叔叔节点为黑色 && 父节点和子节点的方向相异，即父右子左(or父左子右)
   >>>先右旋再左旋(或相反操作)

```
def RB_INSERT_FIXUP(T,z):
   while z.father == red:
      if z.father == z.father.father.right:
      #case:father is the leftchild
         uncle = z.father.father.left
         #情况1:
         if uncle.color == red:
            CHANGE_COLOR(z.father,uncle,z.father.father)
            z = z.father.father
            #reach the next red node

         #情况3:
         else:
            if z == z.father.left:
               z = z.father
               RIGHT-ROTATE(T,z)
         #把情况3转化为情况2

         #情况2:
            z.father.color = black
            z.father.father.color = red
            LEFT-ROTATE(z.father)

      else:
         ...   #与上文相反
   T.root.color = black
```

举例见: "FIX-UP.pdf"

删除*

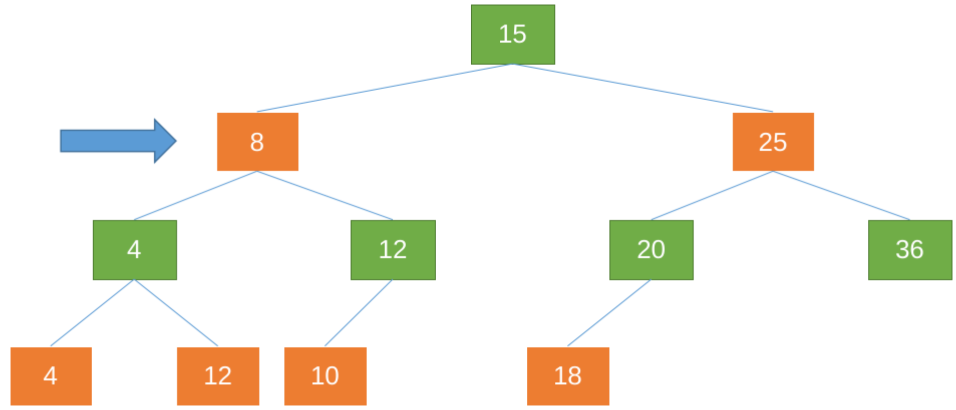
红黑树的删除操作

对于非叶节点，转换为其前驱(或后继)节点的删除

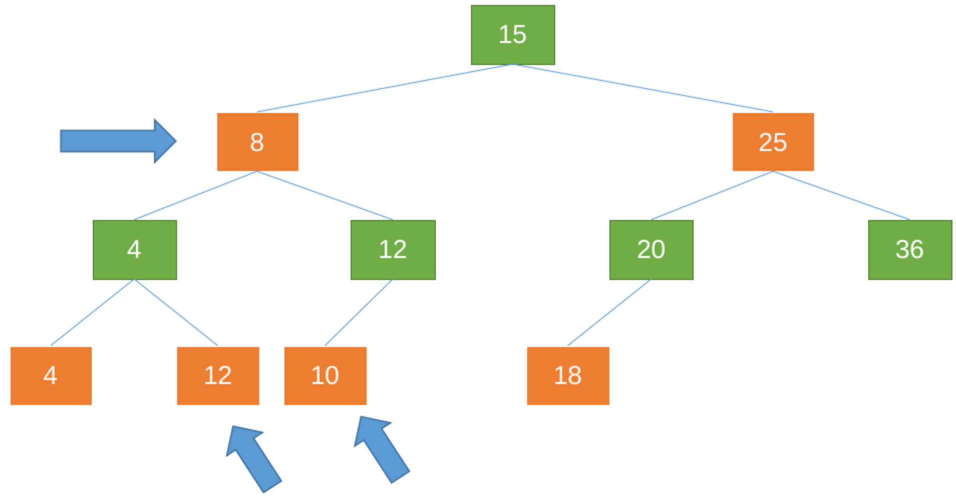
即**转化为对最后两行中节点的删除**

(大中最小的/小中最大的)

举例： 删除"8"

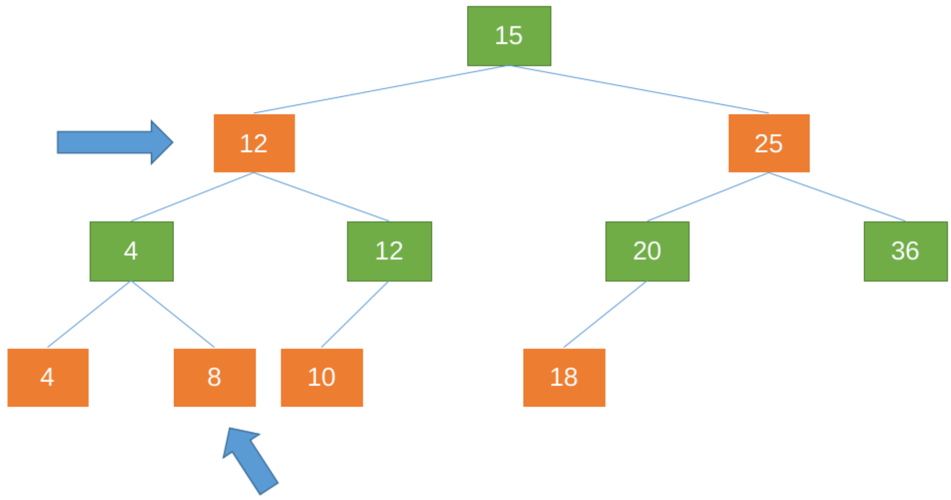


转化为删除: 前驱节点(12)/后继节点(10)

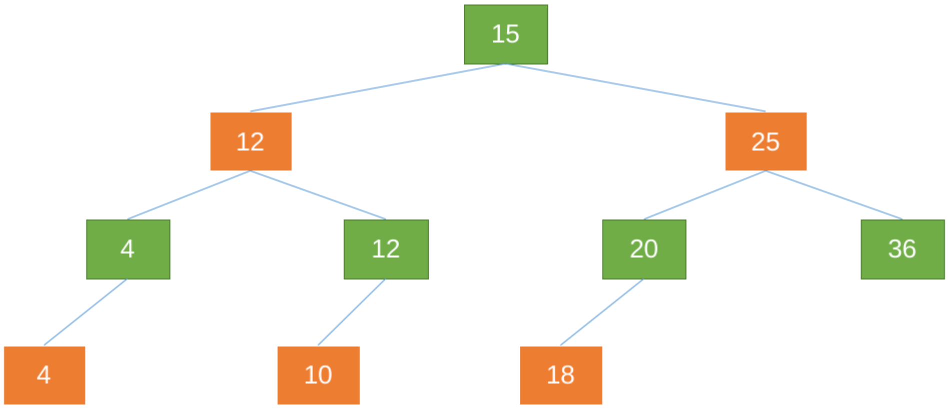


若转化为删除前驱节点，则将8与12两个节点的**值**互换

注：之后都描述删除前驱节点的内容



然后删除节点"8"

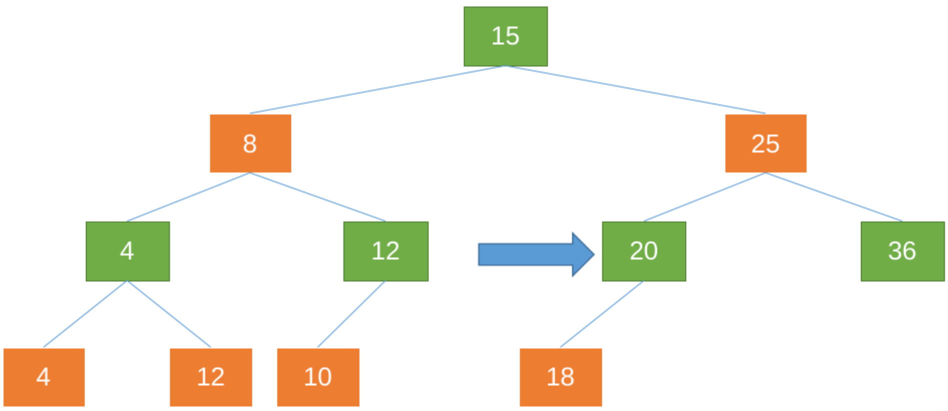


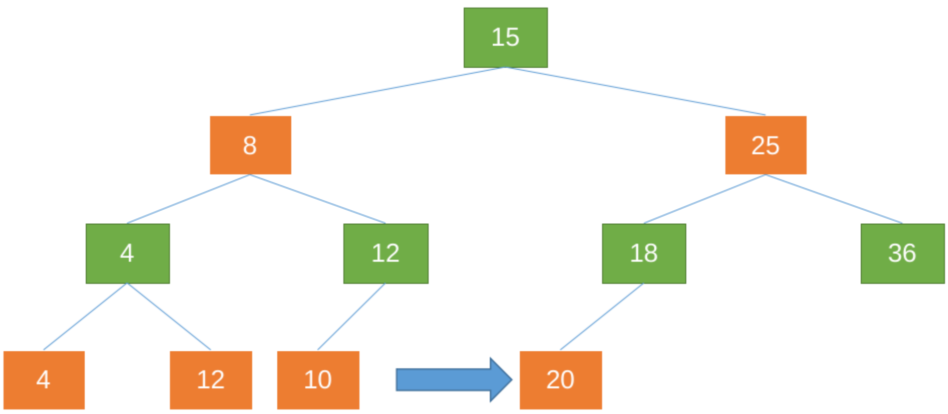
删除最后两行的节点，分情况讨论

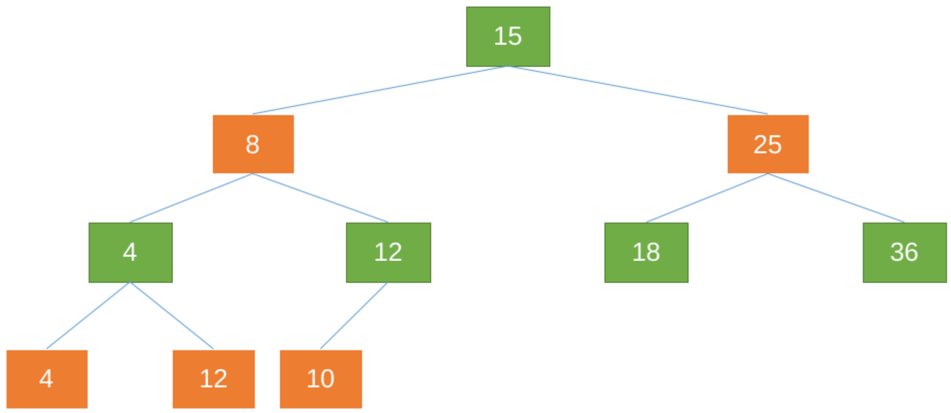
情况1：
被删除的节点是红色节点（如上例）
>>>直接删除

情况2：
被删除的节点是黑色节点，且有左子节点

>>>左子节点的值与该节点的值互换，删除其左子节点
例：



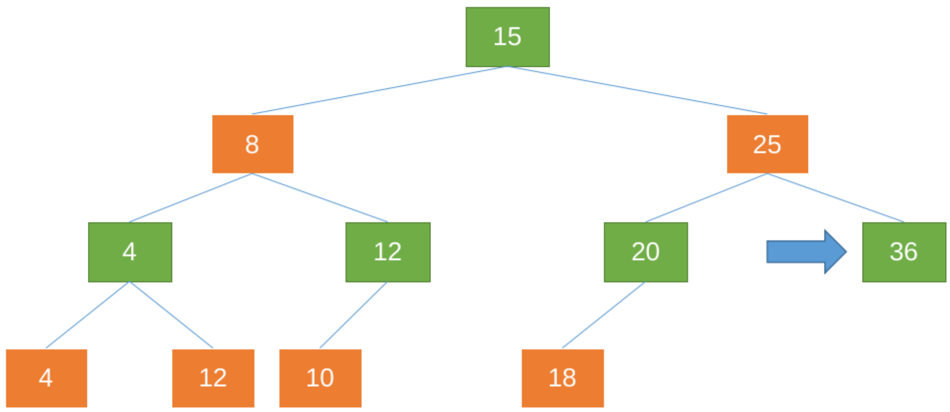


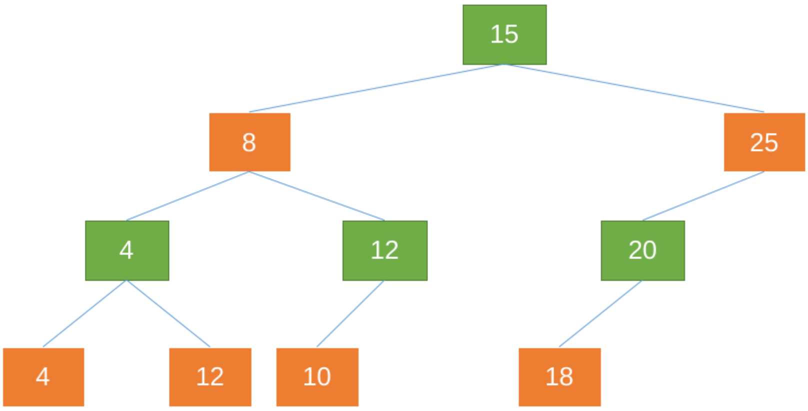


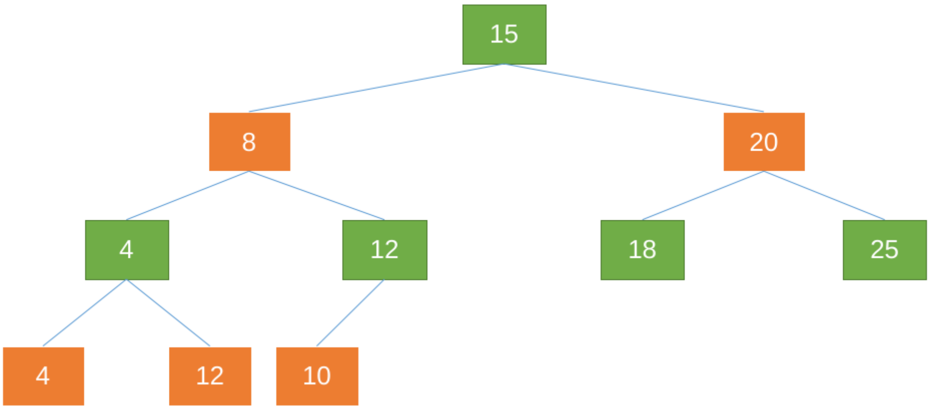
情况3：
删除节点为根节点
>>>直接删除

情况4：
被删除的节点是黑色节点，无子节点，兄弟节点为黑色

情况4-1：兄弟节点有红色子节点
>>>借用兄弟节点修复
>>>删除节点
>>>旋转
>>>染色
例：





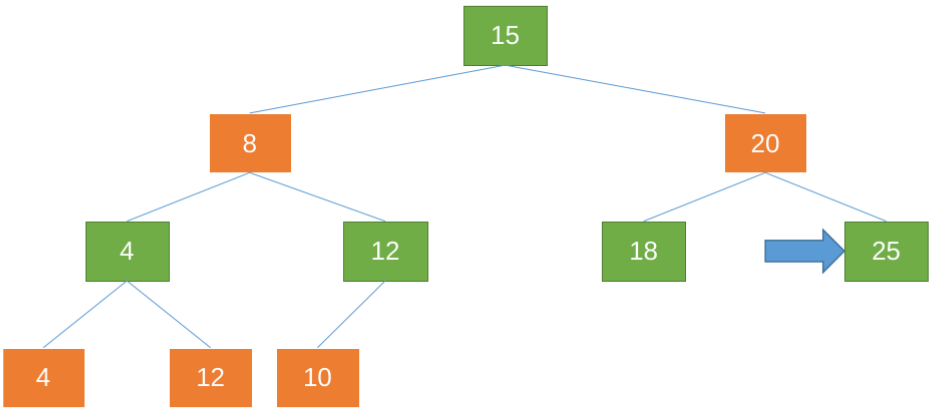


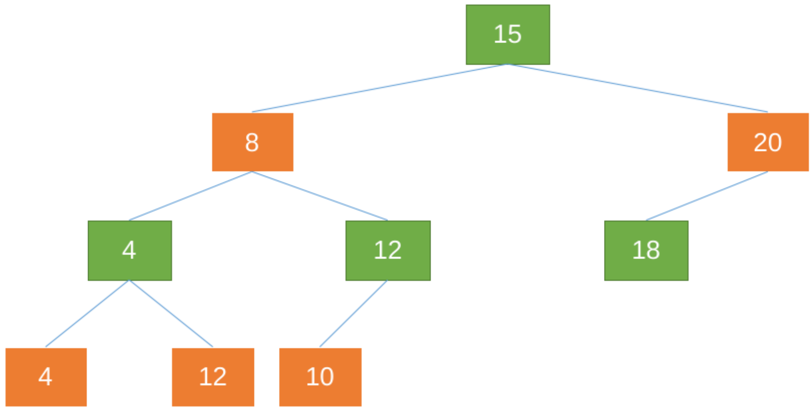
情况4-2：兄弟节点无红色子节点

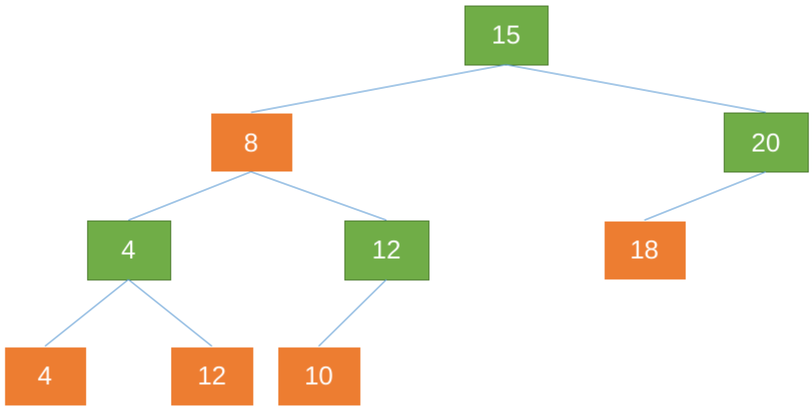
>>>父节点向下合并(2-3-4树的说法)

>>>删除节点

>>>染色







情况5：

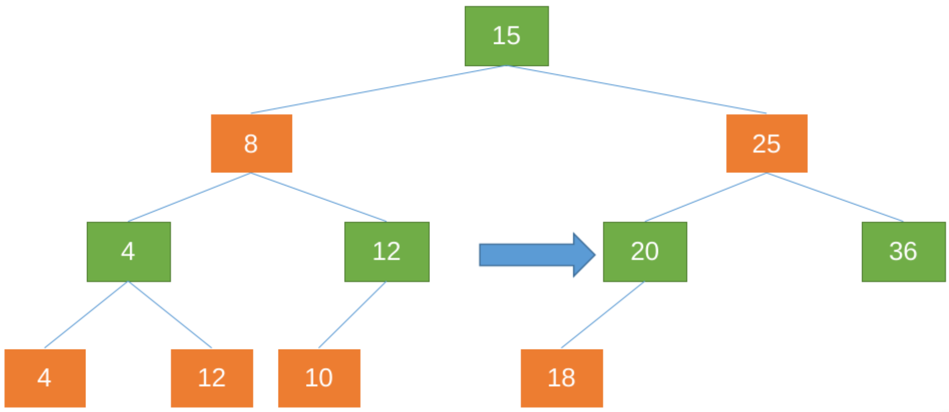
被删除的节点是黑色节点，无子节点，兄弟节点为红色

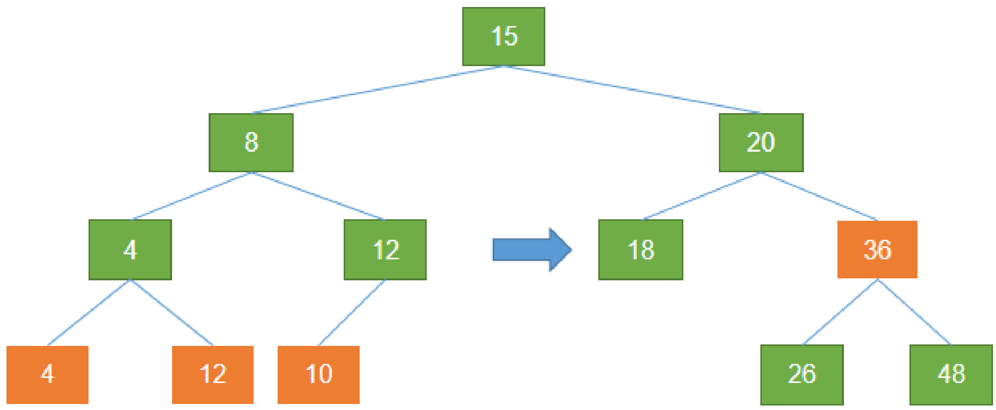
>>>父节点分裂，向下合并

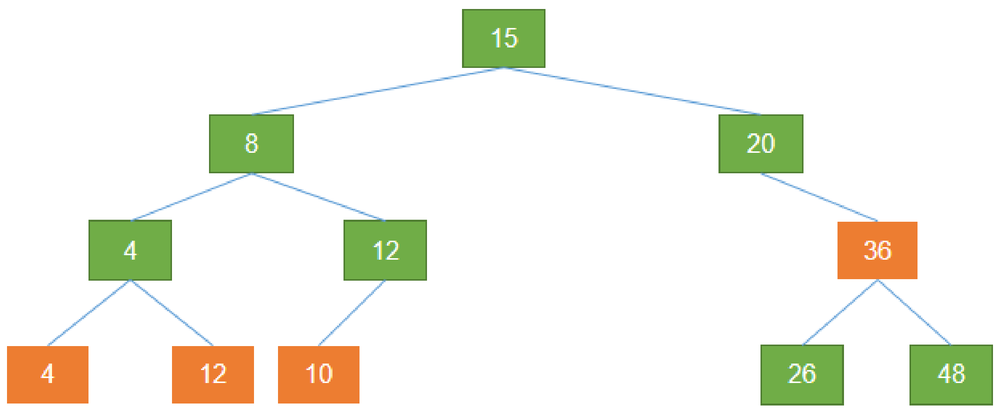
>>>删除节点

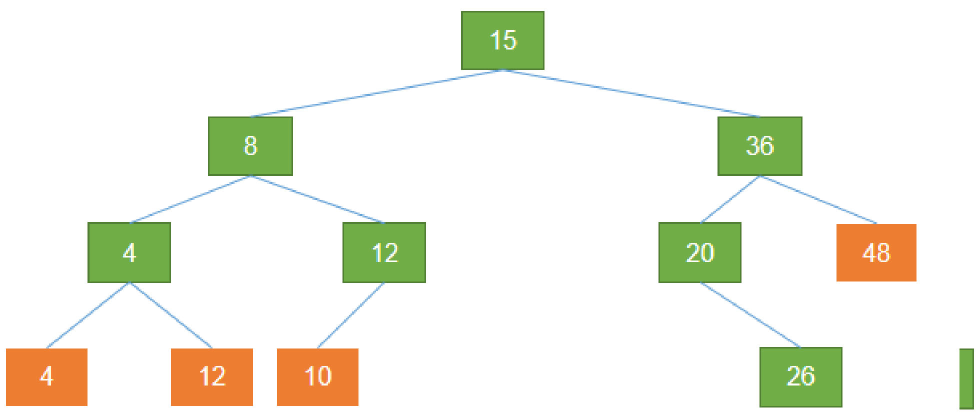
>>>旋转

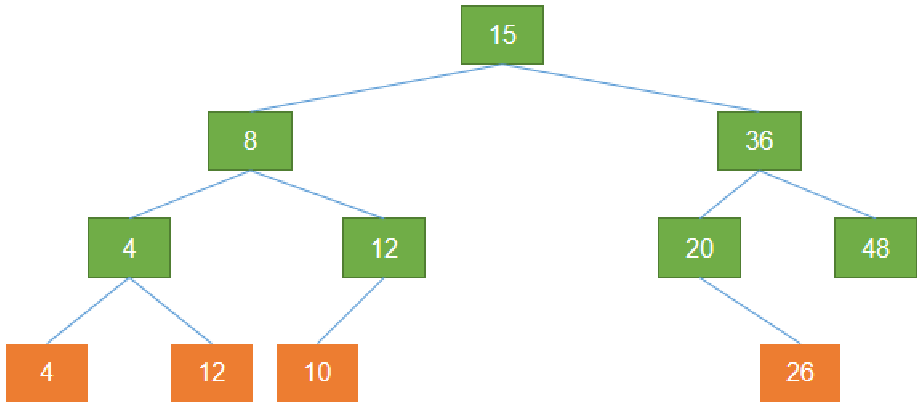
>>>染色




15
8
20
4
12
18
36
4
12
10
26
48


15
8
20
4
12
36
4
12
10
26
48


15
8
36
4
12
20
48
4
12
10
26



左倾红黑树 *

> 即本章后记中提到的AA树(区别是倾斜方向相反)

参考阅读:
Algorithms 4th Edition
参考视频:
[《算法》作者的讲解]()