MI1111 GIẢI TÍCH I

Phiên bản: 2020.1.0

Mục tiêu: Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về hàm số một biến số và nhiều biến số, không gian metric, không gian định chuẩn. Trên cơ sở đó, sinh viên có thể học tiếp các học phần sau về Toán cũng như các môn học kỹ thuật khác, góp phần tạo nên nền tảng Toán học cơ bản cho kỹ sư các ngành công nghệ và kinh tế.

Objective: *This course provides the basics knowledge about functions of one variable and several variables, metric space, normed vector space. Students can understand the basics of computing technology and continue to study further.*

Nội dung: Giới hạn, liên tục, đạo hàm, vi phân của hàm số một biến số và nhiều biến số. Tích phân của hàm số một biến số, không gian metric, không gian định chuẩn.

Contents: *Limits, continuities, derivatives, differentials of functions of one variable and several variables. Integrals of functions of one variable, metric space, normed vector space.*

1. THÔNG TIN CHUNG

Tên học phần:	Giải tích I ((*Analysis I*)
Đơn vị phụ trách:	Viện Toán ứng dụng và Tin học
Mã số học phần:	MI1111
Khối lượng:	4(3-2-0-8) - Lý thuyết: 45 tiết - Bài tập: 30 tiết - Thí nghiệm: 0 tiết
Học phần tiên quyết:	Không
Học phần song hành:	Không

2. MÔ TẢ HỌC PHẦN

Môn học này nhằm cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về phép tính vi phân hàm một biến số, phép tính tích phân hàm một biến số, hàm số nhiều biến số.

3. MỤC TIÊU VÀ CHUẨN ĐẦU RA CỦA HỌC PHẦN

Sinh viên hoàn thành học phần này có khả năng:

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ(I/T/U)
[1]	[2]	[3]
M1	**Nắm vững các kiến thức cơ bản của giải tích 1 và vận dụng thực hành giải được các bài tập liên quan**	
M1.1	Nắm vững các khái niệm cơ bản của giải tích 1 như: Giới hạn dãy số, giới hạn hàm số, hàm số liên tục, đạo hàm và vi phân cấp cao, cực trị của hàm số một biến số và hàm nhiều biến số; nguyên hàm và tích phân của hàm một biến số...	I/T
M1.2	Có khả năng vận dụng các kiến thức để giải được các bài tập liên quan tới nội dung môn học.	T/U

Mục tiêu/CĐR	Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần	CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ(I/T/U)
M2	**Đạt được thái độ làm việc nghiêm túc cùng kỹ năng cần thiết để việc làm đạt hiệu quả cao**	
M2.1	Có kỹ năng: phân tích và giải quyết vấn đề bằng tư duy, logic chặt chẽ; làm việc độc lập, tập trung.	T/U
M2.2	Nhận diện một số vấn đề thực tế có thể sử dụng công cụ của đại số tuyến tính để giải quyết.	I/T/U
M2.3	Thái độ làm việc nghiêm túc, chủ động sáng tạo, thích nghi với môi trường làm việc có tính cạnh tranh cao.	I/T

4. TÀI LIỆU HỌC TẬP

Giáo trình

[1] Nguyễn Xuân Liêm, *Giải tích I, II*, NXB Giáo dục.2001

[2] Trần Đình Long, Nguyễn Đình Long, Hoàng Quốc Toàn, *Giáo trình giải tích I, II, III*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2001.

[3] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2015). *Toán học cao cấp, tập 1: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.

[3] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2017). *Bài tập Toán học cao cấp, tập 1: Giải tích*, NXBGD, Hà Nội.

[4] Nguyễn Xuân Thảo, Bài giảng Giải tích I, 2011

Sách tham khảo

[1] Hoàng Tụy, *Hàm thực và giải tích hàm*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2003.
[2] Jeom-Marie Monier, *Giải tích 1,2,3*, NXB Giáo dục, 2001 (Bản tiếng Việt)
[3] GM. Phichtengon, Giáo trình phép tính vi phân và tích phân I, II, III, 1975 (Bản tiếng Nga)
[4] GM. Phichtengon, *Cơ sở giải tích toán học I, II, III*, 1975 (Bản tiếng Việt)
[5]. Rudin, *Cơ sở giải tích toán học*, Hà nội, 1970 (Bản tiếng Việt)

5. CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

Điểm thành phần	Phương pháp đánh giá cụ thể	Mô tả	CĐR được đánh giá	Tỷ trọng
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
A1. Điểm quá trình (*)	**Đánh giá quá trình**			**30%**
	A1.1. Bài tập trên lớp và bài tập về nhà	Tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	
	A1.2. Thi giữa kỳ	Thi tự luận		
A2. Điểm cuối kỳ	**A2.1. Thi cuối kỳ**	Thi tự luận	M1.1, M1.2, M2.1, M2.2, M2.3	**70%**

** Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần, điểm tích cực học tập. Điểm chuyên cần và điểm tích cực học tập có giá trị từ –2 đến +2 theo qui định của Viện Toán ứng dụng và Tin học cùng Quy chế Đào tạo đại học hệ chính quy của Trường ĐH Bách khoa Hà Nội.*

6. KẾ HOẠCH GIẢNG DẠY

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
1	**Chương 1. Số thực (3 LT+ 3 BT)** I.1. Tập hợp, quan hệ, ánh xạ I.2. Trường số thực Các tiên đề của số thực. Đường thẳng thực. Trị tuyệt đối. Một số tính chất của **R**. Tập số thực mở rộng. I.3. Dãy số thực. Giới hạn của dãy số thực Định nghĩa. Các tính chất của dãy số hội tụ. Giới hạn vô cực. Tính trù mật của **Q** trong **R**. I.4. Các nguyên lý cơ bản của **R** Nguyên lý Weierstrass. Nguyên lý Cantor. Nguyên lý Bolzano-Weierstrass. Nguyên lý Cauchy. I.5. Giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy số thực	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3	**Giảng viên:** - Giới thiệu đề cương môn học. - Giải thích cách thức dạy và học cũng như hình thức đánh giá môn học. - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp.	A1.1: 1.1-1.4, A1.2, A2.1
2	**Chương II. Giới hạn và tính liên tục của hàm số (3 LT+ 3 BT)** A. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ II.1. Khái niệm hàm số Định nghĩa hàm số, tập xác định, tập giá trị, hàm chẵn, hàm lẻ, hàm tuần hoàn, hàm hợp. Hàm số ngược, các hàm số lượng giác ngược. Hàm số sơ cấp: các hàm số sơ cấp cơ bản, khái niệm hàm số sơ cấp. II.2. Khái niệm giới hạn của hàm số Điểm tụ của một tập hợp trong **R**. Định nghĩa giới hạn hàm số (bởi giới hạn dãy số và bằng ngôn ngữ (ε,δ)) Giới hạn một phía. Giới hạn tại vô cùng. Giới hạn vô cực II.3. Tính chất Một số tính chất cơ bản. Các phép toán về giới hạn II.4. Vô cùng bé và vô cùng lớn Định nghĩa. Tính chất. So sánh VCB, VCL; VCL và VCB tương đương. Các qui tắc ngắt bỏ VCL,		**Giảng viên:** - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. **Sinh viên:** - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp. - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.	A1.1: 1.5-1.7, A1.2, A2.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	VCB. B. TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ II.5. Khái niệm liên tục Định nghĩa hàm số liên tục (bằng ngôn ngữ ε, δ và bằng giới hạn hàm số), liên tục một phía. Điểm gián đoạn của hàm số. Phân loại điểm gián đoạn. II.6. Tính chất Tính liên tục của hàm số hợp. Các phép toán về hàm số liên tục.			
3	**1.8** Đạo hàm và vi phân Một số khái niệm cơ bản. Đạo hàm một phía, mối quan hệ giữa đạo hàm và đạo hàm một phía, mối quan hệ giữa đạo hàm và liên tục. Đạo hàm của hàm hợp, Đạo hàm của hàm số ngược. Vi phân: định nghĩa, ý nghĩa hình học, ứng dụng vi phân để tính gần đúng. Mối liên hệ giữa hàm số có đạo hàm và hàm khả vi. Vi phân của hàm hợp và tính bất biến của vi phân cấp một.			A1.1: 1.8, A1.2, A2.1
4	B. VI PHÂN III.4. Khái niệm vi phân Vi phân của hàm số tại một điểm, ý nghĩa hình học. Vi phân của một hàm số. III.5. Vi phân cấp cao Định nghĩa. Tính bất biến của vi phân cấp một. C. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN III.6. Các định lý về giá trị trung bình. Cực trị của hàm số. Định lý Fermat. Định lý Rolle. Định lý Lagrange. Định lý Cauchy III.7. Quy tắc L'Hospital Định lý. Các ví dụ.			A1.1: 1.8-1.9, A1.2, A2.1
5	III.8. Công thức Taylor Định lý Taylor. Công thức Mac – Laurin. Khai triển hữu hạn một số hàm số sơ cấp III.9. Hàm số lồi (*) Định nghĩa, ý nghĩa hình học. Một số tính chất của hàm số lồi. Một số bất đẳng thức: Jensen,			A1.1: 1.9, A1.2, A2.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	Holder, Minkowski. III.10. Khảo sát hàm số Khảo sát hàm số y=f(x) Phương trình tham số của đường cong. Lược đồ khảo sát. Tọa độ cực, toạ độ cực suy rộng, hệ toạ độ cực. Lược đồ khảo sát đường cong cho trong tọa độ cực.			
6	CHƯƠNG IV. TÍCH PHÂN A. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH IV.1. Nguyên hàm và tích phân bất định Nguyên hàm. Tích phân bất định. Nguyên hàm của một số hàm số hay gặp. IV.2. Phép biến đổi số. Tích phân từng phần Phép biến đổi số. Tích phân từng phần. IV.3. Nguyên hàm của các hàm số hữu tỷ Phân tích hàm hữu tỷ. Nguyên hàm của các phân thức đơn giản.	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 1.10, A1.2, A2.1
7	IV.4. Tích phân của các hàm số vô tỷ Tích phân. Đổi biến Euler. IV.5. Tích phân của các hàm số lượng giác Phương pháp chung. Đặc biệt. IV.6. Tích phân của các hàm số hữu tỷ (trùng IV.3) Phương pháp. Chú ý.	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1: 2.1, A1.2, A2.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
8	B. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH IV.7. Khái niệm tích phân xác định. Điều kiện khả tích Bài toán tính diện tích hình thang cong. Khái niệm tích phân xác định. Điều kiện cần để hàm số khả tích. Các tổng Darboux: định nghĩa, các tính chất. Tiêu chuẩn khả tích Riemann của hàm số. IV.8. Các tính chất của tích phân Riemann Cộng tính. Tuyến tính. Bảo toàn thứ tự. Khả tích. IV.9. Lớp các hàm số khả tích Riemann Các hàm số liên tục. Các hàm số bị chặn. Các hàm số đơn điệu.	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 2.1-2.2, A1.2, A2.1
9	**Thi giữa kỳ: Từ chương I đến hết tích phân bất định.**		Thi	A1.2
10	IV.10. Các định lý về giá trị trung bình Định lý về giá trị trung bình. Định lý trung bình mở rộng. IV.11. Quan hệ giữa tích phân xác định và nguyên hàm Đạo hàm của tích phân theo cận trên. Công thức Newton-Leibniz. Khái niệm nguyên hàm suy rộng. IV.12. Các phương pháp tính tích phân xác định Tích phân từng phần. Đổi biến số. IV.13. Một số ứng dụng hình học của tích phân xác định Tính diện tích hình phẳng. Tính độ dài đường cong. Tính thể tích. Tính diện tích mặt tròn xoay	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3	**Giảng viên:** - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. **Sinh viên:** - Chuẩn bị đọc trước nội dung bài giảng của tuần kế tiếp. - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.	A1.1: 2.2-2.3, A2.1
11	C. TÍCH PHÂN SUY RỘNG IV.14. Tích phân trên khoảng không bị chặn Định nghĩa. Tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $\alpha > 0,\ a > 0$. Tính tuyến tính của tích phân suy rộng. Tích phân suy rộng của hàm số không âm. Tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của tích phân suy rộng. Tính hội tụ tuyệt đối của tích phân suy rộng. Dấu hiệu			A1.1: 2.3-2.4, A2.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	Direchlet. Dấu hiệu Abel. Tích phân suy rộng trên các khoảng $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ IV.15. Tích phân suy rộng của các hàm số không bị chặn Định nghĩa. Tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $\alpha > 0$.			
12	Tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của tích phân suy rộng. Tích phân suy rộng của hàm số không âm. Tính hội tụ tuyệt đối của tích phân suy rộng Các tích phân suy rộng khác. CHƯƠNG V. KHÔNG GIAN METRIC - KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN V.1. Khái niệm không gian metric. Sự hội tụ Định nghĩa. Các ví dụ. Sự hội tụ	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 2.4, A2.1
13	V.2. Tập hợp mở và tập hợp đóng Lân cận. Khái niệm tập hợp mở và tập hợp đóng. Điểm trong, điểm ngoài, điểm biên. Định nghĩa tập hợp mở, tập hợp đóng. Quan hệ đối ngẫu giữa tập hợp mở và tập hợp đóng. Giao và hợp các tập mở và tập đóng. Điểm tụ. Định nghĩa. Mối liên hệ giữa điểm tụ và tập hợp đóng. Phần trong và bao đóng của tập hợp : Định nghĩa. Quan hệ giữa phần trong với tập hợp mở, giữa bao đóng và tập hợp đóng. Tập hợp trù mật V.3. Không gian metric đầy . Định nghĩa. Các ví dụ. Nguyên lý Cantor.. Nguyên lý ánh xạ co : Định nghĩa ánh xạ co, điểm bất động của ánh xạ. Định lý Banach. Một số ứng dụng. V.4. Không gian định chuẩn . Định nghĩa không gian định chuẩn. Mối liên hệ giữa không gian định chuẩn và không gian metric. Các ví dụ. Sự hội tụ. Chuẩn tương đương.	M1.1 M1.2 M2.1 M2.3		A1.1: 3.1, A2.1
14	CHƯƠNG VI. KHÔNG GIAN . HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN $\mathbf{R}^p$ VI.1. Không gian $\mathbf{R}^p$ Một số chuẩn trong không gian $\mathbf{R}^p$. Sự tương đương của chúng . Sự hội tụ trong không gian $\mathbf{R}^p$. Nguyên lý Bolzano- Weierstrass.			A1.1: 3.2, A2.1

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá, BT
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	VI.2. Giới hạn của hàm số nhiều biến số Khái niệm hàm số nhiều biến số. Giới hạn. Các phép toán. Tiêu chuẩn Cauchy để hàm số có giới hạn. Một số ví dụ. Giới hạn lặp. VI.3. Tính liên tục Định nghĩa. Các phép toán. Hàm số liên tục đều. Hàm số liên tục trên một tập hợp đóng, bị chặn. VI.4. Đạo hàm riêng và vi phân Đạo hàm riêng: Định nghĩa, ý nghĩa hình học, cách tính. Vi phân toàn phần: Định nghĩa. Mối liên hệ giữa tính khả vi và tính liên tục, giữa tính khả vi và đạo hàm riêng của hàm số. Ứng dụng tính gần đúng.			
15	Đạo hàm của hàm số hợp. Đạo hàm cấp cao : Định nghĩa. Định lýSchwarz về điều kiện để các đạo hàm cấp hai hỗn hợp bằng nhau. Vi phân cấp cao: Định nghĩa. Tính bất biến của vi phân cấp cao không còn đúng với hàm hợp. Đạo hàm theo hướng. Công thức khai triển Taylor. VI.5. Cực trị VI.5.1. Cực trị của hàm số nhiều biến số: Định nghĩa. Điều kiện cần để hàm số có cực trị. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị.	M1.1 M1.2 M2.1 M2.2 M2.3		A1.1: 3.2-3.3, A2.1
16	VI.5.2. Hàm ẩn : Định nghĩa. Định lý tồn tại. Cách tính đạo hàm của hàm ẩn. Cực trị có điều kiện : Định nghĩa. Phương pháp nhân tử Lagrange.		**Giảng viên:** - Giảng bài, trao đổi hỏi đáp với sinh viên trong quá trình giảng bài. **Sinh viên:** - Nắm vững các khái niệm cơ bản và vận dụng kiến thức thực hành giải các bài tập môn học cũng như một số bài toán thực tế có mô hình gắn với nội dung môn học.	A1.1: 3.3, A2.1

7. QUY ĐỊNH CỦA HỌC PHẦN

(Các quy định của học phần nếu có)

8. NGÀY PHÊ DUYỆT: ……………………..

Viện Toán ứng dụng và Tin học

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy

BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH I

Nhóm ngành I - Hệ kĩ sư tài năng. Mã số : MI 1110

Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3 : Tự luận, 60 phút, chung toàn khóa, vào tuần học thứ 9, 10.

Nội dung: Chương 1, chương 2, chương 3 và chương 4 đến hết tích phân bất định.

Thi cuối kỳ hệ số 0.7: Tự luận, 90 phút.

Chương 1
SỐ THỰC

1.1-1.5. Số thực.

1. Tìm giới hạn của các dãy số (nếu hội tụ) với số hạng tổng quát x_n như sau

a. $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ b. $x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$

c. $x_n = \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$ d. $x_n = \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$

2. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy số với số hạng tổng quát x_n như sau

a. $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ b. $x_1 > 0, x_n = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$

c. $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2$ b. $x_1 = \sqrt[k]{5}, x_{n+1} = \sqrt[k]{5x_n}; k \in \mathbb{N}$

e. $x_n = \frac{a^n}{n!}$

Chương 2
GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM MỘT BIẾN

2.1-2.8. Giới hạn và liên tục

1. Tìm tập xác định của hàm số

a. $y = \sqrt[4]{\lg(\tan x)}$ b. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

c. $y = \sin x + \cos x$ d. $y = \lg(1 + 2\sin x)$

2. Tìm miền giá trị của hàm số

a. $y = \lg(1 - 2\cos x)$ b. $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$

3. Tìm $f(x)$ biết

a. $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ b. $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$

4. Tìm hàm ngược của hàm số

a. $y = 2x + 3$ b. $y = \frac{1-x}{1+x}$ c. $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

d. $y = \sqrt{1 - x^2}$ với $-1 \leq x \leq 0$, có $x = -\sqrt{1 - y^2}, y \in [0; 1]$

e. $y = 2^x + 2^{-x}$, trên $(-\infty, 0]$

5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a. $f(x) = a^x + a^{-x} (a > 0)$ b. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

c. $f(x) = \sin x + \cos x$

6. Chứng minh rằng bất kỳ hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a, a)$, $(a > 0)$ cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn với một hàm số lẻ.

7. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của hàm số sau (nếu có)

a. $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$ b. $f(x) = \sin x^2$

c. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ d. $f(x) = \cos^2 x$

e. $y = \sqrt{\tan x}$

8. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ b. $\lim\limits_{x\to a} \frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}, n \in \mathbb{N}$

9. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1} - x\right)$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ d. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

10. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$ b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ d. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

11. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ b. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} [\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln x)]$

d. $\lim\limits_{x\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right), x > 0$

12. a. Khi $x \to 0^+$ cặp VCB sau có tương đương không?

$$\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \quad \text{và} \quad \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x.$$

b. Cho $\alpha(x) = e - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}, \beta(x) = ex.$

Chứng minh rằng $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to 0$.

c. So sánh hai vô cùng bé sau trong quá trình $x \to 1$:

$$\alpha(x) = \tan(\pi x) + e^{(x-1)^2} - 1, \beta(x) = 1 + \cos(\pi x) + \ln x.$$

13. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ a & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{với} \quad x \geq 0 \\ a\cos x + b\sin x & \text{với} \quad x < 0 \end{cases}$

14. Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số

a. $y = \frac{8}{1-2^{\cot x}}$ b. $y = \frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ c. $y = \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}, (a \neq b)$

15. a. Tìm điểm gián đoạn của hàm số: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6}{2+x^{2n}}, x \in \mathbb{R}$.

b. Tìm và phân loại điểm gián đoạn của hàm số:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2 - \log_3|x|} & \text{với} \quad x \neq 0, \pm 9 \\ 3 & \text{với} \quad x = 0, \pm 9. \end{cases}$$

16. Xét tính liên tục đều của hàm số

a. $y = x - 2$ b. $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{với} \quad x \in (0,1) \\ 0 & \text{với} \quad x = 0 \end{cases}$

c. Kiểm tra tính liên tục đều của hàm số sau trên đoạn cho trước:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, 0 < x < \pi$$

17. Các hàm số sau đây liên tục tại giá trị x nào?

a. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu} & x \text{ hữu tỉ}, \\ 1 \text{ nếu} & x \text{ vô tỉ}. \end{cases}$ b. $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \text{ hữu tỉ}, \\ x & \text{nếu} \quad x \text{ vô tỉ}. \end{cases}$

Chương 3

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN SỐ

3.1-3.10. Phép tính vi phân

1. a. Tìm đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{khi} \quad x < 1 \\ (1-x)(2-x) & \text{khi} \quad 1 \le x \le 2 \\ x - 2 & \text{khi} \quad x > 2 \end{cases}$$

b. Chứng minh rằng: $2\arctan x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \pi, x \ge 1.$

c. Tính $f^{'}(x)$, biết: $f(x) = \begin{cases} 3x + e^{-\frac{2}{x}} & \text{khi} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{khi} \quad x = 0. \end{cases}$

d. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = 2x + \ln(x^2+1)$ có hàm số ngược $g(x) = f^{-1}(x)$. Tính $g^{'}(2)$.

e. Chứng minh rằng $3\arctan x + \arctan(x+2) < 4\arctan(x+1), \forall x > 0.$

f. Tìm $f^{'}(x)$ biết $\dfrac{d}{dx}[f(2017)] = x^2$.

2. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

a. Liên tục tại $x = 0$ b. Khả vi tại $x = 0$ c. Có đạo hàm liên tục tại $x = 0$

3. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x-a|\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a) \neq 0$, không khả vi tại điểm $x = a$.

4. Tìm vi phân của hàm số

a. $y = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}, (a \neq 0)$ b. $y = \arcsin\frac{x}{a}, (a \neq 0)$

c. $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, (a \neq 0)$ d. $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|$

5. Tìm

a. $\frac{d}{d(x^3)}\left(x^3 - 2x^6 - x^9\right)$ b. $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ c. $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

6. Tính gần đúng giá trị của biểu thức

a. $\lg 11$ b. $\sqrt[7]{\frac{2-0.02}{2+0.02}}$

7. Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

a. $y = \frac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$ b. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$

c. $y = x^2e^{2x}$, tính $y^{(10)}$ d. $y = x^2\sin x$, tính $y^{(50)}$

e. $y = (1-x)^2\cos x$, tính $f^{51}(0)$.

8. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

a. $y = \frac{x}{x^2-1}$ b. $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$

c. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$ d. $y = e^{ax}\sin(bx+c)$

9. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

10. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3, \quad -1 \leq x \leq 1$$

11.Chứng minh bất đẳng thức

a. $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$ b. $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a$.

c. $\dfrac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \dfrac{b-a}{1+a^2}$.

d. Tồn tại hay không hàm số $f(x)$ sao cho $f(0) = -1, f(2) = 4$ và

$f'(x) \leq 2$ với mọi x?

12. Tìm giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ b. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ d. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

e. $\lim\limits_{x\to 1}\tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)$ h. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-a\tan^2 x\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$

f. $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\tan\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$ i. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\tan x}$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{ex^{x+1}}{(x+1)^x}-x]$ k. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

13. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x\to 0$

$$f(x)=\frac{1}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^3}-\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}$$

14. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a,b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a,b). Chứng minh rằng với mọi $x\in(a,b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c\in(a,b)$ sao cho

$$f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c)$$

15. a. Chứng minh rằng: Với mọi số tự nhiên lẻ n, phương trình $x=\int\limits_0^x(arccot\ t)^n dt$ có không quá 2 nghiệm thực phân bệt.

b. Cho $6a=4b+3c$. CMR phương trình $ax^3+bx^2+c=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-2,0)$.

c. Hàm số $f(x)=x^2+2x$ có thỏa mãn định lý Rolle trên $[-\frac{3}{2},1]$? Kết luận của định lý Rolle có còn đúng?

d. Cho $a+b+c=0$. CMR phương trình $6ax^5+5bx^4+c=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0,1)$.

e. Hàm số $f(x)=|x|(x+1), -1l\leq 2$ có thỏa mãn định lý Lagrange? Công thức Lagrange có đúng cho hàm đó?

f. Hàm số $f(x)=|x|(x-1), g(x)=x+1, -2\leq x\leq 1$ có thỏa mãn định lý Cauchy? Công thức Cauchy có đúng cho hàm đó?

g. Xác định giá trị trung gian c khi áp dụng định lý Lagrange vào hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}; & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}; & x > 1 \end{cases}$ trên đoạn $[0, 2]$.

16. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a. $y = x^3 + x$ b. $y = \arctan x - x$

17. Chứng minh bất đẳng thức

a. $2x \arctan x \geq \ln\left(1 + x^2\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

b. $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$

18. Tìm cực trị của hàm số

a. $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$ b. $y = x - \ln(1+x)$

c. $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$ d. $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$

e. $y = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$

19. a. Dùng phương pháp Newton, tính $\sqrt[6]{2}$ đúng đến 8 chữ số thập phân sau dấu phẩy.

b. Giải thích tại sao phương pháp Newton không áp dụng được để giải phương trình $x^3 - 2x + 2 = 0$ với xấp xỉ ban đầu $x_0 = 1$.

20. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$, chứng minh rằng $\forall c \in (a, b)$ ta có

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

21. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a. $\tan \dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{\tan x + \tan y}{2}, \forall x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$.

b. $x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \dfrac{x+y}{2}, \forall x, y > 0$.

22. Tìm tiệm cận của các đường cong

a. $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$

b. $y = \ln(1 + e^{-x})$

d. $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = \dfrac{2016t^2}{1-t^3} \end{cases}$

c. $y = \dfrac{x^3 \text{arccot} x}{1+x^2}$

e. $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2\arctan t \end{cases}$

23. CMR: Hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ có 3 điểm uốn thẳng hàng.

24. Khảo sát hàm số

a. $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$

b. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

c. $y = \frac{x^4+8}{x^3+1}$

d. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

e. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

g. $r = a + b\cos\varphi, (0 < a \le b)$

h. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, (a > 0)$

Chương 4
PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

4.1-4.6. Tích bất định

1. Tính các tích phân

a. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$

b. $\int \sqrt{1 - \sin 2x}dx$

c. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

d. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{3/2}}$

e. $\int \frac{xdx}{(x+2)(x+5)}$

f. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

g. $\int \sin x \sin(x+y)dx$

h. $\int \frac{1+\sin x}{\sin^2 x}dx$

i. $\int |x^2 - 3x + 2|dx$

j. $\int \dfrac{x^4 dx}{x^{10} - 1}$

2. Tính các tích phân

a. $\int \arctan x dx$

b. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}}dx$

c. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

d. $\int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx$

e. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$

f. $\int \sin^{n-1} x \sin(n+1)x dx$

g. $\int e^{-2x}\cos 3x dx$

h. $\int \arcsin^2 x dx$

i. $\int \dfrac{dx}{1 + \sqrt{x^2+4x+5}}$

3. Lập công thức truy hồi tính $I_n (n \in \mathbb{N})$

a. $I_n = \int x^n e^x dx$ b. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$

c. $I_n = \int \sin^n x dx$.

4.7-4.13. Tích phân xác định

4. Tính các đạo hàm

a. $\frac{d}{dx}\int\limits_x^y e^{t^2}dt$ b. $\frac{d}{dy}\int\limits_x^y e^{t^2}dt$ c. $\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

5. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\alpha}+\frac{1}{n\alpha+\beta}+\frac{1}{n\alpha+2\beta}+\cdots+\frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right]$, $(\alpha,\beta>0)$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

6. Tính các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}dt}{\int\limits_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}dt}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$

7. Tính các tích phân sau

a. $\int\limits_{1/e}^{e}|\ln x|(x+1)\,dx$ b. $\int\limits_1^e (x\ln x)^2dx$

c. $\int\limits_0^{3\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$ d. $\int\limits_0^3 \frac{\sin^2 x\cos x}{(1+\tan^2 x)^2}dx$

e. $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$ f. $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x\cos nx dx$

8. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thì

a. $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$ b. $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi}\frac{\pi}{2}f(\sin x)dx$

9. a. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a,b]$. Khi đó $f^2(x), g^2(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng khả tích trên $[a,b]$. Chứng minh bất đẳng thức (với $a<b$)

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)dx\right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

b. So sánh $\int\limits_0^1 e^{-x}dx, \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$.

c. CMR: $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{x^n}{1+x}dx = 0$.

d. CMR: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0.$

4.14-4.15. Tích phân suy rộng.

10. Xét dự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

a. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$ b. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$

c. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ d. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

11. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$ b. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$ c. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$

d. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x}$ e. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ f. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$

g. Tìm a để tích phân sau hội tụ: $\int\limits_0^1 \frac{x^a}{x^2-\ln(1+x^2)}dx.$

h. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x}}$ k. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-1}}$ l. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-8}}.$

m.Tìm α để tích phân sau hội tụ $\int\limits_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{e^{3/x}-1}{\alpha}\right)dx.$

n. Tìm α để tích phân sau hội tụ $\int\limits_0^1 \frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1+x}}{\cosh x - \cos x}dx.$

12. Nếu $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì có suy ra được $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$ không? Xét ví dụ $\int\limits_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)dx.$

13. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \neq 0$. Hỏi $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ có hội tụ không.

14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a. Đường parabol $y = x^2+4$ và đường thẳng $x-y+4=0$

b. Parabol bậc ba $y = x^3$ và các đường $y = x, y = 2x, (x \geq 0)$

c. Đường tròn $x^2+y^2 = 2x$ và parabol $y^2 = x, (y^2 \leq x)$

d. Đường $y^2 = x^2 - x^4$

15. Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2+y^2 \leq a^2$

và $y^2 + z^2 \leq a^2, (a > 0)$.

16. Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt paraboloit $z = 4 - y^2$, các mặt phẳng tọa độ $x = 0, z = 0$ và mặt phẳng $x = a$ $(a \neq 0)$.

17. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$

a. Quanh trục $0x$ một vòng b. Quanh trục $0y$ một vòng

18.Tính độ dài đường cong

a. $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ khi x biến thiên từ 1 đến 2

b. $\begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2}\right) \\ y = a \sin t \end{cases}$ khi t biến thiên từ $\frac{\pi}{3}$ đến $\frac{\pi}{2}$ $(a > 0)$

19. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a. $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ quay quanh trục $0x$

b. $y = \frac{1}{3}(1 - x)^3, 0 \leq x \leq 1$ quay quanh trục $0x$

Chương 5

KHÔNG GIAN METRIC, KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN

5.1-5.4. Không gian metric, không gian định chuẩn.

1. $(\mathbb{R}^p, \rho)$ là các không gian metric với các metric như sau:

a. $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p}(x_i - y_i)^2}$ b. $\rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{p}|x_i - y_i|$

c. $\rho(x,y) = \max\limits_{i=\overline{1,p}}\{|x_i - y_i|\}$

2. a. $C_{[a,b]}$ là không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$ là không gian đủ, ở đó $\rho(x(t), y(t)) = \underset{a\le t\le b}{\mathrm{Max}}|x(t) - y(t)|$.

b. $C^L_{[a,b]} = \{x(t) \in C_{[a,b]}\}$, với $\rho(x(t), y(t)) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|dt$ không là không gian đủ.

3. a. $\mathbb{R}$ với $||x|| = |x|$ là không gian tuyến tính định chuẩn.

b. $\mathbb{R}^p$ với $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ là không gian tuyến tính định chuẩn.

4. Cho không gian metric (X, d). Ta định nghĩa $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$

a. CMR: d_1 là một metric.

b. CMR: $x_n \to x$ theo d_1 khi và chỉ khi $x_n \to x$ theo d.

c. CMR: (X, d) đầy đủ khi và chỉ khi (X, d_1) đầy đủ.

5. Cho hai không gan metric (X_1, d_1) và (X_2, d_2). Trên $X = X_1 \times X_2$ ta định nghĩa:

$$d\Big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

a. CMR (X, d) là không gian metric.

b. Cho (X, d_1) và (X, d_2) đầy đủ. CMR (X, d) là không gian metric đầy đủ.

6. Cho $X = C_{[0,1]}$, xét hai metric $d(x,y) = \sup\limits_{[0,1]}|x(t) - (t)|$;

$d_1(x,y) = \int\limits_0^1 |x(t) - (t)|dt.$

a. CMR $x_n \xrightarrow{d} x$ suy ra $x_n \xrightarrow{d_1} x$.

b. Điều ngược lại có đúng không?

c. CMR (X, d_1) không đầy đủ.

7. Cho $X = C_{[a,b]}$, xét metric $d(x,y) = \sup\limits_{[a,b]} |x(t) - y(t)|$. Giả sử $x_0 \in C_{[a,b]}$. Xét các tập sau:

$$M_1 = \Big\{x \in C_{[a,b]} : x(t) > x_0(t), t \in [a,b]\Big\}.$$

$$M_2 = \Big\{x \in C_{[a,b]} : x(t) \geq x_0(t), t \in [a,b]\Big\}.$$

$$M_3 = \Big\{x \in C_{[a,b]} : \exists t \in [a,b] : x(t) \geq x_0(t)\Big\}.$$

CMR: M_1 mở, M_2, M_3 đóng.

8. Trong $C^1_{[a,b]}$ định nghĩa: $p_1(x) = |x(a)| + \sup_{[a,b]}|x'(t)|, p_2(x) = \sup\limits_{[a,b]} |x(t)|$, $p_3 = \sup\limits_{[a,b]}\{|x(t)| + |x'(t)|\}$.

a. CMR: p_1, p_2, p_3 là các chuẩn trên $C^1_{[a,b]}$.

b. CMR: p_2, p_3 không tương đương nhau.

c. CMR: p_1, p_3 không tương đương nhau.

Chương 6
KHÔNG GIAN CÁC HÀM LIÊN TỤC TRÊN $\mathbb{R}^p$

6.1-6.5. Hàm liên tục trên $\mathbb{R}^p$

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau

a. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ b. $z = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$

c. $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$ d. $z = \sqrt{x \sin y}$

2. Tìm các giới hạn nếu có của các hàm số sau

a. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x \to 0, y \to 0)$

b. $f(x,y) = \sin\frac{\pi x}{2x+y}, \quad (x \to \infty, y \to \infty)$

c. $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

d. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

e. $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

f. $f(x,y) = \dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^2+(y+2)^4}, \quad (x \to 1, y \to -2)$

g. $f(x,y) = \Big(1+xy\Big)^{1/x^2+y^2}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

h. $f(x,y) = \Big(\cos\sqrt{x^2+y^2}\Big)^{-1/(x^2+y^2)}, \quad (x \to 0, y \to 0)$

3. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

a. $z = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ b. $z = y^2\sin\frac{x}{y}$

c. $z = \arctan\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ d. $z = x^{y^3}, (x>0)$

e. $u = x^{y^z}, (x,y,z>0)$ f. $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$

4. Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của các đạo hàm riêng của hàm số $f(x,y)$ sau

$$a. f(x,y) = \begin{cases} x\arctan\left(\frac{y}{x}\right)^2 & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$b.\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. Tìm a để $(0;0)$ là đểm liên tục của hàm số

$$a.\ z = \begin{cases} \dfrac{x(e^{2y}-1)-2y(e^x-1)}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0;0) \\ a & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0;0) \end{cases}$$

$$b.\ z = \begin{cases} \dfrac{y(e^{3x}-1)-3x(e^y-1)}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0;0) \\ a & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0;0) \end{cases}$$

6. Giả sử $z = yf(x^2-y^2)$, ở đây f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thỏa mãn

$$\tfrac{1}{x}{z_x}' + \tfrac{1}{y}{z_y}' = \tfrac{z}{y^2}$$

7. Xét tính khả vi của các hàm số sau tại $(0;0)$

a. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\tan y}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0;0) \end{cases}$

b. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y}{x^2+y^2} & \text{khi} \quad (x,y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{khi} \quad (x,y) = (0;0) \end{cases}$

c. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4+y^2}$

8. Tìm đạo hàm riêng các hàm số hợp sau đây

a. $z = e^{u^2-2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2+y^2}$

b. $z = \ln\left(u^2+v^2\right), u = xy, v = \frac{x}{y}$

c. $z = \arcsin\left(x-y\right), x = 3t, y = 4t^3$

d. Tìm f''_{xy} của hàm hợp $f(u,v) = e^{uv}, u(x,y) = x+y^2, v(x,y) = 2x+y$

e. Tìm df của hàm $f(x^2+2y, e^{xy})$.

f. Tìm d^2f của hàm hợp $f = f(u,v) = 2u+v^2, u(x,y) = xy+2x, v(x,y) = x^2+y^2$

9. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

a. $z = \sin(x^2+y^2)$ b. $z = \ln\tan\frac{y}{x}$

c. $z = \arctan\frac{x+y}{x-y}$ d. $u = x^{y^2z}$

10. Tính gần đúng

a. $A = \sqrt[3]{(1,02)^2+(0,05)^2}$ b. $B = \ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right)$

11. Tìm đạo hàm, đạo hàm riêng của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau

a. $x^3y - y^3x = a^4$, tính y' b. $x+y+z = e^z$, tính z_x', z_y'

c. $\arctan\frac{x+y}{a} = \frac{y}{a}$, tính y' d. $x^3+y^3+z^3-3xyz = 0$, tính z_x', z_y'

12. Cho $u = \frac{x+z}{y+z}$, tính u_x', u_y' biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình

$$ze^x = xe^x + ye^y$$

13. Tìm đạo hàm của hàm số ẩn $y(x), z(x)$ xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

14. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 z_x{}' + \frac{1}{y} z_y{}' = \frac{1}{z}$$

15. a. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y) = xy^2 - 3x^4y^5$ tại điểm $M(1, 1)$ theo hướng $\overrightarrow{u} = (1, -2)$.

b. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ tại điểm $M(1, 2)$ theo hướng của vecto tạo với chiều dương Ox một góc 30^o.

c. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$ tại điểm $M(3, 3, 1)$ theo hướng của vecto $(2, 1, 2)$.

d. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y, z) = x^2 - 3yz + 4$ tại điểm $M(1, 2, -1)$ theo hướng của vecto tạo với các trục toạn độ những góc bằng nhau.

e. Cho $f(x, y, z) = \ln(xyz)$ và điểm $M(1, -2, -3)$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng của hàm số tại M.

16. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau:

a. $z = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$ b. $z = x^2 \ln(x + y)$ c. $z = \arctan \dfrac{y}{x}$

17. Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau

a. $z = xy^2 - x^2y$ b. $z = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$

18. Tìm cực trị của các hàm số sau

a. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ b. $z = x + y - xe^y$

c. $z = x^2 + y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$ d. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

e. $z = x^4 + y^4 - (x + y)^3$

19. Tìm cự trị có điều kiện

a. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

b. $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$

20. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a. $z = x^2y(4 - x - y)$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, y = 0, x + y = 6$

b. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$

c. Tìm điểm thuộc $y^2 = 2x$ sao cho nó gần điểm $A(1; 4)$ nhất.

d. Tìm điểm thuộc elliipse $4x^2 + y^2 = 4$ sao cho nó xa điểm $A(1; 0)$ nhất.

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy