MI1121 GIẢI TÍCH II

Phiên bản: 2020.1.0

Mục tiêu: Cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về tích phân phụ thuộc tham số, tích phân bội, tích phân đường, tích phân mặt, ... Trên cơ sở đó có thể học tiếp các học phần sau về Toán cũng như các môn kỹ thuật khác, góp phần tạo nên nền tảng toán học cơ bản cho kĩ sư các ngành công nghệ.

Objective: *This course provides the basics knowledge about applications of differential calculus, parametric dependent integrals, double integrals, triple integrals, line integrals, surface integrals and vector fields. Students can understand the basics of computing technology and continue to study further.*

Nội dung: Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học, tích phân phụ thuộc tham số, tích phân bội, tích phân đường, tích phân mặt.

Contents: *Applications of differential calculus, parametric dependent integrals, double integrals, triple integrals, line integrals, surface integrals and vector fields.*

1. THÔNG TIN CHUNG

Tên học phần:	Giải tích II
Mã số học phần:	MI1121
Khối lượng:	3(3-1-0-6) - Lý thuyết: 30 tiết - Bài tập: 30 tiết
Học phần tiên quyết:	- Giải tích I
Học phần học trước:	- Đại số, Giải tích I
Học phần song hành:	- Giải tích III

2. MÔ TẢ HỌC PHẦN

3. MỤC TIÊU VÀ CHUẨN ĐẦU RA CỦA HỌC PHẦN

Sinh viên hoàn thành học phần này có khả năng:

Mục tiêu/CĐR	**Mô tả mục tiêu/Chuẩn đầu ra của học phần**	**CĐR được phân bổ cho HP/ Mức độ (I/T/U)**
[1]	[2]	[3]
M1	**Hiểu được lý thuyết về chuỗi, phương trình vi phân và phương pháp toán tử Laplace**	ITU
M1.1	Hiểu được khái niệm, định nghĩa.	IT
M1.2	Biết phương pháp giải các dạng toán của học phần.	ITU
M1.3	Có khả năng giải toán, suy luận logic, tính toán chính xác.	ITU
M2	**Áp dụng cho các chuyên ngành khác**	ITU
M2.1	Vận dụng được kiến thức học phần cho các học phần chuyên ngành.	ITU

4. TÀI LIỆU HỌC TẬP

Giáo trình

[1] Nguyễn Xuân Liêm (2001). *Giải Tích I, II.* NXB Giáo dục.

[2] Trần Đình Long, Nguyễn Đình Long, Hoàng Quốc Toàn (2001). *Giáo trình giải tích I, II, III.* NXB ĐHQG Hà Nội.

[3] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2015). *Toán học cao cấp II.* NXB Giáo dục.

[4] Nguyễn Xuân Thảo (2012). Bài Giảng Giải Tích II.

[5] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Trần Việt Dũng, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Xuân Thảo (2017). Bài tập *Toán học cao cấp II,* NXB Giáo dục.

Sách tham khảo

[1] Hoàng Tụy (2003). *Hàm thực và giải tích hàm.* NXB ĐHQG Hà Nội.

[2] Jean Marie-Monier (2001). *Giải Tích 1, 2,* 3. NXB Giáo dục.

[3] GM. Phichtengon (1975) . *Giáo trình phép tính vi phân và tích phân I, II, III* (Bản tiếng Nga)

[4] GM. Phichtengon (1975). *Cơ sở giải tích toán học I, II, III* (Bản tiếng Việt)

[5] Rudin (1970). *Cơ sở giải tích toán học*, Hà nội (Bản tiếng Việt)

5. CÁCH ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

Điểm thành phần	Phương pháp đánh giá cụ thể	Mô tả	CĐR được đánh giá	Tỷ trọng
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
A1. Điểm quá trình (*)	**Thi giữa kỳ**	Trắc nghiệm hoặc tự luận		**30%**
A2. Điểm cuối kỳ	**Thi cuối kỳ**	Trắc nghiệm hoặc tự luận		**70%**

** Điểm quá trình sẽ được điều chỉnh bằng cách cộng thêm điểm chuyên cần. Điểm chuyên cần có giá trị từ –2 đến +2, theo Quy chế Đào tạo đại học hệ chính quy của Trường ĐH Bách khoa Hà Nội.*

6. KẾ HOẠCH GIẢNG DẠY

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
1	CHƯƠNG I. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC I.1. Hàm vector một biến số (*) . Định nghĩa. Các phép toán. Giới hạn và liên tục Đạo hàm và vi phân của hàm vectơ :Định nghĩa. Liên hệ giữa đạo hàm của hàm vectơ và đạo hàm theo toạ độ. Đạo hàm cấp cao. Tích phân Riemann của hàm vectơ I.2. Đường trong không gian Euclide ba chiều Khái niệm đường: Định nghĩa đường liên tục, đường trơn, đường trơn từng khúc. Độ dài của đường: Định nghĩa. Tính khả trường của đường trơn, đường trơn từng khúc. Vectơ tiếp tuyến của đường :Định nghĩa vectơ tiếp tuyến. Pháp diện, phương trình pháp diện. Đường chính qui. Tham số tự nhiên của đường. Phương trình tự hàm của đường I.3. Đường phẳng . Độ cong: Định nghĩa độ cong trung bình, độ cong tại một điểm. Công thức tính độ cong tại một điểm. Tiếp tuyến và pháp tuyến của đường . Đường tròn chính khúc. Khúc tâm: định nghĩa,công thức tính tọa độ tâm cong . Đường túc bế và đường thân khai :Định nghĩa. Quan hệ giữa đường túc bế và đường thân khai. Tính chất	M1,M2	Giáo trình [1-3]	A1,A2
2	Hình bao của một họ đường phụ thuộc tham số: Định nghĩa, Qui tắc tìm hình bao I.4. Mặt trong $\mathbb{R}^3$ Khái niệm mặt: định nghĩa, điểm chính qui, điểm kỳ dị của một mặt. Tiếp tuyến: định nghĩa, định lý về các tiếp tuyến của một mặt tại một điểm. Tiếp diện. Pháp tuyến. CHƯƠNG II. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ (TPPTTS) II.1. TPPTTS trên một đoạn : Khái niệm. Tính liên tục. Tính khả vi: Định lý, ứng dụng tính tích phân. Tính khả tích: Định lý, ứng dụng tính tích phân	M1,M2	[2,3]	A1,A2

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
3	II.2. TPPTTS với các cận là những hàm số (*) Khái niệm. Tính liên tục. Tính khả vi		[1,3]	A1,A2
4	II.3. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số : Hội tụ đều. Tiêu chuẩn Cauchy.. Dấu hiệu Weierstrass Dấu hiệu Dirichlet. Dấu hiệu Abel. Các tích phân suy rộng phụ thuộc tham số khác. Tính liên tục	M1,M2	[1,2]	A1,A2
5	Đổi thứ tự lấy tích phân. Đạo hàm dưới dấu tích phân. Một số ví dụ. II.4. Các tích phân Euler : Hàm số Γ (Tích phân Euler loại hai): Định nghĩa, tính liên tục và khả vi mọi cấp trên $(0;+\infty)$ của hàm Γ. Một số công thức	M1,M2	[1,2]	A1,A2
6	Hàm số B (tích phân Euler loại một): +) Định nghĩa, tính liên tục và có đạo hàm riêng liên tục của hàm B +) Một số tính chất Một số ví dụ về tính tích phân nhờ hàm Γ và B	M1,M2	[1,2]	A1,A2
7	Một số ví dụ về tính tích phân nhờ hàm Γ và B CHƯƠNG III. TÍCH PHÂN BỘI A. TÍCH PHÂN HAI LỚP (TPHL) III.1. Khái niệm TPHL trên một hình chữ nhật đóng .Định nghĩa phép phân hoạch hình hộp chữ nhật, tổng tích phân, các tổng Darboux, định nghĩa tích phân, Điều kiện khả tích III.2. TPHL trên một tập hợp bị chặn : Định nghĩa, Tính chất :Cộng tính, Tuyến tính, Bảo toàn thứ tự, Khả tích, Định lý trung bình, Định lý trung bình	M1,M2	[1,3]	A2
8	III.3. Độ đo Penano-Jordan (*) Định nghĩa	M1,M2	[1,2]	A2

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	Độ đo không, Tập đo được : + Điều kiện cần và đủ để: một tập hợp có độ đo không, một tập hợp đo được + Định lý về hợp, giao, hiệu các tập hợp đo được là tập hợp đo được + Các định lý: đồ thị của hàm số liên tục và đường trơn có độ đo không. Lớp các hàm số khả tích : + Điều kiện đủ để hàm số khả tích + Định lý trung bình mở rộng III.4. Đưa TPHL về tích phân lặp Định lý Fubini trên hình chữ nhật Định lý Fubini trên tập bị chặn			
9	**THI GIỮA KỲ :** CHƯƠNG 1, 2			
10	III.5. Đổi biến trong TPHL Định lý Đổi biến trong tọa độ cực Tích phân hai lớp trên một tập đối xứng III.6. Thể tích vật thể Định nghĩa Ví dụ III.7. Diện tích mặt cong Khái niệm mặt trơn: Định nghĩa mặt tham số, mặt tham số : liên tục, trơn, đơn, chính qui. Tiếp diện và pháp tuyến của mặt: định nghĩa, phương trình tiếp diện và phương trình pháp tuyến. Diện tích mặt cong	M1,M2	[1,3]	A2
11	III.8. Tích phân ba lớp trên một hình hộp chữ nhật đóng Phép phân hoạch hình hộp chữ nhật Tổng tích phân Định nghĩa Điều kiện khả tích	M1,M2	[1,3]	A2

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	III.9. Tích phân ba lớp trên một tập hợp bị chặn Định nghĩa Tính chất Độ đo Jordan : Định nghĩa, Điều kiện cần và đủ để một tập đo được(*) + Cộng tính + Các định lý về tính đo được của một số mặt, tập Lớp các hàm số khả tích			
12	III.10. Cách tính tích phân ba lớp TPBL trên một hình chữ nhật đóng TPBL trên một tập bị chặn III.11. Phép biến đổi trong tích phân ba lớp : Định lý Tọa độ trụ Tọa độ cầu	M1,M2	[1,3]	A2
13	CHƯƠNG IV. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG (TPĐ) IV.1. Tích phân đường loại một Khái niệm Sự tồn tại Cách tính IV.2. Tích phân đường loại hai Khái niệm Sự tồn tại. Tính chất Ý nghĩa cơ học Cách tính Công thức Green : + Định nghĩa: đường kín, chu tuyến kín, miền, miền đơn liên, miền sơ cấp. + Công thức Green đối với miền sơ cấp	M1,M2	[1,3]	A2

Tuần	Nội dung	CĐR học phần	Hoạt động dạy và học	Bài đánh giá
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
	+ Công thức Green đối với miền đóng			
14	.Điều kiện để TPĐ không phụ thuộc đường lấy tích phân B. TÍCH PHÂN MẶT (TPM) IV.3. Tích phân mặt loại một :Định nghĩa, Sự tồn tại. Cách tính	M1,M2	[1,3]	A2
15	IV.4. Tích phân mặt loại hai : Mặt định hướng, Định nghĩa. Thông lượng của trường vectơ qua mặt định hướng, Sự tồn tại, Quy tắc định hướng chu tuyến. Mở rộng khái niệm TPM. IV.5. Công thức Stokes Công thức, Điều kiện để TPĐ loại hai trong không gian không phụ thuộc đường lấy tích phân. Ý nghĩa vật lý : + Lưu số của trường vectơ dọc theo chu tuyến kín + Khái niệm $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{F}$ + Công thức Stokes dưới dạng véc tơ		[1,3]	A2
16	IV.6. Công thức Ostrogradsky Công thức. Ý nghĩa vật lý : + Khái niệm dive của trường vectơ + Công thức Ostrogradsky dưới dạng vectơ + Khái niệm điểm nguồn, điểm rò, trường vectơ có thông lượng bảo toàn. Toán tử Haminton	M1,M2	[1,3]	A2

NGÀY PHÊ DUYỆT:

....

Viện Toán ứng dụng và Tin học

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy

MI 1121

Đại học Bách Khoa Hà Nội

Viện Toán ứng dụng và Tin học

BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH II

KSTN Mã học phần: MI 1120

1) Kiểm tra giữa kỳ hệ số 0.3, Tự luận, 60 phút.
   Nội dung: Từ bài 1 đến hết bài 27.

2) Thi cuối kỳ hệ số 0.7, Tự luận, 90 phút.

Chương 1

Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

Bài 1. Tìm độ cong và bán kính cong tại một điểm bất kì của đường cong:

a) $y = x^3$.

b) $\begin{cases} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\sin^3 t. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

d) $r = a(1 + \cos t)$.

Bài 2. Lập phương trình đường túc bế của các đường:

a) $y = x^{3/2}$.

b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

c) $\begin{cases} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\sin^3 t. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Bài 3. Tìm hình bao của họ các đường cong sau:

a) $y = (x - c)^3$,

b) $y^3 = (x - c)^2$,

c) $(x - c)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

d) $y = kx + \dfrac{1}{k}$.

Bài 4. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của các đường cong:

a) $\begin{cases} x = R\cos^2 t \\ y = R\sin t\cos t \\ z = R\sin t \end{cases}$ tại $t = \dfrac{\pi}{4}$

b) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = x \end{cases}$ tại $M(1; 1; 2)$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ tại $M(1; 1; 2)$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ tại $M(1; 1; 2)$.

Bài 5. Chứng minh rằng tiếp tuyến của đường cong $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ tại điểm bất kì luôn tạo với trục Oz một góc không đổi.

Bài 6. Tìm độ cong của các đường:

a) $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = bt \end{cases}$ tại $O(0;0;0)$

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ y^2 - 2x + z = 0 \end{cases}$ tại $M(1;1;1)$

Bài 7. Tìm độ cong của các đường:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ tại điểm $B(-2;1;6)$.

Bài 8. Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của các mặt sau:

a) $3xyz - z^3 = a^3$ tại điểm $M(0, a, -a)$.

b) $z = x^2 + y^2$ tại điểm $M(1;2;5)$.

c) $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ tại điểm $M(2;2;1)$.

d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ tại điểm có tiếp diện chắn trên các trục tọa độ những đoạn thẳng bằng nhau.

Bài 9. Chứng minh rằng tiếp diện bất kì của mặt $xyz = a^3$ tạo với các mặt phẳng tọa độ một tứ diện có thể tích không đổi.

Bài 10. Chứng minh rằng tiếp diện bất kì của mặt $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ chắn trên các trục tọa độ những đoạn thẳng có tổng độ dài không đổi.

Chương 2

Tích phân phụ thuộc tham số

Bài 11. Cho $f(x,y)$ là một hàm gián đoạn trên $[0,1]\times\mathbb{R}$. Liệu hàm $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)dx$ có thể liên tục được không ? Xét ví dụ với hàm $f(x,y)=sgn(x-y)$.

Bài 12. Khảo sát tính liên tục của hàm số $F(y)=\int\limits_0^1 \frac{yf(x)dx}{x^2+y^2}$ trong đó $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$.

Bài 13. Tính giới hạn

a) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$

Bài 14. Tính $F'(y)$ với

a) $F(y)=\int\limits_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}dx$

b) $F(y)=\int\limits_{y}^{y^2} e^{-x^2y}dx$

Bài 15. Tính $F''(y)$ biết $F(y)=\int\limits_0^y (x+y)f(x)dx$ trong đó $f(x)$ là một hàm khả vi trên $\mathbb{R}$.

Bài 16. Chứng minh $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int\limits_0^x y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)dy$

Bài 17. Tính các tích phân sau

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)dx$

b) $\int\limits_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$

Bài 18. Xét tính hội tụ đều của tích phân suy rộng sau:

a) $I(x)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt$

b) $I(y)=\int\limits_1^{+\infty} x^y e^{-x}dx,\ y\in[a,b]$.

c) $I(a)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^a},\ 2\le a\le+\infty$

d) $I(a)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^a},\ 1<a\le+\infty$.

Bài 19. Tính tích phân sau:

a) $\int\limits_0^1 x^m \ln^n x dx,\ m,n \in \mathbb{N}$

b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}, a>0, n \in \mathbb{N}$.

c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx,\ a,b>0$

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x} dx,\ a,b>0$.

e) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right)^2 dx,\ a,b>0$

f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \sin(mx) dx,\ a,b>0, m \in \mathbb{R}$.

g) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx,\ |a| \le 1$.

h) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \cos(mx) dx,\ a,b>0, m \in \mathbb{R}$.

i) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(a^2+x^2)}{x^2+b^2} dx,\ b>0$

j) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

k) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)dx}{x^2\sqrt{x^1-1}}$,

l) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)\arctan(bx)dx}{x^2}$.

m) $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. (chứng minh $I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^2y^2} dy$)

Bài 20. Dùng hàm Gamma, Beta, tính :

a) $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$

b) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2} dx, a>0$

c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}dx}{(1+x)^2}$

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$

f) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}, n \in \mathbb{N}, n>1$.

g) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$

Bài 21. Chứng minh

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$

b) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$

Chương 3

Tích phân bội

Bài 22. Đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

c) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$

d) $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$

e) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

f) $\int\limits_0^{e} dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)dy$

Bài 23. Tính tích phân sau: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 xe^{y^2} dy$.

Bài 24. Tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_{\mathcal{D}} x\sin(x+y)dxdy, \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x, y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\}$,

b) $\iint\limits_{\mathcal{D}} x^2(y-x)dxdy$, với $\mathcal{D}$ là miền giới hạn bởi các đường cong $y = x^2$ và $x = y^2$,

c) $\iint\limits_{\mathcal{D}} |x+y|dxdy, \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \le 1, |y| \le 1\}$

d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{|y-x^2|}dxdy, \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \le 1, 0 \le y \le 1\}$,

e) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)dxdy$.

Bài 25. Dùng phép đổi biến thích hợp tính các tích phân bội hai sau:

a) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|dxdy$.

b) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

c) $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

d) $\iint\limits_{\mathcal{D}} (4x^2 - 2y^2)dxdy$, trong đó $\mathcal{D}: \begin{cases} 1 \le xy \le 4 \\ x \le y \le 4x, \end{cases}$

e) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}: \begin{cases} x^2 + y^2 \le a^2 \\ y \ge 0, \end{cases}$

f) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}: \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 \le a^2(x^2 - y^2) \\ x \ge 0, \end{cases}$

g) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$, trong đó $\mathcal{D}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1.$

Bài 26. Tính các tích phân bội ba sau:

a) $\iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3}$, trong đó miền V được xác định bởi: $\begin{cases} x + y + z \le 1 \\ x, y, z \ge 0. \end{cases}$

b) $\iiint\limits_{V} \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, trong đó miền V được xác định bởi: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2az \\ x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2. \end{cases}$

c) $\iiint\limits_{V} (x^2 + y^2)dxdydz$, trong đó miền V được xác định bởi: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

d) $\iiint\limits_{V} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$, trong đó miền V được xác định bởi: $x^2 + y^2 + z^2 \le x$.

e) $\iiint\limits_{V} x^2y^2z^2dxdydz$, trong đó miền V được xác định bởi: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$

f) $\iiint\limits_{V} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, trong đó miền V được xác định bởi: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$

g) $\iiint\limits_{V} \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)}dxdydz$, trong đó miền V được xác định bởi: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$

Bài 27. Tính diện tích các hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau:

a) $\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \\ x^2 + y^2 \ge a^2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x^3 + y^3)^2 = x^2 - y^2 \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 \ge a^2. \end{cases}$

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$

Bài 28. Tính thể tích phần không gian giới hạn bởi các mặt sau:

a) $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0$

b) $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0$

c) $z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2$

d) $z = x^2 + y^2, x = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$

e) $z = x^2 + y^2, z = x + y$

f) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}, z > 0$

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}.$

h) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 + \dfrac{z}{c} = 1, z = 0.$

i) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq z^2$

j) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$

k) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x}{h}$

l) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$

Bài 29. Tính diện tích:

a) Phần mặt cong $az = xy$ nằm bên trong hình trụ $x^2 + y^2 = a^2$

b) Phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm bên trong hình trụ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

c) Phần mặt cong $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm bên trong hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$

d) Phần mặt cong $x^2 + y^2 = 2az$ nằm bên trong hình trụ $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$

e) Phần mặt cong $x^2 + y^2 = a^2$ nằm bên trong hình trụ $x + z = 0, x - z = 0, x \geq 0, y \geq 0.$

Chương 4

Tích phân đường và tích phân mặt

Bài 30. Tính các tích phân đường loại 1 sau:

a) $\int\limits_C (x+y)ds$, C là chu tuyến của tam giác với các đỉnh $O(0;0), A(0;1), B(1;0)$.

b) $\int\limits_C (x^{4/3}+y^{4/3})ds$, C: $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

c) $\int\limits_C |y|ds$, $C: (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

d) $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}ds$, $C: x^2+y^2=ax$.

e) $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)ds$, $C: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}, t \in [0; 2\pi]]$.

f) $\int\limits_C x^2 ds$, $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

g) $\int\limits_C z ds$, $C: \begin{cases} x^2+y^2 = z^2 \\ y^2 = ax \end{cases}$ lấy từ $O(0;0;0)$ đến $A(a,a,a\sqrt{2})$.

Bài 31. Tính các tích phân đường loại 2 sau:

a) $\int\limits_{AB} (x^2-2xy)dx+(2xy-y^2)dy$, trong đó AB là cung Parabol $y=x^2$ từ $A(1;1)$ đến $B(2;4)$.

b) $\int\limits_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$,, $C: y = 1-|1-x|$ theo chiều tăng của x, $0 \le x \le 2$.

c) $\oint\limits_C (x-y)dx+(x+y)dy$,, $C: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, ngược chiều kim đồng hồ.

d) $\oint\limits_{ABCDA} \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$, $A(1;0), B(0;1), C(-1;0), D(0;-1)$.

e) $\oint\limits_{OmAnO} \arctan\dfrac{y}{x}dy - dx$, trong đó $OmA: y=x^2, AnO: y=x$, theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

f) $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$

g) $\int\limits_{(1;-1)}^{(1;1)} (x-y)(dx-dy)$

h) $\int\limits_{(0;0)}^{(2;2)} \dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$

Bài 32. Tìm $z = z(x,y)$ biết $dz = (x^2+2xy-y^2)dx + (x^2-2xy-y^2)dy$

Bài 33. Áp dụng công thức Green, tính các tích phân sau:

a) $\oint\limits_C xy^2dy - x^2ydx$, $C: x^2+y^2=1$.

b) $\oint\limits_C (x+y)dx - (x-y)dy$, $C: 4x^2+9y^2=36$.

c) $\oint\limits_{x^2+y^2=1} e^{y^2-x^2}[\cos(2xy)dx + \sin(2xy)dy]$

d) $\int\limits_{AmO} (e^x\sin y - 2y)dx + (e^x\cos y - 2)dy$, AmO là nửa trên đường tròn $x^2+y^2=ax$.

e) $\oint\limits_{4x^2+9y^2=36} \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

Bài 34. Áp dụng tích phân đường loại 1, tính độ dài các đường cong

a) $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3,\ t \in [0;1]$

b) $x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t, z = e^{-t},\ t \in [0;\pi]$

Bài 35. Tính diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường cong:

a) $x = a\cos t, y = b\sin t\ t \in [0;2\pi]$

b) $(x+y)^2 = 2x, y = 0$

c) $x^3+y^3 = x^2+y^2, x=0, y=0$

d) $x^n+y^n=1, x=0, y=0, n\in\mathbb{N}$

Bài 36. Tính các tích phân mặt loại 1 sau đây

a) $\iint\limits_S zdS$, trong đó S là phần mặt cong $x^2+y^2=2z$ nằm trong miền $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$

b) $\iint\limits_S (x+y+z)dS$, trong đó S là phần mặt cong $x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0$

c) $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, trong đó S là bề mặt vật thể $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$

d) $\iint\limits_S \dfrac{dS}{(1+x+y)^2}$, trong đó S là bề mặt vật thể $x+y+z\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$

e) $\iint\limits_S |xyz|dS$, trong đó S là mặt $z = x^2 + y^2, z \leq 1$

f) $\iint\limits_S (xy + yz + xz)dS$, trong đó S là mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \leq 2x$

Bài 37. Tính các tích phân mặt loại 2 sau đây

a) $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, trong đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) $\iint\limits_S (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$, trong đó S là phía ngoài mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 1$.

c) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, trong đó S là phía ngoài mặt cầu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = 1$.

Bài 38. Áp dụng công thức Ostragradsky, tính các tích phân mặt sau:

a) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, trong đó S là phía ngoài hình lập phương $x, y, z \in [0; 1]$.

b) $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, trong đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

c) $\iint\limits_S (x - y + z)dydz + (y - z + x)dzdx + (z - x + y)dxdy$, trong đó S là phía ngoài mặt $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

Bài 39. Áp dụng công thức Stoke, tính các tích phân:

a) $\int\limits_C (y + z)dx + (z + x)dt + (x + y)dz$, $C : x = \sin^t, y = 2\sin t\cos t, z = \cos^2 t$

b) $\int\limits_C (y - z)dx + (z - x)dt + (x - y)dz$, C: $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1 \end{cases}$. Chiều của C ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ chiều dương của trục Ox.

c) $\int\limits_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dt + (x^2 - y^2)dz$, C là giao của biên khối lập phương $x, y, z \in [0; 1]$ với mặt phẳng $x + y + z = \dfrac{3}{2}$. Chiều của C ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ chiều dương của trục Ox

d) $\int\limits_C y^2z^2dx + z^2x^2dt + x^2y^2dz$, với C là đường cong kín $x = a\cos t, y = a\cos 2t, z = a\cos 3t$ lấy theo chiều tăng của t trên đoạn $[0, 2\pi]$.

Bài 40. Tính đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ của hàm $u = x^3 + 2y^3 - 3z^3$ tại điểm $A(2; 0; 1)$ với $\vec{l} = \vec{AB}, B(1; 2; -1)$.

Bài 41. Tính môđun của $\overrightarrow{\text{grad}u}$, với

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

tại $A(2; 1; 1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}u}$ vuông góc với Oz, khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}u} = 0$?

Bài 42. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}u$, với

$$u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r$$

với $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Bài 43. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số

$$u = x \sin z - y \cos z$$

từ gốc $O(0,0,0)$ là lớn nhất?

Bài 44. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{\text{grad}}z$ của các hàm số

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = x - 3y + \sqrt{3xy}$$

tại $(3;4)$.

Bài 45. Trong các trường sau đây, trường nào là trường thế:

a) $\vec{a} = 5(x^2 - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + \vec{k}$,

b) $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$,

c) $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (z+y)\vec{k}$.

Bài 46. Cho $\vec{F} = xz^2\vec{i} + yx^2\vec{j} + zy^2\vec{k}$. Tính thông lượng của $\vec{F}$ qua mặt cầu $S: x^2+y^2+z^2 = 1$, hướng ra ngoài.

Bài 47. Cho $\vec{F} = x(y+z)\vec{i} + y(z+x)\vec{j} + z(x+y)\vec{k}$, L là giao tuyến của mặt trụ $x^2+y^2+y=0$ và nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 2, z \geq 0$. Chứng minh rằng lưu số của $\vec{F}$ dọc theo L bằng 0.

VIỆN TRƯỞNG
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC
TS. Lê Quang Thủy