Homework2 Solution

洪方舟

Student ID: 2016013259

Email: hongfz16@163.com

March 14, 2018

Ex8.4-4 解：

使用桶排序的思想，需要将圆分为n个相同面积的同心圆环;

不妨设半径的序列为$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$，其中$a_0 = 0$，由面积相等可得，$i \geq 1$时

$$\begin{aligned} \pi(a_i^2 - a_{i-1}^2) &= \frac{\pi}{n} \\ a_i^2 &= \frac{1}{n} + a_{i-1}^2 \\ a_i &= \sqrt{\frac{1}{n} + a_{i-1}^2} \end{aligned}$$

下面由数学归纳法证明$a_i = \sqrt{\frac{i}{n}}$

假设$n = k$时，$a_k = \sqrt{\frac{k}{n}}$成立

则当$n = k + 1$时，$a_{k+1} = \sqrt{\frac{1}{n} + a_k^2} = \sqrt{\frac{k+1}{n}}$

由数学归纳法可知$a_i = \sqrt{\frac{i}{n}}, 0 \leq i \leq n - 1$

则按照上面描述的半径序列取出同心圆环作为“桶”，则可以达到$\Theta(n)$的排序复杂度。

Ex15.5-4 解：

第16行的for循环（原书第10行）经过改进后，可以做到第二层循环（第8行）加上第三层循环为$\Theta(n)$的时间复杂度，则可以达到总共$\Theta(n^2)$的复杂度。

Algorithm 1 OPTIMAL-BST-IMPROVED

输入：p, q, n

输出：$e, root$

```
1: function OPTIMAL-BST-IMPROVED(p, q, n)
2:     let e[1..n+1, 0..n], ω[1..n+1, 0..n], and root[1..n, 1..n] be new tables
3:     for i = 1 to n + 1 do
4:         e[i, i − 1] = q_{i−1}
5:         ω[i, i − 1] = q_{i−1}
6:     end for
7:     for l = 1 to n do
8:         for i = 1 to n − l + 1 do
9:             j = i + l − 1
10:            e[i, j] = ∞
11:            ω[i, j] = ω[i, j − 1] + p_j + q_j
12:            if i == j then
13:                e[i, j] = e[i, j − 1] + e[j + 1, j] + ω[i, j]
14:                root[i, j] = j
15:            else
16:                for r = root[i, j − 1] to root[i + 1, j] do
17:                    t = e[i, r − 1] + e[r + 1, j] + ω[i, j]
18:                    if t < e[i, j] then
19:                        e[i, j] = t
20:                        root[i, j] = r
21:                    end if
22:                end for
23:            end if
24:        end for
25:    end for
26:    return e and root
27: end function
```