Homework2 Solution

洪方舟

Student ID: 2016013259

Email: hongfz16@163.com

March 10, 2018

2. 证明:

设$E_{ij}(i<j)$为数组P中$P[i]$与$P[j]$元素相同的事件，存在元素不唯一的概率可以表达为$P\left(\bigcup\limits_{i<j} E_{ij}\right)$，则所有元素都唯一的概率$P(x)$为

$$P(x)=1-P\left(\bigcup_{i<j} E_{ij}\right)\geq 1-\sum_{i<j} P(E_{ij})$$

又因为$P(E_{ij})=\frac{1}{n^3}$，所以

$$\begin{aligned} P(x) &\geq 1-\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^3} \\ &= 1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2} \\ &\geq 1-\frac{1}{n} \end{aligned}$$

则数组P中所有元素都唯一的概率至少是$1-\frac{1}{n}$，证毕!

3. 解:

a.

取出恰好为i的概率为$\frac{1}{n-2}$，从剩下的$n-1$个数中要一个数在前$i-1$个，另一个在后$n-i$个数中，则可得p_i的准确表达式为

$$p_i = \frac{6(i-1)(n-i)}{(n-2)(n-1)n}$$

b.

若选择$x = A'[\lfloor (n+1)/2 \rfloor]$，则有

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{6\left(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1\right)\left(n - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor\right)}{(n-2)(n-1)n} \\ &= \begin{cases} \dfrac{3(n-1)}{2n(n-2)}，当n为奇数时 \\ \dfrac{3}{2(n-1)}，当n为偶数时 \end{cases} \end{aligned}$$

平凡实现中，选择$x = A'[\lfloor (n+1)/2 \rfloor]$的概率为$p_{平凡} = \frac{1}{n}$，将两者相除可得三数取中法概率增加为

$$\frac{p_x}{p_{平凡}} = \begin{cases} \dfrac{3(n-1)}{2(n-2)}，当n为奇数 \\ \dfrac{3n}{2(n-1)}，当n为偶数 \end{cases}$$

假设$n \to \infty$，$p_x = 0$，$\frac{p_x}{p_{平凡}} = \frac{3}{2}$

c.

$$
\begin{aligned}
Pr\{x = A'[i], n/3 \le i \le 2n/3\} &= \sum_{i=n/3}^{2n/3} p_i \\
&= \sum_{i=n/3}^{2n/3} \frac{6(i-1)(n-i)}{(n-2)(n-1)n} \\
&= \int_{n/3}^{2n/3} \frac{6(x-1)(n-x)}{(n-2)(n-1)n} dx \\
&= \frac{13n^2 - 27n}{27(n-1)(n-2)}
\end{aligned}
$$

平凡实现中，$p_{平凡} = \frac{1}{3}$，显然有$Pr\{x = A'[i], n/3 \le i \le 2n/3\} > \frac{1}{3}$，增加的概率为

$$
\frac{Pr\{x = A'[i], n/3 \le i \le 2n/3\}}{p_{平凡}} = \frac{13n^2 - 27n}{9(n-1)(n-2)}
$$

d.

对于在证明快排期望时间的时候所定义的指示变量X_k，平凡方法中$E[X_k] = 1/n$，而在三数取中法中为$E[X_k] = \frac{6(k-1)(n-k)}{(n-2)(n-1)n} = \Theta\left(\frac{1}{n}\right)$，所以三数取中法并没有对证明过程产生数量级上的影响，因此三数取中法所得的最后结果仍然为$\Omega(nlgn)$，因此三数取中法仅影响常数项因子。