EM算法

- Expectation-Maximization：
  - 最大似然
  - EM算法推导
  - GMM（高斯混合模型）

EM算法

- 最大似然估计

一个栗子：假如你去赌场，但是不知道能不能赚钱，你就在门口堵着出来一个人就问一个赚了还是赔了，如果问了5个人都说赚了，那么你就会认为，赚钱的概率肯定是非常大的。

已知：（1）样本服从分布的模型，（2）观测到的样本
求解：模型的参数

总的来说：极大似然估计就是用来估计模型参数的统计学方法

EM算法

- 最大似然数学问题（100名学生的身高问题）
  - 样本集X={x1,x2,…,xN} N=100
  - 概率密度：p(xi|θ)抽到男生i（的身高）的概率
  - θ是服从分布的参数
  - 独立同分布：同时抽到这100个男生的概率就是他们各自概率的乘积

EM算法

- 最大似然数学问题（100名学生的身高问题）

- 最大似然函数：$l(\theta)=\sum_{i=1}^{m} logp(x_i;\theta)$ （对数是为了乘法转加法）

- 什么样的参数 θ 能够使得出现当前这批样本的概率最大

- 已知某个随机样本满足某种概率分布，但是其中具体的参数不清楚，参数估计就是通过若干次试验，观察其结果，利用结果推出参数的大概值。

EM算法

- 问题又难了一步
  - 现在这100个人中，不光有男生，还有女生（2个类别，2种参数）
  - 男生和女生的身高都服从高斯分布，但是参数不同（均值，方差）
  - 用数学的语言描述：抽取得到的每个样本都不知道是从哪个分布抽取的
  - 求解目标：男生和女生对应的身高的高斯分布的参数是多少

EM算法

- 加入隐变量

- 用Z=0或Z=1标记样本来自哪个分布，则Z就是隐变量。

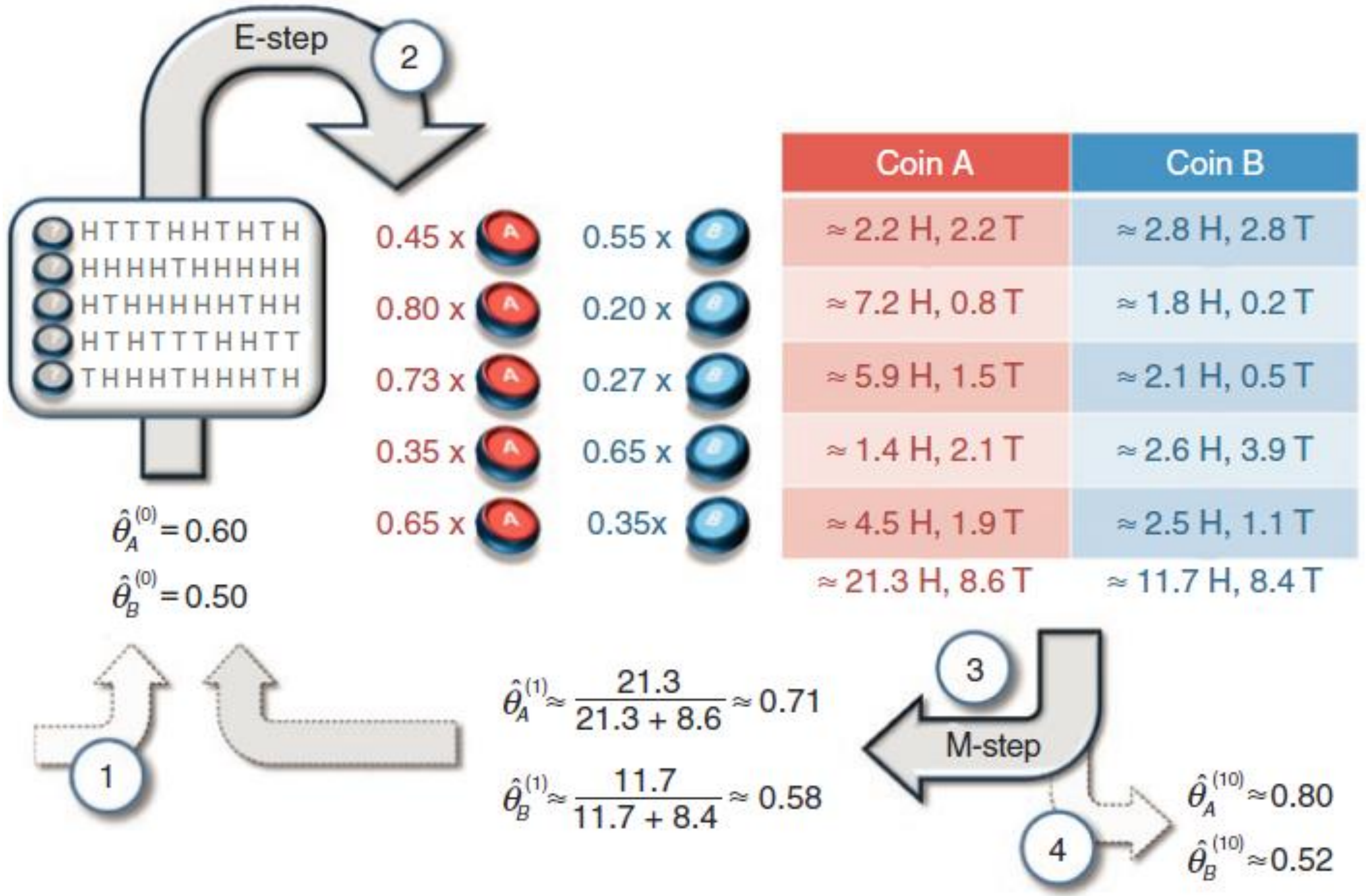
- 最大似然函数：$l(\theta) = \sum_{i=1}^{m} logp(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^{m} log \sum_{z_i} p(x_i, z_i; \theta)$

- 求解：在给定初始值情况下进行迭代求解

$P(x_i;\theta)$

$= \sum_{z} P(x_i, z; \theta)$

EM算法



两个硬币的初始假设的分布
A：0.6几率正面
B：0.5几率正面

投掷出5正5反的概率：
pA=C(10,5)*(0.6^5)*(0.4^5)
pB=C(10,5)*(0.5^5)*(0.5^5)

选择硬币A的概率：
pA/(pA+pB)=0.45
选择硬币B的概率
1- pA=0.55

EM算法

EM算法推导

问题：样本集{x(1),…,x(m)}，包含m个独立的样本。
其中每个样本i对应的类别z(i)是未知的，所以很难用最大似然求解。

$$l(\theta)=\sum_{i=1}^{m} log p(x_i;\theta)=\sum_{i=1}^{m} log\sum_{Z} p(x_i,z_i;\theta)$$

上式中，要考虑每个样本在各个分布中的情况。
本来正常求偏导就可以了，但是现在log后面还有求和，这就难解了！

EM算法

- EM算法推导

右式分子分母同时乘 $Q(z)$：$log\sum_{z_i} p(x_i, z_i; \theta) = log\sum_{z_i} Q(z_i) \frac{p(x_i, z_i; \theta)}{Q(z)}$

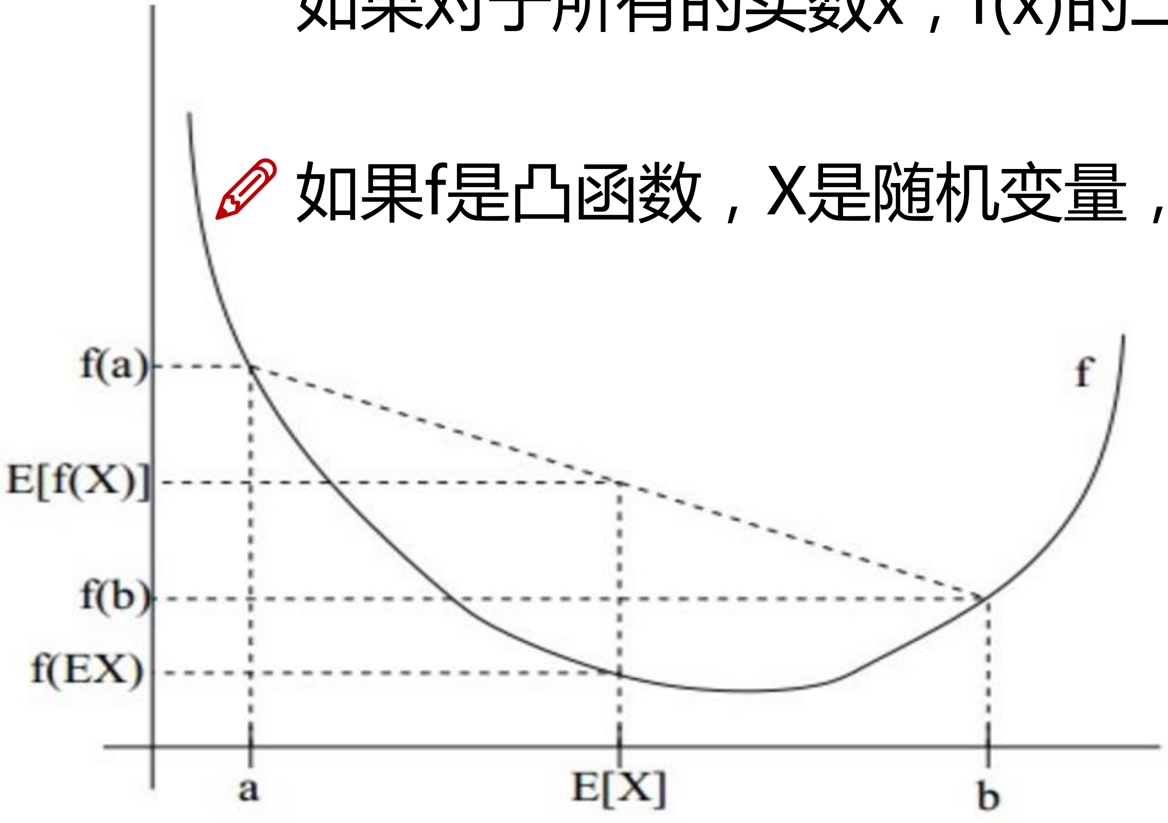
为嘛这么干呢？说白了就是要凑-Jensen不等式（ Q(zi)是Z的分布函数）

EM算法

- Jensen不等式

  - 设f是定义域为实数的函数，如果对于所有的实数x。
    如果对于所有的实数x，f(x)的二次导数大于等于0，那么f是凸函数。

  - 如果f是凸函数，X是随机变量，那么：E[f(X)]>=f(E[X])



实线f是凸函数，X有0.5的概率是a，有0.5的概率是b

X的期望值就是a和b的中值了

EM算法

✓ Jensen不等式

$f(E[X]) \geq E[f(X)]$

- Jensen不等式应用于凹函数时，不等号方向反向

- 由于 $\sum_{z_i} Q(z_i)\frac{p(x_i,z_i;\theta)}{Q(z)}$ 是 $\frac{p(x_i,z_i;\theta)}{Q(z)}$ 的期望

$p(x_i,z;\theta)$为r.v. 因为z还未吐值

- 假设 $Y=\frac{p(x_i,z_i;\theta)}{Q(z_i)}$ 则：$log\sum_{z_i} Q\frac{p(x_i,z_i;\theta)}{Q} = log\sum_Y P(Y)Y = logE(Y)$

$$\geq \sum_z Q(z)\log\frac{P(x_i,z;\theta)}{Q(z)}$$

EM算法

Jensen不等式

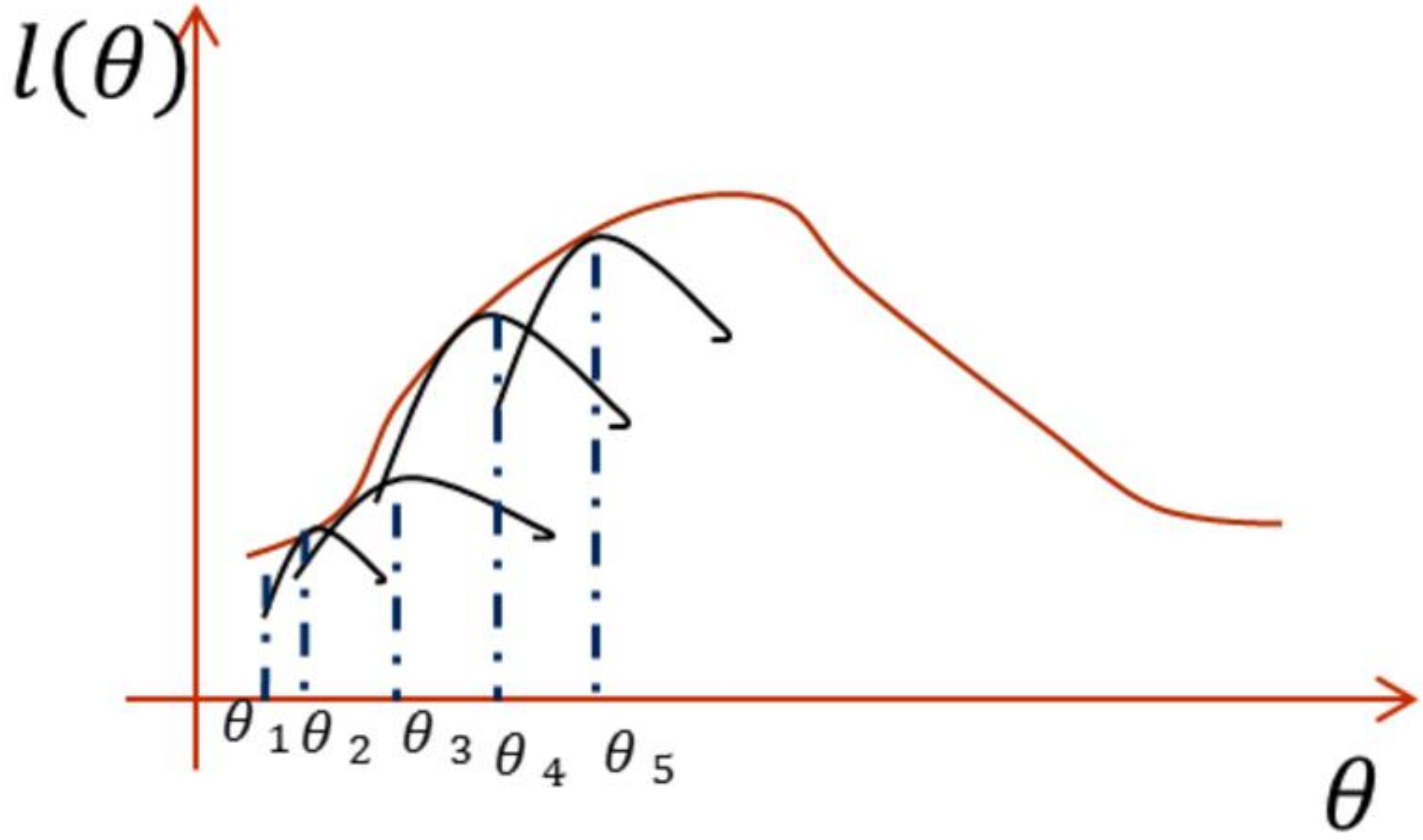
可得：$logE(Y) \geq E(logY) = \sum_{Y} P(Y)logY = \sum_{z_i} Q(z_i)log\frac{p(x_i, z_i; \theta)}{Q(z_i)}$

结论： $l(\theta) = \sum_{i=1}^{m} log\sum_{z_i} p(x_i, z_i; \theta) \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{z_i} Q(z_i)log\frac{p(x_i, z_i; \theta)}{Q(z_i)}$

下界比较好求，所以我们要优化这个下界来使得似然函数最大

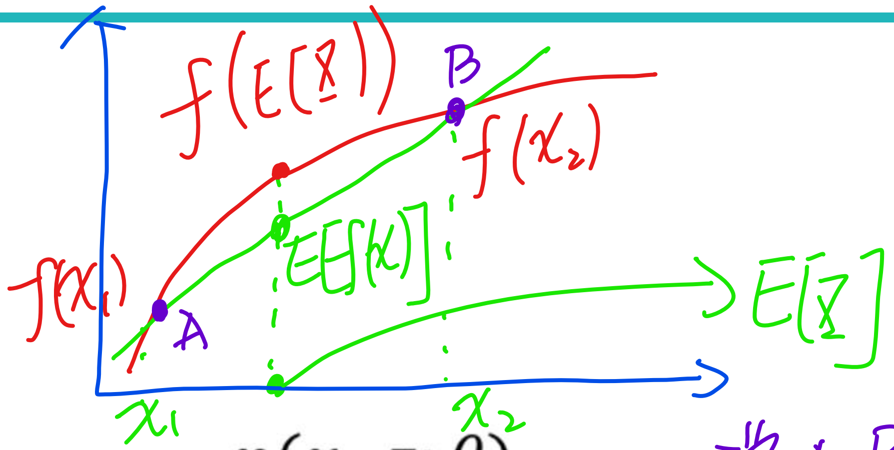
EM算法

- 优化下界
  - 迭代到收敛



EM算法

- Jensen不等式



- 如何能使得等式成立呢？（取等号）
- Jensen中等式成立的条件是随机变量是常数：$Y = \frac{p(x_i, z_i; \theta)}{Q(z)} = C$
- Q（z_i）是z_i的分布函数：$\sum_{z_i} Q(z_i) = \sum_{z_i} \frac{p(x_i, z_i; \theta)}{C} = 1$
- 所有的分子和等于常数C（分母相同）

当A.B两点在一起时
等号成立
所以Y只会是一个constant

EM算法

- Q(z)求解
  - $$\sum_{z_i} Q(z_i) = \sum_{z_i} \frac{p(x_i, z_i; \theta)}{c} = 1$$
  - 由上式可得C就是p(xi,zi)对z求和
  - $$Q(z) = \frac{p(x_i, z_i; \theta)}{c} = \frac{p(x_i, z_i; \theta)}{\sum_{z_i} p(x_i, z_i; \theta)} = \frac{p(x_i, z_i; \theta)}{p(x_i)} = p(z|x_i; \theta)$$
  - Q(zi)代表第i个数据是来自zi的概率

EM算法

- EM算法流程
  - 初始化分布参数θ
  - E-step：根据参数θ计算每个样本属于zi的概率(也就是我们的Q)
  - M-Step：根据Q，求出含有θ的似然函数的下界并最大化它，得到新的参数θ
  - 不断的迭代更新下去

EM算法

- GMM（高斯混合模型）
  - 数据可以看作是从数个 Gaussian Distribution 中生成出来的
  - GMM 由 K 个 Gaussian 分布组成，每个 Gaussian 称为一个 “Component”
  - 类似k-means方法，求解方式跟EM一样
  - 不断的迭代更新下去