DP #4

김현정 Acka1357@gmail.com

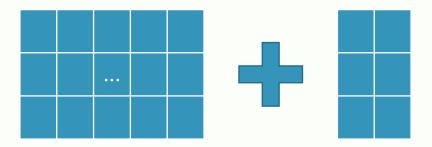
Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

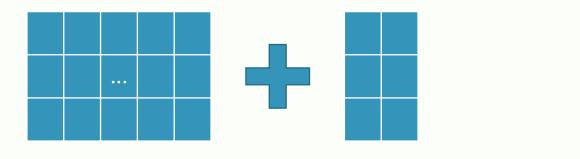
- 3 X N 크기의 벽을
- 2 X 1, 1 X 2 크기의 타일로 채우는 경우의 수

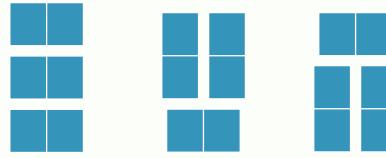
• $1 \le N \le 30$

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

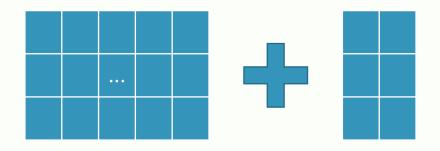
• D[i]: i번 줄까지 꽉 채우는 경우의 수





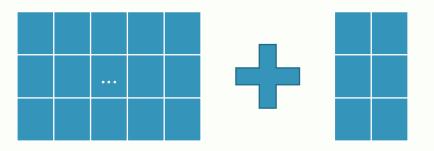


Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

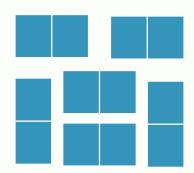




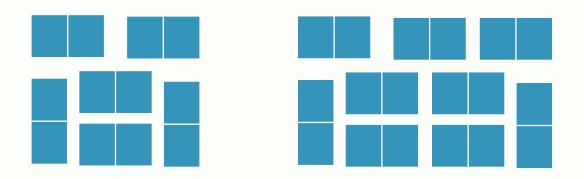
D[i]: D[i-2] + 3

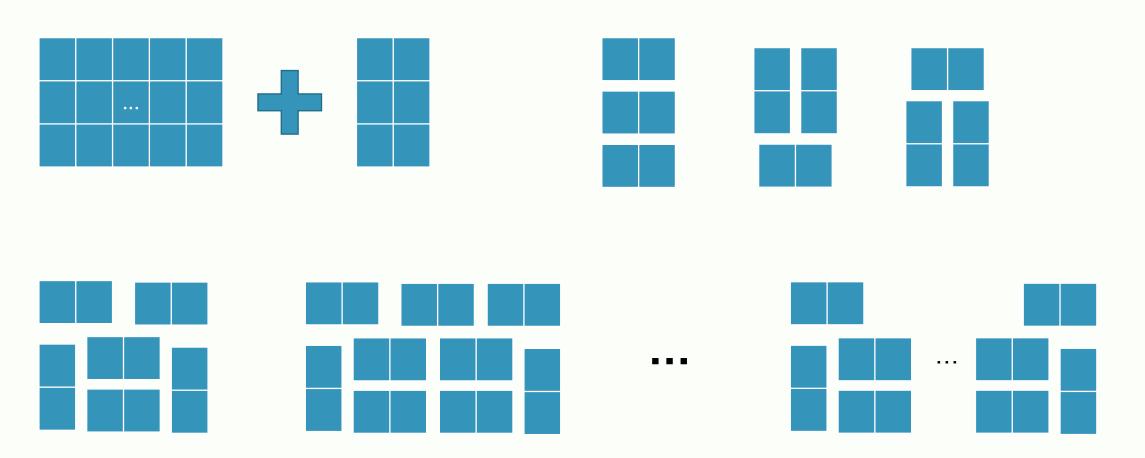




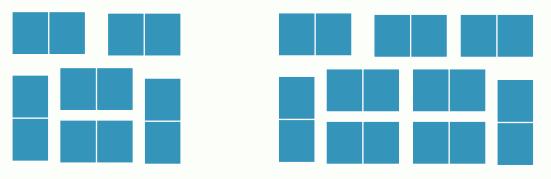


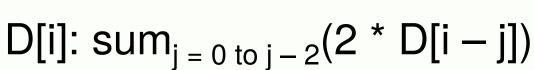


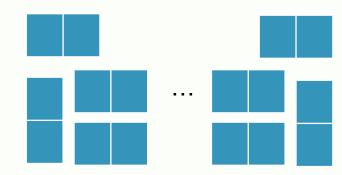












Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

• D[i]: i번 줄까지 꽉 채우는 경우의 수

•
$$D[i] = D[i - 2] * 3 + sum_{j = even 0 to i - 4} (2 * D[j])$$

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

• D[i]: i번 줄까지 꽉 채우는 경우의 수

- $D[i] = D[i 2] * 3 + sum_{j = even 0 to i 4} (2 * D[j])$
- 답: D[N]

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

• 마지막 줄의 상태를 아래와 같이 표현해보자.

1

2

4

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

• 마지막 줄의 상태를 아래와 같이 표현해보자.

 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1</t

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

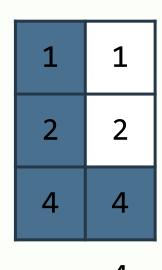
• D[i][j]: i - 1번 줄까지 꽉 채우고 i번 줄의 상태가 j인 경우의 수

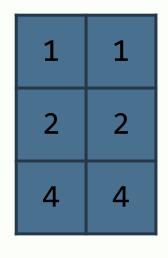
Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

• 각각의 D[i - 1] 상태에서는 다음과 같이 타일을 채울 수 있다.

1	1
2	2
4	4
0	

1	1
2	2
4	4
	_





$$D[i][1] = D[i-1][0]$$
 $D[i][4] = D[i-1][0]$ $D[i][7] = D[i-1][0]$

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

• 각각의 D[i - 1] 상태에서는 다음과 같이 타일을 채울 수 있다.

1	1
2	2
4	4
1	

	1	1		1	1	
	2	2		2	2	
	4	4		4	4	
0					6	
D[i][0] = D[i - 1][1]			[1] [D[i][6] = D[i - 1		

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

• 각각의 D[i - 1] 상태에서는 다음과 같이 타일을 채울 수 있다.

1	1
2	2
4	4
2	

1
2
4

5 D[i][5] = D[i – 1][2]

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

• 각각의 D[i - 1] 상태에서는 다음과 같이 타일을 채울 수 있다.

1	1
2	2
4	4
3	

	1	1		1	1	
	2	2		2	2	
	4	4		4	4	
4					7	I
D[i][4] = D[i - 1][3]		[3] I	D[i][7] = D[i - 1][3]			

- D[i][j]: i 1번 줄까지 꽉 채우고 i번 줄의 상태가 j인 경우의 수
- D[i][0] = D[i-1][7]
- D[i][1] = D[i-1][6]
- D[i][2] = D[i-1][5]
- D[i][4] = D[i-1][3]
- D[i][3] = D[i-1][4] + D[i-1][7]
- D[i][6] = D[i-1][1] + D[i-1][7]
- D[i][5] = D[i-1][2]
- D[i][7] = D[i-1][0] + D[i-1][3] + D[i-1][6]

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2133

• D[i][j]: i - 1번 줄까지 꽉 채우고 i번 줄의 상태가 j인 경우의 수

• 답: D[N][7]

- C/C++: https://gist.github.com/Acka1357/0755cd75916a7db902d8ec641df048d0
- Java: https://gist.github.com/Acka1357/12a43080c9563c37bdbc1d99cfe37cec

Bitwise Operator

이진수에 대해 비트 단위로 적용되는 연산

Bitwise Operator

이진수에 대한 비트연산

- A | B => A or B
- A & B => A and B
- $A \wedge B \Rightarrow A \times B$
 - A = 1001, B = 0101
 - A | B = 1101, A & B = 0001, A ^ B = 1100
- ~A => ones complement of A
- A << x => left shift A as x
- A >> x => right shift A as x
 - A = 00110101
 - ~A = 11001010, A << 2 = 11010100, A >> 2 = 00001101

Bitwise Operator

이진수에 대한 비트연산

- In Java,
- 0011111111 >> 2 = 000011111
- 10100111 >> 2 = 11101001

- use >>>
- 0011111111 >> 2 = 000011111
- 10100111 >> 2 = 00101001

- 1번부터 N번 도시가 있다.
- 어느 한 도시에서 출발해 N개의 도시를 모두 거쳐 원래 도시로 돌아오 는 순회 여행 경로
- 한번 방문한 도시는 다시 방문할 수 없다. (출발 도시 제외)
- 이러한 여행 경로 중 비용의 최소값

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2098

- 갈 수 있는 모든 경로
- 첫번째 도시를 선택하는 경우의 수 * 두번째 도시를 선택하는 경우의 수 * 세번째 도시 ...
- N * (N-1) * (N-2) * ... * 1 => O(N!)

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2098

- 갈 수 있는 모든 경로
- 첫번째 도시를 선택하는 경우의 수 * 두번째 도시를 선택하는 경우의 수 * 세번째 도시 ...
- N * (N-1) * (N-2) * ... * 1 => O(N!)
- $2 \le N \le 16$

- 갈 수 있는 모든 경로
- 첫번째 도시를 선택하는 경우의 수 * 두번째 도시를 선택하는 경우의 수 * 세번째 도시 ...
- N * (N-1) * (N-2) * ... * 1 => O(N!)
- $2 \le N \le 16$
- $16! \Rightarrow 20,922,789,888,000$

- 1 -> 2 -> 3 -> 4 -> ?
- 1 -> 3 -> 2 -> 4 -> ?

- 두 경로 뒤에 올 수 있는 경로는 같다.
- 현재 위치와 남은 도시의 종류가 같기 때문

- 필요한 정보
- 현재 위치
- 남은 도시의 종류

- 필요한 정보
- 현재 위치
- 남은 도시의 종류
 - (1번 도시가 남았거나 아니거나) * (2번 도시가 남았거나 아니거나) * (3번 도시가 남았거나 아니거나) * ... * (N번 도시가 남았거나 아니거나)
 - 2^N 종류

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2098

• d[i][j]: j의 1인 비트에 해당하는 도시들을 방문했고, 현재 i 도시에 있을 때 경로의 최소 비용

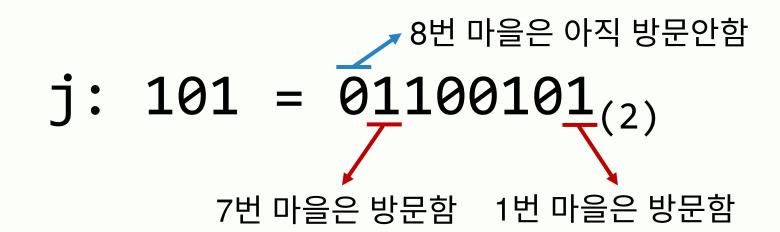
Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2098

• d[i][j]: j의 1인 비트에 해당하는 도시들을 방문했고, 현재 i 도시에 있을 때 경로의 최소 비용

$$j: 101 = 01100101_{(2)}$$

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2098

• d[i][j]: j의 1인 비트에 해당하는 도시들을 방문했고, 현재 i 도시에 있을 때 경로의 최소 비용



Problem: https://www.acmicpc.net/problem/2098

• d[i][j]: j의 1인 비트에 해당하는 도시들을 방문했고, 현재 i 도시에 있을 때 경로의 최소 비용

- d[cur][visited] = min_{past = 0 to N-1}(d[past][visited 2^{past}] + cost[past][cur])
 - 2^{past}: past 도시의 상태 비트
 - past는 cur가 아니면서, 이미 visited한 도시 중 하나
 - visited & 2^{past}!= 0

- 한 도시에서 출발해 그 도시로 돌아오는 순회문제이므로
- 출발점(끝점)이 어디든 상관 없다.

- 시간복잡도: O(N * N * 2^N)
 - 모든 상태에 대해서: O(N * 2^N)
 - 이전 마을을 선택한다: O(N)

- C/C++: https://gist.github.com/Acka1357/be750aba1f1950f50c93dce7d038752c
- Java: https://gist.github.com/Acka1357/25a34b9ea7e49ad148fe4cfe2fe6143b

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

- N X M 격자판을
- 2 X 1, 1 X 2 도미노로
- 빈 칸 없이 채우는 경우의 수

• $1 \le N, M \le 14$

- 3 X N을 채우듯 모든 경우를 직접 구하기 어렵다.
- 각 줄의 상태가 2^M가지
- $2^{14} = 16,384$

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

• 아래와 같은 격자판이 있을때, 한 줄 단위로 생각해보자.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
				•••	•••				
				•••	•••				

- 모든 칸을 채워야하기 때문에, 1을 채우는 경우는 두 가지가 있다.
- (0, 1) 또는 (0, 10)을 한 도미노로 채우는 경우

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
				•••	•••				
				•••	•••				

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

• (0, 1)을 한 도미노로 채우는 경우

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
				•••	•••				
				•••	•••				

- 각 칸의 상태를 도미노의 유무에 따라 0과 1로 구분할 수 있다.
- 첫 칸을 0번 자리, 마지막 칸을 M-1번 자리라고 하면

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
				•••	•••				
				•••	•••				

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

• status = $2^0 + 2^1$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
				[00	⊃ ⊨		六L	<u> </u>	
					0	_	_		室≃ ∂11 ₍	l 상태: ²⁾

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

• (0, 10)을 한 도미노로 채우는 경우

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
				•••	•••				
				•••	•••				

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

• status = 2⁰ (한 줄만)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
					00	= =		실	へ 0	
				•••	0 <u></u>				室≃ 901 ₍	상태: ₂₎

- 다음 1번 칸을 채울때, 0번은 무조건 채워져있으므로,
- 0번 칸의 정보는 필요가 없다.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
				[00	□ □		六L	<u> </u>	
				•••	0 <u></u>				室≃ 901 ₍	상태: ₂₎

- 0번 타일을 채울때 10번 타일을 사용했으므로,
- 10번 타일 까지의 정보가 필요하다.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
					1로	부단	٠ - ا	하 걸	0 (상태:
				•••	•••	-			900(

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

- i번 타일을 채울 때 (i + M)번 타일을 채울 수도 있다.
- 다음 상태로 갈때에는 i + 1번 부터 i + M번 타일의 정보가 필요하다.

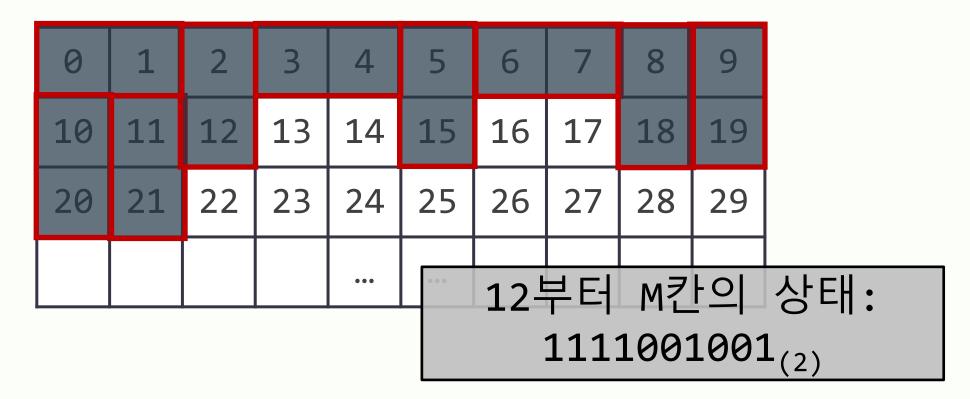
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
				[1			MZL	OI.	↓	
				•••				_	<u>–</u> 900 ₍	상태:	

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

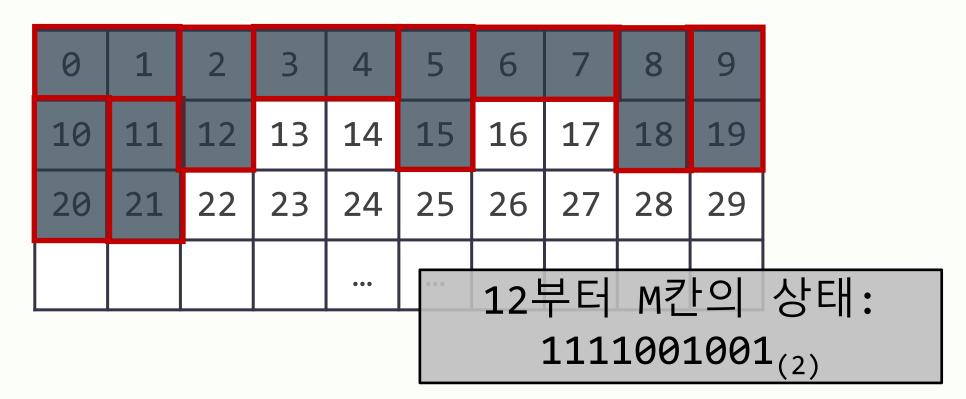
• 12번 칸에 대해서

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
				•••	• • •	12 ^L	부터	M₹	<u> </u>	상태:
							111			

- 12번 칸에 대해서
- 12번 칸은 이미 타일이 놓여져있으므로, 13번 칸을 채워야한다.



- 13부터 M칸의 상태는
- 12부터 M칸의 상태를 모두 오른쪽으로 한 칸씩 미는 것과 같다.



Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

• status >> 1 (or status /= 2)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
				•••	•••	13 ^L	부터	M₹	<u> </u>	상태:
							011:			

- 이때 13번 칸을 채우기 위한 경우 역시
- (13, 14)와 (13, 23)으로 나뉜다.

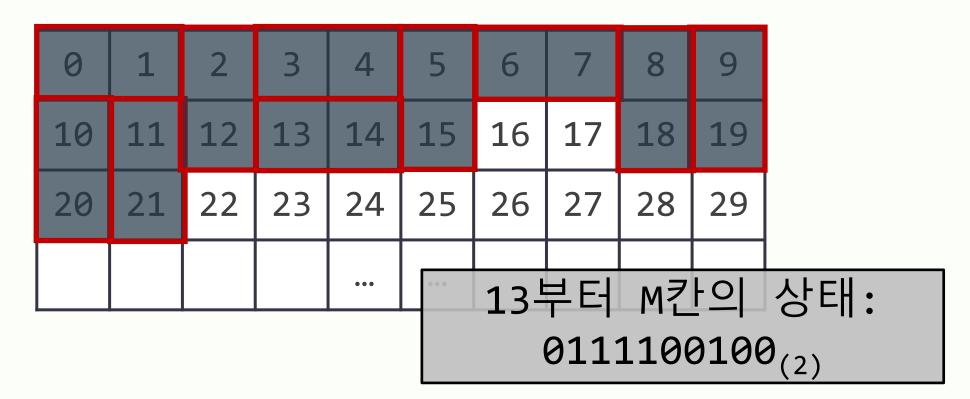
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
				•••	•••	13 ^L	부터	M₹	<u> </u>	상태:	
						0111100100 ₍₂₎					

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

- (13, 14)를 놓기 위해서는 (13, 14)가 모두 비어 있어야 한다.
- 0번째자리와 1번째자리 모두 0이어야 한다.



- (13, 14)에 도미노를 놓으면,
- 14부터 M칸의 상태는 다음과 같이 표현할 수 있다.



- (status $>> 1) + 2^0$
- 14부터 M칸의 상태에서 14번은 0번자리



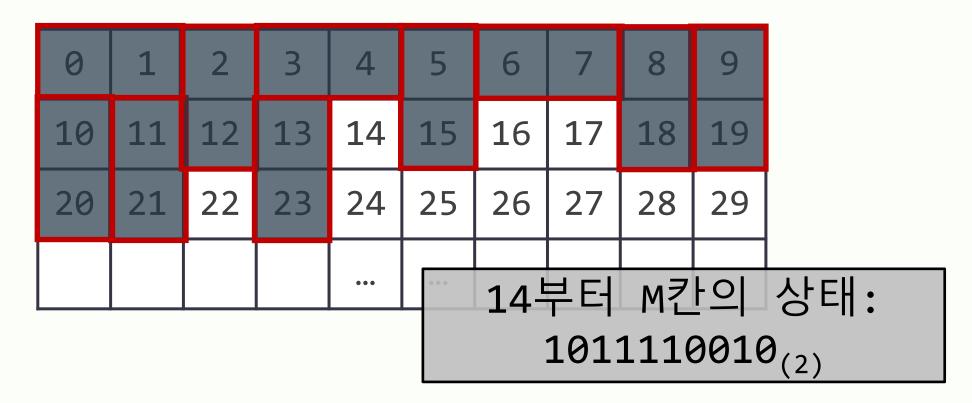
- (13, 23)을 놓기 위해서는 (13, 23)가 모두 비어 있어야 한다.
- 23번 칸은 당연히 비어있다.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
				•••	• • •	13 ^L	부터	M₹	├ <u>○</u>	상태:	
						0111100100 ₍₂₎					

- (13, 23)에 도미노를 놓으면,
- 14부터 M칸의 상태는 다음과 같이 표현할 수 있다.



- (status >> 1) + 2^{M-1}
- 14부터 M칸의 상태에서 23번칸은 M-1번 자리이다.



- D[i][status]: i 1번 타일까지 다 채워져있고, i번부터 M개 타일의 상태가 status인 경우의 수
 - 0 ≤ status < 2^M

- i번 칸이 차있을 때 (if (status & 1) == 1)
- d[i + 1][status >> 1] += d[i][status]

- i번 칸이 차있을 때 (if (status & 1) == 1)
- d[i + 1][status >> 1] += d[i][status]
- i번 칸이 차있지 않을 때
 - 가로로 도미노를 놓을 수 있을 때
 - 세로로 도미노를 놓을 수 있을 때

- 가로로 도미노를 놓을 수 있을 때 (if (status & 3) == 0)
- d[i + 1][(status >> 1) + 1] += d[i][status]
- 세로로 도미노를 놓을 수 있을 때 (i (status & 1) == 0)
- $d[i + 1][(status >> 1) + 2^{M-1}] += d[i][status]$

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

- 가로로 도미노를 놓을 수 있을 때 (if (status & 3) == 0)
- d[i + 1][(status >> 1) + 1] += d[i][status]
- 세로로 도미노를 놓을 수 있을 때 (i (status & 1) == 0)
- $d[i + 1][(status >> 1) + 2^{M-1}] += d[i][status]$

• 단, i번칸이 오른쪽 끝일 경우 가로로 도미노를 놓을 수 없다.

- d[i + 1][(status >> 1)] += d[i][status]
 if (status & 1) == 1
- d[i + 1][(status >> 1) + 1] += d[i][status]
 if (status & 3) == 0, and (i % M) != M 1
- d[i + 1][(status >> 1) + 2^{M-1}] += d[i][status]
 if (status & 1) == 0

- 답: d[N * M][0]
 - N * M번칸 직전이자 마지막 칸인 (N * M 1)번칸까지 다 차있으며,
 - N * M번칸부터는 모두 비어있는 경우의 수

- 시간복잡도: O(N * M * 2^M)
 - 모든 칸에 대해서: O(N * M)
 - 모든 상태를 전이: O(2^M)

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1648

• C/C++: https://gist.github.com/Acka1357/473f67f678c484b19e5d5daabde7522c

• Java: https://gist.github.com/Acka1357/3406495ff3597161c4245d9989dc3fa7

- N X M 두부판
- 2 X 1, 1 X 2로 두부를 자른다
- 위치마다 두부의 등급이 다르다.
- 등급 조합에 따라 가격이 결정된다.

- 자를 수 있는 두부가격 합의 최대값
- $1 \le N, M \le 14$

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1657

• 두부를 자르는 것 == 도미노를 놓는 것

• 단, 모든 칸을 다 사용하지 않아도 된다.

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1657

• 두부를 자르는 것 == 도미노를 놓는 것

- 단, 모든 칸을 다 사용하지 않아도 된다.
- 칸이 비어 있어도, 다음 칸으로 넘어갈 수 있다.

- D[i][status]: i 1번 두부까지 (안)잘랐고, i번부터 M개 두부의 상태가 status일 때 가격합의 최대값
 - 0 ≤ status < 2^M

- i번 두부가 잘렸을 때 (if (status & 1) == 1)
- d[i + 1][status >> 1] <- d[i][status]

- i번 두부가 잘렸을 때 (if (status & 1) == 1)
- d[i + 1][status >> 1] <- d[i][status]
- i번 두부가 잘리지 않았을 때
- d[i + 1][status >> 1] <- d[i][status]
- d[i + 1][(status >> 1) + 1] += d[i][status] (가로)
- d[i + 1][(status >> 1) + 2^{M-1}] += d[i][status] (세로)

- d[i + 1][(status >> 1)] <- d[i][status]
 - always possible
- d[i + 1][(status >> 1) + 1] += d[i][status]
 - if (status & 3) == 0, and (i % M) != M 1
- $d[i + 1][(status >> 1) + 2^{M-1}] += d[i][status]$
 - if (status & 1) == 0

- 답: d[N * M][0]
 - N * M번칸 직전이자 마지막 칸인 (N * M 1)번칸까지 다 (안)잘랐으며,
 - N * M번부터는 모두 사용하지 않았을 때 가격합의 최대값

- 시간복잡도: O(N * M * 2^M)
 - 모든 칸에 대해서: O(N * M)
 - 모든 상태를 전이: O(2^M)

Problem: https://www.acmicpc.net/problem/1657

• C/C++: https://gist.github.com/Acka1357/99cd03e1d98611f02840ab9708052c99

• Java: https://gist.github.com/Acka1357/6d5dbdcc1528957a2896a703f6fa796c