电路_总笔记

2 电阻电路的等效变换

电阻串联

$R_{eq} = \Sigma R_i$

电阻并联

$\frac{1}{R_{eq}} = \Sigma \frac{1}{R_i}$

翻译为电导形式：

$G_{eq} = \Sigma G_i$

电阻Y形联结-Δ形联结的等效变换

Y变Δ：

$$\begin{cases} R_{12} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} \\ R_{23} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1} \\ R_{31} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} \end{cases}$$

总结：$R_\Delta = \frac{Y\text{形电阻两两乘积之和}}{Y\text{形不相邻电阻}}$

Δ变Y：

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{cases}$$

总结：$R_Y = \frac{\Delta\text{形相邻电阻乘积}}{\Delta\text{形电阻之和}}$

电源串并联

电压源串联：$u_s = \Sigma u_{si}$
电流源并联：$i_s = \Sigma i_{si}$

禁止有差异的电压源并联，电流源串联

实际电源等效变换

$u = U_s - R_i \longleftrightarrow i = I_s - G_u$
其中$G = \frac{1}{R}, U_s = I_s R$
解题:
求开路电压U_s,短路电流I_s可得.

输入电阻

定义:$R_i = \frac{u}{i}$
解题:
求u, i,可得R_i

3 电阻电路的一般分析

独立KCL方程:
n个节点的电路,可(任意地)出(n-1)个独立的KCL方程,相应地(n-1)个节点称为独立节点
独立KVL方程:
树的定义:包含图的全部节点且不包含任何回路的联通子图
$数+任意连枝 \to 基本回路 \to 基本回路组(独立回路组) \to 独立KVL方程$

支路电流法

$$\begin{cases} 所有(n-1)个KCL方程 \\ (b-n+1)个KVL方程 \end{cases}$$

$$(加上隐藏的b个VCR方程)$$

用i作为所有变量则为支路电流法,用u作为所有变量则为支路电压法
解题:

1. 选参考方向
2. 写(n-1)个KCL
3. 写(b-n+1)个KVL

网孔电流法

仅适用于平面回路
解题:

1. 假设网孔电流

2. 列网孔KVL方程

回路电流法

是网孔电流法的扩展,可适用于非平面电路

解题:

1. 选树,连连枝构成(b-n+1)个基本回路,设回路电流
2. 写KVL方程

遇电流源时(受控电流源同):
有伴电流源:等效变换为电压源
无伴电流源:将该源电压设为变量,再电流关系

节点电压法

解题:

1. 选参考节点
2. 写KCL方程

遇电压源时:
有伴电压源:等效变换
无伴电压源:设其电流为变量,再补节点之间电压的关系

4 电路定理

叠加定理

在线性电阻电路中,各处电压/电流值等于各独立电源单独作用时的电压/电流值的叠加.

$$\text{电源的置零}:\begin{cases}\text{电压源}\rightarrow\text{短路}\\\text{电流源}\rightarrow\text{开路}\end{cases}$$

> 对受控源:进行各分电路计算的时候,应将受控源留在分电路之中

功率不满足叠加定理.

替代定理

用一电压/电流源代替一电压/电流相同的一端口网络.

戴维南定理/诺顿定理

将一个一端口网络等效为真实电压源(戴维南)或真实电流源(诺顿).
解题:
$u_{oc} = R_{eq} I_{sc}$,三求二可得等效电源

u_{oc}:开路电压
i_{sc}:短路电流
R_{eq}:等效电阻,将网络中电源置零,变换电阻可得(R_{eq}可为0或∞)

6 储能元件

电容

$q = Cu$
$i = C\frac{du}{dt}$
$u\left(t\right) = u\left(t_0\right) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} id\xi$
$W_c\left(t\right) = \frac{1}{2}Cu^2\left(t\right)$

电感

$u = \frac{\mathrm{d}\Psi_L}{\mathrm{dt}}$
$\Psi = Li$
$u = L\frac{di}{dt}$
$i = i\left(t_0\right) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} ud\xi$
$W_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{\Psi_L^2(t)}{L}$

电容电感串并联

电容串联:$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$
电容并联:$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

电感串联:$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$
电感并联:$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$

7 一阶和二阶电路的时域分析

P158
这里讲叫做“时域分析”的意思是，直接通过前面已知的各种电路定律，以及元件参数随时间变化的公式，直接进行联立和求解；与之相对应地，第十四章会通过拉普拉斯变换，将欲求解电路变换到频域中进行求解。

动态电路的方程及其初始条件

在动态电路(有开关发生跳变的电路)中,需要先分析跳变前(在本章中是稳态),即$t=0^-$的电路状态,以其作为跳变后(即$t=0^+$)的初始状态进行分析

本章的主要内容是对于几种涉及R C L的基本电路,给出对于几种响应的基本变化公式.

一阶电路的零输入响应

零输入响应:电路没有外施激励,仅由电路中动态元件的初始储能引起的响应
人话:放电过程

RC电路

根据电容的特性,取开关时刻为t=0;电路的微分方程:
$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+u_c=0$
解得:
$u_c=U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$
$i=\frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$
其中τ为RC电路的时间常数,定义式$\tau=RC$
$t\to\tau:$ 电压下降到$0.368U_0$

RL电路

根据电感的特性,电路的微分方程:
$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=0$
解得:
$i=I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$
$u_{_R}=RI_{_0}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$
其中τ为RL电路的时间常数,定义式$\tau=\frac{L}{R}$

一阶电路的零状态响应

零状态响应:电路在零初始状态下(动态元件初始储能为零),由外施激励引起的响应
人话:充电过程

RC电路

微分方程:$RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+u_c=U_s$

解得:
$u_c = U_\mathrm{s}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$
$i = \frac{U_s}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

RL电路

微分方程:$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L = I_\mathrm{s}$

解得:
$i_L = I_\mathrm{s}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$

一阶电路的全响应

三要素法:
(全响应)=(零输入响应)+(零状态响应)

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

8 相量法

P193

复数

$F = a + jb = |F|e^{j\theta} = |F|\angle\theta$
此处的j就是复数单位i,可能因为电路中i被电流占用了容易导致误解,所以用的j.
$|F| = (a^2 + b^2)$
$\theta = argF = arctan(\frac{b}{a})$
$a = |F|cos\theta, b = |F|sin\theta$
算加减的时候用$a+jb$形式,算乘除的时候用$|F|\angle\theta$形式.

正弦量

$i = I_m cos(\omega t + \phi_i)$, 其中$I_m$为振幅, ω为角频率, ϕ_i为相位
有效值$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$
$i = \sqrt{2}Icos(\omega t + \phi_i)$
相位差:$\Delta\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2$

相量

$\dot{U}_s = U_s e^{j\phi_u} = U_s \angle \phi_u$
$\dot{I} = I e^{j\phi_i} = I \angle \phi_i$
相量与频率无关.

电路定律的相量形式

$KCL : \sum i = 0(条件 : 同频)$
$KVL : \sum u = 0(条件 : 同频)$

电阻

$\dot{U}_R = R\dot{I}_R 或 \dot{I}_R = G\dot{U}_R$
$\rightarrow U_R = RI_R 或 I_R = GU_R, \phi_u = \phi_i$

电感

$\dot{U}_L = jwL\dot{I}_L$
$U_L = wLI_L,$
$\phi_u = \phi_i + 90^\circ$
感抗ωL
感纳$-\frac{1}{\omega L}$

电容

$u_c = -j\frac{1}{wC}I_c$
$u_c = \frac{1}{wc}I_c$
$\phi_u = \phi_i - 90^\circ$
容抗$-\frac{1}{\omega C}$
容纳ωC

电路的相量图

此部分为教材第九章内容
P240
在电路分析中,涉及电容电感的串并联电路时,将其参数转化为阻抗/导纳,通过画相量图进行计算.
$并联电路 \rightarrow VCR \rightarrow KCL \rightarrow 画电流相量图$
$串联电路 \rightarrow VCR \rightarrow KVL \rightarrow 画电压相量图$

9 正弦稳态电路的分析

P234

阻抗&导纳

阻抗和导纳是电阻和电导概念针对相量(电容电感)的引入带来的扩展.

阻抗

一端口N_0的阻抗Z定义为其端电压相量$\dot{U}$和电流相量$\dot{I}$的比值：

$$Z \xrightarrow{\text{def}} \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I}\angle(\phi_u - \phi_i) = |Z|\angle\phi_z$$

或 $\dot{U} = Z\dot{I}$
阻抗模$|Z| = \frac{U}{I}$,辐角$\phi_Z = \phi_u - \phi_i$

另有$Z = R + \mathrm{j}X$,其中R为等效电阻分量,X为等效电抗分量;
X>0:感性阻抗;
X<0:容性阻抗.

欧姆定律:
$\dot{U} = (R + \mathrm{j}X)\dot{I}$
电容电感的阻抗:
$\omega L_{eq} = X, \quad L_{eq} = \frac{X}{\omega}$(电感)
$\frac{1}{\omega C_{\text{eq}}} =\mid X \mid, \quad C_{\text{eq}} = \frac{1}{\omega|X|}$(电容)

导纳

一端口N_0的导纳Y定义为其端电压相量$\dot{I}$和电流相量$\dot{U}$的比值：

$$Y \xrightarrow{\text{def}} \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I}{U}\angle(\phi_i - \phi_u) = |Y|\angle\phi_Y$$

或 $\dot{I} = Y\dot{U}$
阻抗模$|Y| = \frac{I}{U}$,辐角$\phi_Y = \phi_i - \phi_u$

另有$Y = G + \mathrm{j}B$,其中G为等效电导分量,B为等效电纳分量;
B<0:感性阻抗;
B>0:容性阻抗.

欧姆定律:
$\dot{I} = (G + \mathrm{j}B)\dot{U}$

电容电感的阻抗:

$C_{\text{eq}} = \frac{B}{\omega} \quad (B>0, \text{容性电纳}), \quad L_{\text{eq}} = \frac{1}{|B|\omega} \quad (B<0, \text{感性电纳})$

$ZY = 1 \to |Z||Y| = 1, \phi_Z + \phi_Y = 0$
$\to G + jB = \frac{1}{R+jX} \to G = \frac{R}{|Z|^2}, B = -\frac{X}{|Z|^2}$
$\to R + jX = \frac{1}{G+jB} \to R = \frac{G}{|Y|^2}, X = -\frac{B}{|Y|^2}$

正弦稳态电路的分析

在正弦稳态电路中，使用相量状态下的电压电流代替原先稳态电路分析中的标量电压电流，用相量形式下的电路基本定律（如下）代替稳态电路中的基本定律，则可对正弦稳态电路进行分析（并且这些公式的相量形式事实上和稳态电路中一致）

$\text{KCL} \qquad \Sigma \quad \dot{I} = 0$

$\text{KVL} \qquad \Sigma \quad \dot{U} = 0$

$\text{VCR} \qquad \dot{U} = Z\dot{I} \quad \text{或} \quad \dot{I} = Y\dot{U}$

在算出所需要求的相量电压或电流之后，把它通过正弦量的公式变回t的函数即可

正弦稳态电路的功率

以相量形式记一个正弦稳态电路中的电压 电流有效值为U, I,二者的角度差(功率因数角)为φ_Z，则：

有功功率

$$P = UI\cos\varphi_z$$

单位为W.

无功功率

$$Q = UI\sin\varphi_z$$

单位为var.

视在功率

$$S = UI$$

单位为V·A.

相互关系

$$P = S\cos\varphi_z, \quad Q = S\sin\varphi_z, \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

功率因数:

$$\lambda = \cos\varphi_z \leqslant 1$$

同时有:

$$\lambda = \frac{P}{S}$$

复功率

复功率是上面三个功率的扩展,在实际中通过计算复功率可以更方便地计算功率.

记某端口电压,电流相量为$\dot{U}, \dot{I}$,则复功率$\overline{S}$定义为:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{U}\dot{I} \qquad & = UI\angle(\phi_u - \phi_i) \\ & = UI\mathrm{cos}\varphi + jUI\mathrm{sin}\varphi \\ & = P + jQ \end{aligned}$$

电路整体是复功率守恒的,即

$$\sum \overline{S} = 0, \quad \sum P = 0, \quad \sum Q = 0$$

与之相对的,视在功率S是不守恒的

最大功率传输

最大功率传输分下面三种情况,都是给定电路,然后要求最大功率时的电阻阻抗大小(记负载阻抗$Z = R + jX$.

1 R和X都可以任意变动

最大功率条件:

$$\left.\begin{aligned} X = -X_{\mathrm{eq}} \\ \\ R = R_{\mathrm{eq}} \end{aligned}\right\}$$

即$Z = R_{_{\mathrm{eq}}} - \mathrm{j}X_{_{\mathrm{eq}}} = Z_{_{\mathrm{eq}}}^{*}$,写成阻抗形式就是$Y = Y_{\mathrm{eq}}^{*}$
此时最大功率为:

$$P_{\max} = \frac{U_{\mathrm{oc}}^2}{4R_{\mathrm{eq}}}$$

此时称之为最佳匹配(共轭匹配).

2 若只允许X改变

最大功率条件:

$$X = -X_{eq}$$

3 若Z=R为纯电阻,R改变

最大功率条件:

$$R = \sqrt{R_{eq}^2 + X_{eq}^2} = |Z_{eq}|$$

10 含有耦合电感的电路

P238

互感

两个线圈耦合时,记其电感量为$L_1 L_2$,互感系数为M,则有自感:

$$\Psi_{11} = L_1 i_1, \quad \Psi_{22} = L_2 i_2$$

有互感:

$$\Psi_{12} = M i_2, \quad \Psi_{21} = M i_1$$

则整个线圈的磁通链(磁通链即磁通量)为

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M i_2$$
$$\Psi_2 = \pm\Psi_{21} + \Psi_{22} = \pm M i_1 + L_2 i_2$$

若两电流相对于同名段流入/流出方向相同,则为同向耦合,上式中正负号为正;若方向相反,则为反向耦合,上式中正负号为负.

耦合因数k的定义:

$$k \overset{def}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leqslant 1$$

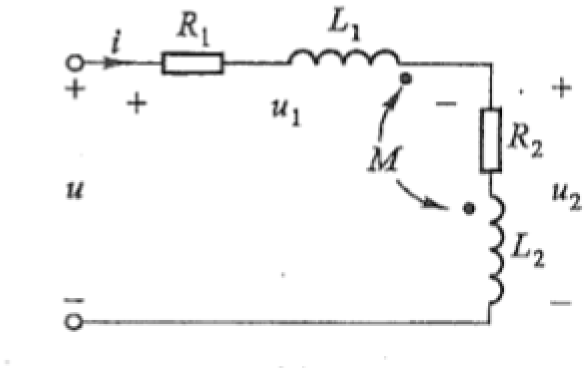
当$k \approx 1$时,称为全耦合(紧耦合的极端情况);当$k \approx 0$时,称为无耦合(疏耦合的极端情况). *该概念对后续作用不大,了解即可*

在相量形式中,用$Z_M = j\omega M$表示互感的阻抗,其中ωM称为互感抗.

含耦合电感电路的计算

串联

耦合电感的串联分为同向串联和反向串联.即看两电感同名端方向是否相同,下图为反向串联.



反向串联

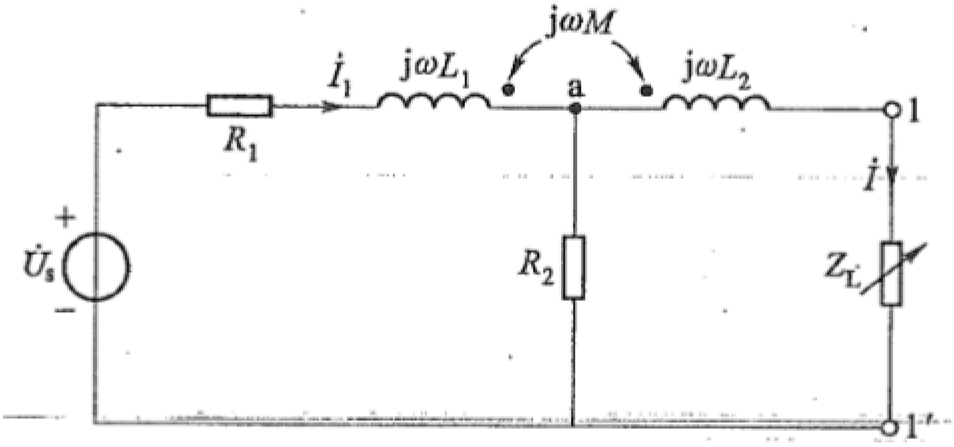
$$Z=Z_1+Z_2=(R_1+R_2)+\mathrm{j}\omega(L_1+L_2-2M)$$

同向串联

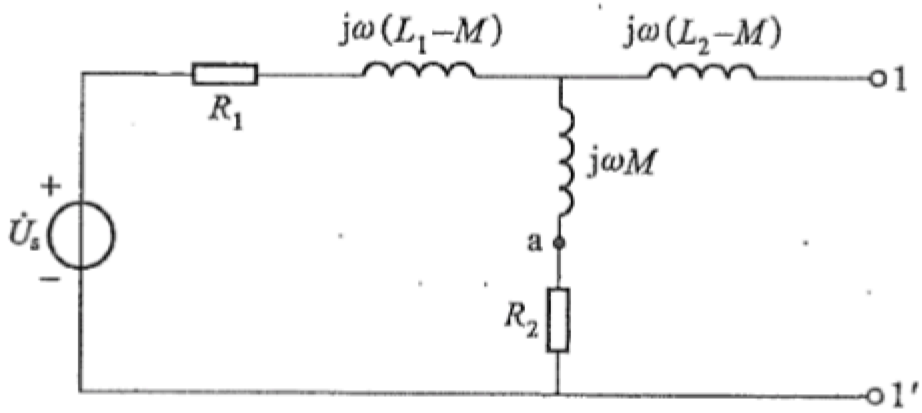
$$Z=Z_1+Z_2=(R_1+R_2)+\mathrm{j}\omega(L_1+L_2+2M)$$

"并联"

在耦合电感有一端相连时,将其进行去耦等效,等效为两个原来位置的只有自感的电感,和额外的一个耦合等效电感,如下图.



(a)



(b)

三个电感的等效电感分别为:

$$
\begin{aligned}
&(\text{支路 }3) L_3=\pm M(\text{同侧取"}+\text{",异侧取"}-\text{"})\\
&(\text{支路 }1) L_1'=L_1\mp M\\
&(\text{支路 }2) L_2'=L_2\mp M
\end{aligned}
$$

(支路3即为额外的支路)

变压器原理

本节的基本电路:

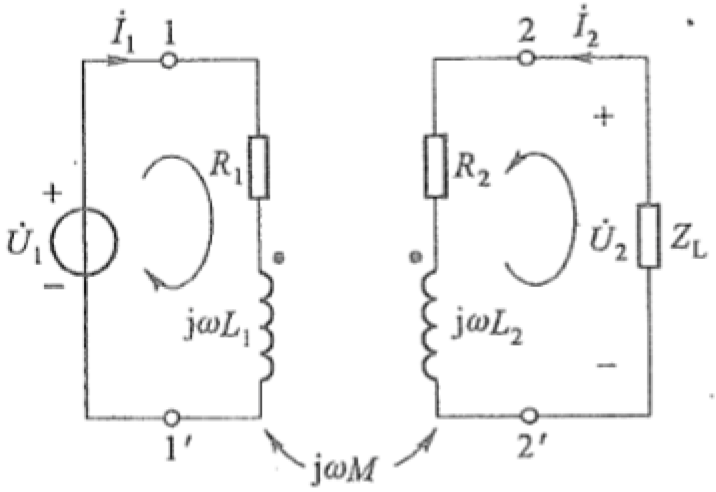


图 10-9 变压器电路模型

本电路有三种求解方法:

1. 直接列电路方程求解
2. 对原边和副边分别有等效电路
3. 去耦等效

列电路方程

两侧的回路电流方程:

$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ j\omega M\dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

等效电路

等效电路如下:

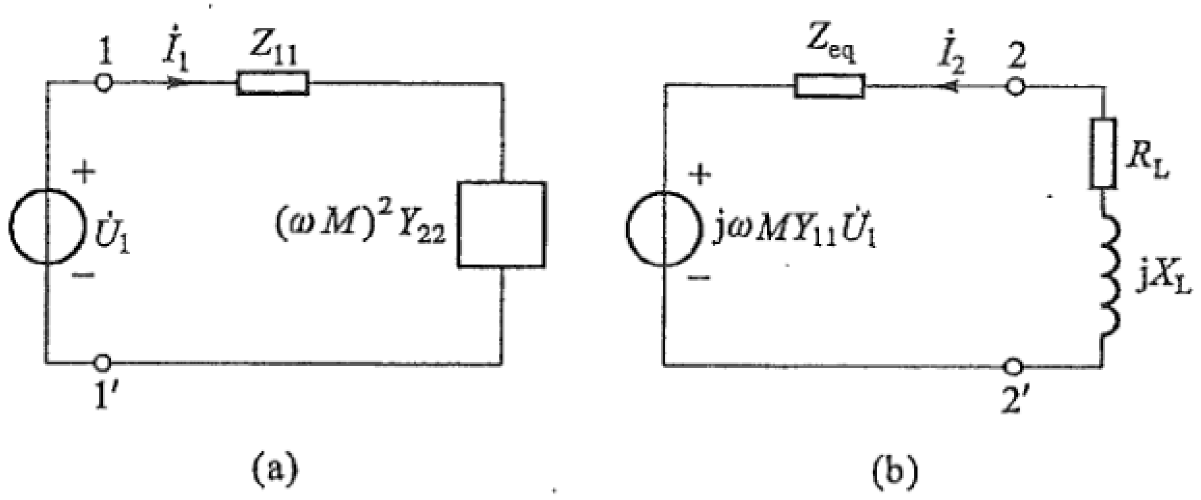


图 10-10 变压器的等效电路

记:
$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$为一次回路阻抗
$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L$为二次回路阻抗
$Z_M = j\omega M$为互感抗
则上式可写为:

$$\begin{aligned} Z_{11}\dot{I}_1 + Z_M\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \quad (\text{一次侧}) \\ Z_M\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0(\text{二次侧}) \end{aligned}$$

则可得一次电路中的电流:
(这里使用解线性方程组的思想,待补充)

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11} - Z_M^2 Y_{22}} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{11} + (\omega M)^2 Y_{22}} = \frac{\dot{U}_1}{Z_{\mathrm{i}}}$$

式中$-Z_M^2 Y_{22} = (\omega M)^2 Y_{22}$称为引入阻抗,是二次回路总阻抗反映到一次侧的等效阻抗;其性质与Z_{22}相反(即容性变感性,感性变容性).

则可用上式表示副边侧的电流电压:

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 = -\frac{Z_M}{Z_{22}}\dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 = -Z_1\dot{I}_2 = \frac{Z_M Z_1}{Z_{22}}\dot{I}_1 \end{aligned}$$

或者从二次等效电路来分析:

$$\dot{I}_2=-\frac{Z_M}{Z_{22}}\frac{\dot{U}_1}{Z_{11}+(\omega M)^2Y_{22}}=-\frac{Z_M\dot{U}_1/Z_{11}}{Z_{22}+(\omega M)^2Y_{11}}=-\frac{\dot{U}_{\text{oc}}}{Z_{\text{eq}}+Z_{\text{L}}}$$

其中同样地,$(\omega M)^2Y_{11}$为一次回路反映到二次回路的引入阻抗.

理想变压器

理想化的两个理想化条件:

1. 无损耗(线圈无内阻)
   此时磁通链方程为:

$$\begin{cases}\Psi_1=L_1i_1+Mi_2\\ \Psi_2=Mi_1+L_2i_2\end{cases}$$

2. 全耦合(即k=1)
   此时磁通链比,电压比方程为:

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_2}=\frac{u_1}{u_2}=\frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}}(\text{常数})$$

   理想变压器的特性:
   记$n=\frac{N_1}{N_2}=\frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}}$为两电感线圈的变比,则:

变电压关系

$$u_1=nu_2$$

变电流关系

$$i_1=-\frac{1}{n}i_2$$

变阻抗关系

$$Z_{11},=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{n\dot{U}_2}{-\frac{1}{n}\dot{I}_2}=n^2Z_{\text{L}}$$

11 电路的频率响应

P261
本章讨论的电源都是正弦交流电源.

网络函数

网络函数$H(j\omega)$定义为:

$$H(\mathrm{j}\omega)\overset{\text{def}}{=}\frac{\dot{R}_k(\mathrm{j}\omega)}{\dot{E}_{sj}(\mathrm{j}\omega)}$$

其中$\dot{R}_k(j\omega)$为输出端口k的响应;$\dot{E}_{sj}(j\omega)$为输入端口j的激励.二者都可以是电压或者电流相量.

当$k=j$时,网络函数就是阻抗或导纳,当$k\neq j$时,网络函数则称为转移函数.

网络函数为一复值,它的模$|H(\omega)|$为两个正弦量的比值,其与频率的特性称为**幅频特性**;它的幅角$\varphi(j\omega)=arg[H(j\omega)]$是两个正弦量的相位差(相移),它和频率的关系称为**相频特性**.

RLC串联电路的谐振

电路图:

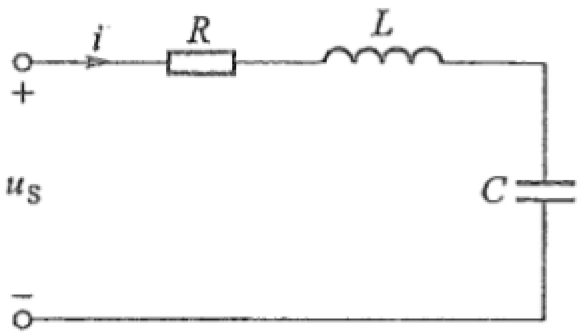


图 11-2 RLC 串联电路

电路的阻抗表示为:

$$Z(\mathrm{j}\omega)=R+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$$

频率特性:

$$\varphi(\mathrm{j}\omega)=\arctan\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

$$|Z(\mathrm{j}\omega)|=\frac{R}{\cos[\varphi(\mathrm{j}\omega)]}$$

可知电路会有三种情况:

$\omega<\omega_0$	$\omega=\omega_0$	$\omega>\omega_0$
$X(j\omega)<0,\quad \varphi(j\omega)<0$	$X(j\omega)=0,\quad \varphi(j\omega)=0$	$X(j\omega)>0,\quad \varphi(j\omega)>0$
容性区	电阻性	感性区
$R<\lvert Z(j\omega)\rvert$	$Z(j\omega_0)=R$	$R<\lvert Z(j\omega)\rvert$
且 $\lim\limits_{\omega\to 0}\lvert Z(j\omega)\rvert=\infty$		且 $\lim\limits_{\omega\to\infty}\lvert Z(j\omega)\rvert=\infty$

当$\omega=\omega_0$时,称为电路谐振,此时有以下特性:

- $\varphi(j\omega_0)=0$
- $Z(j\omega_0)=R$为最小值,此时电流$I(j\omega_0)$为最大值:

$$I(\mathrm{j}\omega_0)=\frac{U_s(\mathrm{j}\omega_0)}{R}$$

- 电抗电压$U_X(j\omega_0)=0$
- 无功功率$Q(j\omega_0)=0$
  由第一点可知电路谐振的条件为:

$$\mathrm{Im}[Z(\mathrm{j}\omega_0)]=X(\mathrm{j}\omega_0)=\omega_0 L-\frac{1}{\omega_0 C}=0$$

  或写成

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\quad f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

定义品质因数Q(注意这里不是无功功率):

$$Q\overset{\text{def}}{=}\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 CR}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

则可用Q值表示电容电感电压:

$$U_L(\mathrm{j}\omega_0)=U_C(\mathrm{j}\omega_0)=QU_s(\mathrm{j}\omega_0)$$

RLC串联电路的频率响应

特性具体公式不咋重要,就一个带宽好考

常用$\eta=\frac{\omega}{\omega_0}$,即$\omega=\eta\omega_0$表示频率，即$\eta=1$时电路谐振.

以电阻电压为输出变量，则网络函数表示为

$$H_R(\mathrm{j}\eta)=\frac{\dot{U}_R(\mathrm{j}\omega)}{\dot{U}_s(\mathrm{j}\omega)}=\frac{R}{R+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}=\frac{1}{1+\mathrm{j}Q\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)}$$

(不用背)

带宽

定义:
带宽BW是满足下面式子的频域范围:

$$|H_R(\mathrm{j}\eta)|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707(\text{设定的指标})$$

上式取等号时(即两个临界频率点,带宽的上下界),有

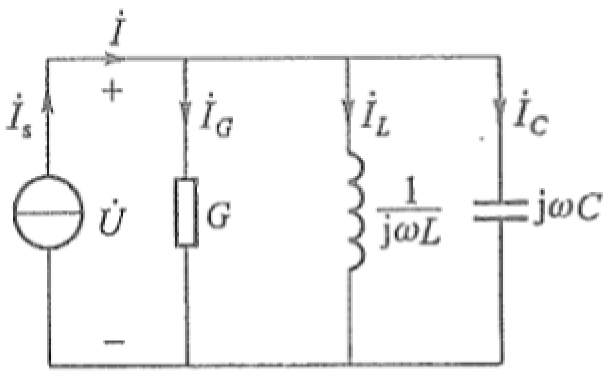
$$Q\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)=\pm 1$$

可据此求BW上下界.
通带的BW为:

$$BW=\omega_{\mathrm{j}2}-\omega_{\mathrm{j}1}=\frac{\omega_0}{Q}\quad\text{或}\quad BW=\frac{f_0}{Q}$$

RLC并联谐振电路

电路如下图.



电路的导纳为:

$$Y(\mathrm{j}\omega_0)=G+\mathrm{j}\left(\omega_0 C-\frac{1}{\omega_0 L}\right)$$

电路谐振的条件为

$$\mathrm{Im}[Y(\mathrm{j}\omega_0)]=0$$

则可得谐振时有

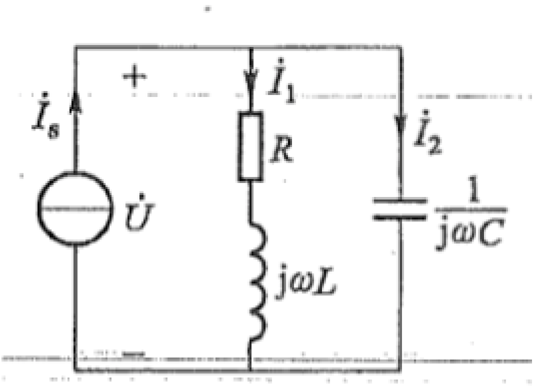
$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\text{或}f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

电路谐振时的特性:

- 输入导纳最小$Y(\mathrm{j}\omega_0)=G+\mathrm{j}\left(\omega_0C-\frac{1}{\omega_0L}\right)=G$,或称输入阻抗最大$Z(\mathrm{j}\omega_0)=R$
- 电压最大$U(\omega_0)=|Z(\mathrm{j}\omega_0|I_s=RI_s$
- $\dot{I}_L+\dot{I}_C=0$
- 品质因数$Q=\frac{1}{\omega_0LG}=\frac{\omega_0C}{G}=\frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$

实际线圈谐振电路

若在工程中考虑实际电感线圈有电阻,则有第三种谐振电路:



该电路分析思路和上一种类似.

电路导纳为

$$Y(\mathrm{j}\omega_0)=\mathrm{j}\omega_0C+\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega_0L}=\mathrm{j}\omega_0C+\frac{R}{\mid Z(\mathrm{j}\omega_0)\mid^2}-\mathrm{j}\frac{\omega_0L}{\mid Z(\mathrm{j}\omega_0)\mid^2}$$

加上谐振条件$\mathrm{Im}[Y(\mathrm{j}\omega_0)]=0$可得:

$$\omega_0C-\frac{\omega_0L}{\mid Z(\mathrm{j}\omega_0)\mid^2}=0$$

解得:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{CR^2}{L}}$$

可知只有当$1-\frac{CR^2}{L}>0$, 即$R<\sqrt{\frac{L}{C}}$时才能发生谐振.

谐振时输入导纳为:

$$
Y(j\omega_0)=\frac{R}{\mid Z(j\omega_0)\mid^2}=\frac{CR}{L}
$$

滤波器

本节重解题,没有新知识.解题思路为利用谐振来过滤/保留某个频率的波,通过谐振条件和目标频率来反解出需要的元件参数.

本节在后面非正弦信号那章会用到,和上述解题思路一样

12 三相电路

P281
本章重点是认清楚相电压,相电流,线电压,线电流四个概念.

三相电路

三相电源

对称三相电源是由3个同频率、等幅值、初相依次滞后120°的正弦电压源连接成星形(Y)或三角形(A)组成的电源.其表达式和相量为(正序,顺序):

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{A}} &= \sqrt{2}U\cos(\omega t) & \dot{U}_{\mathrm{A}} &= U\angle 0^\circ \\
u_{\mathrm{B}} &= \sqrt{2}U\cos(\omega t-120^\circ) & \dot{U}_{\mathrm{B}} &= U\angle{-120^\circ} = a^2\dot{U}_{\mathrm{A}} \\
u_{\mathrm{C}} &= \sqrt{2}U\cos(\omega t+120^\circ) & \dot{U}_{\mathrm{C}} &= U\angle 120^\circ = a\dot{U}_{\mathrm{A}}
\end{aligned}
$$

其中以A相电压u_A为参考正弦量,$a=1\angle 120^\circ$是认为规定的单位相量算子.

对称三相电压满足:

$$
u_{_A}+u_{_B}+u_{_C}=0 \quad \text{或} \quad \dot{U}_{_A}+\dot{U}_{_B}+\dot{U}_{_C}=0
$$

其波形和相量图为:

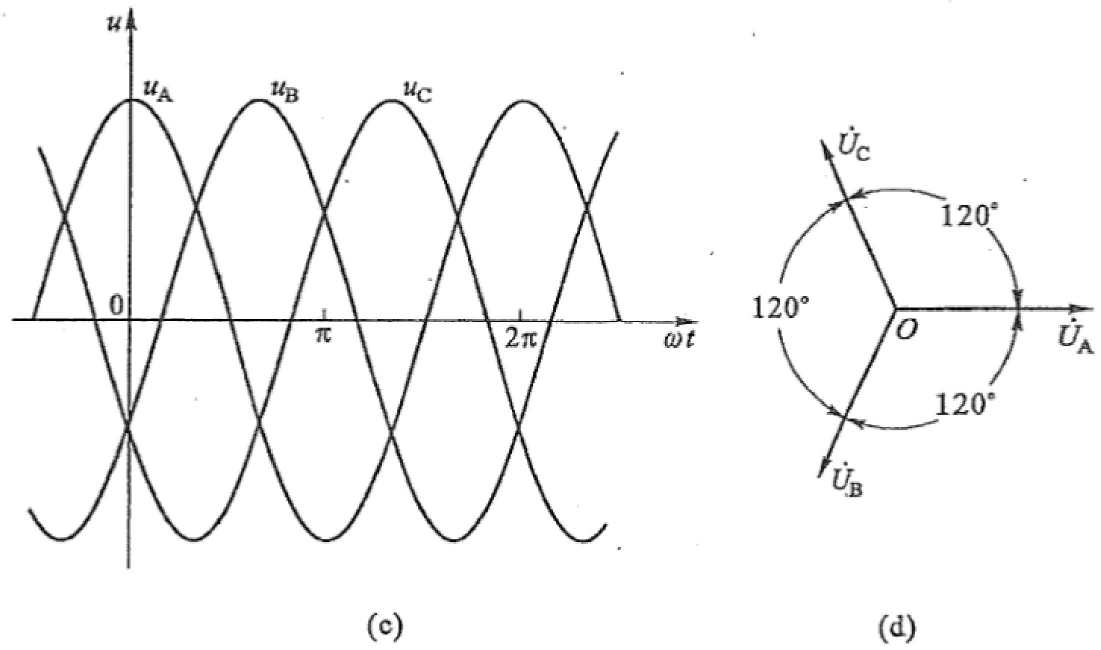
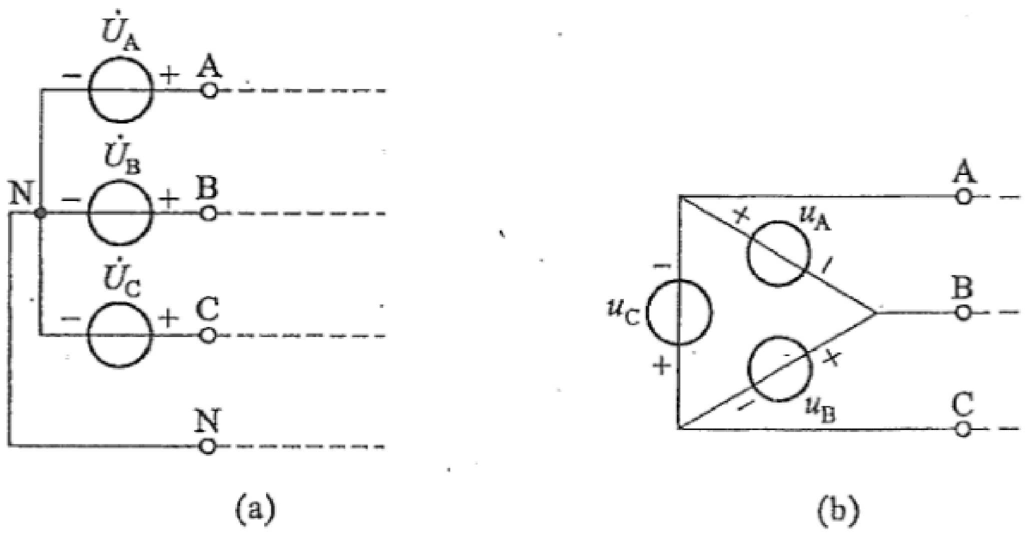


图 12-1　对称三相电压源连接及其电压波形和相量图

连接方式

电源/负载的连接方式有两种,星形(Y形)连接和三角形(Δ形)连接.分别如下图(以电源为例).



线电压 线电流 相电压 相电流

三相系统重,流经输电线中的电流称为**线电流**.

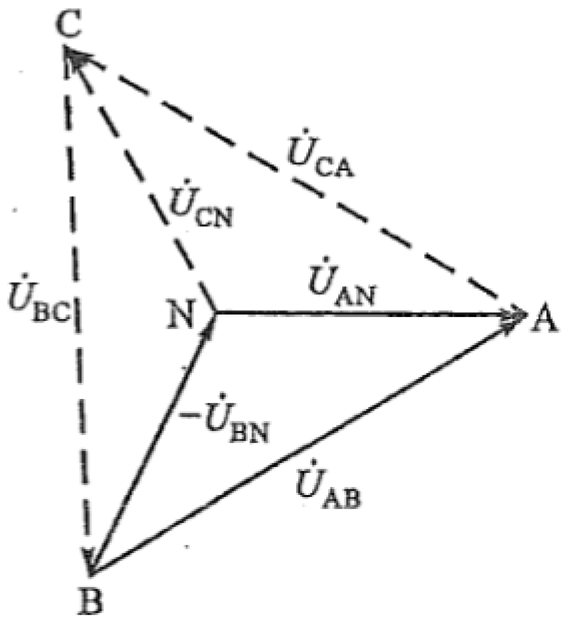
各输电线线端之间的电压,称为**线电压**.

三相电源和三相负载中每一相的电压,电流称之为**相电压,相电流**.

对于对称星形电源

其相电流=线电流;

其相电压,线电压存在下面图形表示的关系:



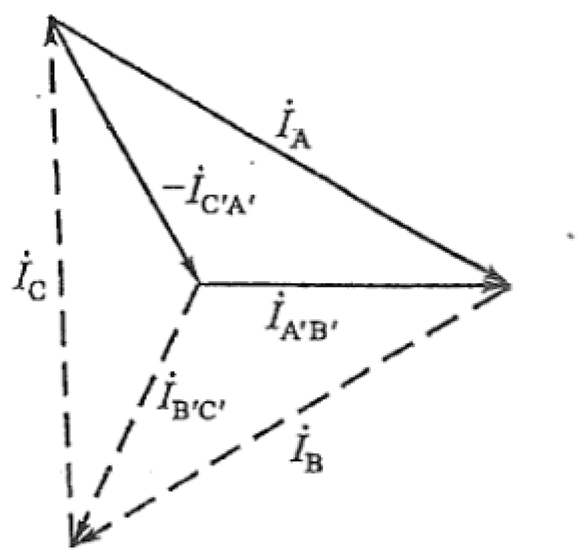
即

$$\begin{cases}\dot{U}_{\mathrm{AB}}=\dot{U}_{\mathrm{A}}-\dot{U}_{\mathrm{B}}=(1-a^2)\dot{U}_{\mathrm{A}}=\sqrt{3}\dot{U}_{\mathrm{A}}\angle 30^\circ\\ \dot{U}_{\mathrm{BC}}=\dot{U}_{\mathrm{B}}-\dot{U}_{\mathrm{C}}=(1-a^2)\dot{U}_{\mathrm{B}}=\sqrt{3}\dot{U}_{\mathrm{B}}\angle 30^\circ\\ \dot{U}_{\mathrm{CA}}=\dot{U}_{\mathrm{C}}-\dot{U}_{\mathrm{A}}=(1-a^2)\dot{U}_{\mathrm{C}}=\sqrt{3}\dot{U}_{\mathrm{C}}\angle 30^\circ\end{cases}$$

对于对称三角形电源

其相电压=线电压;

其相电流,线电流存在下面的关系:



即

$$\begin{cases}\dot{I}_{\mathrm{A}}=\dot{I}_{\mathrm{A'B'}}-\dot{I}_{\mathrm{C'A'}}=(1-a)\dot{I}_{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{3}\dot{I}_{\mathrm{A'B'}}\angle-30^{\circ}\\ \dot{I}_{\mathrm{B}}=\dot{I}_{\mathrm{B'C'}}-\dot{I}_{\mathrm{A'B'}}=(1-a)\dot{I}_{\mathrm{B'C'}}=\sqrt{3}\dot{I}_{\mathrm{B'C'}}\angle-30^{\circ}\\ \dot{I}_{\mathrm{C}}=\dot{I}_{\mathrm{C'A'}}-\dot{I}_{\mathrm{B'C'}}=(1-a)\dot{I}_{\mathrm{C'A'}}=\sqrt{3}\dot{I}_{\mathrm{C'A'}}\angle-30^{\circ}\end{cases}$$

对称三相电路功率的计算

$$\begin{cases}P=3U_PI_P\cos\varphi\\ Q=3U_PI_P\sin\varphi\\ S=3U_PI_P=\sqrt{3}U_II_I\end{cases}$$

三相电路的功率

三相电流中三相负载吸收的复功率等于各相复功率之和:

$$\overline{S}=\overline{S}_{_A}+\overline{S}_{_B}+\overline{S}_{_C}$$

不论对称与否,都可以使用二瓦计法,使用两个功率表来测量三相功率.

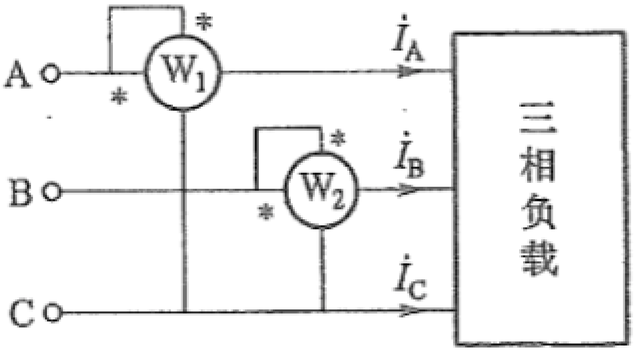


图 12-7　二瓦计法

记两个表分别测得的数值为P_1和P_2,则电路消耗的有功功率为

$$\mathrm{Re}[\overline{S}]=P_1+P_2$$

13 非正弦周期电流电路和信号的频谱

P295
本章通过傅里叶级数的方法,把非正弦的激励信号分解为多个正弦信号,然后就可以通过前面章节对于正弦信号的分析来求解.

非正弦周期函数分解为傅里叶级数

对于一个非正弦周期函数$f(t)$,若其满足傅里叶级数的条件,即迪利克雷条件:

1. 极值点数目为有限个

2. 间断点数目为有限个
3. 在周期内可积

即可将其展开成一个傅里叶级数:

$$
\begin{aligned}
f(t) = & \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t)] + [a_2 \cos(2\omega_1 t) + b_2 \sin(2\omega_1 t)] + \cdots + \\
& [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] + \cdots \\
= & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]
\end{aligned}
$$

可以写成另一种形式,但是考试似乎不考:

$$
\begin{aligned}
f(t) = & \frac{A_0}{2} + A_{1m}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{2m}\cos(2\omega_1 t + \phi_2) + \cdots + \\
& A_{km}\cos(k\omega_1 t + \phi_k) + \cdots \\
= & \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km}\cos(k\omega_1 t + \phi_k)
\end{aligned}
$$

表达式(第一种)的参数公式为:

$$
\begin{aligned}
a_k & = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}t \\
& = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t) \\
b_k & = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t \\
& = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)
\end{aligned}
$$

有效值,平均值和平均功率

有效值

$$
I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}
$$

平均值

$$
I_{\mathrm{av}} \xrightarrow{\mathrm{def}} \frac{1}{T}\int_0^T |\, i \,| \,\mathrm{d}t
$$

平均功率

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T pdt=U_0I_0+U_1I_1\cos\varphi_1+U_2I_2\cos\varphi_2+\cdots+U_kI_k\cos\varphi_k+\cdots$$

14 线性动态电路的复频域分析

P320

本章使用拉普拉斯变换,将线性动态电路的时域变换转化为频域的变化,并通过对于频域的运算电路来计算目标响应,最后通过拉普拉斯反变换来求得响应的时域表达式,以此避免了直接在时域中计算所遇到的微分方程求解问题.

拉普拉斯变换的东西在复变函数有深入研究,这里简要介绍.本章不需要十分深入的使用拉普拉斯变换,只需要掌握常见函数的拉普拉斯变换/逆变换,以及基本性质,然后进行变换,求解,逆变换即可.

拉普拉斯变换

对于一个定义在$[0,\infty)$的函数$f(t)$,其拉普拉斯变换式$F(s)$定义为:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

其中s是复频率,$F(s)$称为象函数,$f(t)$称为原函数/象原函数.可见拉氏变换是一个将时域函数转化为频域函数的变换.这个变换考虑的范围是从0开始的时间,也就是说不需要考虑t=0之前的状态,同时需要t=0时的初始状态.

相反地,有拉普拉斯逆变换:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

其中c为正的有限常数.

通常用$\mathscr{L}[\ \ ]$和$\mathscr{L}^{-1}[\ \ ]$来表示拉普拉斯变换和拉普拉斯逆变换.

常见函数的拉普拉斯变换

这里搬运一下复变函数记的部分.

脉冲,阶跃函数：

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

基本函数：

$$1 \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$e^{at} \longleftrightarrow \frac{1}{s-a}$$

$$t^m \longleftrightarrow \frac{m!}{s^{m+1}}$$

$$t^m e^{at} \longleftrightarrow \frac{m!}{(s-a)^{m+1}}$$

$$\sin at \longleftrightarrow \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\cos at \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+a^2}$$

拉普拉斯变换的基本性质

1 线性性质

$$\mathscr{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)] = \alpha\mathscr{L}[f_1(t)]+\beta\mathscr{L}[f_2(t)],$$
$$\mathscr{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta f_2(s)] = \alpha\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)].$$

2 位移性质

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-s\tau}F(s), \quad \tau \geqslant 0 \text{ 为常数.}$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)] = F(s-a), \quad \operatorname{Re}(s-a) > c_0.$$

3 微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$F'(s) = \mathscr{L}[-tf(t)]$$

一般地,有:

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n\mathrm{F}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \quad n = 1,2,\cdots$$

$$F^{(n)}(s) = \mathscr{L}[(-t)^n f(t)], \quad n = 1,2,\cdots$$

4 积分性质

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}\,t\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

一般地,有:

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t \cdots \int_0^t}_{n\text{次}} f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s^n}F(s)$$

$$\underbrace{\int_s^{\infty} \mathrm{d}s \int_s^{\infty} \mathrm{d}s \cdots \int_s^{\infty}}_{n\text{次}} F(s)\mathrm{d}s = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]$$

运算电路

这一部分讲的是如何对于复频域的电路列电路方程.

电路定律

频域中,基尔霍夫定律仍然成立.

$$\begin{array}{ll} \text{对任一节点} & \sum I(s) = 0 \\ \text{对任一回路} & \sum U(s) = 0 \end{array}$$

VCR也仍然成立.

$$U(s) = RI(s)$$

元件对应的运算电路

电阻

电阻的运算电路相比于原来并没有变化.

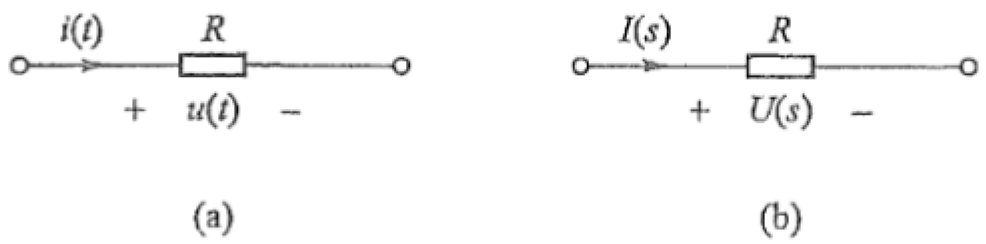
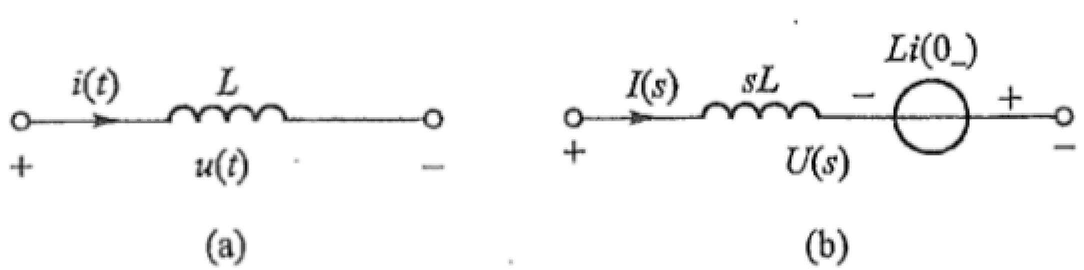


图 14-2 电阻的运算电路

电感

电感,电容的运算电路都有两种,一种是串联一种是并联,一般都用串联那种.
电感的运算电路(右):



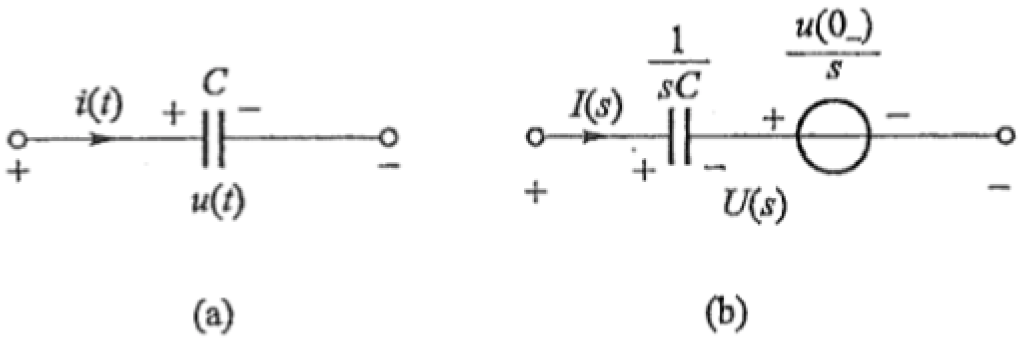
注意这里的电源是非关联参考方向.

$$U(s) = sLI(s) - Li(0_-)$$

$$I(s) = \frac{1}{sL}U(s) + \frac{i(0_-)}{s}$$

电容

电容的运算电路(右):

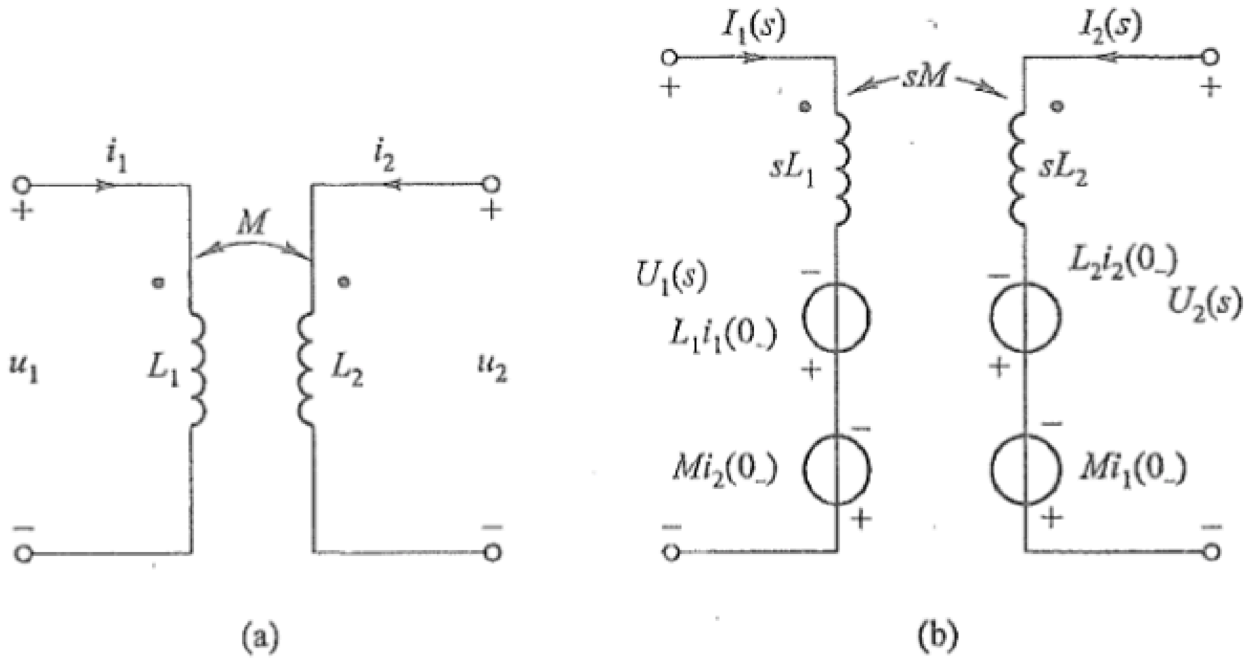


$$U(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u(0_-)}{s}$$

$$I(s) = sCU(s) - Cu(0_-)$$

耦合电感

耦合电感的运算电路(右):



拉普拉斯变换的部分分式展开

在将函数变成频域函数之后,它会是一个有理分式的样子如下:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_n}$$

这个式子没法通过直接的变换来求解逆变换,所以需要将其拆分为简单的分式,再进行逆变换.本节讲述的就是分式分解的方法.本节比较细节,建议还是看课本.

1 有理分式化为真分式

上式中分子次数m必定小于等于分母次数n.若$n>m$,则$F(s)$已经是真分式;若$n=m$,则需要做

$$F(s)=A+\frac{N_0(s)}{D(s)}$$

其中A为常数,反变换回时域就是$A\delta(t)$,然后下一步就只需要处理真分式$\frac{N_0(s)}{D(s)}$.

2 展开分式,即求出D(s)=0的根

$D(s)=0$的根有三种情况:单根,共轭复根,重根.记其根为$p_1,p_2,...,p_n$.

(1) 单根

此时$F(s)$可以展开为

$$F(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

可以把上式继续变化为分母为D(s)的式子,但是使用公式更方便.

单根情况下,有公式:

$$K_1=\left[(s-p_1)F(s)\right]_{s=p_i}\quad(i=1,2,3,\cdots,n)$$

然后对其求极限可得K_1;
或者有另一个公式:

$$K_i=\frac{N(s)}{D'(s)}|_{s=p_i}\quad(i=1,2,3,\cdots,n)$$

(2) 共轭复根

这里的公式实际上和上一种情况一样,不知道为什么课本要写成两种情况.

$$K_1=\left[(s-\alpha-\mathrm{j}\omega)F(s)\right]_{s=\alpha+\mathrm{j}\omega}=\frac{N(s)}{D'(s)}|_{s=\alpha+\mathrm{j}\omega}$$

$$K_2=\left[(s-\alpha+\mathrm{j}\omega)F(s)\right]_{s=\alpha-\mathrm{j}\omega}=\frac{N(s)}{D'(s)}|_{s=\alpha-\mathrm{j}\omega}$$

(3) 重根

当$D(s)=0$有q重根时,公式为:

$$\begin{aligned}
&K_{11}=(s-p_1)^qF(s)|_{s=p_1}\\
&K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-p_1)^qF(s)]|_{s=p_1}\\
&K_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[(s-p_1)^qF(s)]\Big|_{s=p_1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&K_{1q}=\frac{1}{(q-1)!}\frac{\mathrm{d}^{q-1}}{\mathrm{d}s^{q-1}}[(s-p_1)^qF(s)]\Big|_{s=p_1}
\end{aligned}$$