1 复数与复变函数

1 复数与复变函数

d$z = x + yi, i^2 = -1$

概念

$z = x + yi, i^2 = -1$

- 实部: $x = Re(z)$
- 虚部: $y = Im(z)$
- 模: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 辐角: $Arg(z)$ (为多值函数)
  当$x > 0, arg(z) = arctan\frac{y}{x}$;
  当$x < 0$,
  $$\begin{cases} y \geq 0, arg(z) = arctan\frac{y}{x} + \pi \\ y < 0, arg(z) = arctan\frac{y}{x} - \pi \end{cases}$$
  主值arg的取值范围在$(\pi, \pi]$之间
- 三角表示: $z = |z|(cos\theta + isin\theta)$,其中$\theta = Arg(z)$
- 指数表示: $z = re^{i\theta}$,其中$r = |z|, \theta = Arg(z)$

计算

- 加减法略
- 乘法:模长相乘,辐角相加(由指数形式可推)
- 除法:同乘法,模长相除,辐角相减
- 乘幂与方根
  由乘除法可得:
  $$\begin{cases} z^n = [re^{i\theta}]^n = r^n e^{in\theta} \\ \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}(cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + isin\frac{\theta+2k\pi}{n}) \end{cases}$$

共轭数

若$z = x + yi$, 则$\overline{z} = x + yi$
有:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$
$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$
$z\overline{z} = |z|^2$
$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

复变函数

极限的定义略
$\lim_{z\to z_0} f(z) = \alpha \leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a, \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b$

2 解析函数

概念

导数定义略,同高数.
解析的定义:
$\text{点的任意领域内可导} \rightarrow \text{点解析}$
$\text{区域内可导} \rightarrow \text{区域解析} \leftrightarrow \text{区域内每一点都解析}$
$\text{不解析} \rightarrow \text{奇点}$

解析函数之间的加减乘除,复合,求导均保持其解析特性.

可导与解析的条件

可导:
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\text{可导} \leftrightarrow u(x,y)\text{和}v(x,y)\text{在}(x,y)\text{可微且满足柯西} - \text{黎曼方程}(C -$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

此时有: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$
推导过程见:[图解复微分算子及其共形性和保角性，复可微的或全纯的条件：柯西黎曼方程及雅可比矩阵【锦南】]

解析:
由上面提到的$\text{区域内可导} \rightarrow \text{区域解析}$可得:
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\text{在区域内解析} \leftrightarrow u(x,y)\text{和}v(x,y)\text{在}D\text{内可微且满足柯西} - \text{黎曼方}$
解题:

题目常见u,v函数一般为基础函数及其变形,具有无限阶可导特性,故满足一阶可微;因此在解析的推导中,只要证明满足C-R方程即可.

初等函数

1. 指数函数
   $e^z=e^xe^{iy}=e^x(cosy+isiny)$

   $在复平面上处处可导解析,导数为(e^z)'=e^z$
2. 对数函数
   $Lnz=ln|z|+iArg(z)$(多值函数)
   $若对其中的Arf(z)取主值arg(z),则有Arg(z)=arg(z)+2k\pi,可得:$
   $Lnz=ln|z|+i(arg(z)+2k\pi)$(多值函数)
   对数的主值函数:
   $lnz=ln|z|+iarg(z)$(单值函数)

   $ln(z)在原点及负实轴之外处处可导解析;其导数为:[ln(z)]'=\frac{1}{z}$
3. 幂函数
   $a^b=e^{bLna}(a\neq 0),z^b=e^{bLnz}(z\neq 0)$;

   $在原点及负实轴之外处处可导解析,导数为:[z^b]'=bz^{b-1}$
4. 三角函数
   $sinz=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},cosz=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

   $二者在复平面内解析,其导数为:(sinz)'=cosz,(cosz)'=-sinz$
5. 双曲函数
   $shz=\frac{e^z-e^{-z}}{2},cosz=\frac{e^z+e^{-iz}}{2}$
   前者是奇函数,后者是偶函数.

   $二者在复平面内解析,其导数为:(shz)'=chz,(chz)'=-shz$

3 复变函数的积分

本节定理/公式推导见:
[复变函数的积分、柯西定理和留数定理（上）](#)

概念

复积分定义略.
转复积分为线积分:

$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt$
性质:

- 加减乘除
- 若在C上$,|f(z)| \leq M, C$的长为L,则$: |\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)|dz \leq ML$

明星公式

$$\oint \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \begin{cases} 2\pi i, n=0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

条件:
解析要求$:$无
路径要求$: C$是以z_0为圆心$,$任意半径的圆周
n为整数

柯西积分定理

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

条件:
解析要求$: f(z)$在单连通区域D内解析
路径要求$: C$为D内任一正向简单闭曲线
推论:
解析区域内,函数积分与路径无关

闭路变形原理略,原理同下

复合闭路定理

将柯西积分定理进行扩展,将曲线C拆分为多条曲线,多条曲线共同围成一个解析区域,同样有总的复积分为0,即最外圈曲线积分等于内部曲线积分之和(均取正向):

$$\oint_C f(z)dz = \Sigma_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz$$

条件:
解析要求$: f(z)$在D内解析$, C$与C_n围成的区域全包含于多联通解析区域D
路径要求$: C_n$为C内的简单闭曲线$,$互不相交互不包含
解题:
在题目所给区域在C内除了某几个点之外处处解析时,可以通过构造以奇点为圆心,半径足够小的圆周C_n,然后可以运用公式.

柯西积分公式

由一点得整个复积分.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

条件:
$解析要求: f(z)在D内解析$
$路径要求: C为D内任一正向简单闭曲线, z_0为C内任意一点$
推论:

1. 平均值定理

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

2. $$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

   $其中C_2在C_1内部$

高阶导数公式

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

条件:
$解析条件: f(z)在C围成的闭区域D上解析$
$路径条件: C为任一正向简单闭曲线, z_0为C内一点$
$n为正整数$

解析函数与调和函数的关系

调和函数定义: $\phi(x,y)有: \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$

$一函数在D内解析 \leftrightarrow 函数的实部和虚部都是D内的调和函数$
$若f(z)=u+iv在D内解析, 则u,v互为共轭调和函数$

解析函数的构造(求共轭调和函数)

三种方法的基本逻辑都是通过C-R方程和调和函数定义来求解共轭.

1. 偏积分法
   由 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ 得 : $v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy$;
   由 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ 得 : $v=\int\frac{\partial u}{\partial y}dx$;
   二式联立消去常量可得.
2. 线积分法
   通过求v的全微分$dv=\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial x}dx=\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx$得 :
   $v=\int_{x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx+c$
   作合理路径(如横平竖直)可计算v.
3. 不定积分法
   对于$f(z)$本身,有 : $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y+iv_x$
   取$f'(z)=u_x-iu_y=U(z)$或$f'(z)=v_y+iv_x=V(z)$
   则$f(z)=\int U(z)dz$或$f(z)=\int V(z)dz$
   即可通过求f'(z)得到f(z).

4 解析函数的级数表示

P75
复变第四章

复数项级数

复数的极限定义略.

复数列$\{\alpha_n\}$收敛 $\Longleftrightarrow$ 实数列$\{a_n\},\{b_n\}$同时收敛$(\alpha_n=a_n+b_n)$
复数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\ (\alpha_n=a_n+ib_n)$收敛 $\Longleftrightarrow$ 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 同时收敛
级数收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$

复数项级数绝对收敛与条件收敛定义与关系同实数项级数.

复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛 $\Longleftrightarrow$ 实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都绝对收敛.
若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 也收敛
解题:

根据定理 4.1.4,在判定复数项级数 $\sum\limits_{n=1}\alpha_n$ 是否绝对收敛时,可用两种方法:① 判定正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 是否收敛;② 分出 α_n 的实部 a_n 与虚部 b_n,判定实级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是否绝对收敛.

复变函数项级数,收敛域,发散域定义类似实变函数,略.

幂级数

定义:$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$

阿贝尔定理

类似实变函数级数.

定理 4.2.1(Abel 定理) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z=z_0(\neq 0)$ 处收敛,则在圆周 $C:|z|=|z_0|$ 的内部(即 $|z|<|z_0|$)幂级数必绝对收敛;如果在 $z=z_1(\neq 0)$ 处,幂级数发散,则在圆周 $C_1:|z|=|z_1|$ 的外部(即 $|z|>|z_1|$),幂级数必发散.

收敛半径的求法

同样类似实变函数级数,这里有比值法,根值法等方法.

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$,如果其系数 c_n 满足

1. 比值法:
   $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\rho$
2. 或根值法
   $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\rho$

则其收敛半径为:

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

(若幂级数有缺项时,不能直接套用公式求收敛半径)

幂级数的性质

代数性质

1. 线性运算(建立在两个幂级数的收敛圆交集之内)
   $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)z^n=\alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n+\beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$
2. 乘除法
   $f(z)\bullet g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0 b_n)z^n$
   $\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{a_0+a_1 z+\cdots+a_n z^n+\cdots}{b_0+b_1 z+\cdots+b_n z^z+\cdots}$

复合性质

设当 $|\xi|<r$ 时,$f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,当 $|z|<R$ 时 $\xi=g(z)$解析且$|g(z)|<r$,
则当$|z|<R$时,$f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty} a_n[g(z)]^n$

分析运算性质(可导与可积)

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是收敛圆内的解析函数:

- 逐项可导,收敛半径不变:
  $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$
- 逐项可积,收敛半径不变:
  $\int_0^z f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$

幂函数的泰勒展开

泰勒展开定理

如果函数 $f(z)$在圆域 $D_:\mid z-z_0\mid<R$ 内解析,则可以唯一地展开成幂级数 :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

其中

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots$$

解题:

1. 直接法
   直接求解上式中的c_n
2. 间接法
   利用常见幂级数的展开式进行运算,将目标函数展开

常见幂级数的泰勒展开

$$\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,\quad \mid z\mid<+\infty$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^n}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad \mid z\mid<+\infty$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad \mid z\mid<+\infty$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots,\quad |\, z\,|<1$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,\quad |\, z\,|<1$$

$$\frac{1}{(1+z)^2}=1-2z+3z^2+\cdots+(-1)^n nz^{n-1}+\cdots,\quad |\, z\,|<1$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots,\quad |\, z\,|<1$$

洛朗级数

洛朗级数

$$\text{形如}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n\text{的级数称为洛朗级数}$$

其中z_0, c_n是复常数,c_n称为级数的系数.
可将洛朗级数拆分为正幂项(含常数项)和负幂项:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}(z-z_0)^{-n}=\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots$$

洛朗展开定理

如果$f(z)$在圆环域$D: R_1|z-z_0|<R_2$内系敛下,则在D内$f(z)$课唯一地展开为洛朗级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

其中,$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots, C$为$D$内围绕点$z_0$的任意一条正向简单闭

解题:
同泰勒级数,直接法+间接法.

5 留数定理及其应用

[P99]

孤立奇点

定义:
若$f(z)$在z_0处不解析,但在其某个去心邻域内解析,则称z_0为$f(z)$的孤立奇点;在这个解析的环域内,可以将$f(z)$展开为洛朗级数:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

该展开后续用于孤立奇点的分类.

孤立奇点分类

可去奇点

若洛朗展开式中不包含$(z-z_0)$的负幂项(即这个洛朗级数实质上是泰勒级数),则称该奇点为可去奇点.
可去奇点的充要条件:

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\alpha(\text{有限复数})$$

极点

若洛朗展开式中只含有限多个$(z-z_0)$的负幂项,且其中最高次幂为$(z-z_0)^{-m}$,则称该极点为m级极点.
极点的充要条件:

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$$

m级极点的充要条件:

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z),\text{其中},\varphi(z)\text{在 }z_0\text{ 解析且 }\varphi(z_0)\neq 0$$

本性奇点

若洛朗展开式中含有无穷多个$(z-z_0)$的负幂项,则称其为本性奇点.
本性奇点的充要条件:

$$\lim_{z\to z_0}f(z)\text{不存在,也不为}\infty$$

零点

定义:
设函数$f(z)$在z_0的邻域内解析,且有$f(z_0)=0$,则称z_0为零点,若此处$f(z)$有泰勒展开

式:

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots,\quad c_m\neq 0$$

则称其为m级零点.
m级零点的充要条件:

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\quad 而f^{(m)}(z_0)\neq 0$$

一个不恒为零的解析函数,其零点是孤立的.

零点和极点的关系

若$P(z),Q(z)$分别为z_0处的m级,n级零点,则
$P(z)\cdot Q(z)$为z_0处的$(m+n)$级零点;
记$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$,可得:

$$f(z)为\begin{cases}(m-n)级零点, & m>n,\\ 可去奇点, & m=n,\\ (n-m)级极点, & m<n.\end{cases}$$

函数在无穷远处的性态

将∞理解为一个点即可,其他性质一样,可以作变换$t=\frac{1}{z}$来处理.

留数定理

定义:
设z_0是$f(z)$的孤立奇点,$f(z)$在圆环域D内解析,则称积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_c f(z)\mathrm{d}z$$

为$f(z)$在z_0处的留数;其中C为D内围绕点z_0的任一正向简单闭曲线.也记作

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]$$

可知,留数同时也是圆环域内$f(z)$的洛朗展开中次数为-1的负幂项的系数c_{-1}.
解题:

1. 可去奇点的留数为0
2. 若z_0是$f(z)$的m级极点,有公式可以求留数:

$$c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}$$

3. 若$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}, P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0$,则

$$Res[f(z),z_0]=\frac{P(z)}{Q'(z)}|_{z=z_0}$$

由留数定理推高阶导数公式

由上面的c_{-1}公式,结合留数定义式,使其中$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$,则可得高阶导数公式.

留数第一定理

解析区域内，一曲线的积分是其包围区域内所有孤立奇点的留数$*2\pi i$的求和.

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

留数第二定理

无穷远点的留数

定义:

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^-}f(z)\mathrm{d}z$$

其中C为圆环域$R<|z|<+\infty$内绕 $z=0$ 的任一正向简单闭曲线
即

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\mathrm{d}z=-c_{-1}$$

同时有

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

第二留数定理

$f(z)$在所有奇点处的留数之和为0.

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0$$

解题:

运用第二留数定理,当z_k数量很多或者很难算的时候,通过计算无穷远点处留数间接计算.

7 傅里叶变换

P154
积分变换的定义:
若

$$F(\alpha)=\int_a^b f(t)\cdot k(t,\alpha)\cdot dt$$

即有

$$f(t)\xrightarrow{k(t,\alpha)}F(\alpha)$$

则称$f(t)$为像原函数,$F(\alpha)$为像函数,$k(t,\alpha)$为核函数

将上面对于积分变换的定义式中,积分范围$(a,b)\to(-\infty,+\infty)$,核函数$k(t,\omega)=e^{-j\omega t}$(此处的$j$就是平时复数中的$i$, 使用符号不同而已),则可得傅里叶变换:

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-jwt}dt$$

实际工程中,t,ω通常表示时间和频率,傅里叶变换可将时域转化为频域.

傅里叶变换的理论基础和基本性质

周期函数

一个周期函数如果满足**狄利克雷条件**:

$$\begin{aligned}&(1)\text{在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;}\\&(2)\text{在一个周期内至多有有限个极值点,}\end{aligned}$$

则有:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nwt+b_n\sin nwt)$$

其中:

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\mathrm{d}t,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\cos n\boldsymbol{\omega}_T t\mathrm{d}t=a_{-n},\quad n=1,2,3,\cdots,$$
$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\sin n\boldsymbol{\omega}_T t\mathrm{d}t=-b_{-n},\quad n=1,2,3,\cdots.$$

或者写成指数形式:

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_T t}$$

其中：

$$c_0=\frac{a_0}{2},c_n=\frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2},n=\pm1,\pm2,\cdots$$

也可以写成：

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-jnw_T t}dt$$

故级数也可以写成:

$$f_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-jnw_T t}dt\right]e^{jnw_T t}$$

非周期函数

对非周期函数的一部分(要研究的部分)进行周期延拓,当取的这一部分的长度趋于无穷大,则可得非周期函数的傅里叶级数.
非周期函数需要满足的条件:

$$\begin{aligned}&(1)f(t)\text{在任一有限区间上满足}Dirichlet\text{条件}\\&(2)f(t)\text{在}(-\infty,+\infty)\text{上绝对可积,即}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt\text{收敛}\end{aligned}$$

则有傅里叶积分公式:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-jwt}dt\right]e^{jwt}dw$$

傅里叶变换及其逆变换

对上式,称其中的

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

为傅里叶变换,记作$\mathscr{F}[f(t)]$.
对应地,有:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

称为傅里叶逆变换,记作$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$.
则称$F(\omega)$为 $f(t)$的像函数, 称 $f(t)$为 $F(\omega)$的像原函数.

δ函数及广义傅里叶变换

δ函数(单位脉冲函数)定义:

$$\delta(t)\begin{cases}\infty,t=0\\0,t\neq 0\end{cases}$$

同时有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

Heaviside函数(单位阶跃函数)定义:

$$u\left(t\right)=\begin{cases}0, & t<0,\\1, & t>0,\end{cases}$$

显然有:$\frac{du}{dt}=\delta(t)$,或者反过来写$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=u(t)$

性质

1. 筛选性质

$$\text{对任一连续函数}f(t),\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$$

   更一般地,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

2. 导数性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta'(t)dt=-f'(0)$$

3. 缩放性质

$$\delta(at)=\frac{1}{\mid a\mid}\delta(t)$$

4. 偶函数

傅里叶变换常见公式

对于δ函数:

$$\delta(t)\leftrightarrow 1$$

$$\delta(t-t_0)\leftrightarrow e^{-i\omega t_0}$$

$$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{i\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

对于单位阶跃函数:

$$\mathscr{F}\left[u\left(t\right)\right]=\frac{1}{i\omega}+\pi\delta\left(\omega\right)$$

对正余弦函数:

$$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=\pi i[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

傅里叶变换性质

1 线性性质

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]&=\alpha\mathscr{F}\left[f_1(t)\right]+\beta\mathscr{F}\left[f_2(t)\right]\\&=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega),\\\mathscr{F}^{-1}\left[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)\right]|&=\alpha\mathscr{F}^{-1}\left[F_1(\omega)\right]+\beta\mathscr{F}^{-1}\left[F_2(\omega)\right]\\&=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t),\end{aligned}$$

2 位移性质

$$\mathscr{F}[f(t-b)]=\mathrm{e}^{-j\omega b}F(\omega)$$

$$F(\omega-\omega_0)=\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}f(t)]$$

3 微分性质

$$\mathscr{F}[f'(t)]=\mathrm{j}\omega F(\omega)$$

$$F'(\omega)=\mathscr{F}[-\mathrm{j}tf(t)]$$

$$t^n f(t)\leftrightarrow j^n F^{(n)}(w)$$

更一般地,

$$\mathscr{F}\left[f^{(n)}(t)\right]=(\mathrm{j}\omega)^{n}F(\omega),\quad n=1,2,\cdots$$

$$F^{(n)}(\omega)=\mathscr{F}[(-\mathrm{j}t)^{n}f(t)],\quad n=1,2,\cdots$$

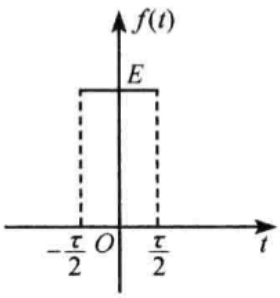
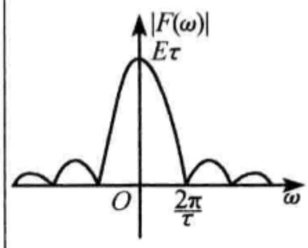
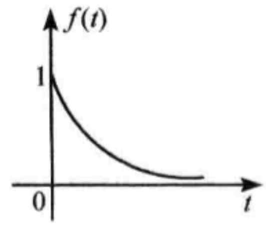
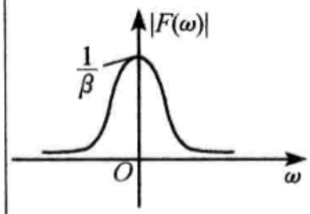
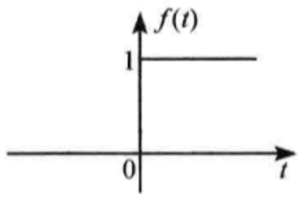
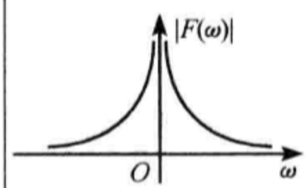
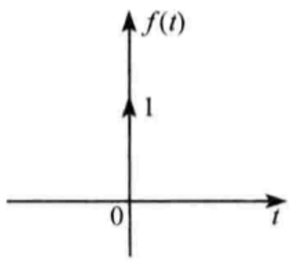
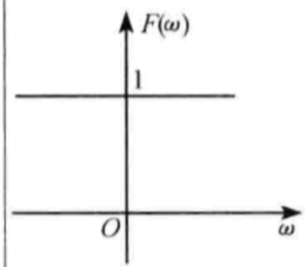
4 积分性质

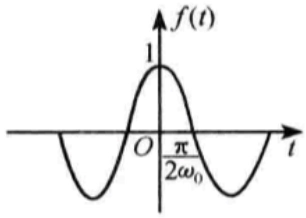
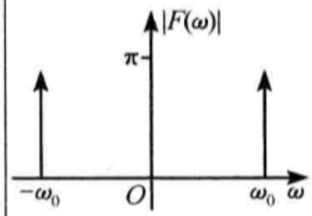
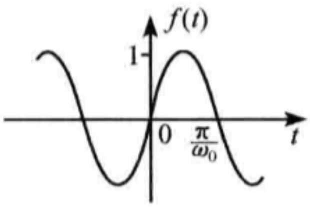
$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{i\omega}F(\omega).$$

5 相似性质

$$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{\mid a\mid}F\left(\frac{\omega}{a}\right),\quad a\neq 0\text{ 为常数}$$

附表图片:常见傅里叶变换

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函　数	图　像	频　谱	图　像
1	矩形单脉冲 $f(t)=\begin{cases}E, & \lvert t\rvert\leqslant\frac{\tau}{2},\\ 0, & 其他\end{cases}$		$2E\dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$	
2	指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ $(\beta>0)$		$\dfrac{1}{\beta+j\omega}$	
3	单位阶跃函数 $f(t)=u(t)$		$\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	
9	单位脉冲函数 $f(t)=\delta(t)$		1	

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函　数	图　像	频　谱	图　像
11	$f(t)=\cos\omega_0 t$		$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	
12	$f(t)=\sin\omega_0 t$		$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	同上图
14	$u(t)\cdot t$		$-\frac{1}{\omega^2}+\pi\delta'(\omega)j$	

解题

基本逻辑是背常见公式,然后依据性质进行计算.

卷积

定义:

要求:两函数在$(-\infty,+\infty)$上有定义,则其卷积为

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

卷积的性质

$$\begin{aligned}
&(1)\text{交换律:}f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)\\
&(2)\text{结合律:}[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]\\
&(3)\text{分配率:}[k_1f_1(t)+k_2f_2(t)]*f_3(t)=k_1[f_1(t)*f_3(t)]+k_2[f_2(t)*f_3(t)]\\
&(4)\frac{d(f_1*f_2)}{dt}=f_1*\frac{df_2}{dt}=\frac{df_1}{dt}*f_2\\
&(5)\text{卷积不等式:}|f_1(t)\star f_2(t)|\leqslant|f_1(t)|\star|f_2(t)|\\
&(6)\text{平移性质：}f_1(t-\alpha)\star f_2(t-\beta)=(f_1\star f_2)(t-\alpha-\beta)\\
&(7)\text{坐标放缩性质：}f_1(at)\star f_2(at)=\frac{1}{|a|}(f_1\star f_2)(at)
\end{aligned}$$

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

将导数和积分理解为卷积

$$f'(t) = f'(t) * \delta(t) = f(t) * \delta'(t)$$

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t) dt$$

可见可以用脉冲函数和阶跃函数的卷积操作来等价于导数和积分.

卷积定理

$$\mathscr{F}[f_1(t) \star f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega)$$
$$\mathscr{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}[F_1(\omega) \star F_2(\omega)]$$

8 拉普拉斯变换

P197
定义:
将积分变换定义式:

$$F(\alpha) = \int_a^b f(t) \cdot k(t, \alpha) \cdot dt$$

中有$(a, b) \to (0, +\infty)$,$k(t, s) = e^{-st}$时,可得拉普拉斯变换公式:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

同样地,$F(s)$称为像函数,$f(t)$称为像原函数.

可见,拉普拉斯变换只考虑t=0之后的信号.

拉普拉斯变换的理论基础

定义:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

拉普拉斯变换和傅里叶变换的关系:

$$\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{F}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}].$$

其中$s = \beta + j\omega$.

函数$u(t)$为拉普拉斯变换的单位函数.

拉普拉斯变换存在的条件

拉普拉斯变换存在的条件:

(1)在$t \geqslant 0$的任一有限区间上分段连续;
(2) 当 $t \to +\infty$时, $f(t)$的增长速度不超过某一指数型函数, 即存在常数 $M > 0$ 及$c_0 \geqslant 0$, 使得
$| f(t) | \leqslant M e^{c_0 t}, \quad 0 \leqslant t < +\infty (8.1.4)$
成立, 则
(i) 函数 $f(t)$的拉普拉斯变换在 $\mathrm{Re}(s) > c_0$ 上存在, 而且 $\mathscr{L}[f(t)]$的积分表达式绝批敛;
(ii)像函数 $F(s)$在 $\mathrm{Re}(s) > c_0$ 上解析,且有 $F'(s) = \mathscr{L}[-tf(t)]$, 其中 c_0 称为 $f(t)$的增长指数.

常见拉普拉斯变化公式

脉冲, 阶跃函数 :

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$
$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

基本函数 :

$$1 \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$
$$e^{at} \longleftrightarrow \frac{1}{s-a}$$
$$t^m \longleftrightarrow \frac{m!}{s^{m+1}}$$
$$t^m e^{at} \longleftrightarrow \frac{m!}{(s-a)^{m+1}}$$
$$\sin at \longleftrightarrow \frac{a}{s^2+a^2}$$
$$\cos at \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+a^2}$$

拉普拉斯变换的性质

1 线性性质

$$\mathscr{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathscr{L}[f_1(t)] + \beta \mathscr{L}[f_2(t)],$$
$$\mathscr{L}^{-1}[\alpha F_1(s) + \beta f_2(s)] = \alpha \mathscr{L}^{-1}[F_1(s)] + \beta \mathscr{L}^{-1}[F_2(s)].$$

2 位移性质

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s), \quad \tau \geqslant 0 \text{ 为常数.}$$

$$\mathscr{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a), \quad \mathrm{Re}(s-a) > c_0.$$

3 微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$F'(s) = \mathscr{L}[-tf(t)]$$

一般地,有:

$$\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n\mathrm{F}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$F^{(n)}(s) = \mathscr{L}[(-t)^n f(t)], \quad n = 1, 2, \cdots$$

4 积分性质

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}\,t\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\int_s^\infty F(s)\mathrm{d}s = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

一般地,有:

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t \cdots \int_0^t}_{n次} f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s^n}F(s)$$

$$\underbrace{\int_s^\infty \mathrm{d}s \int_s^\infty \mathrm{d}s \cdots \int_s^\infty}_{n次} F(s)\mathrm{d}s = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]$$

5 相似性质

$$\mathscr{L}[f(ct)] = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0, 为常数.$$

卷积

当函数满足$t < 0$时, $f_1(t) = f_2(t) = 0$,则可将卷积公式携程拉普拉斯变换的形式:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F_1(s) \cdot F_2(s)\right] = f_1(t) \star f_2(t)$$

拉普拉斯逆变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s, \quad t > 0$$

反演积分的计算方法:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\beta-\mathrm{j}\infty}^{\beta+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},s_k],$$

即

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},s_k],\quad t>0$$