数字信号处理

第7讲：离散傅立叶变换

洪明坚

重庆大学软件学院

April 24, 2025

目录

Outline

引入

- 实际问题中处理的信号，一般都有有限长度。
  - 将一段有限长的时域序列信号，变换为对应的有限长的频域序列，反之亦然。
  - 以方便计算机或数字电路实现
- 因此，需要一种在时域和频域都是离散的、且有限长的变换
  - 离散傅立叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)是其中最重要的变换。

引入

- 设$x[n]$是一个有限长信号，即存在一个整数N_1，在$0 \le n \le N_1 - 1$外有$x[n] = 0$。
  - $x[n]$的傅立叶变换为$X(e^{j\omega})$
- 取$N \ge N_1$，构造一个周期为N的信号$\tilde{x}[n]$，使得$\tilde{x}[n]$在一个周期内等于$x[n]$，即以N为周期进行延拓

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

  - 为简洁起见，记

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]$$

- 则$\tilde{x}[n]$的傅立叶级数系数

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

  - $\tilde{X}[k] = \tilde{X}[k + N]$

DFT

- 长度为N_1的信号$x[n]$的N点DFT，$N \geq N_1$

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}, k = 0, 1, \ldots, N-1$$

  - 显然，$\tilde{X}[k] = X[((k))_N]$
- 可以从$X[k]$中恢复$x[n]$，即离散傅立叶逆变换(IDFT)

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{jk(2\pi/N)n}, n = 0, 1, \ldots, N-1$$

- 记为

$$x[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X[k]$$

DFT：矩阵表示

- 记

$$\mathbf{x} = [x[0], x[1], \ldots, x[N-1]]^T$$
$$\mathbf{X} = [X[0], X[1], \ldots, X[N-1]]^T$$

$$\mathbf{D}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-2} & W_N^{2(N-2)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-2)} \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}, W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

DFT：矩阵表示

- DFT

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}_N \mathbf{x}$$

- IDFT

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}_N^{-1} \mathbf{X}$$

且

$$\mathbf{D}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{D}_N^*$$

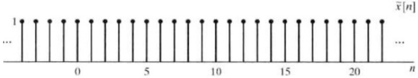
Questions

- Any questions?

例子

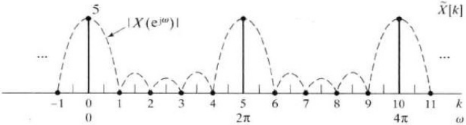
- 计算如下$x[n]$的5点DFT

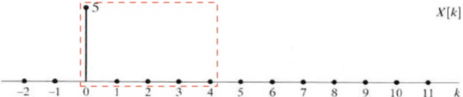
- 构造$\tilde{x}[n]$如下



- 则

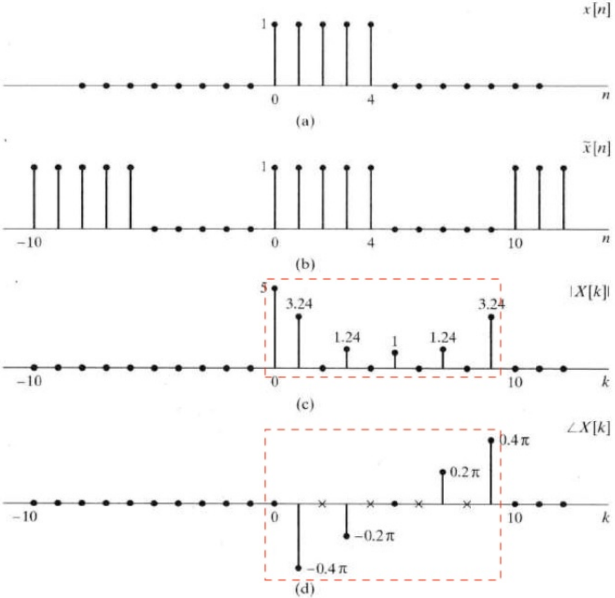
$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi k/5)n} = \begin{cases} 5 & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 0 & otherwise \end{cases}$$





例子

- 10点DFT



x[n]
1
0
4
n
(a)
x̃[n]
1
−10
0
4
10
n
(b)
|X[k]|
5
3.24
1.24
1
1.24
3.24
−10
0
10
k
(c)
∠X[k]
0.4π
0.2π
−10
0
10
k
−0.2π
−0.4π
(d)

与DTFT的关系

- 根据DTFT的定义，长度为N的序列$x[n]$的傅立叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

  $X(e^{j\omega})$以2π为周期

- 对一个周期内的$X(e^{j\omega})$进行等间隔采样，即

$$X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n} = X[k], k = 0, 1, \ldots, N-1$$

  也就是说，$x[n]$的N点DFT是对一个周期内的$X(e^{j\omega})$以等间隔$2\pi/N$采样的结果

Questions

- Any questions?

Outline

性质

- 线性：若$x_1[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X_1[k]$, $x_2[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X_2[k]$，则

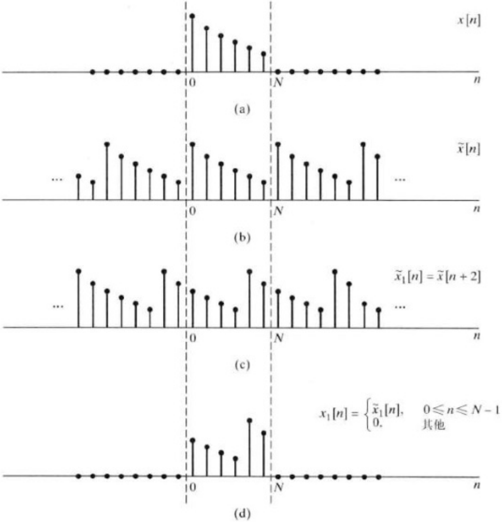
$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} aX_1[k] + bX_2[k]$$

注意：若$x_1[n]$的长度是N_1，且$x_2[n]$的长度是N_2，要以$N \geq max(N_1, N_2)$点计算$x_1[n]$和$x_2[n]$的DFT。

性质

- 循环位移

$$x[((n-m))_N], 0 \le n \le N-1 \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} e^{-j(2\pi k/N)m} X[k] = W_N^m X[k]$$



性质

- 循环卷积(Circular convolution)：若$x_1[n]$和$x_2[n]$的长度分别是N_1和N_2，定义N点循环卷积

$$x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[((n-m))_N], 0 \leq n \leq N-1$$

其中$N \geq max(N_1, N_2)$。则

$$x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_1[k] X_2[k]$$

根据对偶性质，反过来也成立

$$x_1[n] x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} \frac{1}{N} X_1[k] \textcircled{N} X_2[k]$$

性质

- 汇总

表 8.2　离散傅里叶变换的性质总结

有限序列(长度为 N)	N 点 DFT(长度为 N)
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1[k]+bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km}X[k]$
6. $W_N^{-\ell n}x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_{\text{ep}}[k]=\frac{1}{2}\{X[((k))_N]+X^*[((-k))_N]\}$
12. $\mathrm{j}\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_{\text{op}}[k]=\frac{1}{2}\{X[((k))_N]-X^*[((-k))_N]\}$
13. $x_{\text{ep}}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
14. $x_{\text{op}}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x^*[((-n))_N]\}$	$\mathrm{j}\mathcal{I}m\{X[k]\}$
仅当$x[n]$为实数时性质15至性质17成立	
15. 对称性	$\begin{cases} X[k]=X^*[((-k))_N] \\ \mathcal{R}e\{X[k]\}=\mathcal{R}e\{X[((-k))_N]\} \\ \mathcal{I}m\{X[k]\}=-\mathcal{I}m\{X[((-k))_N]\} \\ \lvert X[k]\rvert=\lvert X[((-k))_N]\rvert \\ \angle\{X[k]\}=-\angle\{X[((-k))_N]\} \end{cases}$
16. $x_{\text{ep}}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
17. $x_{\text{op}}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x[((-n))_N]\}$	$\mathrm{j}\mathcal{I}m\{X[k]\}$

Questions

- Any questions?

Outline

循环卷积

- $x_1[n]$和$x_2[n]$的N点循环卷积

$$x_1[n]Ⓝx_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N], 0 \leq n \leq N-1$$

- 具体计算
  - 令$n=0$，当$m=0,1,\ldots,N-1$时

$$\begin{aligned}&\{x_2[((0))_N], x_2[((-1))_N], x_2[((-2))_N], \ldots, x_2[((-N+1))_N]\}\\ &= \{x_2[0], x_2[N-1], x_2[N-2], \ldots, x_2[1]\}\end{aligned}$$

  - 令$n=1$，当$m=0,1,\ldots,N-1$时

$$\begin{aligned}&\{x_2[((1))_N], x_2[((0))_N], x_2[((-1))_N], \ldots, x_2[((-N+2))_N]\}\\ &= \{x_2[1], x_2[0], x_2[N-1], \ldots, x_2[2]\}\end{aligned}$$

  - 以此类推

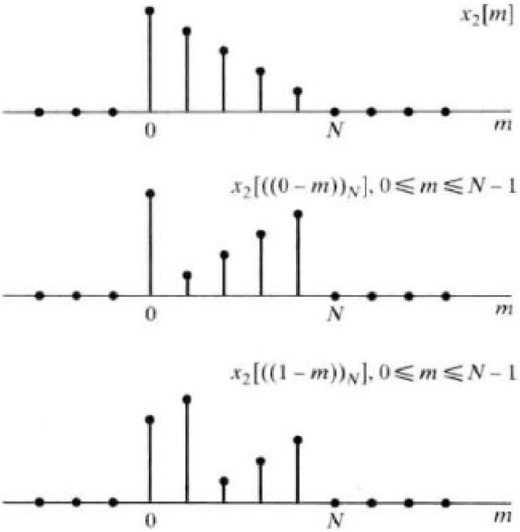
循环卷积

- N点循环卷积的右边可以写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x_2[0] & x_2[N-1] & x_2[N-2] & \dots & x_2[1] \\ x_2[1] & x_2[0] & x_2[N-1] & \dots & x_2[2] \\ x_2[2] & x_2[1] & x_2[0] & \dots & x_2[3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2[N-2] & x_2[N-3] & x_2[N-4] & \dots & x_2[N-1] \\ x_2[N-1] & x_2[N-2] & x_2[N-3] & \dots & x_2[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ x_1[2] \\ \dots \\ x_1[N-2] \\ x_1[N-1] \end{pmatrix}$$

循环卷积

- 图示



$x_2[m]$
0
N
m
$x_2[((0-m))_N],0\leqslant m\leqslant N-1$
0
N
m
$x_2[((1-m))_N],0\leqslant m\leqslant N-1$
0
N
m

与线性卷积的关系

- 根据定义

$$x_L[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1[m]x_2[n-m], n \in \mathbb{Z}$$

$$x_C[n] = x_1[n] \circledN x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N], 0 \leq n \leq N-1$$

其中，

$$N \geq max(N_1, N_2)$$

$$x_2[((n))_N] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2[n+rN]$$

与线性卷积的关系

- 所以

$$\begin{aligned}
x_C[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N] \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2[n-m+rN] \\
&= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[n-m+rN], 0 \leq n \leq N-1
\end{aligned}$$

根据线性卷积的定义，

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[n-m+rN] = x_L[n+rN]$$

所以

$$x_C[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_L[n+rN], 0 \leq n \leq N-1$$

与线性卷积的关系

- 再写一遍公式

$$x_C[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_L[n+rN], 0 \le n \le N-1$$

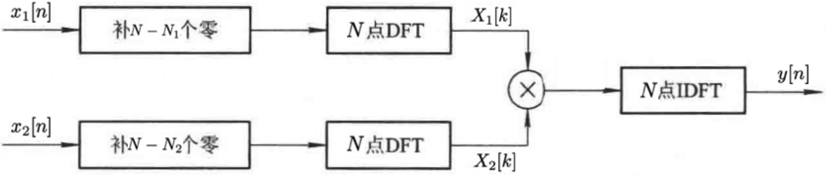
- 也就是说，把线性卷积$x_L[n]$以N为周期进行延拓，然后取$0, 1, 2, \ldots, N-1$共N个点，就是N点循环卷积。
    - 线性卷积$x_L[n]$的长度是$N_1 + N_2 - 1$。所以
        - 如果$N < (N_1 + N_2 - 1)$，那么$x_C[n]$将被相邻的$x_L[n]$混叠。
        - 因此，当$N \ge (N_1 + N_2 - 1)$时，N点循环卷积等于线性卷积

与线性卷积的关系

- 因为DFT有快速算法FFT(Fast Fourier Transform)，用DFT计算线性卷积要比直接计算快

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

取$N = N_1 + N_2 - 1$



Questions

- Any questions?

Outline

2-D DFT

- $f[x,y]$是2维离散信号(如图像)，大小为$M \times N$。
  DFT
  $$F[u,v] = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f[x,y] e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$
  IDFT
  $$f[x,y] = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F[u,v] e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$
- $$F[u,v] = |F[u,v]| e^{j\phi[u,v]}$$
  称$|F[u,v]|$为幅度谱，$\phi[u,v]$为相位谱
  $$\phi[u,v] = arctan \frac{Im\{F[u,v]\}}{Re\{F[u,v]\}}$$

性质

- 旋转：用极坐标表示

$$x = rcos\theta, y = rsin\theta, u = \omega cos\phi, v = \omega sin\phi$$

则

$$f[r, \theta + \theta_0] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} F[\omega, \phi + \theta_0]$$

即时域(其实是空域)旋转θ_0，频域也旋转相同的角度。

性质

- 可分性(Separability)

$$
\begin{aligned}
F[u,v] &= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f[x,y]e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \sum_{y=0}^{N-1} f[x,y]e^{-j2\pi vy/N} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} F[x,v]
\end{aligned}
$$

其中

$$
F[x,v] = \sum_{y=0}^{N-1} f[x,y]e^{-j2\pi vy/N}
$$

也就是说，2-D DFT可以通过1-D DFT计算：先逐行做1-D DFT，然后再逐列做1-D DFT。

Questions

- Any questions?