12. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz no necesariamente simétrica.

a) Probar que A es definida positiva si y sólo si A^t lo es.

b) Probar que A es definida positiva si y sólo si $\dfrac{A+A^t}{2}$ es simétrica definida positiva.

c) Sea $b \in \mathbb{R}^n$ no nulo y $M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ una matriz definida como:

$$M = \begin{pmatrix} AA^t & 2b \\ 0^t & 1 \end{pmatrix}$$

Probar que si A es inversible y $\|A^{-1}b\|_2^2 < 1$, entonces M es definida positiva.

a)

QVQ: A dp $\iff$ A^T dp

$$x^TAx = (\underbrace{x^TAx}_{\in\mathbb{R}})^T = x^T(x^TA)^T = x^TA^T(x^T)^T = x^TA^Tx$$

$\in\mathbb{R}$ el traspuesto de un número es ese mismo número

$$\Rightarrow \quad x^TAx = x^TA^Tx$$

$$x^TAx > 0 \ \forall x \neq 0 \iff x^TA^Tx > 0 \ \forall x\neq 0$$

$$\therefore \ A \text{ dp} \iff A^T \text{ dp}$$

b)

QVQ: A dp $\iff$ $\frac{1}{2}(A+A^T)$ sdp

$$x^T\tfrac{1}{2}(A+A^T)x = \tfrac{1}{2}x^TAx + \tfrac{1}{2}x^TA^Tx = \tfrac{1}{2}x^TAx + \tfrac{1}{2}x^TAx = x^TAx$$

inciso a: $x^TAx = x^TA^Tx$

$$\Rightarrow \ x^T\tfrac{1}{2}(A+A^T)x = x^TAx$$

$$x^T\tfrac{1}{2}(A+A^T)x > 0 \ \forall x\neq 0 \iff x^TAx > 0 \ \forall x \neq 0$$

$$\therefore \ A \text{ dp} \iff \tfrac{1}{2}(A+A^T) \text{ dp}$$

Falta ver que A dp $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(A+A^T)$ simétrica.

QVQ: $\frac{1}{2}(A+A^T) = \frac{1}{2}(A+A^T)^T$

suma de matrices conmutativa

$$\frac{1}{2}(A+A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T+(A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T+A) \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}(A+A^T)$$

$\therefore$ $\frac{1}{2}(A+A^T)$ es simétrica sin ninguna hipótesis sobre A.

c)

Usando inciso b) basta ver que $\frac{1}{2}(M+M^T)$ es sdp y entonces M resulta dp.

$(AA^T)^T = AA^T$

$$\frac{1}{2}(M+M^T) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{bmatrix} AA^T & 2b \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} AA^T & 0 \\ 2b^T & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2AA^T & 2b \\ 2b^T & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^T & b \\ b^T & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\frac{1}{2}(M+M^T)$ es simétrica.

Para ver que $\frac{1}{2}(M+M^T)$ es dp vamos a buscar la factorización de Cholesky. Si existe, entonces $\frac{1}{2}(M+M^T)$ es sdp y luego M dp.

$$\frac{1}{2}(M+M^T) = LL^T \iff \begin{bmatrix} AA^T & b \\ b^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L} & 0 \\ \ell^T & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{L}^T & \ell \\ 0^T & \alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} n\times n & n\times 1 \\ 1\times n & 1\times 1 \end{bmatrix}$$

$L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ tri. inf. con diagonal > 0

$\tilde{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tri. inf. con diagonal > 0

$\ell \in \mathbb{R}^n$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} AA^T = \tilde{L}\tilde{L}^T \\ b = \tilde{L}\ell & \Leftrightarrow \quad \ell = \tilde{L}^{-1}b \\ b^T = \ell^T\tilde{L}^T & \Leftrightarrow \quad \ell^T = b^T(\tilde{L}^T)^{-1} \\ 1 = \ell^T\ell + \alpha^2 \end{cases}$$

Veamos que la submatriz AA^T es sdp.

- $AA^T = (AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T \quad \Rightarrow AA^T$ simétrica

- $x^T AA^T x = (A^Tx)^T(A^Tx) = \|A^Tx\|_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \Rightarrow AA^T$ dp

Luego $\tilde{L}\tilde{L}^T$ es la factorización de Cholesky de AA^T.

Como $b \neq 0$ y $\tilde{L}$ inversible por ser tri. inf. con diagonal > 0:
$b = \tilde{L}\ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \tilde{L}^{-1}b$ única solución para ℓ.

Solo falta ver $1 = \ell^T\ell + \alpha^2$ tiene única solución.

$$\begin{aligned} 1 = \ell\ell^T + \alpha^2 \quad & \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 - \ell\ell^T = 1 - \ell^T\ell \\ & \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 - b^T(\tilde{L}^T)^{-1}\tilde{L}^{-1}b \\ & \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 - b^T(\tilde{L}\tilde{L}^T)^{-1}b \\ & \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 - b^T(AA^T)^{-1}b \qquad \tilde{L}\tilde{L}^T = AA^T \\ & \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 - b^T(A^T)^{-1}A^{-1}b \\ & \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 - b^T(A^{-1})^T A^{-1}b \\ & \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 - (A^{-1}b)^T(A^{-1}b) \\ & \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 - \underbrace{\|A^{-1}b\|_2^2}_{<1 \text{ por hipótesis}} \end{aligned}$$

Hay solución para $\alpha = \sqrt{1 - \|A^{-1}b\|_2^2}$.

$\therefore \ \frac{1}{2}(M + M^T)$ es sdp entonces M es dp.