8. Supongamos que $Ax = y$. Probar que un vector $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ satisface $A\hat{x} = y$ si y sólo si $x - \hat{x} \in Nu(A)$. Demostrar que el problema de cuadrados mínimos tiene solución única si y sólo si $Nu(A) = \{0\}$.

QVQ: $A\hat{x} = y \iff (x - \hat{x}) \in Nu(A)$

($\Rightarrow$)

Sabemos que valen ambas igualdades:

$$\begin{cases} Ax = y \\ A\hat{x} = y \end{cases}$$

Luego $Ax = A\hat{x}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow Ax - A\hat{x} = 0 \\ &\Rightarrow A(x - \hat{x}) = 0 \\ &\Rightarrow (x - \hat{x}) \in Nu(A) \end{aligned}$$

($\Leftarrow$)

Sabemos que $(x - \hat{x}) \in Nu(A)$.

$$\begin{aligned} (x - \hat{x}) \in Nu(A) &\Rightarrow A(x - \hat{x}) = 0 \\ &\Rightarrow Ax - A\hat{x} = 0 \\ &\Rightarrow A\hat{x} = Ax \\ &\Rightarrow A\hat{x} = y \end{aligned}$$

$Ax = y$ por hipótesis

Tenemos un problema de cuadrados: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2^2$.

Sea $y = Ax$ tq $\|y-b\|_2^2$ es mínimo.

QVQ: $\exists! x$ tq $Ax = y \iff Nu(A) = \{0\}$

($\Rightarrow$)

Sabemos que x es la única solución al problema de cuadrados mínimos: $Ax = y$.

Supongamos que $Nu(A) \neq \{0\}$. Luego existe $\hat{x} \in Nu(A)$ no nulo.

$$A(x-\hat{x}) = Ax - A\hat{x} = y - 0 = y$$

Entonces $(x-\hat{x}) \neq x$ también es solución. Absurdo pues hay una única solución al problema de cuadrados mínimos.

$\therefore\ Nu(A) = \{0\}$

($\Leftarrow$)

Sabemos que $Nu(A) = \{0\}$.

Supongamos que el problema de cuadrados mínimos no tiene solución única. Existen $x, \hat{x}$ distintos tq $Ax = y \wedge A\hat{x} = y$.

Por la demo anterior: $Ax = y \wedge A\hat{x} = y \iff (x-\hat{x}) \in Nu(A)$.

$$x \neq \hat{x} \Rightarrow x - \hat{x} \neq 0 \wedge (x-\hat{x}) \in Nu(A)$$
$$\Rightarrow Nu(A) \neq \{0\} \text{ Absurdo}$$

$\therefore\ \exists! x$ tq $Ax = y$