

14. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Demostrar que $\text{tr}(A) = \sum_i \lambda_i$ (usar que $\text{tr}(BC) = \text{tr}(CB)$ para C y B convenientes) y que $\det(A) = \prod_i \lambda_i$.

A diagonalizable $\Rightarrow \exists D$ diagonal y $\exists S$ inversible tq $A = SDS^{-1}$.

Además $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ y $S = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ con $v_1 \dots v_n$ base de autovectores.

Preguntar, creo que no necesariamente es base.

Vale que $\text{tr}(BC) = \text{tr}(CB) \forall B, C$. Tomemos $B = SD$, $C = S^{-1}$.

$$\text{tr}(SDS^{-1}) = \text{tr}(S^{-1}SD) = \text{tr}(ID) = \text{tr}(D)$$

$$\text{Luego } \text{tr}(A) = \text{tr}(SDS^{-1}) = \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n d_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\therefore \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(SDS^{-1}) = \det(S) \cdot \det(D) \cdot \det(S^{-1}) \\ &= \det(S) \cdot \det(D) \cdot \det(S)^{-1} \\ &= \underbrace{\det(S) \cdot \det(S)^{-1}}_{=1} \cdot \det(D) = \det(D) \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \det(A) = \det(D) = \prod_{i=1}^n d_{ii} = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

$$\therefore \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$