17. Para cualquier $u, v \in \mathbb{R}^n$, sea $A = uv^t$.

a) Hallar $Im(A)$ y $Nu(A)$.

b) Probar que $A^2 = tr(A) \cdot A$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \quad v^t \quad \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \quad A \quad \\ \\ \end{bmatrix} \end{array}$$

a)

$$A = uv^t = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} uv_1 & & uv_n \\ \parallel & & \parallel \end{array} \\ \begin{bmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & \cdots & u_2 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n v_1 & \cdots & u_n v_n \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 u & \cdots & v_n u \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Las columnas de A son $v_1 u, \cdots, v_n u$.

$Im(A) = \{ Ax : x \in \mathbb{R}^n \}$

Ax es una combinación lineal de las columnas de A con coeficientes $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

$$Ax = x_1 v_1 u + \cdots + x_n v_n u = \underbrace{(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n)}_{\alpha \in \mathbb{R}} u = \alpha u$$

$Ax = \alpha u$ es una combinación lineal de u.

$\therefore \; Im(A) = \langle u \rangle$

La $Im(A)$ es el subespacio generado por el vector u.

$Nu(A) = \{ X \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$

$$\begin{aligned} X \in Nu(A) &\iff Ax = 0 \\ &\iff uv^t x = 0 \qquad u \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad v^t \in \mathbb{R}^{1\times n} \quad x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \\ &\iff u\alpha = 0 \qquad \text{con } \alpha = v^t x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Caso $u = 0$

$A = uv^t = 0$ (matriz nula) y $u\alpha = 0 \ \forall \alpha \implies Nu(A) = \mathbb{R}^n$

Caso $u \neq 0$

$u\alpha = 0 \iff \alpha = 0 \iff v^t x = 0$

$\implies Nu(A) = \{ X \in \mathbb{R}^n : v^t X = 0 \}$

b)

QVQ: $A^2 \overset{?}{=} tr(A) \cdot A$

$$A = uv^t = \begin{bmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & \cdots & u_2v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & \cdots & u_nv_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} — u_1v^t — \\ — u_2v^t — \\ \vdots \\ — u_nv^t — \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1u & \cdots & v_nu \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$(A)_{ij} = u_i v_j$$

¿Quién es A^2?

$$A^2 = (uv^t)(uv^t)$$

$$(A^2)_{ij} = \text{fila}_i(uv^t) \cdot \text{col}_j(uv^t) = u_i v^t \cdot v_j u = \underbrace{u_i}_{\mathbb{R}^n} \underbrace{v_j}_{\mathbb{R}^n} \overbrace{v^t}^{\mathbb{R}^{1\times n}} \overbrace{u}^{\mathbb{R}^{n\times 1}}$$

¿Quién es $tr(A) \cdot A$?

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} (A)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n} v_k u_k = \overbrace{v^t}^{\mathbb{R}^{1\times n}} \overbrace{u}^{\mathbb{R}^{n\times 1}}$$

$$(tr(A) \cdot A)_{ij} = v^t u \, (A_{ij}) = v^t u \, u_i v_j$$

$\therefore \; A^2 = tr(A) \cdot A$