10. Sean α y β los parámetros obtenidos por cuadrados mínimos para la aproximación por una recta $y = \alpha x + \beta$ al conjunto de mediciones $\{(x_i, y_i)\}_{i=1\ldots n}$. Demostrar:

a) El punto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertenece a la recta de cuadrados mínimos, donde $\bar{x}$ representa el promedio de los valores $\{x_i\}$.

b) Si $\alpha = 0$, entonces la mejor aproximación (en el sentido de cuadrados mínimos) por una función constante $f(x) = \beta$ al conjunto de datos $\{y_i\}_{i=1\ldots n}$ es su promedio $\beta = \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$

c) La suma total de los errores cometidos en la estimación es cero (siendo el error total $\sum_i e_i$, con $e_i = \hat{y}_i - y_i$ el error de la i-ésima estimación, y $\hat{y}_i = \alpha x_i + \beta$).

d) Si se multiplican los valores de x_i por c, entonces α se multiplica por $1/c$.

e) Si se multiplican los valores de x_i por c, entonces β no se modifica.

f) Si se multiplican los valores de y_i por d, entonces α se multiplica por d.

g) Si se multiplican los valores de y_i por d, entonces β se multiplica por d.

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (\alpha, \beta) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2^2$$

Para obtener (α, β) usamos las ecuaciones normales.

$$A^T A (\alpha, \beta) = A^T b$$

$$\iff \begin{bmatrix} x_1 \cdots x_n \\ 1 \cdots 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdots x_n \\ 1 \cdots 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^2 \alpha + \sum_{i=1}^n x_i \beta = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \alpha + n\beta = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

a)

Para ver que $(\bar{x}, \bar{y}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i/n, \sum_{i=1}^{n} y_i/n)$ es un punto de la recta $y = \alpha x + \beta$ basta ver que $\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$ satisface las ecuaciones normales.

$$\alpha\bar{x} + \beta = \bar{y} \iff \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i/n + \beta = \sum_{i=1}^{n} y_i/n$$

$$\iff \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha x_i/n + \beta\right) n = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i/n\right) n$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha + n\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

b)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha + n\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\overset{\alpha=0}{\Rightarrow} \quad n\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \sum_{i=1}^{n} y_i/n$$

c)

QVQ $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i - y_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta - y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i + n\beta - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$= 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i + n\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Vale por las ecuaciones normales.

d) e)

Reemplazamos en las ecuaciones normales.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha X_i + n\beta = \sum_{i=1}^{n} Y_i \underset{c\neq 0}{\Leftrightarrow} \sum_{i=1}^{n} X_i c \frac{\alpha}{c} + n\beta = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

f) g)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha X_i + n\beta = \sum_{i=1}^{n} Y_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \alpha d + n\beta d = \sum_{i=1}^{n} Y_i d$$