

# Métodos Numéricos 2024

## Matriz simétrica definida positiva



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Matriz simétrica definida positiva (sdp)

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- $A = A^t$  simétrica
- $x^t A x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$

## Propiedades

- $A$  es no singular.
- $a_{ii} > 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .
- Todas submatriz principal es sdp (por lo tanto no singular).
- Existe factorización LU.
- $A \text{ sdp} \Leftrightarrow B^t A B$  es sdp con  $B$  no singular.
- La submatriz conformada por las filas 2 a  $n$  y columnas 2 a  $n$  después del primer paso de la eliminación gaussiana es sdp.
- Se puede realizar el método de eliminación gaussiana sin necesidad de permutar filas.

# Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A$  simétrica definida positiva.

$$A = LU$$

$$A^t = (LU)^t = U^t L^t$$

$$A = A^t \text{ entonces } LU = U^t L^t$$

Como  $L(L^t)$  es triangular inferior (superior) con 1s en la diagonal, es inversible.

$$LU = U^t L^t \Rightarrow U(L^t)^{-1} = L^{-1} U^t$$

$$U(L^t)^{-1} = L^{-1} U^t = D \text{ matriz diagonal}$$

$$U = DL^t$$

# Factorización de Cholesky

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A$  simétrica definida positiva.

$$A = LU = LDL^t$$

Sea  $x \neq 0$  tal que  $L^t x = e_i$ .

$$0 < x^t A x = x^t L D L^t x = e_i^t D e_i = d_{ii}$$

$$D = \sqrt{D} \sqrt{D}$$

$$A = L \sqrt{D} \sqrt{D} L^t = \tilde{L} \tilde{L}^t$$

$A = \tilde{L} \tilde{L}^t$ Factorización de Cholesky
---

# Factorización de Cholesky

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ni} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{l}_{i1} & \tilde{l}_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{l}_{n1} & \tilde{l}_{n2} & \cdots & \tilde{l}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{21} & \cdots & \tilde{l}_{n1} \\ 0 & \tilde{l}_{22} & \cdots & \tilde{l}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{l}_{ni} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{l}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{l}_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

Para  $j = 2$  a  $n$

$$\tilde{l}_{j1} = a_{j1} / \tilde{l}_{11}$$

Para  $i = 2$  a  $n - 1$

$$\tilde{l}_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{ik}^2}$$

Para  $j = i + 1$  a  $n$

$$\tilde{l}_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{jk} \tilde{l}_{ik}}{\tilde{l}_{ii}}$$

$$\tilde{l}_{nn} = \sqrt{(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{l}_{nk}^2)}$$

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Applied Numerical Linear Algebra, James Demmel, SIAM, 1997.
- Matrix Computations, Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, JHU Press, 2013.
- Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Nicholas Higham, SIAM, 2002.
- Applied Linear Algebra, Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban, Second Edition, Springer International Publishing, 2018.
- Numerical Analysis, Timohty Sauer, Pearson, 3rd Edition, 2017.
- An Introduction to Numerical Analysis, Endre Süli, David F. Mayers, Cambridge University Press, 2003.
- Numerical Linear Algebra, Lloyd N. Trefethen, SIAM, 1997.
- Fundamentals of Matrix Computations, David Watkins, Wiley, 2010.