

**Métodos Numéricos**  
2do Cuatrimestre 2024  
**Práctica 6**  
Descomposición en Valores Singulares



**DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION**  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

1. Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matriz de rango  $r$  y  $A = U\Sigma V^t$  una descomposición en valores singulares (SVD), con  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , siendo  $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0\}$  y  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ . Llamamos a  $\sigma_i$  el  $i$ -ésimo valor singular. Sean  $v_1, \dots, v_n$  las columnas de  $V$  y  $u_1, \dots, u_m$  las columnas de  $U$ . Demostrar:
  - a)  $v_1, \dots, v_n$  son autovectores de  $A^t A$ .
  - b)  $u_1, \dots, u_m$  son autovectores de  $AA^t$ .
  - c)  $\lambda_i = \sigma_i^2$  son los autovalores de  $A^t A$  asociados al autovector  $v_i$ .
2. Hallar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sea  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Llamamos  $d = \det(A)^2$  y  $f = \|A\|_F^2$ , siendo  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$  la norma Frobenius de la matriz  $A$ . Demostrar que los valores singulares de  $A$  son de la forma:

$$\sqrt{\frac{f \pm \sqrt{f^2 - 4d}}{2}}$$

4. Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $A = U\Sigma V^t$  una descomposición SVD de  $A$ .
  - a) Expresar en función de  $U$ ,  $\Sigma$  y  $V$  a las siguientes matrices:
    - i)  $A^t A$
    - ii)  $AA^t$
    - iii)  $(A^t A)^{-1} A^t$  (asumiendo  $A$  con columnas linealmente independientes)
  - b) Hallar una descomposición SVD de las siguientes matrices ( $\mathbf{0}_n$  es la matriz de ceros de  $n \times n$ ):
    - i)  $A^t$
    - ii)  $A^{-1}$  (suponiendo  $m = n$  y  $A$  inversible)
    - iii)  $\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix}$
    - iv)  $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0}_m \end{pmatrix}$
  - c) Dado  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ , expresar los valores singulares de  $(A^t A + \alpha I)^{-1} A^t$  en función de los de  $A$  y  $\alpha$ .
5. Sean dos matrices  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que:
  - a)  $A$  es inversible y sus valores singulares son iguales si y solo si es múltiplo de una matriz ortogonal.

b)  $A$  y  $B$  tienen los mismos valores singulares con multiplicidad si y solo si existen  $P, Q$  ortogonales tal que  $A = PBQ$ .

c) si  $AA^t = BB^t$  entonces existe una matriz ortogonal  $Q$  tal que  $AQ = B$ .

*Sugerencia:* Tomar descomposiciones para  $A$  y  $B$  estratégicas a partir de saber que  $AA^t = BB^t$ .

6. Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , demostrar que los valores singulares de la matriz  $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$  son  $\sqrt{1 + \sigma_i^2}$ , donde  $I_n$  es la matriz identidad de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\sigma_i$  es el  $i$ -ésimo valor singular de  $A$ .

7. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con  $A$  una matriz simétrica. Demostrar que los valores absolutos de los autovalores no nulos de  $A$  coinciden con sus valores singulares.

8. Supongamos que  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tiene columnas ortogonales  $w_1, w_2, \dots, w_n$  donde  $\|w_i\|_2 = \alpha_i > 0$ . Calcular  $A^t A$  y hallar las matrices  $U, \Sigma$  y  $V$  de una descomposición en valores singulares de  $A$ .

9. Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , con  $A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$  descomposición QR de  $A$  (con  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ). Hallar una descomposición SVD de  $A$  asumiendo que  $R = U\Sigma V^t$  es una descomposición SVD de  $R$ .

10. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\sigma > 0$ . Probar que  $\sigma$  es valor singular de  $A$  si y sólo si  $\begin{pmatrix} A & -\sigma I \\ -\sigma I & A^t \end{pmatrix}$  es singular.

11. Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matriz de rango 1. Llamamos rango de  $A$  a la dimensión del espacio generado por la imagen  $Im(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ . Sea  $u$  un vector unitario en  $Im(A)$ .

a) Demostrar que todas las columnas de  $A$  son múltiplos de  $u$ .

b) Mostrar que  $A$  se puede escribir de la forma  $A = \sigma uv^t$ , con  $v \in \mathbb{R}^n$  unitario y  $\sigma > 0$ .

c) Mostrar que existe una matriz ortogonal  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  cuya primer columna es  $u$  y una matriz ortogonal  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  cuya primer columna es  $v$ . ¿Cómo podría construir dichas matrices?

d) Deducir que toda matriz  $A$  de rango 1 tiene descomposición SVD. ¿Quién es  $\Sigma$ ?

12. Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matriz de rango  $r$  y sea  $A = U\Sigma V^t$  una descomposición SVD de  $A$ , con  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonales y  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  diagonal. Llamamos  $v_1, \dots, v_n$  a las columnas de  $V$  y  $u_1, \dots, u_m$  a las columnas de  $U$ . Probar que:

a)  $Nu(A) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$

b)  $Im(A) = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$

(*Sugerencia:* en cada caso, considerar sólo una inclusión y luego evaluar dimensiones, recordando que  $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(Nu(A)) + \dim(Im(A))$ .)

13. Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $A = U\Sigma V^t$  una descomposición SVD. Demostrar:

a)  $\|Ax\|_2/\|x\|_2$  se maximiza para  $x = v_1$ , con  $v_1$  la primer columna de  $V$ .

b)  $\|A\|_2 = \sigma_1$ . Deducir que  $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}^{\dagger\dagger}$ .

c)  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$ .

d) Si  $m = n$  y  $A$  es inversible, entonces  $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$ .

---

<sup>††</sup>Dada una matriz  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se define el *radio espectral* de  $B$  como  $\rho(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } B\}$ .

e)  $\max_i |a_{ii}| \leq \sigma_1$ .

14. Sea  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , y sea la matriz  $B = \begin{pmatrix} A \\ z^t \end{pmatrix}$ . Llamamos  $\sigma_1(C)$  al primer valor singular de cualquier matriz  $C$ . Demostrar:  $\sigma_1(A) \leq \sigma_1(B) \leq \sqrt{\sigma_1(A)^2 + \|z\|_2^2}$ .

## Resolver en computadora

i) Sea  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Si  $A = U\Sigma V^t$  es su descomposición en valores singulares con  $U$  y  $V$  ortogonales,  $\Sigma$  diagonal con elementos en la diagonal en orden decreciente,  $u_i$  las columnas de  $U$ ,  $v_i$  las columnas de  $V$  y  $\sigma_i$  los valores singulares, verificar que:

- $\|Av_1\|_2 = \sigma_1$
- $\|A\|_2 = \sigma_1$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$
- Si  $rg(A) = r$ , entonces  $A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^t$

## Funciones útiles

Tanto Matlab<sup>1</sup> como Numpy<sup>2</sup> proveen funciones para calcular la descomposición *SVD* de una matriz.

En Matlab:

```
A = [8 2; 2 4; 5 3]
[U,S,V] = svd(A)
```

En Python, usando Numpy:

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *

A = matrix([[8,2],[2,4],[5,3]], float)
U, s, V = svd(A)
```

En los dos casos, un segundo parámetro permite generar la descomposición en su forma ‘corta’.

## Referencias

- [1] J. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1997.
- [2] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, 2012.

<sup>1</sup><http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/svd.html>

<sup>2</sup><http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.linalg.svd.html>

- [3] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [4] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.