4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de A.

a) Expresar en función de U, Σ y V a las siguientes matrices:

i) A^tA

ii) AA^t

iii) $(A^tA)^{-1}A^t$ (asumiendo A con columnas linealmente independientes)

b) Hallar una descomposición SVD de las siguientes matrices (0_n es la matriz de ceros de $n \times n$):

i) A^t

ii) A^{-1} (suponiendo $m = n$ y A inversible)

iii) $\begin{pmatrix} A \\ 0_n \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} A & 0_m \end{pmatrix}$

c) Dado $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, expresar los valores singulares de $(A^tA + \alpha I)^{-1}A^t$ en función de los de A y α.

a)

$A^T = (U\Sigma V^T)^T = V(U\Sigma)^T = V\Sigma^T U^T$

i) $A^TA = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

ii) $AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$

iii) $(A^TA)^{-1}A^T = (V\Sigma^T\Sigma V^T)^{-1}V\Sigma^T U^T = (V^T)^{-1}(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^{-1}V\Sigma^T U^T$

$= V(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T U^T$

Es inversible porque rango(A) = n luego hay n valores singulares $\neq 0$ $\Rightarrow \Sigma^T\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible.

b)

i) $A^T = (U\Sigma V^T)^T = V(U\Sigma)^T = V\Sigma^T U^T$

ii) $A^{-1} = (U\Sigma V^T)^{-1} = (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$

$$\left.\begin{array}{l} m = n \Rightarrow \Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ A \text{ inversible} \Rightarrow \lambda_i \neq 0 \ \forall i = 1 \ldots n \Rightarrow \sigma_i \neq 0 \ \forall i = 1 \ldots n \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \text{ inversible}$$

iii)

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \\ n & \end{array}\!\!\begin{bmatrix} A \\ \emptyset_n \end{bmatrix}_{n} = \begin{array}{c|cc|c} & m & n & \\ \hline m & U & \emptyset_{m\times n} & m \\ n & \emptyset_{n\times m} & I_n & n \\ \hline & m & n & \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} & n \\ \hline m & \Sigma \\ n & \emptyset_n \\ \hline & n \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} & n \\ \hline n & V^T \end{array}$$

$\hat{U} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$ $\qquad$ $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times n}$

$$\hat{U}\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} U\Sigma + \emptyset_{m\times n}\emptyset_n \\ \emptyset_{n\times m}\Sigma + I_n\emptyset_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U\Sigma \\ \emptyset_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times n}$$

$$\hat{U}\hat{\Sigma}V^T = \begin{bmatrix} U\Sigma \\ \emptyset_n \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} U\Sigma V^T \\ \emptyset_n V^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \emptyset_n \end{bmatrix}$$

$\hat{U}$ es ortogonal porque las filas $1 \dots m$ y columnas $1 \dots m$ se extienden con 0s preservando la ortonormalidad. Las filas y columnas $m+1 \dots n$ son los vectores canónicos e_i con $i = m+1 \dots n$ que son ortonormales entre sí y tambien con las filas de U originales pues esos son vectores de $\mathbb{R}^m$ extendidos a $\mathbb{R}^{m+n}$, y por lo tanto no tienen información en las coordenadas $m+1 \dots n$.

iv)

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ m & \begin{bmatrix} A & \emptyset_m \end{bmatrix} \end{array}
=
\begin{array}{cc} & m \\ m & \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} \end{array}
\cdot
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ m & \begin{bmatrix} \Sigma & \emptyset_m \end{bmatrix} \end{array}
\cdot
\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} V^T & \emptyset_{n\times m} \\ \emptyset_m & I_m \end{bmatrix} \end{array}
$$

$\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$

$\hat{V}^T \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$

$$U\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} U\Sigma & U\emptyset_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U\Sigma & \emptyset_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$$

$$U\hat{\Sigma}\hat{V}^T = \begin{bmatrix} U\Sigma V^T + \emptyset_m\emptyset_m & U\Sigma\emptyset_{n\times m} + \emptyset_m I_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U\Sigma V^T & \emptyset_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \emptyset_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$$

Mismo argumento por qué $\hat{V}^T$ es ortogonal (ver inciso anterior).

c)

$$(V\Sigma^T\Sigma V^T + \alpha I)^{-1} A^T \quad = [V(\underbrace{\Sigma^T\Sigma + \alpha I}_{\text{inversible porque } \alpha > 0})V^T]^{-1} A^T$$

$$\alpha I \to VIV^T$$