Métodos Numéricos

2do Cuatrimestre 2024

Práctica 2

Eliminación Gaussiana y Factorización LU

Normas y número de condición

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Nota: Cuando se habla de "la" descomposición LU de una matriz, se está haciendo referencia a la que surge de aplicar la eliminación gaussiana. Caso contrario, nos referiremos a "una" descomposición LU.

Eliminación Gaussiana y Factorización LU

1. Triangular la matriz de Hilbert de orden 4. Usando operaciones con fracciones en forma exacta en (a) y usando aritmética de punto decimal flotante con tres dígitos con redondeo en (b):

$$\text{(a) } H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}, \text{ (b) } H = \begin{pmatrix} 1,000 & 0,500 & 0,333 \\ 0,500 & 0,333 & 0,250 \\ 0,333 & 0,250 & 0,200 \end{pmatrix}$$

   Analizar por qué se obtienen diferentes resultados.

2. Calcular la factorización LU y resolver usando aritmética de punto decimal flotante de tres dígitos con redondeo:

$$\begin{pmatrix} 0,003 & 0,217 \\ 0,277 & 0,138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,437 \\ 0,553 \end{pmatrix}$$

   ¿Cuánto cambia el resultado si previamente se pivotean las filas?

3. Resolver por eliminación Gaussiana sin intercambio de filas o columnas el sistema lineal $Ax = b$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{pmatrix}$$

   Dar la factorización LU de A y calcular $det(A)$.

4. Calcular la inversa A^{-1} de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ de las siguientes maneras:

   a) Resolviendo el sistema matricial $AX = I$ por pivoteo parcial.

   b) Calculando la factorización LU de A, calculando las inversas de L y U, y aplicando la identidad $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

   c) Calculando la factorización LU de A y resolviendo los sistemas $Ax_i = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, con $n = 3$.

5. Sean $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que una factorización LU de A_h es L_hU para $h = 1, \ldots, k$, donde L_h tiene unos en la diagonal y U es la misma para toda A_h. Sea $A = \sum_{h=1}^{k} A_h$. Probar:

a) A tiene factorización LU, L con unos en la diagonal.

b) Para $1 \leqslant j < i \leqslant n$, el multiplicador M_{ij} de la triangulación gaussiana de A es el promedio de los multiplicadores de la posición (i, j) en las triangulaciones de las A_h. Es decir, $M_{ij} = \frac{1}{k}\sum_{h=1}^{k} M_{ij}^{h}$, con M_{ij}^{h} el multiplicador de la posición (i, j) en la triangulación de A_h.

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $A^{(k)}$ la matriz que se obtiene a partir de A por el método de eliminación Gaussiana cuando las primeras k columnas ya han sido trianguladas.

a) Hallar la matriz M_{k+1} de tal forma que $M_{k+1}\, A^{(k)} = A^{(k+1)}$.

b) Probar que A es no singular si y sólo si $A^{(k)}$ es no singular.

c) Si A es simétrica, demostrar que la submatriz de $A^{(k)}$ que aún no ha sido triangulada sigue siendo simétrica (es decir, que $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$, para $k < i, j \leqslant n$).

7. Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene todas sus (sub)matrices principales no singulares (es decir, toda submatriz que consiste de las primeras i filas y columnas de A), entonces A tiene factorización LU sin pivoteo. Además esa factorización es única.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tal que $A = TS$ donde $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior y $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior. Probar:

a) T y S son inversibles, usando propiedades de determinantes.

b) A tiene factorización LU (con unos en la diagonal de L).

c) La matriz $\begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix}$ tiene factorización LU (con unos en la diagonal de L), para cualquier $b, c \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$. Hallarla explícitamente en función de T, S, b, c y d.

9. Con las mismas notaciones que en el ejercicio 6, sea $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ y sea
$a_k := \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}^{(k)}|$; es decir, a_k es el elemento máximo en módulo de la matriz que se obtiene luego de que la primeras k columnas han sido trianguladas. Si se aplica el método de eliminación Gaussiana **con pivoteo parcial**, probar que:

a) $a_k \leqslant 2^k a_0,\ k = 1, \ldots, n-1$ para A arbitraria.

b) $a_k \leqslant (k+1)a_0,\ k = 1, \ldots, n-1$ para matrices de Hessenberg [1].

c) $a = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} a_k \leqslant 2a_0$ para matrices tridiagonales.

Analizar e interpretar los tres resultados.

Sugerencia: Aplicar inducción en k. Recordar que aplicar el método de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial significa que se puede suponer que al comienzo de cada paso ya se ha realizado el intercambio de filas correspondientes al pivoteo parcial. En el ítem (c), considerar la inducción en términos de j donde $a(j) = \max_{1\leqslant k\leqslant j} a_k$.

[1] Una matriz A es de Hessenberg si todos sus coeficientes debajo de la primer subdiagonal son nulos, es decir, si $a_{ij} = 0$ para todo (i, j) tal que $i \geqslant j + 2$.

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de la forma $A = I + uu^t$, con $u \in \mathbb{R}^n$. Luego de realizar el primer paso de la factorización LU (eliminando la primera columna) se obtiene

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ 0 & A_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

con $A_{22}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Demostrar:

a) $A_{22}^{(1)} = I_{n-1} + \tilde{u}\tilde{u}^t$, donde $\tilde{u}^t = (u_2, \ldots, u_n)/(\sqrt{1+u_1^2})$, siendo I_{n-1} la matriz identidad de la misma dimensión que $A_{22}^{(1)}$.

b) A tiene factorización LU sin pivoteo, para cualquier $u \in \mathbb{R}^n$.
Sugerencia: inducción en la dimensión de la matriz.

11. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *estrictamente diagonal dominante por columnas* si $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$ para $j = 1, \ldots, n$. Demostrar que la matriz A tiene descomposición LU sin pivoteo.

12. Sea A una matriz no singular de $\mathbb{R}^{n\times n}$ escrita en forma de bloques de la siguiente manera, donde A_{11} es una matriz de tamaño $m \times m$ y A_{22} es de tamaño $(n-m)\times(n-m)$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

a) Verificar la siguiente fórmula para la eliminación del bloque A_{21}:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

La matriz $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ es conocida como *complemento de Schur* de A_{11} en A.

b) Hallar la matriz que realiza un primer paso de triangulación de tal forma que elimine la primera fila de A_{21}. *Sugerencia: considerar una combinación lineal apropiada de las filas de A_{11}.*

c) Considerar los $n-m$ pasos de triangulación (eliminando una fila de A_{21} en cada paso), y mostrar que el bloque $(2,2)$ de la matriz resultante de aplicar el proceso de eliminación Gaussiana es igual a $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

Normas Matriciales y Número de Condición

13. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Graficar los siguientes conjuntos de puntos:

a) $A_1 = \left\{Ax \;/ x \in \mathbb{R}^2 \;\wedge \|x\|_1 = 1\right\}$

b) $A_2 = \left\{Ax \;/ x \in \mathbb{R}^2 \;\wedge \|x\|_\infty = 1\right\}$

c) $A_3 = \left\{Ax \;/ x \in \mathbb{R}^2 \;\wedge \|x\|_2 = 1\right\}$

d) Interpretar geométricamente $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_2$

14. Sea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ una norma matricial inducida, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Demostrar:

a) $\|\cdot\|$ es una norma.

b) $\|I\| = 1$.
c) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.
d) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar:

    a) $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. *Sugerencia: Probar "$\leqslant$" acotando $\|Ax\|_1$ con $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ para todo x tal que $\|x\|_1 = 1$. Probar "$\geqslant$" utilizando los vectores canónicos.*

    b) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. *Sugerencia: Hallar x^* donde $\|x^*\|_\infty = 1$ tal que para todo x tal que $\|x\|_\infty = 1$ vale que $\|Ax\|_\infty \leqslant \|Ax^*\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.*

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y definimos $\|A\|_M = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$. Probar:

    a) $\|\cdot\|_M$ es una norma.
    b) $\|A\|_M \leq \|A\|_2 \leq n\|A\|_M$.
    Sugerencia: Para la segunda desigualdad, hallar x^* donde $\|x^*\|_2 = 1$ tal que $\|Ax\| \leqslant \|A\|_M$.

17. Sea $\kappa(A)$ el número de condición de una matriz, calculado a partir de una norma matricial submultiplicativa.

    a) Probar que si $\|I\| \geqslant 1$ entonces $\kappa(A) \geqslant 1$.
    b) Probar que para una norma dada, $\kappa(AB) \leqslant \kappa(A)\kappa(B)$ y $\kappa(\alpha A) = \kappa(A) : \forall \alpha \neq 0$.

18. Sea x la solución del sistema $Ax = b$. En muchos casos se desea conocer distintos comportamientos del sistema lineal al variar levemente el valor de la matriz A o del vector de solución b. Se denomina matriz de perturbación o vector de pertubación (según corresponda) a δA y δb.

    a) Sea $x + \delta x$ la solución del sistema $Ax = b + \delta b$. Acotar la norma de δx.
    b) Idem si $x + \delta x$ es la solución de $(A + \delta A)x = b$.

19. Sea $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|R\| < 1$ y I la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n\times n}$, donde $\|\cdot\|$ es una norma matricial inducida por una vectorial.

    a) Probar que $I + R$ es inversible.
    Sugerencia: Ver que suponiendo $(I + R)x = 0$ para algún $x \neq 0$ se llega a $\|Rx\|/\|x\| = 1$.
    b) Probar que $\|(I + R)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|R\|}$.
    Sugerencia: Usar la igualdad $(I + R)^{-1} = I - R(I + R)^{-1}$.
    c) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible y $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.
    Probar que $A + \delta A$ es inversible y vale

$$\|(A + \delta A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}$$

20. Supongamos que $x = A^{-1}b$.

    a) Con $\|\cdot\|$ se designa una norma vectorial y la norma matricial inducida, según corresponda. Probar que si $e = x - \hat{x}$ (el error) y $r = b - A\hat{x}$ (el residuo, $\hat{x}$ es el valor calculado), entonces:

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \leqslant \|e\| \leqslant \|A^{-1}\|\|r\|.$$

b) Analizar el caso $\|\cdot\|_\infty$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix},\ \hat{x} = \begin{bmatrix} 1.01 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolver en computadora

i) Describir e implementar un algoritmo que calcule un vector no nulo $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $Uz = 0$, donde $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular superior con $u_{n,n} = 0$ y $u_{1,1} \ldots u_{n-1,n-1} \neq 0$.

ii) Consideramos una familia de matrices $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$ con una estructura particular que depende de n. Para el caso $n = 5$, la matriz en cuestión es la siguiente:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Analizar qué sucede al aplicar el método de eliminación gaussiana con pivoteo parcial a A_6. Generalizar el resultado para n genérico.

b) Implementar un algoritmo que resuelva el sistema de ecuaciones $A_n x = b$.

c) Variando el n, considerar vectores $b \in \mathbb{R}^n$ para los cuales la solución al sistema $A_n x = b$, sea conocida. Llamemos x^* a la solución exacta del sistema y $\bar{x}$ a la solución obtenida por el algoritmo del punto anterior. ¿Es $\bar{x}$ una buena aproximación?

d) Graficar como evoluciona el $\|x^* - \bar{x}\|_2$ en función del tamaño de la matriz.

iii) Sea x la solución del sistema $Ax = b$. En el contexto del ejercicio 18, resolver si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}0001 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 3{,}1 \\ 5{,}9 \end{bmatrix},\ \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0001 \end{bmatrix},\ \delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$$

iv) Considere el sistema lineal $Ax = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

La solución exacta es $x = (1, -1)$. Consideremos también los vectores $x_1 = (0.998, -1.002)$ y $x_2 = (-666, 834)$.

a) Calcular los residuos $r(x_1), r(x_2)$. El vector x_1, ¿tiene residuo menor?

b) Modificar el término independiente por $b = (0.168, 0.067 - \varepsilon)$, con $\varepsilon = 0.001, 0.002$, y resolver nuevamente el sistema en cada caso. ¿Qué sucede con las distintas soluciones?

c) Calcular el número de condición $\kappa(A)$.

d) Interpretar gráficamente los resultados de los items $a)$ y $b)$.

Funciones útiles

- Operaciones en Matlab/Octave:

```
% Distintas partes de una matriz
f = A(1,:)       % primer fila de A
c = A(:,1)       % primer columna de A
M = A(1:k,1:k)   % k-esima submatriz principal de A
B = triu(A)      % parte triangular superior de la matriz A
B = tril(A)      % parte triangular inferior de la matriz A
% (Nota: se puede agregar un 2do parametro k para incluir mas o menos
% diagonales en las funciones triu y tril)

% Normas vectoriales
norm(x,p)        % norma p del vector x
norm(x,'inf')    % norma infinito del vector x, equivalente a max(abs(x))

% Resolucion de sistemas y determinantes
A\b       % solucion del sistema Ax = b, con A matriz y b vector
A\B       % matriz solucion del sistema AX = B, con A y B matrices.
[L,U,P] = lu(A) % factorizacion PA = LU
det(A)    % determinante de la matriz A

% Numero de Condicion segun norma p
c = cond(X,p)
```

- Operaciones en Python con Numpy:

```
# Imports
from numpy import *
from numpy.linalg import *

# Inicializaciones
A = matrix([[1,2],[3,4]], float) # matriz 2x2
B = matrix([[5,6],[7,8]], float) # matriz 2x2
b = matrix([[1],[2]], float) # vector columna en R2

# Distintas partes de una matriz
A[0,:]       # primer fila de A, notar que indexa desde cero
A[:,0]       # primer columna de A
A[0:k,0:k]   # k-esima submatriz principal de A
triu(A)      # parte triangular superior de la matriz A
tril(A)      # parte triangular inferior de la matriz A

# Resolucion de sistemas y determinantes
```

```
solve(A,b)      # solucion del sistema Ax = b, con A matriz y b vector
solve(A,B)      # matriz solucion del sistema AX = B, con A y B matrices
det(A)   # determinante de la matriz A

# Normas vectoriales
c = array([1,2,3,4], float) # para normas vectoriales usamos array
norm(c,2)    # norma 2
norm(c,p)    # norma p, con p entero
norm(c,inf) # norma infinito

# Numero de condicion para diferentes normas matriciales
cond(A,2)
cond(A,inf)
cond(A,'fro')
```

Referencias

[1] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis.* Brooks/Cole, Cengage Learning, 2005.

[2] D.R. Kincaid and E.W. Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing.* Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2002.

[3] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[4] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations.* Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.