

3. Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{n \times n}$ y λ un autovalor de A .

- a) Probar que λ^k es un autovalor de A^k para todo $k \in \mathbb{N}$.
- b) Probar que si $\lambda \neq 0$ y A es inversible entonces λ^{-1} es un autovalor de A^{-1} .
- c) Probar que $a\lambda + b$ es un autovalor de $aA + bI$.
- d) Sea $P(x) := a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$. Probar que $P(\lambda)$ es un autovalor de $P(A) := a_0A^m + a_1A^{m-1} + \dots + a_mI$.

a) QVQ: λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda^k$ autovalor de $A^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Inducción en k con el autovector v asociado a λ fijo.

Caso base: $k=1$

λ autovalor de A con autovector asociado v .

$$Av = \lambda v \Rightarrow A^1 v = \lambda^1 v$$

Vale trivialmente porque $A^1 = A$ y $\lambda^1 = \lambda$.

Paso inductivo

HI: λ^j es autovalor de $A^j \quad \forall j < k$ con autovector asociado v .

QVQ: λ^k es autovalor de A^k con autovector asociado v .

$$A^k v = A(A^{k-1} v) \stackrel{\text{HI}}{=} A \lambda^{k-1} v = \lambda^{k-1} A v \stackrel{\substack{\uparrow \\ v \text{ autovector}}}{=} \lambda^{k-1} \lambda v = \lambda^k v$$

$\therefore \lambda$ autovalor de $A \Rightarrow \lambda^k$ autovalor de $A^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

b) QVQ: A inversible y $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda^{-1}$ autovector de A^{-1} .
 λ autovector de $A \Rightarrow \exists v \neq 0$ tq $Av = \lambda v$.

$$Av = \lambda v \quad \Rightarrow \quad \underset{A \text{ inversible}}{A^{-1}Av} = \underset{\lambda \neq 0}{A^{-1}\lambda v} \quad \Rightarrow \quad \lambda^{-1}v = A^{-1}v$$

$\therefore \lambda^{-1}$ autovector de A^{-1} .

c) QVQ: $a\lambda + b$ autovector de $aA + bI$.

λ autovector de $A \Rightarrow \exists v \neq 0$ tq $Av = \lambda v$

$$(aA + bI)v = aAv + bv = a\lambda v + bv = (a\lambda + b)v$$

$Av = \lambda v$

$\therefore \lambda$ autovector de $A \Rightarrow a\lambda + b$ autovector de $aA + bI$.

d)

Inducción en m .

Caso base $m=0$: $P_0(x) = a_0$.

QVQ: $P_0(\lambda) = a_0$ es autovector de $P_0(A) = a_0I$.

QVQ: $P_0(A) - P_0(\lambda)I$ no es inversible. Sea $v \neq 0$.

$$(P_0(A) - P_0(\lambda)I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0Iv - a_0Iv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

$\therefore P_0(\lambda)$ es autovector de $P_0(A)$.

Paso inductivo

HI: $P_k(\lambda)$ es autovector de $P_k(A)$ $\forall k < m$.

QVQ: $P_m(\lambda)$ es autovector de $P_m(A)$.

Sea $v \neq 0$.

$$P_m(A)v = P_m(\lambda)v$$

$$\Leftrightarrow (a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_m I)v = (a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m)v$$

$$\Leftrightarrow (a_0 A^m + \dots + a_{m-1} A)v + a_m v = (a_0 \lambda^m + \dots + a_{m-1} \lambda)v + a_m v$$

$$\Leftrightarrow P_{m-1}(A)v + a_m v = P_{m-1}(\lambda)v + a_m v$$

$$\Leftrightarrow P_{m-1}(A)v = P_{m-1}(\lambda)v$$

vale \uparrow por HI