14. Sea A una matriz tridiagonal simétrica definida positiva. Si $A = LL^t$ es la factorización de Cholesky de A, demostrar que L es tridiagonal (de hecho es bidiagonal).

Podemos suponer
A sdp
$A = LL^T$
A tridiagonal
$A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$
$L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$
$\forall \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonal $\Rightarrow \tilde{L}$ bidiagonal

QVQ
$L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ es bidiagonal

Sea $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ sdp, $A = LL^T$ la factorización de Cholesky.

$$L = \begin{bmatrix} \tilde{L} & 0 \\ \ell^T & \alpha \end{bmatrix} \qquad L^T = \begin{bmatrix} \tilde{L}^T & \ell \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ $\quad \tilde{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\ell \in \mathbb{R}^n$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$LL^T = \begin{bmatrix} \tilde{L}\tilde{L}^T & \tilde{L}\ell \\ \ell^T\tilde{L}^T & \ell^T\ell + \alpha^2 \end{bmatrix} = A$$

Sea $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^T$ una matriz sdp y tridiagonal de $n\times n$ porque es una submatriz de A. Por HI $\tilde{L}$ es bidiagonal.

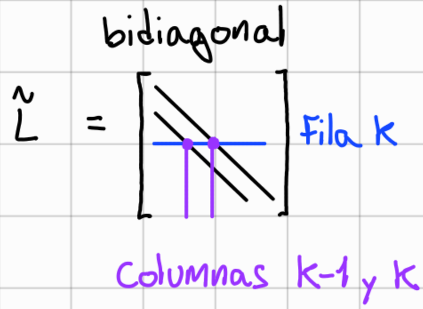
QVQ L es bidiagonal. Basta probar que $\ell = (0, \cdots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$.

La columna $n+1$ de A es: $(\tilde{L}\ell, \ell^T\ell + \alpha^2)$.
Como A es tridiagonal, $\tilde{L}\ell = (0, \cdots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $(\tilde{L}\ell)_i = [(\tilde{L}\ell)^T]_i = (\ell^T\tilde{L}^T)_i = 0 \quad \forall i < n$.

Supongamos que $\exists k < n$ tal que $\ell_k \neq 0$. $\ell = (0, \cdots, *, \cdots, 0, *)$.
$\hookrightarrow \ell_k \neq 0$

Veamos qué pasa con la fila $k<n$ de $\tilde{L}\ell$.



$$(\tilde{L}\ell)_k = \sum_{i=1}^{n} \tilde{L}_{ki}\,\ell_i$$

$$= \tilde{L}_{k\,k-1}\,\underbrace{\ell_{k-1}}_{=0} + \tilde{L}_{kk}\,\ell_k$$

$$= \tilde{L}_{kk}\,\ell_k \neq 0 \quad \text{Absurdo}$$

Pues supusimos $\ell_k \neq 0$ y $\hat{A} = \tilde{L}\tilde{L}^T$ es la factorización de Cholesky, luego la diagonal de $\tilde{L}$ es > 0.

$\therefore\ \ell = (0, \cdots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$ y L resulta bidiagonal.