5. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo y $H_u = I - 2\dfrac{u\,u^t}{u^t u}$ la matriz de Householder asociada.

a) Demostrar que u es autovector de H_u. ¿Cuál es el autovalor correspondiente?

b) Sea $U = \langle u \rangle$ el subespacio generado por el vector u. Demostrar que cualquier $v \in U^\perp$ es autovector de H_u. ¿Cuáles son los autovalores correspondientes?

a) QVQ: u es autovector de H_u.

Basta ver que $H_u u = \lambda u$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor.

$$H_u u = \lambda u \iff \left(I - 2\frac{uu^T}{u^Tu}\right)u = \lambda u$$

$$\iff u - 2\frac{uu^Tu}{u^Tu} = \lambda u \qquad u \neq 0 \Rightarrow u^Tu = \|u\|_2^2 \neq 0$$

$$\iff u - 2u = \lambda u$$

$$\iff -u = \lambda u$$

$\therefore$ u autovector de H_u con autovalor $\lambda = -1$.

b) QVQ: v autovector de H_u $\forall v \in U^\perp = \{v : v \perp u\}$

Sea $v \in U^\perp$. $v \perp u \Rightarrow v^Tu = u^Tv = 0$

QVQ: $H_u v = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor.

$$H_u v = \lambda v \iff \left(I - 2\frac{uu^T}{u^Tu}\right)v = \lambda v$$

$$\iff v - 2\frac{u}{u^Tu}\cdot \underbrace{u^Tv}_{=0} = \lambda v \qquad u \perp v \Rightarrow u^Tv = 0$$

$$\iff v = \lambda v$$

$\therefore$ $v \in U^\perp$ autovector de H_u con autovalor $\lambda = 1$.