14. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Probar:

a) $AB = AC$ entonces $B = C$ ¿Es necesario que A sea inversible para probarlo?

b) $AB = 0$ entonces $B = 0$ ¿Es necesario que A sea inversible para probarlo?

a)

$$AB = AC \implies \underbrace{A^{-1}A}_{I}B = \underbrace{A^{-1}A}_{I}C \implies IB = IC \implies B = C$$

A^{-1} existe por hipótesis por ser A inversible

Veamos si es necesario que A sea inversible.
Supongamos que A no es inversible.

A no inversible $\iff Nu(A) \neq \{0\}$

$\iff \exists x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$ tal que $Ax = 0$

b)

$AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}0 \Rightarrow IB = I0 \Rightarrow B = 0$

A^{-1} existe por hipótesis por ser A inversible

En este caso no necesariamente A tiene que ser inversible.

A no inversible $\iff Nu(A) \neq \{0\}$

$\iff \exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ tal que $Ax = 0$

Sean $b_i \in Nu(A)$, $b_i \neq 0$ con $i = 1 \dots n$. Definimos $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como la matriz formada por las columnas $b_1 \cdots b_n$.

$$B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{pues } b_i \neq 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

Como cada $b_i \in Nu(A)$, $Ab_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$ es la i-ésima columna de AB.

$col_i(AB) = Ab_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

$\Rightarrow AB = 0$ pero $B \neq 0$, y existe porque A no inversible.