8. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y sea $T(x) = Ax$.

a) Probar que T es una transformación lineal.

b) Definir dominio y codominio de T y hallar su expresión asociada, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Hallar la matriz A asociada a la siguientes transformaciones lineales:

i) $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1,\ 2x_3,\ 3x_2)$

ii) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + 3x_3,\ 3x_2)$

¿Cómo estas transformaciones lineales mueve los ejes de coordenadas?

a)

T es una transformación lineal sii se cumplen dos propiedades:

1) $T(X+Y) = T(X) + T(Y) \quad \forall X, Y \in Dom(T)$

$$T(X+Y) \overset{def}{=} A(X+Y)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \cdot (X+Y) \\ \vdots \\ a_m \cdot (X+Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot X + a_1 \cdot Y \\ \vdots \\ a_m \cdot X + a_m \cdot Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot X \\ \vdots \\ a_m \cdot X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \cdot Y \\ \vdots \\ a_m \cdot Y \end{bmatrix}$$

$$= AX + AY \overset{def}{=} T(X) + T(Y)$$

2) $T(\alpha X) = \alpha T(X) \quad \forall X \in Dom(T), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha X) \overset{def}{=} A(\alpha X)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \cdot (\alpha X) \\ \vdots \\ a_m \cdot (\alpha X) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 \cdot X \\ \vdots \\ a_m \cdot Y \end{bmatrix} = \alpha \cdot AX \overset{def}{=} \alpha T(X)$$

b)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$Dom(T) = \mathbb{R}^n$

$Codom(T) = \mathbb{R}^m$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3) \qquad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

c)

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-x_1,\ 2x_3,\ 3x_2) = \overset{A}{\overset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + 3x_3,\ 3x_2) = \overset{A}{\overset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$