15. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sean $v, v' \in \mathbb{R}^n$ autovectores l.i. asociados a los autovalores $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ respectivamente.

a) Sea $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal tal que $Hv = \alpha e_1$. Justificar cómo se puede obtener esta matriz, indicando qué valor debe tomar α, y demostrar que:

$$HAH^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & b^t \\ 0 & B \end{bmatrix} \qquad \text{con } B \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1} \text{ y } b \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

b) Probar que λ' es autovalor de B. ¿Es necesario que $\lambda' \neq \lambda$? Justifique.

c) Sea w el autovector de B asociado a λ' y $\lambda' \neq \lambda$.

Demostrar que $v' = H^{-1}\begin{bmatrix} \beta \\ w \end{bmatrix}$ con $\beta = \dfrac{1}{\lambda' - \lambda} b^t w$. ¿Qué sucede con b y w si $\lambda' = \lambda$?

d) Si A es simétrica, probar que $b = 0$.

a)

H ortogonal $\Rightarrow H^{-1} = H^T$

$Hv = \alpha e_1 \iff v = H^T \alpha e_1 = \alpha \cdot col_1(H^T) = \alpha \cdot fila_1(H)$

Para que H sea ortogonal sus filas y columnas tienen que ser ortonormales. Tomamos $\alpha = \|v\|_2$ para poner v normalizado como $fila_1(H)$.

$\alpha = \|v\|_2 \Rightarrow v = \|v\|_2 \cdot fila_1(H) \Rightarrow fila_1(H) = \dfrac{v}{\|v\|_2}$

Luego tomamos Filas $2 \dots n$ ortonormales con v. Justificar mejor

QVQ: $HAH^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & b^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$

Como no sabemos nada sobre b y B, basta ver que $col_1(HAH^{-1}) = \lambda e_1$.

$$HAH^{-1}e_1 \underset{\substack{\uparrow \\ Hv = \alpha e_1 \iff H^{-1}e_1 = \alpha^{-1}v}}{=} HA\alpha^{-1}v = \alpha^{-1}HAv = \alpha^{-1}H\lambda v = \lambda\alpha^{-1}Hv = \lambda\alpha^{-1}\alpha e_1 = \lambda e_1$$

b) QVQ: λ' autovalor de B.