5. Sea A una matriz de $n \times n$ tal que A se expresa en la forma $A := M - N$, donde M, N son matrices de $n \times n$ y M es no singular. Sea $R := M^{-1}N$. A fin de resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, dado un vector $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario consideramos la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k \geqslant 0} \subset \mathbb{R}^n$ definida por $x^{(k+1)} := Rx^{(k)} + c$, donde $c = M^{-1}b$.

   a) Demostrar que si $\|R\| < 1$ para alguna norma subordinada (inducida), entonces $x^{(k)}$ converge a una solución del sistema $Ax = b$.

   b) Demostrar que si A es singular entonces $\rho(R) \geqslant 1$.

a)

En el ejercio 2 vimos que $\rho(A) \leq \|A\|$ para cualquier norma inducida. Si $\|R\| < 1$ entonces $\rho(R) < 1$.

QVQ $\rho(R) < 1 \Rightarrow x^k$ converge a una solución para $Ax = b$.

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= Rx^k + c \\
&= R(Rx^{k-1} + c) + c \\
&= R^2 x^{k-1} + Rc + c \\
&= R^2(Rx^{k-2} + c) + Rc + c \\
&= R^3 x^{k-2} + R^2 c + Rc + c \\
&\;\vdots \\
&= R^{k+1} x^0 + R^k c + R^{k-1} c + \cdots + Rc + c \\
&= R^{k+1} x^0 + (R^k + R^{k-1} + \cdots + R + I) c
\end{aligned}
$$

↳ $\rho(R) < 1 \Rightarrow (I-R)$ inversible y $\sum_{k=0}^{\infty} R^k = (I-R)^{-1}$

$\rho(R) < 1 \iff \lim_{k\to\infty} R^k x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$
x^* = \lim_{k\to\infty} x^{k+1} = 0 + (I-R)^{-1} c \iff (I-R)x^* = c
$$
$$
\iff x^* = Rx^* + c
$$

$\therefore\ \rho(R) < 1 \Rightarrow x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$ y $Ax^* = b$

b)

QVQ A no inversible $\Rightarrow \rho(R) \geq 1$

Como A no inversible $\lambda = 0$ es autovalor de A.

Sea $v \neq 0$ autovector asociado al autovalor 0.

$$
\begin{aligned}
Av = 0v \quad &\Leftrightarrow \quad (M-N)v = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad Mv - Nv = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad Nv = Mv \\
&\Leftrightarrow \quad M^{-1}Nv = v \qquad \text{M inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad Rv = 1 \cdot v
\end{aligned}
$$

1 es autovalor de R.

$\therefore \ \rho(R) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } R\} \geq 1$