

3. Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con columnas a_1, \dots, a_n , y $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con filas b_1^t, \dots, b_n^t . Probar que:

a) Si $\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx$, entonces $A = B$.

b) $AB = \sum_{i=1}^n a_i b_i^t$.

a)

QVQ: $\forall x. Ax = Bx \Rightarrow A = B$

Por contrarrecíproco: $A \neq B \Rightarrow \exists x. Ax \neq Bx$

Si $A \neq B$, en particular existe una fila i , columna j tal que:

$$(A)_{ij} \neq (B)_{ij} \Leftrightarrow a_{ij} \neq b_{ij}$$

QVQ: $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax \neq Bx$.

$$Ax \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (Ax)_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$$

Tomamos $X = (x_1, \dots, x_n)$ con $x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Resulta $(Ax)_i = a_{ij}$ pues el único término que sobrevive es el que está con $x_j = 1$.

Solo basta ver qué pasa con Bx para el x elegido.

$$Bx \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (Bx)_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} x_k = b_{ij}$$

Por hipótesis: $a_{ij} \neq b_{ij} \Rightarrow (Ax)_i \neq (Bx)_i \Rightarrow Ax \neq Bx$

a) Alternativo (más Fácil)

$$QVQ: \forall x. Ax = Bx \Rightarrow A = B$$

En particular vale $Ax = Bx$ tomando x como los vectores canónicos.

$$\forall j. Ax = Bx \Rightarrow \forall j. Ae_j = Be_j$$

con e_j el j -ésimo vector canónico
a derecha

Multiplicar una matriz \downarrow por el vector canónico e_j da como resultado la columna j -ésima de la matriz.

$$\forall j. Ae_j = Be_j \Rightarrow \forall j. \text{col}_j(A) = \text{col}_j(B)$$

Si todas las columnas de A y B son iguales $\Rightarrow A = B$

b) $QVQ: AB = T$ con $T = \sum_{i=1}^n a_i b_i^t$

Notemos que $a_i b_i^t$ es una matriz de $n \times n$.

Luego $T = T^{(1)} + \dots + T^{(n)}$ es una sumatoria de n matrices.

$T^{(k)} = a_k b_k^t$ Es la k -ésima matriz generada por la k -ésima columna de A y la k -ésima fila de B .

$T_{ij}^{(k)} = \text{Fila}_i(a_k) \cdot \text{Col}_j(b_k^t)$ Es el elemento en la posición i, j en la matriz k -ésima $T^{(k)}$.

Diagram illustrating the construction of matrix T from matrices A and B . Matrix A is $n \times 1$, with column k highlighted in yellow. Matrix B is $1 \times n$, with row k highlighted in yellow. The product $T^{(k)}$ is an $n \times n$ matrix, with the element $T_{ij}^{(k)}$ highlighted in yellow. The diagram shows that $T_{ij}^{(k)}$ is the product of the i -th row of A (a_{ik}) and the j -th column of B (b_{kj}^t).

El elemento i, j de T (la suma de todas las matrices $T^{(k)}$) es:

$$T_{ij} = T_{ij}^{(1)} + \dots + T_{ij}^{(k)} + \dots + T_{ij}^{(n)}$$

$$= (a_1 b_1^t)_{ij} + \dots + (a_k b_k^t)_{ij} + \dots + (a_n b_n^t)_{ij}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{ik} b_{kj} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = (AB)_{ij}$$

$$\therefore AB = T = \sum_{k=1}^n$$

$$\begin{aligned} (a_k b_k^t)_{ij} &= T_{ij}^{(k)} \\ &= \text{Fila}_i(a_k) \cdot \text{Col}_j(b_k^t) \\ &= a_{ik} b_{kj} \\ &= A_{ik} B_{kj} \end{aligned}$$