

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y sea $T(x) = Ax$.

a) Probar que T es una transformación lineal.

b) Definir dominio y codominio de T y hallar su expresión asociada, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Hallar la matriz A asociada a las siguientes transformaciones lineales:

i) $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, 2x_3, 3x_2)$

ii) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_3, 3x_2)$

¿Cómo estas transformaciones lineales mueven los ejes de coordenadas?

a)

T es una transformación lineal si se cumplen dos propiedades:

1) $T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in \text{Dom}(T)$

$$T(x+y) \stackrel{\text{def}}{=} A(x+y)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \cdot (x+y) \\ \vdots \\ a_m \cdot (x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot x + a_1 \cdot y \\ \vdots \\ a_m \cdot x + a_m \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot x \\ \vdots \\ a_m \cdot x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \cdot y \\ \vdots \\ a_m \cdot y \end{bmatrix}$$

$$= Ax + Ay \stackrel{\text{def}}{=} T(x) + T(y)$$

2) $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall x \in \text{Dom}(T), \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha x) \stackrel{\text{def}}{=} A(\alpha x)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \cdot (\alpha x) \\ \vdots \\ a_m \cdot (\alpha x) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 \cdot x \\ \vdots \\ a_m \cdot y \end{bmatrix} = \alpha \cdot Ax \stackrel{\text{def}}{=} \alpha T(x)$$

b)

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\text{Dom}(T) = \mathbb{R}^{n \times r}$$

$$\text{Codom}(T) = \mathbb{R}^{m \times r}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 7x_1 + 4x_2 + 3x_3) \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^r$$

c)

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, 2x_3, 3x_2) = \overset{A}{=} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_3, 3x_2) = \overset{A}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$