

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$x^T A^T A x$$

- a) Probar que $A^T A$ es semidefinida positiva (es decir, si $0 \leq x^T A x$ ($\forall x \neq 0$)).
- b) Si $m < n$ demostrar que $A^T A$ no es definida positiva.
- c) Si $m \geq n$ demostrar que $A^T A$ es definida positiva si y sólo si A tiene rango máximo.

a)

$$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0 \quad \text{por ser una norma}$$

b)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m < n$. Las columnas de A son vectores en \mathbb{R}^m y hay $n > m$ columnas. Es decir hay mas vectores columnas que la dimensión del espacio donde viven. Necesariamente las columnas van a ser LD, luego $\exists x \neq 0$ tq $Ax = 0$.

Más formal: la $\text{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ es el espacio columna de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Por Teo de la dimensión:

$$\dim(\text{Nu}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = n$$

$$\Leftrightarrow \dim(\text{Nu}(A)) = n - \dim(\text{Im}(A))$$

$$\text{Como máximo la } \dim(\text{Im}(A)) = m < n$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Nu}(A)) > 0$$

$$\Rightarrow \exists x \neq 0 \text{ tq } Ax = 0$$

$$x^T A^T A x = x^T A^T \cdot 0 = 0 \quad \text{con } x \neq 0$$

\therefore No vale que $x^T A^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$.
Luego $A^T A$ no es definida positiva.

c) QVQ: Si $m \geq n$ $A^T A$ dp \Leftrightarrow rango(A) es máximo

Notemos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, si $m \geq n$ hay más Filas que columnas, o bien hay exactamente la misma cantidad. En cualquier caso el rango(A) máximo es n , la cantidad de columnas.

$$A^T A \text{ dp} \Leftrightarrow x^T A^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \|Ax\|_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\text{Como } \|Ax\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\Leftrightarrow \nexists x \neq 0 \text{ tq } Ax = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{cols}(A) \text{ son LI}$$

$$\Leftrightarrow \text{rango}(A) = n \text{ es máximo}$$

Revisar