8. Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene columnas ortogonales $w_1, w_2, \dots, w_n$ donde $\|w_i\|_2 = \alpha_i > 0$. Calcular $A^t A$ y hallar las matrices U, Σ y V de una descomposición en valores singulares de A.

$$A^T A = \underset{n\times m}{\begin{bmatrix} — & w_1 & — \\ & \vdots & \\ — & w_n & — \end{bmatrix}} \cdot \underset{m\times n}{\begin{bmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_n \\ | & & | \end{bmatrix}} = \underset{n\times n}{\begin{bmatrix} \|w_1\|_2^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \|w_n\|_2^2 \end{bmatrix}} = \underset{n\times n}{\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^2 \end{bmatrix}}$$

Sea $A = U_A \Sigma_A V_A^T$ descomposición SVD de A.

Los valores singulares de A son los autovalores de $A^T A$.

$$\det(A^T A - xI) = (\alpha_1^2 - x)\cdots(\alpha_n^2 - x) = 0 \iff x = \alpha_i^2 \quad \forall i = 1 \dots n$$

Se podía decir directo porque $A^T A$ es diagonal.

$$\sigma_i^2 = \alpha_i^2 \iff \sigma_i = |\alpha_i| \iff \sigma_i = \alpha_i \quad \forall i = 1\dots n$$

$\alpha_i > 0$ por hipótesis

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \\ \hline & 0 & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Los vectores canónicos $e_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\forall i = 1\dots n$ son los autovectores de $A^T A$.

$A A^T e_i = \alpha_i^2 e_i \quad \forall i = 1 \dots n \qquad \Rightarrow \qquad V = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Para encontrar U sabemos que:

$Av_i = \sigma_i u_i \iff Av_i/\sigma_i = u_i$ $\qquad \sigma_i = \alpha_i > 0 \ \forall i = 1 \dots n$

$\iff Ae_i/\alpha_i = u_i$

$\iff w_i/\|w_i\|_2 = u_i \quad \forall i = 1 \dots n$

Luego las primeras n columnas de $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son los w_i normalizados.
Como los $w_i \in \mathbb{R}^m$ son ortogonales entre ellos vale que $n \leq m$.
Para completar las $m-n$ columnas restantes extendemos $\{w_1/\|w_1\|_2 \cdots w_n/\|w_n\|_2\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$.

$u_i = w_i/\|w_i\|_2 \quad \forall i = 1 \dots n$

$\{u_1 \cdots u_n\}$ base ortonormal:

Sea $\langle u_{n+1} \cdots u_m \rangle = \langle u_1 \cdots u_n \rangle^{\perp}$ el subespacio ortogonal.

$\langle u_1 \cdots u_n \rangle \oplus \langle u_{n+1} \cdots u_m \rangle = \mathbb{R}^m$

$\therefore \{u_1 \cdots u_m\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^m$

$$U = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$A = U\Sigma V^T$ pero falta permutar la diagonal de Σ para que queden ordenados $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$.

Sean P_F y P_C matrices de permutación de filas y columnas respectivamente tal que:

$$(P_F \Sigma P_C)_{ii} \geq (P_F \Sigma P_C)_{jj} \quad \forall i \leq j$$

$$A = \underbrace{U P_F^{-1}}_{U_A} \underbrace{P_F \Sigma P_C}_{\Sigma_A} \underbrace{P_C^{-1} V^T}_{V_A^T} = U_A \Sigma_A V_A^T$$