6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con autovalores reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distintos y autovectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

a) Demostrar que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

b) Demostrar que A es diagonalizable, es decir, existe una matriz no singular $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y una matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que $A = SDS^{-1}$.

a)

Inducción en n.

Caso base: $n=2$

QVQ: $\{V_1, V_2\}$ son LI.

Supongamos que no lo son. $\exists \alpha \neq 0$ tq $V_2 = \alpha V_1$.

$$\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ AV_2 = \lambda_2 V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ A\alpha V_1 = \lambda_2 \alpha V_1 \end{cases} \underset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ AV_1 = \lambda_2 V_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 V_1 = \lambda_2 V_1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

Absurdo pues $\lambda_1 \neq \lambda_2$ por hipótesis.

$\therefore$ $\{V_1, V_2\}$ son LI.

Paso inductivo

HI: $\{V_1, \cdots, V_k\}$ son LI $\forall k < n$.

QVQ: $\{V_1, \cdots, V_n\}$ son LI sabiendo que los autovalores asociados $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ son todos distintos.

Supongamos que $\{V_1, \cdots, V_n\}$ son LD. Por HI $\{V_1, \cdots, V_{n-1}\}$ son LI, entonces podemos escribir a V_n como combinación lineal de $\{V_1, \cdots, V_{n-1}\}$ con coeficientes no todos nulos pues $V_n \neq 0$.

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \iff Av_n = A \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

$$\iff Av_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_i v_i \quad (1) \qquad Av_i = \lambda_i v_i$$

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \iff \lambda_n v_n = \lambda_n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

$$\iff Av_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_n v_i \quad (2)$$

Por (1) y (2)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_n v_i$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \lambda_i v_i - \alpha_i \lambda_n v_i = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i \lambda_i - \alpha_i \lambda_n) v_i = 0$$

Por HI $\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ son LI. Cualquier CL de $\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ que genere el vector nulo implica que todos los coeficientes son 0.

$$\alpha_i \lambda_i - \alpha_i \lambda_n = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n-1$$

Por otro lado, supusimos que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ son LD y escribimos a v_n como CL de $\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ con coeficientes α_i no todos nulos pues $v_n \neq 0$ por ser autovector. $\exists k < n$ tq $\alpha_k \neq 0$.

$$\alpha_k \lambda_k - \alpha_k \lambda_n = 0 \iff \alpha_k (\lambda_k - \lambda_n) = 0 \overset{\alpha_k \neq 0}{\iff} \lambda_k = \lambda_n$$

Absurdo pues $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i,j$ por hipótesis.

$\therefore \{v_1, \cdots, v_n\}$ son LI.

b) QVQ: A tiene autovalores $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ reales distintos $\Rightarrow A$ es diagonalizable

Por a) el conjunto de autovectores $\{v_1 \cdots v_n\}$ es LI.
Luego $\{v_1 \cdots v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Buscamos $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tq $A = SDS^{-1}$.

Sea $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ la matriz con los autovalores $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ en la diagonal.

Sea $S = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ la matriz formada por $\{v_1 \cdots v_n\}$ como columnas.
Como $\{v_1 \cdots v_n\}$ son LI $\Rightarrow$ rango$(S) = n$ $\Rightarrow$ S inversible.

QVQ: $A = SDS^{-1} \iff Aw = SDS^{-1}w \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$

$\{v_1 \cdots v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Podemos escribir cualquier $w \in \mathbb{R}^n$ como CL de $\{v_1 \cdots v_n\}$.

Sea $w \in \mathbb{R}^n$ tq $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

$SDS^{-1}w = SDS^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i SDS^{-1} v_i \quad \circledast$

Por construcción: $Se_i = v_i \quad \forall i = 1 \ldots n \iff S^{-1}v_i = e_i \quad \forall i = 1 \ldots n$
$SDS^{-1}v_i = SDe_i = S d_{ii} e_i = S \lambda_i e_i = \lambda_i Se_i = \lambda_i v_i \quad \forall i = 1 \ldots n$

$\circledast = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i = A \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = Aw$

$\therefore A = SDS^{-1}$