7. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Probar que x_1 es solución de cuadrados mínimos para $Ax = b$ y $x_2 = b - Ax_1$ si y sólo si (x_1, x_2) es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 \in \mathbb{R}^n$ $\quad x_2 \in \mathbb{R}^m$

Hagamos la multiplicación por bloques y veamos que resulta.

$$\begin{bmatrix} A & I \\ 0 & A^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} Ax_1 + Ix_2 = b \\ A^T x_2 = 0 \end{cases}$$

(⇒)

Sabemos que $x_2 = b - Ax_1$.

$$x_2 = b - Ax_1 \iff Ix_2 = b - Ax_1 \iff Ax_1 + Ix_2 = b$$

Además sabemos que x_1 es solución de cuadrados mínimos para $Ax = b$. Entonces vale la ecuación normal $A^TAx_1 = A^Tb$.

Usando esta igualdad vemos la 2da ecuación del sistema.

$$\begin{aligned} A^TAx_1 = A^Tb &\Rightarrow A^TAx_1 = A^T(Ax_1 + Ix_2) \qquad b = Ax_1 + Ix_2 \\ &\Rightarrow A^TAx_1 = A^TAx_1 + A^Tx_2 \\ &\Rightarrow A^Tx_2 = 0 \end{aligned}$$

($\Leftarrow$)

Sabemos que (x_1, x_2) es solución al sistema.

$$Ax_1 + Ix_2 = b \iff Ix_2 = b - Ax_1 \iff x_2 = b - Ax_1$$

Sabiendo que $x_2 = b - Ax_1$ y $A^T x_2 = 0$.

$$A^T x_2 = 0 \iff A^T(b - Ax_1) = 0 \iff A^T A x_1 = A^T b$$

Luego por ecuaciones normales x_1 es solución de cuadrados mínimos para $Ax = b$.