

Métodos Numéricos
2do Cuatrimestre 2024
Práctica 5
Autovalores y Autovectores.
Método de la potencia



**DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION**
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Autovalores y autovectores

1. Hallar los autovalores y autovectores de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

2. Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Demostrar las afirmaciones siguientes:

- a) Si A es simétrica entonces todos sus autovalores son reales.
- b) Si todos los autovalores de A son reales, entonces todos los autovectores pueden tomarse en \mathbb{R}^n (es decir, ningún autovector es puramente complejo).
- c) Si A es simétrica y definida positiva (resp. negativa) entonces todos sus autovalores son reales positivos (resp. negativos).
- d) Si A es ortogonal entonces todos sus autovalores tienen módulo 1.
- e) Si A es antisimétrica entonces 0 es el único autovalor real posible.
- f) Si A es triangular entonces sus autovalores son los elementos de la diagonal.

3. Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{n \times n}$ y λ un autovalor de A .

- a) Probar que λ^k es un autovalor de A^k para todo $k \in \mathbb{N}$.
- b) Probar que si $\lambda \neq 0$ y A es inversible entonces λ^{-1} es un autovalor de A^{-1} .
- c) Probar que $a\lambda + b$ es un autovalor de $aA + bI$.
- d) Sea $P(x) := a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$. Probar que $P(\lambda)$ es un autovalor de $P(A) := a_0A^m + a_1A^{m-1} + \dots + a_mI$.

4. Sea A una matriz con dos autovalores reales distintos λ_1, λ_2 . Sean v_1, v_2 autovectores de A correspondientes λ_1, λ_2 respectivamente.

- a) Demostrar que v_1, v_2 son linealmente independientes.
- b) Si A es simétrica, demostrar que v_1, v_2 son ortogonales.

5. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo y $H_u = I - 2 \frac{u u^t}{u^t u}$ la matriz de Householder asociada.

- a) Demostrar que u es autovector de H_u . ¿Cuál es el autovalor correspondiente?
- b) Sea $U = \langle u \rangle$ el subespacio generado por el vector u . Demostrar que cualquier $v \in U^\perp$ es autovector de H_u . ¿Cuáles son los autovalores correspondientes?

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con autovalores reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distintos y autovectores $\{v_1, \dots, v_n\}$.
- Demostrar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.
 - Demostrar que A es diagonalizable, es decir, existe una matriz no singular $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y una matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $A = SDS^{-1}$.
7. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ cuyos autovalores son $\{1; 1; 2\}$. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y justificar.
- A es inversible
 - A es diagonalizable
 - A no es diagonalizable
8. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que todos sus autovectores son múltiplos de e_1 . Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y justificar.
- A es singular
 - A tiene un autovalor repetido
 - A no es diagonalizable
9. Sea A inversible. Mostrar que si A es diagonalizable, entonces también lo son A^{-1} y A^t .
10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizable tal que $A = SDS^{-1}$. Calcular A^n y $A - 3I$ en función de S y D .
11. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que $A = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ si y sólo si A diagonalizable y con un único autovalor λ de multiplicidad algebraica n .
12. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no nula y nilpotente ($A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$). Probar que A no es diagonalizable.
13. Para cada $n \in \mathbb{N}$, dar una matriz bidiagonal con un único autovalor λ de multiplicidad algebraica n y multiplicidad geométrica $1 \leq k \leq n$.
14. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Demostrar que $\text{tr}(A) = \sum_i \lambda_i$ (usar que $\text{tr}(BC) = \text{tr}(CB)$ para C y B convenientes) y que $\det(A) = \prod_i \lambda_i$.
15. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sean $v, v' \in \mathbb{R}^n$ autovectores l.i. asociados a los autovalores $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ respectivamente.
- Sea $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz ortogonal tal que $Hv = \alpha e_1$. Justificar cómo se puede obtener esta matriz, indicando qué valor debe tomar α , y demostrar que:

$$HAH^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & b^t \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad \text{con } B \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \text{ y } b \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

- Probar que λ' es autovalor de B . ¿Es necesario que $\lambda' \neq \lambda$? Justifique.
- Sea w el autovector de B asociado a λ' y $\lambda' \neq \lambda$.

Demostrar que $v' = H^{-1} \begin{bmatrix} \beta \\ w \end{bmatrix}$ con $\beta = \frac{1}{\lambda' - \lambda} b^t w$. ¿Qué sucede con b y w si $\lambda' = \lambda$?

- Si A es simétrica, probar que $b = 0$.

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica.

- Demostrar que A es ortogonalmente diagonalizable, es decir, existe una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal y una matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $A = QDQ^t$.
- Demostrar que A es definida positiva si y sólo si existe una matriz B simétrica y no singular tal que $A = B^2$.

Método de la Potencia

17. Sea A una matriz simétrica de $\mathbb{R}^{n \times n}$ cuyos autovalores (reales) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ satisfacen la condición $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base ortonormal de autovectores de A tal que x_i es autovector de autovalor λ_i para $1 \leq i \leq n$. Dado un vector inicial $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_1^t y_0 \neq 0$, se define la sucesión $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ por:

$$y_{k+1} := \frac{Ay_k}{\|Ay_k\|} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma arbitraria.

- Demostrar que $A^k y_0 = a_1 \lambda_1^k x_1 + \dots + a_n \lambda_n^k x_n$ (donde $a_i = y_0^t x_i$ para $1 \leq i \leq n$).
- Demostrar que $y_k = \frac{A^k y_0}{\|A^k y_0\|}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- Analizar la convergencia de y_k cuando $k \rightarrow \infty$ y comprobar que para k suficientemente grande, $y_k \approx \alpha x_1$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante.
Sugerencia: sin acotar, analizar la convergencia de $\frac{A^k y_0}{|a_1 \lambda_1^k|}$ separando el caso $\lambda_1 > 0$ del $\lambda_1 < 0$.

18. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la siguiente matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $\alpha = 1$, explicar qué sucede cuando aplicamos el método de las potencias a A , comenzando con el vector $x_0 = (1, 0)$ y comenzando con el vector $x_0 = (1, -1)$. ¿Converge el método en cualquier caso a un autovalor dominante? ¿Por qué?
 - Determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales las dos sucesiones del método de las potencias comenzando con los vectores $x_0 = (1, 0)$ y $x_0 = (1, -1)$ convergen al autovalor dominante.
19. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se define el *cociente de Rayleigh* r_k por $r_k := \frac{y_k^t A y_k}{y_k^t y_k}$, siendo y_k la sucesión definida por el método de la potencia. Demostrar que $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lambda_1$, es decir, que el método de las potencias converge. Más aún, demostrar que los errores relativos verifican:

$$\frac{r_k - \lambda_1}{\lambda_1} = n_k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k},$$

donde los números n_k forman una sucesión acotada (notación: $\frac{r_k - \lambda_1}{\lambda_1} = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)$).

Sugerencia: Usar que si n_k converge entonces es acotada.

20. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se define una generalización del cociente de Rayleigh en la forma:

$$r_A(x) = \frac{x^t A x}{x^t x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y λ_{\min} y λ_{\max} son el menor y el mayor autovalor de A respectivamente entonces $\lambda_{\min} \leq r_A(x) \leq \lambda_{\max} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Resolver en computadora

- i) Aplicar el método de las potencias para encontrar el máximo autovalor de A comenzando con $x^{(0)} = (1, 0, 0)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- ii) Hallar todos los autovalores y autovectores de las siguientes matrices usando el método de las potencias:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

Funciones útiles

Referencias

- [1] R.L. Burden and J.D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2005.
- [2] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, 2012.
- [3] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.