2. Sea $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que son equivalentes:

   a) $Q^{-1} = Q^t$

   b) Las columnas de Q forman un conjunto ortonormal[1].

   c) Las filas de Q forman un conjunto ortonormal[1].

   d) $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$

   Interpretar (d) geométricamente.

   Sugerencia: para demostrar la implicación $(d \Rightarrow b)$ usar que $x^t y = \frac{1}{4}(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2)$.

[1] $\{v_1, \ldots, v_n\}$ con $v_i \in \mathbb{R}^n$ se dice ortonormal si $v_i^t v_j = 0$ $(\forall i \neq j)$ y $v_i^t v_i = 1$ $(\forall i : 1 \leqslant i \leqslant n)$.

Camino:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr] & b \arrow[r, leftrightarrow] & c \\ & d \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

a) $\Leftrightarrow$ b)

QVQ: $Q^{-1} = Q^T \iff$ columnas de Q son ortonormales

$$Q^{-1}Q = I \iff Q^T Q = I \iff (Q^T Q)_{ij} = I_{ij}$$

$$\begin{aligned}(Q^TQ)_{ij} &= \mathrm{Fila}_i(Q^T)\cdot \mathrm{col}_j(Q) \\ &= \mathrm{col}_i(Q)^T \cdot \mathrm{col}_j(Q) \\ &= I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \iff \mathrm{col}_i(Q)^T \cdot \mathrm{col}_i(Q) = 1 \\ 0 & \text{si } i\neq j \iff \mathrm{col}_i(Q)^T \cdot \mathrm{col}_j(Q) = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$\therefore$ $Q^{-1} = Q^T \iff$ Las columnas de Q son ortonormales.

b) $\Leftrightarrow$ c)

QVQ: Q columnas ortonormales $\Leftrightarrow$ Q filas ortonormales

$$col_i(Q)^T \cdot col_j(Q) = \begin{cases} 1 & si \ i=j \\ 0 & si \ i\neq j \end{cases} \quad \forall i,j = 1 \dots n$$

$$\Leftrightarrow \quad Fila_i(Q^T) \cdot col_j(Q) = \begin{cases} 1 & si \ i=j \\ 0 & si \ i\neq j \end{cases} \quad \forall i,j = 1 \dots n$$

$$\Leftrightarrow \quad Q^T Q = I \quad \Leftrightarrow \quad Q Q^T = I$$

$$\Leftrightarrow \quad Fila_i(Q) \cdot col_j(Q^T) = \begin{cases} 1 & si \ i=j \\ 0 & si \ i\neq j \end{cases} \quad \forall i,j = 1 \dots n$$

$$\Leftrightarrow \quad Fila_i(Q) \cdot Fila_j(Q)^T = \begin{cases} 1 & si \ i=j \\ 0 & si \ i\neq j \end{cases} \quad \forall i,j = 1 \dots n$$

$\therefore$ Q columnas ortonormales $\Leftrightarrow$ Q filas ortonormales

a) $\Rightarrow$ d) QVQ: $Q^{-1} = Q^T \Rightarrow \|Qx\|_2 = \|x\|_2$

$$\|Qx\|_2^2 = (Qx)^T(Qx) = x^T \underbrace{Q^T Q}_{I} x = x^T x = \|x\|_2^2$$

$$\therefore \|Qx\|_2^2 = \|x\|_2^2 \Rightarrow \|Qx\|_2 = \|x\|_2$$

d) $\Rightarrow$ b) QVQ: $\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \Rightarrow$ Q columnas ortonormales

Sugerencia: $x^T y = \frac{1}{4}(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2)$

$$\begin{aligned} col_i(Q)^T \cdot col_j(Q) &= (Qe_i)^T(Qe_j) \\ &= \tfrac{1}{4}(\|Qe_i + Qe_j\|_2^2 - \|Qe_i - Qe_j\|_2^2) && \text{Sugerencia} \\ &= \tfrac{1}{4}(\|Q(e_i+e_j)\|_2^2 - \|Q(e_i-e_j)\|_2^2) \\ &= \tfrac{1}{4}(\|e_i+e_j\|_2^2 - \|e_i-e_j\|_2^2) && \|Qx\|_2 = \|x\|_2 \end{aligned}$$

caso $i=j$

$$\tfrac{1}{4}(\|e_i+e_i\|_2^2 - \|e_i - e_i\|_2^2) = \tfrac{1}{4}(4-0) = 1$$

$$\|(\cdots 0 \cdots)\|_2^2 = 0$$

$$\|(\cdots 2 \cdots)\|_2^2 = 2^2 = 4$$

caso $i \neq j$

$$\tfrac{1}{4}(\|e_i+e_j\|_2^2 - \|e_i - e_j\|_2^2) = \tfrac{1}{4}(2-2) = 0$$

$$\|(\cdots 1 \cdots -1 \cdots)\|_2^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$$

$$\|(\cdots 1 \cdots 1 \cdots)\|_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\therefore col_i(Q)^T \cdot col_j(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \Rightarrow \text{Q columnas ortonormales}$$