4. Sea A una matriz simétrica y definida positiva. Probar que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

a) Si x e y son linealmente independientes, $|x^t Ay| < \sqrt{x^t Ax}\sqrt{y^t Ay}$. [1]

b) Si x e y son linealmente dependientes, $|x^t Ay| = \sqrt{x^t Ax}\sqrt{y^t Ay}$.

a)

Sea $z \in \mathbb{R}^n$ CL de x e y. $z = x + \lambda y$ con $\lambda \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
z^T A z &= (x+\lambda y)^T A (x+\lambda y) \\
&= (x^T + (\lambda y)^T)(Ax + A\lambda y) \\
&= x^T A x + \underbrace{x^T A \lambda y + (\lambda y)^T A x} + (\lambda y)^T A \lambda y \\
&= x^T A x + \lambda (x^T A y + y^T A x) + \lambda^2 y^T A y \\
&= \phi(\lambda)
\end{aligned}
$$

$\phi(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda$ porque $\phi(y) = z^T A z > 0$ (A sdp)

$\Rightarrow \phi(\lambda)$ no tiene raíces

$\Rightarrow$ El discriminante de $\phi(y)$ es < 0

$$(x^T A y + y^T A x)^2 - 4 y^T A y \, x^T A x < 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x^T A y + y^T A x)^2}_{\geq 0} < \underbrace{4 y^T A y \, x^T A x}_{> 0}$$

$a^2 \geq 0 \ \forall a$ A sdp $\Rightarrow y^T A y > 0 \wedge x^T A x > 0$

Tomando raíz cuadrada de ambos lados:

$$\Leftrightarrow |x^T A y + y^T A x| < 2\sqrt{x^T A x}\sqrt{y^T A y}$$

$x^T A y = y^T A x$

$$y^T A x = y^T (Ax) = y^T (x^T A^T)^T = y^T (x^T A)^T = (x^T A y)^T = x^T A y$$

A sdp $\Rightarrow A^T = A$ $x^T A y \in \mathbb{R}$ es un número

$$\Leftrightarrow 2|x^T A y| < 2\sqrt{x^T A x}\sqrt{y^T A y} \Leftrightarrow |x^T A y| < \sqrt{x^T A x}\sqrt{y^T A y}$$

b)

X e Y LD $\Rightarrow \alpha X + \beta Y = 0$ con $\alpha, \beta \neq 0$

$\Rightarrow X = {-\beta}/{\alpha}\, Y$

$\Rightarrow X = \lambda Y$ con $\lambda = {-\beta}/{\alpha} \neq 0$

$$|X^T A Y| = \sqrt{X^T A X}\,\sqrt{Y^T A Y}$$

$$X^T A X = (\lambda Y)^T A \lambda Y = \lambda^2 Y^T A Y$$

$$\Leftrightarrow (X^T A Y)^2 = \left(\sqrt{X^T A X}\,\sqrt{Y^T A Y}\right)^2 = (X^T A X)(Y^T A Y)$$

$$X^T A Y = (\lambda Y)^T A Y = \lambda Y^T A Y$$

$$\Leftrightarrow (\lambda Y^T A Y)^2 = (\lambda^2 Y^T A Y)(Y^T A Y)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 (Y^T A Y)^2 = \lambda^2 (Y^T A Y)^2$$