9. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geqslant n$, con $A = Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ descomposición QR de A (con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Hallar una descomposición SVD de A asumiendo que $R = U\Sigma V^t$ es una descomposición SVD de R.

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $\quad \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad m \geqslant n$

$R = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad U, \Sigma, V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Sea $A = U_A \Sigma_A V_A^T$ la descomposición SVD de A.
Buscamos los autovalores de $A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A^TA = \begin{bmatrix} R^T & 0 \end{bmatrix} Q^TQ \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^TR + 0 \end{bmatrix} = R^TR = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T$$
$$= \underbrace{V\Sigma^2 V^T}$$

Es la descomposición SVD de A^TA. Esto nos dice que los λ_i (autovalores de A^TA) son los valores singulares de R elevados al cuadrado:

$$\lambda_i = \sigma_{R,i}^2 \Rightarrow \sigma_{A,i}^2 = \lambda_i = \sigma_{R,i}^2 \Rightarrow \sigma_{A,i} = \sigma_{R,i} \quad \forall i = 1 \dots n$$

A tiene los mismos valores singulares que R. Como $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geqslant n$, completamos las últimas $m-n$ filas de Σ_A con 0.

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Consecuentemente podemos encontrar la descomposición SVD de $A = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ a partir de la de $R = U\Sigma V^T$.

$$A = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} U\Sigma V^T \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\overset{m\times m}{Q} \overset{m\times m}{\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}}_{U_A} \underbrace{\overset{m\times n}{\begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix}}}_{\Sigma_A} \underbrace{\overset{n\times n}{V^T}}_{V_A^T}$$