14. Sea A una matriz tridiagonal simétrica definida positiva. Si $A = LL^t$ es la factorización de Cholesky de A, demostrar que L es tridiagonal (de hecho es bidiagonal).

Podemos suponer
A sdp
$A = LL^T$
A tridiagonal
$A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$
$L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$
$\forall \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonal $\Rightarrow \tilde{L}$ bidiagonal

QVQ
$L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ es bidiagonal

Sea $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ sdp, $A = LL^T$ la factorización de Cholesky.

$$L = \begin{bmatrix} \tilde{L} & 0 \\ \ell^T & \alpha \end{bmatrix} \qquad L^T = \begin{bmatrix} \tilde{L}^T & \ell \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ $\quad \tilde{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\ell \in \mathbb{R}^n$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$LL^T = \begin{bmatrix} \tilde{L}\tilde{L}^T & \tilde{L}\ell \\ \ell^T\tilde{L}^T & \ell^T\ell + \alpha^2 \end{bmatrix} = A$$

Sea $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^T$ una matriz sdp y tridiagonal de $n\times n$ porque es una submatriz de A. Por HI $\tilde{L}$ es bidiagonal.

QVQ L es bidiagonal. Basta probar que $\ell = (0, \cdots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$.

La columna $n+1$ de A es: $(\tilde{L}\ell, \ell^T\ell + \alpha^2)$.
Como A es tridiagonal, $\tilde{L}\ell = (0, \cdots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $(\tilde{L}\ell)_i = [(\tilde{L}\ell)^T]_i = (\ell^T\tilde{L}^T)_i = 0 \quad \forall i < n$.

Supongamos que $\exists k < n$ tal que $l_k \neq 0$. $l = (0, \cdots, *, \cdots, 0, *)$.

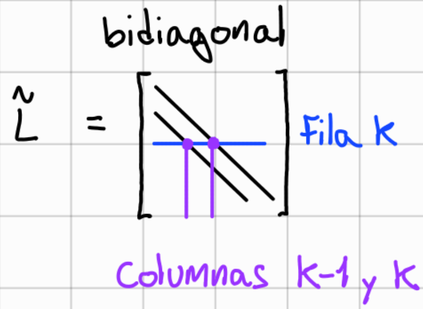
$\hookrightarrow l_k \neq 0$

Veamos qué pasa con la fila $k < n$ de $\tilde{L} l$.

$$(\tilde{L} l)_k = \sum_{i=1}^{n} \tilde{L}_{ki} l_i$$

$$= \tilde{L}_{k\,k-1} \underbrace{l_{k-1}}_{=0} + \tilde{L}_{kk} l_k$$

$$= \tilde{L}_{kk} l_k \neq 0 \quad \text{Absurdo}$$



Pues supusimos $l_k \neq 0$ y $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^T$ es la factorización de Cholesky, luego la diagonal de $\tilde{L}$ es > 0.

$\therefore \; l = (0, \cdots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$ y L resulta bidiagonal.

Fata probar el caso base. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tridiagonal y sdp.
Si $A = LL^T$ es la factorización de Cholesky,
QVQ L es bidiagonal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

Basta ver que $l_{31} = 0$ para que L sea bidiagonal.
Como A es tridiagonal: $\text{Fila}_3(L) \cdot \text{Col}_1(L^T) = 0$.
$(l_{31}, l_{32}, l_{33}) \cdot (l_{11}, 0, 0) = l_{31} \cdot l_{11} = 0 \iff l_{31} = 0$
Pues $l_{11} \neq 0$ por estar en la diagonal de L (por Cholesky).