5. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Probar que x^* es tal que $\|b - Ax^*\|_2 = \text{mín}\{\|b - Aw\|_2 : w \in \mathbb{R}^n\}$ si y sólo si $b - Ax^* \in Im(A)^\perp$.

b) Usar el ejercicio anterior para demostrar que $x \in \mathbb{R}^n$ resuelve el problema de cuadrados mínimos para el sistema $Ax = b$ si y sólo si $A^tAx = A^tb$ (ecuaciones normales).

a)

($\Rightarrow$)

Sea x^* tq $\|b - Ax^*\|_2 = \min\limits_{w\in\mathbb{R}^n} \|b - Aw\|_2$.

$Im(A) \oplus Im(A)^\perp = \mathbb{R}^m$

$b \in \mathbb{R}^m$ se puede escribir como:

$b = b^{(1)} + b^{(2)}$ con $b^{(1)} \in Im(A)$, $b^{(2)} \in Im(A)^\perp$

$$\min_{w\in\mathbb{R}^n} \|b - Aw\|_2 = \min_{w\in\mathbb{R}^n} \|b - Aw\|_2^2$$

$$= \min_{w\in\mathbb{R}^n} \|b^{(1)} + b^{(2)} - Aw\|_2^2$$

$$= \min_{w\in\mathbb{R}^n} \|\underbrace{b^{(1)} - Aw}_{\in Im(A)} + \underbrace{b^{(2)}}_{\in Im(A)^\perp}\|_2^2$$

$(b^{(1)} - Aw) \perp b^{(2)}$ Pitágoras

$$= \min_{w\in\mathbb{R}^n} \left(\|b^{(1)} - Aw\|_2^2 + \underbrace{\|b^{(2)}\|_2^2}_{\text{no depende de } w}\right)$$

$$= \min_{w\in\mathbb{R}^n} \|b^{(1)} - Aw\|_2^2$$

$= 0$ con w tq $Aw = b^{(1)}$ pues $b^{(1)} \in Im(A)$

Notemos que siempre existe w tq $Aw = b^{(1)}$.

Llamemos x^* a uno de esos w. Es decir sea x^* tq $Ax^* = b^{(1)}$.

Sabemos que $b = b^{(1)} + b^{(2)}$ y $Ax^* = b^{(1)}$.

$$\begin{aligned} b = b^{(1)} + b^{(2)} &\iff b^{(1)} = b - b^{(2)} \\ &\iff Ax^* = b - b^{(2)} \\ &\iff b - Ax^* = b^{(2)} \in \mathrm{Im}(A)^{\perp} \\ &\iff b - Ax^* \in \mathrm{Im}(A)^{\perp} \end{aligned}$$

b)

En el problema de cuadrados mínimos buscamos un x tq minimice $\|b - Ax\|_2$. Por el inciso a) vimos que esto pasa sii $b - Ax \in \mathrm{Im}(A)^{\perp}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(A)^{\perp} = \mathrm{Nu}(A^T) \quad &\iff b - Ax \in \mathrm{Nu}(A^T) \\ &\iff A^T(b - Ax) = 0 \\ &\iff A^T A x = A^T b \end{aligned}$$

ecuaciones normales