

9. Consideremos el sistema $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times 2}$, tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \end{bmatrix}$$

- a) ¿Se pueden utilizar las ecuaciones normales?
- b) Mostrar algún $x_0 \in \text{Nu}(A)$.
- c) Encontrar la solución de $Ax = b$ y verificar que soluciona el problema de cuadrados mínimos.
- d) ¿Es ésta solución única?

a)

Sí, siempre existe solución al problema de cuadrados mínimos.
Puede no ser única.

b)

$$x_0 = (1, -2) \in \text{Nu}(A)$$

$$Ax_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ \vdots \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^n$$

c)

$$A^T A = \begin{matrix} 2 \times n \\ \begin{bmatrix} 2 & \dots & 2 \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} n \times 2 \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} 2 \times 2 \\ \begin{bmatrix} 4n & 2n \\ 2n & n \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A^T b = \begin{matrix} 2 \times n \\ \begin{bmatrix} 2 & \dots & 2 \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} n \times 1 \\ \begin{bmatrix} 3 \\ \vdots \\ 3 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 6n \\ 3n \end{bmatrix}$$

Por ecuaciones normales $Ax = b \Leftrightarrow A^T Ax = A^T b$.

$$\begin{bmatrix} 4n & 2n \\ 2n & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6n \\ 3n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n x_1 + 2n x_2 = 6n \\ 2n x_1 + n x_2 = 3n \end{cases}$$

$x = (1, 1)$ es solución.

Verificamos que $Ax = b$.

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \vdots \\ 3 \end{bmatrix}$$

d)

La solución no es única porque las columnas de A no son LI.