9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica tal que

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0 \text{ para } 1 \leqslant i \leqslant n$$

Demostrar que A es definida positiva.

QVQ: A simétrica y $\det(A_k) > 0$ para toda A_k submatriz principal de A de $\mathbb{R}^{k\times k}$ entonces A es definida positiva.

$$\det(A_k) > 0 \quad \forall k \leqslant n \quad \Rightarrow \quad A_k \text{ inversible } \forall k \leqslant n$$

A tiene factorización LU única porque todas sus submatrices principales son inversibles.

$A = A^T$ por hipótesis (A simétrica) y $A = LU$.

$$A = A^T \quad \Leftrightarrow \quad LU = (LU)^T = U^T L^T$$

L es tri. inf. y L^T tri. sup. ambas con 1s en la diagonal
$\Rightarrow L$ y L^T son inversibles.

$$LU = U^T L^T \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{L^{-1}L}^{I}\, U (L^T)^{-1} = L^{-1} U \overbrace{L^T (L^T)^{-1}}^{I}$$
$$\Leftrightarrow \quad U (L^T)^{-1} = L^{-1} U^T$$

U y $(L^T)^{-1}$ son tri. sup. pero L^{-1} y U^T son tri. inf.

$$U(L^T)^{-1} = L^{-1}U = D \quad \Rightarrow \quad U = DL^T$$

D es una matriz diagonal pues una tri. sup. solo puede ser igual a una tri. inf. en la diagonal.

Volviendo a la factorización LU.

$A = LU = LDL^T$

$$\det(A) = \det(LDL^T) = \underbrace{\det(L)}_{=1} \cdot \det(D) \cdot \underbrace{\det(L^T)}_{=1} = \det(D)$$

L triangular con 1s en la diagonal

QVQ: $d_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

Inducción en las submatrices principales de A.

$$A = \begin{bmatrix} A_K & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_K & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_K & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_K^T & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \qquad A_K = L_K D_K L_K^T$$

Caso base $K=1$

$A_1 = a_{11} = L_1 D_1 L_1^T = 1 \cdot d_{11} \cdot 1 = d_{11}$

Por hipótesis $\det(A_1) > 0 \Rightarrow a_{11} > 0 \Rightarrow d_{11} > 0$

Paso inductivo

HI: $d_{ii} > 0 \quad \forall i < K$ QVQ: $d_{KK} > 0$

$A_K = L_K D_K L_K^T$

Por hipótesis $\det(A_K) > 0$

$$\Rightarrow \det(A_K) = \underbrace{\det(L_K)}_{=1} \cdot \det(D_K) \cdot \underbrace{\det(L_K^T)}_{=1} > 0$$

$$\Rightarrow \det(D_K) = \prod_{i=1}^{K} d_{ii} = \prod_{i=1}^{K-1} d_{ii} \cdot d_{KK} > 0$$

Por HI $d_{ii} > 0 \quad \forall i < K$

$\Rightarrow d_{KK} > 0$

$\therefore$ Por inducción probamos que $d_{ii} > 0 \quad \forall i \leq n$.

Sea $\sqrt{D}$ tal que $(\sqrt{D})_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$. Podemos tomar raíz porque todos los $d_{ii} > 0$. Entonces $D = \sqrt{D}\sqrt{D}$.

Como D diagonal $\Rightarrow \sqrt{D}$ diagonal $\Rightarrow (\sqrt{D})^T = \sqrt{D}$.

$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = L\sqrt{D}\sqrt{D}^T L^T = L\sqrt{D}(L\sqrt{D})^T$$

Sea $\tilde{L} = L\sqrt{D}$ tri. inf. por ser producto de tri. inf.
Luego $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$ es la Factorización de Cholesky de A.

$\therefore$ A es sdp. Usamos que A tiene Cholesky $\Leftrightarrow$ A sdp.