6. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, demostrar que los valores singulares de la matriz $\begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix}$ son $\sqrt{1+\sigma_i^2}$, donde I_n es la matriz indentidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$ y σ_i es el i-ésimo valor singular de A.

$$B = \begin{bmatrix} I_n \\ A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times n}$$

Buscamos los valores singulares de B viendo los autovalores de BB^T.

$$BB^T = \begin{bmatrix} I_n \\ A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n & A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & A^T \\ A & AA^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

$\det(BB^T - \lambda I) =$ no se cómo calcular esto

Probemos con B^TB.

$$B^TB = \begin{bmatrix} I_n & A^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n + AA^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\begin{aligned} \det(B^TB - xI) &= \det(I + AA^T - xI) \\ &= \det(AA^T + (1-x)I) \\ &= \det(AA^T - \tilde{x}I) \qquad \text{con } \tilde{x} = -(1-x) = x-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(B^TB - xI) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \det(AA^T - \tilde{x}I) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \tilde{x} = \sigma_i^2 \qquad \sigma_i \text{ valor singular de } A \\ &\Leftrightarrow \quad x - 1 = \sigma_i^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 + \sigma_i^2 \qquad \forall i = 1 \dots n \end{aligned}$$

$\therefore$ Luego los valores singulares de B son:

$$\sigma_{B,i}^2 = 1 + \sigma_{A,i}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{B,i} = \sqrt{1+\sigma_{A,i}^2} \qquad \forall i = 1 \dots n$$