16. Sean las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que A es definida positiva y B es no singular si y sólo si BAB^t es definida positiva.

($\Rightarrow$) QVQ: A dp y B inversible $\Rightarrow$ BAB^T dp

BAB^T dp $\iff$ $x^T BAB^T x > 0 \quad \forall x \neq 0$

Sea $\tilde{x} = B^T x$. $\quad \tilde{x}^T = (B^T x)^T = x^T B$

$\tilde{x} \neq 0$ porque $x \neq 0$ y B^T inversible (porque B inversible).

$x^T BAB^T x = \tilde{x}^T A \tilde{x} > 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0$ porque A dp

$\therefore$ BAB^T dp.

($\Leftarrow$) QVQ: BAB^T dp $\Rightarrow$ A dp y B inversible

Supongamos B no inversible. Entonces B^T tampoco es inversible.

$\exists x \neq 0$ tal que $B^T x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^T BA\underbrace{B^T x}_{0} = 0$

Absurdo pues $x^T BAB^T x > 0 \quad \forall x \neq 0$ por ser dp.

$\therefore$ B es inversible (B^T también).

Ahora QVQ: BAB^T dp y B inversible $\Rightarrow$ A dp

A dp $\iff$ $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

B^T inversible $\Rightarrow$ $x = B^T\tilde{x}$ con $\tilde{x} \neq 0$ porque $x \neq 0$

$$\begin{aligned} A \text{ dp} &\iff (B^T\tilde{x})^T A B^T \tilde{x} > 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0 \\ &\iff \tilde{x}^T BAB^T \tilde{x} > 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0 \end{aligned}$$

$\downarrow$

BAB^T dp por hipótesis

$\therefore$ A es dp.