5. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Probar que x^* es tal que $\|b - Ax^*\|_2 = \text{mín}\{\|b - Aw\|_2 \,:\, w \in \mathbb{R}^n\}$ si y sólo si $b - Ax^* \in Im(A)^\perp$.

b) Usar el ejercicio anterior para demostrar que $x \in \mathbb{R}^n$ resuelve el problema de cuadrados mínimos para el sistema $Ax = b$ si y sólo si $A^tAx = A^tb$ (ecuaciones normales).

a)

Sea x^* tq $\|b-Ax^*\|_2 = \min\limits_{w\in\mathbb{R}^n} \|b-Aw\|_2 \iff \|b-Ax^*\|_2^2 = \min\limits_{w\in\mathbb{R}^n} \|b-Aw\|_2^2$

$Im(A) \oplus Im(A)^\perp = \mathbb{R}^m$

$b \in \mathbb{R}^m$ se puede escribir como:

$b = b^{(1)} + b^{(2)}$ con $b^{(1)} \in Im(A)$, $b^{(2)} \in Im(A)^\perp$

$$\min_{w\in\mathbb{R}^n} \|b - Aw\|_2^2 = \min_{w\in\mathbb{R}^n} \|b^{(1)} + b^{(2)} - Aw\|_2^2$$

$$= \min_{w\in\mathbb{R}^n} \|\underbrace{b^{(1)} - Aw}_{\in Im(A)} + \underbrace{b^{(2)}}_{\in Im(A)^\perp}\|_2^2$$

$(b^{(1)} - Aw) \perp b^{(2)}$ Pitágoras

$$= \min_{w\in\mathbb{R}^n} \left(\|b^{(1)} - Aw\|_2^2 + \underbrace{\|b^{(2)}\|_2^2}_{\text{no depende de } w}\right)$$

$$= \min_{w\in\mathbb{R}^n} \left(\underbrace{\|b^{(1)} - Aw\|_2^2}\right) + \|b^{(2)}\|_2^2$$

$b^{(1)} \in Im(A) \Rightarrow$ se alcanza el mínimo cuando w es tq $Aw = b^{(1)} \Rightarrow \|b^{(1)} - Aw\|_2^2 = 0$

Notemos que siempre existe w tq $Aw = b^{(1)}$.

Llamemos x^* a uno de esos w. Es decir sea x^* tq $Ax^* = b^{(1)}$.

Sabemos que $b = b^{(1)} + b^{(2)}$ y $Ax^* = b^{(1)}$.

$$\begin{aligned} b = b^{(1)} + b^{(2)} \iff & b^{(1)} = b - b^{(2)} \\ \iff & Ax^* = b - b^{(2)} \\ \iff & b - Ax^* = b^{(2)} \in Im(A)^{\perp} \\ \iff & b - Ax^* \in Im(A)^{\perp} \end{aligned}$$

b)

En el problema de cuadrados mínimos buscamos un x tq minimice $\|b - Ax\|_2$. Por el inciso a) vimos que esto pasa sii $b - Ax \in Im(A)^{\perp}$.

$$\begin{aligned} Im(A)^{\perp} = Nu(A^T) \quad \iff & b - Ax \in Nu(A^T) \\ \iff & A^T(b - Ax) = 0 \\ \iff & A^T A x = A^T b \end{aligned}$$

ecuaciones normales