12. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no nula y nilpotente ($A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$). Probar que A no es diagonalizable.

Supongamos que sí es diagonalizable.
$\exists D$ y $\exists S$ inversible tq $A = SDS^{-1}$.

Por ej10: $A^k = SD^kS^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
A^k = SD^kS^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad SD^kS^{-1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad SD^kS^{-1}S = 0 \cdot S \\
&\Leftrightarrow \quad S^{-1}SD^k = S^{-1} \cdot 0 \\
&\Leftrightarrow \quad D^k = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad D = 0
\end{aligned}
$$

$D = 0 \Rightarrow A = SDS^{-1} = 0$ Absurdo pues $A \neq 0$ por hipótesis.

$\therefore$ A no diagonalizable.

Alternativa para ver que $D = 0$.

$A^k = 0 = SD^kS^{-1}$
S inversible $\Rightarrow S \neq 0 \Rightarrow SD^kS^{-1} = 0 \Leftrightarrow D = 0$