14. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Probar:

a) $AB = AC$ entonces $B = C$ ¿Es necesario que A sea inversible para probarlo?

b) $AB = 0$ entonces $B = 0$ ¿Es necesario que A sea inversible para probarlo?

a)

$$AB = AC \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}B = \underbrace{A^{-1}A}_{I}C \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C$$

A^{-1} existe por hipótesis por ser A inversible

Veamos si es necesario que A sea inversible.

A inversible $\Leftrightarrow Nu(A) = \{0\} \Leftrightarrow (Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

$$AB = AC \Leftrightarrow AB - AC = 0 \Leftrightarrow A\underbrace{(B-C)}_{} = 0$$

$B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$

Si A no fuese inversible no podríamos afirmar que $B - C = 0$.

b)

$AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}0 \Rightarrow IB = I0 \Rightarrow B = 0$

A^{-1} existe por hipótesis por ser A inversible

En este caso no necesariamente A tiene que ser inversible.

A no inversible $\Leftrightarrow Nu(A) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^{n\times m}, x \neq 0$ tal que $Ax = 0$

Sea $B \in Nu(A)$, $B \neq 0$ tal que $AB = 0$. $AB = 0 \not\Rightarrow B = 0$.

Vale para $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$?