5. Sean $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que una factorización LU de A_h es L_hU para $h = 1, \ldots, k$, donde L_h tiene unos en la diagonal y U es la misma para toda A_h. Sea $A = \sum_{h=1}^{k} A_h$. Probar:

a) A tiene factorización LU, L con unos en la diagonal.

b) Para $1 \leqslant j < i \leqslant n$, el multiplicador M_{ij} de la triangulación gaussiana de A es el promedio de los multiplicadores de la posición (i, j) en las triangulaciones de las A_h. Es decir, $M_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{h=1}^{k} M_{ij}^h$, con M_{ij}^h el multiplicador de la posición (i, j) en la triangulación de A_h.

a)

$$A = \sum_{h=1}^{K} A_h = \sum_{h=1}^{K} L_h U = \left(\sum_{h=1}^{K} L_h\right) \cdot U$$

Por hipótesis $A_h = L_h U$ factorización LU de A_h.

Cada L_h tiene 1s en la diagonal principal. Al sumar las K L_h nos quedan Ks en la diagonal. Necesitamos poner 1s para que sea una factorización LU de A.

$$A = \left(\sum_{h=1}^{K} L_h\right) \cdot U \underset{K \neq 0}{\Rightarrow} A = \frac{K}{K} \left(\sum_{h=1}^{K} L_h\right) \cdot U$$

$$= \frac{1}{K} \left(\sum_{h=1}^{K} L_h\right) \cdot KU$$

Tomamos $L_A = \frac{1}{K}\left(\sum_{h=1}^{K} L_h\right)$, $U_A = KU$.

Luego $L_A U_A = A$ es una factorización LU.

b) Preguntar

Si $A = L_A U_A$, el multiplicador M_{ij} de la triangulación de A es:
$M_{ij} = (L_A)_{ij} \quad \forall\, 1 \leq j < i \leq n$

$L_A = \frac{1}{K} \sum_{h=1}^{K} L_h \quad \Rightarrow \quad (L_A)_{ij} = \frac{1}{K} \sum_{h=1}^{K} (L_h)_{ij}$

Sea M_{ij}^h el multiplicador de la triangulación de $A^h = L_h U$.

$\Rightarrow M_{ij}^h = (L_h)_{ij}$

Entonces $M_{ij} = \frac{1}{K} \sum_{h=1}^{K} M_{ij}^h = \frac{1}{K} \sum_{h=1}^{K} (L_h)_{ij}$.