20. Se desea hallar la factorización $A = RQ$ de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con R triangular superior y Q ortogonal. Sea $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal y $\widetilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular superior tal que $R = P\widetilde{R}^t P$ y $Q = P\widetilde{Q}^t$, donde $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de permutación definida como:

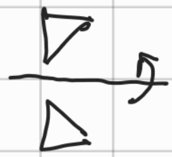
$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j = n+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que R es triangular superior y Q es ortogonal.

b) Probar que $A = RQ$ si y sólo si $(PA)^t = \widetilde{Q}\widetilde{R}$ es la factorización QR de $(PA)^t$.

c) Describir un algoritmo para realizar la factorización RQ asumiendo disponible una función que calcula la factorización QR.

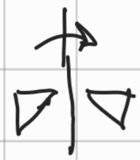
$$P = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$



a)

$\tilde{R}$ tri. sup. $\iff$ $\tilde{R}^T$ tri. inf. $\qquad P\tilde{R}^T = $ ◸

$P\tilde{R}^T P$ tri. sup. formalizar $\qquad P\tilde{R}^T P = $ ◹



$\tilde{Q}$ ortogonal $\Rightarrow$ $\tilde{Q}^T$ ortogonal

P y $\tilde{Q}^T$ ortogonales $\Rightarrow$ $P\hat{Q}^T$ ortogonal

producto de ortogonales es ortogonal

b)

$A = RQ \iff (PA)^T = \tilde{Q}\hat{R}$ $\qquad R = P\tilde{R}^T P \qquad Q = P\hat{Q}^T$

$$\begin{aligned}
(PA)^T = \hat{Q}\hat{R} \quad &\iff \quad PA = (\hat{Q}\hat{R})^T = \tilde{R}^T\tilde{Q}^T \\
&\iff \quad A = P\tilde{R}^T\tilde{Q}^T \\
&\iff \quad A = P\hat{R}^T I \tilde{Q}^T = \underbrace{P\hat{R}^T P}_{R}\underbrace{P\tilde{Q}^T}_{Q} \\
&\iff \quad A = RQ
\end{aligned}$$