4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. El espacio $\langle \{Ae_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}\rangle$, conocido como *espacio columna*, es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ que sabemos coincide con $Im(A)$. Análogamente, se define el *espacio fila* de A como el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A.

   a) Probar que el *espacio fila* de A es $Nu(A)^{\perp}$.

   b) Probar que $Im(A)^{\perp} = Nu(A^t)$.

a)

$$e_i^T A = A^T e_i = \text{Fila}_i(A) \qquad A = \begin{array}{c c} n & \\ \begin{bmatrix} - f_1 - \\ \vdots \\ - f_m - \end{bmatrix} & m \end{array} \qquad A^T = \begin{array}{c c} m & \\ \begin{bmatrix} | & & | \\ f_1 & \cdots & f_m \\ | & & | \end{bmatrix} & n \end{array}$$

Espacio Fila $F = \langle \{e_i^T A\}_{1\leq i\leq m}\rangle = \langle \{A^T e_i\}_{1\leq i\leq m}\rangle$

$F \subseteq Nu(A)^{\perp}$

Sea $X \in F$. QVQ: $X \in Nu(A)^{\perp} \iff \forall Y \in Nu(A) \subseteq \mathbb{R}^n .\ Y^T X = 0$

$X \in F \Rightarrow X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^T e_i$ combinación lineal de las filas

$$Y^T X = Y^T \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A^T e_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i Y^T A^T e_i = 0$$

$$\iff \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i Y^T A^T e_i\right]^T = 0^T = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i^T AY = 0$$

$Y \in Nu(A) \Rightarrow AY = 0$

$\therefore \forall X \in F .\ \forall Y \in Nu(A).\ X \perp Y \Rightarrow X \in Nu(A)^{\perp} \Rightarrow F \subseteq Nu(A)^{\perp}$

$Nu(A)^{\perp} \subseteq F$

Sea $x \in Nu(A)^{\perp}$. $\forall y \in Nu(A) \subseteq \mathbb{R}^n$. $x^T y = 0$

Preguntar

b) QVQ: $Im(A)^{\perp} = Nu(A^T)$

$\subseteq$

$$
\begin{aligned}
x \in Im(A)^{\perp} &\iff x^T y = 0 \quad \forall y \in Im(A) = \{y : \exists z \text{ tq } Az = y\} \\
&\iff x^T A z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \\
&\iff (A^T x)^T z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Si vale $\forall z$ en particular vale para $\forall e_i$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow (A^T x)^T e_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n \qquad \text{Revisar dimensiones} \\
&\Rightarrow A^T x = 0 \\
&\Rightarrow x \in Nu(A^T)
\end{aligned}
$$

$\supseteq$

$$
\begin{aligned}
z \in Nu(A^T) &\iff A^T z = 0 \\
&\Rightarrow (A^T z)^T y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\iff z^T A y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\iff z^T x = 0 \quad \forall x \in Im(A) \subseteq \mathbb{R}^m \\
&\iff z \perp x \quad \forall x \in Im(A) \\
&\iff z \in Im(A)^{\perp}
\end{aligned}
$$

$\therefore \; Im(A)^{\perp} = Nu(A^T)$