3. Sea un subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^m$, y sea P una proyección ortogonal sobre S, es decir, $P^2 = P$, $P^t = P$ y $Im(P) = S$. Sean también $b \in \mathbb{R}^m$ y $Pb = y$.

a) Probar que $\forall x \in \mathbb{R}^m$ vale que $(I - P)x \in \{v \in \mathbb{R}^m \mid v \perp u \text{ para todo } u \in S \text{ no nulo}\} = S^\perp$.

b) Probar que $b - y \in S^\perp$.

c) Usar Pitágoras para verificar que y es el único vector en S tal que

$$\|b - y\|_2 = \min_{s \in S} \|b - s\|_2$$

$$S = Im(P) \Rightarrow S^\perp = Im(P)^\perp = Nu(P^T) \underset{}{\overset{P^T = P}{=}} Nu(P)$$

a)

QVQ: $\forall x \in \mathbb{R}^m .\ (I-P)x \in S^\perp$

$(I-P)x \in S^\perp \iff (I-P)x \in Nu(P)$

QVQ: $\forall x \in \mathbb{R}^m .\ P(I-P)x = 0$

$$P(I-P)x = (P - P^2)x \underset{P^2 = P}{=} (P - P)x = 0x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

b)

QVQ: $b - y \in S^\perp \iff b - y \in Nu(P) \iff P(b-y) = 0$

$$P(b-y) = Pb - Py \underset{Pb = y}{=} y - Py = (I-P)y \in S^\perp \text{ por inciso a)}$$

c)

QVQ: $\|b-Y\|_2 = \min_{v \in S} \|b-v\|_2 \iff \|b-Y\|_2^2 = \min_{v \in S} \|b-v\|_2^2$

$S \oplus S^{\perp} = \mathbb{R}^m \quad \Rightarrow \quad Im(P) \oplus Nu(P) = \mathbb{R}^m$

$b \in \mathbb{R}^m \Rightarrow b = b^{(1)} + b^{(2)}$ con $b^{(1)} \in \overset{S}{\overset{\shortparallel}{Im(P)}}$, $b^{(2)} \in \overset{S^{\perp}}{\overset{\shortparallel}{Nu(P)}}$

$$\min_{v \in S} \|b-v\|_2^2 = \min_{v \in S} \| \underbrace{b^{(2)}}_{\in S^{\perp}} + \underbrace{b^{(1)} - v}_{\in S \text{ pues } b^{(1)}, v \in S} \|_2^2$$

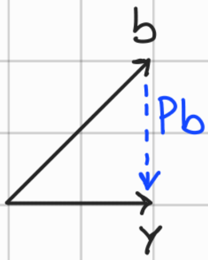
Por pitágoras (ejercicio 2)

$$= \min_{v \in S} \left(\underbrace{\|b^{(2)}\|_2^2}_{\text{no depende de } v} + \|b^{(1)} - v\|_2^2 \right)$$

$$= \min_{v \in S} \|b^{(1)} - v\|_2^2 = 0$$

$b^{(1)}, v \in S \Rightarrow$ Tomamos $v = b^{(1)}$

Basta ver que $\|b-Y\|_2^2 = 0$.



$Pb = Y$ es la proyección ortogonal de b.

$$\|b-Y\|_2^2 \underset{Y = Pb}{=} \|b-Pb\|_2^2 = \|Pb - P^2 b\|_2^2 \underset{P^2 = P}{=} \|Pb - Pb\|_2^2 = 0$$

P ortogonal $\Rightarrow$ preserva la norma

$\therefore \|b-Y\|_2 = \min_{v \in S} \|b-v\|_2$