Métodos Numéricos-2024

Autovalores

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Autovalores

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A sii existe $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v$$

v es autovector asociado a λ

Radio espectral de A : $\quad \rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } A\}$

- $A - \lambda I$ es una matriz singular
- Polinomio característico: $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$
  λ es autovalor sii λ es raíz de $P(\lambda)$
- A tiene n autovalores, algunos pueden tener multiplicidad mayor a 1.
- Si v es autovector, entonces αv es autovector.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix} \; det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 7-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -6 & -2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (7-\lambda)\; det(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2-\lambda \end{bmatrix}) - 0\; det(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2-\lambda \end{bmatrix}) +$$

$$(-6)\; det(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2-\lambda & 0 \end{bmatrix})$$

$$= (7-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) + (-6)(-(2-\lambda)3)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

Autovalores

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad P(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

$$\text{Autovalores: } \lambda^1 = 2 \quad \lambda^2 = 4 \quad \lambda^3 = 1$$

Autovalores

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = 2$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{rrrl} 5v_1 & +2v_2 & +3v_3 & = 0 \\ 0v_1 & +0v_2 & +0v_3 & = 0 \Longrightarrow v_1 = -v_3 \quad v_2 = v_3 \\ -6v_1 & -2v_2 & -4v_3 & = 0 \end{array}$$

$$v^1 = (-1, 1, 1)$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^2 = 4$

$$(A - \lambda^2 I)v = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -6 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{rrrl} 3v_1 & +2v_2 & +3v_3 = 0 & \\ 0v_1 & -2v_2 & +0v_3 = 0 & \Longrightarrow v_1 = -v_3 \quad v_2 = 0 \\ -6v_1 & -2v_2 & -6v_3 = 0 & \end{array}$$

$$v^2 = (-1, 0, 1)$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 1$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{llll} 6v_1 & +2v_2 & +3v_3 = 0 & \\ 0v_1 & +1v_2 & +0v_3 = 0 & \Longrightarrow v_3 = -2v_1 \quad v_2 = 0 \\ -6v_1 & -2v_2 & -3v_3 = 0 & \end{array}$$

$$v^3 = (1, 0, -2)$$

Autovalores

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda^1 = 2 \quad v^1 = (-1, 1, 1)$

$\lambda^2 = 4 \quad v^2 = (-1, 0, 1)$

$\lambda^3 = 1 \quad v^3 = (1, 0, -2)$

Observación

3 autovalores distintos

3 autovectores (uno por autovalor) linealmente independientes (BASE!)

Autovalores

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

Autovalores: $\lambda^1 = 1 \quad \lambda^2 = 1 \quad \lambda^3 = 2$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{lll} 0v_1 & +0v_2 & +1v_3 = 0 \\ 0v_1 & +0v_2 & +1v_3 = 0 \Longrightarrow v_3 = 0 \\ 0v_1 & +0v_2 & +1v_3 = 0 \end{array}$$

$$v^1 = (1, 0, 0) \quad v^2 = (0, 1, 0)$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 2$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{lll} -v_1 & +0v_2 & +1v_3 = 0 \\ 0v_1 & -1v_2 & +1v_3 = 0 \Longrightarrow v_1 = v_3 \quad v_2 = v_3 \\ 0v_1 & +0v_2 & +0v_3 = 0 \end{array}$$

$$v^3 = (1, 1, 1)$$

Autovalores

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda^1 = \lambda^2 = 1 \quad v^1 = (1,0,0), v^2 = (0,1,0)$

$\lambda^3 = 2 \quad v^2 = (1,1,1)$

Observación

3 autovalores, uno de ellos con multiplicidad 2
3 autovectores (uno por autovalor contando multiplicidad)
linealmente independientes (BASE!)

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

Autovalores: $\lambda^1 = 1 \quad \lambda^2 = 1 \quad \lambda^3 = 2$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$

$$(A - \lambda^1 I)v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{lll} 0v_1 & +1v_2 & +1v_3 = 0 \\ 0v_1 & +0v_2 & +1v_3 = 0 \Longrightarrow v_2 + v_3 = 0 \quad v_3 = 0 \\ 0v_1 & +0v_2 & +1v_3 = 0 \end{array}$$

$$v^1 = (1, 0, 0)$$

Ejemplo

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda^3 = 2$

$$(A - \lambda^3 I)v = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{llll} -v_1 & +v_2 & +v_3 = 0 & \\ 0v_1 & -1v_2 & +1v_3 = 0 & \Longrightarrow v_1 = 2v_2 \quad v_3 = v_2 \\ 0v_1 & +0v_2 & +0v_3 = 0 & \end{array}$$

$$v^3 = (2, 1, 1)$$

Autovalores

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = \lambda^2 = 1 \quad v^1 = (1, 0, 0)$$

$$\lambda^3 = 2 \quad v^3 = (2, 1, 1)$$

Observación

3 autovalores, uno de ellos con multiplicidad 2
2 autovectores (uno por autovalor distinto) linealmente independientes (NO es base!)

Autovalores

Algunas propiedades

- λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda - \alpha$ es autovalor de $A - \alpha I$
- λ autovalor de A y v autovector asociado $\Rightarrow (\lambda)^k$ es autovalor de A^k con v autovector asociado.
- Q matriz ortogonal $\Rightarrow$ sus autovalores reales son 1 o -1
- Si $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^k$ son autovalores distintos con autovectores asociados $v^1, v^2, \ldots, v^k$, entonces los autovectores son linealmente independientes.
- A y A^t tienen los mismos autovalores.

Autovalores

Disco de Gershgorin

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $r_i = \sum_{k=1,k\neq i}^{n} |a_{ik}|$ para $i = 1, \ldots, n$

Disco de Gershgorin

$$D_i = \{x \in \mathbb{C} : |x - a_{ii}| \leq r_i\} \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

Sea λ autovalor de A $\Longrightarrow \lambda \in D_i$ para algún $i = 1, \ldots, n$

Si $M = D_{i_1} \cup D_{i_2} \ldots D_{i_m}$ es disjunto con la unión de los restantes discos D_i entonces hay exactamente m autovalores de A (contados con su multiplicidad) en M.

Autovalores

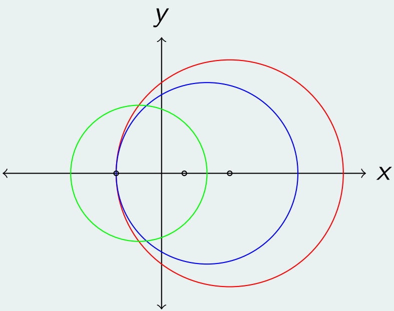
Disco de Gershgorin-Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \lambda^1 = 1 \quad \lambda^2 = 3 \quad \lambda^3 = -2$$

$$D_1 = \{x : |x-3| \leq 5\}$$

$$D_2 = \{x : |x-2| \leq 4\}$$

$$D_3 = \{x : |x+1| \leq 3\}$$



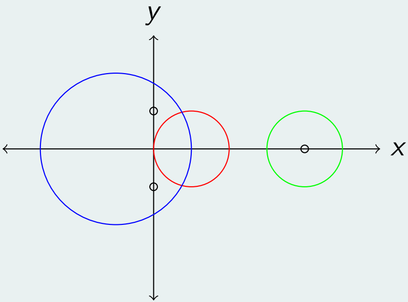
Disco de Gershgorin-Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda^1 = i \quad \lambda^2 = -i \quad \lambda^3 = 4$$

$$D_1 = \{x : |x-1| \leq 1\}$$

$$D_2 = \{x : |x+1| \leq 2\}$$

$$D_3 = \{x : |x-4| \leq 1\}$$



Autovalores

Definición: $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ son matrices semejantes si existe $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matriz inversible, tal que

$$A = P^{-1} B P$$

Propiedad: Si A y B son semejantes tienen los mismos autovalores.

Definición: A es diagonalizable por semejanza si es semejante a una matriz diagonal.

Propiedad: A es diagonalizable por semejanza sii los autovectores forman una base.

Autovalores

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda^1 = 2 \quad v^1 = (-1, 1, 1)$

$\lambda^2 = 4 \quad v^2 = (-1, 0, 1)$

$\lambda^3 = 1 \quad v^3 = (1, 0, -2)$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = P^{-1} D P$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^1 = \lambda^2 = 1 \quad v^1 = (1,0,0), v^2 = (0,1,0)$$

$$\lambda^3 = 2 \quad v^2 = (1,1,1)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = P^{-1}DP$$

Autovalores-Propiedades

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Si A es simétrica, sus autovalores son reales.
- Si A tiene un autovalor real, entonces existe un autovector asociado con coeficientes reales.
- Sea A es simétrica y λ^1 y λ^2 autovalores distintos con v^1 y v^2 autovectores asociados. Entonces v^1 y v^2 son ortogonales.
- Sea $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz ortogonal. λ es autovalor de $A \Leftrightarrow \lambda$ es autovalor de $Q^t AQ$.

Autovalores-Propiedades

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- Si A tiene todos sus autovalores reales, existe $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz ortogonal tal que $Q^t A Q = T$ con $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz triangular superior.
- Si A es simétrica, entonces T es diagonal. Los elementos de la diagonal de T son los autovalores y las columnas de Q los autovectores.
- Si A es simétrica tiene base de autovectores.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ sus n autovalores con $v^1, \ldots, v^n$ los autovectores asociados que conforman una base.

Supongamos que $|\lambda^1| > |\lambda^2|, \ldots, \geq |\lambda^n|$.

Dado $q^0 \in \mathbb{R}^n$, $||q^0||_2 = 1$, la sucesión $\{q^k\}$ definida como

$$\begin{array}{c} \text{Para k=1, } \ldots \\ z^k = Aq^{k-1} \\ q^k = \frac{z^k}{||z^k||_2} \end{array}$$

converge al autovector v^1. Además $\lambda_k = (q^k)^t A q^k$ converge a λ^1.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
λ^1 autovalor con v^1 autovector asociado, $||v^1||_2 = 1$

Sea $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz ortogonal tal que $Hv^1 = e_1$

$$HAH^t = \begin{bmatrix} \lambda^1 & a^t \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Como A y HAH^t tienen los mismo autovalores, los otros autovalores de A corresponden a los autovalores de B.

Autovalores: bibliografía

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Applied Numerical Linear Algebra, James Demmel, SIAM, 1997.
- Matrix Analysis, Roger Horn and Charles Johnson, Cambridge Univ Press, 2010.
- Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Carl Meyer, SIAM, 2000.
- Applied Linear Algebra, Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban, Springer International Publishing, 2018.
- Numerical Analysis, Timothy Sauer, Pearson, 2018.
- An Introduction to Numerical Analysis, Endre Süli, David F. Mayers, Cambridge University Press, 2003.
- Numerical Linear Algebra, Lloyd N. Trefethen, SIAM, 1997.
- Fundamentals of Matrix Computations, David Watkins, Wiley, 2010.