2. Sea $A$ una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar las afirmaciones siguientes:

a) Si $A$ es simétrica entonces todos sus autovalores son reales.

b) Si todos los autovalores de $A$ son reales, entonces todos los autovectores pueden tomarse en $\mathbb{R}^n$ (es decir, ningún autovector es puramente complejo).

c) Si $A$ es simétrica y definida positiva (resp. negativa) entonces todos sus autovalores son reales positivos (resp. negativos).

d) Si $A$ es ortogonal entonces todos sus autovalores tienen módulo 1.

e) Si $A$ es antisimétrica entonces 0 es el único autovalor real posible.

f) Si $A$ es triangular entonces sus autovalores son los elementos de la diagonal.

a) QVQ: $A$ simétrica $\Rightarrow$ autovalores reales

Sea $\lambda$ autovalor de $A$ simétrica. $\exists v \neq 0$ tq $Av = \lambda v$.

$$Av = \lambda v \iff \bar{v}^T A v = \bar{v}^T \lambda v \iff \bar{v}^T A v = \lambda \bar{v}^T v$$

Multiplicamos ambos lados por $\bar{v}$, el conjugado de $v$, que obtiene a partir del conjugado de cada coordenada de $v$.

Obs: $\bar{v}v^T \in \mathbb{R}$ $\quad (\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n)^T \cdot (v_1, \cdots, v_n) = \bar{v}_1 v_1 + \cdots + \bar{v}_n v_n$

y cada $\bar{v}_i v_i \in \mathbb{R}$ pues si $v_i = a + bi$ entonces

$(a-bi)(a+bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

Por otro lado:

$$Av = \lambda v \iff \bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \iff v^T \bar{A}\bar{v} = v^T \bar{\lambda}\bar{v} \iff v^T A \bar{v} = \bar{\lambda} v^T \bar{v}$$

Primero tomamos conjugado de la igualdad $Av = \lambda v$ y luego multiplicamos ambos lados por $v^T$. A su vez $\bar{A} = A$ porque por hipótesis $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Obs: $v^T \bar{v} \in \mathbb{R}$ por la misma razón que antes.

$$\bar{v}^T A v = \lambda \bar{v}^T v \iff (\bar{v}^T A v)^T = (\lambda \bar{v}^T v)^T$$

$$\iff v^T (\bar{v}^T A)^T = \lambda \bar{v}^T v \qquad \lambda \bar{v}^T v \in \mathbb{C}$$

$$\iff v^T A^T \bar{v} = \lambda \bar{v}^T v$$

$$\iff v^T A \bar{v} = \lambda \bar{v}^T v \qquad A \text{ simétrica} \Rightarrow A^T = A$$

Obtuvimos 2 igualdades:

$$\begin{cases} v^T A \bar{v} = \lambda \bar{v}^T v \\ v^T A \bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v}^T v \end{cases}$$

$$\lambda \bar{v}^T v = \bar{\lambda} \bar{v}^T v \quad \underset{v \neq 0}{\Rightarrow} \quad \lambda = \bar{\lambda}$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es igual a $\bar{\lambda}$ entonces no tiene parte imaginaria
Sea $\lambda = a + bi$.

$$a + bi = a - bi \iff bi = -bi \iff b = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ A simétrica $\Rightarrow$ autovalores reales.

b) QVQ: autovalores reales $\Rightarrow$ autovectores en $\mathbb{R}^n$
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. $\exists v \neq 0$ tq $Av = \lambda v$. QVQ: $v \in \mathbb{R}^n$

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I) v = 0$$

$(A - \lambda I) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ porque $A, I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Luego $(A - \lambda I) v = 0$ es un sistema homogéneo en $\mathbb{R}$ y por lo tanto la solución $v$ también está en $\mathbb{R}$.

c) QVQ: A sdp $\Rightarrow$ autovalores reales y positivos

Sea $\lambda$ autovalor de A sdp. Por a) sabemos que $\lambda \in \mathbb{R}$. QVQ: $\lambda > 0$.

$\exists v \neq 0$ tq $Av = \lambda v$.

$$Av = \lambda v \quad \Rightarrow \quad v^T A v = v^T \lambda v = \lambda v^T v$$

$$A \text{ sdp} \Rightarrow v^T A v > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda v^T v > 0$$

$v^T v = \|v\|_2^2 > 0$ por axioma de norma y porque $v \neq 0$.

$$\lambda v^T v = \lambda \|v\|_2^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > 0$$

$\therefore$ A sdp $\Rightarrow$ autovalores reales y positivos.

Misma demo para $\lambda < 0$.

d) QVQ: A ortogonal $\Rightarrow$ autovalores con módulo 1

Sea $\lambda$ autovalor de A. $\exists v \neq 0$ tq $Av = \lambda v$.

$$\begin{aligned} Av = \lambda v \quad &\Rightarrow \quad \|Av\|_2 = \|\lambda v\|_2 \\ &\Rightarrow \quad \|v\|_2 = |\lambda| \cdot \|v\|_2 \\ &\Rightarrow \quad |\lambda| = 1 \end{aligned}$$

A ortogonal $\Rightarrow \|Av\|_2 = \|v\|_2$

$v \neq 0 \Rightarrow \|v\|_2 \neq 0$

$\therefore$ A ortogonal $\Rightarrow$ autovalores con módulo 1.

e) QVQ: A antisimétrica $\Rightarrow$ 0 único autovalor real posible

Sea $\lambda$ autovalor de A. $\exists v \neq 0$ tq $Av = \lambda v$.

$$
\begin{aligned}
Av = \lambda v \quad &\Rightarrow \quad v^T A v = v^T \lambda v \\
&\Rightarrow \quad v^T A v = \lambda v^T v \quad (1) \\
&\Rightarrow \quad (v^T A v)^T = (\lambda v^T v)^T \qquad \lambda v^T v \in \mathbb{C} \\
&\Rightarrow \quad v^T (v^T A)^T = \lambda v^T v \\
&\Rightarrow \quad v^T A^T v = \lambda v^T v \\
&\Rightarrow \quad v^T (-A) v = \lambda v^T v \qquad \text{A antisimétrica} \Rightarrow A^T = -A \\
&\Rightarrow \quad v^T A v = -\lambda v^T v \quad (2)
\end{aligned}
$$

Por (1) y (2) tenemos:

$$
\begin{aligned}
\lambda v^T v = -\lambda v^T v \quad &\Rightarrow \quad \lambda = -\lambda \qquad v \neq 0 \Rightarrow v^T v \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda = 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ A antisimétrica $\Rightarrow$ 0 único autovalor real posible.

f) QVQ: A triangular $\Rightarrow$ los autovalores son la diagonal

$$\text{A triangular} \quad \Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda) = P(\lambda)$$

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (a_{ii} - \lambda) = 0 \quad \text{para algún } 1 \leq i \leq n \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = a_{ii}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Las raíces de $P(\lambda)$ son todos los $a_{ii}$ para $i = 1 \ldots n$.

$\therefore$ A triangular $\Rightarrow$ los autovalores son los elementos de la diagonal.