5. Sean dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que:

a) A es inversible y sus valores singulares son iguales si y solo si es múltiplo de una matriz ortogonal.

a)

QVQ A inversible y valores singulares todos iguales $\Rightarrow A = \alpha Q$.

$A = U\Sigma V^T$ con $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma \end{bmatrix}$ σ único valor singular

A inversible $\Rightarrow$ rango$(A) = n$ $\Rightarrow$ n valores singulares $\neq 0$

Como los valores singulares son todos $\neq 0$ y a su vez todos iguales entonces resulta $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible.

También vale porque si el único valor singular fuese 0, entonces $\Sigma = 0 \Rightarrow A = U\Sigma V^T = U 0 V^T = 0$ que no es inversible y eso es absurdo porque A es inversible por hipótesis.

Dado que Σ es una matriz diagonal cuadrada con σ en la diagonal podemos escribirla como $\Sigma = \sigma I$. Notar que $\Sigma = \Sigma^T$.

Para ver que A es múltiplo de una matriz ortogonal basta ver que $A = \alpha Q$ con Q ortogonal y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$A = U\Sigma V^T = U\sigma I V^T = \sigma U V^T$

Tomamos $\alpha = \sigma$ y $Q = UV^T$ que es ortogonal por ser producto de matrices ortogonales.

$\therefore$ $A = \sigma U V^T$ con $\sigma \neq 0$ único valor singular y UV^T ortogonal.

QVQ $A = \alpha Q \Rightarrow A$ inversible y valores singulares todos iguales.

$A = \alpha Q$ es una matriz ortogonal porque Q es ortogonal.
Luego A es inversible porque toda matriz ortogonal lo es.

Buscamos los valores singulares de $A = \alpha Q$.
Para eso vemos los autovalores de AA^T.

$AA^T = \alpha Q (\alpha Q)^T = \alpha^2 QQ^T = \alpha^2 I$
$\det(AA^T - \lambda I) = \det(\alpha^2 I - \lambda I) = (\alpha^2 - \lambda)^n = 0 \iff \lambda = \alpha^2$

Los valores singulares de A son únicamente $\sigma^2 = \alpha^2 \Rightarrow \sigma = \alpha$.
$\therefore$ Todos los valores singulares de A son iguales.

En particular son $\neq 0$ porque:
Hay n valores singulares en total pues $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
A inversible $\Rightarrow$ rango$(A) = n \Rightarrow$ hay n valores singulares $\neq 0$.
$\therefore$ Todos los valores singulares de A son $\neq 0$.

b) A y B tienen los mismos valores singulares con multiplicidad si y solo si existen P, Q ortogonales tal que $A = PBQ$.

b)

QVQ A y B tienen mismos valores singulares con multiplicidad
$\Rightarrow \exists P, Q$ ortogonales tq $A = PBQ$.

A y B tienen la misma Σ en su descomposición SVD.

$$A = U_A \Sigma V_A^T$$
$$B = U_B \Sigma V_B^T$$

$$B = U_B \Sigma V_B^T \iff U_A U_B^T B V_B V_A^T = U_A \underbrace{U_B^T U_B}_{I} \Sigma \underbrace{V_B^T V_B}_{I} V_A^T$$
$$\iff \underbrace{U_A U_B^T}_{P} B \underbrace{V_B V_A^T}_{Q} = U_A \Sigma V_A^T$$
$$\overset{*}{\iff} PBQ = A$$

QVQ $\exists P, Q$ ortogonales tq $A = PBQ$
$\Rightarrow$ A y B tienen mismos valores singulares con multiplicidad

Sea $B = U_B \Sigma V_B^T$ la descomposición SVD de B.

$$A = PBQ \iff A = \underbrace{PU_B}_{U_A} \Sigma \underbrace{V_B^T Q}_{V_A^T}$$
$$\overset{*}{\iff} A = U_A \Sigma V_A^T$$

* Producto de ortogonales es ortogonal.