7. Sea A una matriz simétrica definida positiva de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que:

a) $a_{ii} > 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$.

b) A es no singular.

c) Todas las submatrices principales de A son definidas positivas.

d) $|a_{ij}|^2 \leqslant a_{ii}\, a_{jj}$ para todo $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Deducir que el elemento de módulo máximo de A está en la diagonal.

a)

A es sdp $\Rightarrow$ $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$. En particular vale para los vectores de la base canónica.

$$e_i^T A e_i > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$e_i^T A e_i = e_i^T \cdot col_i(A) = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0) \cdot col_i(A)$$
$$= 0 \cdot a_{1i} + \cdots + 1 \cdot a_{ii} + \cdots + 0 \cdot a_{ni} = a_{ii}$$

$\therefore \; a_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

b)

Supongamos que A no es inversible. $\exists x \neq 0$ tal que $Ax = 0$.

$Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x^T A x = x^T 0 = 0 \quad$ con $x \neq 0$.

Absurdo pues A es sdp. Si $x \neq 0$ entonces $x^T A x > 0$.

$\therefore$ A es inversible.

c)

Consideremos un vector cualquiera $x_k \in \mathbb{R}^k$, $x_k \neq 0$ para cualquier $k \leq n$. Podemos extender x_k a un vector de $\mathbb{R}^n$.

$x \in \mathbb{R}^n$ $\quad x = (x_k, 0)$ $\quad$ con $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ $\quad A_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ submatriz de A

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_k^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_k & * \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_k x_k \\ * \cdot x_k \end{bmatrix}$$

$$= x_k^T A x_k + 0 \cdot * \cdot x_k = x_k^T A x_k$$

A es sdp $\Rightarrow x^T A x > 0 \Rightarrow x_k^T A_k x_k > 0 \quad \forall k = 1 \ldots n$

$\therefore$ Toda submatriz principal de A es sdp.

d)

Recordemos que $a_{ij} = e_i^T A e_j$.

$$|a_{ij}|^2 \leq a_{ii} a_{jj}$$

$$\Leftrightarrow \quad |e_i^T A e_j|^2 \leq (e_i^T A e_i)(e_j^T A e_j)$$

A es sdp $\Rightarrow$
A tiene factorización de Cholesky: $A = LL^T$

$$\Leftrightarrow \quad |e_i^T L L^T e_j|^2 \leq (e_i^T L L^T e_i)(e_j^T L L^T e_j)$$

$$\Leftrightarrow \quad |\underbrace{(L^T e_i)^T}_{x^T} \underbrace{(L^T e_j)}_{y}|^2 \leq \underbrace{(L^T e_i)^T}_{x^T} \underbrace{(L^T e_i)}_{x} \underbrace{(L^T e_j)^T}_{y^T} \underbrace{(L^T e_j)}_{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad |(L^T e_i)^T (L^T e_j)|^2 \leq \|L^T e_i\|_2^2 \cdot \|L^T e_j\|_2^2$$

$x^T x = \|x\|_2^2 \quad y^T y = \|y\|_2^2$

Vale por Cauchy-Schwarz al cuadrado