6. Hallar dos bases distintas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^n$ y extenderlas a bases de $\mathbb{R}^n$.

a) $S = \langle (1, 2, 0), (1, 3, 6), (1, 7, 30) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

b) $S = \langle (1, 2), (4, 8) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$

a)

Primero vemos si S es LI.

Vectores linealmente independientes:
$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k v^k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \; \forall k = 1, \ldots, K$

Buscamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tal que:

$\alpha_1 \cdot (1,2,0) + \alpha_2 \cdot (1,3,6) + \alpha_3 \cdot (1,7,30) = 0$

Con $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = -4$:

$5 \cdot (1,3,6) - 4 \cdot (1,2,0) = (1,7,30) \quad \Rightarrow S$ no es LI

Sacamos $(1,7,30)$ ya que es combinación lineal de los otros.

$S_1 = \langle (1,2,0), (1,3,6) \rangle$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 6\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

S_1 es LI.

Para construir otra base de S basta quedarse con otro par de vectores. Por ejemplo: $S_2 = \langle (1,2,0), (1,7,30) \rangle$

Para construir una base de $\mathbb{R}^3$ agregamos un tercer vector que sea LI con los otros.

$S_1 = \langle (1,2,0), (1,3,6), (0,0,1) \rangle$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 6\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \iff \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$\Rightarrow \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow S_1$ LI

$S_2 = \langle (1,2,0), (1,7,30), (0,0,1) \rangle$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 7\alpha_2 = 0 \\ 30\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$2\alpha_1 + 7\alpha_2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \iff \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$\Rightarrow \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow S_2$ LI

b)

$S = \langle (1,2), (4,8) \rangle$

Son LI?

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 8\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -4\alpha_2 \Rightarrow 2(-4\alpha_2) + 8\alpha_2 = 0 \quad \checkmark$$

No son LI. Por ejemplo tomando $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = 1$:

$$-4 \cdot (1,2) + 1 \cdot (4,8) = (0,0)$$

Bases del subespacio: $S_1 = \langle (1,2) \rangle$ $\quad S_2 = \langle (4,8) \rangle$

Extendemos S_1 y S_2 a bases de $\mathbb{R}^2$:

$S_1 = \langle (1,2), (1,0) \rangle$ $\quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 = 0 \end{cases} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$S_2 = \langle (4,8), (0,1) \rangle$ $\quad \begin{cases} 4\alpha_1 = 0 \\ 8\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$