7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con A una matriz simétrica. Demostrar que los valores absolutos de los autovalores no nulos de A coinciden con sus valores singulares.

A simétrica $\Rightarrow$ A diagonalizable: $A = SDS^{-1}$ tq A y D tienen los mismos autovalores.

Sean $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ los autovalores de A no nulos.

Buscamos los valores singulares de A viendo los autovalores de AA^T.

$$AA^T = AA = A^2 = (SDS^{-1})^2 = SD^2S^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\det(AA^T - xI) &= \det(SD^2S^{-1} - xI) = \det(SD^2S^{-1} - xISS^{-1}) \\
&= \det(S(D^2 - xI)S^{-1}) = \det(S)\cdot\det(D^2 - xI)\cdot\det(S^{-1}) \\
&= \det(S)\cdot\det(S)^{-1}\cdot\det(D^2 - xI) \\
&= \det(D^2 - xI) \\
&= (\lambda_1^2 - x)\cdots(\lambda_r^2 - x)\cdot(-x)^{n-r}
\end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(AA^T - xI) = 0 \iff x = \lambda_i^2 \quad \forall i = 1\ldots r \quad \vee \quad x = 0$$

Luego los valores singulares no nulos de A son:

$$\sigma_i^2 = \lambda_i^2 \quad \forall i = 1\ldots r \iff \sigma_i = |\lambda_i| \quad \forall i = 1 \ldots r$$