6. ¿Cuáles de las siguientes matrices es necesariamente ortogonal?

a) Permutación

b) Simétrica definida positiva

c) No singular

d) Diagonal

a) Si porque la matriz de permutación son los vectores de la base canónica intercambiados de lugar. $e_i^T e_j = 0 \ \forall i \neq j \quad e_i^T e_i = 1$

$\therefore$ Matriz de permutación necesariamente ortogonal.

b) Supongamos A sdp y también ortogonal. $A = A^T$ por ser sdp. $A^{-1} = A^T$ por ser ortogonal. $A = A^T = A^{-1}$ entonces $A.A = I$ pues es su propia inversa. Luego $a_{ii}^2 = 1 \iff |a_{ii}| = 1 \Rightarrow A = I$. Pero hay infinitas matrices sdp que no son I.

$\therefore$ sdp no necesariamente ortogonal.

c) La matriz αI con $|\alpha| \neq 1$ es inversible pero no ortogonal porque si bien las columnas/filas son ortogonales tomadas de a 2, la norma es $\neq 1$. $\|col_i(\alpha I)\|_2 = |\alpha| \|col_i(I)\|_2 = |\alpha| \neq 1$.

$\therefore$ Inversible no necesariamente ortogonal.

d) Mismo argumento que c).

$\therefore$ Diagonal no necesariamente ortogonal.