9. Consideremos el sistema $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times 2}$, tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) ¿Se pueden utilizar las ecuaciones normales?

b) Mostrar algún $x_0 \in Nu(A)$.

c) Encontrar la solución de $Ax = b$ y verificar que soluciona el problema de cuadrados mínimos.

d) ¿Es ésta solución única?

a)

Sí, siempre existe solución al problema de cuadrados mínimos. Puede no ser única.

b)

$X_0 = (1,-2) \in Nu(A)$

$$Ax_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) \\ \vdots \\ 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^n$$

c)

$$A^T A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{2\times n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{n\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4n & 2n \\ 2n & n \end{bmatrix}}_{2\times 2}$$

$$A^T b = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{2\times n} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ \vdots \\ 3 \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} 6n \\ 3n \end{bmatrix}$$

Por ecuaciones normales $Ax = b \iff A^T A x = A^T b$.

$$\begin{bmatrix} 4n & 2n \\ 2n & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6n \\ 3n \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 4n x_1 + 2n x_2 = 6n \\ 2n x_1 + n x_2 = 3n \end{cases}$$

$x = (1,1)$ es solución.

Verificamos que $Ax = b$. ¿Esto había que verificar?

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \vdots \\ 3 \end{bmatrix}$$

d)

La solución no es única porque las columnas de A no son LI.