14. Sea A una matriz tridiagonal simétrica definida positiva. Si $A = LL^t$ es la factorización de Cholesky de A, demostrar que L es tridiagonal (de hecho es bidiagonal).

Podemos suponer

A sdp

$A = LL^T$

A tridiagonal

$A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$

$L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$

$\forall \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonal $\Rightarrow \tilde{L}$ bidiagonal

QVQ

$L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ es bidiagonal

Sea $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ sdp, $A = LL^T$ la factorización de Cholesky.

$$L = \begin{bmatrix} \tilde{L} & 0 \\ \ell^T & \alpha \end{bmatrix} \qquad L^T = \begin{bmatrix} \tilde{L}^T & \ell \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ $\quad \tilde{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\ell \in \mathbb{R}^n$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$LL^T = \begin{bmatrix} \tilde{L}\tilde{L}^T & \tilde{L}\ell \\ \ell^T\tilde{L}^T & \ell^T\ell + \alpha^2 \end{bmatrix} = A$$

Sea $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^T$ una matriz sdp y tridiagonal de $n\times n$ porque es una submatriz de A. Por HI $\tilde{L}$ es bidiagonal.

QVQ L es bidiagonal. Basta probar que $\ell = (0, \cdots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$.

La columna $n+1$ de A es: $(\tilde{L}\ell, \ell^T\ell + \alpha^2)$.

Como A es tridiagonal, $\tilde{L}\ell = (0, \cdots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $(\tilde{L}\ell)_i = [(\tilde{L}\ell)^T]_i = (\ell^T\tilde{L}^T)_i = 0 \quad \forall i < n$.

Supongamos que existe un mínimo $k < n$ tal que $\ell_k \neq 0$.

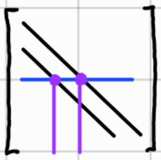
$\ell = (0, \cdots, *, \cdots, 0, *)$.

↳ $\ell_k \neq 0$

Veamos qué pasa con la Fila $k<n$ de $\tilde{L}\ell$.

$$
\begin{aligned}
(\tilde{L}\ell)_k &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{L}_{ki}\, \ell_i \\
&= \tilde{L}_{k\,k-1} \underbrace{\ell_{k-1}}_{=0} + \tilde{L}_{kk}\, \ell_k \\
&= \tilde{L}_{kk}\, \ell_k \neq 0 \quad \text{Absurdo}
\end{aligned}
$$

bidiagonal

$\tilde{L} =$ 

Pues supusimos $\ell_k \neq 0$ y $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^T$ es la factorización de Cholesky, luego la diagonal de $\tilde{L}$ es > 0.

$\therefore\ \ell = (0, \cdots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$ y L resulta bidiagonal.

Fata probar el caso base. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tridiagonal y sdp.

Si $A = LL^T$ es la factorización de Cholesky,

QVQ L es bidiagonal.

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{bmatrix}
$$

Basta ver que $\ell_{31} = 0$ para que L sea bidiagonal.

Como A es tridiagonal: $\text{Fila}_3(L) \cdot \text{Col}_1(L^T) = 0$.

$(\ell_{31}, \ell_{32}, \ell_{33}) \cdot (\ell_{11}, 0, 0) = \ell_{31} \cdot \ell_{11} = 0 \iff \ell_{31} = 0$

Pues $\ell_{11} \neq 0$ por estar en la diagonal de L (por Cholesky).