14. Sea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ una norma matricial inducida, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Demostrar:

a) $\|\cdot\|$ es una norma.

a)

QVQ: $\|A\| > 0$ si $A \neq 0$, $\|A\| = 0$ sii $A = 0$

$\|A\| = \max\limits_{x:\|x\|=1} \|Ax\|$ $\qquad$ $\|Ax\|$ es una norma vectorial $\Rightarrow \|Ax\| \geq 0$

$\|Ax\| = 0 \iff Ax = 0$

$\iff A = 0$ pues $\|x\| = 1 \Rightarrow x \neq 0$

QVQ: $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha A\| = \max_{x:\|x\|=1} \|\alpha A x\| = |\alpha| \cdot \max_{x:\|x\|=1} \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|A\|$$

QVQ: $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$\|A+B\| = \max_{x:\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \max_{x:\|x\|=1} \|Ax + Bx\|$$

por norma vectorial

$$\leq \max_{x:\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \max_{x:\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{x:\|x\|=1} \|Bx\|$$

$$= \|A\| + \|B\|$$

b) $\|I\| = 1$.

c) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

d) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

b)

QVQ: $\|I\| = 1$

$$\|I\| = \max_{x : \|x\| = 1} \|Ix\| = \max_{x : \|x\| = 1} \|x\| = 1$$

c)

QVQ: $\|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\|$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\iff \|Ax\| \leqslant \max_{\tilde{x} \neq 0} \frac{\|A\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} \cdot \|x\|$$

$$\iff \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \max_{\tilde{x} \neq 0} \frac{\|A\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|}$$ Supongamos $x \neq 0$

Vale pues $\tilde{x}$ es el máximo.

El caso $x = 0$ vale trivialmente: $\|A0\| = 0 \leqslant \|A\| \cdot \|0\| = 0$

d)

QVQ: $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

$$\|AB\| = \max_{x:\|x\|=1} \|ABx\| \leq \max_{x:\|x\|=1} \|A\| \cdot \|Bx\|$$ Por inciso c)

$$= \|A\| \cdot \max_{x:\|x\|=1} \|Bx\|$$

$$= \|A\| \cdot \|B\|$$