Métodos Numéricos-2024

Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, buscamos $x \in R^n$ tal que

$$Ax = b$$

Métodos exactos vs Métodos iterativos

- Métodos exactos: en un número finito de pasos obtiene la solución (Eliminación gaussiana, LU, QR).
- Métodos iterativos: generan una sucesión $\{x^k\}$ que converge a la solucióm del sistema.

¿Por qué usaríamos un método iterativo?

Método de Jacobi

Sea $x^0 \in R^n$. Supongamos que $a_{ii} \neq 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$. Definimos un próximo punto x^1 de la siguiente manera:

$$x_1^1 = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} a_{1j} x_j^0)/a_{11}$$

$$x_2^1 = (b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} a_{2j} x_j^0)/a_{22}$$

$$\vdots$$

$$x_i^1 = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^0)/a_{ii}$$

$$\vdots$$

$$x_n^1 = (b_n - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{n} a_{nj} x_j^0)/a_{nn}$$

Método de Jacobi

Sea $x^k \in R^n$. Definimos un próximo punto x^{k+1} de la siguiente manera:

$$x_1^{k+1} = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} a_{1j}x_j^k)/a_{11}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} a_{2j}x_j^k)/a_{22}$$

$$\vdots$$

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^k)/a_{ii}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = (b_n - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{n} a_{nj}x_j^k)/a_{nn}$$

Método de Jacobi

$$A = D - L - U$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -a_{1i} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales

Método de Jacobi

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$Dx - (L + U)x = b$$

$$Dx = (L + U)x + b$$

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

$$x^{k+1} = D^{-1}(L + U)x^{k} + D^{-1}b$$

Recordar que asumimos $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \ldots, n$

Método de Gauss-Seidel

Sea $x^0 \in R^n$. Supongamos que $a_{ii} \neq 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$. Definimos un próximo punto x^1 de la siguiente manera:

$$x_1^1 = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} a_{1j} x_j^0)/a_{11}$$

$$x_2^1 = (b_2 - a_{21}x_1^1 - \sum_{j=3}^{n} a_{2j} x_j^0)/a_{22}$$

$$\vdots$$

$$x_i^1 = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^1 - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^0)/a_{ii}$$

$$\vdots$$

$$x_n^1 = (b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^1)/a_{nn}$$

Método de Gauss-Seidel

Sea $x^k \in R^n$. Definimos un próximo punto x^{k+1} de la siguiente manera:

$$x_1^{k+1} = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} a_{1j}x_j^k)/a_{11}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j^k)/a_{22}$$

$$\vdots$$

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k)/a_{ii}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = (b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{k+1})/a_{nn}$$

Método de Gauss-Seidel

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$(D - L)x - Ux = b$$

$$(D - L)x = Ux + b$$

$$x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b$$

$$x^{k+1} = (D - L)^{-1}Ux^{k} + (D - L)^{-1}b$$

Recordar que asumimos $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \ldots, n$

Jacobi vs Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Solución } x = \left(\tfrac{11}{10}, \tfrac{-57}{80}, \tfrac{3}{80}\right)$$

Jacobi

$x^0 = (0, 0, 0)$
$x^1 = (0.8000, -0.3333, 0.1667)$
$x^2 = (1.0000, -0.6556, 0.0111)$
$x^3 = (1.0667, -0.6704, 0.0519)$
$x^4 = (1.0889, -0.7062, 0.0346)$
$x^5 = (1.0963, -0.7078, 0.0391)$
$x^6 = (1.0988, -0.7118, 0.0372)$
$x^7 = (1.0996, -0.7120, 0.0377)$
$x^8 = (1.0999, -0.7124, 0.0375)$
$x^9 = (1.1000, -0.7124, 0.0375)$
$x^{10} = (1.1000, -0.7125, 0.0375)$

Gauss-Seidel

$x^0 = (0, 0, 0)$
$x^1 = (0.8000, -0.6000, 0.1000)$
$x^2 = (1.0800, -0.7267, 0.0489)$
$x^3 = (1.1102, -0.7197, 0.0365)$
$x^4 = (1.1025, -0.7130, 0.0368)$
$x^5 = (1.0999, -0.7123, 0.0374)$
$x^6 = (1.0999, -0.7124, 0.0375)$
$x^7 = (1.1000, -0.7125, 0.0375)$
$x^8 = (1.1000, -0.7125, 0.0375)$
$x^9 = (1.1000, -0.7125, 0.0375)$
$x^{10} = (1.1000, -0.7125, 0.0375)$

Jacobi vs Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ Solución $x = (6, -4, -3)$

Jacobi

$x^0 = (0, 0, 0)$
$x^1 = (4, -1, 1)$
$x^2 = (8, -6, -5)$
$x^3 = (6, -4, -3)$
$x^4 = (6, -4, -3)$
$x^5 = (6, -4, -3)$
$x^6 = (6, -4, -3)$

Gauss-Seidel

$x^0 = (0, 0, 0)$
$x^1 = (4, -5, 3)$
$x^2 = (20, -24, 9)$
$x^3 = (70, -80, 21)$
$x^4 = (206, -228, 45)$
$x^5 = (550, -596, 93)$
$x^6 = (1382, -1476, 189)$
$x^7 = (3334, -3524, 381)$
$x^8 = (7814, -8196, 765)$
$x^9 = (17926, -18692, 1533)$
$x^{10} = (40454, -41988, 3069)$

Jacobi vs Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ Solución $x = (\frac{19}{9}, \frac{-31}{9}, \frac{1}{3})$

Jacobi

$x^0 = (0., 0, 0)$
$x^1 = (4, -1, 1)$
$x^2 = (3.00, -6.00, 2.50)$
$x^3 = (-0.25, -6.50, -0.50)$
$x^4 = (1.00, -0.25, -2.38)$
$x^5 = (5.06, 0.38, 1.38)$
$x^{10} = (4.28, -9.68, 5.62)$
$x^{20} = (-4.51, 15.60, -15.81)$
$x^{30} = (22.32, -61.55, 49.60)$
$x^{40} = (-59.57, 173.88, -150.01)$
$x^{45} = (258.10, 327.84, 90.68)$
$x^{50} = (190.34, -544.60, 459.14)$

Gauss-Seidel

$x^0 = (0, 0, 0)$
$x^1 = (4, -5, 0.5)$
$x^2 = (1.25, -2.75, 0.25)$
$x^3 = (2.5, -3.75, 0.375)$
$x^4 = (1.9375, -3.3125, 0.3125)$
$x^5 = (2.1875, -3.5, 0.34375)$
$x^{10} = (2.11035, -3.44433, 0.33300)$
$x^{15} = (2.11108, -3.44439, 0.33334)$
$x^{20} = (2.11111, -3.44444, 0.33333)$
$x^{25} = (2.11111, -3.44444, 0.33333)$
$x^{30} = (2.11111, -3.44444, 0.33333)$

Esquema básico

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$, definimos la sucesión $\{x^k\}$ como:

$$x^{k+1} = Tx^k + c$$

¿Cuándo converge a la solución del sistema $x = Tx + c$?

Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales

Resultados auxiliares

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- Definición: A es matriz convergente si $\lim_{k\to\infty} A_{ij}^k = 0$
- Definición $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A\}$
- Propiedad: A es convergente $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$
  $\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} ||A^k|| = 0$ para toda norma inducida
  $\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} A^k x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Propiedad: Si $\rho(A) < 1 \Rightarrow I - A$ es no singular y
  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$

Buena fuente bibliográfica:

Analysis of Numerical Methods E. Isaacson and H. Keller, Dover Publications, Inc, New York, 1994

Resultado principal

La sucesion $\{x^k\}$ definida por $x^{k+1} = Tx^k + c$ converge para cualquier x^0 inicial a la solución del sistema $x = Tx + c \Leftrightarrow \rho(T) < 1$

Matrices particulares

- Si A es estrictamente diagonal dominante $\Rightarrow$ el método de Jacobi converge.
- Si A es estrictamente diagonal dominante $\Rightarrow$ el método de Gauss-Seidel converge.
- Si A es simétrica definida positiva $\Rightarrow$ el método de Gauss-Seidel converge (ver apunte complementario).

Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales

Matrices particulares

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $a_{ij} \leq 0 \; \forall i \neq j$ y $a_{ii} > 0 \; \forall i = 1, \ldots, n$. Se satisface una sola de las siguientes propiedades:

- $\rho(T_{GS}) < \rho(T_J) < 1$
- $1 < \rho(T_J) < \rho(T_{GS})$
- $\rho(T_{GS}) = \rho(T_J) = 0$
- $\rho(T_{GS}) = \rho(T_J) = 1$

¿Qué nos dice esto?

- Los dos métodos convergen y G-S es más rápido que Jacobi.
- Los dos métodos divergen.

Cita: P. Stein, R.L. Rosenberg, On the solution of linear simultaneous equations by iteration, J. London Math. Soc. 23, (1948) 111–118.

Cota del error

Se $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $||T|| < 1$ para una norma inducida. Entonces:

- $x^{k+1} = Tx^k + c$ converge independientemente del x^0 inicial.
- $||x - x^k|| \leq ||T||^k ||x^0 - x||$
- $||x - x^k|| \leq \frac{||T||^k}{1-||T||} ||x^1 - x^0||$

Métodos Iterativos: bibliografía

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Applied Numerical Linear Algebra, James Demmel, SIAM, 1997.
- Analysis of Numerical Methods, E. Isaacson and H. Keller, Dover Publications, Inc, New York, 1994
- Applied Linear Algebra, Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban, Second Edition, Springer International Publishing, 2018.
- Numerical Analysis, Timohty Sauer, Pearson, 3rd Edition, 2017.
- Matrix Iterative Analysis, Richard Varga, Springer, 2000.
- Fundamentals of Matrix Computations, David Watkins, Wiley, 2010.