10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de la forma $A = I + uu^t$, con $u \in \mathbb{R}^n$. Luego de realizar el primer paso de la factorización LU (eliminando la primera columna) se obtiene

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ 0 & A_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

con $A_{22}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Demostrar:

a) $A_{22}^{(1)} = I_{n-1} + \tilde{u}\tilde{u}^t$, donde $\tilde{u}^t = (u_2, \ldots, u_n)/(\sqrt{1+u_1^2})$, siendo I_{n-1} la matriz identidad de la misma dimensión que $A_{22}^{(1)}$.

b) A tiene factorización LU sin pivoteo, para cualquier $u \in \mathbb{R}^n$.
Sugerencia: inducción en la dimensión de la matriz.

a) $A_{ij} = I_{ij} + u_i u_j$

$$A_{ij}^{(1)} = A_{ij} - \underbrace{A_{i1}/A_{11}}_{(m_1)_i} \cdot A_{1j}$$

$$= I_{ij} + u_i u_j - (I_{i1} + u_i u_1)/(I_{11} - u_1 u_1) \cdot (I_{1j} + u_1 u_j)$$

$i,j>1$

$$= I_{ij} + u_i u_j - u_1^2 u_i u_j/(1+u_1^2) \qquad I_{i1} = I_{1j} = 0 \quad \forall i,j>1$$

$$= I_{ij} + (1 - u_1^2/(1+u_1^2)) \cdot u_i u_j$$

$$= I_{ij} + 1/(1+u_1^2) \cdot u_i u_j \qquad 1 - \frac{u_1^2}{1+u_1^2} = \frac{1}{1+u_1^2}$$

$$= I_{ij} + u_i/\sqrt{1+u_j^2} \cdot u_j/\sqrt{1+u_1^2} \qquad \frac{1}{c}\cdot ab = \frac{a}{\sqrt{c}} \cdot \frac{b}{\sqrt{c}}$$

$$= I_{ij} + \tilde{u}_i \tilde{u}_j \qquad \forall i,j = 2 \ldots n$$

$$\Rightarrow A_{22}^{(1)} = I_{n-1} + \tilde{u}\tilde{u}^t$$

b)

QVQ: $A = LU$ sin pivoteo $\forall u \in \mathbb{R}^n$

$$A^{(1)} = M_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ 0 & A_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \qquad A_{22}^{(1)} = I_{n-1} + \tilde{u}\tilde{u}^t$$

$$A_{22}^{(1)} = \tilde{L}\tilde{U} \qquad \hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & \tilde{L} \end{bmatrix} \qquad \hat{U} = \begin{bmatrix} u & b^t \\ 0 & \tilde{U} \end{bmatrix}$$

$$\hat{L}\hat{U} = \begin{bmatrix} u & b^t \\ u\ell & \ell b^t + \tilde{L}\tilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ 0 & \underbrace{A_{22}^{(1)}}_{\tilde{L}\tilde{U}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u = a_{11}^{(1)} & \Rightarrow u \neq 0 \text{ porque } a_{11}^{(1)} = I_{11} + u_1^2 = 1 + u_1^2 \geq 1 \\ b^t = A_{12}^{(1)} \\ u\ell = 0 & \Rightarrow \ell = 0 \\ \ell b^t + \tilde{L}\tilde{U} = \tilde{L}\tilde{U} \end{cases}$$

Podemos encontrar $\hat{L}\hat{U} = A^{(1)} = M_1 A$

$\Rightarrow A = \underbrace{M_1^{-1}\hat{L}}_{L}\,\underbrace{\hat{U}}_{U}$

Falta caso base?