8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tal que $A = TS$ donde $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior y $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior. Probar:

a) T y S son inversibles, usando propiedades de determinantes.

b) A tiene factorización LU (con unos en la diagonal de L).

c) La matriz $\begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix}$ tiene factorización LU (con unos en la diagonal de L), para cualquier $b, c \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$. Hallarla explícitamente en función de T, S, b, c y d.

a)

A inversible $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$A = TS \Rightarrow \det(A) = \det(TS) = \det(T)\cdot\det(S)$

$\Rightarrow \det(T)\cdot\det(S) \neq 0$

$\Rightarrow \det(T) \neq 0$ y $\det(S) \neq 0$

$\Rightarrow T$ y S inversibles

b)

T inversible $\Rightarrow \det(T) \neq 0$ y T triangular inferior

$\Rightarrow t_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

Definimos $\tilde{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $(T\tilde{T})_{ii} = 1 \quad \forall i = 1 \dots n.$

$$\tilde{t}_{ij} = \begin{cases} 1/t_{ii} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad \tilde{T} = \begin{bmatrix} 1/t_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/t_{nn} \end{bmatrix}$$

Obs: $\det(\tilde{T}) \neq 0 \Rightarrow \tilde{T}$ es inversible.

Obs: $\tilde{T}$ es diagonal $\Rightarrow \tilde{T}$ es también triangular inferior y superior.

$$A = TS = TIS = \underbrace{T\tilde{T}}_{L}\underbrace{\tilde{T}^{-1}S}_{U}$$

Tomamos $L = T\tilde{T}$ que es producto de triangulares inferiores, luego es también triangular inferior y tiene 1s en la diagonal por construcción.

Tomamos $U = \tilde{T}^{-1}S$ que es producto de triangulares superiores, luego es también triangular superior.

$\therefore$ $A = TS$ tiene Factorización LU.

c)

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \mathbb{R}^{n\times n} & \mathbb{R}^{n\times 1} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} T\tilde{T} & 0 \\ \ell^T & 1 \end{bmatrix}} \\ \mathbb{R}^{1\times n} & \mathbb{R} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} \mathbb{R}^{n\times n} & \mathbb{R}^{n\times 1} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} \tilde{T}^{-1}S & u \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}} \\ \mathbb{R}^{1\times n} & \mathbb{R} \end{array} = \hat{L}\hat{U}$$

$$\begin{cases} T\tilde{T}\tilde{T}^{-1}S = A \\ T\tilde{T}u = b & \Rightarrow u = (T\tilde{T})^{-1}b \\ \ell^T\tilde{T}^{-1}S = c^T & \Rightarrow \ell^T = c^T(\tilde{T}^{-1}S)^{-1} \\ \ell^T u + \alpha = d & \Rightarrow c^T(\tilde{T}^{-1}S)^{-1}(T\tilde{T})^{-1}b + \alpha = d \end{cases}$$

$$c^T S^{-1}\tilde{T}\tilde{T}^{-1}T^{-1}b + \alpha = d$$

$$c^T S^{-1}T^{-1}b + \alpha = d$$

$$c^T (TS)^{-1}b + \alpha = d$$

Preguntar