5. Determinar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^n$ son linealmente independientes. Cuando no lo sean, escribir uno de sus elementos como combinación lineal del resto.

a) $C = \{(1, 2, 1, 0), (2, 1, 3, 0), (3, 2, 4, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

b) $C = \{(3, 3, 3), (2, 1, 0), (7, 5, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

a)

Buscamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha_1 \cdot (1,2,1,0) + \alpha_2 \cdot (2,1,3,0) + \alpha_3 \cdot (3,2,4,1) \overset{?}{=} (0,0,0,0)$$

$$\iff (\alpha_1, 2\alpha_1, \alpha_1, 0) + (2\alpha_2, \alpha_2, 3\alpha_2, 0) + (3\alpha_3, 2\alpha_3, 4\alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0,0)$$

$$\iff (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3,\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3,\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3,\ \alpha_3) = (0,0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \alpha_3 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 & 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 & 2 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 & 3 \end{cases}$$

Restamos $3 - 1 \Rightarrow$ $\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \iff \alpha_2 = 0$

$$\iff \alpha_1 = 0$$

$\therefore$ C es LI (linealmente independiente) b)

Tomamos $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. (salió a ojo)

$$\alpha_1 \cdot (3,3,3) + \alpha_2 \cdot (2,1,0)$$
$$= (3+2\cdot 2, 3+2\cdot 1, 3+2\cdot 0)$$
$$= (7, 5, 3)$$

$\therefore$ C es LD (linealmente dependiente)