15. Dada una matriz $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ llamamos *traza* de M a $tr(M) = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} m_{ii}$. Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

a) Probar que $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

b) Dar un contraejemplo para la afirmación $tr(AB) = tr(A)tr(B)$.

c) Si vale que $\forall D \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $tr(BD) = tr(CD)$, entonces $B = C$.

d) $tr(B) = tr(ABA^{-1})$ (Sug.: demostrar primero que $tr(CD) = tr(DC)$).

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$$tr(M_1) = 1+4 = 5 \qquad tr(M_2) = 1+5 = 6 \qquad tr(M_3) = 1+4 = 5$$

a)

QVQ: $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

b)

QVQ: $tr(AB) \neq tr(A)tr(B)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$tr(AB) = 2 \neq 4 = 2\cdot 2 = tr(A)tr(B)$$

c)

QVQ: $\forall D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $tr(BD) = tr(CD) \Rightarrow B = C$

Supongamos que vale $tr(BD) = tr(CD)$ $\forall D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pero $B \neq C$.
Existe al menos un elemento en la posición i,j donde difieren.

$b_{ij} \neq c_{ij}$ para algún i,j entre 1 y n.

La igualdad de las trazas $tr(BD) = tr(CD)$ vale $\forall D \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
En particular vale para una matriz de permutación de columnas (porque multiplica a derecha). La idea es intercambiar las columnas i,j entre sí, moviendo los elementos b_{ij} y c_{ij} a la diagonal.

Sea $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz de permutación de columnas.
Sean $e_k \in \mathbb{R}^n$ los vectores canónicos $\forall k = 1 \ldots n$.
Sin pérdida de generalidad, supongamos $i < j$.

Definimos D así:

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & \text{col}_i & & \text{col } j & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} | & & | & & | & & | \\ e_1 & \cdots & e_j & \cdots & e_i & \cdots & e_n \\ | & & | & & | & & | \end{array}\right] \end{array}$$

swap

Al multiplicar BD (ejemplo en 3x3):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & b_{12} & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{= B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ e_2 & e_1 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{= D} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{= BD}$$

$i = 1 \quad j = 2$

Luego resulta: $b_{ij} = (BD)_{ii}$ y $c_{ij} = (CD)_{ii}$.

Veamos que pasa con las trazas.
Por hipótesis $tr(BD) = tr(CD)$ $\forall D \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Supusimos que B y C difieren en un elemento que lo movimos a la diagonal con la matriz de permutación D. Entonces éste elemento va a aparecer en la sumatoria de la traza (si o si está en la diagonal porque las matrices son cuadradas).

$$tr(BD) = tr(CD)$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n} (BD)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} (CD)_{kk}$$

$$\iff \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (BD)_{kk} + (BD)_{ii} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (CD)_{kk} + (CD)_{ii}$$

$$\iff (BD)_{ii} = (CD)_{ii}$$

$$\iff b_{ij} = c_{ij}$$

Si $tr(BD) = tr(CD)$ $\forall D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, no puede pasar que $b_{ij} \neq c_{ij}$ como habíamos supuesto (absurdo).

$$\therefore \forall D \in \mathbb{R}^{n \times n},\ tr(BD) = tr(CD) \Rightarrow B = C$$

d)

QVQ: $tr(CD) = tr(DC)$

Primero un ejemplo con matrices de 3x3 para encontrar el patrón de cómo hay que reordenar los términos.

$$\begin{aligned} tr(CD) &= (CD)_{11} + (CD)_{22} + (CD)_{33} \\ &= c_{11}d_{11} + c_{12}d_{21} + c_{13}d_{31} + \\ &\quad c_{21}d_{12} + c_{22}d_{22} + c_{23}d_{32} + \\ &\quad c_{31}d_{13} + c_{32}d_{23} + c_{33}d_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tr(DC) &= (DC)_{11} + (DC)_{22} + (DC)_{33} \\ &= d_{11}c_{11} + d_{12}c_{21} + d_{23}c_{31} + \\ &\quad d_{21}c_{12} + d_{22}c_{22} + d_{23}c_{32} + \\ &\quad d_{31}c_{13} + d_{32}c_{23} + d_{33}c_{33} \end{aligned}$$

Sean $C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cualesquiera.

$$\begin{aligned} tr(CD) &= \sum_{k=1}^{n} (CD)_{kk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ki}\, d_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\, c_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, c_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (DC)_{ii} \\ &= tr(DC) \end{aligned}$$

QVQ: $tr(B) = tr(ABA^{-1})$

$tr(ABA^{-1}) = tr(A^{-1}AB) = tr(IB) = tr(B)$

Ya probamos que $tr(CD) = tr(DC)$.
Tomamos $C = AB$, $D = A^{-1}$.