1. Dadas las matrices $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y los vectores columna $x = (x_i), z = (z_i) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_i), w = (w_i) \in \mathbb{R}^m$ (donde la notación a_{ij} representa el elemento que está en la fila i y en la columna j de la matriz A y la notación x_i representa el elemento i-esimo del vector x), decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y en este último caso justificar por qué lo son.

   a) $x^t A z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i a_{ij} z_j$
   b) $x z^t = \sum_{i=1}^n x_i z_i$
   c) $(ADw)_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ij} d_{jk} w_k$
   d) $(B^t D^{-1} y)_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m b_{ji} d_{jk}^{-1} y_k$ donde $d_{jk}^{-1} = (D^{-1})_{jk}$

a) Falso

$x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \Rightarrow x^t \in \mathbb{R}^{1\times n}$

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$z \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

Vemos si las dimensiones permiten la operación.

$$x^t \cdot A \cdot z$$

$$[x_1, \cdots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^{1\times n} \cdot \mathbb{R}^{n\times m} \cdot \mathbb{R}^{n\times 1}$$

No se puede hacer el producto porque $n \neq m$.

b) Falso

$x z^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pero $\sum_{i=1}^n x_i z_i \in \mathbb{R}$

c) Verdadero

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $w \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ $\Rightarrow$ $ADw \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$T = AD \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $t_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, d_{jk}$

$ADw = Tw \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

metemos w_k adentro de la Σ

$$(ADw)_i = \sum_{k=1}^{m} t_{ik}\, w_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, d_{jk} \right) w_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, d_{jk}\, w_k = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ij}\, d_{jk}\, w_k$$

intercambiamos las Σ

d) Verdadero

$B^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad D^{-1} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $\quad y \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ $\quad \Rightarrow \quad B^t D^{-1} y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

Si D no es inversible entonces no existe D^{-1} $\Rightarrow$ Falso

Supongamos que existe $D^{-1} \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

B^t es la matriz traspuesta de B. Por def: $(B^t)_{ij} = (B)_{ji} = b_{ji}$

$B^t D^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$(B^t D^{-1})_{ik} = \sum_{j=1}^{m} (B^t)_{ij}\, d^{-1}_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} b_{ji}\, d^{-1}_{jk}$$

$$y = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$B^t D^{-1} = \underset{n\times m}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}} \underset{m\times 1}{\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}} = B^t D^{-1} y$$

$y \in \mathbb{R}^m$

$$(B^t D^{-1} y)_i = (B^t D^{-1})_i\, y = \sum_{k=1}^{m} (B^t D^{-1})_{ik}\, y_k$$

Fila i de $B^t D^{-1}$

$(B^t D^{-1})_i \in \mathbb{R}^m$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{ji}\, d^{-1}_{jk} \right) y_k$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} b_{ji}\, d^{-1}_{jk}\, y_k$$