11. Sea $A = QR$ la factorización QR de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $1 < r_{11} \leqslant r_{22} \leqslant \ldots \leqslant r_{nn}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Se desea hallar la solución del sistema

$$(I - Q^t A)x = b \tag{1}$$

a) Para resolver el sistema (1), se propone el siguiente sistema iterativo, con ω una constante no nula:

$$x^{(k+1)} = (\,(1-\omega)I + \omega R\,)\,x^{(k)} + \omega b, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

i) Demostrar que, si el sistema iterativo converge, entonces lo hace a una solución de (1).

ii) Hallar los valores de ω para los cuales se puede asegurar la convergencia del método.

a)

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= ((1-\omega)I + \omega R)x^{(k)} + \omega b \\
&= (I - \omega I + \omega R)x^{(k)} + \omega b \\
&= (I - \omega Q^T Q + \omega R)x^{(k)} + \omega b \\
&= (I - \omega Q^T QR)x^{(k)} + \omega b \\
&= (I - \omega Q^T A)x^{(k)} + \omega b
\end{aligned}$$

Si el sistema converge entonces $x^{(k)} \to x^*$ cuando $k \to \infty$.

$$\begin{aligned}
x^* &= (I - \omega Q^T A)x^* + \omega b \\
&\iff x^* = x^* - \omega Q^T A x^* + \omega b \\
&\iff x^* - x^* + \omega Q^T A x^* = \omega b \\
&\iff \omega Q^T A x^* = \omega b \\
&\iff Q^T A x^* = b \qquad \omega \neq 0
\end{aligned}$$

El sistema converge sii $\rho(T) < 1$ para la matriz de iteración del sistema $T = I - \omega Q^T A$.

$\rho(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } T\}$

Veamos cuáles son los autovalores de T.
Si λ es autovalor de $Q^T A$ entonces $1-\omega\lambda$ es autovalor de T.
(ver demo en ejs 9/10/11)

Veamos entonces cuáles son los autovalores de $Q^T A$.

$$Q^T A = Q^T Q R = R = \begin{bmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{con } 1 < r_{11} \leq r_{22} \leq \cdots \leq r_{nn}.$$

$$\det(Q^T A - \lambda I) = \det(R - \lambda I) = (r_{11} - \lambda)\cdots(r_{nn} - \lambda)$$
$$= 0 \iff \lambda = r_{ii} \quad \forall i = 1 \ldots n$$

$\therefore$ Los autovalores de $Q^T A$ son $r_{11} \cdots r_{nn}$.
$\therefore$ Los autovalores de $T = I - \omega Q^T A$ son $1-\omega r_{11} \cdots 1-\omega r_{nn}$.

Buscamos los valores de ω para los cuales el sistema converge sabiendo ya los autovalores de $T = I - \omega Q^T A$.

$$\begin{aligned}
\rho(T) &= \max\{|1-\omega r_{ii}| : i = 1 \ldots n\} < 1 \\
\iff & |1-\omega r_{ii}| < 1 \qquad \forall i = 1 \ldots n \\
\iff & -1 < 1-\omega r_{ii} < 1 \qquad \forall i = 1 \ldots n \\
\iff & -2 < -\omega r_{ii} < 0 \qquad \forall i = 1 \ldots n \\
\iff & 2 > \omega r_{ii} > 0 \qquad \forall i = 1 \ldots n \\
\iff & 2/r_{ii} > \omega > 0 \qquad \forall i = 1 \ldots n \qquad r_{ii} > 1 \quad \forall i = 1 \ldots n
\end{aligned}$$

Por hipótesis: $1 < r_{11} \leqslant r_{22} \leqslant \dots \leqslant r_{nn}$

$\iff \quad 2 > 2/r_{11} \geqslant 2/r_{22} \geqslant \dots \geqslant 2/r_{nn}$

Luego la condición sobre w para que el sistema converga es:

$$\rho(T) < 1 \iff 0 < w < 2/r_{ii} \;\; \forall i = 1 \dots n$$

$$\iff 0 < w < \min\{2/r_{ii} \; : \; i = 1 \dots n\} = 2/r_{nn}$$

$$\iff 0 < w < 2/r_{nn}$$