7. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cuyos autovalores son $\{1;1;2\}$. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y justificar.

a) A es inversible

b) A es diagonalizable

c) A no es diagonalizable

a) Verdadero

Supongamos que A no es inversible.

$\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ si $\lambda = 0$ pues $A - 0 \cdot I = A$.

Otra forma de verlo: $\exists v \neq 0$ tq $Av = 0 \iff Av = 0 \cdot v$.

Luego v es autovector asociado al autovalor $\lambda = 0$.

En ambos casos absurdo porque los autovalores de A son únicamente $\{1,1,2\}$.

$\therefore$ A inversible.

A no inversible $\iff \lambda = 0$ es autovalor

b) Falso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 (2-\lambda) = 0$$
$$\iff \lambda = 1 \lor \lambda = 2$$

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1$.

$$(A - 1 \cdot I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \iff v_2 = v_3 = 0$$

$v = (1,0,0)$ autovector asociado a $\lambda = 1$.

La multiplicidad algebraica de $\lambda=1$ es 2 pero la geométrica es 1. Luego los autovectores no forman una base y consecuentemente A no es diagonalizable.

c) Falso

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 (2-\lambda) = 0$$
$$\iff \lambda = 1 \ \vee \ \lambda = 2$$

Buscamos autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1$.

$$(A - 1 \cdot I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \iff v_3 = 0$$

$v = (\alpha, \beta, 0) = \alpha e_1 + \beta e_2 \Rightarrow \langle e_1, e_2 \rangle$ autoespacio de $\lambda = 1$

La dimensión algebraica y geométrica del autovalor $\lambda = 1$ es 2 en ambos casos. Los autovectores asociados e_1 y e_2 son LI.

Buscamos autovector asociado al autovalor $\lambda = 2$.

$$(A - 2 \cdot I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \iff v_1 = v_2 = 0$$

$v = (0,0,1) = e_3$ autovector asociado a $\lambda = 2$.

Luego los autovectores de A: $\{e_1, e_2, e_3\}$ son LI y forman una base en $\mathbb{R}^n \Rightarrow A$ es diagonalizable.