7. Demostrar:

a) Sea $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$. El conjunto $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $m \leq n$, es linealmente independiente si y solo si el conjunto $\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente.

b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. El conjunto $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $m \leq n$, es linealmente independiente si y solo si el conjunto $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente.

Relacionar estas propiedades con el método de Eliminación Gaussiana de triangulación de matrices.

a)

($\Rightarrow$) QVQ: $\{V_1, \cdots, V_i, \cdots, V_m\}$ LI $\Rightarrow$ $\{V_1, \cdots, \lambda V_i, \cdots, V_m\}$ LI

Armamos una combinación lineal del conjunto $\{V_1, \cdots, \lambda V_i, \cdots, V_m\}$.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \beta_j V_j + \beta_i \lambda V_i = 0$$

Este conjunto será LI si podemos implicar que:
$\beta_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots m$

Por hipótesis $\{V_1, \cdots, V_i, \cdots, V_m\}$ es LI. Esto nos dice que si la combinación lineal es 0 entonces cada coeficiente que multiplica a cada V_i es 0.

$$\begin{cases} \beta_j = 0 & \forall j = 1 \dots m,\ j \neq i \\ \beta_i \lambda = 0 & j = i \end{cases}$$

El coeficiente asociado a V_i es $\beta_i \lambda$.

Como $\lambda \neq 0$: $\beta_i \lambda = 0 \iff \beta_i = 0 \Rightarrow \beta_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots m$

$\therefore \{V_1, \cdots, \lambda V_i, \cdots, V_m\}$ es LI.

$(\Leftarrow)$ QVQ: $\{v_1, \cdots, \lambda v_i, \cdots, v_m\}$ LI $\Rightarrow \{v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_m\}$ LI

Consideremos una combinación lineal de $\{v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_m\}$ que da el vector nulo.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$$

Queremos implicar que todos los $\alpha_j = 0$. Como $\lambda \neq 0$, podemos multiplicar y dividir por λ al vector v_i.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_j v_j + \alpha_i/_\lambda \, \lambda v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \ldots m,\ j \neq i \\ \alpha_i/_\lambda = 0 \end{array}$$

Porque por hipótesis $\{v_1, \cdots, \lambda v_i, \cdots, v_m\}$ es LI.

$$\alpha_i/_\lambda = 0 \iff \alpha_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \ldots m$$

$\therefore \{v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_m\}$ es LI.