9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, con λ_i autovalores de A tal que $1 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ y sea ω una constante positiva. Se define el siguiente algoritmo iterativo, para $i = 1, \ldots, n$:

$$x_i^{(k+1)} = \omega b_i + (1 - \omega a_{ii}) x_i^{(k)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \omega\, a_{ij}\, x_j^{(k)}$$

a) Hallar el esquema de iteración de forma matricial y verificar que si el sistema iterativo converge, entonces lo hace a una solución del sistema $Ax = b$.

b) Demostrar que el esquema iterativo planteado converge para cualquier $x^{(0)}$ inicial si y solo si $\omega < 2/\lambda_n$.
(*Sugerencia*: usar que si λ es autovalor de A y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces los autovalores de $\alpha I + \beta A$ son $\alpha + \beta\lambda$).

a)

$$x_i^{(k+1)} = \omega b_i + (1-\omega a_{ii}) x_i^{(k)} - \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} \omega a_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i^{(k+1)} = \omega b_i + x_i^{(k)} - \omega a_{ii} x_i^{(k)} - \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} \omega a_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i^{(k+1)} = \omega b_i + x_i^{(k)} - \omega \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \qquad \forall i = 1 \ldots n$$

pasamos a forma matricial

$$\Leftrightarrow \quad x^{(k+1)} = \omega b + x^{(k)} - \omega A x^{(k)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{(k+1)} = (I - \omega A) x^{(k)} + \omega b$$

Si el sistema iterativo converge: $x^{(k)} \to x^*$ cuando $k \to \infty$

$$x^* = (I - \omega A) x^* + \omega b$$

$$\Leftrightarrow \quad x^* = x^* - \omega A x^* + \omega b$$

$$\Leftrightarrow \quad x^* - x^* + \omega A x^* = \omega b$$

$$\Leftrightarrow \quad A x^* = b \quad \text{pues } \omega > 0$$

$F(x) = (I - \omega A)x + \omega b$ es una función continua

$x \to x^* \Rightarrow F(x) \to F(x^*)$

b)

Sea $R = I - \omega A$ la matriz de iteración. Sabemos que el sistema converge sii $\rho(R) < 1$.

Primero probemos la sugerencia.

QVQ λ autovalor de $A \Rightarrow 1-\omega\lambda$ autovalor de $I - \omega A$

Sea v autovector asociado a λ.

$$(I-\omega A)v = v - \omega A v \underset{Av=\lambda v}{=} v - \omega\lambda v = (1-\omega\lambda)v$$

Sabemos entonces que si $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ son los autovalores de A entonces $1-\omega\lambda_1 \cdots 1-\omega\lambda_n$ son los autovalores de $R = I - \omega A$.

QVQ $\rho(R) < 1 \iff \omega < \frac{2}{\lambda_n}$

$\rho(R) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } R\} = \max\{|1-\omega\lambda_1| \cdots |1-\omega\lambda_n|\}$

$$\begin{aligned}
\rho(R) < 1 &\iff |1-\omega\lambda_i| < 1 && \forall i = 1 \dots n \\
&\iff -1 < 1-\omega\lambda_i < 1 && \forall i = 1 \dots n \\
&\iff -2 < -\omega\lambda_i < 0 && \forall i = 1 \dots n \\
&\iff 2 > \omega\lambda_i > 0 && \forall i = 1 \dots n \\
&\iff \frac{2}{\lambda_i} > \omega > 0 && \forall i = 1 \dots n
\end{aligned}$$

Por hipótesis $\omega > 0$

Basta ver que $\omega < \frac{2}{\lambda_i} \ \forall i = 1 \dots n \iff \omega < \frac{2}{\lambda_n}$

Por hipótesis: $1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \iff 2 > \frac{2}{\lambda_1} \geq \frac{2}{\lambda_2} \geq \cdots \geq \frac{2}{\lambda_n}$

Luego se cumple que:

$\omega < \frac{2}{\lambda_i} \ \forall i = 1 \dots n \iff \omega < \frac{2}{\lambda_n}$ ya que $\frac{2}{\lambda_n} = \min\{2, \frac{2}{\lambda_1}, \cdots, \frac{2}{\lambda_n}\}$