

Métodos Numéricos 2024

Normas vectoriales y matriciales Número de condición



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Normas vectoriales

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma si:

- $f(x) > 0$ si $x \neq 0$
- $f(x) = 0$ sii $x = 0$
- $f(\alpha x) = |\alpha|f(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

Normas vectoriales

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma si:

- $f(x) > 0$ si $x \neq 0$
- $f(x) = 0$ sii $x = 0$
- $f(\alpha x) = |\alpha|f(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

Ejemplos

- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
- $\|x\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} |x_i|$

Ejemplo

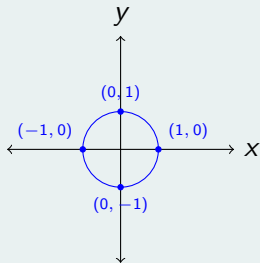
$$x = (-1, 3, 6, -7)$$

- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 6^2 + (-7)^2} = \sqrt{95}$
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |-1| + |3| + |6| + |-7| = 17$
- $\|x\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} |x_i| = \max\{|-1|, |3|, |6|, |-7|\} = 7$

"Circunferencia" de radio 1

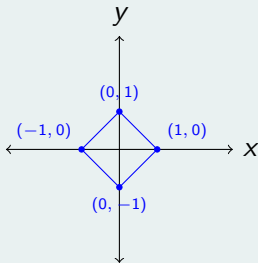
$$\|x\|_2 = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$



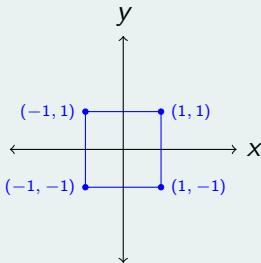
$$\|x\|_1 = 1$$

$$|x_1| + |x_2| = 1$$



$$\|x\|_\infty = 1$$

$$\max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$$



$F : \mathbb{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma si:

- $F(A) > 0$ si $A \neq 0$
- $F(A) = 0$ sii $A = 0$
- $F(\alpha A) = |\alpha|F(A)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $F(A + B) \leq F(A) + F(B)$
- $F(AB) \leq F(A)F(B)$ (propiedad adicional, son normas sub-multiplicativas, $m = n$)

Ejemplo

- Norma de Frobenius $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$

Ejemplo

- Norma de Frobenius $\|A\|_F = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

Ejemplo

- Norma de Frobenius $\|A\|_F = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)}$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2 + (-3)^2}$$

Normas matriciales inducidas

Sean f_1 un norma definida en \mathbb{R}^m y f_2 un norma definida en \mathbb{R}^n
 $F: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma inducida si:

$$F(A) = \max_{x \neq 0} \frac{f_1(Ax)}{f_2(x)}$$

Normas matriciales inducidas

Sean f_1 un norma definida en \mathbb{R}^m y f_2 un norma definida en \mathbb{R}^n
 $F: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma inducida si:

$$F(A) = \max_{x \neq 0} \frac{f_1(Ax)}{f_2(x)}$$

$$F(A) = \max_{x: f_2(x)=1} f_1(Ax)$$

Normas matriciales inducidas

Sean f_1 un norma definida en \mathbb{R}^m y f_2 un norma definida en \mathbb{R}^n
 $F: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma inducida si:

$$F(A) = \max_{x \neq 0} \frac{f_1(Ax)}{f_2(x)}$$

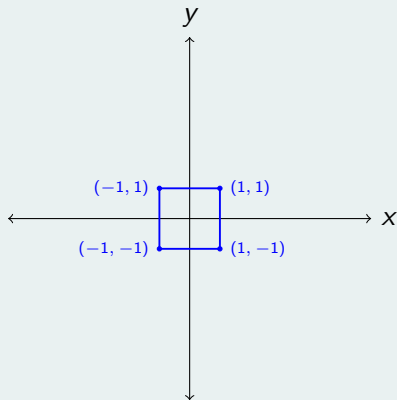
$$F(A) = \max_{x: f_2(x)=1} f_1(Ax)$$

Ejemplo para $n=m$

- Norma 1 $\rightarrow \|A\|_1 = \max_{x: \|x\|_1=1} \|Ax\|_1$
- Norma 2 $\rightarrow \|A\|_2 = \max_{x: \|x\|_2=1} \|Ax\|_2$
- Norma p $\rightarrow \|A\|_p = \max_{x: \|x\|_p=1} \|Ax\|_p$
- Norma ∞ $\rightarrow \|A\|_\infty = \max_{x: \|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$

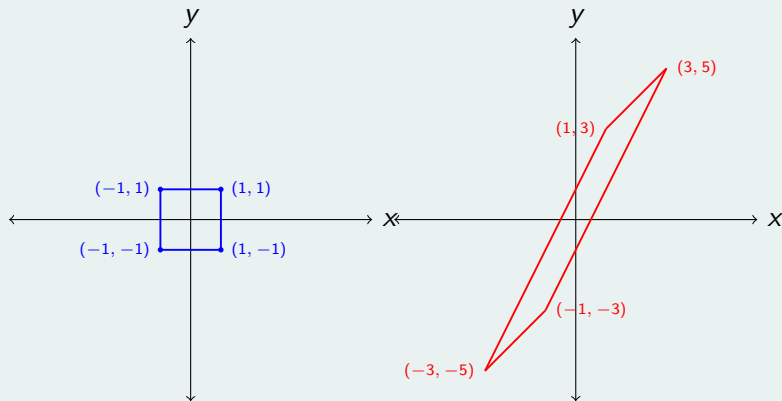
Normas matriciales inducidas

Norma infinito: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



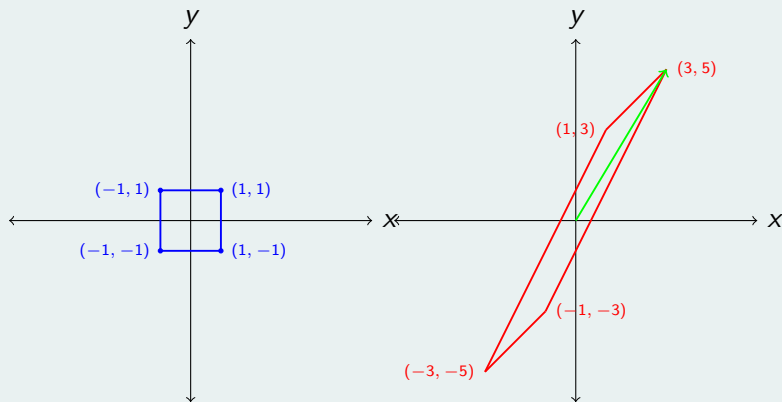
Normas matriciales inducidas

Norma infinito: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



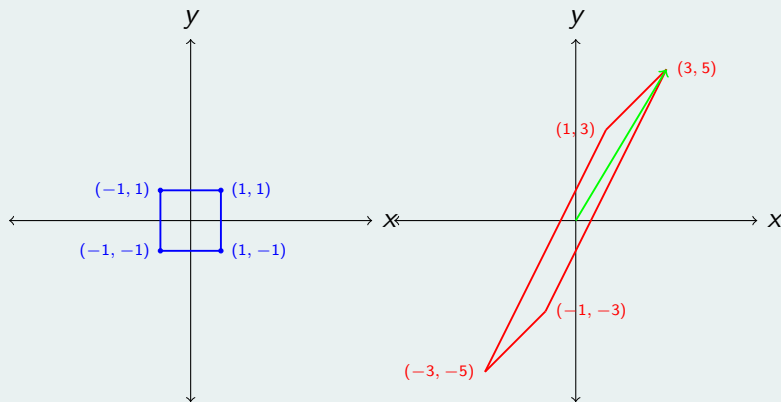
Normas matriciales inducidas

Norma infinito: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



Normas matriciales inducidas

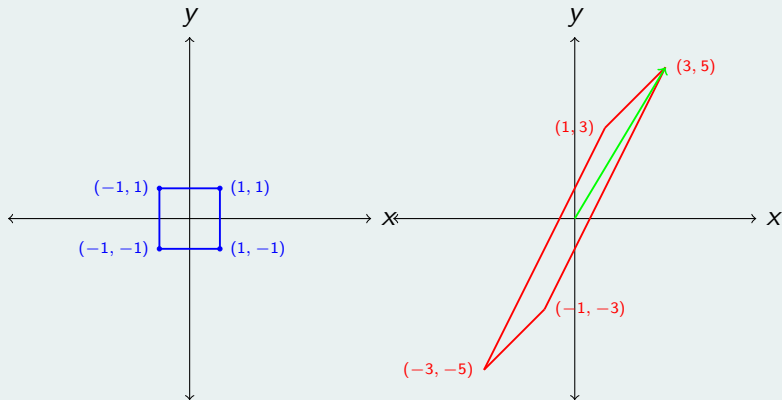
Norma infinito: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



$$\|A\|_{\infty} = 5$$

Normas matriciales inducidas

Norma infinito: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

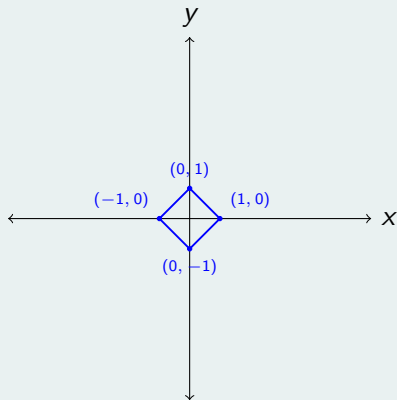


$$\|A\|_{\infty} = 5$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

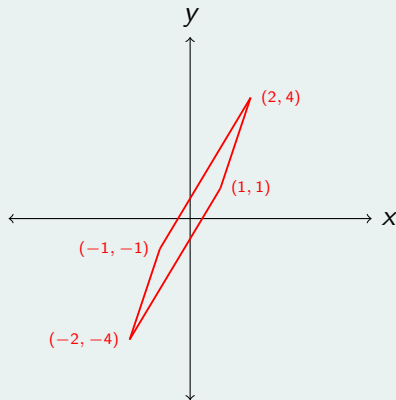
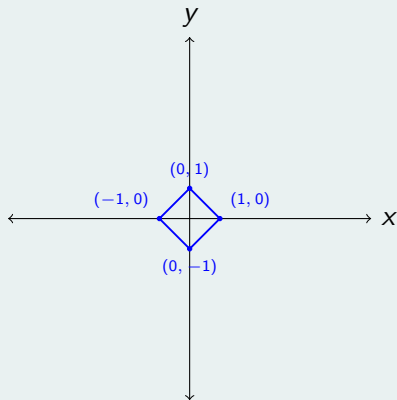
Normas matriciales inducidas

Norma 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



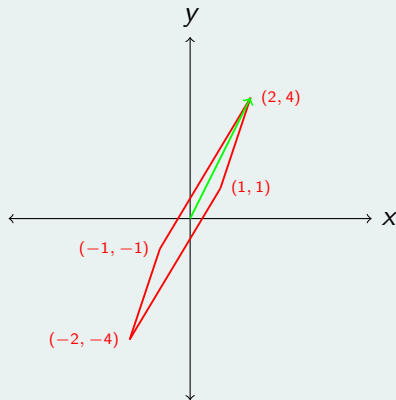
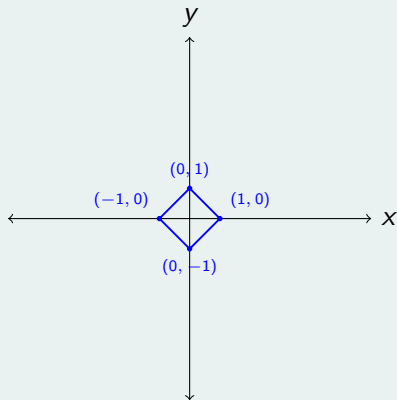
Normas matriciales inducidas

Norma 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



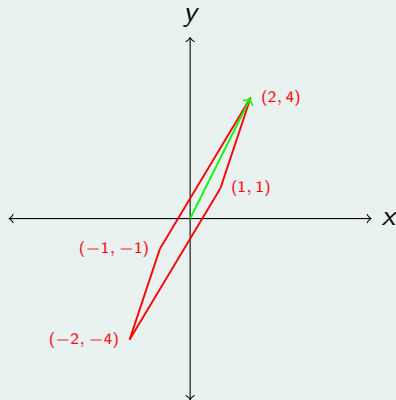
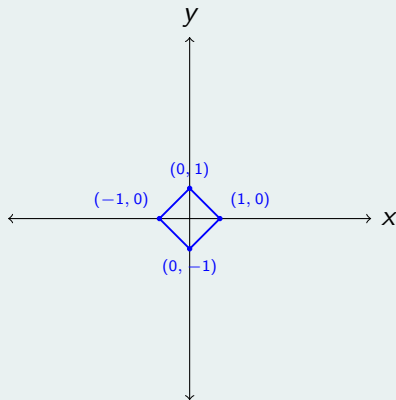
Normas matriciales inducidas

Norma 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



Normas matriciales inducidas

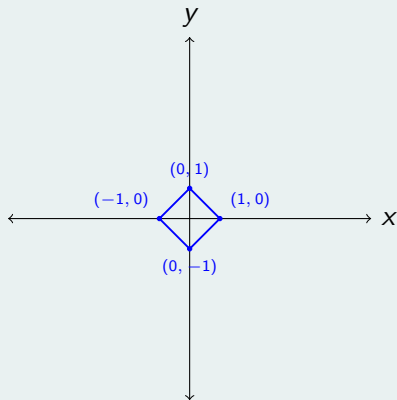
Norma 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



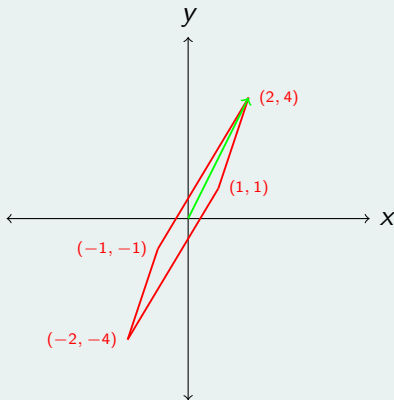
$$\|A\|_1 = 6$$

Normas matriciales inducidas

Norma 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



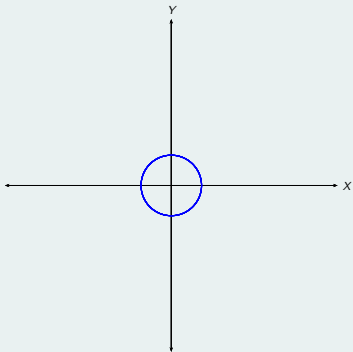
$$\|A\|_1 = 6$$



$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

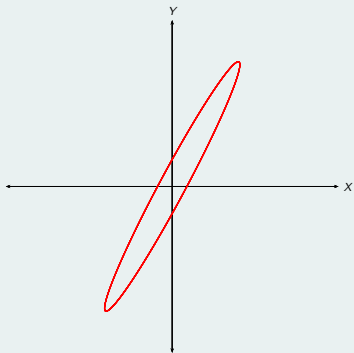
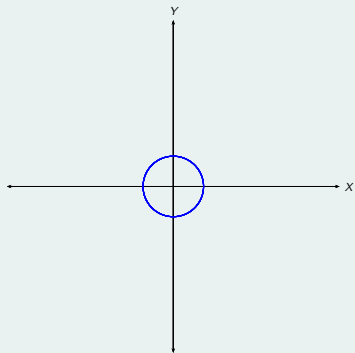
Normas matriciales inducidas

Norma 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



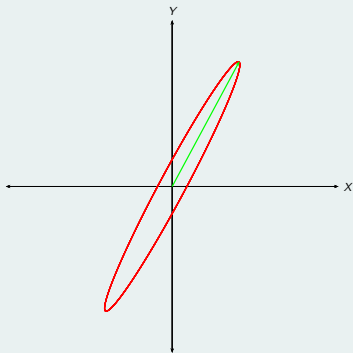
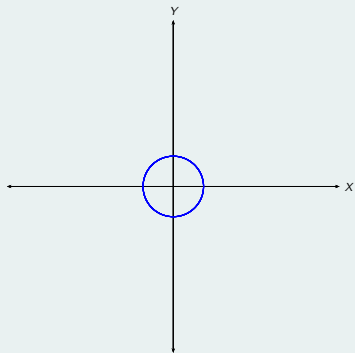
Normas matriciales inducidas

Norma 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



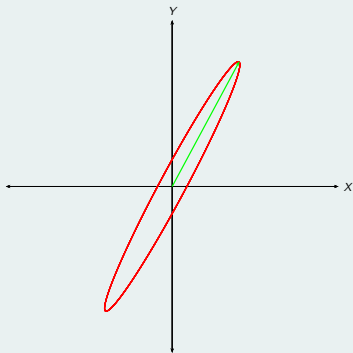
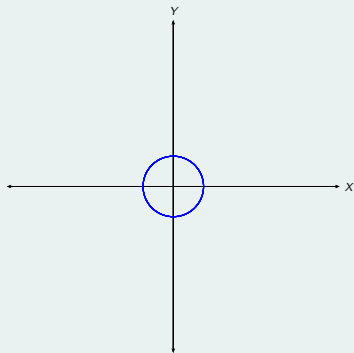
Normas matriciales inducidas

Norma 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



Normas matriciales inducidas

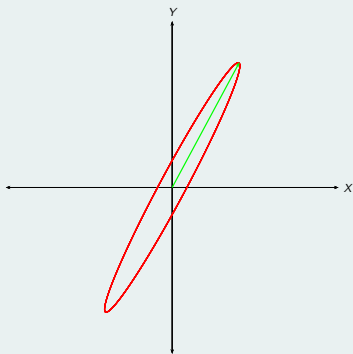
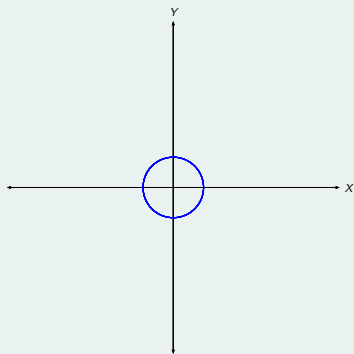
Norma 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



$$\|A\|_2 \approx 4.67083$$

Normas matriciales inducidas

Norma 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



$$\|A\|_2 \approx 4.67083$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max |\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A^t A}$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz no singular y $\|\cdot\|$ una norma matricial. Se define número de condición de A como

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz no singular y $\|\cdot\|$ una norma matricial. Se define número de condición de A como

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

- Si $\|\cdot\|$ es una norma inducida, $\kappa(I) = 1$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz no singular y $\|\cdot\|$ una norma matricial. Se define número de condición de A como

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

- Si $\|\cdot\|$ es una norma inducida, $\kappa(I) = 1$
- Si $\|\cdot\|$ es una norma sub-multiplicativa $\kappa(A) \geq 1$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.06\mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.06\mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.06\mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16\mathbf{9} \\ 0.06\mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.06\mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16\mathbf{9} \\ 0.06\mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-932, 1167)$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.06\mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16\mathbf{9} \\ 0.06\mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-932, 1167)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16\mathbf{7} \\ 0.06\mathbf{8} \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.06\mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16\mathbf{9} \\ 0.06\mathbf{6} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-932, 1167)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16\mathbf{7} \\ 0.06\mathbf{8} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (934, -1169)$

Ejemplo

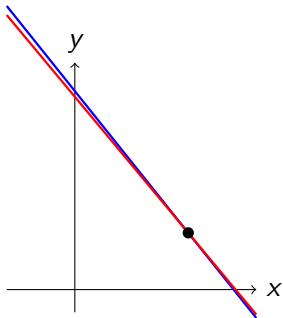
$$A = \begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = 1.502$$

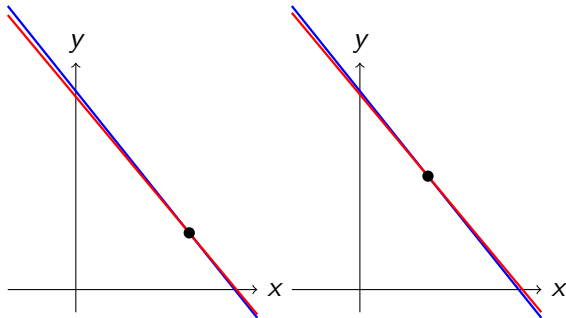
$$\|A^{-1}\|_{\infty} = 1168000$$

$$\kappa_{\infty}(A) \approx 1.7 \times 10^6$$

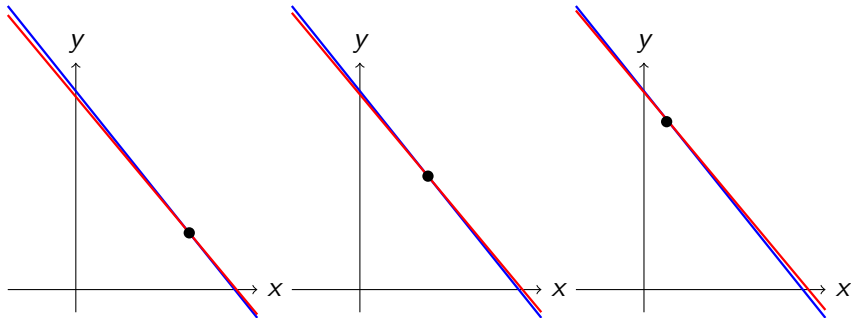
Interpretación Gráfica



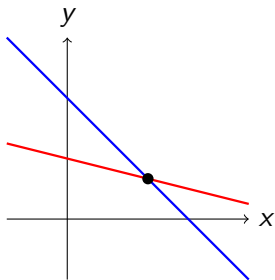
Interpretación Gráfica



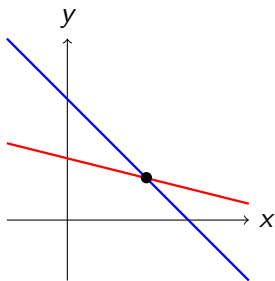
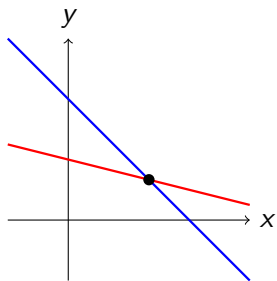
Interpretación Gráfica



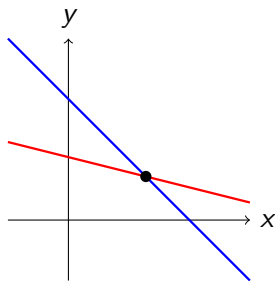
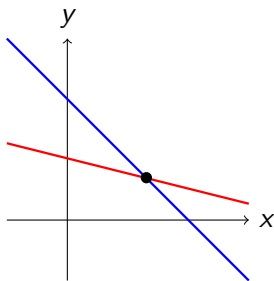
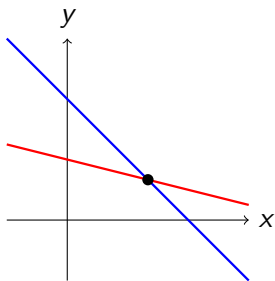
Interpretación Gráfica



Interpretación Gráfica



Interpretación Gráfica



Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz no singular y $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida. Sea \tilde{x} solución aproximada del sistema $Ax = b$ con $b \neq 0$ y $r = Ax - A\tilde{x} = b - \tilde{b}$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Numerical Methods, Germund Dahlquist and Ake Bjorck, Dover, 2003.
- Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Nicholas Higham, SIAM, 2002.
- Matrix Analysis, Roger Horn and Charles Johnson, Cambridge University Press, 2012.
- Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Carl Meyer, SIAM, 2010.
- Applied Linear Algebra, Peter J. Olver, Chehrzad Shakiban, Second Edition, Springer International Publishing, 2018.
- Fundamentals of Matrix Computations, David Watkins, Wiley, 2010.