

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que todos sus autovectores son múltiplos de e_1 . Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y justificar.

- a) A es singular
- b) A tiene un autovalor repetido
- c) A no es diagonalizable

a) Falso

Todos los autovectores de A son αe_1 con $\alpha \neq 0$.

$$A\alpha e_1 = \lambda\alpha e_1 \Leftrightarrow Ae_1 = \lambda e_1 \Leftrightarrow \text{col}_1(A) = (\lambda \ 0 \ 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \lambda = 0 &\Rightarrow \text{col}_1(A) = 0 \\ &\Rightarrow \text{rango}(A) \neq 3 \\ &\Rightarrow A \text{ no inversible} \end{aligned}$$

$$\text{Si } \lambda \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversible}$$

$$\text{ej: } A \text{ no inversible} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ es autovalor}$$

b) Falso

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = -\lambda \cdot (\lambda^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Obs: $\lambda = i$ también es raíz pero $ie_1 \notin \mathbb{R}$.

$$m_A(0) = 1$$

c) Verdadero

Si todos los autovectores son $v = \alpha e_1$, entonces el autoespacio es generado por $\langle e_1 \rangle$ y tiene dimensión 1.

Luego no existen 3 autovectores que sean LI.

\Rightarrow Los autovectores no forman una base.

$\Rightarrow A$ no es diagonalizable.