16. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ probar:

a) Si A es inversible entonces A^{-1} es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) Si A, B son inversibles entonces AB es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

c) Si A es inversible entonces A^t es inversible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

a)

QVQ: A inversible $\overset{?}{\Rightarrow}$ A^{-1} inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$

QVQ: A^{-1} inversible. Por definición esto vale si existe $(A^{-1})^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}A^{-1} = I$.

Por hipótesis A es inversible, entonces existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Basta considerar A como la inversa de A^{-1} y vemos que se cumple la definición.

$\therefore$ $(A^{-1})^{-1} = A$ y A^{-1} resulta inversible.

a) Alternativa

$A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si existe $(A^{-1})^{-1} = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}A^{-1} = I$.

Usamos esta igualdad regalada por el enunciado

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = A^{-1}A = I$$
$$(A^{-1})^{-1}A^{-1} = \underbrace{AA^{-1}}_{\text{A inversible por hipótesis}} = I$$

$\therefore$ A^{-1} inversible pues se cumple la definición con $(A^{-1})^{-1} = A$.

b)

QVQ: Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversibles $\overset{?}{\Rightarrow}$ AB inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Primero veamos que AB es inversible.

AB inversible $\Leftrightarrow Nu(AB) = \{0\} \Leftrightarrow (ABx = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

Supongamos que AB no es inversible.

$\exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ tq $ABx = 0$.

Como A es inversible por hipótesis:

$ABx = 0 \Leftrightarrow A^{-1}ABx = A^{-1}0 \Leftrightarrow Bx = 0$

Como B también es inversible por hipótesis:

$Bx = 0 \Leftrightarrow B^{-1}Bx = B^{-1}0 \Leftrightarrow x = 0$

Absurdo pues $x \neq 0$. Entonces AB es inversible si A y B lo son.

Ahora que sabemos que AB es inversible si A y B son inversibles, veamos si efectivamente $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ es su inversa. Para esto basta ver que $AB(AB)^{-1} = (AB)^{-1}AB = I$.

$AB(AB)^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

$(AB)^{-1}AB = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

$\therefore$ AB es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ es su inversa.

c)

QVQ: A inversible $\overset{?}{\Rightarrow}$ A^t inversible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

A^t no es más que poner las filas de A como columnas de A^t (o las columnas de A como filas), sin cambiar ningún número.

$$A = \begin{bmatrix} — f_1 — \\ — f_2 — \\ \vdots \\ — f_n — \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Como A es inversible tiene $\text{rango}(A) = n \Rightarrow \text{cols}(A)$ LI.

$\text{cols}(A) = \text{Filas}(A^t) \Rightarrow \text{Filas}(A^t)$ LI pues son los mismos vectores que $\text{cols}(A)$.

$\Rightarrow \text{rango}(A^t) = n$

$\Rightarrow A^t$ es inversible

Sabiendo que A y A^t son inversibles veamos que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

$AA^{-1} = I$ — A inversible

$\Leftrightarrow (AA^{-1})^t = I^t = I$ — $(AB)^t = B^t A^t$ ¿Vale usar esta prop?

$\Leftrightarrow (A^{-1})^t A^t = I$

$\Leftrightarrow (A^{-1})^t A^t (A^t)^{-1} = (A^t)^{-1}$ — A^t inversible

$\Leftrightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

$\therefore$ A^t inversible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$