

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango r y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares (SVD), con $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, siendo $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0\}$ y $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Llamamos a σ_i el i -ésimo valor singular. Sean v_1, \dots, v_n las columnas de V y u_1, \dots, u_m las columnas de U . Demostrar:

- a) v_1, \dots, v_n son autovectores de $A^t A$.
- b) u_1, \dots, u_m son autovectores de AA^t .
- c) $\lambda_i = \sigma_i^2$ son los autovalores de $A^t A$ asociados al autovector v_i .

$$V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_m \\ | & & | \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

a) c) QVQ : $v_1 \dots v_n$ autovectores de $A^t A$ con autovalores $\sigma_1^2 \dots \sigma_r^2$.

$$A^t A = (U\Sigma V^t)^t U\Sigma V^t = V\Sigma^t U^t U\Sigma V^t = V\Sigma^t \Sigma V^t$$

$$A^t A v_i = V\Sigma\Sigma^t V^t v_i = V\Sigma\Sigma^t e_i = V\sigma_i^2 e_i = \sigma_i^2 V e_i = \sigma_i^2 v_i \quad \forall i=1 \dots n$$

$V e_i = v_i \Leftrightarrow V^t v_i = e_i$

b) QVQ : $u_1 \dots u_m$ autovectores de AA^t .

$$AA^t = U\Sigma V^t (U\Sigma V^t)^t = U\Sigma V^t V^t \Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$$

$$AA^t u_i = U\Sigma\Sigma^t U^t u_i = U\Sigma\Sigma^t e_i = U\sigma_i^2 e_i = \sigma_i^2 u_i \quad \forall i=1 \dots m$$