12. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango r y sea $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de A, con $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonales y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diagonal. Llamamos $v_1, \dots, v_n$ a las columnas de V y $u_1, \dots, u_m$ a las columnas de U. Probar que:

a) $Nu(A) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n\rangle$

b) $Im(A) = \langle u_1, \dots, u_r\rangle$

(*Sugerencia*: en cada caso, considerar sólamente una inclusión y luego evaluar dimensiones, recordando que $dim(\mathbb{R}^n) = dim(Nu(A)) + dim(Im(A))$.)

a)

QVQ $\langle v_{r+1} \cdots v_n\rangle \subseteq Nu(A)$

$$Av_i = U\Sigma V^T v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = \sigma_i U e_i = \sigma_i u_i \qquad \forall i = 1 \dots n$$

$$\text{rango}(A) = r \Rightarrow \sigma_i = 0 \quad \forall i = r+1 \dots n$$
$$\Rightarrow Av_i = \sigma_i u_i = 0 \quad \forall i = r+1 \dots n$$

$\{v_{r+1} \cdots v_n\}$ es una base ortonormal.

$Av_i = 0 \quad \forall i = r+1 \dots n \Rightarrow$ El subespacio generado por $\{v_{r+1} \cdots v_n\}$ está en el $Nu(A)$.

$\therefore \langle v_{r+1} \cdots v_n\rangle \subseteq Nu(A)$

QVQ $Nu(A) = \langle v_{r+1} \cdots v_n\rangle$

Teorema de la dimensión:

$$\underbrace{dim(Im(A))}_{\text{rango}(A) = r} + dim(Nu(A)) = n \Rightarrow dim(Nu(A)) = n - r$$

$\langle v_{r+1} \cdots v_n\rangle \subseteq Nu(A)$ y $dim(\langle v_{r+1} \cdots v_n\rangle) = dim(Nu(A)) = n - r$.

Si S, T subespacios tq $S \subseteq T$ y $dim(S) = dim(T)$ entonces $S = T$.

$\therefore Nu(A) = \langle v_{r+1} \cdots v_n\rangle$

b)

QVQ $\langle u_1 \cdots u_r \rangle \subseteq Im(A)$

$$Av_i = U\Sigma V^T v_i = U\Sigma e_i = U\sigma_i e_i = \sigma_i U e_i = \sigma_i u_i \qquad \forall i = 1 \ldots n$$

$\text{rango}(A) = r \implies \sigma_i \neq 0 \quad \forall i = 1 \ldots r$

$\implies Av_i = \sigma_i u_i \neq 0 \quad \forall i = 1 \ldots r$

$\sigma_i u_i \in Im(A) \quad \forall i = 1 \ldots r$

$\{u_1 \cdots u_r\}$ es una base ortonormal.

El subespacio generado por $\{u_1 \cdots u_r\}$ está en $Im(A)$.

$\therefore \langle u_1 \cdots u_r \rangle \subseteq Im(A)$

QVQ $Im(A) = \langle u_1 \cdots u_r \rangle$

$\text{rango}(A) = r \implies \dim(Im(A)) = r$

Mismo argumento que para a).

$\langle u_1 \cdots u_r \rangle \subseteq Im(A)$ y $\dim(\langle u_1 \cdots u_r \rangle) = \dim(Im(A)) = r$.

$\therefore Im(A) = \langle u_1 \cdots u_r \rangle$

Alternativa para ver que $Nu(A) \subseteq \langle v_{r+1} \cdots v_n \rangle$

QVQ $Nu(A) \subseteq \langle v_{r+1} \cdots v_n \rangle$

Sea $x \in Nu(A)$.

$$Ax = 0 \iff U\Sigma V^T x = 0 \iff U^T U \Sigma V^T x = U^T 0 \iff \Sigma V^T x = 0$$

U ortogonal $\Rightarrow U^{-1} = U^T$

$$\iff \Sigma V^T x = \overset{m\times n}{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \\ & & 0 & & \end{bmatrix}} \cdot \overset{n\times n}{\begin{bmatrix} - & v_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & v_n^T & - \end{bmatrix}} \cdot x = \begin{bmatrix} -\sigma_1 v_1^T x - \\ \vdots \\ -\sigma_r v_r^T x - \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\iff \sigma_i v_i^T x = 0 \quad \forall i = 1 \ldots r \iff v_i^T x = 0 \quad \forall i = 1 \ldots r$$

$\sigma_i > 0 \ \forall i = 1 \ldots r$

Recapitulando $x \in Nu(A) \Rightarrow v_i^T x = 0 \quad \forall i = 1 \ldots r$

QVQ: $x \in \langle v_{r+1} \cdots v_n \rangle$

$Nu(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\{v_1 \cdots v_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
Podemos escribir a x como combinación lineal de $\{v_1 \cdots v_n\}$.

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$$

Como $x \in Nu(A)$ sabemos que $v_i^T x = 0 \quad \forall i = 1 \dots r$.

$$v_i^T x = 0 \quad \forall i = 1 \dots r$$

$$\iff \quad v_i^T \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \quad \forall i = 1 \dots r$$

$$\iff \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_i^T v_j = 0 \quad \forall i = 1 \dots r$$

$\{v_1 \cdots v_n\}$ ortonormales $\Rightarrow \begin{cases} v_i^T v_j = 0 & j \neq i \\ v_i^T v_i = \|v_i\|_2^2 = 1 & j = i \end{cases}$

$$\iff \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots r$$

Ahora sabemos que los coeficientes asociados a $v_1 \cdots v_r$ son nulos, y luego $x \in Nu(A)$ resulta una combinación lineal del resto de los vectores: $v_{r+1} \cdots v_n$.

$$x = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r}_{=0} + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \alpha_n v_n$$

porque $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1 \dots r$

$$\Rightarrow x = \alpha_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \alpha_n v_n$$

$v_{r+1} \cdots v_n$ son ortonormales $\Rightarrow$ son LI $\Rightarrow$ Forman una base

$$\Rightarrow x \in \langle v_{r+1} \cdots v_n \rangle \quad \forall x \in Nu(A)$$

$$\therefore \ Nu(A) \subseteq \langle v_{r+1} \cdots v_n \rangle$$