4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de A.

a) Expresar en función de U, Σ y V a las siguientes matrices:

i) A^tA

ii) AA^t

iii) $(A^tA)^{-1}A^t$ (asumiendo A con columnas linealmente independientes)

b) Hallar una descomposición SVD de las siguientes matrices ($\mathbb{0}_n$ es la matriz de ceros de $n \times n$):

i) A^t

ii) A^{-1} (suponiendo $m = n$ y A inversible)

iii) $\begin{pmatrix} A \\ \mathbb{0}_n \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} A & \mathbb{0}_m \end{pmatrix}$

c) Dado $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, expresar los valores singulares de $(A^tA + \alpha I)^{-1}A^t$ en función de los de A y α.

a)

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = V(U\Sigma)^T = V\Sigma^T U^T$$

i) $A^TA = V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

ii) $AA^T = U\Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$

iii) $(A^TA)^{-1}A^T = (V\Sigma^T\Sigma V^T)^{-1} V\Sigma^T U^T = (V^T)^{-1}(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^{-1}V\Sigma^T U^T$

$= V\underbrace{(\Sigma^T\Sigma)}^{-1}\Sigma^T U^T$

Es inversible porque rango$(A) = n$ luego hay n valores singulares $\neq 0 \Rightarrow \Sigma^T\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible.

b)

i) $A^T = (U\Sigma V^T)^T = V(U\Sigma)^T = V\Sigma^T U^T$

ii) $A^{-1} = (U\Sigma V^T)^{-1} = (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$

$$\left.\begin{array}{l} m = n \Rightarrow \Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ A \text{ inversible} \Rightarrow \lambda_i \neq 0 \ \forall i = 1 \ldots n \Rightarrow \sigma_i \neq 0 \ \forall i = 1 \ldots n \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \text{ inversible}$$

iii)

$$\begin{array}{cc} & n \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} A \\ 0_n \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} U & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & I_n \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} & n \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0_n \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} & n \\ n & \begin{bmatrix} V^T \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\hat{U} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)} \qquad \hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times n}$$

$$\hat{U}\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} U\Sigma + 0_{m\times n} 0_n \\ 0_{n\times m}\Sigma + I_n 0_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U\Sigma \\ 0_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times n}$$

$$\hat{U}\hat{\Sigma}V^T = \begin{bmatrix} U\Sigma \\ 0_n \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} U\Sigma V^T \\ 0_n V^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0_n \end{bmatrix}$$

$\hat{U}$ es ortogonal porque las filas $1 \dots m$ y columnas $1 \dots m$ se extienden con 0s preservando la ortonormalidad. Las filas y columnas $m+1 \dots n$ son los vectores canónicos e_i con $i = m+1 \dots n$ que son ortonormales entre sí y tambien con las filas de U originales pues esos son vectores de $\mathbb{R}^m$ extendidos a $\mathbb{R}^{m+n}$, y por lo tanto no tienen informacion en las coordenadas $m+1 \dots n$.

iv)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ m & \begin{bmatrix} A & 0_m \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & m \\ m & \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} \end{array} \cdot \underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ m & \begin{bmatrix} \Sigma & 0_m \end{bmatrix} \end{array}}_{\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}} \cdot \underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} V^T & 0_{n \times m} \\ 0_m & I_m \end{bmatrix} \end{array}}_{\hat{V}^T \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}}$$

$$U\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} U\Sigma & U0_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U\Sigma & 0_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$$

$$U\hat{\Sigma}\hat{V}^T = \begin{bmatrix} U\Sigma V^T + 0_m 0_m & U\Sigma 0_{n \times m} + 0_m I_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U\Sigma V^T & 0_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$$

Mismo argumento por qué $\hat{V}^T$ es ortogonal (ver inciso anterior).

c)

Sea $\alpha > 0$.

truquito

$$
\begin{aligned}
(A^TA + \alpha I)^{-1} A^T &= (V\Sigma^T\Sigma V^T + \alpha I VV^T)^{-1} A^T \\
&= [V(\underbrace{\Sigma^T\Sigma + \alpha I}_{})V^T]^{-1} (U\Sigma V^T)^T
\end{aligned}
$$

Inversible porque $\Sigma^T\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal $\neq 0$ pues $\alpha > 0$.

$$
\begin{aligned}
&= (V^T)^{-1}(\Sigma^T\Sigma + \alpha I)^{-1} V^{-1} V \Sigma^T U^T \\
&= V\,(\underbrace{(\Sigma^T\Sigma + \alpha I)^{-1}\Sigma^T}_{})\,U^T
\end{aligned}
$$

Estos son los valores singulares buscados.

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad \Sigma^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad \Sigma^T\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad$ Supongamos $m \geq n$

$$
\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & 0 & \end{bmatrix} \qquad \Sigma^T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_n & \end{bmatrix}
$$

$$
\Sigma^T\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \qquad (\Sigma^T\Sigma + \alpha I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2+\alpha} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n^2+\alpha} \end{bmatrix}
$$

$\sigma_i^2 + \alpha \neq 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

porque $\alpha > 0$

$$
(\Sigma^T\Sigma + \alpha I)^{-1}\Sigma^T \in \mathbb{R}^{n\times m} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2+\alpha} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2+\alpha} & \end{bmatrix}
$$

$\therefore$ Los valores singulares de $(A^TA + \alpha I)^{-1}A^T$ con $\alpha > 0$ son:

$$
\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha} \quad \forall i = 1 \dots n
$$