3. Analizar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss–Seidel para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

donde $|\rho| < 1$, comenzando con $x^{(0)} \neq (0,0)^t$.

Construimos las matrices de iteración T para cada método y buscamos $\rho(T)$ para ver si convergen.

$$A = D - L - U \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\rho & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -\rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi

$$T_j = D^{-1}(L+U) = I^{-1}(L+U) = L+U = \begin{bmatrix} 0 & -\rho \\ -\rho & 0 \end{bmatrix}$$

Buscamos autovalores de T_j.

$$\det(T_j - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -\rho \\ -\rho & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \rho^2 = (\lambda-\rho)(\lambda+\rho)$$
$$= 0 \iff \lambda = \rho \lor \lambda = -\rho$$

$$\begin{aligned} \rho(T_j) &= \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } T_j\} \\ &= \max\{|\rho|, |-\rho|\} \\ &= |\rho| \\ &< 1 \text{ por hipótesis} \end{aligned}$$

$\therefore$ Jacobi converge

Gauss-Seidel

$$T_{gs} = (D-L)^{-1}U = (I-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix}^{-1} U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & -p^2 \end{bmatrix}$$

Buscamos autovalores de T_{gs}.

$$\det(T_{gs} - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & p \\ 0 & -p^2-\lambda \end{bmatrix}\right) = -\lambda(-p^2-\lambda) = \lambda(p^2+\lambda)$$

$$= 0 \iff \lambda = 0 \lor \lambda = -p^2$$

$$\begin{aligned} \rho(T_{gs}) &= \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } T_{gs}\} \\ &= \max\{|0|, |-p^2|\} \\ &= |p^2| \\ &= |p|^2 < 1 \quad \text{por hipótesis } |p| < 1 \iff |p|^2 < 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ Gauss-Seidel converge