1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango r y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares (SVD), con $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, siendo $\Sigma = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0\}$ y $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0$. Llamamos a σ_i el i-ésimo valor singular. Sean $v_1, \ldots, v_n$ las columnas de V y $u_1, \ldots, u_m$ las columnas de U. Demostrar:

   a) $v_1, \ldots, v_n$ son autovectores de A^tA.

   b) $u_1, \ldots, u_m$ son autovectores de AA^t.

   c) $\lambda_i = \sigma_i^2$ son los autovalores de A^tA asociados al autovector v_i.

$$V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}$$

a) c) QVQ: $v_1 \cdots v_n$ autovectores de A^TA con autovalores $\sigma_1^2 \cdots \sigma_n^2$.

$$A^TA = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T$$

$$A^TAv_i = V\Sigma^T\Sigma V^T v_i = V\Sigma^T\Sigma e_i = V\Sigma^T\sigma_i e_i = \sigma_i V\Sigma^T e_i = \sigma_i V \sigma_i e_i$$

$$Ve_i = v_i \iff V^Tv_i = e_i$$

$$= \sigma_i^2 Ve_i = \sigma_i^2 v_i \qquad \forall i = 1 \ldots n$$

b) QVQ: $u_1 \cdots u_m$ autovectores de AA^T.

$$AA^T = U\Sigma V^T (U\Sigma V^T)^T = U\Sigma V^T V^T \Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$$

$$AA^Tu_i = U\Sigma\Sigma^T U^T u_i = U\Sigma\Sigma^T e_i = U\sigma_i^2 e_i = \sigma_i^2 u_i \qquad \forall i = 1 \ldots m$$