10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizable tal que $A = SDS^{-1}$. Calcular A^n y $A - 3I$ en función de S y D.

Inducción en n para probar que $A^n = SD^nS^{-1}$.

Caso base $n=1$: trivial

Caso base $n=2$: $A^2 = (SDS^{-1})^2 = SDS^{-1}SDS^{-1} = SDIDS^{-1} = SD^2S^{-1}$

Paso inductivo

HI: $A^n = SD^nS^{-1}$

QVQ: $A^{n+1} = SD^{n+1}S^{-1}$

$$A^{n+1} = (SDS^{-1})^{n+1} = SDS^{-1}(SDS^{-1})^n = SDS^{-1}A^n \overset{HI}{=} SDS^{-1}SD^nS^{-1}$$
$$= SDID^nS^{-1} = SD^{n+1}S^{-1}$$

$$A - 3I = SDS^{-1} - 3I = SDS^{-1} - 3SS^{-1} = (SD - 3S)S^{-1}$$
$$= (SD - 3IS)S^{-1} = (SD - S3I)S^{-1} = S(D - 3I)S^{-1}$$