9. a) Sea $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal y triangular superior. Demostrar que $\forall j = 1,\dots,n$, $col_j(C) = \pm e_j$, donde e_j es el j-ésimo canónico de $\mathbb{R}^n$.

b) Demostrar que si A es no singular, entonces la factorización $A = QR$ es única si los elementos de la diagonal de R son positivos.

a)

C ortogonal $\Rightarrow$ $C^{-1} = C^T$

C tri. sup. $\Rightarrow$ C^T tri. inf.

$C^TC = I \iff I_{ij} = fila_i(C^T) \cdot col_j(C) = col_i(C) \cdot col_j(C)$

$\iff col_i(C) \cdot col_j(C) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$col_1(C) = (C_{11}, 0 \cdots 0)$ porque C tri. sup.

C ortogonal $\Rightarrow \|col_1(C)\|_2^2 = C_{11}^2 = 1 \Rightarrow C_{11} = \pm 1$

Como C ortogonal, las filas también son ortonormales.

$Fila_1(C) = (\pm 1, C_{12} \cdots C_{1n})$

$\|Fila_1(C)\|_2^2 = \sum_{K=1}^{n} C_{1K}^2 = (\pm 1)^2 + \sum_{K=2}^{n} C_{1K}^2 = 1$

$\Rightarrow C_{1K} = 0 \quad \forall K = 2 \dots n \quad \Rightarrow Fila_1(C) = (\pm 1, 0 \cdots 0)$

Inducción ☺

b) QVQ: A inversible y $R_{ii} > 0 \ \forall i \Rightarrow A = QR$ única

Sean $A = Q_1 R_1$ y $A = Q_2 R_2$ dos factorizaciones QR de A.

$$Q_1 R_1 = Q_2 R_2 \iff Q_1^T Q_1 R_1 = Q_1^T Q_2 R_2$$
$$R_1 = Q_1^T Q_2 R_2$$

$$(Q_1 R_1)^{-1} Q_2 R_2 = I$$
$$R_1^{-1} Q_1^{-1} Q_2 R_2 = I$$
$$R_1^{-1} R_2 = I$$
$$R_2 = R_1$$

ortogonal · tri sup.
con diagonal > 0

$$Q_2 R_2 (Q_1 R_1)^{-1} = I$$
$$(Q_1 R_1)^{-1} = (Q_2 R_2)^{-1}$$
$$R_1 Q_1^T = R_2 Q_2^T$$
$$R_1 = R_2 \underbrace{Q_2^T Q_1}$$

copiar de teórica.