4. *Sobre la (no) conmutatividad de las matrices cuadradas*

a) Exhibir $n \in \mathbb{N}$ y $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para los cuales $AB \neq BA$.

b) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y B para que valga la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Idem para que $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

c) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $m \in \mathbb{N}$, probar la igualdad
$(I-A)(I+A+\ldots+A^m) = (I+A+\ldots+A^m)(I-A) = I - A^{m+1}$

a)

$n = 2 \qquad A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

b)

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$[(A+B)^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{ik} (A+B)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik})(a_{kj} + b_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} + a_{ik}b_{kj} + b_{ik}a_{kj} + b_{ik}b_{kj}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}}_{A^2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}_{AB}$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}}_{BA} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_{ik}b_{kj}}_{B^2}$$

$$\Rightarrow \quad (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Si $AB = BA$ entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Para $(A+B)(A-B)$ hacemos el mismo desarrollo y llegamos a:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Si $AB = BA$ entonces:

$$A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 \cancel{-AB} + \cancel{AB} - B^2 = A^2 - B^2$$

c)

$$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^m) = I^2 + \cancel{A} + \cancel{A^2} + \cdots + \cancel{A^m} - \cancel{A} - \cancel{A^2} - \cdots - \cancel{A^m} - A^{m+1} = I - A^{m+1}$$

$$(I+A+A^2+\cdots+A^m)(I-A) = I^2 + \cancel{A} + \cancel{A^2} + \cdots + \cancel{A^m} - \cancel{A} - \cancel{A^2} - \cdots - \cancel{A^m} - A^{m+1} = I - A^{m+1}$$

$$\Rightarrow (I-A)(I+A+\cdots+A^m) = (I+A+\cdots+A^m)(I-A)$$

Más Formal: probarlo por inducción.