8. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix} x = b$ donde $a \in \mathbb{R}$, puede resolverse bajo ciertas condiciones mediante el siguiente método iterativo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{pmatrix} x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix} x^{(k)} + \omega b \qquad \text{para } k = 0, \ldots$$

a) ¿Para qué valores de a converge el método cuando $\omega = 1$?

b) Para $a = 0,5$, encontrar el valor de $\omega \in \{0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3\}$ que minimiza el radio espectral de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix}.$$

a)

Reescribimos el método iterativo como un esquema:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

Para esto primero buscamos la inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -wa & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -wa & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ wa & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Verificamos: } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -wa & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ wa & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -wa & 1 \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-w & wa \\ 0 & 1-w \end{bmatrix} x^{(k)} + wb$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ wa & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-w & wa \\ 0 & 1-w \end{bmatrix} x^{(k)} + wb$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-w & wa \\ wa-w^2a & w^2a^2+1-w \end{bmatrix}}_{R} x^{(k)} + wb$$

Si $w=1 \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$

Para ver si el método iterativo converge analizamos $\rho(R)$.

$\det(R-\lambda I) = \lambda(a^2-\lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \vee \lambda = a^2$

$\rho(R) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } R\} = |a^2| = a^2$

$\rho(R) < 1 \iff a^2 < 1 \iff |a| < 1$

$\therefore$ Converge para $w=1$ y $|a|<1$.

b)

Si $a = 0.5 \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1-w & \frac{1}{2}w \\ \frac{1}{2}(w-w^2) & \frac{1}{4}w^2+1-w \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\det(R-\lambda I) &= (1-w-\lambda)\left(\tfrac{1}{4}w^2+1-w-\lambda\right) - \tfrac{1}{2}w\cdot\tfrac{1}{2}(w-w^2) \\ &= \tfrac{1}{4}w^2+1-w-\lambda-\tfrac{1}{4}w^3-w+w^2+w\lambda-\tfrac{1}{4}w^2\lambda+\lambda-w\lambda+\lambda^2 \\ &\quad -\tfrac{1}{4}w^2+\tfrac{1}{4}w^3 \\ &= 1-2w+w^2-\tfrac{1}{4}w^2\lambda+\lambda^2\end{aligned}$$

Evaluar con los valores de w y calcular $\rho(R)$.