13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes (es decir, si una de ellas vale, todas valen).

a) A es inversible.

b) No existe $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, tal que $Ax = 0$.

c) Las columnas de A son linealmente independientes.

d) Las filas de A son linealmente independientes.

a) ⇒ b)

No existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$ es equivalente a decir $Nu(A) = \{0\}$.

QVQ: A inversible $\Rightarrow Nu(A) = \{0\}$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = 0$. Como A es inversible, existe $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

$$Ax = 0 \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}0 \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\therefore$ A inversible $\Rightarrow Nu(A) = \{0\}$

b) ⇒ c)

QVQ: $Nu(A) = \{0\} \Rightarrow$ Las columnas de A son LI.

Planteamos una combinación lineal de las columnas de A que genera el vector nulo y veamos si podemos implicar que todos los coeficientes son 0.

Sean a_i con $i = 1 \dots n$ las columnas de A.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = x_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ \\ \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ \\ \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_n \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 a_{11} & + & x_2 a_{12} & + \cdots + & x_n a_{1n} \\ x_1 a_{21} & + & x_2 a_{22} & + \cdots + & x_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 a_{n1} & + & x_2 a_{n2} & + \cdots + & x_n a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= Ax$$

Vemos que la combinación lineal de las columnas de A con coeficientes $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es equivalente a Ax.

Por hipótesis, $Nu(A) = \{0\}$. No existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$.
Entonces $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$.

$\therefore$ $Nu(A) = \{0\} \Rightarrow$ Las columnas de A son LI.

c) $\Rightarrow$ a)

QVQ: Las columnas de A son LI $\Rightarrow$ A inversible.

Suponiendo que las columnas de A son LI vamos a probar que A es inversible construyendo $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Sea $C = \{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ las columnas de A. Como son LI y $\#C = n$, C es una base de $\mathbb{R}^n$. Realizando n combinaciones lineales podemos obtener los n vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

Sean e_j con $j = 1 \ldots n$ los n vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.
Por ejemplo $e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Podemos escribir cada e_j como una CL de las columnas de A.

$$e_j = \alpha_{j1} \cdot a_1 + \cdots + \alpha_{jn} \cdot a_n \qquad \text{con } \alpha_{ji} \in \mathbb{R}, \ i = 1 \ldots n$$

Ya vimos en b) $\Rightarrow$ c) que una CL de las columnas de A con coeficientes $(\alpha_{j1}, \cdots, \alpha_{jn}) = \alpha_j \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir así:

$$A\alpha_j = e_j$$

Definimos $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como la matriz formada por los vectores columna $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I$$

No debería ser la misma A^{-1}?

De forma análoga definimos A_I^{-1} (inversa a izquierda) como la matriz de los vectores $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ puestos como filas.

$$A_I^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$A_I^{-1} A = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Alternativa:
Sabiendo que existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$ veamos que podemos encontrar otra A^{-1} que pueda ser multiplicada a izquierda.

$$A^{-1}A = I \iff (A^{-1}A)^t = I^t \iff A^t (A^{-1})^t = I \iff A^t (A^t)^{-1} = I$$

Ya mostramos que existe