5. Sea A una matriz de $n \times n$ tal que A se expresa en la forma $A := M - N$, donde M, N son matrices de $n \times n$ y M es no singular. Sea $R := M^{-1}N$. A fin de resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, dado un vector $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario consideramos la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k \geqslant 0} \subset \mathbb{R}^n$ definida por $x^{(k+1)} := Rx^{(k)} + c$, donde $c = M^{-1}b$.

inducida

a) Demostrar que si $\|R\| < 1$ para alguna norma subordinada, entonces $x^{(k)}$ converge a una solución del sistema $Ax = b$.

b) Demostrar que si A es singular entonces $\rho(R) \geqslant 1$.

a)

$x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$ converge sii $\rho(R) < 1$.

Por ejercicio 2 vimos que $\rho(R) \leqslant \|R\|$.

Si $\|R\| < 1$ entonces $\rho(R) < 1$ y $x^{(k)}$ converge.

$x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$

$$\underset{k\to\infty}{\Rightarrow} \quad x^* = Rx^* + c$$
$$= M^{-1}Nx^* + M^{-1}b$$
$$= M^{-1}(Nx^* + b)$$

$$\Leftrightarrow \quad Mx^* = Nx^* + b$$
$$\Leftrightarrow \quad Mx^* - Nx^* = b$$
$$\Leftrightarrow \quad (M-N)x^* = b$$
$$\Leftrightarrow \quad Ax^* = b$$

b)

QVQ A no inversible $\Rightarrow \rho(R) \geq 1$

Como A no inversible $\lambda = 0$ es autovalor de A.

Sea $v \neq 0$ autovector asociado al autovalor 0.

$$
\begin{aligned}
Av = 0v \quad &\iff \quad (M-N)v = 0 \\
&\iff \quad Mv - Nv = 0 \\
&\iff \quad Nv = Mv \\
&\iff \quad M^{-1}Nv = v \qquad \text{M inversible} \\
&\iff \quad Rv = 1 \cdot v
\end{aligned}
$$

1 es autovalor de R.

$\therefore \rho(R) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } R\} \geq 1$