11. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar:

a) $Nu(B) \subseteq Nu(AB)$.

b) $Im(AB) \subseteq Im(A)$.

c) Si $AB = 0$ entonces $Im(B) \subseteq Nu(A)$.

a)

$Nu(B) = \{x : Bx = 0\}$

$Nu(AB) = \{x : ABx = 0\}$

Sea $x \in Nu(B)$. QVQ $x \in Nu(AB)$.

$$ABx = A(Bx) = A\cdot 0 = 0 \Rightarrow x \in Nu(AB)$$

$\downarrow$

$x \in Nu(B) \Rightarrow Bx = 0$

b)

$Im(AB) = \{y : \exists x.\ ABx = y\} = \{ABx : x \in \mathbb{R}^n\}$

$Im(A) = \{y : \exists x.\ Ax = y\} = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$

Sea $y \in Im(AB)$. QVQ $y \in Im(A)$.

$y = ABx$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.

Tomemos $x' \in \mathbb{R}^n$ tal que $Bx = x'$.

$$y = ABx = A(Bx) = Ax' \Rightarrow y \in Im(A)$$

c)

$$AB = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Nu}(A)$$

$$y \in \mathrm{Im}(B) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } y = Bx$$

Multiplicamos por A en ambos lados a izquierda.

$$y = Bx \Rightarrow Ay = ABx = (\underbrace{AB}_{AB=0 \text{ por hipótesis}})x = 0x = 0$$

$$\Rightarrow Ay = 0$$

$$\Rightarrow y \in \mathrm{Nu}(A)$$