9. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geqslant n$, con $A = Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ descomposición QR de A (con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Hallar una descomposición SVD de A asumiendo que $R = U\Sigma V^t$ es una descomposición SVD de R.

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $\quad \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad m \geqslant n$

$R = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad U, \Sigma, V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Sea $A = U_A \Sigma_A V_A^T$ la descomposición SVD de A.
Buscamos los autovalores de $A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A^TA = \begin{bmatrix} R^T & 0 \end{bmatrix} Q^TQ \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^TR + 0 \end{bmatrix} = R^TR = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$$

$$\begin{aligned}
\det(A^TA - \lambda I) &= \det(V\Sigma^2V^T - \lambda I) = \det(V\Sigma^2V^T - \lambda VV^T) \\
&= \det(V(\Sigma^2 - \lambda I)V^T) = \det(V)\cdot\det(\Sigma^2 - \lambda I)\cdot\det(V^T) \\
&= \underbrace{\det(V)\cdot\det(V^T)}_{1}\cdot\det(\Sigma^2 - \lambda I) \\
&= (\sigma_1^2 - \lambda)\cdots(\sigma_n^2 - \lambda) = 0 \iff \lambda = \sigma_i^2 \quad \forall i = 1 \dots n
\end{aligned}$$

Luego $\sigma_{A,i}^2 = \sigma_i^2 \Rightarrow \sigma_{A,i} = \sigma_i \quad \forall i = 1 \dots n$.
A tiene los mismos valores singulares que R. Como $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geqslant n$, completamos las últimas $m-n$ filas de Σ_A con 0.

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Consecuentemente podemos encontrar la descomposición SVD de $A = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ a partir de la de $R = U\Sigma V^T$.

$$A = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} U\Sigma V^T \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\overset{m\times m}{Q}\overset{m\times m}{\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}}_{U_A}\underbrace{\overset{m\times n}{\begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix}}}_{\Sigma_A}\underbrace{\overset{n\times n}{V^T}}_{V_A^T}$$