

5. Sea A una matriz de $n \times n$ tal que A se expresa en la forma $A := M - N$, donde M, N son matrices de $n \times n$ y M es no singular. Sea $R := M^{-1}N$. A fin de resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, dado un vector $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario consideramos la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ definida por $x^{(k+1)} := Rx^{(k)} + c$, donde $c = M^{-1}b$.

inducida

a) Demostrar que si $\|R\| < 1$ para alguna norma subordinada, entonces $x^{(k)}$ converge a una solución del sistema $Ax = b$.

b) Demostrar que si A es singular entonces $\rho(R) \geq 1$.

a)

En el ejercicio 2 vimos que $\rho(A) \leq \|A\|$ para cualquier norma inducida. Si $\|R\| < 1$ entonces $\rho(R) < 1$.

$\forall x \quad \rho(R) < 1 \Rightarrow x^{(k)}$ converge a una solución para $Ax = b$.

$$\begin{aligned}
 x^{k+1} &= Rx^{(k)} + c \\
 &= R(Rx^{(k-1)} + c) + c \\
 &= R^2x^{(k-1)} + Rc + c \\
 &= R^2(Rx^{(k-2)} + c) + Rc + c \\
 &= R^3x^{(k-2)} + R^2c + Rc + c \\
 &\vdots \\
 &= R^{k+1}x^{(0)} + R^k c + R^{k-1}c + \dots + Rc + c \\
 &= R^{k+1}x^{(0)} + (R^k + R^{k-1} + \dots + R + I)c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\hookrightarrow \rho(R) < 1 \Rightarrow (I - R) \text{ inversible y} \\
 &\sum_{k=0}^{\infty} R^k = (I - R)^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\rho(R) < 1 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} R^k x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
 x^* &= \lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = 0 + (I - R)^{-1}c \Leftrightarrow (I - R)x^* = c \\
 &\Leftrightarrow x^* = Rx^* + c
 \end{aligned}$$

$$\therefore \rho(R) < 1 \Rightarrow x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^* \quad \text{y} \quad Ax^* = b$$

b)

QVQ A no inversible $\Rightarrow \rho(R) \geq 1$

Como A no inversible $\lambda=0$ es autovalor de A .

Sea $v \neq 0$ autovector asociado al autovalor 0 .

$$Av = 0v \Leftrightarrow (M-N)v = 0$$

$$\Leftrightarrow Mv - Nv = 0$$

$$\Leftrightarrow Nv = Mv$$

$$\Leftrightarrow M^{-1}Nv = v \quad M \text{ inversible}$$

$$\Leftrightarrow Rv = 1 \cdot v$$

1 es autovalor de R .

$$\therefore \rho(R) = \max \{ |\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } R \} \geq 1$$

$$A = M - N \quad M \text{ inv}$$

$$Ax = b$$

$$(M - N)x = b$$

$$Mx - Nx = b$$

$$Mx = Nx + b$$

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = \underbrace{M^{-1}N}_{T=R} x^{(k)} + \underbrace{M^{-1}b}_c$$

Teo: el esquema iterativo converge $\forall x^0 \Leftrightarrow \rho(R) < 1$

Lema (ej2): $\rho(A) \leq \|A\| \quad \forall \|\cdot\|$ norma inducida

Corolario: $\|R\| < 1$ para alguna norma inducida
 $\Rightarrow x^{(k+1)} = Rx^k + c$ converge $\forall x_0$