12. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Supongamos que $dim(Nu(A)) = k$ y sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una base del subespacio $Nu(A)$. Además sea $B_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una base tal que $B_1 \cup B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

a) Probar que cualquier vector $y \in Im(A)$ se puede escribir como una combinación lineal de $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

b) Probar que los vectores del conjunto $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ son linealmente independientes.

c) Deducir el *Teorema de la dimensión*: $dim(Nu(A)) + dim(Im(A)) = n$.

a)

Sea $y \in Im(A) \subseteq \mathbb{R}^m$. $y = Ax$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.

QVQ: y se puede escribir como una combinación lineal de $\{Av_{k+1}, \cdots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

A es una matriz de $m\times n$, y cada v_i es un vector de $\mathbb{R}^n$.
Entonces $Av_i \in \mathbb{R}^m$ para todo $i = 1 \dots n$ (en particular para $i = k+1 \dots n$).

Partiendo de que y es una CL de $\{Av_{k+1}, \cdots, Av_n\}$ veamos que $y = Ax$ para algún x (o sea, $y \in Im(A)$).

$$\begin{aligned} y &= \alpha_{k+1} A v_{k+1} + \cdots + \alpha_n A v_n \\ &= A\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + A\alpha_n v_n \qquad && \text{A TL: } \alpha F_A(v) = F_A(\alpha v) \\ &= A(\underbrace{\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n}_{x}) && \text{A TL: } F_A(v) + F_A(w) = F_A(v+w) \end{aligned}$$

$\therefore\ y = Ax$
con x CL de $\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ con coeficientes $\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$.

Obs: $\langle Av_{k+1}, \cdots, Av_n \rangle$ es un sistema generador del subespacio $Im(A)$.

b)

QVQ: $\{AV_{K+1}, \cdots, AV_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ son LI.

$$\sum_{i=K+1}^{n} \alpha_i AV_i = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_i = 0 \quad \forall i = K+1 \dots n$$

$$\sum_{i=K+1}^{n} \alpha_i AV_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=K+1}^{n} A \alpha_i V_i = 0 \qquad \alpha_i F_A(V_i) = F_A(\alpha_i V_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot \sum_{i=K+1}^{n} \alpha_i V_i = 0 \qquad F_A(\alpha_i V_i) + \cdots + F_A(\alpha_n V_n) = F_A(\alpha_i V_i + \cdots + \alpha_n V_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=K+1}^{n} \alpha_i V_i = 0$$

$A \neq 0$ No vale asumir esto !!

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i = K+1 \dots n$$

Porque $B_2 = \{V_{K+1}, \cdots, V_n\}$ es una base. Por def B_2 es LI.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pero $A \neq 0$ y $X \neq 0$

b)

QVQ: $\{AV_{K+1}, \cdots, AV_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ son LI.

Supongamos que $\{AV_{K+1}, \cdots, AV_n\}$ son LD. Entonces existen coeficientes $\alpha_{K+1}, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tal que la combinación lineal siguiente genera el vector nulo.

$$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i A V_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=k+1}^{n} A \alpha_i V_i = 0 \qquad \alpha_i f_A(V_i) = f_A(\alpha_i V_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i V_i}_{X} = 0 \qquad f_A(\alpha_i V_i + \cdots + \alpha_n V_n) = f_A(\alpha_i V_i) + \cdots + f_A(\alpha_n V_n)$$

$\Leftrightarrow \quad Ax = 0$ con $x \in \mathbb{R}^n$ combinación lineal de los vectores $\{V_{K+1}, \cdots, V_n\}$ con coeficientes no todos nulos.

$\Leftrightarrow \quad X \in Nu(A)$ (por def)

Si X está en el núcleo de A entonces está en el subespacio generado por $B_1 = \{V_1, \cdots, V_K\} \subseteq \mathbb{R}^n$, que es una base de $Nu(A)$ por el enunciado.

Encontramos 2 formas de generar X:

1) X CL de $B_1 = \{V_1, \cdots, V_K\}$
2) X CL de $B_2 = \{V_{K+1}, \cdots, V_n\}$ con coeficientes no todos nulos

Igualemos ambas CL y veamos qué pasa.

$$\sum_{i=1}^{K} \beta_i V_i = \sum_{i=K+1}^{n} \alpha_i V_i$$

$\downarrow$ CL de B_1 $\qquad$ $\downarrow$ CL de B_2

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{K} \beta_i V_i - \sum_{i=K+1}^{n} \alpha_i V_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i V_i}_{\text{CL de } B_1 \cup B_2} = 0 \qquad \text{con} \quad \gamma_i = \begin{cases} \beta_i & \text{si } i = 1 \dots K \\ -\alpha_i & \text{si } i = K+1 \dots n \end{cases}$$

Por hipótesis $B_1 \cup B_2$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Cualquier CL de $B_1 \cup B_2$ que genera el vector nulo implica que todos los coeficientes son nulos ($B_1 \cup B_2$ son LI por ser una base).

$\Rightarrow \gamma_i = 0 \qquad \forall i = 1 \dots n$

$\Rightarrow -\alpha_i = 0 \qquad \forall i = K+1 \dots n$ Absurdo

Los coeficientes α_i vienen de la CL que armamos de $\{AV_{K+1}, \cdots, AV_n\}$ que supusimos LD (y por lo tanto los α_i no son todos nulos).

$\therefore \{AV_{K+1}, \cdots, AV_n\}$ son LI.