10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\sigma > 0$. Probar que σ es valor singular de A si y sólo si $\underbrace{\begin{pmatrix} A & -\sigma I \\ -\sigma I & A^t \end{pmatrix}}_{B \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}}$ es singular.

Notemos que $-\sigma I \cdot A^T = A^T \cdot (-\sigma I) = -\sigma A^T$.

Además $A, A^T, -\sigma I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Podemos usar la siguiente fórmula para calcular el determinante.

If the blocks are square matrices of the *same* size further formulas hold. For example, if C and D commute (i.e., $CD = DC$), then

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC).$$[18]

Fuente: Wikipedia

$$\det(B) = \det \begin{bmatrix} A & -\sigma I \\ -\sigma I & A^T \end{bmatrix} = \det(AA^T - (-\sigma I(-\sigma I))) = \det(AA^T - \sigma^2 I)$$

Si σ es valor singular de A entonces σ^2 es autovalor de AA^T.

Luego σ^2 es raíz del polinomio característico de AA^T.

$$\det(AA^T - \sigma^2 I) = 0 \Rightarrow \det(B) = 0 \Rightarrow B \text{ singular}$$

Análogamente, si B es singular entonces:

$$\begin{aligned} \det(B) = 0 \quad &\Rightarrow \det(AA^T - \sigma^2 I) = 0 \\ &\Rightarrow \sigma^2 \text{ autovalor de } AA^T \\ &\Rightarrow \sigma \text{ valor singular de } A \end{aligned}$$

Alternativa sin usar prop del determinante

Sea $(X,Y) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ con $X \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^n$ tq $B(X,Y) = 0$.

$$B(X,Y) = \begin{bmatrix} A & -\sigma I \\ -\sigma I & A^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX - \sigma Y \\ -\sigma X + A^T Y \end{bmatrix} = 0 \quad \overset{?}{\iff} \quad \begin{cases} AX = \sigma Y \\ A^T Y = \sigma X \end{cases}$$

($\Rightarrow$) σ es valor singular de A. QVQ: B singular.

Sea $A = U \Sigma V^T$ la descomposición SVD de A. Sea $r = \text{rango}(A) > 0$ pues existe al menos un valor singular > 0 (es σ).

V ortogonal: $A = U\Sigma V^T \iff AV = U\Sigma$

$$\begin{cases} Av_i = \sigma_i u_i & i = 1 \dots r \\ Av_i = 0 & i = r+1 \dots n \end{cases}$$

U ortogonal: $A = U\Sigma V^T \iff U^T A = \Sigma V^T \iff (U^T A)^T = (\Sigma V^T)^T$
$\iff A^T U = V \Sigma^T \iff A^T U = V\Sigma$

$$\begin{cases} A^T u_i = \sigma_i v_i & i = 1 \dots r \\ A^T u_i = 0 & i = r+1 \dots m \end{cases}$$

Basta tomar $X = v_i$, $Y = u_i$ con i tq $\sigma = \sigma_i$.
Luego por construcción vale $AX = \sigma Y$, $A^T Y = \sigma X$.

$X, Y \neq 0 \Rightarrow (X,Y) \neq 0 \in Nu(B)$

$\therefore$ B singular.

Alternativamente para ver $A^T y = \sigma x$ podemos usar que $x = v_i$ es autovector de $A^T A$ con $\sigma_i^2 = \sigma^2$ autovalor asociado.

$$A^T A x = \sigma^2 x \overset{Ax=\sigma y}{\iff} A^T \sigma y = \sigma^2 x \overset{\sigma > 0}{\iff} A^T y = \sigma x$$

($\Leftarrow$) B singular. QVQ: σ es valor singular de A.

Como B es singular vale que:

$$\begin{cases} Ax = \sigma y \\ A^T y = \sigma x \end{cases}$$

$$Ax = \sigma y \iff A^T A x = \sigma A^T y \iff A^T A x = \sigma \sigma x = \sigma^2 x$$

Luego x es autovector de $A^T A$ con σ^2 autovalor asociado.

$\therefore \sqrt{\sigma^2} = |\sigma| = \sigma$ es valor singular de A.

$\uparrow$

$\sigma > 0$ por hipótesis