6. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Escribimos $A = D - L - U$, donde $D, L, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, D es diagonal, L es triangular inferior con ceros en la diagonal y U es triangular superior con ceros en la diagonal. Demostrar que si A es estrictamente diagonal dominante por filas, entonces $\|D^{-1}(L+U)\|_\infty < 1$.

$$D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \ddots & a_{ij} \\ & 0 & \ddots \\ a_{ij} & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \\ & 0 & \ddots \\ \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D^{-1}(L+U)]_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$$\|D^{-1}(L+U)\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \|\text{Fila}_i(D^{-1}(L+U))\|_1 < 1$$

$$\iff \|\text{Fila}_i(D^{-1}(L+U))\|_1 < 1 \quad \forall i = 1 \ldots n$$

$$\iff \sum_{j=1}^{n} |(D^{-1}(L+U))_{ij}| < 1 \quad \forall i = 1 \ldots n$$

$$\iff \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} |a_{ij}/a_{ii}| < 1 \quad \forall i = 1 \ldots n$$

$\downarrow$

Si $j = i$ $[D^{-1}(L+U)]_{ij} = 0$

$$\iff \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = 1 \ldots n$$

$\downarrow$

Vale si A es edd por filas