Métodos Numéricos - 2024

Interpolación

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Interpolación

Dado un conjunto de pares ordenados de valores (x_i, y_i) para $i = 0, \ldots, n$, buscamos una función $f(x)$ tal que interpole a los datos:

$$f(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \ldots, n$$

En particular, nos restringimos a polinomios. Buscamos $P(x)$ polinomio de grado $\leq n$ tal que $P(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \ldots, n$

- ¿existe?
- ¿es único?

Definimos $L_{nk} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$

- $L_{nk}(x)$ es polinomio de grado n
- $L_{nk}(x_i) = 0 \quad \forall i = 0, \ldots, n \; i \neq k$
- $L_{nk}(x_k) = 1$

Definimos $P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{nk}(x)$ polinomio de grado $\leq n$

$$P(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \ldots, n$$

$P(x)$ es polinomio interpolante

Ejemplo

x	y
1	3
4	2
-1	6
-2	-5
3	1

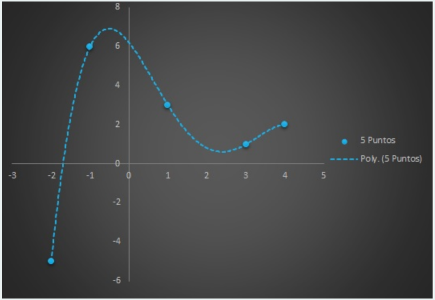
$$L_{40} = \frac{(x-4)(x-(-1))(x-(-2))(x-3)}{(1-4)(1-(-1))(1-(-2))(1-3)}$$

$$L_{41} = \frac{(x-1)(x-(-1))(x-(-2))(x-3)}{(4-1)(4-(-1))(4-(-2))(4-3)}$$

$$L_{42} = \frac{(x-1)(x-4)(x-(-2))(x-3)}{(-1-1)(-1-4)(-1-(-2))(-1-3)}$$

$$L_{43} = \frac{(x-1)(x-4)(x-(-1))(x-3)}{(-2-1)(-2-4)(-2-(-1))(-2-3)}$$

$$L_{44} = \frac{(x-1)(x-4)(x-(-1))(x-(-2))}{(3-1)(3-4)(3-(-1))(3-(-2))}$$



$$P(x) = 3L_{40} + 2L_{41} + 6L_{42} + (-5)L_{43} + 3L_{44}$$

Interpolación

Error

Sea $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$, $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a,b]$ para $i = 0, \dots, n$. Consideremos $P(x)$ el polinomio interpolante de grado $\leq n$ y $\bar{x} \in [a,b]$. Existe $\xi(\bar{x})$ tal que

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + \frac{f^{n+1}(\xi(\bar{x}))}{(n+1)!}(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_n)$$

Unicidad

Dados (x_i, y_i) para $i = 0, \dots, n$, el polinomio interpolante de grado $\leq n$ es único.

Diferencias divididas

Dados $(x_i, f(x_i))$ para $i = 0, \ldots, n$

- Orden 0 : $f[x_i] = f(x_i)$
- Orden 1 : $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$
- Orden k : $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - xi}$

Polinomio interpolante

$$
\begin{aligned}
P(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) + \\
&\vdots \\
&+ f[x_0, \ldots, x_k]\,(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}) + \\
&\vdots \\
&+ f[x_0, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Interpolación

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] & \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_1,x_2,x_3] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] \\
 & & f[x_2,x_3] & & f[x_1,x_2,x_3,x_4] & \\
x_3 & f(x_3) & & f[x_2,x_3,x_4] & & \\
 & & f[x_3,x_4] & & & \\
x_4 & f(x_4) & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(x) = {} & f(x_0) + f[x_0,x_1]\,(x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2]\,(x-x_0)(x-x_1) \\
& + f[x_0,x_1,x_2,x_3]\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
& + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_1, x_2, x_3] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\
 & & f[x_2, x_3] & & f[x_1, x_2, x_3, x_4] & \\
x_3 & f(x_3) & & f[x_2, x_3, x_4] & & \\
 & & f[x_3, x_4] & & & \\
x_4 & f(x_4) & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(x) = {} & f(x_0) + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) \\
& + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
& + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)
\end{aligned}
$$

Interpolación

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] & \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_1,x_2,x_3] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] \\
 & & f[x_2,x_3] & & f[x_1,x_2,x_3,x_4] & \\
x_3 & f(x_3) & & f[x_2,x_3,x_4] & & \\
 & & f[x_3,x_4] & & & \\
x_4 & f(x_4) & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(x) = f(x_0) &+ f[x_0,x_1]\,(x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2]\,(x-x_0)(x-x_1) \\
&+ f[x_0,x_1,x_2,x_3]\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&+ f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)
\end{aligned}
$$

Interpolación

Ejemplo

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & {\color{red}3} & & & & \\
 & & {\color{red}\frac{2-3}{4-1} = \frac{-1}{3}} & & & \\
4 & 2 & & {\color{red}\frac{\frac{-4}{5}+\frac{1}{3}}{-1-1} = \frac{7}{30}} & & \\
 & & \frac{6-2}{-1-4} = \frac{-4}{5} & & {\color{red}\frac{\frac{-59}{30}-\frac{7}{30}}{-2-1} = \frac{66}{90}} & \\
-1 & 6 & & \frac{11+\frac{4}{5}}{-2-4} = \frac{-59}{30} & & {\color{red}\frac{\frac{29}{60}-\frac{66}{90}}{3-1} = \frac{-45}{60}} \\
 & & \frac{-5-6}{-2+1} = \frac{11}{1} & & \frac{\frac{-49}{20}+\frac{59}{30}}{3-4} = \frac{29}{60} & \\
-2 & -5 & & \frac{\frac{6}{5}-11}{3+1} = \frac{-49}{20} & & \\
 & & \frac{1+5}{3+2} = \frac{6}{5} & & & \\
3 & 1 & & & &
\end{array}
$$

$$P(x) = 3 + \frac{-1}{3}(x-1) + \frac{7}{30}(x-1)(x-4) + \frac{66}{90}(x-1)(x-4)(x+1)$$

$$+\frac{-45}{60}(x-1)(x-4)(x+1)(x+2)$$

Notación

$P_{m_1 m_2 \ldots m_k}$ polinomio interpolador en los puntos $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots x_{m_k}$

Propiedad

Dados $x_0, x_2, \ldots x_k$, el polinomio interpolante $P_{01\ldots k}$ puede expresarse como:

$$P_{01\ldots k} = \frac{(x - x_j)P_{01\ldots,j-1,j+1,\ldots k} - (x - x_i)P_{01\ldots,i-1,i+1,\ldots k}}{(x_i - x_j)}$$

Interpolación

Notación

Q_{ij} polinomio interpolador de grado $\leq j$ en los puntos $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots x_i$

$$Q_{ij} = P_{i-j \ldots i}$$

$$Q_{ij} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{ij-1} - (x - x_i)Q_{i-1j-1}}{(x_i - x_{i-j})}$$

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & Q_{00} & & & & \\
 & & Q_{11} & & & \\
x_1 & Q_{10} & & Q_{22} & & \\
 & & Q_{21} & & Q_{33} & \\
x_2 & Q_{20} & & Q_{32} & & Q_{43} \\
 & & Q_{31} & & Q_{44} & \\
x_3 & Q_{30} & & Q_{42} & & \\
 & & Q_{41} & & & \\
x_4 & Q_{40} & & & &
\end{array}
$$

$$P(x) = Q_{33}$$

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & Q_{00} & & & & \\
 & & Q_{11} & & & \\
x_1 & Q_{10} & & Q_{22} & & \\
 & & Q_{21} & & \color{red}{Q_{33}} & \\
x_2 & Q_{20} & & Q_{32} & & Q_{43} \\
 & & Q_{31} & & Q_{44} & \\
x_3 & Q_{30} & & Q_{42} & & \\
 & & Q_{41} & & & \\
x_4 & Q_{40} & & & &
\end{array}
$$

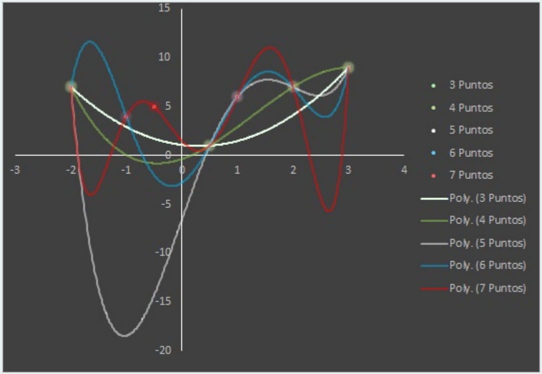
$$P(x) = Q_{33}$$

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & Q_{00} & & & & \\
 & & Q_{11} & & & \\
x_1 & Q_{10} & & Q_{22} & & \\
 & & Q_{21} & & Q_{33} & \\
x_2 & Q_{20} & & Q_{32} & & \color{red}{Q_{44}} \\
 & & Q_{31} & & Q_{43} & \\
x_3 & Q_{30} & & Q_{42} & & \\
 & & Q_{41} & & & \\
x_4 & Q_{40} & & & &
\end{array}
$$

$$P(x) = Q_{44}$$

Interpolación

Variando el grado



Interpolación lineal segmentaria

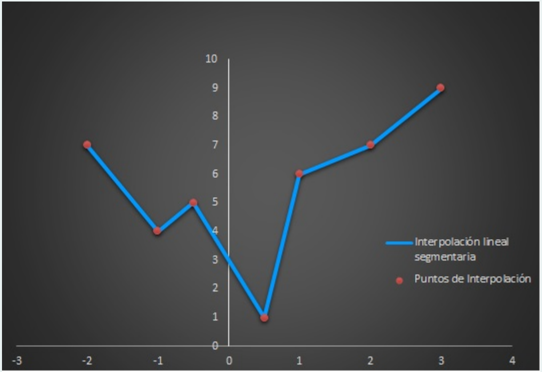
Sean (x_i, y_i) con $x_i < x_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, n$. Por cada par de puntos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) para $i = 0, \ldots, n-1$, realizamos una interpolación lineal.

$$L_i(x) = a_i + b_i(x - x_i)$$

- 2 incógnitas para cada $i = 0, \ldots, n-1$
- 2 ecuaciones para cada $i = 0, \ldots, n-1$
  $L_i(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) = y_i$
  $L_i(x_{i+1}) = a_i + b_i(x_i - x_{i+1}) = y_{i+1}$

$2n$ incógnitas, $2n$ ecuaciones. Cada $L_i(x)$ queda unívocamente determinado.

Interpolación lineal segmentaria



Interpolación cuadrática segmentaria

Sean (x_i, y_i) con $x_i < x_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, n$. Por cada par de puntos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) para $i = 0, \ldots, n-1$, realizamos una interpolación cuadrática.

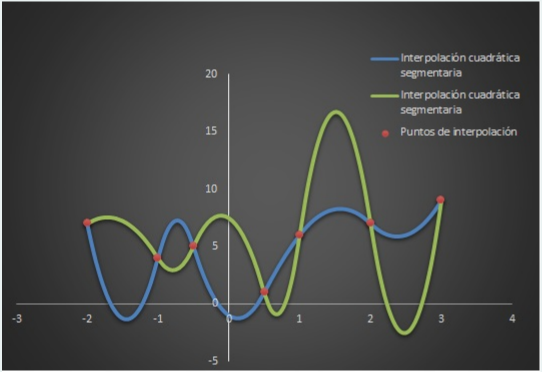
$$Q_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

- 3 incógnitas por cada $i = 0, \ldots, n-1$
- 2 ecuaciones por cada $i = 0, \ldots, n-1$
  $Q_i(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 = y_i$
  $Q_i(x_{i+1}) = a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 = y_{i+1}$
- Podemos pedir más...
  $Q'_i(x_{i+1}) = Q'_{i+1}(x_{i+1})$, para i=0,...,n-2.

Tenemos $3n$ incógnitas, $2n + n - 1$ ecuaciones. Falta una condición...

Interpolación

Interpolación cuadrática segmentaria



Interpolación cúbica segmentaria

Sean (x_i, y_i) con $x_i < x_{i+1}$ para $i = 0, \dots, n$. Por cada par de puntos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) para $i = 0, \dots, n-1$, realizamos una interpolación cúbica.

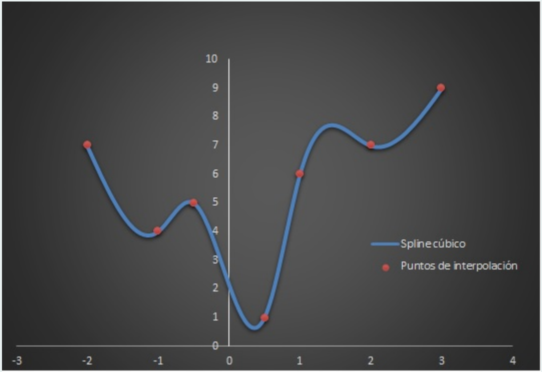
$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

- 4 incógnitas por cada $i = 0, \dots, n-1$
- interpolante, 2n condiciones $S_i(x_i) = y_i$ $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$
- derivada primera, n-1 condiciones $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$
- derivada segunda, n-1 condiciones $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$

Tenemos $4n$ incógnitas, $2n + n - 1 + n - 1$ ecuaciones. Faltan dos condiciones
Alternativa 1: $S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$
Alternativa 2: $S_0'(x_0) = f'(x_0)$ $S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$

Interpolación cúbica segmentaria

Siempre existe y es única!



Interpolación: bibliografía

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Numerical Methods, Germund Dahlquist and Ake Bjorck, Dover, 2003.
- Analysis of Numerical Methods, Eugene Isaacson and Herbert Keller, Dover Publications, 1994.
- Numerical Analysis, Timohty Sauer, Pearson, 3rd Edition, 2017.
- Análisis numérico, W. Smith, Prentice Hall, 1988.
- An Introduction to Numerical Analysis, Endre Süli, David F. Mayers, Cambridge University Press, 2003.