6. ¿Cuál es el punto del plano $x + y - z = 0$ más cercano al punto $(2, 1, 0)$? Plantear las ecuaciones normales que resuelven este problema y hallar la solución.

El plano $x+y-z=0$ se puede expresar como:

$$x+y-z=0 \iff (x,y,z)^T(1,1,-1) = 0$$

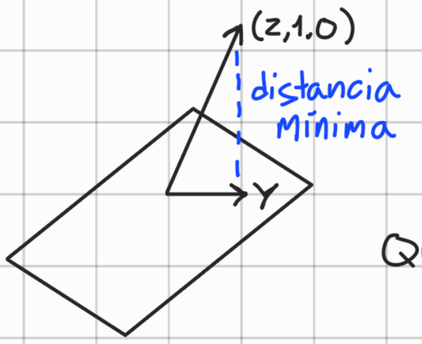
Todos los vectores ortogonales al $(1,1,-1)$ están en el plano. La dimensión del subespacio del plano es 2 porque estamos en $\mathbb{R}^3$. Buscamos 2 vectores LI que sean una base del subespacio del plano.

$\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ es una base pues $\begin{cases}(1,0,1)^T(1,1,-1)=0\\(0,1,1)^T(1,1,-1)=0\end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$Im(A)$ es el plano. Buscar el punto en el plano más cercano al $(2,1,0)$ es encontrar un $y \in Im(A)$ tq la distancia entre el punto $(2,1,0)$ e y es mínima.

Buscamos $\min\limits_{y \in Im(A)} \|y-(2,1,0)\|_2 = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^3} \|Ax-(2,1,0)\|_2$



Queremos proyectar $(2,1,0)$ sobre el plano.

Ecuaciones normales

$A^T A x = A^T (2,1,0)$

$$A^T(2,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema $A^T A x = (2,1)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$x = (1,0)$ es solución única porque las columnas de A son LI.

Luego el punto más cerca al $(2,1,0)$ que además está en el plano es $A(1,0)$. Esta es la solución al problema de cuadrados mínimos.

$$A.(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $(1,0,1)$ es el punto en el plano más cercano al $(2,1,0)$.