19. Sea $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|R\| < 1$ y I la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n\times n}$, donde $\|\cdot\|$ es una norma matricial inducida por una vectorial.

a) Probar que $I + R$ es inversible.
Sugerencia: Ver que suponiendo $(I+R)x = 0$ para algún $x \neq 0$ se llega a $\|Rx\|/\|x\| = 1$.

b) Probar que $\|(I+R)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|R\|}$.
Sugerencia: Usar la igualdad $(I+R)^{-1} = I - R(I+R)^{-1}$.

c) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible y $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.
Probar que $A + \delta A$ es inversible y vale

$$\|(A+\delta A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}$$

a)

Supongamos que $I+R$ no es inversible.
$\exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $(I+R)x = 0$.

$(I+R)x = 0$
$\iff x + Rx = 0$
$\iff Rx = -x$
$\iff \|Rx\| = \|-x\|$
$\iff \|Rx\| = |-1| \cdot \|x\|$
$\iff \|Rx\|/\|x\| = 1$

Por hipótesis $\|R\| < 1$.
$\|Rx\|/\|x\| \leqslant \|R\| \cdot \|x\|/\|x\| = \|R\| < 1$

$\Rightarrow \|Rx\|/\|x\| < 1 \Rightarrow \|Rx\|/\|x\| \neq 1$ Absurdo

$\nexists x \neq 0$ tal que $(I+R)x = 0$.

$\therefore$ $I+R$ es inversible