1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango r y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares (SVD), con $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, siendo $\Sigma = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0\}$ y $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_r > 0$. Llamamos a σ_i el i-ésimo valor singular. Sean $v_1, \dots, v_n$ las columnas de V y $u_1, \dots, u_m$ las columnas de U. Demostrar:

   a) $v_1, \dots, v_n$ son autovectores de A^tA.

   b) $u_1, \dots, u_m$ son autovectores de AA^t.

   c) $\lambda_i = \sigma_i^2$ son los autovalores de A^tA asociados al autovector v_i.

$$V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

V ortogonal: $A = U\Sigma V^T \iff AV = U\Sigma$

$$\begin{cases} Av_i = \sigma_i u_i & i = 1 \dots r \\ Av_i = 0 & i = r+1 \dots n \end{cases}$$

U ortogonal: $A = U\Sigma V^T \iff U^TA = \Sigma V^T \iff (U^TA)^T = (\Sigma V^T)^T$

$\iff A^TU = V\Sigma^T \iff A^TU = V\Sigma$

$$\begin{cases} A^Tu_i = \sigma_i v_i & i = 1 \dots r \\ A^Tu_i = 0 & i = r+1 \dots m \end{cases}$$

a) c) QVQ: $v_1 \cdots v_n$ son autovectores de A^TA con autovalor $\lambda_i = \sigma_i^2$.

$$Av_i = \sigma_i u_i \iff A^TAv_i = \sigma_i A^T u_i$$
$$\iff A^TAv_i = \sigma_i \sigma_i v_i$$
$$\iff A^TAv_i = \sigma_i^2 v_i \quad \forall i = 1 \ldots r$$

$$Av_i = 0 \iff A^TAv_i = 0$$
$$\iff A^TAv_i = 0 \cdot v_i \quad \forall i = r+1 \ldots n$$

A^TA es una matriz simétrica semi definida positiva.
Luego los autovalores $\lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1 \ldots n$.

$$\text{rango}(A^TA) = \text{rango}(A) = r \implies \begin{cases} \lambda_i > 0 & i = 1 \ldots r \\ \lambda_i = 0 & i = r+1 \ldots n \end{cases}$$

Tomamos $\lambda_i = \sigma_i^2 \ \forall i = 1 \ldots r$ y está bien definido por

$\therefore$ $v_1 \cdots v_n$ son autovectores de A^TA
con λ_i autovalor asociado a v_i $\forall i = 1 \ldots n$.

$$\begin{cases} A^TAv_i = \lambda_i v_i = \sigma_i^2 v_i & i = 1 \ldots r \\ A^TAv_i = \lambda_i v_i = 0 \cdot v_i & i = r+1 \ldots n \end{cases}$$

b) QVQ: $u_1 \cdots u_m$ son autovectores de AA^T.

$$A^T u_i = \sigma_i v_i \iff AA^T u_i = \sigma_i A v_i$$
$$\iff AA^T u_i = \sigma_i \sigma_i u_i$$
$$\iff AA^T u_i = \sigma_i^2 u_i \qquad \forall i = 1 \dots r$$

$$A^T u_i = 0 \iff AA^T u_i = 0$$
$$\iff AA^T u_i = 0 \cdot u_i \qquad \forall i = r+1 \dots m$$

AA^T es una matriz simétrica semi definida positiva.
Luego los autovalores $\lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1 \dots m$

$$\operatorname{rango}(AA^T) = \operatorname{rango}(A) = r \implies \begin{cases} \lambda_i > 0 & i = 1 \dots r \\ \lambda_i = 0 & i = r+1 \dots m \end{cases}$$

Tomamos $\lambda_i = \sigma_i^2 \ \forall i = 1 \dots r$ y está bien definido por

$\therefore$ $u_1 \cdots u_m$ son autovectores de AA^T
con λ_i autovalor asociado a u_i $\forall i = 1 \dots m$.

$$\begin{cases} AA^T u_i = \lambda_i u_i = \sigma_i^2 u_i & i = 1 \dots r \\ AA^T u_i = \lambda_i u_i = 0 \cdot u_i & i = r+1 \dots m \end{cases}$$