

14. Sea A una matriz tridiagonal simétrica definida positiva. Si $A = LL^T$ es la factorización de Cholesky de A , demostrar que L es tridiagonal (de hecho es bidiagonal).

Podemos suponer

A sdp

$$A = LL^T$$

A tridiagonal

$$A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$$

$$L \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$$

$$\forall \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ tridiagonal} \Rightarrow \tilde{L} \text{ bidiagonal}$$

QVQ

$L \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ es bidiagonal

Sea $A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ sdp, $A = LL^T$ la factorización de Cholesky.

$$L = \begin{bmatrix} \tilde{L} & 0 \\ l^T & \alpha \end{bmatrix} \quad L^T = \begin{bmatrix} \tilde{L}^T & l \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} L \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} & \tilde{L} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ l \in \mathbb{R}^n & \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$LL^T = \begin{bmatrix} \tilde{L}\tilde{L}^T & \tilde{L}l \\ l^T\tilde{L}^T & l^T l + \alpha^2 \end{bmatrix} = A$$

Sea $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^T$ una matriz sdp y tridiagonal de $n \times n$ porque es una submatriz de A . Por HI \tilde{L} es bidiagonal.

QVQ L es bidiagonal. Basta probar que $l = (0, \dots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$.

La columna $n+1$ de A es: $(\tilde{L}l, l^T l + \alpha^2)$.

Como A es tridiagonal, $\tilde{L}l = (0, \dots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{Entonces } (\tilde{L}l)_i = [(\tilde{L}l)^T]_i = (l^T \tilde{L}^T)_i = 0 \quad \forall i < n.$$

Supongamos que existe un **mínimo** $k < n$ tal que $l_k \neq 0$.

$$l = (0, \dots, *, \dots, 0, *).$$

$$\hookrightarrow l_k \neq 0$$

Veamos qué pasa con la fila $k < n$ de $\tilde{L}l$.

$$\begin{aligned} (\tilde{L}l)_k &= \sum_{i=1}^n \tilde{L}_{ki} l_i \\ &= \tilde{L}_{k,k-1} \underset{=0}{l_{k-1}} + \tilde{L}_{kk} l_k \\ &= \tilde{L}_{kk} l_k \neq 0 \quad \text{Absurdo} \end{aligned}$$

bidiagonal

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Fila k

Columnas $k-1$ y k

Pues supusimos $l_k \neq 0$ y $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^T$ es la Factorización de Cholesky, luego la diagonal de \tilde{L} es > 0 .

$\therefore l = (0, \dots, 0, *) \in \mathbb{R}^n$ y L resulta bidiagonal.

Falta probar el caso base. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tridiagonal y sdp. Si $A = LL^T$ es la Factorización de Cholesky, QVQ L es bidiagonal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

Basta ver que $l_{31} = 0$ para que L sea bidiagonal.

Como A es tridiagonal: $\text{Fila}_3(L) \cdot \text{Col}_1(L^T) = 0$.

$$(l_{31}, l_{32}, l_{33}) \cdot (l_{11}, 0, 0) = l_{31} \cdot l_{11} = 0 \Leftrightarrow l_{31} = 0$$

Pues $l_{11} \neq 0$ por estar en la diagonal de L (por Cholesky).