11. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango 1. Llamamos rango de A a la dimensión del espacio generado por la imagen $Im(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Sea u un vector unitario en $Im(A)$.

a) Demostrar que todas las columnas de A son múltiplos de u.

b) Mostrar que A se puede escribir de la forma $A = \sigma u v^t$, con $v \in \mathbb{R}^n$ unitario y $\sigma > 0$.

c) Mostrar que existe una matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ cuya primer columna es u y una matriz ortogonal $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cuya primer columna es v. ¿Cómo podría construir dichas matrices?

d) Deducir que toda matriz A de rango 1 tiene descomposición SVD. ¿Quién es Σ?

a)

$Im(A)$ es el subespacio generado por las columnas de A.
$\dim(Im(A)) = 1 \Rightarrow$ cualquier base de $Im(A)$ tiene un único vector.
En particular podemos tomar u pues $u \in Im(A)$.

$Im(A) = \langle u \rangle$

$Ae_i = col_i(A) = \alpha_i u$ pues $col_i(A) \in Im(A)$ $\quad \forall i = 1 \dots n$

b)

QVQ: $A = \sigma u v^T$ con $v \in \mathbb{R}^n$ unitario, $\sigma > 0$
Por a) ya sabemos que las columnas de A se pueden escribir como múltiplos de u.

Sea $\tilde{v} = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ formado con los coeficientes tq
$col_i(A) = \alpha_i u \quad \forall i = 1 \dots n$.

Sea $\sigma = \|\tilde{v}\|_2 > 0$ pues $\tilde{v} \neq 0$ porque rango$(A) = 1$.

Sea $v = \tilde{v}/\sigma$ el vector $\tilde{v}$ normalizado.

$$A = \sigma u v^T = \sigma u \frac{\tilde{v}^T}{\sigma} = u \tilde{v}^T$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1\alpha_1 & \cdots & u_1\alpha_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_m\alpha_1 & \cdots & u_m\alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \alpha_1 u & \cdots & \alpha_n u \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} col_1(A) & \cdots & col_n(A) \end{array}$$

c)

Para construir las matrices ortogonales $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vamos a usar los subespacios ortogonales a $\langle u \rangle$ y $\langle v \rangle$.

$\langle u \rangle \oplus \langle u \rangle^\perp = \mathbb{R}^m \qquad \dim(\langle u \rangle) = 1 \qquad \dim(\langle u \rangle^\perp) = m-1$

$\langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp = \mathbb{R}^n \qquad \dim(\langle v \rangle) = 1 \qquad \dim(\langle v \rangle^\perp) = n-1$

Sea $\{u_2 \cdots u_m\}$ una base ortonormal de $\langle u \rangle^\perp$.

Sea $\{v_2 \cdots v_n\}$ una base ortonormal de $\langle v \rangle^\perp$.

$$U = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u & u_2 & \cdots & u_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$u \perp \{u_2 \cdots u_m\}$

$v \perp \{v_2 \cdots v_n\}$

$\Rightarrow$ U y V resultan matrices ortogonales d)

Sea $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tq $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & & \end{bmatrix}$

$$U \Sigma V^T = \overset{m \times m}{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ u & u_2 & \cdots & u_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}} \cdot \overset{m \times n}{\begin{bmatrix} \sigma & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}} \cdot \overset{n \times n}{\begin{bmatrix} - & v^T & - \\ - & v_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & v_n^T & - \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u & u_2 & \cdots & u_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} - & \sigma v^T & - \\ - & 0 & - \\ & \vdots & \\ - & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$= u \sigma v^T + \sum_{i=2}^{m} u_i \cdot 0$$

$$= \sigma u v^T$$

$$= A$$