

17. Sea una matriz A simétrica definida positiva. Demostrar o dar un contraejemplo para que la matriz A^{-1} sea simétrica definida positiva.

QVQ: A simétrica $\Rightarrow A^{-1}$ simétrica

Supongamos que A^{-1} no es simétrica.

$$\begin{aligned} A^{-1} &\neq (A^{-1})^T &\Leftrightarrow AA^{-1} &\neq A(A^{-1})^T \\ &&\Leftrightarrow I &\neq A^T(A^{-1})^T \\ &&\Leftrightarrow I &\neq (A^{-1}A)^T \\ &&\Leftrightarrow I &\neq I^T \\ &&\Leftrightarrow I &\neq I \quad \text{Absurdo} \end{aligned}$$

A simétrica: $A=A^T$

\therefore Si A es simétrica entonces A^{-1} también.

QVQ: A dp $\Rightarrow A^{-1}$ dp

$$\begin{aligned} x^T A^{-1} x &= x^T A^{-1} A A^{-1} x \\ &= ((A^{-1})^T x)^T A (A^{-1} x) \\ &= (A^{-1} x)^T A (A^{-1} x) \end{aligned}$$

A^{-1} simétrica: $(A^{-1})^T = A^{-1}$

$$\text{QVQ: } (A^{-1}x)^T A (A^{-1}x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Sea $\tilde{x} = A^{-1}x$. $\tilde{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ porque A^{-1} inversible.

$$(A^{-1}x)^T A (A^{-1}x) = \tilde{x}^T A \tilde{x} > 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0 \quad \text{porque } A \text{ dp.}$$

\therefore Si A es dp entonces A^{-1} también.

Alternativa para ver que $A \text{ dp} \Rightarrow A^{-1} \text{ dp}$.

Por ejercicio 16: $A \text{ dp}$ y A^{-1} inversible $\Rightarrow A^{-1}A(A^{-1})^T \text{ dp}$.

$$A^{-1}A(A^{-1})^T = I(A^{-1})^T = (A^{-1})^T = A^{-1} \Rightarrow A^{-1} \text{ dp}.$$

Por primera parte de este ejercicio:

$$A \text{ simétrica} \Rightarrow A^{-1} \text{ simétrica} \Rightarrow (A^{-1})^T = A^{-1}$$