10. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con columnas linealmente independientes, $b \in \mathbb{R}^m$ y $\omega \in \mathbb{R}$ una constante no nula. Se desea resolver el sistema $A^tAx = A^tb$ mediante un esquema iterativo. Dado un $x^{(0)}$ inicial, se propone el siguiente algoritmo:

$x := x^{(0)}$
$r := b - Ax^{(0)}$
while x *no converja a la solución* **do**
  $d := \omega A^t r$
  $x := x + d$
  $r := r - Ad$
end

a) Probar que si el esquema iterativo converge, lo hace a una solución del sistema planteado. ¿Cuál es la matriz que gobierna la iteración del esquema? (*Sugerencia*: Probar que en cada iteración $r = b - Ax$).

QVQ $r = b - Ax$ en cada iteración

Inducción en la cantidad de iteraciones k.

$P(k)$: $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

Caso base $k=0$ (antes del ciclo)

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ por valor inicial de r.

Paso inductivo

HI: $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

QVQ: $r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)}$

$$d^{(k+1)} = \omega A^T r^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k+1)} \iff x^{(k)} = x^{(k+1)} - d^{(k+1)}$$

$$\begin{aligned}
r^{(k+1)} &= r^{(k)} - Ad^{(k+1)} \\
&\overset{HI}{=} b - Ax^{(k)} - Ad^{(k+1)} \\
&= b - A(x^{(k+1)} - d^{(k+1)}) - Ad^{(k+1)} \\
&= b - Ax^{(k+1)} + Ad^{(k+1)} - Ad^{(k+1)} \\
&= b - Ax^{(k+1)}
\end{aligned}$$

$\therefore$ En cada iteración vale $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$.

Buscamos el esquema iterativo.

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= x^{(k)} + d^{(k)} \\
&= x^{(k)} + \omega A^T r^{(k)} \\
&= x^{(k)} + \omega A^T (b - Ax^{(k)}) \\
&= x^{(k)} + \omega A^T b - \omega A^T A x^{(k)} \\
&= \underbrace{(I - \omega A^T A)}_{R} x^{(k)} + \omega A^T b
\end{aligned}
$$

R es la matriz que gobierna la iteración.
Si $\rho(R) < 1$ el sistema converge a x^* cuando $k \to \infty$.

$$
\begin{aligned}
x^* &= (I - \omega A^T A) x^* + \omega A^T b \\
\iff \quad & x^* = x^* - \omega A^T A x^* + \omega A^T b \\
\iff \quad & x^* - x^* + \omega A^T A x^* = \omega A^T b \\
\iff \quad & \omega A^T A x^* = \omega A^T b \\
\iff \quad & A^T A x^* = A^T b \qquad \omega \neq 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Si el sistema converge lo hace a una solución de:
$A^T A x = A^T b$

b) Demostrar que el esquema converge si y sólo si $0 < \omega < 2/\lambda_{max}$ con λ_{max} el mayor autovalor de la matriz $A^t A$.

Aux

Si λ es autovalor de $A^T A$ entonces $1-\omega\lambda$ es autovalor de $R = I - \omega A^T A$. Sea $v \neq 0$ autovector de $A^T A$ asociado al autovalor λ.

$$(I - \omega A^T A) v = v - \omega A^T A v = v - \omega \lambda v = (1 - \omega\lambda) v$$

$\therefore$ Si λ autovalor de $A^T A$ entonces $1-\omega\lambda$ autovalor de $R = I - \omega A^T A$.

El sistema converge sii $\rho(R) = \rho(I - \omega A^T A) < 1$.

QVQ $\rho(I - \omega A^T A) < 1 \iff 0 < \omega < 2/\lambda_{max}$

Sean $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ todos los autovalores de $A^T A$.
Por lo visto antes, $1-\omega\lambda_1 \cdots 1-\omega\lambda_n$ son todos los autovalores de $R = I - \omega A^T A$.

$$\begin{aligned} \rho(R) &= \rho(I - \omega A^T A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } I - \omega A^T A\} \\ &= \max\{|1 - \omega\lambda_i| : 1 \leq i \leq n,\ \lambda_i \text{ autovalor de } A^T A\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(R) < 1 \quad &\iff \quad |1 - \omega\lambda_i| < 1 && \forall i = 1 \ldots n \\ &\iff \quad -1 < 1 - \omega\lambda_i < 1 && \forall i = 1 \ldots n \\ &\iff \quad -2 < -\omega\lambda_i < 0 && \forall i = 1 \ldots n \\ &\iff \quad 2 > \omega\lambda_i > 0 && \forall i = 1 \ldots n \\ &\iff \quad 2/\lambda_i > \omega > 0 && \forall i = 1 \ldots n \end{aligned}$$

$\text{rango}(A) = n \Rightarrow \lambda_i \neq 0 \quad \forall i = 1 \ldots n$ (demo por absurdo)

Por hipótesis λ_{max} es el mayor autovalor de A^TA.

$\lambda_{max} \geq \lambda_i \quad \forall i=1\ldots n \iff 2/\lambda_{max} \leq 2/\lambda_i \quad \forall i=1\ldots n$

Luego:

$$\begin{aligned} \rho(R) < 1 &\iff 0 < w < 2/\lambda_i \quad \forall i=1\ldots n \\ &\iff 0 < w < \min\{2/\lambda_i : i=1\ldots n\} = 2/\lambda_{max} \\ &\iff 0 < w < 2/\lambda_{max} \end{aligned}$$

$\therefore \ \rho(I - wA^TA) < 1 \iff 0 < w < 2/\lambda_{max}$