

4. Sea A una matriz simétrica y definida positiva. Probar que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

a) Si x e y son linealmente independientes, $|x^T A y| < \sqrt{x^T A x} \sqrt{y^T A y}$.¹

b) Si x e y son linealmente dependientes, $|x^T A y| = \sqrt{x^T A x} \sqrt{y^T A y}$.

a)

Sea $z \in \mathbb{R}^n$ CL de x e y . $z = x + \lambda y$ con $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} z^T A z &= (x + \lambda y)^T A (x + \lambda y) \\ &= (x^T + (\lambda y)^T) (A x + A \lambda y) \\ &= x^T A x + \underbrace{x^T A \lambda y + (\lambda y)^T A x}_{\downarrow} + (\lambda y)^T A \lambda y \\ &= x^T A x + \lambda (x^T A y + y^T A x) + \lambda^2 y^T A y \\ &= \phi(\lambda) \end{aligned}$$

$\phi(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda$ porque $\phi(y) = z^T A z > 0$ (A sdp)

$\Rightarrow \phi(\lambda)$ no tiene raíces

\Rightarrow El discriminante de $\phi(y)$ es < 0

$$(x^T A y + y^T A x)^2 - 4 y^T A y x^T A x < 0$$

$$\Leftrightarrow (x^T A y + y^T A x)^2 < 4 y^T A y x^T A x$$

$$\downarrow \geq 0$$

$$a^2 \geq 0 \quad \forall a$$

$$\downarrow > 0$$

$$A \text{ sdp} \Rightarrow y^T A y > 0 \wedge x^T A x > 0$$

Tomando raíz cuadrada de ambos lados:

$$\Leftrightarrow |x^T A y + y^T A x| < 2 \sqrt{x^T A x} \sqrt{y^T A y}$$

$$\downarrow x^T A y = y^T A x$$

$$y^T A x = y^T (A x) = y^T (x^T A^T)^T = y^T (x^T A)^T = (x^T A y)^T = x^T A y$$

$$A \text{ sdp} \Rightarrow \downarrow A^T = A \quad x^T A y \in \mathbb{R} \text{ es un número}$$

$$\Leftrightarrow 2 |x^T A y| < 2 \sqrt{x^T A x} \sqrt{y^T A y} \quad \Leftrightarrow |x^T A y| < \sqrt{x^T A x} \sqrt{y^T A y}$$

b)

$$x \text{ e } y \text{ LD} \Rightarrow \alpha x + \beta y = 0 \quad \text{con } \alpha, \beta \neq 0$$

$$\Rightarrow x = -\beta/\alpha y$$

$$\Rightarrow x = \lambda y \quad \text{con } \lambda = -\beta/\alpha \neq 0$$

$$|x^T A y| = \sqrt{x^T A x} \sqrt{y^T A y}$$

$$x^T A x = (\lambda y)^T A \lambda y = \lambda^2 y^T A y$$

↑

$$\Leftrightarrow (x^T A y)^2 = (\sqrt{x^T A x} \sqrt{y^T A y})^2 = (x^T A x)(y^T A y)$$

↓

$$x^T A y = (\lambda y)^T A y = \lambda y^T A y$$

$$\Leftrightarrow (\lambda y^T A y)^2 = (\lambda^2 y^T A y)(y^T A y)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 (y^T A y)^2 = \lambda^2 (y^T A y)^2$$