4. Probar que el método de Jacobi converge para sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 cuya matriz es simétrica definida positiva.

Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ sdp. $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad a, c > 0$

$A = D - L - U$ con $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Notemos que $U = L^T \Rightarrow A = D - L - L^T$

Sea T la matriz de iteración de Jacobi para A.

$$T = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-b}{a} \\ \frac{-b}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

Para ver que Jacobi converge para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ sdp veamos que $\rho(T) = \{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } T\} < 1$.

$$\det(T - \lambda I) = \lambda^2 - \left(\frac{-b}{a} \cdot \frac{-b}{c}\right) = \lambda^2 - \frac{b^2}{ac}$$

$$= 0 \iff \lambda^2 = \frac{b^2}{ac} \iff |\lambda| = |b|/\sqrt{ac}$$

QVQ $\quad |b|/\sqrt{ac} < 1 \iff |b| < \sqrt{ac}$

A sdp $\Rightarrow \det(A) = ac - b^2 > 0$ $\qquad$ P3.ej6.c

$\iff ac > b^2 \underset{a,c>0}{\iff} \sqrt{ac} > |b|$

$\therefore \rho(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } T\} = |b|/\sqrt{ac} < 1$

$\Rightarrow$ Jacobi converge