14. Sea $z \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geqslant n$, y sea la matriz $B = \begin{pmatrix} A \\ z^t \end{pmatrix}$. Llamamos $\sigma_1(C)$ al primer valor singular de cualquier matriz C. Demostrar: $\sigma_1(A) \leqslant \sigma_1(B) \leqslant \sqrt{\sigma_1(A)^2 + \|z\|_2^2}$.

Sabemos que $\|C\|_2 = \sigma_1(C)$ para cualquier matriz C.

Sea x tq $\|x\|_2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\|Bx\|_2^2 &= (Bx)^T(Bx) = x^T B^T B x = x^T (A^T z) \begin{pmatrix} A \\ z^T \end{pmatrix} x = x^T(A^TA + zz^T)x \\
&= x^TA^TAx + x^Tzz^Tx = (Ax)^T(Ax) + (z^Tx)^T\underbrace{(z^Tx)}_{\text{es un número}} \\
\circledast \quad &= \|Ax\|_2^2 + |z^Tx|^2 \\
&\leqslant \|A\|_2^2 + \|z\|_2^2 \cdot \underbrace{\|x\|_2^2}_{=1} \quad \text{Por Cauchy-Schwarz} \\
&= \sigma_1(A)^2 + \|z\|_2^2
\end{aligned}$$

Probamos que:

$$\|Bx\|_2^2 \leqslant \sigma_1(A)^2 + \|z\|_2^2 \quad \forall x \text{ con } \|x\|_2 = 1$$

$$\Longleftrightarrow \|B\|_2 = \max_{x:\|x\|_2=1} \|Bx\|_2 \leqslant \sqrt{\sigma_1(A)^2 + \|z\|_2^2}$$

$$\therefore \quad \sigma_1(B) = \|B\|_2 \leqslant \sqrt{\sigma_1(A)^2 + \|z\|_2^2}$$

Para ver la otra desigualdad:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(A) \leqslant \sigma_1(B) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sigma_1(A)^2 \leqslant \sigma_1(B)^2 \overset{\circledast}{=} \sigma_1(A)^2 + |z^Tx|^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sigma_1(A)^2 \leqslant \sigma_1(A)^2 + \underbrace{|z^Tx|^2}_{\geqslant 0}
\end{aligned}$$