18. Sea $H_v = I - 2(vv^t)/(v^t v)$ la transformación de Housholder asociada al vector $v \in \mathbb{R}^n$.

a) Sean dos matrices $V, W \in \mathbb{R}^{n\times k}$, y sea $G = I + VW^t$. Mostrar que $H_v G = I + VW^t + vw^t$, con $w = \dfrac{-2(v + WV^t v)}{v^t v}$.

b) Demostrar que el producto de k reflectores de Householder puede escribirse como $I + VW^t$, con $V, W \in \mathbb{R}^{n\times k}$.

a) QVQ: $H_v G = I + VW^T + vw^T$ $\qquad w^T = -2/(v^T v)(v^T + v^T V W^T)$

$$
\begin{aligned}
H_v G &= [I - 2(vv^T)/(v^T v)](I + VW^T) \\
&= I - 2(vv^T)/(v^T v) + VW^T - 2(vv^T)/(v^T v) VW^T \\
&= I + VW^T - v(2v^T/(v^T v) + 2v^T/(v^T v) \cdot VW^T) \\
&= I + VW^T + v(-2/(v^T v)(v^T + v^T V W^T)) \\
&= I + VW^T + vw^T
\end{aligned}
$$

b)