

1. Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{m \times n}$. Probar que las matrices AA^T y $A^T A$ son simétricas. Mostrar mediante un ejemplo que pueden no ser iguales. Probar que si A es cuadrada entonces $A + A^T$ es simétrica. ¿Qué sucede con $A - A^T$?

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad A^T \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad AA^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$AA^T \text{ simétrica} \Leftrightarrow (AA^T)_{ij} = (AA^T)_{ji} \quad \forall i, j = 1 \dots m$$

$$(AA^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^T = \sum_{k=1}^n a_{ki}^T a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} a_{ki}^T = (AA^T)_{ji}$$

Análogamente para $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$\text{Más Fácil: } AA^T \text{ simétrica} \Leftrightarrow AA^T = (AA^T)^T \\ (AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{bmatrix}$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. QVQ: $A + A^T$ es simétrica

$$\begin{aligned} A + A^T \text{ es simétrica} &\Leftrightarrow A + A^T = (A + A^T)^T \\ (A + A^T)^T &= A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T \end{aligned}$$

Veamos $A - A^T$

$$\begin{aligned} A - A^T \text{ es simétrica} &\Leftrightarrow A - A^T = (A - A^T)^T \\ (A - A^T)^T &= A^T - (A^T)^T = A^T - A \\ &\text{La resta no es conmutativa.} \end{aligned}$$