19. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice nilpotente si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si A es nilpotente entonces:

a) A no es inversible.

b) $I - A$ es inversible.

a)

QVQ: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nilpotente $\overset{?}{\Rightarrow}$ A no inversible

Supongamos que A sí es inversible.
$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tq $AA^{-1} = I$.

$$I = AA^{-1} = A\underbrace{AA^{-1}}_{I}A^{-1} = AAAA^{-1}A^{-1}A^{-1}$$

$$= \underbrace{A\cdots A}_{k}\underbrace{A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k} = A^k(A^{-1})^k = 0\,(A^{-1})^k = 0$$

A nilpotente: $A^k = 0$

$\Rightarrow I = 0$ Absurdo
$\therefore$ A no es inversible

a) Alternativo usando A, B inversibles $\Rightarrow$ AB inversible

Supongamos A inversible.
$\Rightarrow AA = A^2$ inversible
$\Rightarrow AA^2 = A^3$ inversible
$\vdots$
$\Rightarrow AA^{k-1} = A^k = 0$ inversible Absurdo $\Rightarrow$ A no inversible

A nilpotente: $A^k = 0$

b)

QVQ: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nilpotente $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $I-A$ es inversible

En el ejercicio 4c probamos que:

$$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^m) = I-A^{m+1}$$
$$(I+A+A^2+\cdots+A^m)(I-A) = I-A^{m+1}$$

Como A es nilpotente, existe $k\in\mathbb{N}$ tq $A^k=0$.
Basta tomar $m=k-1$ y vemos que $(I+A+A^2+\cdots+A^m)$ es la inversa de $I-A$.

Sea $(I-A)^{-1} = (I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$$(I-A)(I-A)^{-1} = (I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) = I-A^{k-1+1} = I-A^k = I$$
$$(I-A)^{-1}(I-A) = (I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(I-A) = I-A^{k-1+1} = I-A^k = I$$

Ej 4c

A nilpotente
$A^k=0$

$\therefore$ $I-A$ es inversible y $(I-A)^{-1} = (I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$
con $k\in\mathbb{N}$ tq $A^k=0$.

b) Alternativa sin usar ej 4c

QVQ: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nilpotente $\Rightarrow$ $I-A$ es inversible

Sea $k \in \mathbb{N}$ tq $A^k = 0$ por ser A nilpotente.
Veamos cuál es el núcleo de $I-A$.

$$Nu(I-A) = \{x \in \mathbb{R}^n : (I-A)x = 0\}$$

$$(I-A)x = 0 \iff Ix - Ax = 0 \iff Ax = x$$

$x = Ax$ es una definición recursiva.
¿Qué pasa si la aplicamos k veces?

$$\begin{aligned} x = Ax \quad &\Rightarrow \quad x = A(Ax) = A^2 x \\ &\Rightarrow \quad x = A^2(Ax) = A^3 x \\ &\vdots \\ &\Rightarrow \quad x = A^{k-1}(Ax) = A^k x = 0x = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

A es nilpotente: $A^k = 0$

Tomamos $x \in Nu(I-A)$ y concluimos $x = 0$ por ser A nilpotente.
Si $Nu(I-A) = \{0\}$ entonces $I-A$ es inversible.

$\therefore$ A nilpotente $\Rightarrow$ $I-A$ es inversible