3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo.

   a) Existe una matriz definida positiva no simétrica.

   b) Si A es simétrica y B es simétrica entonces AB es simétrica.

   c) Existen matrices A y B simétricas tales que $A \neq B$ y AB es simétrica.

a)

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^T A x &= (x_1, x_2) \cdot (x_1 - x_2, x_1 + x_2) \\ &= x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 > 0 \qquad \forall x \neq 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ Verdadero

b)

QVQ: A y B simétricas $\Rightarrow$ AB simétrica

AB simétrica $\iff$ $AB = (AB)^T$

$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$

$\downarrow$

El producto de matrices no es conmutativo en el caso general.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Falso

c)

$A = I \qquad B = \alpha I$ con $\alpha \neq 1$

A y B son simétricas y $A \neq B$

$AB = I \alpha I = \alpha I I = \alpha I$

$\Rightarrow AB$ simétrica

$\therefore$ verdadero