12. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Supongamos que $dim(Nu(A)) = k$ y sea $B_1 = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una base del subespacio $Nu(A)$. Además sea $B_2 = \{v_{k+1}, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una base tal que $B_1 \cup B_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

a) Probar que cualquier vector $y \in Im(A)$ se puede escribir como una combinación lineal de $\{Av_{k+1}, \ldots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

b) Probar que los vectores del conjunto $\{Av_{k+1}, \ldots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ son linealmente independientes.

c) Deducir el *Teorema de la dimensión*: $dim(Nu(A)) + dim(Im(A)) = n$.

a)

Sea $y \in Im(A) \subseteq \mathbb{R}^m$. $y = Ax$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.
QVQ: y se puede escribir como una combinación lineal de
$\{Av_{k+1}, \cdots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

A es una matriz de $m\times n$, y cada v_i es un vector de $\mathbb{R}^n$.
Entonces $Av_i \in \mathbb{R}^m$ para todo $i = 1 \ldots n$ (en particular para $i = k+1 \ldots n$).

Considerando que A es una T.L. podemos reescribir la combinación lineal para ver que $y = Ax$ (para algún x).

$$
\begin{aligned}
y &= \alpha_{k+1} A v_{k+1} + \cdots + \alpha_n A v_n \\
&= A \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + A \alpha_n v_n && A \text{ TL: } \alpha F_A(v) = F_A(\alpha v) \\
&= A(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n) && A \text{ TL: } F_A(v+w) = F_A(v) + F_A(w) \\
&= Ax
\end{aligned}
$$

Con x combinación lineal de $\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$
usando coeficientes $\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n$.
Obs: $x \in \mathbb{R}^n$ porque es combinación lineal de $\{v_{k+1}, \cdots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$

b)

QVQ: $\{AV_{K+1}, \cdots, AV_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ LI

$$\sum_{i=K+1}^{n} \alpha_i AV_i = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_i = 0 \quad \forall i = K+1 \ldots n$$

$$\sum_{i=K+1}^{n} \alpha_i AV_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=K+1}^{n} A \alpha_i V_i = 0 \qquad \alpha_i f_A(V_i) = f_A(\alpha_i V_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot \sum_{i=K+1}^{n} \alpha_i V_i = 0 \qquad f_A(\alpha_i V_i) + \cdots + f_A(\alpha_n V_n)$$
$$= f_A(\alpha_i V_i + \cdots + \alpha_n V_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=K+1}^{n} \alpha_i V_i = 0 \qquad A \neq 0$$ Preguntar

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i = K+1 \ldots n$$

Porque $B_2 = \{V_{K+1}, \cdots, V_n\}$ es una base. Por def B_2 es LI.