Métodos Numéricos
2do Cuatrimestre 2024
Práctica 1
Elementos de Álgebra Lineal

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Nota: $\mathbb{R}^n$ está formado por vectores columna. Cuando se escriben por filas es por comodidad tipográfica.

1. Dadas las matrices $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y los vectores columna $x = (x_i), z = (z_i) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_i), w = (w_i) \in \mathbb{R}^m$ (donde la notación a_{ij} representa el elemento que está en la fila i y en la columna j de la matriz A y la notación x_i representa el elemento i-esimo del vector x), decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y en este último caso justificar por qué lo son.

   a) $x^t A z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} z_j$
   b) $x z^t = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$
   c) $(ADw)_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ij} d_{jk} w_k$
   d) $(B^t D^{-1} y)_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} b_{ji} d^{-1}_{jk} y_k$ donde $d^{-1}_{jk} = (D^{-1})_{jk}$

2. Sean las siguientes matrices de 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

   Para cada una de las siguientes particiones en bloques, indicar si es realizable el producto $C = AB$ en bloques. En caso de ser realizable, calcular cada bloque C_{ij} indicando sus dimensiones.

   a) $A_{11} = [a_{11}],\ A_{12} = [a_{12},\ a_{13}],\ A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

      $B_{11} = [b_{11}],\ B_{12} = [b_{12},\ b_{13}],\ B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

   b) $A_{11} = [a_{11}\ \ a_{12}],\ A_{12} = [a_{13}],\ A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$

      $B_{11} = [b_{11}],\ B_{12} = [b_{12}\ \ b_{13}],\ B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

   c) $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},\ A_{21} = [a_{31}],\ A_{22} = [a_{32}\ a_{33}]$

      $B_{11} = [b_{11}],\ B_{12} = [b_{12}\ b_{13}],\ B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

   ¿Qué otras particiones válidas son posibles?

3. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con columnas $a_1, \ldots, a_n$, y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con filas $b_1^t, \ldots, b_n^t$. Probar que:

   a) Si $\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx$, entonces $A = B$.
   b) $AB = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i^t$.

4. *Sobre la (no) conmutatividad de las matrices cuadradas*

   a) Exhibir $n \in \mathbb{N}$ y $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para los cuales $AB \neq BA$.

   b) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y B para que valga la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Idem para que $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

   c) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $m \in \mathbb{N}$, probar la igualdad
   $(I - A)(I + A + \ldots + A^m) = (I + A + \ldots + A^m)(I - A) = I - A^{m+1}$

5. Determinar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^n$ son linealmente independientes. Cuando no lo sean, escribir uno de sus elementos como combinación lineal del resto.

   a) $C = \{(1,\, 2,\, 1,\, 0),\, (2,\, 1,\, 3,\, 0),\, (3,\, 2,\, 4,\, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

   b) $C = \{(3,\, 3,\, 3),\, (2,\, 1, 0),\, (7,\, 5,\, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

6. Hallar dos bases distintas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^n$ y extenderlas a bases de $\mathbb{R}^n$.

   a) $S = \langle\, (1,\, 2,\, 0),\, (1,\, 3,\, 6),\, (1,\, 7,\, 30)\,\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

   b) $S = \langle\, (1,\, 2),\, (4,\, 8)\,\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$

7. Demostrar:

   a) Sea $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$. El conjunto $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $m \leq n$, es linealmente independiente si y solo si el conjunto $\{v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_m\}$ es linealmente independiente.

   b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. El conjunto $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $m \leq n$, es linealmente independiente si y solo si el conjunto $\{v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_m\}$ es linealmente independiente.

   Relacionar estas propiedades con el método de Eliminación Gaussiana de triangulación de matrices.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y sea $T(x) = Ax$.

   a) Probar que T es una transformación lineal.

   b) Definir dominio y codominio de T y hallar su expresión asociada, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

   c) Hallar la matriz A asociada a la siguientes transformaciones lineales:

      i) $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1,\, 2x_3,\, 3x_2)$

      ii) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\, 2x_1 + 3x_3,\, 3x_2)$

   ¿Cómo estas transformaciones lineales mueve los ejes de coordenadas?

9. a) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y sea $T(x) = Ax$. Sean $x = (-1, -1)$ e $y = (2, 1)$ dos puntos del plano. ¿Cuál es la imagen del segmento que tiene por extremo a dichos puntos? Justificar.

   b) Considere ahora $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz arbitraria ¿Cuál es la imagen del segmento unido por dos puntos x e y de $\mathbb{R}^n$?

10. Para las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hallar $Nu(A)$, $Im(A)$, su rango fila, su rango columna y comprobar que $n = dim(Nu(A)) + dim(Im(A))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 30 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

11. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar:

    a) $Nu(B) \subseteq Nu(AB)$.
    b) $Im(AB) \subseteq Im(A)$.
    c) Si $AB = 0$ entonces $Im(B) \subseteq Nu(A)$.

12. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Supongamos que $dim(Nu(A)) = k$ y sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una base del subespacio $Nu(A)$. Además sea $B_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una base tal que $B_1 \cup B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

    a) Probar que cualquier vector $y \in Im(A)$ se puede escribir como una combinación lineal de $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.
    b) Probar que los vectores del conjunto $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ son linealmente independientes.
    c) Deducir el *Teorema de la dimensión*: $dim(Nu(A)) + dim(Im(A)) = n$.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes (es decir, si una de ellas vale, todas valen).

    a) A es inversible.
    b) No existe $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, tal que $Ax = 0$.
    c) Las columnas de A son linealmente independientes.
    d) Las filas de A son linealmente independientes.

14. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Probar:

    a) $AB = AC$ entonces $B = C$ ¿Es necesario que A sea inversible para probarlo?
    b) $AB = 0$ entonces $B = 0$ ¿Es necesario que A sea inversible para probarlo?

15. Dada una matriz $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ llamamos *traza* de M a $tr(M) = \sum_{i=1}^{\text{mín}(m,n)} m_{ii}$. Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

    a) Probar que $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
    b) Dar un contraejemplo para la afirmación $tr(AB) = tr(A)tr(B)$.
    c) Si vale que $\forall D \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $tr(BD) = tr(CD)$, entonces $B = C$.
    d) $tr(B) = tr(ABA^{-1})$ (Sug.: demostrar primero que $tr(CD) = tr(DC)$).

16. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ probar:

    a) Si A es inversible entonces A^{-1} es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$.
    b) Si A, B son inversibles entonces AB es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

c) Si A es inversible entonces A^t es inversible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

17. Para cualquier $u, v \in \mathbb{R}^n$, sea $A = uv^t$.

    a) Hallar $Im(A)$ y $Nu(A)$.

    b) Probar que $A^2 = tr(A) \cdot A$.

18. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar mediante inducción en la dimensión de la matriz:

    a) Si A y B son triangulares inferiores (superiores) entonces el producto AB es triangular inferior (superior).

    b) Si A es inversible y triangular inferior (superior) entonces A^{-1} es triangular inferior (superior).

19. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice nilpotente si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si A es nilpotente entonces:

    a) A no es inversible.

    b) $I - A$ es inversible.

20. a) Graficar aproximadamente los siguientes conjuntos de puntos:

    i) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_1 = 1\}$

    ii) $B = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_2 = 1\}$

    iii) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_4 = 1\}$

    iv) $D = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_\infty = 1\}$

    b) A partir de los gráficos anteriores, proponga un candidato para el resultado de $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p$ para un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Calcular analíticamente el resultado propuesto.

21. a) Probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakovski: $|x^t y| \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2$.

    b) Probar que si x e y son linealmente dependientes, entonces vale la igualdad.

    c) Mostrar con un contraejemplo que la desigualdad de C-S-B no se cumple para la norma infinito. ¿Se cumple la desigualdad para la norma uno? Justificar la respuesta.

22. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que $\|x\|_2$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ son normas vectoriales. Luego, probar que:

    a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$.

    b) $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

    c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

Resolver en computadora

i) Dados $x_1, \ldots, x_n$ una muestra de una variable aleatoria, implementar rutinas que calculen la media y la varianza utilizando operaciones vectoriales.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

a) Demostrar que A^tA y AA^t son simétricas.

b) Implementar una rutina que dada una matriz cuadrada verifique si la misma es simétrica.

c) Analizar la función implementada en el item anterior con la matriz B generada por:

```
from numpy.random import rand
>> A = rand(4,4);
>> B = A.T@A*0.1/0.1;
```

Analizar el resultado, revisar la implementación y (eventualmente) reimplementar la función.

iii) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con n par y B triangular inferior.

a) Calculas AB por bloques, partiendo ambas matrices en bloques de tamaño $n/2$.

b) Implementar una rutina que realice la multiplicación por bloques, evitando cuentas innecesarias.

Funciones útiles

A continuación incluimos ejemplos para crear y operar con matrices y vectores usando Python+Numpy y Matlab/Octave.

- Inicializar matrices y vectores usando distintas sintaxis en Numpy. Tener en cuenta que Numpy maneja como tipos de datos básicos tanto `array` multidimensional como `matrix`; para operaciones de álgebra lineal se recomienda usar esta última.

```python
from numpy import *
from numpy.linalg import *

# Distintas maneras de inicializar una matriz
A = matrix([[1,2],[3,4]])
B = matrix('1 2; 3 4')
C = matrix('1 2; 3 4', float)

# Para los vectores usamos matrices columna
v = matrix([[4],[5]])
w = matrix('4; 5')

# Crear matrices especiales
I = asmatrix(eye(3))            # Identidad de 3x3
D = asmatrix(diag([1,2]))       # Matriz diagonal
N = asmatrix(zeros((3,3)))      # Matriz nula de 3x3

# Construir una matriz de 4x4 usando las matrices A,B,C,D como bloques
E = bmat([[A,B],[C,D]])
```

- Operaciones básicas entre las matrices y vectores definidos anteriormente en Numpy

```python
A + B      # Suma
A - B      # Resta
```

```
A * B       # Producto de matrices
A * v       # Producto de matriz por vector
3.2 * A     # Producto por escalar
A ** 2      # Potencia
A.t         # Traspuesta
inv(A)      # Inversa
```

- Inicializar matrices y vectores en Matlab/Octave, por defecto se inicializan con tipo de dato `double`.

```
% Distintas maneras de inicializar una matriz
A = [ 1,2 ; 3,4 ]
A = [ 1 2 ; 3 4 ]
C = [[1 2];[3,4]]

% Para los vectores usamos matrices columna
v = [4 ; 5]

% Crear matrices especiales
I = eye(3)          % Identidad de 3x3
D = diag([1,2])     % Matriz diagonal
N = zeros(3,3)      % Matriz nula de 3x3

% Construir una matriz de 4x4 usando las matrices A,B,C,D como bloques
E = [A,B;C,D]
E = [[A,B];[C,D]]
E = [[A B];[C D]]
```

- Operaciones básicas entre las matrices y vectores definidos anteriormente en Matlab/Octave

```
A + B       % Suma
A - B       % Resta
A * B       % Producto de matrices
A * v       % Producto de matriz por vector
3.2 * A     % Producto por escalar
A^2         % Potencia
A'          % Traspuesta
inv(A)      % Inversa
```

Referencias

[1] Serge Lang. *Linear Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1986.

[2] C. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[3] G. Strang. *Algebra lineal y sus aplicaciones.* Ed. Paraninfo, 2007.