14. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Demostrar que $tr(A) = \sum_i \lambda_i$ (usar que $tr(BC) = tr(CB)$ para C y B convenientes) y que $\det(A) = \prod_i \lambda_i$.

A diagonalizable $\Rightarrow$ $\exists D$ diagonal y $\exists S$ inversible tq $A = SDS^{-1}$.

Además $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ y $S = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ con $v_1 \cdots v_n$ base de autovectores.

Preguntar, creo que no necesariamente es base.

Vale que $tr(BC) = tr(CB)$ $\forall B, C$. Tomemos $B = SD$, $C = S^{-1}$.

$tr(SDS^{-1}) = tr(S^{-1}SD) = tr(ID) = tr(D)$

Luego $tr(A) = tr(SDS^{-1}) = tr(D) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

$\therefore$ $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

$$\begin{aligned} \det(A) = \det(SDS^{-1}) &= \det(S)\cdot\det(D)\cdot\det(S^{-1}) \\ &= \det(S)\cdot\det(D)\cdot\det(S)^{-1} \\ &= \underbrace{\det(S)\cdot\det(S)^{-1}}_{=1}\cdot\det(D) = \det(D) \end{aligned}$$

Luego $\det(A) = \det(D) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

$\therefore$ $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$