6. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ una matriz definida positiva. Demostrar que:

a) $a > 0$

b) $c > 0$

c) $det(A) > 0$ [2]

d) $|b| < \frac{a+c}{2}$

[2]Sugerencia: evaluar qué sucede con el vector $x = (-b, a)$ al calcular $x^t Ax$; o analizar la función $\phi(\lambda) = (1,\lambda)^t A(1,\lambda)$

a) b)

$x^T A x = (x_1, x_2) \cdot (ax_1 + bx_2, bx_1 + cx_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$

Como A es dp: $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$.

En particular vale para:

- $e_1 = (1,0) \Rightarrow e_1^T A e_1 = a > 0$
- $e_2 = (0,1) \Rightarrow e_2^T A e_2 = c > 0$

$e_i^T A e_j = a_{ij}$

c)

$\det(A) = ac - b^2$

$x = (-b, a) \neq 0$ porque $a > 0$

$x^T A x = ab^2 - 2b^2 a + ca^2 = ca^2 - ab^2 = a(ac - b^2)$

$x^T A x > 0 \Rightarrow a(ac-b^2) > 0$

$\Rightarrow ac - b^2 > 0$

$\Rightarrow \det(A) > 0$

A es dp

$a > 0$

d)

A es dp: $x^T A x > 0$. En particular vale para:

- $x = (1,1)$

  $x^T A x = (1,1) \cdot (a+b, b+c) = a + 2b + c > 0 \iff -b < \frac{a+c}{2}$

- $x = (1,-1)$

  $x^T A x = (1,-1) \cdot (a-b, b-c) = a - 2b + c > 0 \iff b < \frac{a+c}{2}$

$\therefore \ |b| < \frac{a+c}{2}$