7. Demostrar:

a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. El conjunto $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $m \leq n$, es linealmente independiente si y solo si el conjunto $\{v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_m\}$ es linealmente independiente.

b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. El conjunto $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $m \leq n$, es linealmente independiente si y solo si el conjunto $\{v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_m\}$ es linealmente independiente.

Relacionar estas propiedades con el método de Eliminación Gaussiana de triangulación de matrices.

a)

$(\Rightarrow)$ QVQ: $\{V_1, \cdots, V_i, \cdots, V_m\}$ LI $\overset{?}{\Rightarrow} \{V_1, \cdots, \lambda V_i, \cdots, V_m\}$ LI

Armamos una combinación lineal del conjunto $\{V_1, \cdots, \lambda V_i, \cdots, V_m\}$ que genera el vector nulo.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \alpha_j V_j + \alpha_i \lambda V_i = 0$$

Este conjunto será LI si podemos implicar que:

$\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \ldots m$

Por hipótesis $\{V_1, \cdots, V_i, \cdots, V_m\}$ son LI. Esto nos dice que si la combinación lineal es 0 entonces cada coeficiente que multiplica a cada V_i es 0.

$$\begin{cases} \alpha_j = 0 & \forall j = 1 \ldots m, \ j \neq i \\ \alpha_i \lambda = 0 & j = i \end{cases}$$

El coeficiente asociado a V_i es $\alpha_i \lambda$.

Como $\lambda \neq 0$: $\alpha_i \lambda = 0 \iff \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \ldots m$

$\therefore \{V_1, \cdots, \lambda V_i, \cdots, V_m\}$ son LI.

$(\Leftarrow)$ QVQ: $\{v_1, \cdots, \lambda v_i, \cdots, v_m\}$ LI $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\{v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_m\}$ LI

Consideremos una combinación lineal de $\{v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_m\}$ que genera el vector nulo.

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j = 0$$

Alternativa: multiplicar todo por λ

Queremos implicar que todos los $\alpha_j = 0$. Como $\lambda \neq 0$, podemos multiplicar y dividir por λ al vector v_i y luego reagrupar.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \alpha_j v_j + \alpha_i \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda}}_{\lambda \neq 0} v_i = 0 \iff \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \alpha_j v_j + \alpha_i/\lambda \, \lambda v_i = 0$$

Por hipótesis $\{v_1, \cdots, \lambda v_i, \cdots, v_m\}$ son LI. Cualquier combinación lineal de estos vectores que genera el vector nulo implica que todos los coeficientes son nulos.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_j = 0 & \forall j = 1 \ldots m, \ j \neq i \\ \alpha_i/\lambda = 0 \end{cases}$$

Recordemos que $\lambda \neq 0$, entonces: $\alpha_i/\lambda = 0 \iff \alpha_i = 0$

$$\Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1 \ldots m$$

A partir de una combinación lineal de los vectores $\{v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_m\}$ que genera el vector nulo implicamos que todos los coeficientes son nulos.

$\therefore$ $\{v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_m\}$ son LI.

b)

$(\Rightarrow)$ QVQ: $\{v_1, \cdots, v_m\}$ LI $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\{v_1, \cdots, v_i + \lambda v_j, \cdots, v_j, \cdots, v_m\}$ LI

Consideremos una combinación lineal que genera el vector nulo.

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i (v_i + \lambda v_j) + \cdots + \alpha_j v_j + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i + \alpha_i \lambda v_j + \cdots + \alpha_j v_j + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + (\alpha_i \lambda + \alpha_j) v_j + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

Por hipótesis $\{v_1, \cdots, v_m\}$ son LI.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_k = 0 & \forall k = 1 \ldots m,\ k \neq j \\ \alpha_i \lambda + \alpha_j = 0 \end{cases}$$

Sabemos que $\alpha_i = 0$. Veamos qué pasa con α_j.

$$\alpha_i \lambda + \alpha_j = 0 \quad \underset{\alpha_i = 0}{\Longrightarrow} \quad \alpha_j = 0$$

Entonces $\alpha_k = 0 \ \forall k = 1 \ldots m$.

$\therefore$ $\{v_1, \cdots, v_i + \lambda v_j, \cdots, v_j, \cdots, v_m\}$ son LI.

$(\Leftarrow)$ QVQ: $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_m\}$ LI $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\{v_1, \dots, v_m\}$ LI

Consideremos una combinación lineal que genera el vector nulo.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_m v_m + \alpha_i \lambda v_j - \alpha_i \lambda v_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \alpha_i \lambda v_j + \dots + \alpha_j v_j - \alpha_i \lambda v_j + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i (v_i + \lambda v_j) + \dots + (\alpha_j - \alpha_i \lambda) v_j + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

Por hipótesis $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_m\}$ son LI. Entonces todos los coeficientes de la combinación lineal son nulos.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_k = 0 & \forall k = 1 \dots m,\ k \neq j \\ \alpha_j - \alpha_i \lambda = 0 \end{cases}$$

Sabemos que $\alpha_i = 0$. Veamos qué pasa con α_j.

$$\alpha_j - \lambda \alpha_i = 0 \quad \underset{\alpha_i = 0}{\Rightarrow} \quad \alpha_j = 0$$

Entonces $\alpha_k = 0 \quad \forall k = 1 \dots m$.

$\therefore$ $\{v_1, \dots, v_m\}$ son LI.