15. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. $x^T A^T A x$

a) Probar que A^tA es semidefinida positiva (es decir, si $0 \leqslant x^tAx$ $(\forall x \neq 0)$).

b) Si $m < n$ demostrar que A^tA no es definida positiva.

c) Si $m \geqslant n$ demostrar que A^tA es definida positiva si y sólo si A tiene rango máximo.

a)

$x^TA^TAx = (Ax)^T(Ax) = \|Ax\|_2^2 \geqslant 0$ por ser una norma

b)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m<n$. Las columnas de A son vectores en $\mathbb{R}^m$ y hay $n > m$ columnas. Es decir hay mas vectores columnas que la dimensión del espacio donde viven. Necesariamente las columnas van a ser LD, luego $\exists x \neq 0$ tq $Ax = 0$.

Más formal: la $Im(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ es el espacio columna de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Por Teo de la dimensión:

$\dim(Nu(A)) + \dim(Im(A)) = n$

$\iff \dim(Nu(A)) = n - \dim(Im(A))$

Como máximo la $\dim(Im(A)) = m < n$

$\Rightarrow \dim(Nu(A)) > 0$

$\Rightarrow \exists x \neq 0$ tq $Ax = 0$

$x^TA^TAx = x^TA^T \cdot 0 = 0$ con $x \neq 0$

$\therefore$ No vale que $x^TA^TAx > 0 \quad \forall x \neq 0$.
Luego A^TA no es definida positiva.

c) QVQ: si $m \geq n$ A^TA dp $\Leftrightarrow$ rango(A) es máximo

Notemos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, si $m \geq n$ hay más filas que columnas, o bien hay exactamente la misma cantidad. En cualquier caso el rango(A) máximo es n, la cantidad de columnas.

A^TA dp $\Leftrightarrow$ $x^TA^TAx > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\|Ax\|_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$

Como $\|Ax\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\nexists x \neq 0$ tq $Ax = 0$

$\Leftrightarrow$ cols(A) son LI

$\Leftrightarrow$ rango(A) $= n$ es máximo