

## Métodos Numéricos

2do Cuatrimestre 2024

### Práctica 3

Matrices simétricas definidas positivas

Factorización de Cholesky.



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

- Sea  $A$  una matriz de  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Probar que las matrices  $AA^t$  y  $A^tA$  son simétricas. Mostrar mediante un ejemplo que pueden no ser iguales. Probar que si  $A$  es cuadrada entonces  $A + A^t$  es simétrica. ¿Qué sucede con  $A - A^t$ ?
- Probar que toda matriz cuadrada  $A$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  es expresable en forma única como  $A = S + T$ , donde  $S$  es simétrica y  $T$  es antisimétrica (es decir,  $T^t = -T$ ).
- Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo.
  - Existe una matriz definida positiva no simétrica.
  - Si  $A$  es simétrica y  $B$  es simétrica entonces  $AB$  es simétrica.
  - Existen matrices  $A$  y  $B$  simétricas tales que  $A \neq B$  y  $AB$  es simétrica.
- Sea  $A$  una matriz simétrica y definida positiva. Probar que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  se cumple:
  - Si  $x$  e  $y$  son linealmente independientes,  $|x^tAy| < \sqrt{x^tAx}\sqrt{y^tAy}$ .<sup>1</sup>
  - Si  $x$  e  $y$  son linealmente dependientes,  $|x^tAy| = \sqrt{x^tAx}\sqrt{y^tAy}$ .
- Sea  $A$  una matriz simétrica. Probar que la función  $f(x) = \frac{(x^tAx)^{\frac{1}{2}}}{2}$  es una norma vectorial en  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si  $A$  es definida positiva.
- Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  una matriz definida positiva. Demostrar que:
  - $a > 0$
  - $c > 0$
  - $\det(A) > 0$ <sup>2</sup>
  - $|b| < \frac{a+c}{2}$
- Sea  $A$  una matriz simétrica definida positiva de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que:
  - $a_{ii} > 0$  para  $1 \leq i \leq n$ .
  - $A$  es no singular.
  - Todas las submatrices principales de  $A$  son definidas positivas.
  - $|a_{ij}|^2 \leq a_{ii}a_{jj}$  para todo  $1 \leq i, j \leq n$ . Deducir que el elemento de módulo máximo de  $A$  está en la diagonal.

<sup>1</sup>Sugerencia: considerar la función  $\phi(\lambda) = (x + \lambda y)^t A (x + \lambda y)$

<sup>2</sup>Sugerencia: evaluar qué sucede con el vector  $x = (-b, a)$  al calcular  $x^tAx$ ; o analizar la función  $\phi(\lambda) = (1, \lambda)^t A (1, \lambda)$

8. Si  $A = LL^t$  es una factorización de  $A$  con  $L$  una matriz triangular inferior con elementos de la diagonal positivos, demostrar que  $A$  es simétrica y definida positiva.
9. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica tal que

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

Demostrar que  $A$  es definida positiva.

10. Probar que la siguiente matriz simétrica es definida positiva.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

11. Sea  $A$  una matriz simétrica definida positiva de  $n \times n$ . Supongamos que se aplica a  $A$  el método de eliminación de Gauss sin elección de pivote. Después de  $k$  pasos de eliminación  $A$  se habrá reducido a la forma

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

donde  $A_{22}^{(k)}$  es una matriz de  $(n-k) \times (n-k)$ .

- Probar por inducción que  $A_{22}^{(k)}$  es definida positiva
  - Probar que  $a_{ii}^{(k)} \leq a_{ii}^{(k-1)}$  para  $1 \leq i \leq n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .
12. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz no necesariamente simétrica.
- Probar que  $A$  es definida positiva si y sólo si  $A^t$  lo es.
  - Probar que  $A$  es definida positiva si y sólo si  $\frac{A + A^t}{2}$  es simétrica definida positiva.
  - Sea  $b \in \mathbb{R}^n$  no nulo y  $M \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  una matriz definida como:

$$M = \begin{pmatrix} AA^t & 2b \\ 0^t & 1 \end{pmatrix}$$

Probar que si  $A$  es inversible y  $\|A^{-1}b\|_2^2 < 1$ , entonces  $M$  es definida positiva.

13. Demostrar la unicidad de la factorización de Cholesky de una matriz  $A$  simétrica definida positiva.
14. Sea  $A$  una matriz tridiagonal simétrica definida positiva. Si  $A = LL^t$  es la factorización de Cholesky de  $A$ , demostrar que  $L$  es tridiagonal (de hecho es bidiagonal).
15. Si  $A$  es una matriz de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , se definen los *índices de perfil* de  $A$  por

$$m(A, i) = \min\{j : a_{ij} \neq 0\} \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

Por ejemplo, los índices de perfil de la siguiente matriz son  $m(A, 1) = 1$ ,  $m(A, 2) = 2$ ,  $m(A, 3) = 1$ , y  $m(A, 4) = 4$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Probar que si  $A = LL^t$  es la factorización de Cholesky de  $A$ , entonces  $L$  tiene el mismo perfil que  $A$ , es decir:

$$m(A, i) = m(L, i) \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

16. Sean las matrices  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Demostrar que  $A$  es definida positiva y  $B$  es no singular si y sólo si  $BAB^t$  es definida positiva.
17. Sea una matriz  $A$  simétrica definida positiva. Demostrar o dar un contraejemplo para que la matriz  $A^{-1}$  sea simétrica definida positiva.

## Resolver en computadora

- i) Exhibir la factorización de Cholesky de la matriz del ejercicio 10.
- ii) La matriz de Hilbert de  $n \times n$  se define como una matriz  $H$  tal que  $(H)_{i,j} = (i+j-1)^{-1}$ . Es posible demostrar que dicha matriz es simétrica definida positiva para cualquier  $n$ . Experimentando con distintos valores de  $n$ , se pide:
  - a) Dar el número de condición de la matriz de Hilbert, usando la función `cond`.
  - b) Calcular la factorización de Cholesky de la matriz.
  - c) Para los valores de  $n$  en los que sea posible, resolver el sistema  $Hx = b$ , con  $b_i = 1 \forall i$ , utilizando primero eliminación Gaussiana y luego resolviendo los sistemas  $Ly = b$ ,  $L^t x = y$ , siendo  $H = LL^t$  la factorización de Cholesky de  $H$ . Comparar ambos resultados.
- iii) Se conocen las matrices  $L$  y  $U$  de la factorización  $LU$  de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica definida positiva. A partir de  $L$  y  $U$  (sin calcular  $A$ ):
  - a) Describir un algoritmo para hallar la matriz  $L$  de la factorización de Cholesky  $A = LL^t$  de  $A$ .
  - b) Hallar en una única sentencia de Python/Matlab la matriz  $L$  del ítem anterior.  
*Sugerencia: utilizar la función `diag`.*
- iv) Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica definida positiva y pentadiagonal. Describir un algoritmo para hallar la factorización de Cholesky de  $A$  que aproveche esta característica y realice la mínima cantidad de cálculos.

## Funciones útiles

En general, el software para sistemas  $Ax = b$  suele proveer una forma de resolverlos como una única rutina, si bien también es posible dividirlo en dos rutinas: una para computar una factorización para  $A$ , y otra para resolver el nuevo sistema.

- En el caso de MATLAB, la solución al sistema lineal  $Ax = b$  está dada por el operador de “*división a izquierda*” denotado con “\” tal que  $x = A \backslash b$ . Internamente, la solución está computada usando la factorización  $LU$  y sustitución hacia adelante y hacia atrás<sup>3</sup>. Si se lo desea, la factorización  $LU$  puede computarse explícitamente con:

$$[L, U] = \text{lu}(A)$$

Tener en cuenta que la  $L$  puede tener filas permutadas. Además si la matriz es simétrica y definida positiva, la factorización de Cholesky se puede obtener como:

$$L = \text{chol}(A)$$

Para estimar el número de condición según  $\|\cdot\|_p$ :

$$c = \text{cond}(X, p)$$

También es posible utilizar:

$$c = \text{rcond}(A)$$

Este último permite estimar el recíproco del número de condición (es más efectivo que `cond`, pero menos confiable).

- En Python, usando numpy, se puede calcular la factorización de Cholesky mediante:

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *
```

```
A = matrix([[8, 2], [2, 4]], float) # Matriz 2x2 SDP
L = cholesky(A)
```

El número de condición puede calcularse mediante la operación `cond`, usando como segundo parámetro la norma que se quiere usar para calcularlo (por defecto, 2); por ejemplo:

```
cond(A, 2)
cond(A, 1)
cond(A, inf)
cond(A, -inf)
cond(A, 'fro')
```

## Referencias

- [1] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, 2012.
- [2] D.R. Kincaid and E.W. Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2002.
- [3] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.

---

<sup>3</sup><http://www.mathworks.com/help/matlab/math/systems-of-linear-equations.html>