

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica tal que

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

Demostrar que A es definida positiva.

QVQ: A simétrica y $\det(A_k) > 0$ para toda A_k submatriz principal de A de $\mathbb{R}^{k \times k}$ entonces A es definida positiva.

$$\det(A_k) > 0 \quad \forall k \leq n \Rightarrow A_k \text{ inversible } \forall k \leq n$$

A tiene factorización LU única porque todas sus submatrices principales son inversibles.

$$A = A^T \text{ por hipótesis (A simétrica) y } A = LU.$$

$$A = A^T \Leftrightarrow LU = (LU)^T = U^T L^T$$

L es tri. inf. y L^T tri. sup. ambas con 1s en la diagonal
 $\Rightarrow L$ y L^T son inversibles.

$$\begin{aligned} LU = U^T L^T &\Leftrightarrow \overbrace{L^{-1} L}^I U (L^T)^{-1} = L^{-1} U \overbrace{L^T (L^T)^{-1}}^I \\ &\Leftrightarrow U (L^T)^{-1} = L^{-1} U^T \end{aligned}$$

U y $(L^T)^{-1}$ son tri. sup. pero L^{-1} y U^T son tri. inf.

$$\underbrace{U}_{\square} \underbrace{(L^T)^{-1}}_{\square} = \underbrace{L^{-1}}_{\square} U^T = D \Rightarrow U = D L^T$$

D es una matriz diagonal pues una tri. sup. solo puede ser igual a una tri. inf. en la diagonal.

Volviendo a la factorización LU.

$$A = LU = LDL^T$$

$$\det(A) = \det(LDL^T) = \det(L) \cdot \det(D) \cdot \det(L^T) = \det(D)$$

$\begin{matrix} \text{"} \\ 1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{"} \\ 1 \end{matrix}$

L triangular con 1s en la diagonal

$$QVQ: d_{ii} > 0 \quad \forall i=1 \dots n$$

Inducción en las submatrices principales de A .

$$A = \begin{bmatrix} A_k & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_k & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_k^T & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \quad A_k = L_k D_k L_k^T$$

Caso base $k=1$

$$A_1 = a_{11} = L_1 D_1 L_1^T = 1 \cdot d_{11} \cdot 1 = d_{11}$$

$$\text{Por hipótesis } \det(A_1) > 0 \Rightarrow a_{11} > 0 \Rightarrow d_{11} > 0$$

Paso inductivo

$$\text{HI: } d_{ii} > 0 \quad \forall i < k \quad \quad QVQ: d_{kk} > 0$$

$$A_k = L_k D_k L_k^T$$
$$\Rightarrow \det(A_k) = \overset{=1}{\det(L_k)} \cdot \det(D_k) \cdot \overset{=1}{\det(L_k^T)} \overset{\substack{\text{Por hipótesis } \det(A_k) > 0 \\ \uparrow}}{> 0}$$

$$\Rightarrow \det(D_k) = \prod_{i=1}^k d_{ii} = \prod_{i=1}^{k-1} d_{ii} \cdot d_{kk} > 0$$

Por HI $d_{ii} > 0 \quad \forall i < k$

$$\Rightarrow d_{kk} > 0$$

\therefore Por inducción probamos que $d_{ii} > 0 \quad \forall i \leq n$.

Sea \sqrt{D} tal que $(\sqrt{D})_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$. Podemos tomar raíz porque todos los $d_{ii} > 0$. Entonces $D = \sqrt{D} \sqrt{D}$.

Como D diagonal $\Rightarrow \sqrt{D}$ diagonal $\Rightarrow (\sqrt{D})^T = \sqrt{D}$.

$$A = L \sqrt{D} \sqrt{D} L^T = L \sqrt{D} \sqrt{D}^T L^T = L \sqrt{D} (L \sqrt{D})^T$$

Sea $\tilde{L} = L \sqrt{D}$ tri. inf. por ser producto de tri. inf.

Luego $A = \tilde{L} \tilde{L}^T$ es la Factorización de Cholesky de A .

$\therefore A$ es sdp.