13. Demostrar la unicidad de la factorización de Cholesky de una matriz A simétrica definida positiva.

Sean 2 Factorizaciones de Cholesky cualesquiera de A.

$$A = L_1 L_1^T = L_2 L_2^T$$

L_1 y L_2 son tri. inf. con la diagonal principal > 0. Luego son inversibles y sus traspuestas también.

$$\begin{aligned} L_1 L_1^T = L_2 L_2^T &\iff L_1^{-1} L_1 L_1^T = L_1^{-1} L_2 L_2^T \\ &\iff L_1^T = L_1^{-1} L_2 L_2^T \\ &\iff L_1^T (L_2^T)^{-1} = L_1^{-1} L_2 L_2^T (L_2^T)^{-1} \\ &\iff L_1^T (L_2^T)^{-1} = L_1^{-1} L_2 \end{aligned}$$

$L_1^T (L_2^T)^{-1}$ tri. sup. por ser producto de tri. sup.
$L_1^{-1} L_2$ tri. inf. por ser producto de tri. inf.

$$\Rightarrow L_1^T (L_2^T)^{-1} = L_1^{-1} L_2 = D \quad \text{matriz diagonal}$$

$$D = L_1^{-1} L_2 \iff L_1 D = L_1 L_1^{-1} L_2 \iff L_2 = L_1 D$$

Volvemos a la Factorización de $A = L_1 L_1^T = L_2 L_2^T$.

$$\begin{aligned} L_1 L_1^T = L_2 L_2^T &\iff L_1 L_1^T = L_1 D (L_1 D)^T \\ &\iff L_1 L_1^T = L_1 D D^T L_1^T \qquad D^T = D \text{ por ser diagonal} \\ &\iff L_1 L_1^T = L_1 D^2 L_1^T \\ &\iff L_1^{-1} L_1 L_1^T (L_1^T)^{-1} = L_1^{-1} L_1 D^2 L_1^T (L_1^T)^{-1} \\ &\iff D^2 = I \end{aligned}$$

$D^2 = I \Rightarrow D = I$ o $D = -I$

Supongamos que $D = -I$.

$L_2 = L_1 D \quad \Rightarrow \quad L_2 = L_1(-I) = -L_1$

L_1 tiene diagonal principal > 0. Luego $L_2 = -L_1$ tiene diagonal principal < 0. Absurdo porque L_2 viene de la Factorización de Cholesky de A.

$\Rightarrow D = I \quad \Rightarrow \quad L_2 = DL_1 = L_1$

Luego resulta que $L_1 = L_2$ y $L_1^T = L_2^T$. Las factorizaciones de Cholesky de A son iguales.

$\therefore$ La Factorización de Cholesky es única.

Alternativa

Si A tiene factorización de Cholesky podemos transformarla en una LU.

$$A = \tilde{L}\tilde{L}^T = L\overbrace{DL^T}^{U}$$

A sdp $\Rightarrow \det(A) > 0 \Rightarrow$ A inversible

Si A es inversible y tiene factorización LU entonces esa factorización es única. Luego la factorización de Cholesky también es única.

Usa fuertemente resultados previos que hay que demostrar.