

7. Sea  $A$  una matriz simétrica definida positiva de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que:

- a)  $a_{ii} > 0$  para  $1 \leq i \leq n$ .
- b)  $A$  es no singular.
- c) Todas las submatrices principales de  $A$  son definidas positivas.
- d)  $|a_{ij}|^2 \leq a_{ii} a_{jj}$  para todo  $1 \leq i, j \leq n$ . Deducir que el elemento de módulo máximo de  $A$  está en la diagonal.

a)

$A$  es sdp  $\Rightarrow x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$ . En particular vale para los vectores de la base canónica.

$$e_i^T A e_i > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$\begin{aligned} e_i^T A e_i &= e_i^T \cdot \text{col}_i(A) = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \cdot \text{col}_i(A) \\ &= 0 \cdot a_{1i} + \dots + 1 \cdot a_{ii} + \dots + 0 \cdot a_{ni} = a_{ii} \end{aligned}$$

$$\therefore a_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

b)

Supongamos que  $A$  no es inversible.  $\exists x \neq 0$  tal que  $Ax = 0$ .

$$Ax = 0 \Rightarrow x^T A x = x^T 0 = 0 \quad \text{con } x \neq 0.$$

Absurdo pues  $A$  es sdp. Si  $x \neq 0$  entonces  $x^T A x > 0$ .

$\therefore A$  es inversible.

c)

Consideremos un vector cualquiera  $x_k \in \mathbb{R}^k$ ,  $x_k \neq 0$  para cualquier  $k \leq n$ . Podemos extender  $x_k$  a un vector de  $\mathbb{R}^n$ .

$$x \in \mathbb{R}^n \quad x = (x_k, 0) \quad \text{con } 0 \in \mathbb{R}^{n-k} \quad A_k \in \mathbb{R}^{k \times k} \text{ submatriz de } A$$

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_k^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_k & * \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_k x_k \\ * \cdot x_k \end{bmatrix}$$

$$= x_k^T A x_k + 0 \cdot * \cdot x_k = x_k^T A x_k$$

$$A \text{ es sdp} \Rightarrow x^T A x > 0 \Rightarrow x_k^T A_k x_k > 0 \quad \forall k=1 \dots n$$

$\therefore$  Toda submatriz principal de  $A$  es sdp.

d)

Recordemos que  $a_{ij} = e_i^T A e_j$ .

$$|a_{ij}|^2 \leq a_{ii} a_{jj}$$

$$\Leftrightarrow |e_i^T A e_j|^2 \leq (e_i^T A e_i)(e_j^T A e_j)$$

$A$  es sdp  $\Rightarrow$

$A$  tiene factorización

$$\Leftrightarrow |e_i^T L L^T e_j|^2 \leq (e_i^T L L^T e_i)(e_j^T L L^T e_j)$$

de Cholesky:  $A = L L^T$

$$\Leftrightarrow \underbrace{|\langle L^T e_i \rangle^T \langle L^T e_j \rangle|}_{x^T \quad y}^2 \leq \underbrace{(\langle L^T e_i \rangle^T \langle L^T e_i \rangle)}_{x^T \quad x} \underbrace{(\langle L^T e_j \rangle^T \langle L^T e_j \rangle)}_{y^T \quad y}$$

$$\Leftrightarrow |(\langle L^T e_i \rangle^T \langle L^T e_j \rangle)|^2 \leq \|L^T e_i\|_2^2 \cdot \|L^T e_j\|_2^2$$

$$\downarrow x^T x = \|x\|_2^2 \quad y^T y = \|y\|_2^2$$

Vale por Cauchy-Schwarz al cuadrado