3. Sea un subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^m$, y sea P una proyección ortogonal sobre S, es decir, $P^2 = P$, $P^t = P$ y $Im(P) = S$. Sean también $b \in \mathbb{R}^m$ y $Pb = y$.

a) Probar que $\forall x \in \mathbb{R}^m$ vale que $(I - P)x \in \{v \in \mathbb{R}^m \mid v \perp u \text{ para todo } u \in S \text{ no nulo}\} = S^\perp$.

b) Probar que $b - y \in S^\perp$.

c) Usar Pitágoras para verificar que y es el único vector en S tal que

$$\|b - y\|_2 = \min_{s \in S} \|b - s\|_2$$

a)

QVQ $\forall x \in \mathbb{R}^m.\ (I-P)x \in S^\perp \iff \forall w \in S = Im(P).\ w^T(I-P)x = 0$

$$w^T(I-P)x \underset{\substack{\uparrow \\ w \in Im(P) \Rightarrow \exists z \text{ tq } Pz = w}}{=} (Pz)^T(I-P)x = (z^TP^T - z^TP^TP)x \underset{\substack{\uparrow \\ P^TP = P^2 = P \\ P^T = P}}{=} (z^TP - z^TP)x = 0$$

b)

QVQ $b - y \in S^\perp$

Por inciso a) $(I-P)(b-y) \in S^\perp$ pues $b - y \in \mathbb{R}^m$.

Basta ver que $(I-P)(b-y) = b - y \Rightarrow b - y \in S^\perp$.

$$\begin{aligned} (I-P)(b-y) &= b - y - Pb + Py \\ &= b - y - Pb + PPb && y = Pb \\ &= b - y - Pb + Pb && P^2 = P \\ &= b - y \end{aligned}$$

c)

QVQ: $\|b-y\|_2 = \min_{s\in S} \|b-s\|_2 \iff \|b-y\|_2^2 = \min_{s\in S} \|b-s\|_2^2$

Usamos que $y = Pb$ es la proyección ortogonal de b.
Por inciso b) vimos que $b-y \in S^{\perp} = Im(P)^{\perp}$.
Además si $y = Pb$ entonces $y \in S = Im(P)$, al igual que $s \in S$ (el vector que minimiza $\|b-s\|_2^2$). Entonces $y-s \in S = Im(P)$ pues restar/sumar 2 vectores en S genera otro vector que también está en S.

$$\min_{s\in S} \|b-s\|_2^2 = \min_{s\in S} \|\underbrace{b-y}_{\in S^{\perp}} + \underbrace{y-s}_{\in S}\|_2^2 \quad \Rightarrow (b-y) \perp (y-s)$$

$$= \min_{s\in S} (\underbrace{\|b-y\|_2^2}_{\text{no depende de } s} + \|y-s\|_2^2) \quad \text{por Pitágoras}$$

$$= \|b-y\|_2^2 + \min_{s\in S} \|y-s\|_2^2$$

Lo mínimo que puede valer una norma es 0 y se alcanza cuando $s = y$ pues $y \in S$.

$$= \|b-y\|_2^2$$

$$\therefore \|b-y\|_2 = \min_{s\in S} \|b-s\|_2$$

Alternativa usando que $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \mathrm{Nu}(A^T)$.

$$S = \mathrm{Im}(P) \Rightarrow S^{\perp} = \mathrm{Im}(P)^{\perp} = \mathrm{Nu}(P^T) \overset{P^T = P}{=} \mathrm{Nu}(P)$$

a)

QVQ $\forall x \in \mathbb{R}^m.\ (I-P)x \in S^{\perp} = \mathrm{Nu}(P) \iff \forall x \in \mathbb{R}^m.\ P(I-P)x = 0$

$$P(I-P)x = (P-P^2)x \underset{P^2 = P}{=} (P-P)x = 0x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

b)

QVQ $b - y \in S^{\perp} = \mathrm{Nu}(P) \iff P(b-y) = 0$

$$P(b-y) = Pb - Py \underset{y = Pb}{=} Pb - PPb \underset{P^2 = P}{=} Pb - Pb = 0$$