3. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con columnas $a_1, \ldots, a_n$, y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con filas $b_1^t, \ldots, b_n^t$. Probar que:

a) Si $\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx$, entonces $A = B$.

b) $AB = \sum_{i=1}^n a_i\, b_i^t$.

a)

QVQ: $\forall x.\ Ax = Bx \Rightarrow A = B$

Por contrarrecíproco: $A \neq B \Rightarrow \exists x.\ Ax \neq Bx$

Si $A \neq B$, en particular existe una fila i, columna j tal que:

$$(A)_{ij} \neq (B)_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} \neq b_{ij}$$

QVQ: $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax \neq Bx$.

$Ax \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $\quad (Ax)_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}\, x_k$

Tomamos $x = (x_1, \cdots, x_n)$ con $x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Resulta $(Ax)_i = a_{ij}$ pues el único término que sobrevive es el que está con $x_j = 1$.

Solo basta ver qué pasa con Bx para el x elegido.

$Bx \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $\quad (Bx)_i = \sum_{k=1}^n b_{ik}\, x_k = b_{ij}$

Por hipótesis: $a_{ij} \neq b_{ij} \Rightarrow (Ax)_i \neq (Bx)_i \Rightarrow Ax \neq Bx$

a) Alternativo (más fácil)

QVQ: $\forall x.\ Ax = Bx \Rightarrow A = B$

En particular vale $Ax = Bx$ tomando x como los vectores canónicos.

$\forall x.\ Ax = Bx \quad \Rightarrow \quad \forall j.\ Ae_j = Be_j$

con e_j el j-ésimo vector canónico

a derecha

Multiplicar una matriz por el vector canónico e_j da como resultado la columna j-ésima de la matriz.

$\forall j.\ Ae_j = Be_j \quad \Rightarrow \quad \forall j.\ col_j(A) = col_j(B)$

Si todas las columnas de A y B son iguales $\Rightarrow$ $A = B$

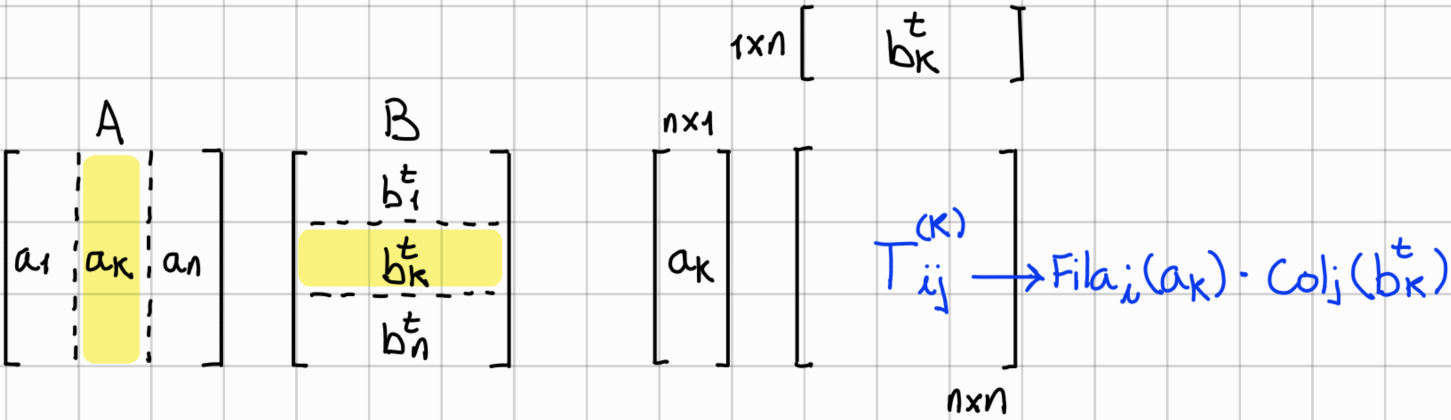
b) QVQ: $AB = T$ con $T = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^t$

Notemos que $a_i b_i^t$ es una matriz de $n \times n$.

Luego $T = T^{(1)} + \cdots + T^{(n)}$ es una sumatoria de n matrices.

$T^{(K)} = a_K b_K^t$ Es la K-ésima matriz generada por la K-ésima columna de A y la K-ésima Fila de B.

$T_{ij}^{(K)} = \text{Fila}_i(a_K) \cdot \text{Col}_j(b_K^t)$ Es el elemento en la posición i,j en la matriz K-ésima $T^{(K)}$.



El elemento i,j de T (la suma de todas las matrices $T^{(K)}$) es:

$$T_{ij} = T_{ij}^{(1)} + \cdots + T_{ij}^{(K)} + \cdots + T_{ij}^{(n)}$$

$$= (a_1 b_1^t)_{ij} + \cdots + (a_K b_K^t)_{ij} + \cdots + (a_n b_n^t)_{ij}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{iK} b_{Kj} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

$$= \sum_{K=1}^{n} a_{iK} b_{Kj} = (AB)_{ij}$$

$(a_K b_K^t)_{ij}$
$= T_{ij}^{(K)}$
$= \text{Fila}_i(a_K) \cdot \text{Col}_j(b_K^t)$
$= a_{iK} b_{Kj}$
$= A_{iK} B_{Kj}$

$\therefore AB = T = \sum_{K=1}^{n}$