

# Métodos Numéricos 2024

## Repaso de Álgebra lineal



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

- Vector:  $v \in R^n$  n-upla de coeficientes reales.

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

- Suma:  $w = v + u$  con  $w_i = v_i + u_i$  para  $i = 1, \dots, n$   
(conmutativa, asociativa)
- Multiplicación por escalar: Sea  $\alpha \in R$ ,  $w = \alpha v$  con  $w_i = \alpha v_i$   
para  $i = 1, \dots, n$
- Producto interno:  $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

Dados  $v^k \in R^n$  para  $k = 1, \dots, K$

- Combinación lineal:  $w = \sum_{k=1}^K \alpha_k v^k$
- Vectores linealmente independientes:  
$$\sum_{k=1}^K \alpha_k v^k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \forall k = 1, \dots, K$$
- Vectores linealmente dependientes: existen  $\alpha_k$  con  $k = 1, \dots, K$  no todos nulos tal que  $\sum_{k=1}^K \alpha_k v^k = 0$
- Subespacio generado:  $S = \{x \in R^n \text{ tal que } x = \sum_{k=1}^K \alpha_k v^k\}$
- Dimensión de  $S$ : cantidad máxima de vectores linealmente independientes en  $S$ .
- Base de  $S$ : conjunto de vectores linealmente independientes que generan a  $S$ .

- Matriz:  $A \in R^{m \times n}$   $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

# Repaso Álgebra lineal: definiciones y operaciones básicas

$$A \in R^{m \times n}, B \in R^{p \times q}$$

- Suma: definida si  $m = p, n = q$

$$C = A + B \text{ con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ para } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \\ C \in R^{m \times n} \text{ (conmutativa, asociativa)}$$

- Producto por escalar:

$$C = \alpha A \text{ con } c_{ij} = \alpha a_{ij} \text{ para } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, C \in R^{m \times n}$$

- Multiplicación: definida si  $n = p$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \cdots & \mathbf{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \mathbf{b_{1j}} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & \cdots & \mathbf{b_{2j}} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \mathbf{b_{nj}} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \mathbf{c_{ij}} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mq} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \text{ para } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, q, C \in R^{m \times q}$$

NO es conmutativa

- Matriz identidad:  $I \in R^{n \times n}$   $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$
- Matriz diagonal:  $D \in R^{n \times n}$   $D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$

- Matriz triangular superior:  $U \in R^{n \times n}$  con  $u_{ij} = 0$  si  $i > j$

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular inferior:  $L \in R^{n \times n}$  con  $l_{ij} = 0$  si  $i < j$

$$\begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

Producto de triangulares inferiores (superiores) es triangular inferior (superior).

$$A \in R^{m \times n}$$

- Rango de A: cantidad máxima de columnas (filas) linealmente independientes.
- Matriz inversa: definida si  $m = n$ .  $A^{-1} \in R^{n \times n}$ .  
 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$   
 $A \text{ inversible} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- La inversa (si existe) de una matriz diagonal es matriz diagonal.
- La inversa (si existe) de una matriz triangular inferior es matriz triangular inferior.
- La inversa (si existe) de una matriz triangular superior es matriz triangular superior.



- Matriz estrictamente diagonal dominante:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- Matriz traspuesta  $A^t \in R^{n \times m}$

$$a_{ij}^t = a_{ji} \text{ para todo } i = 1, \dots, m \text{ } j = 1, \dots, n$$

$$(A^t)^t = A$$

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

- Matriz de permutación:  $P \in R^{n \times n}$ . Son una permutación de las filas (o columnas) de la matriz identidad.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matrices de permutación:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{24} & a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{34} & a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{44} & a_{41} & a_{43} & a_{42} \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 1):  $E \in R^{n \times n}$ . Matriz identidad con una fila multiplicada por un escalar no nulo.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \alpha a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & \alpha a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- Matriz elemental (tipo 2):  $E \in R^{n \times n}$ . Matriz identidad con un elemento no nulo fuera de la diagonal.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicar por matriz elemental (tipo 2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \alpha a_{11} + a_{31} & \alpha a_{12} + a_{32} & \alpha a_{13} + a_{33} & \alpha a_{14} + a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + \alpha a_{13} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + \alpha a_{23} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + \alpha a_{33} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + \alpha a_{43} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A \in R^{m \times n}$$

- Espacio Imagen:

$$\text{Im}(A) = \{y \in R^m \text{ tal que existe } x \in R^n \text{ con } Ax = y\}$$

Combinaciones lineales de las columnas de  $A$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} x_i + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n$$

- Espacio Nulo:  $N(A) = \{x \in R^n \text{ tal que } Ax = 0\}$

$N(A) \neq \{0\} \iff$  las columnas de  $A$  son linealmente dependientes.

Recomendamos repasar de la numerosa bibliografía existente en el tema. Algunas sugerencias:

- Álgebra lineal, K. Hoffman y R. Kunze, Prentice-Hall, 1977.
- Álgebra lineal, G. Jerónimo, J. Sabia, S. Tesauri, Departamento de Matemática, FCEN - UBA, 2008.
- Álgebra lineal y sus aplicaciones, G. Strang, Ediciones Paraninfo, 4ta ed., 2007.