3. Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ y λ un autovalor de A.

a) Probar que λ^k es un autovalor de A^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

b) Probar que si $\lambda \neq 0$ y A es inversible entonces λ^{-1} es un autovalor de A^{-1}.

c) Probar que $a\lambda + b$ es un autovalor de $aA + bI$.

d) Sea $P(x) := a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$. Probar que $P(\lambda)$ es un autovalor de $P(A) := a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_mI$.

a) QVQ: λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda^k$ autovalor de A^k $\forall k \in \mathbb{N}$.
Inducción en k con el autovector v asociado a λ fijo.

Caso base: $k=1$
λ autovalor de A con autovector asociado v.
$Av = \lambda v \Rightarrow A^1 v = \lambda^1 v$
Vale trivialmente porque $A^1 = A$ y $\lambda^1 = \lambda$.

Paso inductivo
HI: λ^j es autovalor de A^j $\forall j < k$ con autovector asociado v.
QVQ: λ^k es autovalor de A^k con autovector asociado v.

$$A^k v = A(A^{k-1}v) \overset{HI}{=} A\lambda^{k-1}v = \lambda^{k-1}Av \overset{HI}{=} \lambda^{k-1}\lambda v = \lambda^k v$$

$\therefore$ λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda^k$ autovalor de A^k $\forall k \in \mathbb{N}$

b) QVQ: A inversible y $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda^{-1}$ autovalor de A^{-1}.

λ autovalor de $A \Rightarrow \exists v \neq 0$ tq $Av = \lambda v$.

$$Av = \lambda v \underset{A \text{ inversible}}{\Rightarrow} A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \underset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \lambda^{-1} v = A^{-1} v$$

$\therefore$ λ^{-1} autovalor de A^{-1}.

c) QVQ: $a\lambda + b$ autovalor de $aA + bI$.

λ autovalor de $A \Rightarrow \exists v \neq 0$ tq $Av = \lambda v$

$$(aA + bI)v = aAv + bv \underset{Av = \lambda v}{=} a\lambda v + bv = (a\lambda + b)v$$

$\therefore$ λ autovalor de $A \Rightarrow a\lambda + b$ autovalor de $aA + bI$.

d)

Inducción en m.

Caso base $m = 0$: $P_0(x) = a_0$.

QVQ: $P_0(\lambda) = a_0$ es autovalor de $P_0(A) = a_0 I$.

QVQ: $P_0(A) - P_0(\lambda)I$ no es inversible. Sea $v \neq 0$.

$$(P_0(A) - P_0(\lambda)I)v = 0 \iff a_0 I v - a_0 I v = 0 \iff 0 = 0$$

$\therefore$ $P_0(\lambda)$ es autovalor de $P_0(A)$.

Paso inductivo

HI: $P_k(\lambda)$ es autovalor de $P_k(A)$ $\forall k < m$.

QVQ: $P_m(\lambda)$ es autovalor de $P_m(A)$.

Sea $v \neq 0$.

$P_m(A)v = P_m(\lambda)v$

$\iff (a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_m I)v = (a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m)v$

$\iff (a_0 A^m + \dots + a_{m-1} A)v + a_m v = (a_0 \lambda^m + \dots + a_{m-1}\lambda)v + a_m v$

$\iff P_{m-1}(A)v + a_m v = P_{m-1}(\lambda)v + a_m v$

$\iff P_{m-1}(A)v = P_{m-1}(\lambda)v$

vale por HI