13. Para cada $n \in \mathbb{N}$, dar una matriz bidiagonal con un único autovalor λ de multiplicidad algebraica n y multiplicidad geométrica $1 \leqslant k \leqslant n$.

$$Av = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \lambda & & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ & 0 & \lambda & & & & & \\ & & 0 & \lambda & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & \\ & & & & 1 & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \lambda & \\ & & & & & & 1 & \lambda \end{bmatrix} \\ \hphantom{\lambda \quad 0 \quad} k \hphantom{\quad \lambda \quad 1 \quad \lambda \quad 1 \quad \lambda} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ v_{k+1} \\ v_{k+2} \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}$$

A tiene λ en la diagonal principal y por debajo tiene 0 hasta la columna k, y luego 1 desde la columna $k+1$ en adelante.

$$\det(A - xI) = (\lambda - x)^n = 0 \iff x = \lambda$$
$$\Rightarrow \lambda \text{ autovalor de } A \text{ con } m_A(\lambda) = n.$$

$\therefore \quad m_A(\lambda) = n$

$$Ae_i = \lambda e_i \quad \forall i = 1 \dots k \quad \Rightarrow \{e_1 \cdots e_k\} \text{ autovectores asociados a } \lambda$$
$$\Rightarrow \{e_1 \cdots e_k\} \text{ LI}$$
$$\Rightarrow m_G(\lambda) \geqslant k$$

Veamos que $m_G(\lambda) = k$.
Sea v autovector asociado a λ: $Av = \lambda v$.

$$\begin{cases} Av = (\lambda v_1 \cdots \lambda v_k, \lambda v_{k+1}, v_{k+1} + \lambda v_{k+2} \cdots v_{n-1} + \lambda v_n) \\ \lambda v = (\lambda v_1 \cdots \lambda v_k, \lambda v_{k+1}, \lambda v_{k+2} \cdots \cdots \lambda v_n) \end{cases}$$

$$Av = \lambda v \iff \begin{cases} \lambda v_i = \lambda v_i & i \leqslant k+1 \\ v_{i-1} + \lambda v_i = \lambda v_i & i \geqslant k+2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$v_{i-1} = 0 \ \forall i \geqslant k+2 \iff v_i = 0 \ \forall i \geqslant k+1$$

$$\iff \begin{cases} \lambda v_i = \lambda v_i & i \leqslant k \\ v_i = 0 & i \geqslant k+1 \end{cases}$$

$$\iff v = (v_1 \cdots v_k \, 0 \cdots 0)$$

QVQ: $v \in \langle e_1 \cdots e_k \rangle$. Si podemos escribir cualquier autovector como CL de $\{e_1 \cdots e_k\}$ entonces podemos concluir que $m_G(\lambda) = k$.

$$\begin{aligned} v \in \langle e_1 \cdots e_k \rangle &\iff (v_1 \cdots v_k \, 0 \cdots 0) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k \\ &\iff (v_1 \cdots v_k \, 0 \cdots 0) = (\alpha_1 \cdots \alpha_k \, 0 \cdots 0) \end{aligned}$$

Tomamos $\alpha_i = v_i \ \forall i = 1 \dots k$.
Luego cualquier autovector de A, que ya vimos que tiene esta forma $v = (v_1 \cdots v_k \, 0 \cdots 0)$, se puede escribir como CL de $\{e_1 \cdots e_k\}$. Entonces $\langle e_1 \cdots e_k \rangle$ es el autoespacio asociado a λ, y como $\{e_1 \cdots e_k\}$ son LI, la dimensión es k.

$\therefore \ m_G(\lambda) = k$