12. Sea A una matriz no singular de $\mathbb{R}^{n\times n}$ escrita en forma de bloques de la siguiente manera, donde A_{11} es una matriz de tamaño $m \times m$ y A_{22} es de tamaño $(n-m)\times(n-m)$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

a) Verificar la siguiente fórmula para la eliminación del bloque A_{21}:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

La matriz $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ es conocida como *complemento de Schur* de A_{11} en A.

b) Hallar la matriz que realiza un primer paso de triangulación de tal forma que elimine la primera fila de A_{21}. *Sugerencia: considerar una combinación lineal apropiada de las filas de A_{11}.*

c) Considerar los $n-m$ pasos de triangulación (eliminando una fila de A_{21} en cada paso), y mostrar que el bloque $(2,2)$ de la matriz resultante de aplicar el proceso de eliminación Gaussiana es igual a $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

a)

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{21}A_{11}^{-1}A_{11} + A_{21} & -A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$-A_{21}\underbrace{A_{11}^{-1}A_{11}}^{I} + A_{21} = -A_{21} + A_{21} = 0$$

$$\mathbb{R}^{(n-m)\times m} \cdot \mathbb{R}^{m\times m} \cdot \mathbb{R}^{m\times m} + \mathbb{R}^{(n-m)\times m} = \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$$

$$\begin{array}{cccc} & m & (n-m) & \\ m & \left[\begin{matrix} A_{11} \\ A_{21} \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} A_{12} \\ A_{22} \end{matrix}\right] & \begin{matrix} m \\ (n-m) \end{matrix} \\ (n-m) & & & \\ & m & (n-m) & \end{array}$$

$$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$$\mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)} - \mathbb{R}^{(n-m)\times m} \cdot \mathbb{R}^{m\times m} \cdot \mathbb{R}^{m\times(n-m)} = \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$$

b)

$$\begin{array}{cc} M_{11} & M_{12} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline 0 & 0 & * & * \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc} M_{21} & M_{22} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} A_{21} & A_{22} \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$M_{21}A_{11} + M_{22}A_{21}$$

Ejemplo:

$n = 4 \quad m = 2$

$$\begin{cases} m_{31} a_{11} + m_{32} a_{21} + a_{31} = 0 \\ m_{31} a_{12} + m_{32} a_{22} + a_{32} = 0 \end{cases}$$

$$m_{31} \ m_{32} \cdot \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \qquad (m_{31}a_{11} + m_{32}a_{21}$$

$$\iff \begin{cases} m_{31} a_{11} + m_{32} a_{21} = -a_{31} \\ m_{31} a_{12} + m_{32} a_{22} = -a_{32} \end{cases}$$

$$\iff \quad m_{31} \cdot (a_{11}, a_{12}) + m_{32} \cdot (a_{21}, a_{22}) = -(a_{31}, a_{32})$$

$$\iff \quad (m_{31}, m_{32})^T \cdot A_{11} = -\text{Fila}_1(A_{21})$$

Tomamos una combinación lineal de las filas de A_{11} para obtener el vector nulo en la primer fila de A_{21}.

Para el caso general:

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{M} & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad \tilde{M} = \begin{bmatrix} v^T \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$$

$$v^T \in \mathbb{R}^m \ / \ v^T \cdot A_{11} = -\text{Fila}_1(A_{21})$$

c)

En el paso k de triangulación ponemos 0s en la Fila k de A_{21}.
Veamos qué pasa con la fila k de A^*_{22}, el bloque (2,2) luego de triangular.

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{M} & I \end{bmatrix} \qquad \tilde{M} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_{(n-m)}^T \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Fila}_k(A^*_{22}) &= \mathrm{Fila}_k(\tilde{M} A_{12}) + \mathrm{Fila}_k(I A_{22}) \qquad \forall k = 1 \dots (n-m) \\ &= \mathrm{Fila}_k(\tilde{M}) \cdot \mathrm{Col}_k(A_{12}) + \mathrm{Fila}_k(A_{22}) \\ &= v_k^T \cdot \mathrm{Col}_k(A_{12}) + \mathrm{Fila}_k(A_{22}) \end{aligned}$$

$$\text{con } v_k^T \in \mathbb{R}^m \;/\; v_k^T \cdot A_{11} = -\mathrm{Fila}_k(A_{21})$$

A_{11} inversible $\Rightarrow$ $v_k^T = -\mathrm{Fila}_k(A_{21}) \cdot A_{11}^{-1}$

$$\mathrm{Fila}_k(A^*_{22}) = -\underbrace{\mathrm{Fila}_k(A_{21})}_{\in \mathbb{R}^{1\times m}} \cdot \underbrace{A_{11}^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{m\times m}} \cdot \underbrace{\mathrm{Col}_k(A_{12})}_{\in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}} + \underbrace{\mathrm{Fila}_k(A_{22})}_{\in \mathbb{R}^{1\times(n-m)}} \quad \in \mathbb{R}^{1\times(n-m)}$$

$$= -\mathrm{Fila}_k(A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) + \mathrm{Fila}_k(A_{22})$$ ¿Cómo justificar?

$$\Rightarrow A^*_{22} = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$$