11. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que $A = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ si y sólo si A diagonalizable y con un único autovalor λ de multiplicidad algebraica n.

($\Leftarrow$)

A diagonalizable con único autovalor λ de $m_A(\lambda) = n$.

$A = SDS^{-1}$ con $D = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$

$\{v_1 \cdots v_n\}$ base de autovectores

QVQ: $A = \lambda I$.

$$\begin{aligned} Av_i = \lambda v_i \quad &\Leftrightarrow \quad Av_i - \lambda v_i = 0 \qquad \forall i = 1 \dots n \\ &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)v_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A - \lambda I = 0 \qquad v_i \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A = \lambda I \end{aligned}$$

($\Rightarrow$)

Buscamos los autovalores de $A = \lambda I$.

$\det(A - xI) = \det(\lambda I - xI) = (\lambda - x)^n = 0 \Leftrightarrow x = \lambda$

$\Rightarrow$ λ único autovalor de $m_A(\lambda) = n$.

Los vectores canónicos $\{e_1 \cdots e_n\}$ son autovectores pues:

$Ae_i = \lambda I e_i = \lambda e_i \quad \forall i = 1 \dots n$

$\Rightarrow$ Los autovectores forman una base de $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ A es diagonalizable.

Tomamos $D = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I$ y $S = I$. Luego $A = SDS^{-1}$.

$SDS^{-1} = I \lambda I I^{-1} = \lambda I = A$