

6. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ una matriz definida positiva. Demostrar que:

- a) $a > 0$
- b) $c > 0$
- c) $\det(A) > 0$
- d) $|b| < \frac{a+c}{2}$

²Sugerencia: evaluar qué sucede con el vector $x = (-b, a)$ al calcular $x^t Ax$; o analizar la función $\phi(\lambda) = (1, \lambda)^t A (1, \lambda)$

a) b)

$$x^T A x = (x_1, x_2) \cdot (ax_1 + bx_2, bx_1 + cx_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

Como A es dp: $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$.

En particular vale para:

$$\cdot e_1 = (1, 0) \Rightarrow e_1^T A e_1 = a > 0$$

$$\cdot e_2 = (0, 1) \Rightarrow e_2^T A e_2 = c > 0$$

$$e_i^T A e_j = a_{ij}$$

c)

$$\det(A) = ac - b^2$$

$x = (-b, a) \neq 0$ porque $a > 0$

$$x^T A x = ab^2 - 2b^2a + ca^2 = ca^2 - ab^2 = a(ac - b^2)$$

$$x^T A x > 0 \Rightarrow a(ac - b^2) > 0$$

$$\Rightarrow ac - b^2 > 0$$

$$\Rightarrow \det(A) > 0$$

A es dp

$$a > 0$$

d)

A es dp: $x^T A x > 0$. En particular vale para:

- $x = (1, 1)$

$$x^T A x = (1, 1) \cdot (a+b, b+c) = a+2b+c > 0 \Leftrightarrow -b < \frac{a+c}{2}$$

- $x = (1, -1)$

$$x^T A x = (1, -1) \cdot (a-b, b-c) = a-2b+c > 0 \Leftrightarrow b < \frac{a+c}{2}$$

$$\therefore |b| < \frac{a+c}{2}$$