17. Sea una matriz A simétrica definida positiva. Demostrar o dar un contraejemplo para que la matriz A^{-1} sea simétrica definida positiva.

QVQ: A simétrica $\Rightarrow$ A^{-1} simétrica

Supongamos que A^{-1} no es simétrica.

$$
\begin{aligned}
A^{-1} \neq (A^{-1})^T \quad &\Leftrightarrow \quad AA^{-1} \neq A(A^{-1})^T \\
&\Leftrightarrow \quad I \neq A^T(A^{-1})^T \qquad \text{A simétrica: } A = A^T \\
&\Leftrightarrow \quad I \neq (A^{-1}A)^T \\
&\Leftrightarrow \quad I \neq I^T \\
&\Leftrightarrow \quad I \neq I \quad \text{Absurdo}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Si A es simétrica entonces A^{-1} también.

QVQ: A dp $\Rightarrow$ A^{-1} dp

$$
\begin{aligned}
x^T A^{-1} x &= x^T A^{-1} A A^{-1} x \\
&= ((A^{-1})^T x)^T A (A^{-1} x) \\
&= (A^{-1}x)^T A (A^{-1}x) \qquad A^{-1} \text{ simétrica: } (A^{-1})^T = A^{-1}
\end{aligned}
$$

QVQ: $(A^{-1}x)^T A (A^{-1}x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

Sea $\tilde{x} = A^{-1}x$. $\tilde{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ porque A^{-1} inversible.

$(A^{-1}x)^T A (A^{-1}x) = \tilde{x}^T A \tilde{x} > 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0$ porque A dp.

$\therefore$ Si A es dp entonces A^{-1} también.

Alternativa para ver que A dp $\Rightarrow A^{-1}$ dp.

Por ejercicio 16: A dp y A^{-1} inversible $\Rightarrow A^{-1}AA^{-1}$ dp.

$A^{-1}AA^{-1} = IA^{-1} = A^{-1} \Rightarrow A^{-1}$ dp