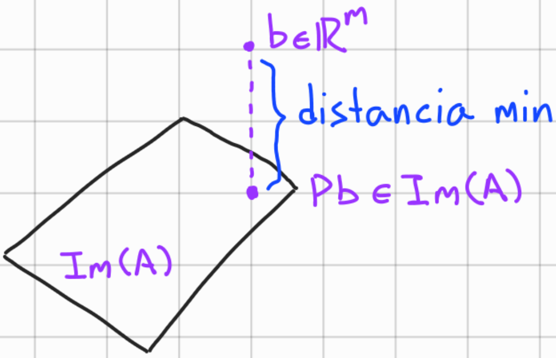
16. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $(m \geqslant n)$. Demostrar que si las columnas de $A$ son linealmente independientes la proyección ortogonal $Pb$ de $b$ sobre el espacio columna de $A$ está dado por la siguiente expresión $Pb = A(A^tA)^{-1}A^tb$.

Espacio columna $= \mathrm{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$. $\dim(\mathrm{Im}(A)) = n$ pues las columnas de $A$ son LI.

La proyección ortogonal $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sobre $\mathrm{Im}(A)$ es una matriz que proyecta cualquier punto de $\mathbb{R}^m$ sobre la $\mathrm{Im}(A)$ tq la distancia entre ese punto de $\mathbb{R}^m$ y su proyección es mínima.




Definimos $P = A(A^TA)^{-1}A^T$

$A^TA$ inversible pues $\mathrm{rango}(A^TA) = \mathrm{rango}(A)$ y $A$ tiene rango máximo por tener columnas LI.

Para probar que $P$ es la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Im}(A)$ veamos que se cumplen 2 propiedades.

**QVQ** $\forall b \in Im(A).\ Pb = b$

Si b ya está en Im(A) entonces el punto en Im(A) más cerca de b es el mismo punto b.

Las columnas de A son LI entonces $\{col_i(A)\}_{1 \leq i \leq n}$ es una base de Im(A). Cualquier vector en Im(A) es una combinación lineal de las columnas de A.

Basta ver que: $PAe_i = Ae_i \quad \forall i = 1 \ldots n$

$$PAe_i = A\underbrace{(A^TA)^{-1}A^TA}_{I}e_i = Ae_i \quad \forall i = 1 \ldots n$$

$\therefore \ \forall b \in Im(A).\ b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ae_i$ combinación lineal cols(A).

$$Pb = P\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ae_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i PAe_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ae_i = b$$

**QVQ** $\forall b \in \mathbb{R}^m.\ \|Pb - b\|_2^2$ es mínimo

Por ecuaciones normales $\hat{x}$ es solución al problema de cuadrados mínimos lineales $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$ sii

$$\begin{aligned} A^TA\hat{x} = A^Tb \quad &\Longleftrightarrow \quad \hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb \\ &\Longleftrightarrow \quad A\hat{x} = A(A^TA)^{-1}A^Tb \\ &\Longleftrightarrow \quad A\hat{x} = Pb \end{aligned}$$

$$\therefore \ \|Pb - b\|_2^2 = \|A\hat{x} - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$$