

12. Sea A una matriz no singular de $\mathbb{R}^{n \times n}$ escrita en forma de bloques de la siguiente manera, donde A_{11} es una matriz de tamaño $m \times m$ y A_{22} es de tamaño $(n - m) \times (n - m)$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

- a) Verificar la siguiente fórmula para la eliminación del bloque A_{21} :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

La matriz $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ es conocida como *complemento de Schur* de A_{11} en A .

- b) Hallar la matriz que realiza un primer paso de triangulación de tal forma que elimine la primera fila de A_{21} . *Sugerencia: considerar una combinación lineal apropiada de las filas de A_{11} .*
- c) Considerar los $n - m$ pasos de triangulación (eliminando una fila de A_{21} en cada paso), y mostrar que el bloque (2, 2) de la matriz resultante de aplicar el proceso de eliminación Gaussiana es igual a $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

a)

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{21}A_{11}^{-1}A_{11} + A_{21} & -A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \overbrace{I} \\ -A_{21}A_{11}^{-1}A_{11} + A_{21} = -A_{21} + A_{21} = 0 \\ \mathbb{R}^{(n-m) \times m} \cdot \mathbb{R}^{m \times m} \cdot \mathbb{R}^{m \times m} + \mathbb{R}^{(n-m) \times m} = \mathbb{R}^{(n-m) \times m} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m & (n-m) \\ m & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} m \\ (n-m) & (n-m) \\ m & (n-m) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \\ \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)} - \mathbb{R}^{(n-m) \times m} \cdot \mathbb{R}^{m \times m} \cdot \mathbb{R}^{m \times (n-m)} = \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)} \end{matrix}$$

b) Ejemplo $\mathbb{R}^{4 \times 4}$

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{cc} M_{11} & M_{12} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} A_{21} & A_{22} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & * & * \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & * & * \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \\ \downarrow \\ M_{21}A_{11} + M_{22}A_{21} \end{array}
 \end{array}$$

Ejemplo:

$$n=4 \quad m=2$$

$$\begin{cases} m_{31}a_{11} + m_{32}a_{21} + a_{31} = 0 \\ m_{31}a_{12} + m_{32}a_{22} + a_{32} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_{31}a_{11} + m_{32}a_{21} = -a_{31} \\ m_{31}a_{12} + m_{32}a_{22} = -a_{32} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m_{31} \cdot (a_{11}, a_{12}) + m_{32} \cdot (a_{21}, a_{22}) = -(a_{31}, a_{32})$$

$$\Leftrightarrow (m_{31}, m_{32})^T \cdot A_{11} = -\text{Fila}_1(A_{21})$$

Tomamos una combinación lineal de las Filas de A_{11} para obtener el vector nulo en la primer fila de A_{21} .

Para el caso general:

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{M} & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} v^T \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$$

$$v^T \in \mathbb{R}^m \quad / \quad v^T \cdot A_{11} = -\text{Fila}_1(A_{21})$$

c)

En el paso k de triangulación ponemos 0s en la Fila k de A_{z1} .
 Veamos qué pasa con la fila k de A_{zz}^* , el bloque (z,z) luego de triangular.

$$M = \begin{bmatrix} I & O \\ \tilde{M} & I \end{bmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_{(n-m)}^T \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{z1} & A_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Fila}_k(A_{zz}^*) &= \text{Fila}_k(\tilde{M}A_{12}) + \text{Fila}_k(A_{z2}) & v_k = 1 \dots (n-m) \\ &= \text{Fila}_k(\tilde{M}) \cdot \text{Col}_k(A_{12}) + \text{Fila}_k(A_{z2}) \\ &= v_k^T \cdot \text{Col}_k(A_{12}) + \text{Fila}_k(A_{z2}) \end{aligned}$$

$$\text{con } v_k^T \in \mathbb{R}^m / v_k^T \cdot A_{11} = -\text{Fila}_k(A_{z1})$$

$$A_{11} \text{ inversible} \Rightarrow v_k^T = -\text{Fila}_k(A_{z1}) \cdot A_{11}^{-1}$$

$$\text{Fila}_k(A_{zz}^*) = -\text{Fila}_k(A_{z1}) \cdot A_{11}^{-1} \cdot \text{Col}_k(A_{12}) + \text{Fila}_k(A_{z2}) \quad \in \mathbb{R}^{1 \times (n-m)}$$

$\in \mathbb{R}^{1 \times m}$ $\in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ $\in \mathbb{R}^{1 \times (n-m)}$

$$= -\text{Fila}_k(A_{z1} A_{11}^{-1} A_{12}) + \text{Fila}_k(A_{z2}) \quad \text{¿Cómo justificar?}$$

$$\Rightarrow A_{zz}^* = A_{z2} - A_{z1} A_{11}^{-1} A_{12}$$