4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. El espacio $\langle \{Ae_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}\rangle$, conocido como *espacio columna*, es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ que sabemos coincide con $Im(A)$. Análogamente, se define el *espacio fila* de A como el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A.

a) Probar que el *espacio fila* de A es $Nu(A)^\perp$.

b) Probar que $Im(A)^\perp = Nu(A^t)$.

a)

$(e_i^T A)^T = A^T e_i = \text{Fila}_i(A)$

$$A = \begin{array}{c} n \\ \begin{bmatrix} - f_1 - \\ \vdots \\ - f_m - \end{bmatrix} \end{array} m \qquad A^T = \begin{array}{c} m \\ \begin{bmatrix} | & & | \\ f_1 & \cdots & f_m \\ | & & | \end{bmatrix} \end{array} n$$

Espacio Fila: $\langle \{e_i^T A\}_{1\leqslant i\leqslant m}\rangle = \langle \{A^T e_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}\rangle = Im(A^T)$

QVQ $Im(A^T) = Nu(A)^\perp$

Los subespacios son iguales si cualquier vector en $Im(A^T)$, el espacio fila, es ortogonal a cualquier otro vector en el $Nu(A)$.

Sea $x \in Im(A^T)$. $\exists z$ tq $A^T z = x$.

Sea $y \in Nu(A)$.

QVQ $x^T y = 0$

$$x^T y = (A^T z)^T y = z^T A y \underset{y \in Nu(A)}{=} z^T \cdot 0 = 0$$

$\therefore Im(A^T) = Nu(A)^\perp$

b) QVQ: $\operatorname{Im}(A)^{\perp} = \operatorname{Nu}(A^T)$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \operatorname{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$

$A \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad \operatorname{Nu}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m$

$\subseteq$

$$
\begin{aligned}
x \in \operatorname{Im}(A)^{\perp} &\iff x^T y = 0 \quad \forall y \in \operatorname{Im}(A) = \{y : \exists z \text{ tq } Az = y\} \\
&\iff x^T A z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \\
&\iff (A^T x)^T z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Si vale $\forall z$ en particular vale para $\forall e_i$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow (A^T x)^T e_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n \\
&\Rightarrow A^T x = 0 \\
&\Rightarrow x \in \operatorname{Nu}(A^T)
\end{aligned}
$$

$\supseteq$

$$
\begin{aligned}
z \in \operatorname{Nu}(A^T) &\iff A^T z = 0 \\
&\Rightarrow (A^T z)^T y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\iff z^T A y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \\
&\iff z^T x = 0 \quad \forall x \in \operatorname{Im}(A) \\
&\iff z \perp x \quad \forall x \in \operatorname{Im}(A) \\
&\iff z \in \operatorname{Im}(A)^{\perp}
\end{aligned}
$$

$\therefore \operatorname{Im}(A)^{\perp} = \operatorname{Nu}(A^T)$