8. Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene columnas ortogonales $w_1, w_2, \ldots, w_n$ donde $\|w_i\|_2 = \alpha_i > 0$. Calcular A^tA y hallar las matrices U, Σ y V de una descomposición en valores singulares de A.

$$A^TA = \underset{n\times m}{\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ & \vdots & \\ - & w_n & - \end{bmatrix}} \cdot \underset{m\times n}{\begin{bmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_n \\ | & & | \end{bmatrix}} = \underset{n\times n}{\begin{bmatrix} \|w_1\|_2^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \|w_n\|_2^2 \end{bmatrix}} = \underset{n\times n}{\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^2 \end{bmatrix}}$$

Sea $A = U\Sigma V$ la descomposición SVD de A.

Los valores singulares de A son los autovalores de A^TA.

$$\det(A^TA - xI) = (\alpha_1^2 - x)\cdots(\alpha_n^2 - x) = 0 \iff x = \alpha_i^2 \quad \forall i = 1\ldots n$$

$$\sigma_i^2 = \alpha_i^2 \iff |\sigma_i| = |\alpha_i| \underset{\alpha_i > 0 \text{ por hipótesis}}{\iff} \sigma_i = \alpha_i \quad \forall i = 1\ldots n$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \\ \hline & 0 & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Los vectores canónicos $e_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\forall i = 1\ldots n$ son los autovectores de A^TA.

$AA^Te_i = \alpha_i^2 e_i \quad \forall i = 1\ldots n \quad \Rightarrow \quad V = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Para encontrar U sabemos que:

$$Av_i = \sigma_i u_i \iff Av_i/\sigma_i = u_i$$
$$\iff Ae_i/\alpha_i = u_i$$
$$\iff w_i/\|w_i\|_2 = u_i \quad \forall i = 1 \dots n$$

Luego las primeras n columnas de $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son los w_i normalizados.
Como los $w_i \in \mathbb{R}^m$ son ortogonales entre ellos vale que $n \leq m$.
Para completar las $m-n$ columnas restantes extendemos $\{w_1/\|w_1\|_2 \dots w_n/\|w_n\|_2\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$.

$$u_i = \begin{cases} \dfrac{w_i}{\|w_i\|_2} & \text{si } i = 1 \dots n \\ z_i & \text{si } i = n+1 \dots m \end{cases} \quad \text{con } \|z_i\|_2 = 1,\ z_i \perp u_j,\ z_i \perp z_j \ \forall j \neq i$$

$$U = \begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ \dfrac{w_1}{\|w_1\|_2} & \cdots & \dfrac{w_n}{\|w_n\|_2} & z_{n+1} & \cdots & z_m \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$