16. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y definimos $\|A\|_M = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$. Probar:

a) $\|\cdot\|_M$ es una norma.

b) $\|A\|_M \leq \|A\|_2 \leq n\|A\|_M$.

Sugerencia: Para la segunda desigualdad, hallar x^* donde $\|x^*\|_2 = 1$ tal que $\|Ax\| \leqslant \|A\|_M$.

a)

$\|A\|_M = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}| \geqslant 0$ pues es un módulo

$\|A\|_M = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}| = 0 \iff a_{ij} = 0 \quad \forall i,j = 1 \dots n \iff A = 0$

α no depende de i ni j

$\|\alpha A\|_M = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\alpha a_{ij}| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\alpha||a_{ij}| = |\alpha| \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}| = |\alpha| \|A\|_M$

$\|A+B\|_M = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}+b_{ij}| \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}| + \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{ij}| = \|A\|_M + \|B\|_M$

$|a_{ij}+b_{ij}| \leqslant |a_{ij}| + |b_{ij}|$ por desigualdad triangular

$\Downarrow$

$\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}+b_{ij}| \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}| + \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{ij}|$

Los ij que maximizan la suma es $\leqslant$ a tomarlos de manera independiente para que maximicen cada término de la suma por separado.

b)

QVQ: $\|A\|_M \leq \|A\|_2 \iff \|A\|_M^2 \leq \|A\|_2^2$

Sean $1 \leq i_0, j_0 \leq n$ tal que $\|A\|_M = |a_{i_0 j_0}|$.
Sea $e_{j_0} \in \mathbb{R}^n$ el j_0-ésimo vector de la base canónica.

$\|A\|_M^2 = |a_{i_0 j_0}|^2$

Acotamos $|a_{i_0 j_0}|^2$ con la suma de toda la columna j_0-ésima en módulo y al cuadrado (son todos términos ≥ 0).

$\leq \sum_{i=1}^{n} a_{i j_0}^2$

$= \|col_{j_0}(A)\|_2^2$

Por def la Σ es la norma de la columna j_0-ésima de A, y podemos obtenerla multiplicando a derecha por e_{j_0}.

$= \|Ae_{j_0}\|_2^2$

$\leq \max_{x : \|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2^2$

Cualquier x con $\|x\|_2 = 1$ que maximice $\|Ax\|_2^2$ es $\geq \|Ae_{j_0}\|_2^2$ pues $\|e_{j_0}\|_2 = 1$, entonces e_{j_0} es un x en particular.

$\underset{\text{def}}{=} \|A\|_2^2$

QVQ: $\|A\|_2 \leqslant n\|A\|_M \iff \|A\|_2^2 \leqslant n^2\|A\|_M^2$

$$\|A\|_2^2 = \max_{x:\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2$$

Tomamos algún $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|_2 = 1$ tal que $\|Ax\|_2^2 = \|A\|_2^2$.

$$\|Ax\|_2^2 = \left\| \sum_{j=1}^n \mathrm{col}_j(A)\cdot x_j \right\|_2^2$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n \|\mathrm{col}_j(A)\cdot x_j\|_2^2$$ Desigualdad triangular.

$$= \sum_{j=1}^n \|\mathrm{col}_j(A)\|_2^2 \cdot x_j^2$$ Sacamos escalares afuera.

$$x_j^2 \leqslant \sum_{k=1}^n x_k^2 \leqslant \|x\|_2^2 = 1$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n \|\mathrm{col}_j(A)\|_2^2$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i_0j_0}^2$$

$$= a_{i_0j_0}^2 \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n 1}_{n^2}$$

$$= n^2\|A\|_M^2$$

Sean $1 \leqslant i_0, j_0 \leqslant n$ tal que $\|A\|_M = |a_{i_0j_0}|$. Lo usamos para acotar todos los términos de las sumatorias. Luego sumamos en total n^2 veces el 1.

Por def $a_{i_0j_0}^2 = \|A\|_M^2$.

$\therefore \|A\|_M \leqslant \|A\|_2 \leqslant n\|A\|_M$