4. Sea A una matriz simétrica y definida positiva. Probar que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

a) Si x e y son linealmente independientes, $|x^t A y| < \sqrt{x^t A x}\sqrt{y^t A y}$. [1]

b) Si x e y son linealmente dependientes, $|x^t A y| = \sqrt{x^t A x}\sqrt{y^t A y}$.

a)

x, y LI $\Rightarrow z = x + \lambda y$ con $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned}
z^T A z &= (x+\lambda y)^T A (x+\lambda y) \\
&= (x^T + (\lambda y)^T)(Ax + A\lambda y) \\
&= x^T A x + \underbrace{x^T A \lambda y + (\lambda y)^T A x}_{} + (\lambda y)^T A \lambda y \\
&= x^T A x + \lambda(x^T A y + y^T A x) + \lambda^2 y^T A y \\
&= \phi(\lambda)
\end{aligned}$$

$\phi(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda$ porque $\phi(\lambda) = z^T A z > 0$ (A sdp)

$\Rightarrow \phi(\lambda)$ no tiene raices

$\Rightarrow$ El discriminante de $\phi(\lambda)$ es < 0

$$(x^T A y + y^T A x)^2 - 4 y^T A y \, x^T A x < 0$$

$$\Leftrightarrow (x^T A y + y^T A x)^2 < 4 y^T A y \, x^T A x$$

$\downarrow \geq 0$: $a^2 \geq 0 \ \forall a$

$\downarrow > 0$: A sdp $\Rightarrow y^T A y > 0 \wedge x^T A x > 0$

Tomando raíz cuadrada de ambos lados:

$$\Leftrightarrow |x^T A y + y^T A x| < 2\sqrt{x^T A x}\sqrt{y^T A y}$$

$\downarrow x^T A y = y^T A x$

$$y^T A x = y^T (A^T x) = y^T (x^T (A^T)^T)^T = y^T (x^T A)^T = (x^T A y)^T = x^T A y$$

A sdp $\Rightarrow A = A^T$

$x^T A y \in \mathbb{R}$ es un número

$$\Leftrightarrow 2|x^T A y| < 2\sqrt{x^T A x}\sqrt{y^T A y} \quad \Leftrightarrow \quad |x^T A y| < \sqrt{x^T A x}\sqrt{y^T A y}$$