8. Si $A = LL^t$ es una factorización de A con L una matriz triangular inferior con elementos de la diagonal positivos, demostrar que A es simétrica y definida positiva.

A simétrica

QVQ: $A = A^T$

$A^T = (LL^T)^T = (L^T)^T L^T = LL^T = A$

A definida positiva

QVQ: $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

$x^T A x = x^T L L^T x = (L^T x)^T (L^T x) = \| L^T x \|_2^2 \geqslant 0$ por axioma de norma

Falta ver que $x^T A x = \| L^T x \|_2^2 = 0 \iff x = 0$

$\| L^T x \|_2^2 = 0 \iff L^T x = 0$ por axioma de norma

L es tri. inf. con diagonal $> 0 \Rightarrow L$ inversible $\Rightarrow L^T$ inversible

$$L^T x = 0 \iff (L^T)^{-1} L^T x = (L^T)^{-1} 0$$
$$\iff x = 0$$

$\therefore$ A es dp.