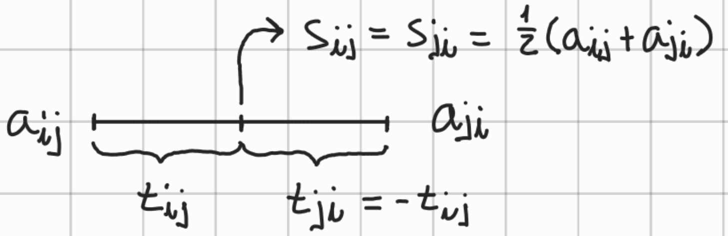
2. Probar que toda matriz cuadrada A de $\mathbb{R}^{n\times n}$ es expresable en forma única como $A = S + T$, donde S es simétrica y T es antisimétrica (es decir, $T^t = -T$).

$$A = S + T \iff a_{ij} = s_{ij} + t_{ij} \quad \forall i,j = 1 \dots n$$

La matriz T antisimétrica tiene esta estructura.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Para } T \in \mathbb{R}^{n\times n}: \ T_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ t_{ij} & \text{si } j > i \\ -t_{ji} & \text{si } j \leq i \end{cases}$$

Como S es simétrica, la idea es definir s_{ij} y s_{ji} como el promedio de a_{ij} y a_{ji}. En t_{ij} ponemos la diferencia de a_{ij} con el promedio para que al sumar $s_{ij} + t_{ij}$ recuperemos el a_{ij} original. Análogamente para t_{ji}. T resulta antisimétrica porque la diferencia entre a_{ij} y a_{ji} con su promedio tiene la misma magnitud pero con distinto signo.



Definimos S y T a partir de A.

$$\begin{cases} s_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \\ t_{ij} = a_{ij} - s_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = \frac{1}{2}a_{ij} - \frac{1}{2}a_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \end{cases}$$

S y T son únicos para A porque se definen únicamente a partir de los elementos de A de manera determinística (sin variables libres).

Alternativa

$$A = S + T \implies A^T = (S+T)^T = S^T + T^T = S - T$$

S simétrica, T antisimétrica

$$\begin{cases} A = S + T \\ A^T = S - T \end{cases} \iff \begin{cases} a_{ij} = s_{ij} + t_{ij} \\ a_{ij}^T = a_{ji} = s_{ij} - t_{ij} \end{cases}$$

$$s_{ij} = a_{ij} - t_{ij} \implies a_{ji} = a_{ij} - t_{ij} - t_{ij}$$
$$\implies a_{ji} = a_{ij} - 2t_{ij}$$
$$\implies t_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

$$s_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = \frac{1}{2}a_{ij} + \frac{1}{2}a_{ji} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

$$\begin{cases} s_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \\ t_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \end{cases}$$