

8. Supongamos que  $Ax = y$ . Probar que un vector  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  satisface  $A\hat{x} = y$  si y sólo si  $x - \hat{x} \in \text{Nu}(A)$ .  
Demostrar que el problema de cuadrados mínimos tiene solución única si y sólo si  $\text{Nu}(A) = \{0\}$ .

$$\text{QVQ: } A\hat{x} = y \Leftrightarrow (x - \hat{x}) \in \text{Nu}(A)$$

( $\Rightarrow$ )

Sabemos que valen ambas igualdades:

$$\begin{cases} Ax = y \\ A\hat{x} = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } Ax = A\hat{x} &\Rightarrow Ax - A\hat{x} = 0 \\ &\Rightarrow A(x - \hat{x}) = 0 \\ &\Rightarrow (x - \hat{x}) \in \text{Nu}(A) \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ )

Sabemos que  $(x - \hat{x}) \in \text{Nu}(A)$ .

$$\begin{aligned} (x - \hat{x}) \in \text{Nu}(A) &\Rightarrow A(x - \hat{x}) = 0 \\ &\Rightarrow Ax - A\hat{x} = 0 \\ &\Rightarrow A\hat{x} = Ax \\ &\Rightarrow A\hat{x} = y \end{aligned}$$

$Ax = y$  por hipótesis

$$Q \vee Q: \exists! x \text{ t.q. } Ax = y \Leftrightarrow \text{Nu}(A) = \{0\}$$

( $\Rightarrow$ )

Sean  $x, \hat{x}$  soluciones al problema de cuadrados mínimos.

Por la demo anterior:  $Ax = y \wedge A\hat{x} = y \Leftrightarrow (x - \hat{x}) \in \text{Nu}(A)$ .

Terminar

( $\Leftarrow$ )

Sabemos que  $\text{Nu}(A) = \{0\}$ .

Supongamos que el problema de cuadrados mínimos no tiene solución única. Existen  $x, \hat{x}$  distintos t.q.  $Ax = y \wedge A\hat{x} = y$ .

Por la demo anterior:  $Ax = y \wedge A\hat{x} = y \Leftrightarrow (x - \hat{x}) \in \text{Nu}(A)$ .

$$x \neq \hat{x} \Rightarrow x - \hat{x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{Nu}(A) \neq \{0\} \text{ Absurdo}$$

$$\therefore \exists! x \text{ t.q. } Ax = y$$