15. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sean $v, v' \in \mathbb{R}^n$ autovectores l.i. asociados a los autovalores $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ respectivamente.

a) Sea $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal tal que $Hv = \alpha e_1$. Justificar cómo se puede obtener esta matriz, indicando qué valor debe tomar α, y demostrar que:

$$HAH^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & b^t \\ 0 & B \end{bmatrix} \qquad \text{con } B \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1} \text{ y } b \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

b) Probar que λ' es autovalor de B. ¿Es necesario que $\lambda' \neq \lambda$? Justifique.

c) Sea w el autovector de B asociado a λ' y $\lambda' \neq \lambda$.

Demostrar que $v' = H^{-1}\begin{bmatrix} \beta \\ w \end{bmatrix}$ con $\beta = \dfrac{1}{\lambda' - \lambda} b^t w$. ¿Qué sucede con b y w si $\lambda' = \lambda$?

d) Si A es simétrica, probar que $b = 0$.

a)

Tomamos H como una matriz de Householder que refleja el vector v al αe_1. H es ortogonal por definición.

$$\begin{aligned} Hv = \alpha e_1 &\iff \|Hv\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 \\ &\iff \|v\|_2 = |\alpha| \cdot \|e_1\|_2 \\ &\iff \|v\|_2 = |\alpha| \\ &\iff \|v\|_2 = \alpha \quad \text{pues } \|v\|_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore \alpha = \|v\|_2$

QVQ: $HAH^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & b^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$

Como no sabemos nada sobre b y B, basta ver que $col_1(HAH^{-1}) = \lambda e_1$.

$$HAH^{-1}e_1 = HA\alpha^{-1}v = \alpha^{-1}HAv = \alpha^{-1}H\lambda v = \lambda\alpha^{-1}Hv = \lambda\alpha^{-1}\alpha e_1 = \lambda e_1$$

$Hv = \alpha e_1 \iff H^{-1}e_1 = \alpha^{-1}v$

b) QVQ: λ' autovalor de B.

A y HAH^{-1} son semejantes $\Rightarrow$ tienen los mismos autovalores.

$$\det(HAH^{-1} - xI) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - x & b^T \\ 0 & B - xI \end{bmatrix}\right) = (\lambda - x) \cdot \det(B - xI)$$

Luego λ es autovalor de HAH^{-1}. Como λ' también es autovalor, la única opción es que sea raíz de $\det(B - xI)$.

$\therefore$ λ' es autovalor de B y pueder ser igual a λ.

c)

Sea $C = \begin{bmatrix} \lambda & b^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$ $\qquad HAH^{-1} = C \iff A = H^{-1}CH$

QVQ: $v' = H^{-1} \cdot (\beta w)$ con $\beta = \frac{1}{\lambda' - \lambda} \cdot b^T w$

v' es autovector de A asociado al autovalor λ'.

$$\begin{aligned} Av' = \lambda' v' &\iff H^{-1}CHv' = \lambda' v' \\ &\iff H^{-1}CHH^{-1} \cdot (\beta w) = \lambda' H^{-1} \cdot (\beta w) \\ &\iff H^{-1} C \cdot (\beta w) = H^{-1} \lambda' \cdot (\beta w) \\ &\iff C \cdot (\beta w) = \lambda' \cdot (\beta w) \\ &\iff C \cdot (\beta w) = (\lambda' \beta, \lambda' w) \end{aligned}$$

Veamos $C \cdot (\beta w)$: Por hipótesis $Bw = \lambda' w$

$$\begin{bmatrix} \lambda & b^T \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\beta + b^T w \\ Bw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\beta + b^T w \\ \lambda' w \end{bmatrix}$$

Ya tenemos esta parte ok.

Basta ver que $\lambda\beta + b^T w = \lambda'\beta$ con $\lambda \neq \lambda'$.

$$\begin{aligned} &\lambda \cdot (\lambda' - \lambda)^{-1} b^T w + b^T w \\ &= (\lambda \cdot (\lambda' - \lambda)^{-1} + 1)\, b^T w \\ &= (\lambda + \lambda' - \lambda) \cdot (\lambda' - \lambda)^{-1}\, b^T w \\ &= \lambda' \cdot (\lambda' - \lambda)^{-1}\, b^T w \\ &= \lambda' \beta \end{aligned}$$

$\therefore \; v' = H^{-1} \cdot (\beta w)$

QVQ: ¿Qué pasa con b y w si $\lambda = \lambda'$?
Nos olvidamos del β que nos dan por enunciado.

$$\lambda\beta + b^T w \overset{?}{=} \lambda'\beta \underset{\lambda' = \lambda}{\iff} \lambda\beta + b^T w = \lambda\beta \iff b^T w = 0$$

$\therefore$ Si $\lambda' = \lambda$ entonces $b^T \perp w$.

d) QVQ: A simétrica $\Rightarrow b=0$

Sea $C = \begin{bmatrix} \lambda & b^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$ $\qquad HAH^{-1} = C \iff A = H^{-1}CH$ ①

$$
\begin{aligned}
A \text{ simétrica} \quad &\iff \quad A = A^T \\
&\iff \quad A = (H^{-1}CH)^T \\
&\iff \quad A = (CH)^T H \qquad\qquad H \text{ ortogonal} \Rightarrow H^{-1} = H^T \\
&\iff \quad A = H^T C^T H \quad ②
\end{aligned}
$$

Por ① y ②

$$
\begin{cases} A = H^{-1}CH = H^TCH \\ A = H^TC^TH \end{cases} \Rightarrow \quad H^TCH = H^TC^TH
$$

$$
\Rightarrow \quad C = C^T
$$

$$
\begin{bmatrix} \lambda & b^T \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ b & B \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad b = 0
$$