Métodos Numéricos
2024

Sistemas de ecuaciones lineales
Eliminación Gaussiana

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Sistemas de ecuaciones lineales

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$ Se busca $x \in R^n$ tal que $Ax = b$

- Si $b \notin Im(A)$, el sistema no tiene solución.
- Si $b \in Im(A)$, puede existir única solución o infinitas.
  ¿De qué depende?

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$, $B \in R^{n \times n}$, $d \in R^n$

Los sistemas $Ax = b$ y $Bx = d$ son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$D \in R^{n\times n}$ matriz diagonal, $b \in R^n$

- Si $d_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, existe solución y es única.

  $$x_i = b_i/d_{ii} \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$

  $\mathcal{O}(n)$ operaciones elementales.
- Si existe algún $d_{ii} = 0$, el sistema puede no tener solución o tener infinitas soluciones. ¿De qué depende?

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$U \in R^{n\times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si $u_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, existe solución y es única.

$$
\begin{aligned}
x_n &= b_n/u_{nn} && (1c)\\
x_{n-1} &= (b_{n-1} - u_{n-1n}x_n)/u_{n-1n-1} && (1c + 1p + 1r)\\
&\vdots\\
x_i &= (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j)/u_{ii} && (1c + (n-i)p + (n-i)r)\\
&\vdots\\
x_1 &= (b_1 - \sum_{j=2}^{n} u_{1j}x_j)/u_{11} && (1c + (n-1)p + (n-1)r)
\end{aligned}
$$

Backward substitution, $\mathcal{O}(n^2)$ operaciones elementales.

Sistemas de ecuaciones lineales *fáciles*

$U \in R^{n \times n}$ matriz triangular superior, $b \in R^n$

- Si existe algún $d_{ii} = 0$, el sistema puede no tener solución o tener infinitas soluciones. ¿De qué depende?

$L \in R^{n \times n}$ matriz triangular inferior, $b \in R^n$

- Solución similar al caso de triangular superior, comenzando desde x_1 hasta x_n. Forward substitution.

Sistemas de ecuaciones lineales *generales*

$A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$

- Construir un sistema equivalente cuya matriz asociada sea *fácil*.
- ¿Como hacerlo? Sumar/restar ecuaciones, multiplicar ecuaciones por un escalar, permutar ecuaciones.

$\boxed{\text{Método de Eliminación Gaussiana}}$

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 24 \\ -6 & -1 & 2 & -3 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} F_2 - (-1)F_1 \\ F_3 - (2)F_1 \\ F_4 - (-3)F_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ {\color{red}0} & 1 & -1 & 3 & 11 \\ {\color{red}0} & -1 & 0 & -2 & -2 \\ {\color{red}0} & 2 & -1 & 6 & 29 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} F_3 - (-1)F_2 \\ F_4 - (2)F_2 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ {\color{red}0} & 1 & -1 & 3 & 11 \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & -1 & 1 & 9 \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & 1 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow F_4 - (-1)F_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 13 \\ {\color{red}0} & 1 & -1 & 3 & 11 \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & -1 & 1 & 9 \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}0} & 1 & 16 \end{array}\right]$$

Método de Eliminación Gaussiana

Un ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 24 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Sistemas equivalentes

$x_4 = 16$
$x_3 = (9 - x_4)/(-1) = (9 - 16)/(-1) = 7$
$x_2 = 11 + x_3 - 3x_4 = 11 + 7 - 48 = -30$
$x_1 = (13 - x_2 + x_3 - 3x_4)/2 = 1$

Solución $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -30, 7, 16)$

El algoritmo: primer paso

$$\begin{bmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \cdots & a_{1n}^0 & | & b_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{i1}^0 & a_{i2}^0 & \cdots & a_{in}^0 & | & b_i^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \cdots & a_{nn}^0 & | & b_n^0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} F_2 - (a_{21}^0/a_{11}^0)F_1 \\ \vdots \\ F_i - (a_{i1}^0/a_{11}^0)F_1 \\ \vdots \\ F_n - (a_{n1}^0/a_{11}^0)F_1 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1n}^1 & | & b_1^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 & | & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{in}^1 & | & b_i^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nn}^1 & | & b_n^1 \end{bmatrix}$$

El algoritmo: paso i-esimo

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
a_{11}^{i-1} & a_{12}^{i-1} & \cdots & a_{1i}^{i-1} & \cdots & a_{1n}^{i-1} & b_1^{i-1} \\
0 & a_{22}^{i-1} & \cdots & a_{2i}^{i-1} & \cdots & a_{2n}^{i-1} & b_2^{i-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{i-1} & \cdots & a_{in}^{i-1} & b_i^{i-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{ni}^{i-1} & \cdots & a_{nn}^{i-1} & b_n^{i-1}
\end{array}\right]
\longrightarrow
\begin{array}{c}
F_{i+1} - (a_{i+1i}^{i-1}/a_{ii}^{i-1})F_i \\
\vdots \\
F_n - (a_{ni}^{i-1}/a_{ii}^{i-1})F_i
\end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccccc|c}
a_{11}^{i} & a_{12}^{i} & \cdots & a_{1i}^{i} & a_{1i+1}^{i} & \cdots & a_{1n}^{i} & b_1^{i} \\
0 & a_{22}^{i} & \cdots & a_{2i}^{i} & a_{2i+1}^{i} & \cdots & a_{2n}^{i} & b_2^{i} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{i} & a_{ii+1}^{i} & \cdots & a_{in}^{i} & b_i^{i} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1i+1}^{i} & \cdots & a_{i+1n}^{i} & b_{i+1}^{i} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ni+1}^{i} & \cdots & a_{nn}^{i} & b_n^{i}
\end{array}\right]$$

Método de Eliminación Gaussiana

El algoritmo: último paso

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
a_{11}^{n-1} & a_{12}^{n-1} & \cdots & a_{1i}^{n-1} & \cdots & a_{1n}^{n-1} & b_1^{n-1} \\
0 & a_{22}^{n-1} & \cdots & a_{2i}^{n-1} & \cdots & a_{2n}^{n-1} & b_2^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{ii}^{n-1} & \cdots & a_{in}^{n-1} & b_i^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn}^{n-1} & b_n^{n-1}
\end{array}\right]$$

Método de Eliminación Gaussiana

Esquema básico

Para $i = 1$ a $n - 1$

  Para $j = i + 1$ a n

    $m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1}$

    Para $k = i$ a $n + 1$

      $a_{jk}^{i} = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1}$

    Fin

  Fin

Fin

Condición necesaria: $a_{ii}^{i-1} \neq 0$ para todo $i = 1, n - 1$

¿Qué podemos hacer si en algún paso del algoritmo no se cumple la condición necesaria?
Si en el paso i-ésimo nos encontramos con $a_{ii}^{i-1} = 0$, pueden darse dos posibles situaciones:

- $a_{ji}^{i-1} = 0$ para todo $j = i + 1$ a n. En este caso, la columna i-ésima desde la posición $i + 1$ a la n ya tiene los coeficientes nulos, por lo cual puede procederse al próximo paso del algoritmo.
- existe $a_{j'i}^{i-1} \neq 0$ para algún $j' \geq i + 1$. En este caso, basta permutar la fila i con la j' y continuar con el algoritmo.

Método de Eliminación Gaussiana

Operaciones elementales

Para $i = 1$ a $n-1$

Para $j = i+1$ a n

$m_{ji} = a_{ji}^{i-1} / a_{ii}^{i-1}$ (1c)

Para $k = i$ a $n+1$

$a_{jk}^{i} = a_{jk}^{i-1} - m_{ji} a_{ik}^{i-1}$ (1p + 1r)

Fin

Fin

Fin

Total

$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)c + (n-i)(n-i+2)p + (n-i)(n-i+2)r \longrightarrow \mathcal{O}(n^3)$

Método de Eliminación Gaussiana

Estrategias de pivoteo
Evitar errores por trabajar con aritmética finita

- Pivoteo parcial: entre las filas i a n, utilizar como fila *pivote* aquella con mayor $|a_{ji}^{i-1}|$. Realizar la permutacion necesaria entre las filas para ubicar en el lugar ii dicho coeficiente.
- Pivoteo completo: entre las filas i a n y las columnas i a n, calcular el mayor $|a_{kl}^{i-1}|$. Realizar la permutación necesaria entre las filas y columnas para ubicar en el lugar ii dicho coeficiente.

Método de Eliminación Gaussiana: bibliografía

Recomendamos consultar la numerosa bibliografía existente sobre el tema. Algunas sugerencias:

- Análisis numérico, Richard L. Burden, J. Douglas Faires, International Thomson Editores, 2002.
- Applied Numerical Linear Algebra, James Demmel, SIAM, 1997.
- Matrix Computations, Gene H. Golub, Charles F. Van Loan,JHU Press, 2013.
- Numerical Analysis, Timohty Sauer, Pearson, 3rd Edition, 2017
- An Introduction to Numerical Analysis, Endre Süli, David F. Mayers, Cambridge University Press, 2003.
- Numerical Linear Algebra, Lloyd N. Trefethen, SIAM, 1997.