16. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geqslant n)$. Demostrar que si las columnas de A son linealmente independientes la proyección ortogonal Pb de b sobre el espacio columna de A está dado por la siguiente expresión $Pb = A(A^tA)^{-1}A^tb$.

Espacio columna $= Im(A) \subseteq \mathbb{R}^m$. $\dim(Im(A)) = n$ pues las columnas de A son LI.

Sea $Ax = b$ un problema de cuadrados mínimos. Sabemos que siempre tiene solución mediante las ecuaciones normales.

$A^TAx = A^Tb \iff x = (A^TA)^{-1}A^Tb$

A^TA inversible pues $\text{rango}(A^TA) = \text{rango}(A)$ y A tiene rango máximo por tener columnas LI.

La proyección ortogonal $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sobre $Im(A)$ es una matriz tq:

$\forall b \in \mathbb{R}^m.\ Pb \in Im(A) \iff \forall b \in \mathbb{R}^m.\ \exists x \in \mathbb{R}^n.\ Pb = Ax$

$$x = (A^TA)^{-1}A^Tb \iff Ax = A(A^TA)^{-1}A^Tb$$
$$\iff Pb = A(A^TA)^{-1}A^Tb$$