

12. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Supongamos que $\dim(\text{Nu}(A)) = k$ y sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una base del subespacio $\text{Nu}(A)$. Además sea $B_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una base tal que $B_1 \cup B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n .

- Probar que cualquier vector $y \in \text{Im}(A)$ se puede escribir como una combinación lineal de $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.
- Probar que los vectores del conjunto $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ son linealmente independientes.
- Deducir el Teorema de la dimensión: $\dim(\text{Nu}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = n$.

a)

Sea $y \in \text{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$. $y = Ax$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.

QVQ: y se puede escribir como una combinación lineal de $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

A es una matriz de $m \times n$, y cada v_i es un vector de \mathbb{R}^n .
Entonces $Av_i \in \mathbb{R}^m$ para todo $i = 1 \dots n$ (en particular para $i = k+1 \dots n$).

Partiendo de que y es una CL de $\{Av_{k+1}, \dots, Av_n\}$ veamos que $y = Ax$ para algún x (o sea, $y \in \text{Im}(A)$).

$$y = \alpha_{k+1} Av_{k+1} + \dots + \alpha_n Av_n$$

$$= A\alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + A\alpha_nv_n$$

$$= A(\underbrace{\alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_nv_n}_x)$$

$$A \text{ TL: } \alpha F_A(v) = F_A(\alpha v)$$

$$A \text{ TL: } F_A(v) + F_A(w) = F_A(v+w)$$

$$\therefore y = Ax$$

con x CL de $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ con coeficientes $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$.

Obs: $\langle Av_{k+1}, \dots, Av_n \rangle$ es un sistema generador del subespacio $\text{Im}(A)$.

b)

QVQ: $\{AV_{k+1}, \dots, AV_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ LI

$$\sum_{i=k+1}^n \alpha_i AV_i = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \alpha_i = 0 \quad \forall i=k+1 \dots n$$

$$\sum_{i=k+1}^n \alpha_i AV_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^n A \alpha_i V_i = 0$$

$$\alpha_i f_A(V_i) = f_A(\alpha_i V_i)$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \sum_{i=k+1}^n \alpha_i V_i = 0$$

$$f_A(\alpha_i V_i) + \dots + f_A(\alpha_n V_n) \\ = f_A(\alpha_i V_i + \dots + \alpha_n V_n)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^n \alpha_i V_i = 0$$

$A \neq 0$ No vale asumir esto !!

$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i=k+1 \dots n$$

Porque $B_2 = \{V_{k+1}, \dots, V_n\}$ es una base. Por def B_2 es LI.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Pero } A \neq 0 \text{ y } x \neq 0$$