4. Sea A una matriz con dos autovalores reales distintos λ_1, λ_2. Sean v_1, v_2 autovectores de A correspondientes λ_1, λ_2 respectivamente.

a) Demostrar que v_1, v_2 son linealmente independientes.

b) Si A es simétrica, demostrar que v_1, v_2 son ortogonales.

a) QVQ: V_1 y V_2 son LI.

Supongamos que son LD. Existe $\alpha \neq 0$ tq $V_2 = \alpha V_1$.

$$\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ AV_2 = \lambda_2 V_2 \end{cases} \iff \begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ A\alpha V_1 = \lambda_2 \alpha V_1 \end{cases} \underset{\alpha \neq 0}{\iff} \begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ AV_1 = \lambda_2 V_1 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 V_1 = \lambda_2 V_1 \iff \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{pues } V_1 \neq 0$$

Absurdo porque $\lambda_1 \neq \lambda_2$ por hipótesis.

$\therefore$ V_1 y V_2 son LI.

b) QVQ: A simétrica $\Rightarrow v_1 \perp v_2$

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \end{cases} \iff \begin{cases} v_2^T A v_1 = \lambda_1 v_2^T v_1 \\ v_1^T A v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (v_2^T A v_1)^T = (\lambda_1 v_2^T v_1)^T = \lambda_1 v_2^T v_1 \\ v_1^T A v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2 \end{cases}$$

$$(v_2^T A v_1)^T = (Av_1)^T v_2 = v_1^T A^T v_2 = v_1^T A v_2$$

A simétrica $\Rightarrow A^T = A$

$$\iff \begin{cases} v_1^T A v_2 = \lambda_1 v_2^T v_1 = \lambda_1 v_1^T v_2 \\ v_1^T A v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 v_1^T v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2$$

$$\iff \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_1^T v_2 = 0$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$

$$\iff v_1^T v_2 = 0$$

$\therefore \ v_1 \perp v_2$