1. Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que las matrices AA^t y A^tA son simétricas. Mostrar mediante un ejemplo que pueden no ser iguales. Probar que si A es cuadrada entonces $A+A^t$ es simétrica. ¿Qué sucede con $A-A^t$?

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad AA^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$

AA^T simétrica $\iff (AA^T)_{ij} = (AA^T)_{ji} \quad \forall i,j = 1 \dots m$

$$(AA^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a^T_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a^T_{ki}\, a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, a^T_{ki} = (AA^T)_{ji}$$

Análogamente para $A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Más fácil: AA^T simétrica $\iff AA^T = (AA^T)^T$

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad AA^T = \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix} \qquad A^TA = \begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{bmatrix}$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. QVQ: $A + A^T$ es simétrica

$A + A^T$ es simétrica $\iff$ $A + A^T = (A + A^T)^T$

$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$

Veamos $A - A^T$

$A - A^T$ es simétrica $\iff$ $A - A^T = (A - A^T)^T$

$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A$

La resta no es conmutativa.