

Ejercicio 16 (Programa, Forma Normal) ★

Para el siguiente ejercicio, considerar el cálculo **sin** la regla $\text{pred}(0) \rightarrow 0$

Un *programa* es un término que tipa en el contexto vacío (es decir, no puede contener variables libres).

Para cada una de las siguientes expresiones,

- Determinar si puede ser considerada un **programa**.
- Si es un programa, ¿Cuál es el resultado de su evaluación? Determinar si se trata de una forma normal, y en caso de serlo, si es un **valor** o un **error**.

I $(\lambda x: \text{Bool}. x) \text{ true}$

V $(\lambda f: \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. f\ 0) (\lambda x: \text{Nat}. \text{isZero}(x))$

II $\lambda x: \text{Nat}. \text{pred}(\text{succ}(x))$

VI $(\lambda f: \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. x) (\lambda x: \text{Nat}. \text{isZero}(x))$

III $\lambda x: \text{Nat}. \text{pred}(\text{succ}(y))$

VII $(\lambda f: \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. f\ \text{pred}(0)) (\lambda x: \text{Nat}. \text{isZero}(x))$

IV $(\lambda x: \text{Bool}. \text{pred}(\text{isZero}(x))) \text{ true}$

VIII $\text{fix } (\lambda y: \text{Nat}. \text{succ}(y))$

I) $(\lambda x: \text{Bool}. x) \text{ true}$

Es un programa

$(\lambda x: \text{Bool}. x) \text{ true} \rightarrow x \{x := \text{true}\} = \text{true}$

FN/valor

II) $\lambda x: \text{Nat}. \text{pred}(\text{succ}(x))$

Es un programa FN/valor

III) $\lambda x: \text{Nat}. \text{pred}(\text{succ}(y))$

No es un programa, tiene la variable libre y .

IV) $(\lambda x:\text{Bool}. \text{pred}(\text{isZero}(x))) \text{ true}$

No tipa porque isZero retorna Bool

↑

$x:\text{Bool} \vdash \text{isZero}(x) : \text{Nat}$

$x:\text{Bool} \vdash \text{pred}(\text{isZero}(x)) : \text{Nat}$

$\vdash \lambda x:\text{Bool}. \text{pred}(\text{isZero}(x)) : \text{Bool} \rightarrow \text{Nat}$

$\vdash \text{true} : \text{Bool}$

$\vdash (\lambda x:\text{Bool}. \text{pred}(\text{isZero}(x))) \text{ true}$

No tipa \Rightarrow No es un programa

V) $(\lambda f:\text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. f\ 0)(\lambda x:\text{Nat}. \text{isZero}(x))$

Es un programa

$(\lambda f:\text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. f\ 0)(\lambda x:\text{Nat}. \text{isZero}(x))$

Valor

$\rightarrow (f\ 0) \{ f := (\lambda x:\text{Nat}. \text{isZero}(x)) \}$
 $= (\lambda x:\text{Nat}. \text{isZero}(x))\ 0$

$\rightarrow \text{isZero}(x) \{ x := 0 \} = \text{isZero}(0)$

$\rightarrow \text{true}$

FN/valor

VI) $(\lambda f: \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. X)(\lambda x: \text{Nat}. \text{isZero}(x))$

No es un programa, tiene la variable libre x .

VII) $(\lambda f: \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. f \text{ pred}(0))(\lambda x: \text{Nat}. \text{isZero}(x))$

Es un programa

$(\lambda f: \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. f \text{ pred}(0))(\lambda x: \text{Nat}. \text{isZero}(x))$

$$\begin{aligned} \rightarrow & (f \text{ pred}(0)) \{ f := (\lambda x: \text{Nat}. \text{isZero}(x)) \} \\ & = (\lambda x: \text{Nat}. \text{isZero}(x)) \text{ pred}(0) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{isZero}(x) \{ x := \text{pred}(0) \} = \text{isZero}(\text{pred}(0))$$



Sacamos la regla $\text{pred}(0) \rightarrow 0$

FN/error

Llegamos a $\text{isZero}(\text{pred}(0))$ que está en Forma Normal porque no se puede reducir (en particular porque sacamos la regla que reduce $\text{pred}(0) \rightarrow 0$).

Pero $\text{isZero}(\text{pred}(0))$ no es un valor, entonces interpretamos esto como un error.

VIII) $\lambda y: \text{Nat}. \text{succ}(y)$

Es un programa

$\lambda y: \text{Nat}. \text{succ}(y)$

$$\begin{aligned} \rightarrow & \text{succ}(y) \{ y := \lambda y: \text{Nat}. \text{succ}(y) \} \\ &= \text{succ}(\lambda y: \text{Nat}. \text{succ}(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & \text{succ}(\lambda y: \text{Nat}. \text{succ}(y) \{ y := \lambda y: \text{Nat}. \text{succ}(y) \}) \\ &= \text{succ}(\lambda y: \text{Nat}. \text{succ}(\lambda y: \text{Nat}. \text{succ}(y))) \end{aligned}$$

\rightarrow se repite infinitamente, el programa no termina