

Cálculo Lambda - 1er Parcial 1c2023

$$\tau ::= \dots \mid \text{Cola}_\tau$$
$$M ::= \dots \mid \langle \rangle_\tau \mid M \bullet M \mid \text{próximo}(M) \mid \text{desencolar}(M) \\ \mid \text{case } M \text{ of } \langle \rangle \rightsquigarrow M; c \bullet x \rightsquigarrow M$$

- 1 Introducir las reglas de tipado para la extensión propuesta.
- 2 Definir el conjunto de valores y las nuevas reglas de reducción.
Pueden usar los conectivos booleanos de la guía. **No es necesario escribir las reglas de congruencia**, basta con indicar cuántas son.
Pista: puede ser necesario mirar más de un nivel de un término para saber a qué reduce.
- 3 Mostrar paso por paso cómo reduce la expresión:
 $\text{case } \langle \rangle_{\text{Nat}} \bullet \underline{1} \bullet 0 \text{ of } \langle \rangle \rightsquigarrow \text{próximo}(\langle \rangle_{\text{Bool}}); c \bullet x \rightsquigarrow \text{isZero}(x)$
- 4 Definir como macro la función último_τ , que dada una cola devuelve el último elemento que se encoló en ella. Si la cola es vacía, puede colgarse o llegar a una forma normal bien tipada que no sea un valor. Dar un juicio de tipado válido para esta función (no es necesario demostrarlo).

Gramáticas

$\sigma ::= \dots \mid \text{Cola}_\sigma$

$M ::= \dots \mid \langle \rangle_\sigma \mid M \bullet M \mid \text{prox}(M) \mid \text{desencolar}(M)$
 $\mid \text{case } M \text{ of } \langle \rangle \rightsquigarrow M / c \bullet x \rightsquigarrow M$

$\langle \rangle_\sigma$ construye una cola de tipo σ vacía

$M_1 \bullet M_2$ agrega M_2 al final de la cola

oooo

$\text{prox}(M)$ devuelve el primer elemento (FIFO)

oooo

$\text{desencolar}(M)$ devuelve la cola sin el primer elemento

oooo

$\text{case } M_1 \text{ of } \langle \rangle \rightsquigarrow M_2 / c \bullet x \rightsquigarrow M_3$

Permite operar con la cola al revés (LIFO)

Si la cola no es vacía, las variables c y x se ligan en M_3 al principio de la cola y al último elemento respectivamente.

ooooo

└──┬┘

c x

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \langle \rangle_{\sigma} : \text{Cola}_{\sigma}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Cola}_{\sigma} \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M \cdot N : \text{Cola}_{\sigma}}$$

$$\Gamma \vdash M \cdot N : \text{Cola}_{\sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Cola}_{\sigma}}{\Gamma \vdash \text{prox}(M) : \sigma}$$

$$\Gamma \vdash \text{prox}(M) : \sigma$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Cola}_{\sigma}}{\Gamma \vdash \text{desencolar}(M) : \text{Cola}_{\sigma}}$$

$$\Gamma \vdash \text{desencolar}(M) : \text{Cola}_{\sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M_1 : \text{Cola}_{\sigma} \quad \Gamma \vdash M_2 : \tau \quad \Gamma, c : \text{Cola}_{\sigma}, x : \sigma \vdash M_3 : \tau}{\Gamma \vdash \text{case } M_1 \text{ of } \langle \rangle \rightsquigarrow M_2 / c \cdot x \rightsquigarrow M_3 : \tau}$$

$$\Gamma \vdash \text{case } M_1 \text{ of } \langle \rangle \rightsquigarrow M_2 / c \cdot x \rightsquigarrow M_3 : \tau$$

Reglas de reducción

$V ::= \dots \mid \langle \rangle_\sigma \mid V \cdot V$

$\text{prox}(\langle \rangle_\sigma \cdot V)$

$\rightarrow V$

$\text{prox}((V_1 \cdot V_2) \cdot V_3)$

$\rightarrow \text{prox}(V_1 \cdot V_2)$

$\text{desencolar}(\langle \rangle_\sigma \cdot V)$

$\rightarrow \langle \rangle_\sigma$

$\text{desencolar}((V_1 \cdot V_2) \cdot V_3)$

$\rightarrow \text{desencolar}(V_1 \cdot V_2) \cdot V_3$

$\text{case } \langle \rangle_\sigma \text{ of } \langle \rangle \rightsquigarrow M / c \cdot x \rightsquigarrow N$

$\rightarrow M$

$\text{case } V_1 \cdot V_2 \text{ of } \langle \rangle \rightsquigarrow M / c \cdot x \rightsquigarrow N$

$\rightarrow N \{c := V_1, x := V_2\}$

Si $M \rightarrow M'$:

$M \cdot N \rightarrow M' \cdot N$

$V \cdot M \rightarrow V \cdot M'$

$\text{prox}(M) \rightarrow \text{prox}(M')$

$\text{desencolar}(M) \rightarrow \text{desencolar}(M')$

$\text{case } M \text{ of } \langle \rangle \rightsquigarrow N_1 / c \cdot x \rightsquigarrow N_2 \rightarrow \text{case } M' \text{ of } \langle \rangle \rightsquigarrow N_1 / c \cdot x \rightsquigarrow N_2$

Case $\langle \rangle_{\text{Nat}} \bullet 1 \bullet 0$ of $\langle \rangle \rightsquigarrow \text{próximo}(\langle \rangle_{\text{Bool}})$ / $C \bullet x \rightsquigarrow \text{isZero}(x)$

$\xrightarrow{\text{case vacío}}$ $\text{isZero}(x) \{x := 0\} = \text{isZero}(0)$

$\xrightarrow{\text{isZero } 0}$ true

$\text{último}_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x : \text{Cola}_\tau. \text{case } x \text{ of}$

$\langle \rangle \rightsquigarrow \text{prox}(\langle \rangle_\tau)$ Permite tipar correctamente ya
 / $C \bullet U \rightsquigarrow U$ que $\vdash \text{prox}(\langle \rangle_\tau) : \tau$ sin construir
 ningún valor de tipo τ .

$\frac{\Gamma \vdash x : \text{Cola}_\tau}{\Gamma \vdash \text{último}_\tau x : \tau}$