

a)

Solo tipa si  $\sigma = \text{Nat}$

$$\frac{}{ax_v} \quad \frac{x:\sigma \vdash x:\text{Nat}}{\text{succ}} \quad \frac{x:\sigma \vdash \text{succ}(x):\text{Nat}}{\text{isZero}} \\ x:\sigma \vdash \text{isZero}(\text{succ}(x)) : \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z} = \text{Nat}$  para poder usar isZero

$\therefore \mathbb{Z} = \sigma = \text{Nat}$  única solución

b)

Tipa con cualquier  $\sigma$

Solo tipa si  $\sigma = \text{Nat}$

$$\frac{}{ax_v} \quad \frac{x:\sigma \vdash x:\sigma}{\rightarrow_i} \quad \frac{}{ax_o} \quad \frac{y:\text{Bool} \vdash 0:\sigma}{\rightarrow_i} \\ \frac{\vdash (\lambda x:\sigma. x) : \sigma \rightarrow \sigma \quad \vdash (\lambda y:\text{Bool}. 0) : \sigma}{\rightarrow_e} \\ \vdash (\lambda x:\sigma. x)(\lambda y:\text{Bool}. 0) : \sigma$$

$\therefore \sigma = \text{Nat}$  única solución

c)

No hay forma que tipe porque para aplicar la regla  $\rightarrow_i$  necesitamos que Bool sea un tipo  $\alpha \rightarrow \beta$ .

Solo tipa si  $\mathbb{Z} = \sigma$

$$\frac{}{\uparrow} \quad \frac{}{ax_v} \quad \frac{y:\mathbb{Z} \vdash 0:\sigma}{\text{succ}} \quad \frac{y:\mathbb{Z} \vdash y:\sigma \quad y:\mathbb{Z} \vdash \text{succ}(0):\sigma}{\text{if}} \\ y:\mathbb{Z} \vdash \text{if } (\lambda x:\sigma. x) \text{ then } y \text{ else succ}(0) : \sigma$$

$\therefore$  No hay solución

d)

$\sigma$  puede ser cualquier tipo con Flecha:  $\alpha \rightarrow \tau$

$\alpha$  puede ser cualquier tipo

$$\frac{X:\sigma \vdash X:\alpha \rightarrow \tau \quad X:\sigma \vdash Y:\alpha}{X:\sigma \vdash XY:\tau} \rightarrow_e$$

$\therefore$  Hay infinitas soluciones

e)

Solo tipa si  $\sigma = \tau \rightarrow \tau$

$$\frac{X:\sigma, Y:\tau \vdash X:\tau \rightarrow \tau \quad X:\sigma, Y:\tau \vdash Y:\tau}{X:\sigma, Y:\tau \vdash XY:\tau} \rightarrow_e$$

$\therefore$  Hay infinitas soluciones

f)

Solo tipa si  $\sigma = \text{Bool} \rightarrow \tau$

$$\frac{X:\sigma \vdash X:\text{Bool} \rightarrow \tau \quad X:\sigma \vdash \text{true}:\text{Bool}}{X:\sigma \vdash X \text{ true}:\tau} \rightarrow_e$$

$\therefore$  Hay infinitas soluciones

g)

Solo tipa si  $\sigma = \text{Bool} \rightarrow \sigma$

No podemos definir un tipo con una referencia circular a si mismo.

$$\frac{\frac{}{X:\sigma \vdash X:\text{Bool} \rightarrow \sigma} \text{ax}_V \quad \frac{}{X:\sigma \vdash \text{true}:\text{Bool}} \text{ax}_T}{X:\sigma \vdash X \text{ true}:\sigma} \rightarrow_e$$

$\therefore$  No hay solución

h)

(1) solo tipa si  $\alpha = \sigma$ . Asumiendo  $\alpha = \sigma$ , en (2) nos queda  $\sigma = \sigma \rightarrow \tau$  para algún  $\sigma$  cualquiera. Tenemos el mismo problema que en g).

$$\frac{\frac{}{X:\sigma \vdash X:\alpha \rightarrow \tau} \text{ax}_V^{(2)} \quad \frac{}{X:\sigma \vdash X:\alpha} \text{ax}_V^{(1)}}{X:\sigma \vdash X X:\tau} \rightarrow_e$$