Práctica N° 5 - Interpretación y compilación

Aclaraciones:

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

Gramáticas a tener en cuenta:

- Términos **anotados**
  $M ::= x \mid \lambda x\!:\!\sigma.M \mid M\, M \mid \mathsf{True} \mid \mathsf{False} \mid \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ M\ \mathsf{else}\ M$
  $\mid \mathsf{zero} \mid \mathsf{succ}(M) \mid \mathsf{pred}(M) \mid \mathsf{isZero}(M) \mid \mu x\!: \sigma.M$

  Donde la letra x representa un *nombre de variable* arbitrario. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado $\mathfrak{X} = \{w, w_1, w_2, \dots, x, x_1, x_2, \dots, y, y_1, y_2, \dots, f, f_1, f_2, \dots\}$
- Términos **sin anotaciones**
  $M' ::= x \mid \lambda x.M' \mid M'\ M' \mid \mathsf{True} \mid \mathsf{False} \mid \mathsf{if}\ M'\ \mathsf{then}\ M'\ \mathsf{else}\ M'$
  $\mid \mathsf{zero} \mid \mathsf{succ}(M') \mid \mathsf{pred}(M') \mid \mathsf{isZero}(M') \mid \mu x.M'$
- Tipos
  $\tau ::= \mathsf{Bool} \mid \mathsf{Nat} \mid \tau \to \tau \mid X_n$
  Donde n es un número natural, de tal modo que X_n representa una *variable de tipos* arbitraria tomada de un conjunto $\mathfrak{T} = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$.

Interpretación

Ejercicio 1 ★

Evaluar en el intérprete CBN las siguientes expresiones.

I. $(\lambda x.x)\ \mathsf{zero}$

II. $(\lambda x.\lambda x.x)\ \underline{2}\ \underline{3}$

III. $(\lambda x.\lambda y.(\lambda x.\mathsf{if}\ \mathsf{isZero}(x)\ \mathsf{then}\ y\ \mathsf{else}\ x)\ x)\ \underline{5}\ \underline{4}$

IV. $(\lambda x.(\lambda f.(\lambda y.f\ \underline{6})\ \underline{5})\ (\lambda y.\mathsf{if}\ \mathsf{isZero}(y)\ \mathsf{then}\ x\ \mathsf{else}\ y))\ \underline{4}$

Ejercicio 2 ★

I. Extender el intérprete CBV para pares. ¿Sería sencillo incorporar pares al intérprete CBN?

II. Extender los intérpretes CBN y CBV para suma y producto de naturales.

Ejercicio 3

Extender los intérpretes CBN y CBV para tipos suma.

Ejercicio 4 ★

Evaluar las siguientes expresiones en los intérpretes CBN y CBV con las extensiones del ejercicio 2.

I. $(\lambda x.x + x)((\lambda y.y)\ \underline{3})$
II. $(\lambda x.x + x)((\mu f.\lambda n.\mathsf{if}\ \mathsf{isZero}(n)\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}(\mathsf{zero})\ \mathsf{else}\ n \times f(\mathsf{pred}(n)))\ \underline{2})$
III. $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

Semántica

Ejercicio 5 ★

Dar la semántica denotacional de los siguientes términos.

I. $\lambda x : \mathsf{nat}.\mathsf{zero}$
II. $\lambda x : \mathsf{nat}.(\lambda y : \mathsf{nat}.y)\ \mathsf{succ}(x)$
III. Fact
IV. $\mathsf{Fact}\ \underline{2}$

Donde $[\![M \times N]\!]_v = [\![M]\!]_v \times [\![N]\!]_v$ y $\mathsf{Fact} = \mu f : \mathsf{nat} \to \mathsf{nat}.\lambda n : \mathsf{nat}.\mathsf{if}\ \mathsf{isZero}(n)\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}(\mathsf{zero})\ \mathsf{else}\ n \times f\ \mathsf{pred}(n)$.

Ejercicio 6

Si $[\![M]\!]_v = T$, $[\![N]\!]_v = T$ y $[\![P]\!]_v = F$, ¿quién es $[\![\mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N\ \mathsf{else}\ P]\!]_v$?

Ejercicio 7 ★

Dar la semántica operacional CBV a grandes pasos, a pequeños pasos y la denotacional a los siguientes términos:

I. $\lambda x : \mathsf{nat}.x$
II. $\lambda x : \mathsf{nat} \to \mathsf{nat}.x$
III. $\lambda x : \mathsf{nat} \to \mathsf{nat}.\lambda y : \mathsf{nat}.x\ y$
IV. $(\lambda x : \mathsf{nat} \to \mathsf{nat}.x\ \underline{3})\ \lambda x : \mathsf{nat}.\mathsf{succ}(x)$
V. $(\lambda f : \mathsf{nat}.\mu x : \mathsf{nat}.f\ \mathsf{succ}(x))((\lambda y : \mathsf{nat}.y)\ \underline{2})$

Ejercicio 8

I. Modificar la semántica denotacional incluyendo el elemento error en todo conjunto, con el fin de detectar la división por cero.
II. Extender la semántica denotacional con error, para el Cálculo Lambda con pares (y naturales).
III. Demostrar que para toda valuación v válida en $FV(M) \cup FV(N)$ se tiene $[\![M\{x := N\}]\!]_v = [\![M]\!]_{v,x=[\![N]\!]_v}$ (lema de sustitución).
IV. Demostrar el teorema de corrección.

Inferencia de tipos

Ejercicio 9

Determinar qué expresiones son sintácticamente válidas y, para las que lo sean, indicar a qué gramática pertenecen (tipos, términos anotados o términos sin anotaciones).

I. $\lambda x\colon \mathsf{Bool}.\mathsf{succ}(x)$
II. $\lambda x.\mathsf{isZero}(x)$
III. $X_1 \to \sigma$
IV. $\mathit{Erase}(f\ y)$
V. X_1
VI. $X_1 \to (\mathsf{Bool} \to X_2)$
VII. $\lambda x\colon X_1 \to X_2.\ \mathsf{if\ zero\ then\ True\ else\ zero\ succ(True)}$
VIII. $\mathit{Erase}(\lambda f\colon \mathsf{Bool} \to \mathbf{s}.\lambda y\colon \mathsf{Bool}.f\ y)$

Ejercicio 10

Determinar el resultado de aplicar la sustitución S a las siguientes expresiones

I. $S = \{X_1 := \mathsf{Nat}\}$ $\quad S(\{x : X_1 \to \mathsf{Bool}\})$
II. $S = \{X_1 := X_2 \to X_3,\ X_4 := \mathsf{Bool}\}$ $\quad S(\{x : X_4 \to \mathsf{Bool}\}) \vdash S(\lambda x\colon X_1 \to \mathsf{Bool}.x)\colon S(\mathsf{Nat} \to X_2)$

Ejercicio 11

Unir con flechas los tipos que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mgu* (“most general unifier”).

$X_1 \to X_2$	Nat	$X_2 \to \mathsf{Bool}$	$X_3 \to X_4 \to X_5$
X_1	$\mathsf{Nat} \to \mathsf{Bool}$	$(\mathsf{Nat} \to X_2) \to \mathsf{Bool}$	$\mathsf{Nat} \to X_2 \to \mathsf{Bool}$

Ejercicio 12

Decidir, utilizando el método del árbol, cuáles de las siguientes expresiones son tipables. Mostrar qué reglas y sustituciones se aplican en cada paso y justificar por qué no son tipables aquéllas que fallan.

I. $\lambda z.\ \mathsf{if}\ \mathrm{z}\ \mathsf{then\ zero\ else\ succ(zero)}$
II. $\lambda y.\ \mathsf{succ}((\lambda x.x)\ y)$
III. $\lambda x.\ \mathsf{if\ isZero(x)\ then}\ x\ \mathsf{else}\ (\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ x\ \mathsf{else}\ x)$
IV. $\lambda x.\lambda y.\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ y\ \mathsf{else\ succ(zero)}$
V. $\mathsf{if\ True\ then}\ (\lambda x.\mathsf{zero})\mathsf{zero\ else}\ (\lambda x.\mathsf{zero})\mathsf{False}$
VI. $(\lambda f.\ \mathsf{if\ True\ then}\ f\mathsf{zero\ else}\ f\ \mathsf{False})\ (\lambda x.\ \mathsf{zero})$
VII. $\lambda x.\lambda y.\lambda z.\ \mathsf{if}\ z\ \mathsf{then}\ y\ \mathsf{else\ succ}(x)$

Ejercicio 13 ★

Utilizando el árbol de inferencia, inferir el tipo de las siguientes expresiones o demostrar que no son tipables. En cada paso donde se realice una unificación, mostrar el conjunto de ecuaciones a unificar y la sustitución obtenida como resultado de la misma.

- $\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ z\ x\ y\ z$
- $\lambda x.\ x\ (w\ (\lambda y.w\ y))$
- $\lambda x.\lambda y.\ xy$
- $\lambda x.\lambda y.\ yx$
- $\lambda x.(\lambda x.\ x)$
- $\lambda x.(\lambda y.\ y)x$
- $(\lambda z.\lambda x.\ x\ (z\ (\lambda y.\ z)))\ \mathsf{True}$

Ejercicio 14 *(Numerales de Church)*

Indicar tipos σ y τ apropiados de modo que los términos de la forma $\lambda y : \sigma.\lambda x : \tau.y^n(x)$ resulten tipables para todo n natural. El par (σ, τ) debe ser el mismo para todos los términos. Observar si tienen todos el mismo tipo. Notación: $M^0(N) = N, M^{n+1}(N) = M(M^n(N))$. *Sugerencia:* empezar haciendo inferencia para $n = 2$ – es decir, calcular $\mathbb{W}(\lambda y.\lambda x.y(yx))$ – y generalizar el resultado.

Ejercicio 15

I. Utilizar el algoritmo de inferencia sobre la siguiente expresión: $\lambda y.(x\ y)\ (\lambda z.x_2)$

II. Una vez calculado, demostrar (utilizando chequeo de tipos) que el juicio encontrado es correcto.

III. ¿Qué ocurriría si x_2 fuera x?

COMPILACIÓN

Ejercicio 16 ★

Escribir la secuencia de instrucciones resultantes de compilar los siguientes términos, y escribir la traza de ejecución para cada una de dichas secuencias.

I. $(\lambda x.x)$ True

II. $(\lambda x.\lambda x.x)$ False True

III. $(\lambda x.\lambda y.(\lambda x.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ y\ \mathsf{else}\ x)\ x)$ False True

IV. $(\lambda x.(\lambda f.(\lambda y.f\ \mathsf{True})\ \mathsf{False})\ (\lambda y.\mathsf{if}\ y\ \mathsf{then}\ x\ \mathsf{else}\ y))$ False

Ejercicio 17

Extender el compilador de Cálculo Lambda con pares.