I. ¿Cuáles de las fórmulas del ejercicio anterior son tautologías? Demostrarlas utilizando el método de resolución para la lógica proposicional. Para las demás, indicar qué pasa si se intenta demostrarlas usando este método.

II. ¿Se deduce $(P \wedge Q)$ de $(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$? Contestar utilizando el método de resolución para la lógica proposicional.

$P \Rightarrow P$

1. Negar la fórmula y pasarla a forma clausal.

$$\neg(P \Rightarrow P) = \neg(\neg P \vee P) = \neg\neg P \wedge \neg P = P \wedge \neg P = \{\{P\}, \{\neg P\}\}$$

2. Demostrar que $\neg(P \Rightarrow P) = P \wedge \neg P \vdash \bot$.

$C = \{\underset{1}{\{P\}}, \underset{2}{\{\neg P\}}\}$ QVQ: $C \vdash \bot$ usando el método de resolución

Por 1 y 2 obtenemos la resolvente: $\{\}$.
Luego $C \vdash \bot$ y refutamos $\neg(P \Rightarrow P)$.
$\therefore$ $P \Rightarrow P$ es válido.

$(P \wedge Q) \Rightarrow P$

$\neg((P \wedge Q) \Rightarrow P) = \neg(\neg(P \wedge Q) \vee P) = P \wedge Q \wedge \neg P = \{\{P\}, \{Q\}, \{\neg P\}\}$

$C = \{\underset{1}{\{P\}}, \underset{2}{\{Q\}}, \underset{3}{\{\neg P\}}\}$

- 1 y 3 : $\{\}$

Luego $C \vdash \bot$ $\rightarrow$ C insatisfacible $\rightarrow$ $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ válida

$(P \vee Q) \Rightarrow P \quad = \{\{\neg P, P\}, \{\neg Q, P\}\}$

$\downarrow$

no es una tautología

$v(Q) = 1 \quad v(P) = 0$

$\neg((P \vee Q) \Rightarrow P) \quad = \neg(\neg(P \vee Q) \vee P)$

$= (P \vee Q) \wedge \neg P$

$C = \{\underset{1}{\{P, Q\}}, \underset{2}{\{\neg P\}}\}$

- 1 y 2 : $3 = \{Q\}$

Se traba acá y resulta C satisfacible.

Luego $(P \vee Q) \Rightarrow P$ no es válida (no es verdadera para <u>toda</u> interpretación, pues su negación es satisfacible).

$\neg(P \Leftrightarrow \neg P)$

Pasamos su negación a forma clausal.

$$
\begin{aligned}
&\neg\neg(P \Leftrightarrow \neg P) \\
&\quad = P \Leftrightarrow \neg P \\
&\quad = (P \Rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \Rightarrow P) \\
&\quad = (\neg P \vee \neg P) \wedge (\neg\neg P \vee P) \\
&\quad = (\neg P \vee \neg P) \wedge (P \vee P) \\
&\quad = \{\underbrace{\{\neg P\}}_{1}, \underbrace{\{P\}}_{2}\}
\end{aligned}
$$

1 y 2: $3 = \{\} \Rightarrow$ insatisfacible

$\therefore \neg(P \Leftrightarrow \neg P)$ válida

$\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

Pasamos su negación a forma clausal.

$$\begin{aligned}
&\neg(\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)) \\
&\quad = \neg(\neg\neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) \\
&\quad = \neg(P \wedge Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q) \\
&\quad = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg\neg Q) \\
&\quad = (\neg P \vee \neg Q) \wedge P \wedge Q \\
&\quad = \{\underset{1}{\{\neg P, \neg Q\}}, \underset{2}{\{P\}}, \underset{3}{\{Q\}}\}
\end{aligned}$$

1 y 2 : $4 = \{\neg Q\}$

4 y 3 : $5 = \{\}$ $\Rightarrow$ insatisfacible

$\therefore$ $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ válida

$(\neg P \Rightarrow Q) \land (P \Rightarrow Q) \land (\neg P \Rightarrow \neg Q)$

$= (\neg\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor Q) \land (\neg\neg P \lor \neg Q)$

$= (P \lor Q) \land (\neg P \lor Q) \land (P \lor \neg Q)$

$= \{\{P, Q\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}\}$

QVQ: $P \land Q$

$\neg(P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$

$$C = \{\underset{1}{\{P, Q\}}, \underset{2}{\{\neg P, Q\}}, \underset{3}{\{P, \neg Q\}}, \underset{4}{\{\neg P, \neg Q\}}\}$$

1 y 2: $5 = \{Q\}$

4 y 5: $6 = \{\neg P\}$

3 y 6: $7 = \{\neg Q\}$

5 y 7: $8 = \{\}$

$C \vdash \bot \Rightarrow C$ insatisfacible

$\therefore$ $P \land Q$ válida sabiendo que: $(\neg P \Rightarrow Q) \land (P \Rightarrow Q) \land (\neg P \Rightarrow \neg Q)$