Sean σ, τ, ρ tipos. Según la definición de sustitución, calcular:

a) $(\lambda y\colon \sigma.\ x\ (\lambda x\colon \tau.\ x))\{x := (\lambda y\colon \rho.\ x\ y)\}$

b) $(y\ (\lambda v\colon \sigma.\ x\ v))\{x := (\lambda y\colon \tau.\ v\ y)\}$

$$
\begin{aligned}
x\{x := N\} &= N \\
y\{x := N\} &= y \\
(\lambda x : \sigma.M)\{x := N\} &= \lambda x : \sigma.M \\
(\lambda y : \sigma.M)\{x := N\} &= \lambda y : \sigma.M\{x := N\} && \text{si } y \notin \mathsf{fv}(N) \\
(\lambda y : \sigma.M)\{x := N\} &= \lambda z : \sigma.M\{y := z\}\{x := N\} && \text{si } y \in \mathsf{fv}(N) \\
MO\{x := N\} &= M\{x := N\}O\{x := N\} \\
\mathsf{true}\{x := N\} &= \mathsf{true} \\
\mathsf{false}\{x := N\} &= \mathsf{false} \\
(\mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ O_1\ \mathsf{else}\ O_2)\{x := N\} &= \mathsf{if}\ M\{x := N\}\ \mathsf{then}\ O_1\{x := N\}\ \mathsf{else}\ O_2\{x := N\}
\end{aligned}
$$

a)

$(\lambda y \cdot \sigma.\ x(\lambda x : \tau.\ x))\{x := (\lambda y : \rho.\ xy)\}$ $\quad y \notin fv(\lambda y : \rho.\ xy)$

$= \lambda y : \sigma.\ x(\lambda x : \tau.\ x)\{x := (\lambda y : \rho.\ xy)\}$

$= \lambda y : \sigma.\ x\{x := (\lambda y : \rho.\ xy)\}\ (\lambda x : \tau.\ x)\{x := (\lambda y : \rho.\ xy)\}$

$= \lambda y : \sigma.\ (\lambda y : \rho.\ xy)(\lambda x : \tau.\ x)$

b)

$(y\ (\lambda v : \sigma.\ xv))\{x := (\lambda y : \tau.\ vy)\}$

$= y\{x := (\lambda y : \tau.\ vy)\}\ (\lambda v : \sigma.\ xv)\{x := (\lambda y : \tau.\ vy)\}$

$v \in fv(\lambda y : \tau.\ vy)$

$= y\ (\lambda z : \sigma.\ xv\{v := z\}\{x := (\lambda y : \tau.\ vy)\}$

$= y\ (\lambda z : \sigma.\ xz\ \{x := (\lambda y : \tau.\ vy)\}$

$= y\ (\lambda z : \sigma.\ (\lambda y : \tau.\ vy)\ z)$