

a)

Solo tipa si $\sigma = \text{Nat}$

$$\frac{}{x:\sigma \vdash x:\text{Nat}} \text{ax}_v \quad \frac{}{x:\sigma \vdash \text{succ}(x):\text{Nat}} \text{succ} \quad \frac{}{x:\sigma \vdash \text{isZero}(x):\text{Nat}} \text{isZero}$$

$x:\sigma \vdash \text{isZero}(\text{succ}(x)) : \tau$

Solo tipa si $\tau = \text{Bool}$

$\therefore \tau = \text{Bool}, \sigma = \text{Nat}$ única solución

b)

Tipa con cualquier σ

Solo tipa si $\sigma = \text{Nat}$

$$\frac{}{x:\sigma \vdash x:\sigma} \text{ax}_v \quad \frac{}{y:\text{Bool} \vdash 0:\sigma} \text{ax}_0 \quad \frac{}{\vdash (\lambda x:\sigma. x):\sigma \rightarrow \sigma} \rightarrow_i \quad \frac{}{\vdash (\lambda y:\text{Bool}. 0):\sigma} \rightarrow_i \quad \frac{}{\vdash (\lambda x:\sigma. x)(\lambda y:\text{Bool}. 0):\sigma} \rightarrow_e$$

$\therefore \sigma = \text{Nat}$ única solución

c)

No hay forma que tipe porque para aplicar la regla \rightarrow_i necesitamos que Bool sea un tipo $\alpha \rightarrow \beta$.

Solo tipa si $\tau = \sigma$

$$\frac{}{y:\tau \vdash (\lambda x:\sigma. x):\text{Bool}} \uparrow \quad \frac{}{y:\tau \vdash y:\sigma} \text{ax}_v \quad \frac{}{y:\tau \vdash 0:\sigma} \text{ax}_0 \quad \frac{}{y:\tau \vdash \text{succ}(0):\sigma} \text{succ} \quad \frac{}{y:\tau \vdash \text{if}(\lambda x:\sigma. x) \text{ then } y \text{ else } \text{succ}(0):\sigma} \text{if}$$

\therefore No hay solución

d)

σ puede ser cualquier tipo con Flecha: $\alpha \rightarrow \tau$

α puede ser cualquier tipo

$$\frac{X:\sigma \vdash X:\alpha \rightarrow \tau \quad X:\sigma \vdash Y:\alpha}{X:\sigma \vdash XY:\tau} \rightarrow_e$$

\therefore Hay infinitas soluciones

e)

Solo tipa si $\sigma = \tau \rightarrow \tau$

$$\frac{X:\sigma, Y:\tau \vdash X:\tau \rightarrow \tau \quad X:\sigma, Y:\tau \vdash Y:\tau}{X:\sigma, Y:\tau \vdash XY:\tau} \rightarrow_e$$

\therefore Hay infinitas soluciones

f)

Solo tipa si $\sigma = \text{Bool} \rightarrow \tau$

$$\frac{X:\sigma \vdash X:\text{Bool} \rightarrow \tau \quad X:\sigma \vdash \text{true}:\text{Bool}}{X:\sigma \vdash X \text{ true}:\tau} \rightarrow_e$$

\therefore Hay infinitas soluciones

g)

Solo tipa si $\sigma = \text{Bool} \rightarrow \sigma$

No podemos definir un tipo con una referencia circular a si mismo.

$$\frac{\frac{}{X:\sigma \vdash X:\text{Bool} \rightarrow \sigma} \text{ax}_V \quad \frac{}{X:\sigma \vdash \text{true}:\text{Bool}} \text{ax}_T}{X:\sigma \vdash X \text{ true}:\sigma} \rightarrow_e$$

\therefore No hay solución

h)

(1) solo tipa si $\alpha = \sigma$. Asumiendo $\alpha = \sigma$, en (2) nos queda $\sigma = \sigma \rightarrow \tau$ para algún σ cualquiera. Tenemos el mismo problema que en g).

$$\frac{\frac{}{X:\sigma \vdash X:\alpha \rightarrow \tau} \text{ax}_V^{(2)} \quad \frac{}{X:\sigma \vdash X:\alpha} \text{ax}_V^{(1)}}{X:\sigma \vdash X X:\tau} \rightarrow_e$$