$\vdash$ Sistemas deductivos

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Buenos Aires

16 de abril de 2024

Vamos a ver

- ✨ Sistemas deductivos
- ✨ Deducción natural
- ✨ Lógica intuicionista vs clásica
- ✨ Demo de weakening por inducción en la derivación

Sistemas deductivos

- Definidos por un **conjunto de reglas**
- Las reglas son de la forma:

$$\frac{\text{Premisa}_1 \qquad \text{Premisa}_2 \qquad \dots \qquad \text{Premisa}_n}{\text{Conclusión}}\ \text{Nombre de la regla}$$

- Un caso particular: $n = 0$

$$\frac{}{\text{Conclusión}}\ \text{Nombre de la regla}$$

- Por ejemplo,

$$\left\{ \frac{}{\vdash \text{🧀}}\ \text{Queso}, \quad \frac{}{\vdash \text{📦}}\ \text{Caja}, \quad \frac{}{\vdash \text{🐁}}\ \text{Ratón}, \quad \frac{\vdash \text{🧀} \qquad \vdash \text{📦}}{\vdash \text{🪤}}\ \text{Trampa}_i, \quad \frac{\vdash \text{🐁} \qquad \vdash \text{🪤}}{\vdash \text{📦}}\ \text{Trampa}_e, \quad \frac{\vdash \text{🐁} \qquad \vdash \text{🧀}}{\vdash \text{🐁}}\ \text{Comequeso} \right\}$$

Lógica proposicional

Sintaxis

$$\tau, \sigma ::= P \mid \neg\tau \mid \tau \wedge \sigma \mid \tau \vee \sigma \mid \tau \Rightarrow \sigma$$

Equivalencia de fórmulas

τ es lógicamente equivalente a σ cuando $v \models \tau$ sii $v \models \sigma$ para toda valuación v.

Ejercicio 2

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\Rightarrow$ (implicación), $\Leftrightarrow$ (equivalencia) puede reescribirse a otra fórmula equivalente que usa sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

Un sistema deductivo: deducción natural

Secuentes:

$$\text{Fórmula}_1, \ldots, \text{Fórmula}_n \vdash \text{Fórmula}_{n+1}$$

Por ejemplo...

$$P, Q \vdash P \wedge Q$$

Una regla de deducción

$$\dfrac{\text{Premisa}_1 \quad \text{Premisa}_2 \quad \ldots \quad \text{Premisa}_n}{\text{Conclusión}} \;{\scriptsize\begin{array}{c}\text{Nombre de}\\ \text{la regla}\end{array}}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\ \wedge_i \qquad \dfrac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\ \text{ax}$$

intuitivamente se puede pensar que expresa:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Premisa}_1\\ \text{Premisa}_2\\ \vdots\\ \text{Premisa}_n\end{array}\right\} \implies \text{Conclusión}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma \vdash \tau\\ \Gamma \vdash \sigma\end{array}\right\} \implies \Gamma \vdash \tau \wedge \sigma$$

$$\text{True} \implies \Gamma, \tau \vdash \tau$$

La demostración de un secuente es un árbol formado por reglas de deducción:

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\ \text{ax} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ \text{ax}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge_i$$

$$\frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau}\ \text{ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\ \wedge_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau}\ \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\ \wedge_{e_2}$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma}\ \Rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma}\ \Rightarrow_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\ \vee_{i_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\ \vee_e$$

$$\frac{\Gamma, \tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg\tau}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \bot_e$$

Lógica intuicionista

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}{\Gamma \vdash \tau}\ \neg\neg_e$$

Lógica clásica

Deducción natural

Reglas derivadas

Reglas intuicionistas

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau}\ \neg\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau}\ \mathsf{MT}$$

Reglas clásicas

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \bot}{\Gamma \vdash \tau}\ \mathsf{PBC} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau}\ \mathsf{LEM}$$

- ✨ Veamos que las reglas $\neg\neg_e$, PBC y LEM son equivalentes.
- ✨ Todas las reglas derivadas, incluyendo las que hayan probado en la guía de ejercicios, pueden usarse para resolver otros ejercicios y los parciales.

Ejercicio 6
Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario:

- ✨ Reducción al absurdo: $(P \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg P$
- ✨ Introducción de la doble negación: $P \Rightarrow \neg\neg P$
- ✨ Eliminación de la triple negación: $\neg\neg\neg P \Rightarrow \neg P$
- ✨ de Morgan (II): $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
  Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.
- ✨ Conmutatividad ($\vee$): $(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$

Deducción natural

Ejercicio 7
Demostrar en deducción natural que vale $\vdash \sigma$ para cada una de las siguientes fórmulas.
Para estas fórmulas es imprescindible **usar lógica clásica**:

- ✨ Absurdo clásico: $(\neg P \Rightarrow \bot) \Rightarrow P$
- ✨ Ley de Peirce: $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
- ✨ Análisis de casos: $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$

Debilitamiento o weakening

Ejercicio 8
Probar la siguiente propiedad:
Si $\Gamma \vdash \sigma$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.
Tip: utilizar inducción sobre el tamaño de la derivación.

✨ Por ejemplo,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\,\mathsf{ax} \quad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,\mathsf{ax}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\,\wedge_i}{P, Q \vdash (P \wedge Q) \vee R}\,\vee_{i_1} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q, S \vdash P}\,\mathsf{ax} \quad \dfrac{}{P, Q, S \vdash Q}\,\mathsf{ax}}{P, Q, S \vdash P \wedge Q}\,\wedge_i}{P, Q, S \vdash (P \wedge Q) \vee R}\,\vee_{i_1}$$

✨ Para usar esta propiedad como regla en otras derivaciones:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma, \tau \vdash \sigma}\,\mathsf{W}$$

Consistencia

Conjunto consistente de fórmulas

Γ se dice consistente si $\Gamma \nvdash \bot$.

Conjunto consistente maximal

Γ es consistente maximal si

- ✨ Γ es consistente
- ✨ Si $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y Γ' consistente, entonces $\Gamma' = \Gamma$

Ejercicio 14

Probar que si Γ es consistente maximal entonces para cada fórmula σ se tiene que $\Gamma \vdash \sigma$ implica $\sigma \in \Gamma$ (i.e. Γ es cerrada respecto a derivabilidad). *Ayuda:* razonar por el absurdo.

Ejercicio 15

Probar que Γ es consistente maximal si y sólo si Γ es consistente y para toda fórmula σ, $\sigma \in \Gamma$ o $\neg\sigma \in \Gamma$.

¿Preguntas?