I. Extender el intérprete CBV para pares. ¿Sería sencillo incorporar pares al intérprete CBN?

II. Extender los intérpretes CBN y CBV para suma y producto de naturales.

I)

CBV

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \langle V_1, V_2 \rangle}{\Gamma \vdash \pi_1(M) \hookrightarrow V_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \langle V_1, V_2 \rangle}{\Gamma \vdash \pi_2(M) \hookrightarrow V_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow V_1 \qquad \Gamma \vdash N \hookrightarrow V_2}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle \hookrightarrow \langle V_1, V_2 \rangle}$$

Para CBN la estrategia cambia a no reducir el par hasta que necesitemos observar alguna de sus componentes con $\pi_1$ o $\pi_2$. Y en tal caso, solo reducimos la componente observada, no ambas. Pero para lograr esto tenemos que interpretar a un par $\langle M, N \rangle$ como un thunk para preservar el contexto, y recién interpretar M o N cuando se observan con $\pi_1$ o $\pi_2$.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle \hookrightarrow (\langle M, N \rangle, \Gamma)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle \hookrightarrow (\langle M, N \rangle, \Delta) \qquad \Delta \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \pi_1(\langle M, N \rangle) \hookrightarrow V}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle \hookrightarrow (\langle M, N \rangle, \Delta) \qquad \Delta \vdash N \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \pi_2(\langle M, N \rangle) \hookrightarrow V}$$

II)

Suma CBV

Opción 1

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow V_1 \qquad \Gamma \vdash N \hookrightarrow V_2}{\Gamma \vdash M + N \hookrightarrow V_1 +_{\mathbb{N}} V_2}$$

Es la suma de números naturales aplicada a los números $V_1$ y $V_2$. Este símbolo + está en el metalenguaje, no es el mismo símbolo + de la gramática de términos.

Opción 2

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow succ(zero)^{i} \qquad \Gamma \vdash N \hookrightarrow succ(zero)^{j}}{\Gamma \vdash M + N \hookrightarrow succ(zero)^{i +_{\mathbb{N}} j}}$$

Misma idea que antes pero escrito de forma constructiva, en función de como definimos los números en la extensión de naturales. Si M es un número natural $n$, lo construimos iterando $n$ veces succ desde zero, asumiendo que $succ(zero)^0 = zero$. Entonces si M itera $i$ veces, N itera $j$ veces, la suma M+N es iterar $i+j$ veces.

Opción 3

$$\frac{\Gamma \vdash N \hookrightarrow zero \qquad \Gamma \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash M + N \hookrightarrow V} \quad \text{Caso base}$$

$$\frac{\Gamma \vdash N \hookrightarrow succ(W) \qquad \Gamma \vdash succ(M) + W \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash M + N \hookrightarrow V} \quad \text{Caso recursivo}$$

Acá la idea es definir las reglas de interpretación como un algoritmo recursivo para sumar. La primer regla es el caso base. La segunda es el recursivo, donde $N > 0$, entonces podemos sacarle 1 y agregarlo a M.

Muy importante que las reglas queden determinísticas. La interpretación de N es la que determina qué regla usar. Si $N = zero$ entonces N no puede ser succ de otra cosa.

# Producto CBV

Misma idea que la suma.

Opción 1

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow V_1 \qquad \Gamma \vdash N \hookrightarrow V_2}{\Gamma \vdash M \times N \hookrightarrow V_1 \times_{\mathbb{N}} V_2}$$

Opción 2

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow succ(zero)^i \qquad \Gamma \vdash N \hookrightarrow succ(zero)^j}{\Gamma \vdash M \times N \hookrightarrow succ(zero)^{i \times_{\mathbb{N}} j}}$$

Opción 3

$$\frac{\Gamma \vdash N \hookrightarrow zero}{\Gamma \vdash M \times N \hookrightarrow zero}$$ Caso base

$$\frac{\Gamma \vdash N \hookrightarrow succ(W) \qquad \Gamma \vdash M + (M \times W) \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash M \times N \hookrightarrow V}$$ Caso recursivo

Esta es la suma de cálculo $\lambda$,
no es la suma de los naturales.