

Decidir, utilizando el método del árbol, cuáles de las siguientes expresiones son tipables. Mostrar qué reglas y sustituciones se aplican en cada paso y justificar por qué no son tipables aquellas que fallan.

I. $\lambda z. \text{if } z \text{ then zero else succ(zero)}$

V. $\text{if True then } (\lambda x. \text{zero})\text{zero else } (\lambda x. \text{zero})\text{False}$

II. $\lambda y. \text{succ}((\lambda x. x) y)$

VI. $(\lambda f. \text{if True then } f\text{zero else } f \text{ False}) (\lambda x. \text{zero})$

III. $\lambda x. \text{if isZero}(x) \text{ then } x \text{ else } (\text{if } x \text{ then } x \text{ else } x)$

IV. $\lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then } y \text{ else succ(zero)}$

VII. $\lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{if } z \text{ then } y \text{ else succ}(x)$

I)

5 $\lambda z. \text{if } z \text{ then zero else succ(zero)}$

| ABS

4 $\text{if } z \text{ then zero else succ(zero)}$

/

|

|

1 z

2 zero

3 $\text{succ(zero)} = 1$

1) $\mathcal{W}(z) \rightsquigarrow z: t_1 \vdash z: t_1$

2) $\mathcal{W}(\text{zero}) \rightsquigarrow \vdash \text{zero}: \text{Nat}$

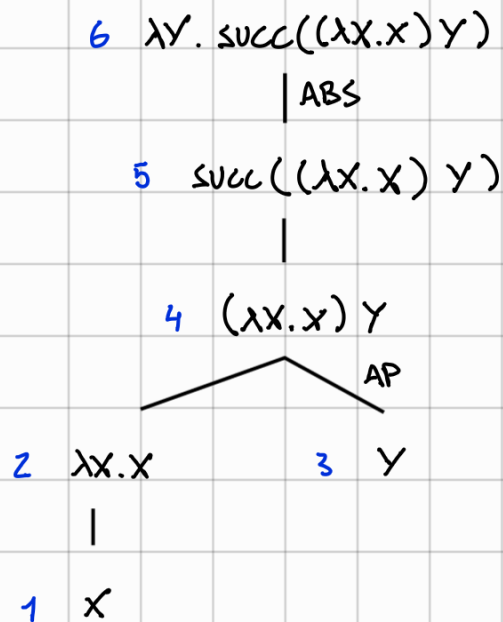
3) $\mathcal{W}(\text{succ(zero)}) \rightsquigarrow \vdash \text{succ(zero)}: \text{Nat}$

4) $\mathcal{W}(\text{if} \dots) \rightsquigarrow S = \text{mgu}(\{t_1 \doteq \text{Bool}, \text{Nat} \doteq \text{Nat}\})$

$z: \text{Bool} \vdash \text{if} \dots : \text{Nat}$

5) $\mathcal{W}(\lambda z. \text{if} \dots) \rightsquigarrow \vdash \lambda z. \text{if} \dots : \text{Bool} \rightarrow \text{Nat}$

II)



1) $X : t_1 \vdash X : t_1$

2) $\vdash \lambda X : t_1. X : t_1 \rightarrow t_1$

3) $Y : t_2 \vdash Y : t_2$

4) $S = \text{mgu}(\{t_1 \rightarrow t_1 \doteq t_2 \rightarrow t_3\})$

$= \text{mgu}(\{t_1 \doteq t_2, t_1 \doteq t_3\})$

$= \text{mgu}(\{t_2 \doteq t_3\})$

$= \text{mgu}(\emptyset)$

$= \{t_1 := t_2, t_2 := t_3\}$

Decompose

Elim $\{t_1 := t_2\}$

Elim $\{t_2 := t_3\}$

$S(\{Y : t_2\}) \vdash S((\lambda X : t_1. X) Y) : S(t_3)$

$Y : t_3 \vdash (\lambda X : t_3. X) Y : t_3$

5) $S = \text{mgu}(\{t_3 \doteq \text{Nat}\}) = \{t_3 := \text{Nat}\}$

$Y : \text{Nat} \vdash (\lambda X : \text{Nat}. X) Y : \text{Nat}$

6) $\vdash \lambda Y : \text{Nat}. \text{succ}((\lambda X : \text{Nat}. X) Y) : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$