Machete: Tipos y Términos

Las expresiones de tipos (o simplemente tipos) son

$$\sigma ::= \mathsf{Bool} \mid \mathsf{Nat} \mid \sigma \to \sigma$$

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los términos están dados por

$$\begin{aligned} M ::= {} & x \\ & \mid \lambda x : \sigma . M \\ & \mid M\ M \\ & \mid \mathsf{true} \\ & \mid \mathsf{false} \\ & \mid \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ M\ \mathsf{else}\ M \\ & \mid \mathsf{zero} \\ & \mid \mathsf{succ}(M) \\ & \mid \mathsf{pred}(M) \\ & \mid \mathsf{isZero}(M) \end{aligned}$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}}\ ax_{\text{true}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}}\ ax_{\text{false}}$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\ ax_v$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q : \sigma}\ \text{if}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma . M : \sigma \to \tau}\ \to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\ N : \tau}\ \to_e$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{zero} : \text{Nat}} \; ax_{\text{zero}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{succ}(M) : \text{Nat}} \; \text{succ} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{pred}(M) : \text{Nat}} \; \text{pred}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{isZero}(M) : \text{Bool}} \; \text{isZero}$$

Machete: Semántica operacional

$$V ::= \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \mid \lambda x : \sigma.M \mid \mathsf{zero} \mid \mathsf{succ}(V)$$

(Los valores de tipo Nat pueden escribirse como $\underline{n}$, lo cual abrevia $\mathsf{succ}^n(\mathsf{zero})$).

Reglas de Evaluación en un paso

Si $M_1 \to M_1'$**, entonces** $M_1 M_2 \to M_1' M_2$ $\quad$ (app_l o μ)

Si $M_2 \to M_2'$**, entonces** $V M_2 \to V M_2'$ $\quad$ (app_r o ν)

$(\lambda x : \sigma.M)V \to M\{x := V\}$ $\quad$ (β)

Machete: Semántica operacional

Reglas de Evaluación en un paso

$$\text{if true then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow M_2 \qquad (\text{if}_\text{t})$$

$$\text{if false then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow M_3 \qquad (\text{if}_\text{f})$$

Si $M_1 \rightarrow M_1'$, entonces

$$\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow \text{if } M_1' \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \qquad (\text{if}_\text{c})$$

Machete: Semántica operacional

Reglas de Evaluación en un paso

$$\mathrm{pred}(\mathrm{succ}(\underline{n})) \to \underline{n} \qquad (\mathrm{pred})$$

Opcional*: $\mathrm{pred}(\mathrm{zero}) \to \mathrm{zero} \qquad (\mathrm{pred}_0)$

$$\mathrm{isZero}(\mathrm{zero}) \to \mathrm{true} \qquad (\mathrm{isZero}_0)$$

$$\mathrm{isZero}(\mathrm{succ}(\underline{n})) \to \mathrm{false} \qquad (\mathrm{isZero}_n)$$

Si $M \to N$**, entonces** $\mathrm{succ}(M) \to \mathrm{succ}(N) \qquad (\mathrm{succ}_\mathrm{c})$

Si $M \to N$**, entonces** $\mathrm{pred}(M) \to \mathrm{pred}(N) \qquad (\mathrm{pred}_\mathrm{c})$

Si $M \to N$**, entonces** $\mathrm{isZero}(M) \to \mathrm{isZero}(N) \qquad (\mathrm{isZero}_\mathrm{c})$

*Introducir la regla pred_0 restaura la propiedad de Progreso, pero ya no modela los naturales tradicionales, sino una variante.

Machete: Extensión con μ

$$M ::= \ldots \mid \mu x : \tau . M$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \mu x : \sigma . M : \sigma}\ \mu$$

$$\mu x : \sigma . M \to M\{x := \mu x : \sigma . M\} \quad \text{(fix)}$$