Determinismo y preservación de tipos

Ejercicio 20 (Pares, o produtos)

- Demostrar preservación de tipos
- Demostrar determinismo

Preservación de tipos

P(M): $(\Gamma \vdash M : \sigma$ y $M \to M') \Rightarrow \Gamma \vdash M' : \sigma$

Por inducción en la estructura de M, asumiendo que vale para todas las extensiones anteriores, así que sólo hay que probarlo para:

- $\langle M, N \rangle$
- $\pi_1(M)$
- $\pi_2(M)$

HI: P(M) y P(N)

qvq $P(\langle M, N \rangle)$, $P(\pi_1(M))$ y $P(\pi_2(M))$

Preservación de tipos

$\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : \sigma \times \tau$, con $\Gamma \vdash M : \sigma$ y $\Gamma \vdash N : \tau$

- **E-PAR1** : $\langle M, N\rangle \to \langle M', N\rangle$ con $M \to M'$
  Por HI, $\Gamma \vdash M' : \sigma$
  Como $\Gamma \vdash M' : \sigma$ y $\Gamma \vdash N : \tau$,
  entonces por **T-PAR**: $\Gamma \vdash \langle M', N\rangle : \sigma \times \tau$
- **E-PAR2** : $\langle M, N\rangle \to \langle M, N'\rangle$ con $N \to N'$
  Por HI, $\Gamma \vdash N' : \tau$
  Como $\Gamma \vdash M : \sigma$ y $\Gamma \vdash N' : \tau$,
  entonces por **T-PAR**: $\Gamma \vdash \langle M, N'\rangle : \sigma \times \tau$

Preservación de tipos

$\Gamma \vdash \pi_1(M) : \sigma$, con $\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau$

- $\mathbf{E\text{-}\pi_1}$: $\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M')$ con $M \rightarrow M'$
  Por HI, $\Gamma \vdash M' : \sigma \times \tau$
  Luego, por $\mathbf{T\text{-}\pi_1}$: $\Gamma \vdash \pi_1(M') : \sigma$

$\Gamma \vdash \pi_2(M) : \tau$, con $\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau$

- $\mathbf{E\text{-}\pi_2}$: $\pi_2(M) \rightarrow \pi_2(M')$ con $M \rightarrow M'$
  Por HI, $\Gamma \vdash M' : \sigma \times \tau$
  Luego, por $\mathbf{T\text{-}\pi_2}$: $\Gamma \vdash \pi_2(M') : \tau$

Preservación de tipos

$\Gamma \vdash \pi_1(\langle V_1, V_2 \rangle) : \sigma$, con $\Gamma \vdash \langle V_1, V_2 \rangle : \sigma \times \tau$

- **E-π₁(V)** : $\pi_1(\langle V_1, V_2 \rangle) \to V_1$
  Como $\Gamma \vdash \langle V_1, V_2 \rangle : \sigma \times \tau$,
  por **T-PAR**, $\Gamma \vdash V_1 : \sigma$

$\Gamma \vdash \pi_2(\langle V_1, V_2 \rangle) : \tau$, con $\Gamma \vdash \langle V_1, V_2 \rangle : \sigma \times \tau$

- **E-π₂(V)** : $\pi_2(\langle V_1, V_2 \rangle) \to V_2$
  Como $\Gamma \vdash \langle V_1, V_2 \rangle : \sigma \times \tau$,
  por **T-PAR**, $\Gamma \vdash V_2 : \tau$

Determinismo

P(M): (Si $M \rightarrow M_1$ y $M \rightarrow M_2$) $\Rightarrow M_1 = M_2$

Por inducción en la estructura de M, asumiendo que vale para todas las extensiones anteriores, así que sólo hay que probarlo para:

- $\langle M, N \rangle$
- $\pi_1(M)$
- $\pi_2(M)$

HI: P(M) y P(N)

qvq $P(\langle M, N \rangle)$, $P(\pi_1(M))$ y $P(\pi_2(M))$

Determinismo

$\langle M, N\rangle \to O_1$ y $\langle M, N\rangle \to O_2$

- **E-PAR1**: $O_1 = \langle M', N\rangle$ con $M \to M'$
  Como M reduce, a O_2 sólo se pudo haber llegado por **E-PAR1** (la otra que reduce $\langle M, N\rangle$ pide que M sea valor) así que $O_2 = \langle M'', N\rangle$ con $M \to M''$
  Por HI, $M' = M''$ así que $O_1 = O_2$
- **E-PAR2**: $O_1 = \langle M, N'\rangle$ con $N \to N'$ y M valor
  Como M valor, a O_2 sólo se pudo haber llegado por **E-PAR2** (la otra que reduce $\langle M, N\rangle$ pide que M reduzca) así que $O_2 = \langle M, N''\rangle$ con $N \to N''$
  Por HI, $N' = N''$ así que $O_1 = O_2$

Determinismo

$\pi_1(M) \to O_1$ y $\pi_1(M) \to O_2$

- **E-$\boldsymbol{\pi_1}$**: $O_1 = \pi_1(M')$ con $M \to M'$
  Como M reduce, a O_2 sólo se pudo haber llegado por **E-$\boldsymbol{\pi_1}$** (la otra que reduce $\pi_1(M)$ pide que M sea valor) así que $O_2 = \pi_1(M'')$ con $M \to M''$
  Por HI, $M' = M''$ así que $O_1 = O_2$
- **E-$\boldsymbol{\pi_1}$(V)**: $O_1 = V_1$ con $M = \langle V_1, V_2 \rangle$
  Como M valor, a O_2 sólo se pudo haber llegado por **E-$\boldsymbol{\pi_1}$(V)** (la otra que reduce $\pi_1(M)$ pide que M reduzca) así que $O_2 = V'_1$ con $M = \langle V'_1, V'_2 \rangle$
  Como $\langle V_1, V_2 \rangle = \langle V'_1, V'_2 \rangle$, entonces $O_1 = O_2$

Determinismo

$\pi_2(M) \to O_1$ y $\pi_2(M) \to O_2$

- **E-$\boldsymbol{\pi_2}$**: $O_1 = \pi_2(M')$ con $M \to M'$
  Como M reduce, a O_2 sólo se pudo haber llegado por **E-$\boldsymbol{\pi_2}$** (la otra que reduce $\pi_2(M)$ pide que M sea valor) así que $O_2 = \pi_2(M'')$ con $M \to M''$
  Por HI, $M' = M''$ así que $O_1 = O_2$
- **E-$\boldsymbol{\pi_2}$(V)**: $O_1 = V_2$ con $M = \langle V_1, V_2\rangle$
  Como M valor, a O_2 sólo se pudo haber llegado por **E-$\boldsymbol{\pi_2}$(V)** (la otra que reduce $\pi_2(M)$ pide que M reduzca) así que $O_2 = V'_2$ con $M = \langle V'_1, V'_2\rangle$
  Como $\langle V_1, V_2\rangle = \langle V'_1, V'_2\rangle$, entonces $O_1 = O_2$

Ejercicio 21 (Uniones disjuntas, co-productos o sumas)

- Demostrar preservación de tipos
- Demostrar determinismo

Preservación de tipos

P(M): (Γ ⊦ M : σ y M → M') ⇒ Γ ⊦ M' : σ

Por inducción en la estructura de M, asumiendo que vale para todas las extensiones anteriores, así que sólo hay que probarlo para:

- left(M)
- right(M)
- case M of left(x) ↪ N | right(y) O

HI: P(M), P(N) y P(O)

qvq P(left(M)), right(M) y

P(case M of left(x) ↪ N | right(y) O)

Preservación de tipos

$\Gamma \vdash \text{left}(M) : \sigma + \tau$ con $\Gamma \vdash M : \sigma$

- **`E-LEFT`** : $\text{left}(M) \to \text{left}(M')$ con $M \to M'$
  Por HI, $\Gamma \vdash M' : \sigma$
  Luego, por **`T-LEFT`**: $\Gamma \vdash \text{left}(M) : \sigma + \tau$

$\Gamma \vdash \text{right}(M) : \sigma + \tau$ con $\Gamma \vdash M : \tau$

- **`E-RIGHT`** : $\text{right}(M) \to \text{right}(M')$ con $M \to M'$
  Por HI, $\Gamma \vdash M' : \tau$
  Luego, por **`T-RIGHT`**: $\Gamma \vdash \text{right}(M) : \sigma + \tau$

Preservación de tipos

$\Gamma \vdash \text{case } M \text{ of left}(x) \hookrightarrow N \mid \text{right}(y) \hookrightarrow O : \rho$

con $\Gamma \vdash M : \sigma + \tau$, $\Gamma, x{:}\sigma \vdash N : \rho$ y $\Gamma, y{:}\tau \vdash O : \rho$

- **E-CASE** :

  $\text{case } M \text{ of left}(x) \hookrightarrow N \mid \text{right}(y) \hookrightarrow O \longrightarrow$

  $\quad \text{case } M' \text{ of left}(x) \hookrightarrow N \mid \text{right}(y) \hookrightarrow O$

  $\quad\quad$ con $M \longrightarrow M'$

  Por HI, $\Gamma \vdash M' : \sigma + \tau$

  Como $\Gamma \vdash M' : \sigma + \tau$, $\Gamma, x{:}\sigma \vdash N : \rho$ y $\Gamma, y{:}\tau \vdash O : \rho$,

  por **T-CASE**:

  $\quad \Gamma \vdash \text{case } M' \text{ of left}(x) \hookrightarrow N \mid \text{right}(y) \hookrightarrow O : \rho$

Preservación de tipos

$\Gamma \vdash \text{case left}(V) \text{ of left}(x) \hookrightarrow N \mid \text{right}(y) \hookrightarrow O : \rho$

con $\Gamma \vdash \text{left}(V) : \sigma + \tau$, $\Gamma, x{:}\sigma \vdash N : \rho$ y $\Gamma, y{:}\tau \vdash O : \rho$

- **E-CASE-L** :

  $\text{case left}(V) \text{ of left}(x) \hookrightarrow N \mid \text{right}(y) \hookrightarrow O \to$

  $N\{x := V\}$

  Como $\Gamma \vdash \text{left}(V) : \sigma + \tau$, por **T-LEFT**: $\Gamma \vdash V : \sigma$

  Como $\Gamma, x{:}\sigma \vdash N : \rho$ y $\Gamma \vdash V : \sigma$,

  por **LS**[1]: $\Gamma \vdash N\{x := V\} : \rho$

1) Lema de Sustitución:

si $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma \Rightarrow \Gamma \vdash M\{x := N\} : \tau$

Preservación de tipos

$\Gamma \vdash \text{case right}(V) \text{ of left}(x) \hookrightarrow N \mid \text{right}(y) \hookrightarrow O : \rho$

con $\Gamma \vdash \text{right}(V) : \sigma + \tau$, $\Gamma, x{:}\sigma \vdash N : \rho$ y $\Gamma, y{:}\tau \vdash O : \rho$

- **E-CASE-R** :

  $\text{case right}(V) \text{ of left}(x) \hookrightarrow N \mid \text{right}(y) \hookrightarrow O \to$

  $O\{y := V\}$

  Como $\Gamma \vdash \text{right}(V) : \sigma + \tau$, por **T-RIGHT**: $\Gamma \vdash V : \tau$

  Como $\Gamma, y{:}\tau \vdash O : \rho$ y $\Gamma \vdash V : \tau$,

  por **LS**[1]: $\Gamma \vdash O\{y := V\} : \rho$

1) Lema de Sustitución:

si $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma \Rightarrow \Gamma \vdash M\{x := N\} : \tau$

Determinismo

P(M): (Si $M \to M_1$ y $M \to M_2$) $\Rightarrow M_1 = M_2$

Por inducción en la estructura de M, asumiendo que vale para todas las extensiones anteriores, así que sólo hay que probarlo para:

- left(M)
- right(M)
- case M of left(x) $\hookrightarrow$ N | right(y) O

HI: P(M), P(N) y P(O)

qvq P(left(M)), right(M) y

P(case M of left(x) $\hookrightarrow$ N | right(y) O)

Determinismo

left(M) $\rightarrow O_1$ y left(M) $\rightarrow O_2$

- **`E-LEFT`**: O_1 = left(M') con M $\rightarrow$ M'
  Como **`E-LEFT`** es la única regla que reduce left(M), a O_2 sólo se pudo haber llegado por ella así que O_2 = left(M'') con M $\rightarrow$ M''
  Por HI, M' = M'' así que $O_1 = O_2$

right(M) $\rightarrow O_1$ y right(M) $\rightarrow O_2$

- **`E-RIGHT`**: O_1 = right(M') con M $\rightarrow$ M'
  Como **`E-RIGHT`** es la única regla que reduce right(M), a O_2 sólo se pudo haber llegado por ella así que O_2 = right(M'') con M $\rightarrow$ M''
  Por HI, M' = M'' así que $O_1 = O_2$

Determinismo

case M of left(x) $\hookrightarrow$ M_1 | right(y) $\hookrightarrow$ M_2 $\longrightarrow$ O_1 y
case M of left(x) $\hookrightarrow$ M_1 | right(y) $\hookrightarrow$ M_2 $\longrightarrow$ O_2

- **`E-CASE`**: O_1 = case M' of
  left(x) $\hookrightarrow$ M_1 | right(y) $\hookrightarrow$ M_2 con M $\longrightarrow$ M'
  Como M reduce, a O_2 sólo se pudo haber llegado por **`E-CASE`** (las otras que reducen el case piden que M sea valor) así que O_2 = case M'' of
  left(x) $\hookrightarrow$ M_1 | right(y) $\hookrightarrow$ M_2 con M $\longrightarrow$ M''
  Por HI, M' = M'' así que O_1 = O_2

Determinismo

$\text{case } M \text{ of left}(x) \hookrightarrow M_1 \mid \text{right}(y) \hookrightarrow M_2 \to O_1$ y

$\text{case } M \text{ of left}(x) \hookrightarrow M_1 \mid \text{right}(y) \hookrightarrow M_2 \to O_2$

- **E-CASE-L**: $O_1 = M_1\{x := V\}$ con $M = \text{left}(V)$
  Como M valor (y en particular left(V)), a O_2 sólo se pudo haber llegado por **E-CASE-L** (las otras que reducen el case piden que M reduzca o que sea right(V)) así que $O_2 = M_1\{x := V'\}$ con $M = \text{left}(V')$
  Como left(V) = left(V'), entonces V = V' y, por lo tanto, $O_1 = O_2$

Determinismo

case M of left(x) $\hookrightarrow$ M_1 | right(y) $\hookrightarrow$ $M_2 \to O_1$ y
case M of left(x) $\hookrightarrow$ M_1 | right(y) $\hookrightarrow$ $M_2 \to O_2$

- **E-CASE-R**: $O_1 = M_2\{x := V\}$ con M = right(V)
  Como M valor (y en particular right(V)), a O_2 sólo se pudo haber llegado por **E-CASE-R** (las otras que reducen el case piden que M reduzca o que sea left(V)) así que $O_2 = M_2\{x := V'\}$ con M = right(V')
  Como right(V) = right(V'), entonces V = V' y, por lo tanto, $O_1 = O_2$

Lema de sustitución

Lema de sustitución

$P(M, N, x)$:

si $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma \Rightarrow \Gamma \vdash M\{x := N\} : \tau$

Por inducción en la estructura de M,

- $P(x, N, x)$:

  supongo $\Gamma, x{:}\sigma \vdash x : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma$

  qvq $\Gamma \vdash x\{x := N\} : \tau$

  {por def. de sustitución} $\Leftrightarrow \Gamma \vdash N : \tau$

  Ojo, estamos suponiendo $\Gamma, x{:}\sigma \vdash x : \tau$

  Por $\mathbf{ax_v}$, $\sigma = \tau$

  Entonces $\Gamma \vdash N : \sigma$ (que es una de mis hipótesis)

Lema de sustitución

P(M, N, x):

si $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma \Rightarrow \Gamma \vdash M\{x := N\} : \tau$

Por inducción en la estructura de M,

- P(x, N, y):

  supongo $\Gamma, y{:}\sigma \vdash x : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma$, con $x \neq y$

  qvq $\Gamma \vdash x\{y := N\} : \tau$

  {por def. de sustitución} $\Leftrightarrow \Gamma \vdash x : \tau$

Como $\Gamma, y{:}\sigma \vdash x : \tau$, por $\mathbf{ax}_v$, $x{:}\tau \in \Gamma, y{:}\sigma$

Como $x \neq y$, $x{:}\tau$ in Γ

Luego, puedo aplicar $\mathbf{ax}_v$ así que $\Gamma \vdash x : \tau$

Lema de sustitución

P(M, N, x):

si $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma \Rightarrow \Gamma \vdash M\{x := N\} : \tau$

Por inducción en la estructura de M,

- P((λy:ρ.M), N, x):
  Hay 3 casos pero se pueden renombrar variables para entrar siempre en el segundo caso.

Lema de sustitución

P(M, N, x):

si $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma \Rightarrow \Gamma \vdash M\{x := N\} : \tau$

Por inducción en la estructura de M,

- P((λy:ρ.M), N, x), con $y \notin FV(N)$

  y con HI P(M, N, x):

  supongo $\Gamma, x{:}\sigma \vdash (\lambda y{:}\rho.M) : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma$

  qvq $\Gamma \vdash (\lambda y{:}\rho.M)\{x := N\} : \tau$

  {por def. de sustitución} $\Leftrightarrow \Gamma \vdash (\lambda y{:}\rho.M\{x := N\}) : \tau$

  {por $\rightarrow_i$, reemplazando τ por $\sigma \rightarrow \tau'$}

  $\Leftrightarrow \Gamma, y{:}\rho \vdash M\{x := N\} : \tau'$

Lema de sustitución

Pasando en limpio,

Tengo:

- $\Gamma, x{:}\sigma \vdash (\lambda y{:}\sigma.M) : \sigma \to \rho$
- $\Gamma \vdash N : \sigma$
- $y \notin FV(N)$
- HI: si $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \rho$ y $\Gamma \vdash N : \sigma \Rightarrow \Gamma \vdash M\{x := N\} : \rho$

qvq:

- $\Gamma, y{:}\sigma \vdash M\{x := N\} : \rho$
  que podría probarlo por HI si pudiera probar
  $\Gamma, y{:}\sigma, x{:}\sigma \vdash M : \rho$

Como $\Gamma, x{:}\sigma \vdash (\lambda y{:}\sigma.M) : \sigma \to \rho$,
entonces, por $\to_{\mathtt{i}}$, $\Gamma, y{:}\sigma, x{:}\sigma \vdash M : \rho$

Lema de sustitución

P(M, N, x):

si $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma \Rightarrow \Gamma \vdash M\{x := N\} : \tau$

Por inducción en la estructura de M,

- P(M O, N, x)

  y con HI P(M, N, x) y P(O, N, x)

  supongo $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M\ O : \tau$ y $\Gamma \vdash N : \sigma$

  qvq $\Gamma \vdash (M\ O)\{x := N\} : \tau$

  {por def. de sustitución} $\Leftrightarrow$

  $\Gamma \vdash M\{x := N\}\ O\{x := N\} : \tau$

  Como $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M\ O : \tau$, por $\to_e$,

  $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \rho \to \tau$ y $\Gamma, x{:}\sigma \vdash O : \rho$

Lema de sustitución

Pasando en limpio,

Tengo:

- $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M\ O : \tau$
- $\Gamma \vdash N : \sigma$
- $\Gamma, x{:}\sigma \vdash M : \rho \to \tau \Leftrightarrow \{\text{por HI}\}\ \Gamma \vdash M\{x := N\} : \rho \to \tau$
- $\Gamma, x{:}\sigma \vdash O : \rho \Leftrightarrow \{\text{por HI}\}\ \Gamma \vdash O\{x := N\} : \rho$

qvq:

- $\Gamma \vdash M\{x := N\}\ O\{x := N\} : \tau$

Como $\Gamma \vdash M\{x := N\} : \rho \to \tau$ y $\Gamma \vdash O\{x := N\} : \rho$,
por $\to_e$, $\Gamma \vdash M\{x := N\}\ O\{x := N\} : \tau$

Lema de sustitución

Ya lo probamos para:

- $M = x$
- $M = (\lambda y{:}\rho.N)$
- $M = N\ O$

Falta probarlo para:

- $M = \text{true}$ $\quad M = \text{zero}$ $\quad M = \text{succ}(N)$
- $M = \text{false}$ $\quad M = \text{pred}(N)$ $\quad M = \text{isZero}(N)$
- $M = \text{if } N \text{ then } O \text{ else } P$

y para cada extensión en la que lo usemos
(acabamos de usarlo para la extensión sumas)