Paradigmas de Programación

Cálculo Lambda: Semántica

- Operacional
- Denotacional

Definiciones

- Sintaxis / Gramática
  Cómo escribir los términos. Cuáles son válidos y cuáles no.
- Semántica
  Qué significan los términos (válidos).
  Es una relación ↪ que a cada expresión le asocia “algo” que le da significado.
  - Operacional
    - Small step (a pequeños pasos)
    - Big step (a grandes pasos)
  - Denotacional

Semántica operacional: Small step

Se define a partir de otra relación $\to$ que describe los pasos elementales mediante reescritura del programa.

$$M \hookrightarrow V \iff M \to^* V$$

donde

- V es un término irreducible (valor).
- $\to^*$ es la clausura reflexiva y transitiva de $\to$.

Ejemplos:

- (λx. if x then ff else tt) tt ↪ ff
- pred(succ(pred(succ(zero)))) ↪ zero

Semántica operacional: Big step

Se define de forma inductiva relacionando un término con su valor.

- Intérprete

  Programa que calcula el valor de un término.

- Estrategias
  - Call By Name (CBN): llamada por nombre

    Intuición: $(\lambda n.\ n * n)\ (2 + 2) \to (2 + 2) * (2 + 2) \hookrightarrow 16$

  - Call By Value (CBV): llamada por valor

    Intuición: $(\lambda n.\ n * n)\ (2 + 2) \to (\lambda n.\ n * n)\ 4 \to 4 * 4 \hookrightarrow 16$

Intérprete con estrategia Call By Name (CBN)

- Los argumentos sólo se interpretan de ser necesario (al usarlos).
- Contexto de evaluación Γ: secuencia variables asociadas a *thunks*. Admite variables repetidas y en ese caso se devuelve la última ingresada (la de más a la derecha).
- Thunk: par <M, Γ> formado por un término M y un contexto de evaluación Γ.
- Closure / Clausura / Cierre: nuevo valor <x, M, Γ> que representa la evaluación del término (λx. M) en el contexto Γ.
- Def: M se interpreta a V en Γ.

$$\Gamma \vdash M \hookrightarrow V$$

Intérprete con estrategia Call By Name (CBN)

$$\frac{\Gamma' \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma, x = \langle M, \Gamma' \rangle, \Delta \vdash x \hookrightarrow V}\; x \notin \mathsf{D}(\Delta)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \lambda x.M \hookrightarrow \langle x, M, \Gamma \rangle} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \langle x, M', \Gamma' \rangle \quad \Gamma', x = \langle N, \Gamma \rangle \vdash M' \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash M N \hookrightarrow V}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{tt} \hookrightarrow \mathbf{tt}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{ff} \hookrightarrow \mathbf{ff}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \mathbf{tt} \quad \Gamma \vdash N_1 \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 \hookrightarrow V} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \mathbf{ff} \quad \Gamma \vdash N_2 \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 \hookrightarrow V}$$

$$\frac{\Gamma, x = \langle \mu x.M, \Gamma \rangle \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mu x.M \hookrightarrow V}$$

Intérprete con estrategia Call By Name (CBN)

Ejercicio: Dar la interpretación CBN para (λx. x) ((λy. if y then ff else tt) tt)

$$
\dfrac{
\dfrac{}{\vdash \lambda x.\ x \hookrightarrow \langle x, x, \varnothing\rangle}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\vdash \lambda y.\ \text{if } y \text{ then ff else tt} \hookrightarrow \langle y, \text{if } y \text{ then ff else tt}, \varnothing\rangle}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\vdash \mathrm{tt} \hookrightarrow \mathrm{tt}}}{y = \langle \mathrm{tt}, \varnothing\rangle \vdash y \hookrightarrow \mathrm{tt}}
\qquad
\dfrac{}{y = \langle \mathrm{tt}, \varnothing\rangle \vdash \mathrm{ff} \hookrightarrow \mathrm{ff}}
}{y = \langle \mathrm{tt}, \varnothing\rangle \vdash \text{if } y \text{ then ff else tt} \hookrightarrow \mathrm{ff}}
}{\vdash (\lambda y.\ \text{if } y \text{ then ff else tt})\ \mathrm{tt} \hookrightarrow \mathrm{ff}}
}{x = \langle (\lambda y.\ \text{if } y \text{ then ff else tt})\ \mathrm{tt}, \varnothing\rangle \vdash x \hookrightarrow \mathrm{ff}}
}{\vdash (\lambda x.\ x)\ ((\lambda y.\ \text{if } y \text{ then ff else tt})\ \mathrm{tt}) \hookrightarrow \mathrm{ff}}
$$

Intérprete con estrategia Call By Value (CBV)

Igual que CBN pero:

- Se interpretan primero los argumentos.
- Contexto de evaluación Γ: secuencia de variables asociadas a valores y thunks de la forma <μx. M, Γ>.

$$\frac{\Gamma' \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma, x = \langle M, \Gamma' \rangle, \Delta \vdash x \hookrightarrow V}\ x \notin \mathsf{D}(\Delta)$$

$$\frac{}{\Gamma, x = V, \Delta \vdash x \hookrightarrow V}\ x \notin \mathsf{D}(\Delta)$$

$$\frac{\Gamma' \vdash \mu y.M \to V}{\Gamma, x = \langle \mu y.M, \Gamma \rangle', \Delta \vdash x \hookrightarrow V}\ x \notin \mathsf{D}(\Delta)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \langle x, M', \Gamma' \rangle \quad \Gamma', x = \langle N, \Gamma \rangle \vdash M' \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash MN \hookrightarrow V}$$

$$\frac{\Gamma \vdash N \hookrightarrow W \quad \Gamma \vdash M \hookrightarrow \langle x, M', \Gamma' \rangle \quad \Gamma', x = W \vdash M' \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash MN \hookrightarrow V}$$

Intérprete con estrategia Call By Value (CBV)

$$\frac{}{\Gamma, x = V, \Delta \vdash x \hookrightarrow V}\ x \notin \mathsf{D}(\Delta) \qquad \frac{\Gamma' \vdash \mu y.M \to V}{\Gamma, x = \langle \mu y.M, \Gamma \rangle', \Delta \vdash x \hookrightarrow V}\ x \notin \mathsf{D}(\Delta)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \lambda x.M \hookrightarrow \langle x, M, \Gamma \rangle} \qquad \frac{\Gamma \vdash N \hookrightarrow W \quad \Gamma \vdash M \hookrightarrow \langle x, M', \Gamma' \rangle \quad \Gamma', x = W \vdash M' \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash M N \hookrightarrow V}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{tt} \hookrightarrow \mathbf{tt}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{ff} \hookrightarrow \mathbf{ff}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \mathbf{tt} \quad \Gamma \vdash N_1 \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 \hookrightarrow V} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \mathbf{ff} \quad \Gamma \vdash N_2 \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 \hookrightarrow V}$$

$$\frac{\Gamma, x = \langle \mu x.M, \Gamma \rangle \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mu x.M \hookrightarrow V}$$

Intérprete con estrategia Call By Value (CBV)

$$\frac{}{\Gamma, x = V, \Delta \vdash x \hookrightarrow V}\; x \notin \mathsf{D}(\Delta) \qquad \frac{\Gamma' \vdash \mu y.M \to V}{\Gamma, x = \langle \mu y.M, \Gamma\rangle', \Delta \vdash x \hookrightarrow V}\; x \notin \mathsf{D}(\Delta)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \lambda x.M \hookrightarrow \langle x, M, \Gamma\rangle} \qquad \frac{\Gamma \vdash N \hookrightarrow W \quad \Gamma \vdash M \hookrightarrow \langle x, M', \Gamma'\rangle \quad \Gamma', x = W \vdash M' \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash M N \hookrightarrow V}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{tt} \hookrightarrow \mathbf{tt}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{ff} \hookrightarrow \mathbf{ff}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \mathbf{tt} \quad \Gamma \vdash N_1 \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 \hookrightarrow V} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \mathbf{ff} \quad \Gamma \vdash N_2 \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N_1\ \mathsf{else}\ N_2 \hookrightarrow V}$$

$$\frac{\Gamma, x = \langle \mu x.M, \Gamma\rangle \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \mu x.M \hookrightarrow V}$$

Intérprete con estrategia Call By Value (CBV)

Ejercicio: Dar la interpretación CBV para (λx. x) ((λy. if y then ff else tt) tt)

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \lambda y.\ \text{if } y \text{ then ff else tt} \hookrightarrow \langle y, \text{if } y \text{ then ff else tt}, \varnothing\rangle} \qquad \dfrac{}{\vdash \text{tt} \hookrightarrow \text{tt}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{y = \text{tt} \vdash y \hookrightarrow \text{tt}} \qquad \dfrac{}{y = \text{tt} \vdash \text{ff} \hookrightarrow \text{ff}}}{y = \text{tt} \vdash \text{if } y \text{ then ff else tt} \hookrightarrow \text{ff}}}{}$$

$$\Updownarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \lambda x.\ x \hookrightarrow \langle x, x, \varnothing\rangle} \qquad \dfrac{}{\vdash (\lambda y.\ \text{if } y \text{ then ff else tt})\ \text{tt} \hookrightarrow \text{ff}} \qquad \dfrac{}{x = \text{ff} \vdash x \hookrightarrow \text{ff}}}{\vdash (\lambda x.\ x)\ ((\lambda y.\ \text{if } y \text{ then ff else tt})\ \text{tt}) \hookrightarrow \text{ff}}$$

Extensión del intérprete con números naturales

- CBN y CBV

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{zero} \hookrightarrow \text{zero}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \text{zero}}{\Gamma \vdash \text{pred}(M) \hookrightarrow \text{zero}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \text{zero}}{\Gamma \vdash \text{isZero}(M) \hookrightarrow \text{tt}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow V}{\Gamma \vdash \text{succ}(M) \hookrightarrow \text{succ}(V)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \text{succ}(V)}{\Gamma \vdash \text{pred}(M) \hookrightarrow V}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \hookrightarrow \text{succ}(V)}{\Gamma \vdash \text{isZero}(M) \hookrightarrow \text{ff}}$$

Semántica denotacional

- Da significado a un programa construyendo un objeto matemático llamado *denotación*.
- Para cada programa determinístico P, la relación entre las entradas E y las salidas S de P es una función que escribimos $[\![P]\!]$.

$$P, E \hookrightarrow S \iff [\![P]\!]E = S$$

- Interpretación de los tipos:

$$[\![\texttt{Bool}]\!] = \mathbb{B}$$
$$[\![\texttt{Nat}]\!] = \mathbb{N}$$
$$[\![\tau \to \sigma]\!] = [\![\tau]\!] \to [\![\sigma]\!]$$

donde $[\![\tau]\!] \to [\![\sigma]\!]$ es el conjunto de funciones de $[\![\tau]\!]$ en $[\![\sigma]\!]$.

Semántica denotacional

- Interpretación de los términos: $M : \tau \ \Rightarrow \ [\![M]\!] \in \ [\![\tau]\!]$
- Valuación válida: $x : \tau \in \Gamma, \ v(x) \in \ [\![\tau]\!]$

  Función v que asigna un valor a las variables libres de M.

- Punto fijo: asignamos ⊥ como semántica de los términos de la forma (μx. M) que no tienen un único punto fijo. Es decir, a los programas que no terminan.
- Def: ⊥ es el elemento más chico de cualquier conjunto que lo contenga.
- Def: ⟦μx:σ. M⟧ como el punto fijo más chico de ⟦λx:σ. M⟧.

Semántica denotacional de cálculo lambda (sin error)

$$[\![x]\!]_v = v(x)$$

$$[\![\lambda x{:}\tau.M]\!]_v = V^{[\![\tau]\!]} \mapsto [\![M]\!]_{v,x=V}$$

$$[\![MN]\!]_v = [\![M]\!]_v[\![N]\!]_v$$

$$[\![\mathbf{tt}]\!]_v = \mathsf{true}$$

$$[\![\mathbf{ff}]\!]_v = \mathsf{false}$$

$$[\![0]\!]_v = 0$$

$$[\![\mathsf{succ}(M)]\!]_v = [\![M]\!]_v + 1$$

$$[\![\mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N\ \mathsf{else}\ O]\!]_v = \begin{cases} [\![N]\!]_v & \text{si } [\![M]\!]_v = \mathsf{true} \\ [\![O]\!]_v & \text{si } [\![M]\!]_v = \mathsf{false} \\ \bot & \text{si } [\![M]\!]_v = \bot \end{cases}$$

$$[\![\mathsf{pred}(M)]\!]_v = \begin{cases} 0 & \text{si } [\![M]\!]_v = 0 \\ [\![M]\!]_v - 1 & \text{sino} \end{cases}$$

$$[\![\mathsf{isZero}(M)]\!]_v = \begin{cases} \mathsf{true} & \text{si } [\![M]\!]_v = 0 \\ \mathsf{false} & \text{si } [\![M]\!]_v = n \neq 0 \\ \bot & \text{si } [\![M]\!]_v = \bot \end{cases}$$

$$[\![\mu x{:}\tau.M]\!]_v = \mathsf{FIX}(V^{[\![\tau]\!]} \mapsto [\![M]\!]_{v,x=V})$$

donde FIX(f) es el mínimo punto fijo de f.

Semántica denotacional de cálculo lambda extendido con pares

$$[\![\langle M, N \rangle]\!]_v = ([\![M]\!]_v, [\![N]\!]_v)$$

$$[\![\pi_1(M)]\!]_v = ([\![M]\!]_v)_0$$

$$[\![\pi_2(M)]\!]_v = ([\![M]\!]_v)_1$$