Probabilidad y Estadística (C) - Final - 09/12/2021

Apellido y Nombre: Bekenstein, Jonathan Libreta Nro.: 348/11
Mail: jonibekenstein@gmail.com Nro de hojas(extras al enunciado).: 6

Criterio de aprobación: El examen consta de 11 ejercicios. Debe elegir 10 ejercicios para resolver (si resuelve los 11, no tomaré en cuenta el último aunque sea correcto). Cada ejercicio resuelto correctamente suma un punto. Se considera un ejercicio correctamente resuelto si la respuesta es correcta y se justificaron todos los pasos de la resolución. Se aprueba con mínimo 6 ejercicios bien hecho.

Envío del examen: Una vez terminado, por favor escanee su examen a pdf y mandelo a `probaFinal2021@gmail.com` con asunto 'APELLIDO, Nombre'. Recibirá una respuesta automática confrmando la recepción del mail. Antes de irse espere también que le confirme que esta todo en orden.

1. Dar la definición de una medida de probabilidad P. Demuestre a partir de la definición que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Enuncie y demuestre la fórmula de la probabilidad total y el Teorema de Bayes.

3. En un día una gallina pone N huevos donde $N \sim Poisson(\lambda)$. Independientemente de la cantidad de huevos puestos, de un huevo cualquiera nace un pollito con probabilidad $p \in (0,1)$. Hallar la distribución de la cantidad de pollitos nacidos.

4. Sea $U \sim$ Uniforme$[0,1]$. Demuestre que $\frac{-\log(1-U)}{\lambda} \sim \text{Exp}(\lambda)$.

5. Sea $X_1, X_2, ...$ va i.i.d con distribución exponencial $\text{Exp}(\lambda)$, y N una variable aleatoria independiente de las X_i con distribución geométrica de parámetro $p \in (0,1)$. Calcular la función característica de $Z := \sum_{i=1}^{N} X_i$ y deducir la distribución de Z.

6. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad
$$f_{(X,Y)}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} 1_{\{0<x<y\}}.$$
Qué distribución tiene $X|_{Y=y}$, para $y > 0$? Es una distribución 'clásica', debe reconocerla.

7. Sea $U_n \sim$ Uniforme$\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Calcule el límite en distribución de U_n cuando $n \to \infty$.

8. Enuncie y demuestre la Ley de los Grandes Números para variables aleatorias con esperanza y varianza finitas (admitiendo Tchebyshev).

9. Hallar el estimador de máximo verosimilitud del párametro a de la distribución
$$f(x) = \begin{cases} ax^{-(a+1)} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$
donde $a > 1$. ¿Es consistente ?

10. Construya un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para la media de la distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ con varianza conocida. Y si no se conoce la varianza ?

11. Se toman 25 mediciones de la temperatura en cierto sector de un reactor obteniéndose un promedio muestral $\bar{x} = 249^oC$ y un desvío muestral $s = 2.8^oC$. A nivel $\alpha = 0.05$ decida si (a) la temperatura media en ese sector del reactor es menor que 250^oC y (b) la varianza de la temperatura en ese sector del reactor es mayor que $(2^oC)^2$. Suponga los datos normales.

JONIBEKENSTEIN@GMAIL.COM

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (C)

JONATHAN BEKENSTEIN 348/11

FECHA 2021-12-09

EJERCICIO 1

DEF PREVIAS:

- DADO UN EXPERIMENTO ALEATORIO, LLAMAMOS ESPACIO MUESTRAL S AL CONJUNTO DE TODOS LOS RESULTADOS POSIBLES. PUEDE SER FINITO O INFINITO NUMERABLE.
- LLAMAMOS EVENTO O SUCESO A UN SUBCONJUNTO DEL ESPACIO MUESTRAL QUE REPRESENTA ALGUNOS RESULTADOS DEL EXPERIMENTO QUE NOS INTERESA ANALIZAR.

DEF MEDIDA DE PROBABILIDAD:

DADO UN ESPACIO MUESTRAL S Y UN EVENTO A, DEFINIMOS P(A) COMO LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DEL EVENTO A.

AXIOMAS:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) $P(S) = 1$

3) DADA UNA COLECCIÓN DE EVENTOS $A_1, \cdots, A_n$ TALES QUE:

$A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ ENTONCES:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

TAMBIÉN VALE PARA UNA COLECCIÓN INFINITA NUMERABLE:

DADO $A_1, A_2, \cdots$ TALES QUE $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ ENTONCES:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

DEMO: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$B = B \cap S = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

$P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) \overset{Ax3}{=} P(B \cap A) + P(B \cap A^c) \iff P(B \cap A^c) = P(B) - P(B \cap A)$

$P(A \cup B) = P(A \cup (B \cap A^c)) \overset{Ax3}{=} P(A) + P(B \cap A^c) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\square$

NOTA

EJERCICIO 2

DEF PREVIAS:

DADO EVENTOS A, B CUALQUIERA CON $P(B) > 0$ DEFINIMOS LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE A CONDICIONAL A LA DE B COMO:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

REGLA DEL PRODUCTO: $P(A\cap B) = P(A|B)\,P(B)$

SI ADEMÁS $P(A) > 0$: $P(A\cap B) = P(B|A)\,P(A)$

DADA UNA COLECCIÓN DE EVENTOS $A_1, \dots, A_n$ TALES QUE:

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$
- $P(A_i) > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$
- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

LLAMAMOS A ESTA COLECCIÓN DE EVENTOS UNA PARTICIÓN DEL ESPACIO MUESTRAL.

PROBABILIDAD TOTAL:

DADA UNA PARTICIÓN DEL ESPACIO MUESTRAL $A_1, \dots, A_n$ Y UN EVENTO B CUALQUIERA:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_i)$$

DEMO:

$$B = B\cap S \underset{\substack{\downarrow \\ A_1, \dots, A_n \text{ PARTICIÓN}}}{=} B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$$

REGLA DEL PRODUCTO, $P(A_i) > 0 \ \forall i$

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)\right) \underset{\downarrow}{=} \sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i) \overset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_i) \ \square$$

$A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i\neq j \Rightarrow (B\cap A_i)\cap(B\cap A_j) = \emptyset \ \forall i \neq j$

NOTA

TEOREMA DE BAYES:

DADA UNA PARTICIÓN $A_1, \cdots, A_n$ Y UN EVENTO B CUALQUIERA CON $P(B)>0$

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

BAYES EN ESENCIA NOS PERMITE "DAR VUELTA" UN CONDICIONAL.

DEMO:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

SE USÓ LA REGLA DEL PRODUCTO EN EL NUMERADOR PUES $P(A_j) > 0$ Y

PROBA TOTAL EN EL DENOMINADOR.

EJERCICIO 3

$N \sim P(\lambda)$ N = CANTIDAD DE HUEVOS EN 1 DÍA

X = CANTIDAD DE POLLITOS NACIDOS

OBSERVEMOS QUE N GENERA UNA PARTICIÓN INFINITA NUMERABLE $\forall n \in [0,+\infty)$

Y QUE DADO UN n FIJO: $X|N=n \sim Bi(n,p)$. USAMOS PROBA TOTAL

PARA ENCONTRAR LA DISTRIBUCIÓN DE X.

$$f_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=x|N=n)\,P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$= \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

AJUSTAMOS EL INICIO DE LA SUMATORIA PUES $\binom{n}{x}=0 \ \forall n<x$

$$= \sum_{n=x}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \frac{\lambda^{n-x+x} e^{-\lambda}}{\cancel{n!}}$$

$$= \frac{p^x \lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-x} \lambda^{n-x}}{(n-x)!}$$

$$= \frac{(p\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^n}{n!}$$

AJUSTAMOS OTRA VEZ EL INICIO DE LA SUMATORIA

$$= \frac{(p\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!} e^{(1-p)\lambda}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$= \frac{(p\lambda)^x e^{-p\lambda}}{x!}$$

$\Rightarrow X \sim P(p\lambda)$ POISSON DE PARÁMETRO $p\lambda$

NOTA

EJERCICIO 4

$U \sim$ UNIFORME$[0,1]$ $\quad X = \dfrac{-\ln(1-U)}{\lambda}$ $\quad$ ASUMO QUE $\log = \ln$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{-\ln(1-U)}{\lambda} \leq x\right) = P(\ln(1-U) \geq -x\lambda)$$

$$= P(1-U \geq e^{-\lambda x}) = P(U \leq 1-e^{-\lambda x}) = F_U(1-e^{-\lambda x})$$

$R_U = [0,1]$ $\quad$ BUSQUEMOS R_X:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{U\to 0} X &= \lim_{U \to 0} \frac{-\ln(1-U)}{\lambda} = 0 \\ \lim_{U\to 1} X &= \lim_{U \to 1} \frac{-\ln(1-U)}{\lambda} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_X = [0,+\infty)$$

VEAMOS QUÉ SUCEDE CON $1-e^{-\lambda x}$ EN LOS EXTREMOS DE R_X

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0} 1-e^{-\lambda x} &= 0 \\ \lim_{x\to +\infty} 1-e^{-\lambda x} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 0 \leq 1-e^{-\lambda x} \leq 1 \quad \forall x \in R_X$$

COMO U ES UNIFORME ESTÁNDAR: $F_U(u) = u \ \ \forall\, 0 \leq u \leq 1$. ENTONCES:

$$F_X(x) = F_U(1-e^{-\lambda x}) = 1-e^{-\lambda x} \; I_{[0,+\infty)}(x)$$

$\Rightarrow X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\quad$ PUES SU ACUMULADA ES LA DE UNA EXPONENCIAL DE PARÁMETRO λ

NOTA

EJERCICIO 6

$$f_{XY}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \, I_{\{0<x<y\}}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y}\,dx = \left[x\lambda^2 e^{-\lambda y}\right]_0^y = y\lambda^2 e^{-\lambda y} \, I_{\{y>0\}}$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y} \, I_{\{0<x<y\}}}{y\lambda^2 e^{-\lambda y} \, I_{\{0<y\}}} = \frac{1}{y} I_{\{0<y\}}$$

COMO Y ESTÁ FIJO EN $X|Y=y$ $\Rightarrow$ $X|Y=y \sim$ UNIFORME$[0,y]$

EJERCICIO 7

$U_n \sim \text{UNIFORME}\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\} \quad n \in \mathbb{N}$

$R_{U_n} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\} \quad \Rightarrow \quad \# R_{U_n} = n$

$p_{U_n}(u) = \frac{1}{n}$ POR SER U_n UNIFORME DISCRETA

OBSERVEMOS QUE PODEMOS ENUMERAR TODOS LOS ELEMENTOS DE R_{U_n} ASÍ:

SEA $K \in \mathbb{N}$, $1 \leq K \leq n \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{n} \in R_{U_n}$

CUANDO $n \to \infty$:

$\min(R_{U_n}) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \qquad \max(R_{U_n}) = 1 \ \forall n$

ENTONCES CUANDO $n \to \infty$, $R_{U_n} \in [0,1]$

SEA $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{n} \leq x \iff K \leq xn$

COMO $K \in \mathbb{N}$, $K \leq xn \iff K \leq [xn]$ DONDE $[xn]$ ES LA FUNCIÓN PISO

BUSCAMOS LA ACUMULADA DE R_{U_n} CUANDO $n \to \infty$

$$F(x) = \sum_{K=1}^{[xn]} p_{U_n}(K) = \sum_{K=1}^{[xn]} \frac{1}{n} = ([xn]-1+1)\frac{1}{n} = \frac{[xn]}{n}$$

$$F(x) = \frac{[xn]}{n} \cdot \frac{xn}{xn} = \frac{[xn]}{xn} \cdot \frac{xn}{n} \xrightarrow{n \to \infty} x \quad \forall\, 0 \leq x \leq 1$$

PUES $xn \leq [xn] \leq xn+1 \iff \frac{xn}{xn} \leq \frac{[xn]}{xn} \leq \frac{xn}{xn} + \frac{1}{xn} \xrightarrow{n \to \infty} 1 \leq \frac{[xn]}{xn} \leq 1$

POR LO TANTO, CUANDO $n \to \infty \Rightarrow U_n \xrightarrow{d} \text{UNIFORME}[0,1]$

NOTA

EJERCICIO 8

SEA X UNA V.A. CON $E(x) = \mu$ Y $V(x) = \sigma^2 < \infty$.

SEA $X_1, \cdots, X_n$ UNA MUESTRA ALEATORIA DE LA DISTRIBUCIÓN DE X.

SEA $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ EL PROMEDIO MUESTRAL.

ENTONCES, POR LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS (LGN):

$\overline{X} \xrightarrow{P} \mu$ ES DECIR $\overline{X}$ CONVERGE EN PROBABILIDAD A μ.

DEMO:

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x_i) \underset{\substack{\downarrow \\ x_i \text{ I.I.D.}}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x) = \frac{1}{n} n E(x) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(x_i) \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(x) = \frac{1}{n^2} n V(x) = \frac{\sigma^2}{n}$$

POR TCHEBYSHEV:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|\bar{x} - E(\bar{x})| > \varepsilon) \leqslant \frac{V(\bar{x})}{\varepsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad P(|\bar{x} - \mu| > \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2}$$

($\bar{x}$ CONVERGE EN PROBABILIDAD A μ SI:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to \infty} P(|\bar{x} - \mu| > \varepsilon) = 0$$

ENTONCES:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to \infty} P(|\bar{x} - \mu| > \varepsilon) \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2} = 0$$

COMO NUESTRA MEDIDA DE PROBA ES $\geqslant 0$, CUANDO $n \to \infty$ RESULTA:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leqslant P(|\bar{x} - \mu| > \varepsilon) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(|\bar{x} - \mu| > \varepsilon) = 0 \quad \square$$

EJERCICIO 9

$$f(x) = \begin{cases} a x^{-(a+1)} & \text{SI } X \geq 1 \\ 0 & \text{CASO CONTRARIO} \end{cases} \quad \text{CON } a > 1$$

$$L(a) = f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} a x_i^{-(a+1)} I_{\{x_i \geq 1\}} = \prod_{i=1}^{n} a x_i^{-(a+1)} \prod_{i=1}^{n} I_{\{x_i \geq 1\}}$$

OBSERVEMOS QUE $\prod_{i=1}^{n} I_{\{x_i \geq 1\}} = 1 \iff x_i \geq 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n$

ASUMIMOS ESTA CONDICIÓN Y AVANZAMOS SIN LA INDICADORA.

$$\ln(L(a)) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a x_i^{-(a+1)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a x_i^{-(a+1)}) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i^{-(a+1)})$$

$$= n \ln(a) - (a+1) \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

DERIVAMOS PARA BUSCAR EL MÁXIMO

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln(L(a)) = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = \frac{n}{a} - n \overline{\ln(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln(L(a)) = 0 \iff \frac{n}{a} = n \overline{\ln(x)} \iff a = \left(\overline{\ln(x)}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln(L(a)) = -\frac{n}{a^2} < 0 \quad \text{PUES } n \in \mathbb{N} > 0 \text{ Y } a^2 > 1$$

EN EFECTO EL PUNTO CRÍTICO ENCONTRADO ES EL MÁXIMO ABSOLUTO Y

ASÍ EL ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSIMILITUD RESULTA:

$$\hat{a} = \left(\overline{\ln(x)}\right)^{-1}$$

NOTA

VEAMOS LA CONSISTENCIA DE $\hat{a}$.

SEA $Y = \ln(x)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln(x) \leq y) = P(X \leq e^y) = F_X(e^y)$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = f_X(e^y)\, e^y = a(e^y)^{-(a+1)} e^y = a e^{-ay} \, I_{\{e^y \geq 1\}}$$

$$= a e^{-ay} \, I_{\{y \geq 0\}} \implies Y \sim \mathcal{E}(a)$$

$$E(Y) = \frac{1}{a} \qquad V(Y) = \frac{1}{a^2}$$

UN ESTIMADOR ES CONSISTENTE SI CONVERGE EN PROBA AL PARÁMETRO QUE ESTIMA. ES DECIR:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|\hat{a} - a| > \varepsilon) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\hat{a} = \left(\overline{\ln(x)}\right)^{-1} = (\bar{Y})^{-1} \xrightarrow[n \to \infty]{LGN} (E(Y))^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$$

POR LO TANTO:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|\hat{a} - a| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} P(|a - a| > \varepsilon) = P(0 > \varepsilon) = 0$$

$\implies$ $\hat{a}$ ES CONSISTENTE

NOTA

EJERCICIO 10

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ CON σ^2 CONOCIDO

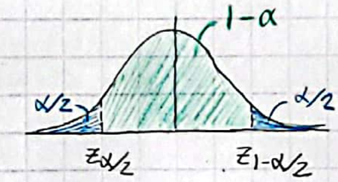
$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \iff \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

SEA $z_{\alpha/2}$ / $P(Z \leq z_{\alpha/2}) = \alpha/2$

$$P\left(z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\iff P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} - \bar{X} \leq -\mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} - \bar{X}\right) = 1-\alpha$$

$$\iff P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$



EL INTERVALO RESULTA:

$$\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\ ,\ \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right]$$

SI NO SE CONOCE LA VARIANZA, PODEMOS USAR ESTA OTRA FUNCIÓN PIVOTE:

$$T(x_1, \cdots, x_n; \mu) = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1}$$

LA DISTRIBUCIÓN t-STUDENT CON $n-1$ GRADOS DE LIBERTAD (t_{n-1}) TAMBIÉN TIENE FORMA DE CAMPANA PERO CON COLAS MÁS PESADAS. CUANDO $n \to \infty$ APROXIMA UNA NORMAL ESTÁNDAR.

$$P\left(t_{n-1,\alpha/2} \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{S} \leq t_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\iff P\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

EL INTERVALO RESULTA:

$$\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}\ ,\ \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2}\right]$$

USO LA MISMA INTERPRETACIÓN DE LOS CUANTILES: $t_{n-1,\alpha/2}$ / $P(t_{n-1} \leq t_{n-1,\alpha/2}) = \alpha/2$

NOTA

EJERCICIO 11

$n = 25$

$\bar{X} = 249\ °C$

$S = 2.8\ °C$

$\alpha = 0.05$

$H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$

$\mu_0 = 250\ °C$

$T = \sqrt{n}\,\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sim t_{n-1}$ BAJO $H_0 : \mu = \mu_0$

$t_{n-1,\alpha}$ / $P(t_{n-1} \leqslant t_{n-1,\alpha}) = \alpha$ $\Rightarrow$ $t_{n-1,\alpha} =$ qt (0.05, df=24) ≈ -1.7109

$T_{OBS} = \sqrt{25}\,\dfrac{249-250}{2.8} \approx -1.7857$

REGIÓN DE RECHAZO: $T_{OBS} \leqslant t_{n-1,\alpha}$ $\Leftrightarrow$ $-1.7857 \leqslant -1.7109$

$\Rightarrow$ RECHAZAMOS H_0: PODEMOS AFIRMAR A NIVEL 0.05 QUE LA TEMPERATURA MEDIA EN ESE SECTOR DEL REACTOR ES MENOR QUE 250°C.

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

$\sigma_0^2 = (2°C)^2$

$T = \dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ BAJO $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

$\chi^2_{n-1,\alpha}$ / $P(\chi^2_{n-1} \geqslant \chi^2_{n-1,\alpha}) = \alpha$ $\Rightarrow$ $\chi^2_{n-1,\alpha} =$ qchisq (0.05, df=24, lower.tail = FALSE) ≈ 36.415

$T_{OBS} = \dfrac{(25-1)\,2.8^2}{2^2} = 47.04$

REGIÓN DE RECHAZO: $T_{OBS} \geqslant \chi^2_{n-1,\alpha}$ $\Leftrightarrow$ $47.04 \geqslant 36.415$

$\Rightarrow$ RECHAZAMOS H_0: PODEMOS AFIRMAR A NIVEL 0.05 QUE LA VARIANZA DE LA TEMPERATURA EN ESE SECTOR DEL REACTOR ES MAYOR QUE $(2°C)^2$.

NOTA