Teoría de Lenguajes

Clase Teórica 2

Autómatas Finitos

Primer cuatrimestre 2024

Bibliografía

Capítulo 2, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

En esta clase

- Definición de autómata finito no determinístico con transiciones λ (AFND-λ)
- Teorema: Para todo AFND-λ hay un AFND que reconoce el mismo lenguaje.

Definición (Autómata Finito No Determinístico con transiciones λ)

Un AFND-λ es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ donde
Q *es conjunto de estados*
Σ *es el alfabeto de entrada*
q_0 *es estado inicial*
F *es conjunto de estados finales*
$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$.

Demostraremos que para todo AFND-λ hay un AFND que reconoce el mismo lenguaje. Vamos a necesitar herramientas.

Relaciones

Dados los conjuntos A y B, se llama relación de A en B a cualquier subconjunto de $A \times B$.

Una relación $R \subseteq A \times A$ es reflexiva cuando

$$\forall a \in A, (a, a) \in R.$$

Ejemplo: "$\leq$"sobre $\mathbb{N}$.

Una relación $R \subseteq A \times A$ es simétrica cuando

$$\forall a, b \in A, \Big(\text{Si } (a, b) \in R \text{ entonces } (b, a) \in R\Big).$$

Ejemplo: "$\neq$"sobre $\mathbb{N}$.

Una relación $R \subseteq A \times A$ es transitiva cuando

$$\forall a, b, c \in A, \Big(\text{Si } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \text{ entonces } (a, c) \in R\Big).$$

Ejemplo: "a paralela a b", en el conjunto de rectas del plano.

Una relación es de equivalencia, cuando es reflexiva, simétrica y transitiva.

Composición de relaciones

Sean A, B y C tres conjuntos, y sean R y G dos relaciones tales que $R \subseteq A \times B$ y $G \subseteq B \times C$.

La relación de composición: $G \circ R \subseteq A \times C$ se define como

$$G \circ R = \left\{(a, c), a \in A, c \in C : \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bGc\right\}.$$

Una relación R definida sobre A es de identidad (id_A) si se cumple que

$$\forall a, b \in A,\ a\, id_A\, b \text{ si y solo si } a = b.$$

La relación de identidad es el elemento neutro de la composición. Dada una relación $R \subseteq A \times B$ es cierto que

$$id_B \circ R = id_A = R$$

Relación potencia

Dada una relación $R \subseteq A \times A$, y dado n se define la potencia $R^n \subseteq A \times A$ como

$$R^n = \begin{cases} id_A & \text{si } n = 0 \\ R \circ R^{n-1} & \text{si no} \end{cases}$$

con $R = R^1$.

Notar que R^n es un conjunto de pares, cualquiera sea el valor de n.

Clausura transitiva

Dada una relación $R \subseteq A \times A$ se define clausura transitiva R^+,

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k.$$

Proposición

1. $R \subseteq R^+$
2. R^+ *es transitiva*
3. *Si* $S \subseteq A \times A$, $R \subseteq S$ *y* S *es transitiva entonces* $R^+ \subseteq S$.

Entonces, R^+ es la relación transitiva más pequeña que contiene a R.

Demostración de la proposición

Queremos ver que si aR^+b y bR^+c enonces aR^+c.

Si aR^+b, entonces existe una secuencia de elementos $d_1, \ldots, d_n$ tal que $d_1Rd_2, \ldots, d_{n-1}Rd_n$, donde $d_1 = a$ y $d_n = b$. Por lo tanto, aR^nb. Análogamente, como bR^+c entonces existe una secuencia de elementos $e_1, \ldots, e_m$ tal que $e_1Re_2, \ldots, e_{m-1}Re_m$, donde $e_1 = b$ y $e_m = c$. Por lo tanto bR^mc. Concluimos que $aR^{n+m}c$ y esto implica aR^+c.

Ahora demostremos que si $R \subseteq S$ y S es transitiva entonces $R^+ \subseteq S$. Supongamos aR^+b. Entonces, existe una secuencia de elementos $c_1, \ldots, c_n$ tal que $c_1Rc_2, \ldots, c_{n-1}Rc_n$, donde $c_1 = a$ y $c_n = b$. Como $R \subseteq S$ tenemos que $c_1Sc_2, \ldots, c_{n-1}Sc_n$, y como S es transitiva entonces, la aplicación repetida de la transitividad nos lleva a que c_1Sc_n, o sea aSb.
$\square$

Clausura transitiva reflexiva: R^*

$$R^* = R^+ \cup id = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i.$$

La clausura λ de un estado q, $Cl_\lambda(q)$, es el conjunto de estados alcanzable desde q, siguiendo sólo transiciones λ.
Usamos la noción de clausura transitivo-reflexiva para definir Cl_λ.

Definición (clausura λ de un estado)

Dado un AFND-λ $(Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$, sea $R \subseteq Q \times Q$ tal que $(q, p) \in R$ si y solo si $p \in \delta(q, \lambda)$. Definimos $Cl_\lambda : Q \to \mathcal{P}(Q)$,

$$Cl_\lambda(q) = \{p : (q, p) \in R^*\}$$

Notar que $q \in Cl_\lambda(q)$.

Definición (clausura λ de un conjunto de estados P)

$$Cl_\lambda(P) = \bigcup_{q \in P} Cl_\lambda(q).$$

Extendemos la definición de δ a conjuntos de estados,
$\delta : \mathcal{P}(Q) \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$,

$$\delta(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)$$

Definición (función transición-sin-λ $\widehat{\delta}$)

Dado un AFND-λ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ con $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$ definimos la función de transición -sin-λ $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

$$\widehat{\delta}(q, a) = Cl_\lambda\Big(\delta\big(Cl_\lambda(q), a\big)\Big)$$

Extendemos $\widehat{\delta}$ a conjuntos de estados, $\widehat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$,

$$\widehat{\delta}(P, a) = \bigcup_{q \in P} \widehat{\delta}(q, a)$$

Extendemos $\widehat{\delta}$ a palabras $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$,

$$\widehat{\delta}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q)$$

$$\widehat{\delta}(q, xa) = Cl_\lambda\Big(\delta\big(\widehat{\delta}(q, x), a\big)\Big)$$

Notar que $\widehat{\delta}(q, a)$ puede ser distinto de $\delta(q, a)$.

Atención!!
Aqui se usa $\widehat{\delta}$ para definir aceptación en AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$.

Definición (cadena aceptada por un AFND-λ)

Una cadena $x \in \Sigma^*$ es aceptada por AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ si $\widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \phi$.

Definición (lenguaje aceptado por un AFND-λ)

Sea AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$. El lenguaje aceptado por M, $\mathcal{L}(M)$, es el conjunto de cadenas aceptadas por M,

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ x : \widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \phi \right\}.$$

Teorema (equivalencia entre AFND y AFND-λ)

Dado un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ hay un AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.

Demostración del teorema

Sea AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\lambda\} \to \mathcal{P}(Q)$. Usaremos las versiones extendidas de δ en ambos argumentos, conjuntos de estados, y palabras de Σ^*.

Sea $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ la función de transición-sinλ. Usaremos también las versiones extendidas en $\widehat{\delta}$ en ambos argumentos, conjuntos de estados, y palabras de Σ^*.

Definimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$, donde $\delta' : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$,

$$\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a), \text{ para cada } a \in \Sigma \text{ y } q \in Q$$

Definimos δ' para conjuntos y para cadenas de la manera estandard, $\delta' : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ y $\delta' : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$.

$$F' = \begin{cases} F & \text{, si } Cl_\lambda(q_0) \cap F = \emptyset \\ F \cup \{q_0\} & \text{, si no.} \end{cases}$$

Observar que $F' \supseteq F$.

Debemos ver para toda $x \in \Sigma^*$, $x \in \mathcal{L}(M)$ si y solo si $x \in \mathcal{L}(M')$.

Caso $x = \lambda$.

Supongamos $\lambda \in \mathcal{L}(M)$. Entonces, $\widehat{\delta}(q_0, \lambda) \cap F \neq \emptyset$.
Como $\widehat{\delta}(q_0, \lambda) = Cl_\lambda(q_0)$ tenemos $Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset$. Luego $F' = F \cup \{q_0\}$ y por lo tanto $q_0 \in F'$, entonces $\lambda \in \mathcal{L}(M')$.

Supongamos $\lambda \in \mathcal{L}(M')$. Entonces, $\delta'(q_0, \lambda) \cap F' \neq \emptyset$.
Por definición de δ' tenemos $\delta'(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.
Luego $q_0 \in F'$ y necesariamente $Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset$,
(asumir $Cl_\lambda(q_0) \cap F = \emptyset$ implica $F = F'$ y $q_0 \notin F'$, lo que contradice $q_0 \in F'$).
Dado que $\widehat{\delta}(q_0, \lambda) = Cl_\lambda(q_0)$, tenemos $\widehat{\delta}(q_0, \lambda) \cap F \neq \emptyset$, y por la definición de palabra aceptada en AFND-λ, $\lambda \in \mathcal{L}(M)$.

Caso $|x| \geq 1$. Debemos ver que $x \in \mathcal{L}(M)$ si y solo si $x \in \mathcal{L}(M')$.
Demostremos que $\delta'(q_0, x) = \widehat{\delta}(q_0, x)$, para todo $x \in \Sigma^+$.
Lo hacemos por inducción en la longitud de la cadena.

Caso base $|x| = 1$. Sea $x = a$. Por definición de M', $\delta'(q, a) = \widehat{\delta}(q, a)$.

Caso inductivo $|x| > 1$. Sea $x = wa$ y asumamos que vale para w.

$$\delta'(q_0, wa) = \delta'(\underbrace{\delta'(q_0, w)}, a) = \delta'(\underbrace{\widehat{\delta}(q_0, w)}, a),$$

las expresiones tomadas por las llaves son iguales por h.i.

y para cualquier $P \subseteq Q$

$$\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta'(q, a) = \bigcup_{q \in P} \widehat{\delta}(P, a) = \widehat{\delta}(P, a)$$

haciendo $P = \widehat{\delta}(q_0, w)$, tenemos que

$$\delta'(q_0, wa) = \delta'(\widehat{\delta}(q_0, w), a) = \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(q_0, w), a) = \widehat{\delta}(q_0, wa).$$

Seguimos con el caso $|x| \geq 1$.

Supongamos $x \in \mathcal{L}(M)$. Entonces, $\widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing$,
Por lo tanto, $\delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing$, ya que $F \subseteq F'$
Concluimos $x \in \mathcal{L}(M')$.

Supongamos $x \in \mathcal{L}(M')$. Entonces, $\delta'(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing$.
Dado que $F' = F$ ó $F' = F \cup \{q_0\}$,

$$\left(\widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing\right) \text{ ó } \underbrace{\left(\widehat{\delta}(q_0, x) \cap \{q_0\} \neq \varnothing \wedge Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing\right)}_{\text{por def. de } F'}$$

implica
$x \in \mathcal{L}(M)$ ó $x \in \mathcal{L}(M)$
luego
$x \in \mathcal{L}(M)$.

$\square$

Ejercicios

1. Demostrar que ara cada AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ existe otro AFND -λ $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$ y F' tiene un único estado final.

2. Indicar Verdadero o Falso y justificar
   Sea Σ un alfabeto con al menos dos símbolos, y sea a un símbolo de Σ.
   Sea AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$. Considerar el AFND-$\lambda$ $M' = \langle Q, \Sigma \setminus \{a\}, \delta', q_0, F \rangle$ que se obtiene de reemplazar todas las transiciones con el símbolo a por transiciones λ. Es decir,
   - para todo $q \in Q$, para todo $x \in \Sigma$ tal que $x \neq a$, $\delta'(q, x) = \delta(q, x)$,
   - para todo $q \in Q$, $\delta'(q, \lambda) = \delta(q, a)$,

   ¿Cual es el lenguaje aceptado por M'?

3. ¿Se puede acotar superiormente cuantas transiciones requiere la aceptación de una palabra en un AFND-λ?