a. $(R^*|R) = R^*$

$$L(R^*|R) = L(R^*) \cup L(R)$$
$$= L(R)^* \cup L(R) = L(R)^* = L(R^*)$$

PROP: $L(R) \subset L(R)^* \overset{DEF}{=} \bigcup_{i=0}^{\infty} L(R)^i$ en particular

$L(R) = L(R)^i$ para $i=1$

b. $R.R^* = R^*.R$

$$\left.\begin{array}{l} L(R.R^*) = L(R).L(R^*) = L(R).L(R)^* = L(R)^+ \\ L(R^*.R) = L(R^*).L(R) = L(R)^*.L(R) = L(R)^+ \end{array}\right\} =$$

PROP: $L^*.L = L.L^* = L^+$

c. $R.R^*.R = R.R.R^*$

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = L(RR^*R) = L(R)L(R)^*L(R) \underset{\uparrow}{=} L(R)^+L(R) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{PROP} \\ L_2 = L(RRR^*) = L(R)L(R)L(R)^* \overset{\downarrow}{=} L(R)L(R)^+ \end{array}\right\} \text{QVQ } L_1 = L_2$$

QVQ: $L_1 \subseteq L_2$

$\alpha \in L_1 \Rightarrow \alpha = L(R)^K L(R)$ para algún $K \geq 1$

$\Rightarrow \alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_K)\alpha_{K+1}$ con $\alpha_i \in L(R)$ para $1 \leq i \leq K+1$

$\Rightarrow \alpha = \alpha_1 \underbrace{(\alpha_2 \cdots \alpha_{K+1})}_{\text{hay } K \text{ cadenas } \in L(R)}$

$\Rightarrow \alpha = L(R)\, L(R)^K \underset{\substack{\uparrow \\ K \geq 1}}{\subseteq} L(R)\, L(R)^+ = L_2$

$\therefore\ \alpha \in L_1 \Rightarrow \alpha \in L_2$

QVQ: $L_2 \subseteq L_1$

$\alpha \in L_2 \Rightarrow \alpha = L(R)L(R)^K$ para algún $K \geq 1$

$\Rightarrow \alpha = \alpha_0(\alpha_1 \cdots \alpha_K)$ con $\alpha_i \in L(R)$ para $0 \leq i \leq K$

$\Rightarrow \alpha = \underbrace{(\alpha_0 \cdots \alpha_{K-1})}_{\text{hay } K \text{ cadenas } \in L(R)} \alpha_K$

$\Rightarrow \alpha = L(R)^K L(R) \underset{\substack{\uparrow \\ K \geq 1}}{\subseteq} L(R)^+ L(R) = L_1$

$\therefore\ \alpha \in L_2 \Rightarrow \alpha \in L_1$

Luego, $L_1 = L_2$

d. $(R^*)^* = R^*$

$$L((R^*)^*) = L(R^*)^* = (L(R)^*)^* = L(R)^* = L(R^*)$$

$\downarrow$

PROP: $(L^*)^* = L^*$

e. $R.(S.R)^* = (R.S)^*.R$

$$L(R(SR)^*) = L(R)\,L((SR)^*) = L(R)\,L(SR)^* = L(R)\,(L(S)L(R))^* = L_1$$

$$L((RS)^*R) = L((RS)^*)\,L(R) = L(RS)^*L(R) = (L(R)L(S))^*\,L(R) = L_2$$

La idea es que en ambos lenguajes siempre hay al menos una cadena de $L(R)$, en L_1 es un prefijo y en L_2 es un sufijo. La parte que se repite es una cadena que alterna cadenas de $L(S)L(R)$ en L_1, y de $L(R)L(S)$ en L_2. Partiendo de una cadena de L_1 vamos a poder reagrupar las subcadenas para que se repitan alternando $L(R)L(S)$, con una última cadena $L(R)$ que va a quedar suelta. Esto es L_2! De forma análoga $L_2 \subseteq L_1$ y así $L_1 = L_2$.

Caso $L_1 \subseteq L_2$

$\alpha \in L_1 \Rightarrow \alpha = L(R)(L(S)L(R))^K$ para algún $K \geqslant 0$

Si $K=0 \Rightarrow \alpha = L(R) = (L(R)L(S))^0 L(R) \in L_2$

Supongamos $K > 0$

$\alpha = \alpha_1 (\underbrace{\alpha_2\ \alpha_3 \cdots \alpha_{2i}\ \alpha_{2i+1}}_{\text{hay } 2K \text{ subcadenas}})$ para $1 \leqslant i \leqslant K$

con $\begin{cases} \alpha_j \in L(R) & \text{si } j \text{ es impar} \\ \alpha_j \in L(S) & \text{si } j \text{ es par} \end{cases}$

para $1 \leqslant j \leqslant 2K+1$

Reagrupamos las subcadenas de α

$\alpha = (\underbrace{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \cdots \alpha_{2i}}_{\text{hay } 2K \text{ subcadenas}})\alpha_{2i+1} = (L(R)L(S))^K L(R) \in L_2$

Entonces para cualquier $K \geqslant 0$, $\alpha = L(R)(L(S)L(R))^K \in L_2$

$\Rightarrow L_1 \subseteq L_2$

se dan vuelta

El caso $L_2 \subseteq L_1$ es análogo pero con $\begin{cases} \alpha_j \in L(R) & \text{si } j \text{ es par} \\ \alpha_j \in L(S) & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases}$

para $1 \leqslant j \leqslant 2K+1$

Luego si $L_1 \subseteq L_2$ y $L_2 \subseteq L_1 \Rightarrow L_1 = L_2$