Lenguajes

Teoría de Lenguajes

Departamento de Computación
FCEyN, UBA

18 de marzo de 2024

Definiciones básicas

Un **alfabeto** es un conjunto finito de símbolos.

- Los nombramos con letras griegas **mayúsculas**.
- Ejemplos:
  - $\Sigma = \{t, l, e, n, g\}$
  - $\Gamma = \{0, 1\}$
  - $\Pi = \{\square, \triangle, \bigcirc\}$

Cadenas

Una **cadena** es una secuencia finita de símbolos de un alfabeto.

- También llamadas **secuencias** o ***strings***.
- Los nombramos con letras griegas **minúsculas**.
- Ejemplos sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$:
  - $\alpha = ab$
  - $\beta = babcca$
  - $\sigma = c$
  - $\lambda =$ (cadena vacía)

La cadena vacía

- Usamos la notación λ para denotar una cadena que no contiene símbolos.
- En la bibliografía es común encontrarla como ε.
- λ **no es** un símbolo del alfabeto. Es un *meta-símbolo* que usamos para referirnos a una cadena (una secuencia de símbolos) en particular.

Potencia de un alfabeto

- Dado un alfabeto Σ, podemos pensar que una cadena sobre Σ de longitud n es una **tupla** de n elementos de Σ.
- Por ejemplo, si $\Sigma = \{a, b\}$,

$$aba = (a, b, a) \quad \in \quad \Sigma \times \Sigma \times \Sigma = \Sigma^3$$

Usamos la notación Σ^n para denotar el conjunto de todas las cadenas de longitud n sobre Σ, la n-ésima **potencia** de Σ.

Clausura de Kleene y clausura positiva

La **clausura de Kleene** de un alfabeto Σ es el conjunto Σ^* de todas las cadenas sobre Σ.

Formalmente, $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$.

La **clausura positiva** de un alfabeto Σ es el conjunto Σ^+ de todas las cadenas *no vacías* sobre Σ.

Formalmente, $\Sigma^+ = \bigcup_{i \geq 1} \Sigma^i$.

Ejercicio 1

Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Determinar verdadero o falso:

a. $a \in \Sigma$ (Verdadero)

b. $\lambda \in \Sigma$ (Falso)

c. $\lambda \subseteq \Sigma$ (Falso)

d. $\lambda \in \Sigma^0$ (Verdadero)

f. $\{ac, bb\} \subseteq \Sigma^2$ (Verd.)

g. $\lambda \in \Sigma^*$ (Verdadero)

h. $\lambda \in \Sigma^+$ (Falso)

i. $|\Sigma^n| = 3^n, n \geq 0$ (V.)

Concatenación de cadenas

- La operación básica para operar con cadenas es la concatenación.

Dadas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, su **concatenación** es una cadena

$$\alpha.\beta \in \Sigma^*$$

que contiene los símbolos de α seguidos por los símbolos de β.

- Si el contexto es claro podemos omitir el punto y escribir $\alpha\beta$.

Propiedades de la concatenación

- ¿Es asociativa? **Sí**: $\alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma$.
- ¿Es conmutativa? **No**: $\alpha.\beta \neq \beta.\alpha$.
- ¿Tiene elemento neutro? **Sí**, λ: $\alpha.\lambda = \alpha = \lambda.\alpha$.

Estructura recursiva de las cadenas

- Si fijamos un alfabeto Σ, todas las cadenas de Σ^* corresponden a uno de estos dos casos:
  1. λ, la cadena vacía.
  2. $x.\alpha$, donde $x \in \Sigma$ y $\alpha \in \Sigma^*$.
- Esto es útil para:
  - Definir funciones de manera recursiva.
  - Demostrar propiedades usando **recursión estructural**.

Longitud de una cadena

La **longitud** de una cadena, $|\bullet| : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$, es la cantidad de símbolos que contiene.

¿Cómo podemos definir la longitud de manera recursiva?

$$|\lambda| = 0$$

$$|x.\alpha| = 1 + |\alpha|$$

Cantidad de apariciones

Dado $x \in \Sigma$, la **cantidad de apariciones** de x en una cadena, $|\bullet|_x : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, es la cantidad de veces que x aparece en la cadena.

Definición recursiva:

$$|\lambda|_x = 0$$

$$|y.\alpha|_x = \begin{cases} 1 + |\alpha|_x & \text{si } y = x \\ |\alpha|_x & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

Ejercicio 2

Sea Σ un alfabeto y $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Demostrar que

$$|\alpha.\beta| = |\alpha| + |\beta|$$

Solución ej. 2

Demostramos por casos, haciendo inducción estructural sobre α:

1. Si $\alpha = \lambda$:

$$|\lambda.\beta| = |\beta| = 0 + |\beta| = |\lambda| + |\beta|$$

2. Si $\alpha = x.\alpha'$, suponemos que vale para α', y:

$$\begin{aligned}
|(x.\alpha').\beta| &= |x.(\alpha'.\beta)| && \text{(def. } \alpha\text{)} \\
&= 1 + |\alpha'.\beta| && \text{(def. } |\bullet|\text{)} \\
&= 1 + |\alpha'| + |\beta| && \text{(hip. ind.)} \\
&= |x.\alpha'| + |\beta| && \text{(def. } |\bullet|\text{)} \\
&= |\alpha| + |\beta|
\end{aligned}$$

Potencia de cadenas

Dados $\alpha \in \Sigma^*$ y $n \in \mathbb{N}$, la n-ésima **potencia** de α es una cadena

$$\alpha^n \in \Sigma^*$$

que contiene a α repetida n veces.

¿Podemos definir la potencia de manera recursiva?

Sí, pero la recursión no es sobre α, sino sobre n:

$$\alpha^0 = \lambda$$

$$\alpha^{n+1} = \alpha.\alpha^n$$

Ejercicio 3

Sea Σ un alfabeto y $\alpha \in \Sigma^*$. Demostrar que

$$|\alpha^n| = n \cdot |\alpha|$$

Solución ej. 3

Demostramos por inducción en n:

1. Si $n = 0$:

$$\left|\alpha^0\right| = |\lambda| = 0 = 0 \cdot |\alpha|$$

2. Si $n = m + 1$, suponemos que vale para m y:

$$\begin{aligned}
|\alpha^n| = \left|\alpha^{m+1}\right| &= |\alpha.\alpha^m| && \text{(def. } \alpha^n\text{)} \\
&= |\alpha| + |\alpha^m| && \text{(ej. anterior)} \\
&= |\alpha| + m \cdot |\alpha| && \text{(hip. ind.)} \\
&= (1 + m) \cdot |\alpha| \\
&= n \cdot |\alpha|
\end{aligned}$$

Reversa

La **reversa** de una cadena, $\bullet^{\mathrm{r}} : \Sigma^* \to \Sigma^*$, es una cadena que contiene los mismos símbolos que α, pero en orden inverso.

Definición recursiva:

$$\lambda^{\mathrm{r}} = \lambda$$

$$(x.\alpha)^{\mathrm{r}} = \alpha^{\mathrm{r}}.x$$

Intuitivamente, ¿qué propiedades sobre la reversa será posible demostrar esta definición?

Lenguajes

Dado un alfabeto Σ, un **lenguaje** sobre Σ es un conjunto de cadenas sobre Σ.

- En otras palabras, un lenguaje es cualquier subconjunto de Σ^*.
- Los nombramos con letras latinas mayúsculas, salvo casos especiales. En general: $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots$.

Ejemplos de lenguajes

- Ejemplos sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$:
  - $\mathcal{L}_1 = \{a, aa, aba, bc\}$
  - $\mathcal{L}_2 = \Sigma^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$
  - $\mathcal{L}_3 = \bigcup_{i\geq 0}^{2} \Sigma^i = \{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$
  - $\mathcal{L}_4 = \Sigma^* = \{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \ldots\}$
  - $\mathcal{L}_5 = \Sigma^0 = \{\lambda\} = \Lambda$
  - $\mathcal{L}_6 = \varnothing$
  - $\mathcal{L}_7 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha| \text{ es par}\}$
  - $\mathcal{L}_8 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha^{\mathrm{r}} = \alpha\}$

Hechas las presentaciones...

- Los **lenguajes** serán los protagonistas de la materia (qué sorpresa).
- Veremos diferentes formalismos para describirlos.
- Durante gran parte de la materia vamos a estudiar el problema de la **pertenencia** de una cadena a un lenguaje.
- Hacia el final, vamos a concentrarnos en el **análisis sintáctico** (o *parsing*) de cadenas.

Unión de lenguajes

Dados $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^*$, su **unión** $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ es el conjunto de cadenas que pertenecen a $\mathcal{L}_1$ o a $\mathcal{L}_2$.

$$\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha \in \mathcal{L}_1 \vee \alpha \in \mathcal{L}_2\}$$

- Es la unión de conjuntos habitual.
- La única salvedad es que ambos lenguajes deben estar definidos sobre el mismo alfabeto.
- Su elemento neutro es el lenguaje vacío, $\varnothing$.

Intersección de lenguajes

Dados $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \Sigma^*$, su **intersección** $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ es el conjunto de cadenas que pertenecen a $\mathcal{L}_1$ y a $\mathcal{L}_2$.

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha \in \mathcal{L}_1 \wedge \alpha \in \mathcal{L}_2\}$$

- Valen las mismas aclaraciones que para la unión.
- Su elemento neutro es el lenguaje de todas las cadenas, Σ^*.

Complemento de un lenguaje

Dados $\mathscr{L} \subseteq \Sigma^*$, su **complemento** $\mathscr{L}^{\mathrm{c}}$ es el conjunto de cadenas sobre Σ que no pertenecen a $\mathscr{L}$.

$$\mathscr{L}^{\mathrm{c}} = \Sigma^* \setminus \mathscr{L}$$

- Es muy importante notar que el complemento de un lenguaje está definido **sobre el mismo alfabeto**.

Ejercicio 4

Sea

$$\mathcal{L} = \{a^n \mid n \geq 3\}$$

Calcular:

a. $\mathcal{L}^{\mathrm{c}}$ con $\Sigma = \{a\}$

b. $\mathcal{L}^{\mathrm{c}}$ con $\Sigma = \{a, b\}$

Solución ej. 4

a. $\mathcal{L}^c = \{a^m \mid m < 3\} = \{\lambda, a, aa\}$

b. $\mathcal{L}^c = \{a^m \mid m < 3\} \cup \left\{\alpha \in \{a, b\}^* \;\middle|\; |\alpha|_b \geq 1\right\}$

$= \{\lambda, a, aa, b, ab, ba, bb, aab, aba, abb, \ldots\}$

Concatenación de lenguajes

Dados $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \Sigma^*$, su **concatenación** $\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2$ es el conjunto de cadenas que se obtiene concatenando una cadena de $\mathcal{L}_1$ con una de $\mathcal{L}_2$.

$$\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2 = \{\alpha.\beta \mid \alpha \in \mathcal{L}_1 \wedge \beta \in \mathcal{L}_2\}$$

- Es una especie de “producto cartesiano” de lenguajes.
- Si el contexto lo permite, escribimos $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$.

Propiedades de la concatenación

- Al igual que la concatenación de cadenas, la concatenación de lenguajes:
  - es **asociativa**: $(\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2).\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_1.(\mathcal{L}_2.\mathcal{L}_3)$.
  - no es **conmutativa**: $\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2 \neq \mathcal{L}_2.\mathcal{L}_1$.
- ¿Existe un **elemento neutro** para la concatenación? Es decir, un lenguaje $\mathcal{X}$ tal que para todo $\mathcal{L}$ se cumpla $\mathcal{X}.\mathcal{L} = \mathcal{L} = \mathcal{L}.\mathcal{X}$. **Sí**: es Λ.
- ¿Existe un **elemento absorbente** para la concatenación? Es decir, un lenguaje $\mathcal{X}$ tal que para todo $\mathcal{L}$ se cumpla $\mathcal{X}.\mathcal{L} = \varnothing = \mathcal{L}.\mathcal{X}$. **Sí**: es $\varnothing$.

Potencia de un lenguaje

Así como definimos la concatenación para lenguajes, podemos pensar en las versiones análogas de otras operaciones sobre cadenas.

Dado $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^n$, su n-ésima **potencia** $\mathcal{L}^n$ es el conjunto de cadenas que se pueden obtener concatenando n cadenas de $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}^n = \begin{cases} \Lambda & \text{si } n = 0 \\ \mathcal{L}.\mathcal{L}^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Clausura de Kleene y clausura positiva

Dado $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$, su **clausura de Kleene** $\mathcal{L}^*$ es el conjunto de cadenas que se pueden obtener concatenando cero o más cadenas de $\mathcal{L}$.

Dado $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$, su **clausura positiva** $\mathcal{L}^+$ es el conjunto de cadenas que se pueden obtener concatenando una o más cadenas de $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}^* = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{L}^i \qquad\qquad \mathcal{L}^+ = \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{L}^i$$

Reverso de un lenguaje

Dado $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$, su **reverso** $\mathcal{L}^{\mathrm{r}}$ es el conjunto de las reversas de las cadenas de $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}^{\mathrm{r}} = \{\alpha^{\mathrm{r}} \mid \alpha \in \mathcal{L}\}$$

Ejercicio 5

Sean $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\mathcal{L}_1 = \{a, aa, baba, ab, cab\}$, $\mathcal{L}_2 = \{\lambda, a, b\}$. Calcular:

a. $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$

b. $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$

c. $\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$

d. $\mathcal{L}_1 \varnothing$

e. $\mathcal{L}_1 \Lambda$

f. $(\mathcal{L}_2)^{\mathrm{c}}$

g. $(\mathcal{L}_1)^0$

h. $(\mathcal{L}_2)^2$

i. $(\mathcal{L}_2)^*$

j. $(\mathcal{L}_2)^+$

k. $\mathcal{L}_2 \Sigma^*$

l. $\mathcal{L}_1 \setminus (\mathcal{L}_2)^*$

m. $(\mathcal{L}_1)^{\mathrm{r}}$

Solución ej. 5 (1/2)

a. $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{a, aa, baba, ab, cab, \lambda, b\}$

b. $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{a\}$

c. $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \{a, aa, baba, ab, cab, aaa, babaa, aba, caba, aab, babab, abb, cabb\}$

d. $\mathcal{L}_1\varnothing = \varnothing$

e. $\mathcal{L}_1\Lambda = \mathcal{L}_1$

f. $(\mathcal{L}_2)^{\mathrm{c}} = \{c\} \cup \bigcup_{i\geq 2} \Sigma^i$

g. $(\mathcal{L}_1)^0 = \Lambda$

Solución ej. 5 (2/2)

h. $(\mathcal{L}_2)^2 = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb\}$

i. $(\mathcal{L}_2)^* = \{a, b\}^*$

j. $(\mathcal{L}_2)^+ = \{a, b\}^*$

k. $\mathcal{L}_2\Sigma^* = \Sigma^*$

l. $\mathcal{L}_1 \setminus (\mathcal{L}_2)^* = \{cab\}$

m. $(\mathcal{L}_1)^{\mathrm{r}} = \{a, aa, abab, ba, bac\}$

Ejercicio 6

Sean $\mathscr{L}, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ lenguajes cualesquiera. Determinar verdadero (demostrar) o falso (dar contraejemplo):

a. $\mathscr{L}^+ \subseteq \mathscr{L}^*$ (Verdadero)

b. $\mathscr{L}^+ \subsetneq \mathscr{L}^*$ (Falso)

c. Si $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2$ y $n \geq 0$, $(\mathscr{L}_1)^n \subseteq (\mathscr{L}_2)^n$ (Verdadero)

d. Si $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2$, $(\mathscr{L}_1)^* \subseteq (\mathscr{L}_2)^*$ (Verdadero)

e. $(\mathscr{L}^*)^* = \mathscr{L}^*$ (Verdadero)

f. $(\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2)^* = (\mathscr{L}_1)^* \cup (\mathscr{L}_2)^*$ (Falso)

g. $(\mathscr{L}^2)^* = \mathscr{L}^*$ (Falso)

h. $(\mathscr{L}^*)^{\mathrm{r}} = (\mathscr{L}^{\mathrm{r}})^*$ (Verdadero)

Solución ej. 6 (1/3)

a. **Verdadero**. Por definición,
$\mathcal{L}^* = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{L}^i = \mathcal{L}^0 \cup \bigcup_{i\geq 1} \mathcal{L}^i \supseteq \bigcup_{i\geq 1} \mathcal{L}^i = \mathcal{L}^+$.

b. **Falso** si $\lambda \in \mathcal{L}$. Por ejemplo, $\{\lambda, a\}^+ = \{a\}^* = \{\lambda, a\}^*$.

c. **Verdadero**. Por inducción en n:

- si $n = 0$, $(\mathcal{L}_1)^0 = \Lambda = (\mathcal{L}_2)^0$.
- si $n = m + 1$, sea $\alpha \in (\mathcal{L}_1)^n$; en tal caso $\alpha = \beta\gamma$ con $\beta \in \mathcal{L}_1$ y $\gamma \in (\mathcal{L}_1)^m$. Entonces $\beta \in \mathcal{L}_2$ y, por hipótesis inductiva, $\gamma \in (\mathcal{L}_2)^{n-1}$. Luego $\alpha = \beta\gamma \in \mathcal{L}_2.(\mathcal{L}_2)^m = (\mathcal{L}_2)^{m+1} = (\mathcal{L}_2)^n$.

Solución ej. 6 (2/3)

d. **Verdadero**. Sea $\alpha \in (\mathcal{L}_1)^*$. Entonces $\alpha \in (\mathcal{L}_1)^n$ para algún $n \geq 0$. Por el inciso anterior, $\alpha \in (\mathcal{L}_2)^n \subseteq (\mathcal{L}_2)^*$.

e. **Verdadero**. Probamos la doble inclusión:
   - $\subseteq$: Sea $\alpha \in (\mathcal{L}^*)^*$. Entonces $\alpha = \beta_1 ... \beta_n$, con cada $\beta_i \in \mathcal{L}^*$. Cada $\beta_i \in \mathcal{L}^{m_i}$ para algún $m_i \geq 0$. Luego $\alpha \in \mathcal{L}^{m_1} ... \mathcal{L}^{m_n} = \mathcal{L}^{m_1 + ... + m_n} \subseteq \mathcal{L}^*$.
   - $\supseteq$: Por definición $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^*$. Entonces, por el inciso anterior, $(\mathcal{L})^* \subseteq (\mathcal{L}^*)^*$.

f. **Falso**. Tomando $\mathcal{L}_1 = \{a\}$, $\mathcal{L}_2 = \{b\}$, $ab \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^*$ pero $ab \notin (\mathcal{L}_1)^* \cup (\mathcal{L}_2)^*$

Solución ej. 6 (3/3)

g. **Falso.** Tomando $\mathcal{L} = \{a\}$, $a \in \mathcal{L}^*$ pero $a \notin \left(\mathcal{L}^2\right)^*$.

h. **Verdadero.** $\alpha \in \left(\mathcal{L}^*\right)^{\mathrm{r}}$
sii $\alpha^{\mathrm{r}} \in \mathcal{L}^*$
sii $\alpha^{\mathrm{r}} \in \mathcal{L}^n$ para algún $n \geq 0$
sii $\alpha^{\mathrm{r}} = \alpha_1 \ldots \alpha_n$ con $\alpha_i \in \mathcal{L}$
sii $\alpha = \left(\alpha_1 \ldots \alpha_n\right)^{\mathrm{r}}$
sii $\alpha = \alpha_n^{\mathrm{r}} \ldots \alpha_1^{\mathrm{r}}$
sii $\alpha \in \left(\mathcal{L}^{\mathrm{r}}\right)^n \subseteq \left(\mathcal{L}^{\mathrm{r}}\right)^*$.

Prefijos, sufijos y subcadenas

Dado un lenguaje $\mathcal{L}$,

- el lenguaje de sus **prefijos**, $\mathrm{Ini}(\mathcal{L})$, se obtiene quitando cero o más símbolos del final de las cadenas de $\mathcal{L}$.
- el lenguaje de sus **sufijos**, $\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$, se obtiene quitando cero o más símbolos del principio de las cadenas de $\mathcal{L}$.
- el lenguaje de sus **subcadenas**, $\mathrm{Sub}(\mathcal{L})$, se obtiene quitando cero o más símbolos del principio y del final de las cadenas de $\mathcal{L}$.

Prefijos, sufijos y subcadenas

Formalmente,

- $\mathrm{Ini}(\mathcal{L}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists \beta \in \Sigma^* \text{ t.q. } \alpha\beta \in \mathcal{L}\}$
- $\mathrm{Fin}(\mathcal{L}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists \beta \in \Sigma^* \text{ t.q. } \beta\alpha \in \mathcal{L}\}$
- $\mathrm{Sub}(\mathcal{L}) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists \beta, \gamma \in \Sigma^* \text{ t.q. } \beta\alpha\gamma \in \mathcal{L}\}$

Ejercicio 7

Considerar el siguiente lenguaje sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$:

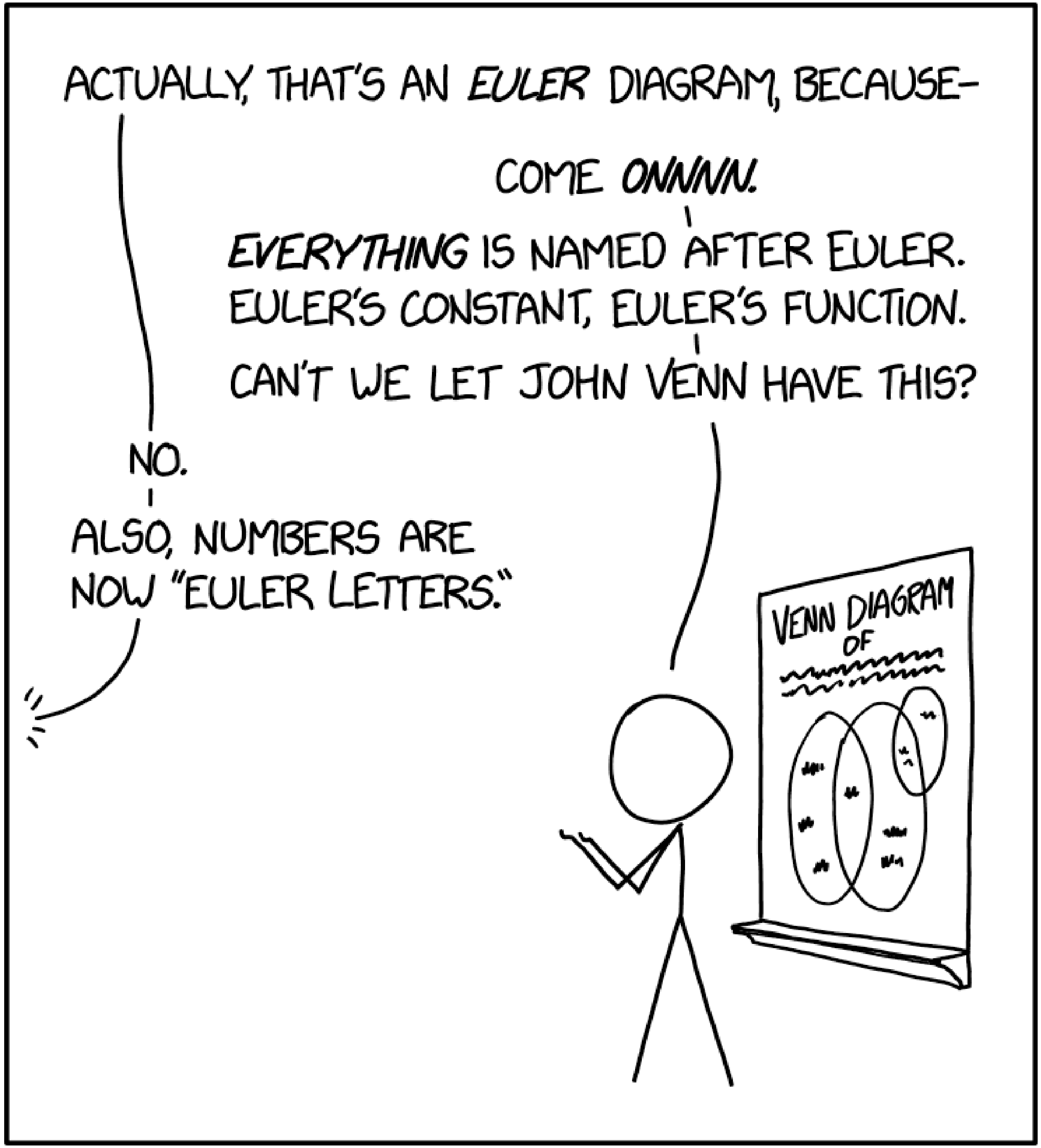
$$\mathcal{L} = \{aba, abc\}$$

a. Calcular $\mathrm{Ini}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$ y $\mathrm{Sub}(\mathcal{L})$.

b. Realizar un diagrama de Euler para los lenguajes $\mathcal{L}$, $\mathrm{Ini}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Sub}(\mathcal{L})$ y Σ^*.

Dar una cadena de ejemplo para cada región del diagrama. Ubicar también la cadena λ.

c. De las inclusiones visibles en el diagrama, ¿cuáles valen para cualquier lenguaje?

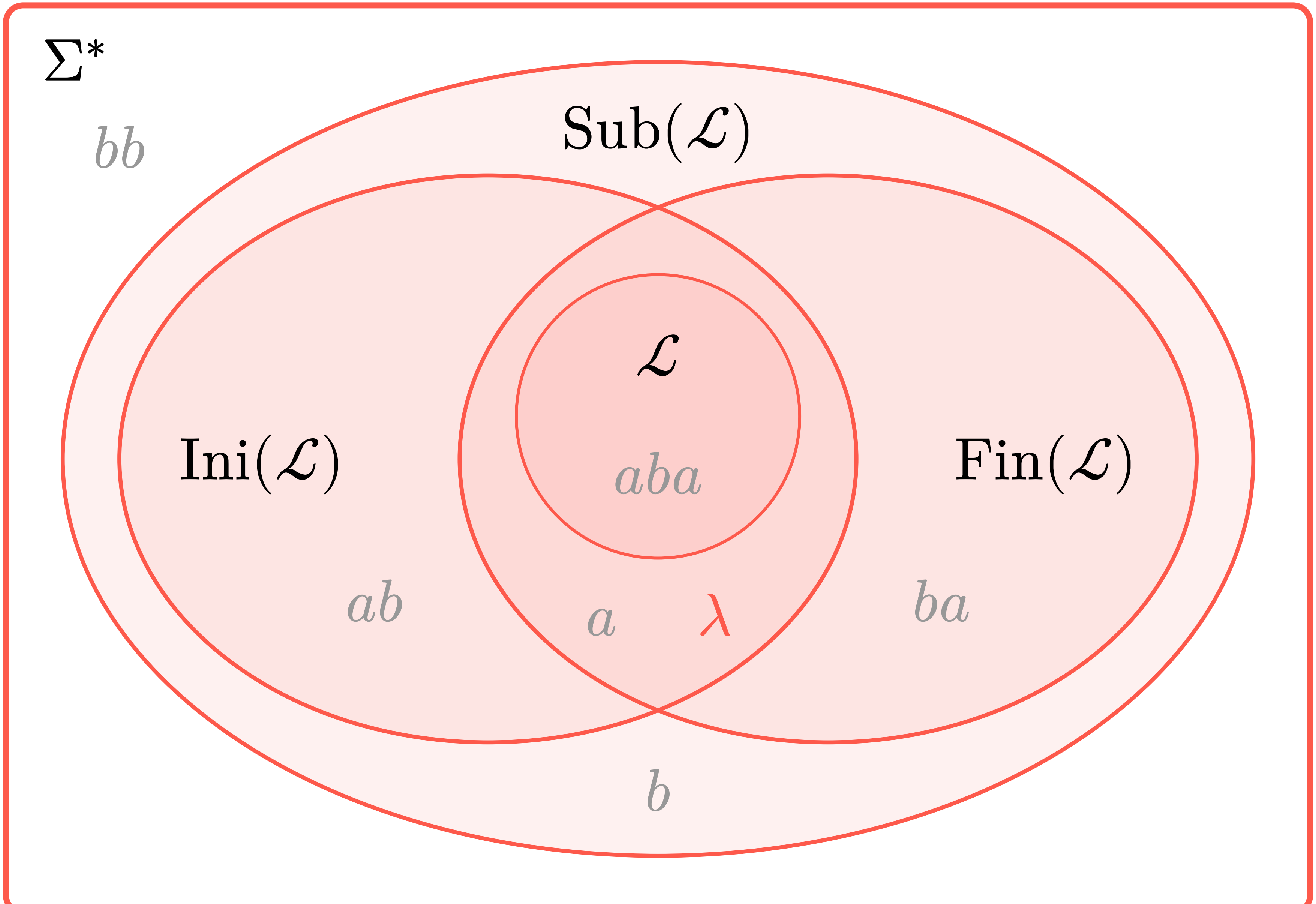

ACTUALLY, THAT'S AN *EULER* DIAGRAM, BECAUSE–
COME *ONNNN.*
EVERYTHING IS NAMED AFTER EULER. EULER'S CONSTANT, EULER'S FUNCTION.
CAN'T WE LET JOHN VENN HAVE THIS?
NO.
ALSO, NUMBERS ARE NOW "EULER LETTERS."
VENN DIAGRAM OF

Solución ej. 7 (1/3)

a.
- $\mathrm{Ini}(\mathcal{L}) = \{\lambda, a, ab, aba, abc\}$
- $\mathrm{Fin}(\mathcal{L}) = \{\lambda, a, ba, aba, c, bc, abc\}$
- $\mathrm{Sub}(\mathcal{L}) = \{\lambda, a, ab, aba, b, ba, abc, bc, c\}$

Solución ej. 7 (2/3)

b.



Solución ej. 7 (3/3)

c. Todas las inclusiones valen en general. Es decir, para todo $\mathcal{L}$:

- $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Ini}(\mathcal{L}) \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{L}) \subseteq \Sigma^*$
- $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Fin}(\mathcal{L}) \subseteq \mathrm{Sub}(\mathcal{L}) \subseteq \Sigma^*$

Además, siempre que $\mathcal{L} \neq \varnothing$, vale que $\lambda \in \mathrm{Ini}(\mathcal{L}) \cap \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$.