Teoría de Lenguajes

Clase Teórica 7

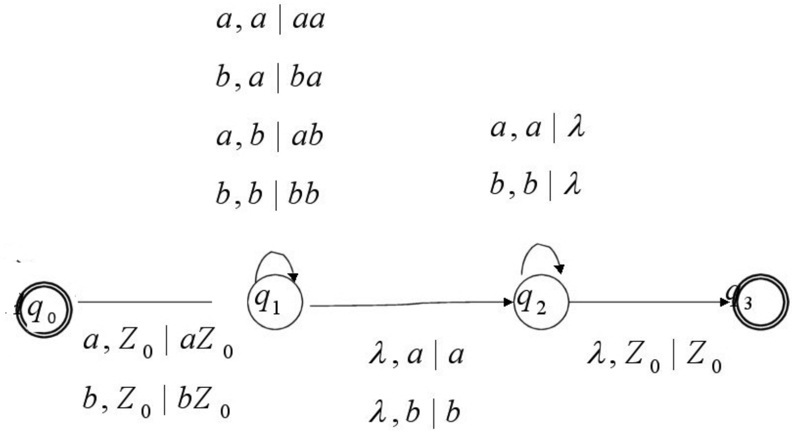
Autómatas de Pila

Primer Cuatrimestre 2024

Bibliografía: Capítulos 6 y 7, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

Ejemplo

Autómata de pila que acepta $L = \{\alpha\alpha^R : \alpha \in \Sigma^*\}$:
$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\rangle$ donde
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$ $F = \{q_0, q_3\}$



Definición (Oettinger 1961, Schutzenberger 1963)

Un autómata de pila está definido por $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ *donde*

- Q *es el conjunto de estados*
- Σ *es el alfabeto de entrada*
- Γ *es el alfabeto de la pila*
- $q_0 \in Q$ *es el estado inicial*
- $Z_0 \in \Gamma$ *es la configuración incial de la pila*
- $F \in Q$ *es el conjunto de estados finales*
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ *función de transición:*
  $\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_m, \gamma_m)\}$

La interpretación de $\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_n, \gamma_n)\}$, con $q, p_1, \ldots, p_n \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$, $Z \in \Gamma$, y $\gamma_i \in \Gamma^*$ es la siguiente.

Cuando el estado del autómata es q, el símbolo que la cabeza lectora está inspeccionando en ese momento es a, y en el tope de la pila nos encontramos el símbolo Z, se realizan las siguientes acciones:

Si $a \in \Sigma$, es decir no es la cadena vacía, la cabeza lectora avanza una posición para inspeccionar el siguiente símbolo.

Se elimina el símbolo Z de la pila del autómata.

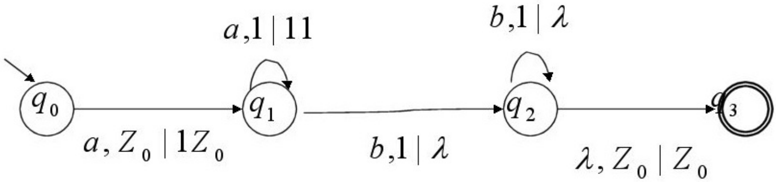
Se selecciona un par (p_i, γ_i) entre los existentes en la definición de $\delta(q, a, Z)$.

Se apila la cadena $\gamma_i = c_1 c_2 \ldots c_k$, con $c_i \in \Gamma$ en la pila del autómata, quedando el símbolo c_1 en el tope de la pila.

Se cambia el control del autómata al estado p_i.

Ejemplo

Autómata de pila que acepta $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$:
$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ donde
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, 1\}$ $F = \{q_3\}$



Autómatas de Pila Determinísticos

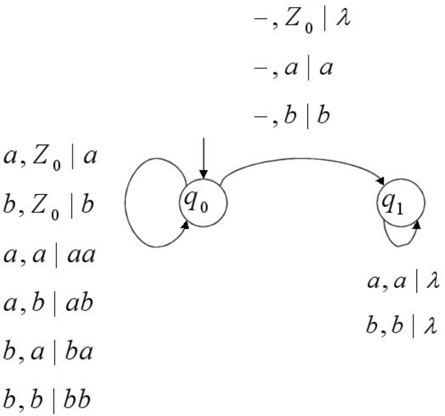
Definición

Un autómata de pila $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ *es determinístico si,* $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma, \forall A \in \Gamma$*,*

1. $\#\delta\left(q, a, A\right) \leq 1$
2. $\#\delta\left(q, \lambda, A\right) \leq 1$
3. *si* $\#\delta\left(q, \lambda, A\right) = 1$ *entonces* $\#\delta\left(q, a, A\right) = 0$

Ejemplo

El siguiente autómata de pila M es determinístico



$$\mathcal{L}(M) = \left\{\alpha - \alpha^R : \alpha \in (\Sigma \setminus \{'-'\})^*\right\}.$$

Teorema

No es cierto que para cada autómata de pila no determinístico existe otro determinístico que reconoce el mismo lenguaje.
Es decir, hay lenguajes libres de contexto que no son aceptados por ningún autómata de pila determinístico.

Demostración. $L = \{ww^R\}$ es aceptado por AP no-determinístico pero no es aceptado por ningun AP determinístico ver Hopcroft, Motwani Ulman (2001) página 249:

On the other hand, there are CFL's like L_{wwr} that cannot be $L(P)$ for any DPDA P. A formal proof is complex, but the intuition is transparent. If P is a DPDA accepting L_{wwr}, then given a sequence of 0's, it must store them on the stack, or do something equivalent to count an arbitrary number of 0's. For instance, it could store one X for every two 0's it sees, and use the state to remember whether the number was even or odd.

Suppose P has seen n 0's and then sees 110^n. It must verify that there were n 0's after the 11, and to do so it must pop its stack.[5] Now, P has seen 0^n110^n. If it sees an identical string next, it must accept, because the complete input is of the form ww^R, with $w = 0^n110^n$. However, if it sees 0^m110^m for some $m \neq n$, P must *not* accept. Since its stack is empty, it cannot remember what arbitrary integer n was, and must fail to recognize L_{wwr} correctly. Our conclusion is that:

- The languages accepted by DPDA's by final state properly include the regular languages, but are properly included in the CFL's.

Autómata de Pila Enriquecidos

Autómatas con un contador.
Son autómatas donde el alfabeto de pila tiene exactamente dos símbolos: Z_0 y I. en cada transición pueden revisr si el contador es Z_0, o no, y pueden incrementar o decrementarlo.

Los lenguajes reconocidos por auómatas contadores incluyen a todos los lenguajes regulares pero son un subconjunto propio de los lenguajes reconocidos por autótas de pila.

Autómata de Pila Enriquecidos

Los autómatas de pila de dos vías, tienen una pila, control finito y una cinta cuya cabeza puede moverse en ambas direcciones (Aho, Hopcroft, Ullman 1968, and Gray, Harrison, Ibarra 1967). Estos autómatas tiene menos poder computacional que una máquina de Turing.

Los autómatas con dos o más pilas son equivalentes a una máquina de Turing (Aho Ullman Teoremas 8.13, 8.14 y 8.15).

Los autómatas con tres contadores son equivalentes a una máquina de Turing (Aho Ullman Teoremas 8.13, 8.14 y 8.15).

Los autómatas con dos contadores son equivalentes a una máquina de Turing (Aho Ullman Teoremas 8.13, 8.14 y 8.15).

Sea un autómata de pila $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$.

Definición (Configuración de un autómata de pila)

Es una tripla de $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ *donde* Q *es el estado actual,* Σ^* *es la parte de la cadena de entrada que falta procesar y* Γ^* *es el contenido de la pila. La configuración inicial del autómata será entonces* (q_0, α, Z_0)*.*

Definición (Cambio de configuración $\vdash$)

Para todo $a \in \Sigma$*,* $\alpha \in \Sigma^*$ *,*$t \in \Gamma$*,* $\tau, \pi \in \Gamma^*,\ q, r \in Q$

- *Si* $(r, \tau) \in \delta\,(q, a, t)$ *entonces* $(q, a\alpha, t\pi) \vdash (r, \alpha, \tau\pi)$*.*
- *Si* $(r, \tau) \in \delta\,(q, \lambda, t)$ *entonces* $(q, \alpha, t\pi) \vdash (r, \alpha, \tau\pi)$*.*

Definición

Sea un autómata de pila $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$.
El lenguaje reconocido por M *por estado final es*

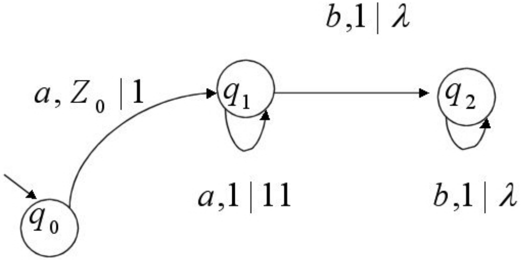
$$\mathcal{L}(M) = \left\{ \alpha \in \Sigma^* : \exists p \in F \quad (q_0, \alpha, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \gamma) \right\}$$

El lenguaje reconocido por M *por pila vacía es*

$$\mathcal{L}_\lambda(M) = \left\{ \alpha \in \Sigma^* : \exists p \in Q \quad (q_0, \alpha, Z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \lambda) \right\}$$

Ejemplo

Sea AP $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset \rangle$ donde $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{Z_0, a, b\}$, donde δ está dada por el siguiente dibujo:



Notar que $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, 1)\}$, por lo tanto en la transición de q_0 a q_1 el símbolo Z_0 fue removido de la pila.

El lenguaje reconocido por M por pila vacía es

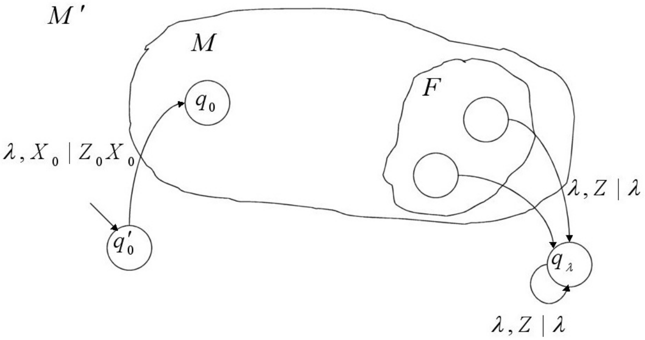
$$\mathcal{L}_\lambda (M) = \{a^n b^n : n \geq 1\}$$

Teorema

Para cada AP M *existe AP* M' *tal que* $\mathcal{L}\left(M\right) = \mathcal{L}_{\lambda}\left(M'\right)$.

Demostración. Sea AP $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\rangle$. Definimos

$$M' = \langle Q \cup \{q_\lambda, q_0'\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta', q_0', X_0, \emptyset\rangle$$



1. $\delta'(q_0', \lambda, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
   M' entra al estado inicial de M con Z_0X_0 en la pila, así evita pila vacía
2. $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \forall Z \in \Gamma, \quad \delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$.
   M' simula M.
3. $\forall q \in F, \forall Z \in \Gamma \cup \{X_0\}, \quad (q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q, \lambda, Z)$
4. $\forall Z \in \Gamma \cup \{X_0\}, \quad (q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q_\lambda, \lambda, Z)$.
   Si M entra en un estado final, M' debe ir a vaciar la pila.

Veamos que $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}_\lambda(M')$.

Si $x \in \mathcal{L}(M)$ entonces $(q_0, x, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \lambda, \gamma)$, con $q \in F$.
Por definición de δ', $\delta'(q_0', \lambda, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$, entonces

$$(q_0', x, X_0) \underset{M'}{\vdash} (q_0, x, Z_0 X_0).$$

Por definición de δ', $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \forall Z \in \Gamma$, $\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$,

$$(q_0, x, Z_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \gamma).$$

Entonces $\qquad (q_0', x, X_0) \underset{M'}{\vdash} (q_0, x, Z_0 X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \gamma X_0).$

Por definición de δ', $\forall q \in F$, $\forall Z \in \Gamma \cup \{X_0\}$,
$$(q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q, \lambda, Z) \Big) \text{ y } (q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q_\lambda, \lambda, Z) \Big).$$
Entonces

$$(q, \lambda, \gamma X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q_\lambda, \lambda, \lambda).$$

Por lo tanto, $(q_0', x, X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q_\lambda, \lambda, \lambda)$.
Concluimos que, si $x \in \mathcal{L}(M)$ entonces $x \in \mathcal{L}_\lambda(M')$.

Veamos que $\mathcal{L}_\lambda(M') \subseteq \mathcal{L}(M)$.
Si $x \in \mathcal{L}_\lambda(M')$, entonces existe la secuencia

$$(q_0', x, X_0) \underset{M'}{\vdash} \underbrace{(q_0, x, Z_0X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \gamma X_0)}_{A} \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q_\lambda, \lambda, \lambda),$$

Pero la transición en A implica

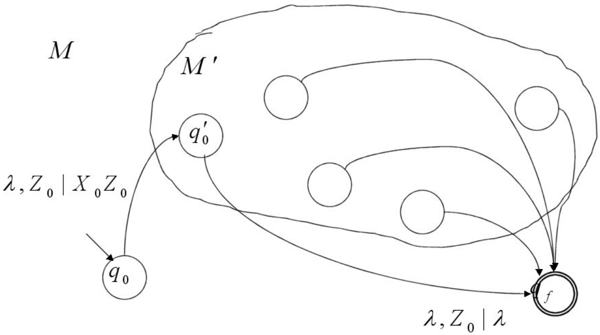
$$(q_0, x, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \lambda, \gamma).$$

Por lo tanto, si $x \in \mathcal{L}_\lambda(M')$ entonces $x \in \mathcal{L}(M)$. $\square$

Teorema (Chomsky 1962, Evey 1963)

Para cada AP $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', X_0, \emptyset \rangle$ *existe AP* $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ *tal que* $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}_\lambda(M')$.

Demostración. Sea AP $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, X_0, \emptyset \rangle$.
Definimos $M = \langle Q' \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma, \Gamma' \cup \{Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_f\} \rangle$ donde



- $\delta(q_0, \lambda, Z_0) = \{(q\prime_0, X_0 Z_0)\}$,
  así desde un principio M simula M', con $X_0 Z_0$ en la pila.
- $\forall q \in Q'$, $\forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $\forall Z \in \Gamma'^*$, $\quad \delta(q, a, Z) = \delta'(q, a, Z)$
  así M simula M'.
- $\forall q \in Q', \quad (q_f, \lambda) \in \delta(q, \lambda, Z_0)$
  así cuando se vacía la pila simulada de M', M salta a estado final q_f.

Nos queda por argumentar que $x \in \mathcal{L}_\lambda(M')$ si y solo si $x \in \mathcal{L}(M)$.

Si $x \in \mathcal{L}_\lambda(M')$ entonces $(q_0', x, X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda)$.
La definición de M asegura

$$(q_0, x, Z_0) \underset{M}{\vdash} (q_0', x, X_0 Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \lambda, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_f, \lambda, \lambda),$$

y por lo tanto $x \in \mathcal{L}(M)$.

Si $x \in \mathcal{L}(M)$ entonces

$$(q_0, x, Z_0) \underset{M}{\vdash} (q_0', x, X_0 Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \lambda, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_f, \lambda, \lambda),$$

pero por definición de M,

$(q_0', x, X_0 Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \lambda, Z_0)$ si y solo si $(q_0', x, X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda)$.

Concluimos $(q_0', x, X_0) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \lambda)$, y por lo tanto $x \in \mathcal{L}_\lambda(M')$.

Ejercicios

1. Indicar Verdadeo o Falso y justificar: Si $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset \rangle$ es un autómata de pila entonces cada palabra $w \in \mathcal{L}_\lambda(M)$ es reconocida por M en a lo sumo $|w| * \#Q * \#\Gamma$ transiciones; es decir, existe $n \leq |w| * \#Q * \#\Gamma$, existe $p \in Q$, tal que $(q_0, w, Z_0) \overset{n}{\underset{M}{\vdash}} (p, \lambda, \lambda)$.
2. Dado un autómata finito $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ dar un autómata de pila $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', Z_0', \emptyset \rangle$ tal que $\mathcal{L}_\lambda(M) = \mathcal{L}_\lambda(M')$
3. Consideremos la demostración del Teorema que afirma que para cada autómata $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ existe M' tal que $\mathcal{L}\left(M\right) = \mathcal{L}_\lambda\left(M'\right)$.
   ¿Si M es determinístico, el autómata M' construido en la demostración también lo es?
4. Consideremos la demostración del Teorema que afirma que dado $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_0', X_0, \emptyset \rangle$ existe M tal que $\mathcal{L}_\lambda\left(M'\right) = \mathcal{L}\left(M\right)$.
   ¿Si M' es determinístico, el autómata M construido en la demostración también lo es?