Ejercicio 2. Dado $\mathcal{L} = \{a^i b^j \mid i > j \lor i \text{ es par}\}$.

a. Demostrar que $\mathcal{L}$ cumple

$\forall \alpha, \alpha \in \mathcal{L} \land |\alpha| \geq 2 \Longrightarrow \exists(x, y, z)$ tales que $(\alpha = xyz \land |xy| \leq 2 \land |y| \geq 1 \land \forall i, xy^i z \in \mathcal{L})$.

b. Demostrar que $\mathcal{L}$ no es regular.

$L = \{ a^i b^j : i > j \lor i \text{ es par} \}$

$\forall \alpha \in L,\ |\alpha| \geqslant 2$ QVQ $\exists x, y, z$ tq $\alpha = xyz,\ |xy| \leqslant 2,\ |y| \geqslant 1$
$\forall i\ xy^i z \in L$

Caso $|\alpha|_a$ es par

$|\alpha|_a = 0 \Rightarrow \alpha = b^j$ con $j \geqslant 2$ pues $|\alpha| \geqslant 2$

$x = \lambda \quad y = b \quad z = b^{j-1}$

$\forall i \quad xy^i z = b^i b^{j-1} = b^{i+j-1} \in L$

$|\alpha|_a > 0 \Rightarrow \alpha = a^i b^j$ con $i \geqslant 2$ pues $|\alpha|_a$ es par y $|\alpha|_a > 0$

$x = \lambda \quad y = aa \quad z = a^{i-2} b^j$

$\forall k \quad xy^k z = (aa)^k a^{i-2} b^j \in L$

$\downarrow$

Pues $|\alpha|_a$ es par y pumpeamos aa, una cantidad par de aes.

Caso $|\alpha|_a > |\alpha|_b$ $(i > j)$

Notemos que cuando $|\alpha| = 2$, necesariamente $\alpha = aa$ o $\alpha = bb$. Pues $ab \notin L$. En ambos casos $|\alpha|_a$ es par y ya probamos que ahí vale pumping.

Consideramos entonces los casos donde $|\alpha| \geq 3$.
Como $|\alpha|_a > |\alpha|_b$ hay al menos 2 aes en α: $|\alpha|_a \geq 2$.

Volvemos a mirar en casos si $|\alpha|_a$ es par o no.

Caso $|\alpha|_a$ es par

$x = \lambda \quad y = aa \quad z = a^{i-2} b^j$

$\forall K \quad xy^K z = (aa)^K a^{i-2} b^j \in L$

$\downarrow$

Igual al caso anterior, siempre queda una cantidad par de aes en α.

Caso $|\alpha|_a \geq 2$ es impar

$x = \lambda \quad y = a \quad z = a^{i-1} b^j$

$\forall K \quad xy^K z = a^K a^{i-1} b^j = a^{K+i-1} b^j$

Si $K = 0 \Rightarrow \alpha = a^{i-1} b^j$ con $i-1$ par (pues i impar)

$\Rightarrow \alpha \in L$

Si $K \geq 1 \Rightarrow \alpha = a^{K+i-1} b^j$ con $K+i-1 > j$

$\Rightarrow \alpha \in L$

L cumple Pumping. Veamos que aún así no es regular.

L no regular $\iff$ L^c no regular

impar $\quad$ $2p+1 < 3p$

$p > 0 \qquad \alpha = a^{2p+1} b^{3p} \notin L \Rightarrow \alpha \in L^c \qquad |\alpha| = 2p+1+3p \geq p$

Para toda descomposición $\alpha = xyz$ tq $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$

$$x = a^r \ (r \geq 0) \qquad y = a^t \ (t \geq 1) \qquad z = a^{2p+1-r-t} b^{3p}$$

Con $i = 3p$

$$xy^{3p}z = a^r (a^t)^{3p} a^{2p+1-r-t} b^{3p} = a^{2p+1-t+3tp} b^{3p}$$

$$\underset{1 \leq t \leq p}{2p+1-t+3tp > 2p+1-p+3p} > 4p+1 > 3p$$

$\Rightarrow |xy^{3p}z|_a > |xy^{3p}z|_b$

$\Rightarrow xy^{3p}z \in L$

$\Rightarrow xy^{3p}z \notin L^c$

Por lema de pumping: L^c no regular $\Rightarrow$ L no regular

Era más sencillo tomar $\alpha = a^{2p+1} b^{2p+1}$ con $i = 2$.