

i) 귀납 전제: $n=1$ 이면, $\lfloor \lg n \rfloor + 1 = \lfloor \lg 1 \rfloor + 1 = 0 + 1 = 1 = w(1)$ 이 성립

ii) 귀납 가정: $n > 1$ 이고, $1 < k < n$ 인 모든 k 에 대해

$w(k) = \lfloor \lg k \rfloor + 1$ 가 성립한다고 가정

(i) 귀납 단계 (1): n 이 짝수일 때, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned} w(n) &= 1 + w\left(\underbrace{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}_{\frac{n}{2}}\right) \\ &= 1 + \lfloor \lg \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ &= 2 + \lfloor \lg \frac{n}{2} \rfloor \\ &= 2 + \lfloor \lg \frac{n}{2} \rfloor \\ &= 2 + \lfloor \lg n - 1 \rfloor \\ &= 2 + \lfloor \lg n \rfloor - 1 \\ &= 1 + \lfloor \lg n \rfloor \end{aligned}$$

귀납 단계 (2): n 이 홀수일 때, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$

$$\begin{aligned} w(n) &= 1 + w\left(\underbrace{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}_{\frac{n-1}{2}}\right) \\ &= 1 + \lfloor \lg \frac{n}{2} \rfloor + 1 \\ &= 2 + \lfloor \lg \frac{n}{2} \rfloor \\ &= 2 + \lfloor \lg \frac{n-1}{2} \rfloor \\ &= 2 + \lfloor \lg(n-1) - 1 \rfloor \\ &= 2 + \lfloor \lg(n-1) \rfloor - 1 \\ &= 1 + \lfloor \lg(n-1) \rfloor \\ &= 1 + \lfloor \lg n \rfloor \end{aligned}$$

따라서, $w(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1 \in \Theta(\lg n)$