

# 第一章 數與式

## 主題一 實數(Real number)與有理數(Ration number)

1. 整數(Integer)為自然數(Natural)的延拓, 是為了滿足自然數對於減法的不完備性而生。而有理數為整數之延拓, 定義為可化減為兩整數之比值的數。而在所有有理數和非有理數(無理數)之集合稱為實數域與之相對的稱為虛數。

2. 有理數的定義：一個可以表示為  $\frac{a}{b}$ , 其中  $a, b$  皆為整數, 且  $b \neq 0$ 。而至於其他無法以此方式表達之數則定義為無理數。例如： $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{5}$ ,  $\pi$  ....

3. 有理數的性質：

(1) 封閉性：任意二有理數進行四則運算後的結果(不以 0 作為除數)皆為有理數。

※注意：無理數 運算則不一定滿足此性質。

(2) 稠密性：任意二相異有理數之間必存在至少一個有理數。若設  $r, s$  為有理數  $r < s$ , 則存在一有理數  $t$  使得  $r < t < s$

4. 有理數的形式：

$m, n$  為正整數, 而將  $\frac{m}{n}$  化為小數時, 長除法中, 餘式必定為  $0 \sim n-1$  ( $a = bq + r, 0 \leq r < b$ )

而此時若餘數出現 0, 則此分數可化為有限小數；若不出現 0, 則餘數必然重複出現, 則此分數則可化為循環小數。因此所有有理數皆可化為有限或循環小數, 其循環節至多  $n-1$  位。

5. 有理數的運算：

(1) 相等： $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ( $a, b, c, d$  皆為整數且  $bd \neq 0$ ), 則  $ad = cb$

(2) 化簡：一個已化為最簡分數的有理數，若分母的質因數只有 2 和 5，則此有理數必可化為有限小數

6. 循環小數之化簡：

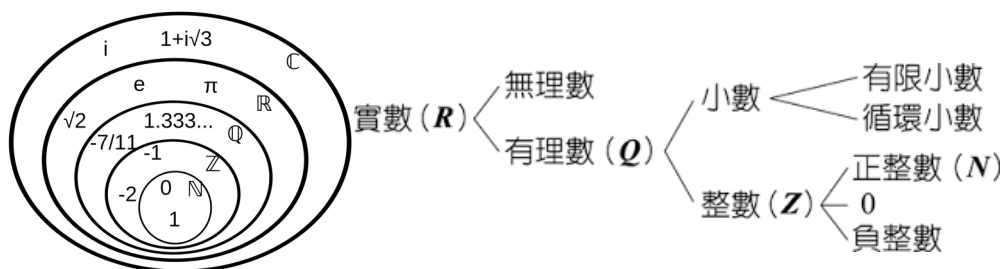
例：試將  $3.\overline{523}$  化為分數形式

解：設  $x$  為  $3.\overline{523}$ , 則  $1000x = 3523.\overline{523}$ ,  $1000x - x = 999x = 3523 - 3$ ,  $x = \frac{3520}{999}$

結論公式：十進制中  $ab.cd\overline{efg}$  化為分數為  $\frac{abcdefg-abcd}{99900}$

原因：設  $x=ab.cd\overline{efg}$  ,  $\begin{matrix} 100000x=abcdefg.\overline{efg} \\ 100x=abcd.\overline{efg} \\ \hline 99900x=abcdefg-abcd \end{matrix}$

補充：  $0.\overline{9}=1$



### 範例一：數的基本觀念釐清

1. 請標出下列那些數為自然數、哪些為有理數、哪些為實數？

(1) 2 (2) -3 (3)  $\sqrt{4}$  (4)  $\frac{123}{256}$  (5)  $\frac{4+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$  (6)  $3+\sqrt{5}$

2. 請選出下列正確的選項

- (1) 若 a 為整數, 則 a 為有理數
- (2) 若 a 為整數, 則 a 為自然數
- (3) 若 a 為有理數, 則 a 為實數
- (4)  $\sqrt{9}$  ,  $\sqrt{5}$  皆為無理數
- (5) 實數中, 不為有理數, 便是無理數
- (6) 整數中, 不為正整數, 便是負整數
- (7) 設 a, b 為有理數, 若  $a\sqrt{2}=b\sqrt{3}$  , 則 a=b=0

### 範例二：有理數的化簡常考題

1. 請以最簡分數的方式呈現下列各小數

(1)  $5.\overline{12}$  (2)  $1.4\overline{5}$

2. 請選出下列正確的選項 【102 指考數乙】

(1)  $0.\overline{7}+0.\overline{3}=0.\overline{6}+0.\overline{4}$

(2)  $0.\overline{72}+0.\overline{28}=1.\overline{1}$

(3)  $0.\overline{7}+0.\overline{3}=1$

(4)  $0.\overline{5}+0.\overline{5}=1.\overline{1}$

(5)  $0.4\overline{9}=0.5$

3. 下列何者可化為有限小數?

(1)  $\frac{3}{5}$  (2)  $\frac{73}{12}$  (3)  $\frac{5172}{30}$  (4)  $\frac{3}{7}$  (5)  $\frac{43}{2^{100}}$

4. 若  $a$  是正整數且  $\frac{7a621}{84}$  為有限小數, 則  $a$  為? 【南一中】

## 主題二 無理數

1. 定義：實數域中非有理數。例如：不循環的無限小數

2. 若正整數  $n$  非完全平方數, 則  $\sqrt{n}$  非有理數。

3.  $\sqrt{n}$  的尺規作圖法：

設  $B$  為  $\overline{AC}$  上一點, 以  $\overline{AC}$  為直徑做一半圓,  $\overline{BE}$  垂直  $\overline{AC}$  且交半圓於  $E$  點

$\triangle ABE \sim \triangle EBC$  兩三角形相似(直角三角形母子相似性質),  $\overline{BE}^2 = \overline{AB} \times \overline{BC}$

此時可取  $\overline{AB}$  或  $\overline{BC}$  線段長度為 1, 另一長度為  $n$ , 則  $\overline{BE}$  長度即為  $\sqrt{n}$

