Otoño 2015
Torres y Fernandez
Ayudantes: Arenas, Carmona, Simonsen y Villanueva

ILI 285
Laboratorio 2
April 22, 2015

Entrega: 28/04/2015, antes de las 17:00 impreso y 23:55 en moodle.

1 Preguntas

Luego de un accidente científico, los investigadores de un centro médico se han dado cuenta que han perdido información muy importante obtenida a partir de datos que fueron obtenidos a través de métodos exactos, que calculan las raíces de distintas ecuaciones. La desventaja de estos métodos es que el tiempo que toman para encontrar una raíz es extremadamente alto. Como los científicos disponen de poco tiempo, han decidido recalcular los datos a través de distintos métodos de aproximación de raíces. Por esta misma razón le han pedido ayuda a usted, estudiante de informática que desarrolle distintos métodos de aproximación para ayudar a los científicos y así contribuir con los avances de la ciencia.

I- Para ayudar a los científicos se ha pedido desarrollar los siguientes métodos con las herramientas Python o MatLab.

(a) **Método de Bisección.**
(b) **Método de la Secante.**
(c) **Método del Punto fijo.**
(d) **Método de Newton.**
(e) **Método de Newton Modificado.**

II- Para cada método que utilice a lo largo del laboratorio deberá realizar la siguiente tabla para cada caso y verificar si la convergencia es lineal, super-lineal o cuadrática.

$\frac{e_{i+1}}{e_i}$	$\frac{e_{i+1}}{e_i^{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}}$	$\frac{e_{i+1}}{e_i^2}$

Donde e_i corresponde a la diferencia entre el valor aproximado en la iteración i y el valor real de la raíz.

III- Para asegurarse que efectivamente los métodos de Bisección y Newton funcionan, se le brinda estas 5 ecuaciones que son básicas pero demuestran el poder de los métodos:

(1) $f(x) = x^2 - 6$, Para Bisección: [-2,3], Punto Fijo x_0= 0.
(2) $f(x) = x^5 - 5x^2 + 4$, Para Bisección: [0.5,1.5], Punto Fijo x_0= 2.
(3) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$, Para Bisección: [0,4], Punto Fijo x_0= 2.5.
(4) $f(x) = e^{x^2}x$, Para Bisección: [1,2], Punto Fijo x_0= 1.
(5) $\frac{\pi\sqrt{2+16x^2-2\sqrt{1-16x^2}}}{K\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{1-16x^2}}{\sqrt{1-16x^2}-1-8x^2}}\right)} = 2$. rango para Bisección y punto inicial para punto fijo debe ser definido por el estudiante.

Donde $K(m)$ es la integral elíptica del primer tipo: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-m\sin(t)^2}\,dt}$ [1]**.**

[1] La idea de este caso es que esta función sea calculada con librerías que ya tienen implementada esta función.

IV- Observando los resultados anteriores se puede evidenciar que en algunos casos, un método no es aplicable a algunas funciones. En base a gráficos de la función explique cualitativamente la razón por la cual estos métodos no son aplicables.

V- Para demostrar que maneja el concepto de buscar raíces se le encomienda el siguiente problema:

(1) Considerando una expansión de Taylor de 3 términos ($f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(c)\frac{(x-x_0)^2}{2}$), debe realizar una función para encontrar la constante c dado x y x_0 (Como input la función deberá recibir f, x_0 y x). Considere $f(x) = \cos(x)$, $x = \pi$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$. (En este caso elija el método que más estime conveniente para encontrar c).

(2) A continuación se le pide al estudiante dejar fijo solo el valor de x_0, y comenzar a variar el x de la función. Lo que se pide es encontrar la relación $c(x)$ y graficar para x $\in$ [-0.75,0.8].

VI- A última hora los científicos le comentan que existen funciones denominadas $g(x)$ y que desean encontrar la aproximación de sus raíces a través del método del punto fijo. Usted analizando las funciones se ha dado cuenta de la siguiente información:

- $|g'(r)| > 1$
- Las funciones divergen para un punto fijo $r = g(r)$.

Finalmente se ha dado cuenta que los científicos le han otorgado funciones que divergen!. Luego de días de pensar como solucionar este problema ha llegado a una solución la cual es modificar la iteración de punto fijo original a la siguiente iteración: $x_{i+1} = G(x_i)$ donde $G(x) = g(x) + M(x - g(x))$.y M es una constante. Para analizar de mejor manera la modificación se le pide lo siguiente:

(1) Determine el mejor valor posible para la constante M. (Hint: ¿Cuando converge mejor punto fijo?)

(2) Luego de encontrar M, modifique su algoritmo creado en la parte 1 para que el método también pueda encontrar por medio del punto fijo la aproximación de las raíces para funciones con $|g'(r)| > 1$.(Como argumentos de la función **puede** entregar $g(x)$ y r tal que $g(r) = r$)

(3) Explique gráficamente qué es lo que se ha hecho al modificar la iteración de punto fijo de $x_{i+1} = g(x_i)$ a $x_{i+1} = G(x_i)$ apóyese en gráficos. Para ayudar a los estudiantes se decide brindarles 2 ecuaciones del tipo $g(x)$:

(a) $e^{2x} - 1$, con $r = 0$.

(b) $\frac{x^3+1}{2}$, con $r = 1$.

(Realice un gráfico de $y_1 = x$, $y_2 = g(x)$ y $y_3 = G(x)$).

2 Instrucciones

(a) El laboratorio puede ser realizado en Python o Matlab.

(b) El laboratorio debe ser entregado en LaTeX o publicado en Matlab.

(c) La estructura del laboratorio es la siguiente:

   i. Título, nombre del estudiante, email y rol.

   ii. Una pequeña descripción de los experimentos y suposiciones consideradas.

   iii. Desarrollo y análisis de resultados.

   iv. Conclusiones.

   v. Referencias.

   vi. Anexo con el código utilizado.

(d) Si el código utilizado en los experimentos no es el mismo código entregado se evaluará el laboratorio con un 0.

(e) El archivo de entrega debe denominarse LabX-apellido1-apellido2.tar.gz, y debe contener un directorio llamado Informe que contenga los archivos .pdf y .tex correspondientes y un directorio llamado Códigos con los archivos correspondientes.

(f) El descuento por atraso será de 30 puntos, con un máximo de 1 día de atraso. No se recibirán entregas después de este día.

(g) El trabajo es personal o <u>en grupos de a 2</u>, no se permite compartir código, aunque sí se sugiere discutir aspectos generales con sus compañeros.

(h) Si no se siguen estas instrucciones, el laboratorio será evaluado con un 0.

Consideraciones:

Para todos los laboratorios del semestre se debe tener en cuenta, al momento de realizar el informe, lo siguiente:

- Introducción y conclusión: Que sea pertinente al laboratorio. No escriba cosas como "la historia de la Computación Científica...", ni "aprendí mucho". Sea más objetivo. Una buena idea sería plantear brevemente el problema o situación a analizar, objetivos generales y particulares, la estructura del informe y también, si ya tiene conocimiento de lo que se debe hacer, podría realizar una estimación. MÁXIMO: 5 líneas.
- Desarrollo y análisis: Incluya todos los supuestos, fórmulas, algoritmos, desarrollos matemáticos, etc. No ponga "se ve en el código" porque eso es aparte. Incluya gráficos, resultados, cuadros comparativos, y cualquier cosa que le permita realizar un análisis más exacto. Recuerden que los análisis son distintos de las conclusiones, explique a qué se debe las diferencias entre algoritmos. Cuantifique y fundamente sus respuestas, evite el exceso de adjetivos. Sea creativos, existen muchos criterios para comparar y analizar.
- Ortografía: Se descontarán 5 puntos, por cada 5 faltas ortográficas.
- Precisión: Calidad antes que cantidad, no se de vuelta en la misma idea. No deje tanto espacio en blanco e imprima, en lo posible, ambas caras de una hoja.
- Código: En LaTeX hay distintas formas de adjuntar o presentar un código. Una imagen NO es una de ellas.
- Ponderaciones: El código vale el 30% y el informe un 70%. Se evalúa también orden y redacción.