Obsah

I
Základní pojmy

Motto:
Není umění dělat to, co člověka baví,
ale bavit ho to, co dělat musí.
THOMAS ALVA EDISON

Cílem této kapitoly je zopakovat, případně doplnit nejdůležitější pojmy, které budeme dále užívat.

Množina

I.1 Úmluva. *Množinou* rozumíme souhrn (soubor, skupinu) jakýchkoli objektů. Množina je určena, můžeme-li o jakémkoli objektu rozhodnout, zda do ní patří či nikoli. Objekty, které do dané množiny patří, nazýváme *prvky* této *množiny*. Množinu značíme zpravidla bezpatkovým velkým písmenem latinské abecedy (např. A, B, M), její prvky značíme zpravidla kurzívními malými písmeny téže abecedy, (např. a, b, c), popř. písmenem tohoto typu s indexy (např. $a_1, a_2, \ldots$).

Zápis $c \in \mathsf{M}$ znamená, že prvek c patří do množiny M, neboli že c je prvkem množiny M, zápis $c \notin \mathsf{M}$ znamená, že prvek c nepatří do množiny M, neboli že c není prvkem množiny M. Množinu určíme tak, že vypíšeme její prvky nebo uvedeme společné vlastnosti jejích prvků. Množinu A, která obsahuje n prvků, a to $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kde n je přirozené, zapisujeme takto:

$$\mathsf{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\,.$$

Množinu B všech prvků x, které mají vlastnost $V(x)$, zapisujeme takto:

$$\mathsf{B} = \{x;\, V(x)\}\,.$$

I.2 Definice. Množina, do které patří n prvků, n celé nezáporné, se nazývá *konečná*; ostatní *množiny* jsou *nekonečné*. Konečná množina, do které nepatří žádný prvek, se nazývá *prázdná* a značí se $\emptyset$; ostatní množiny jsou *neprázdné*.

Pro nás budou mít význam především *číselné množiny*, tj. množiny, jejichž prvky jsou čísla. Významné číselné množiny jsou označeny takto:

$\mathbf{N}$ — množina všech přirozených čísel,
$\mathbf{Z}$ — množina všech celých čísel,
$\mathbf{Q}$ — množina všech racionálních čísel,
$\mathbf{R}$ — množina všech reálných čísel,
$\mathbf{C}$ — množina všech komplexních čísel.

Zřejmě platí inkluze $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Užitečná jsou i označení některých podmnožin množiny $\mathbf{R}$:

$\mathbf{Z}^-$ — množina všech záporných celých čísel,
$\mathbf{Q}^+$ — množina všech kladných racionálních čísel,
$\mathbf{Q}^-$ — množina všech záporných racionálních čísel,
$\mathbf{R}^+$ — množina všech kladných reálných čísel,
$\mathbf{R}^-$ — množina všech záporných reálných čísel.

Připojíme-li k označení množin $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}^-$, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$, $\mathbf{R}^+$ a $\mathbf{R}^-$ index 0, znamená to, že do uvedených množin patří navíc číslo 0.

V množině $\mathbf{R}$ lze sčítat, odčítat, násobit a dělit (ne však dělit nulou) a přitom uvedené početní operace mají známé vlastnosti. Lze v ní též definovat binární relaci $<$ lineárního uspořádání. Množina $\mathbf{R}$ tedy tvoří z algebraického pohledu uspořádané těleso.

Množinu $\mathbf{R}$ a její prvky lze geometricky znázornit. Každému reálnému číslu lze přiřadit právě jeden bod reálné přímky $\mathbf{R}^1$, jíž nazýváme též *reálnou osou* nebo *jednorozměrným reálným prostorem*, a naopak každému bodu reálné přímky lze přiřadit právě jedno reálné číslo. Vzhledem k tomuto vzájemně jednoznačnému přiřazení lze ztotožnit reálná čísla s jim odpovídajícími body reálné přímky a množinu $\mathbf{R}$ s množinou $\mathbf{R}^1$. Podle okolností se mluví někdy o reálném čísle (stručně čísle), jindy o reálném bodě (stručně bodě). Reálnou přímku nazýváme v dalším textu stručně *přímkou* nebo *osou.*

I.3 Poznámka. Vzájemně jednoznačné přiřazení čísel bodům se obvykle uskutečňuje zavedením *kartézské soustavy souřadnic na přímce.* Kartézská soustava souřadnic je na ní zavedena volbou jejího bodu P, její orientace a jednotky délky. Bod P se nazývá *počátek souřadnic* (stručně *počátek*) a orientovaná přímka *osa souřadnic* (též *osa* x). Orientace přímky je zvolena prohlášením jedné z polopřímek, na které je přímka rozdělena počátkem, za *kladnou poloosu souřadnic* (též *kladnou poloosu* x) a druhé z polopřímek za *zápornou poloosu souřadnic* (též *zápornou poloosu* x). Každému bodu M přímky je přiřazeno číslo x, jehož absolutní hodnota je rovna vzdálenosti bodu M od počátku, přičemž je nezáporné, leží-li bod M na kladné poloose souřadnic, a je nekladné, leží-li bod M na záporné poloose souřadnic. Přiřazené číslo x se nazývá *souřadnice bodu* M. Skutečnost, že bod M má souřadnici x, zapisujeme $M = [x]$. Na obrázcích se označení P počátku často nahrazuje jeho souřadnicí, tj. číslem 0.

Vzdálenost, přesněji *euklidovská vzdálenost,* $d(A,B)$ *bodů* $A = [x_1]$ *a* $B = [x_2]$ přímky je dána vzorcem

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|\,;$$

proto se někdy místo o reálné přímce hovoří o euklidovské přímce.

Množina $\mathbf{R}$ nemá ani nejmenší ani největší prvek. Vzhledem k tomu, že v dalším textu budeme pracovat s *nevlastními limitami* a s limitami v *nevlastních bodech,* je účelné rozšířit množinu $\mathbf{R}$ o dva nové prvky, jež nazýváme *nevlastními čísly „plus nekonečno"* a *„minus nekonečno"* nebo *nevlastními body „plus nekonečno"* a *„minus nekonečno"* a značíme $+\infty$ a $-\infty$.

Poznámka. Pokud nehrozí nedorozumění, značíme nevlastní číslo plus nekonečno symbolem ∞.

I.4 Definice. Množinu $\mathbf{R}$, doplněnou o nevlastní čísla $+\infty$ a $-\infty$, nazýváme *rozšířenou množinou všech reálných čísel* a značíme $\mathbf{R}^*$. Tedy

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

a $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}^*$. Je-li to účelné, čísla množiny $\mathbf{R}^*$, která nejsou nevlastními čísly $+\infty$ nebo $-\infty$, nazýváme *vlastními čísly* nebo *vlastními body.*

Uspořádání a početní operace v množině $\mathbf{R}$ jsou známé. Abychom je měli definovány i v množině $\mathbf{R}^*$, rozšíříme je na dvojice čísel, z nichž aspoň jedno je nevlastní.

Uspořádání a početní operace v množině R*

1. Uspořádání

   $-\infty < +\infty$,

   $-\infty < c < +\infty$ pro každé číslo $c \in \mathbf{R}$.

2. Absolutní hodnota

   $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

3. Sčítání a odčítání

   Pro každé číslo $c \in \mathbf{R}$ platí:

   $c + (+\infty) = (+\infty) + c = +\infty$,

   $c + (-\infty) = (-\infty) + c = -\infty$,

   $c - (+\infty) = -\infty$,

   $c - (-\infty) = +\infty$,

   dále platí:

   $+\infty + (+\infty) = +\infty - (-\infty) = +\infty$,

   $-\infty + (-\infty) = -\infty - (+\infty) = -\infty$.

Početní operace

$$\boxed{+\infty + (-\infty),\ +\infty - (+\infty),\ -\infty + (+\infty),\ -\infty - (-\infty)}$$

nejsou definovány.

4. Násobení

   Pro každé číslo $c \in \mathbf{R}^+$ platí:

   $c \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot c = +\infty,$

   $c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = -\infty.$

   Pro každé číslo $c \in \mathbf{R}^-$ platí:

   $c \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot c = -\infty,$

   $c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = +\infty.$

   Početní operace

   $$\boxed{0 \cdot (+\infty),\ (+\infty) \cdot 0,\ 0 \cdot (-\infty),\ (-\infty) \cdot 0}$$

   nejsou definovány.

   Dále platí:

   $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,$

   $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$

   $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$

5. Dělení

   Pro každé číslo $c \in \mathbf{R}$ platí:

   $\dfrac{c}{+\infty} = \dfrac{c}{-\infty} = 0.$

   Pro každé číslo $c \in \mathbf{R}^+$ platí:

   $\dfrac{+\infty}{c} = +\infty,$

   $\dfrac{-\infty}{c} = -\infty.$

   Pro každé číslo $c \in \mathbf{R}^-$ platí:

   $\dfrac{+\infty}{c} = -\infty,$

   $\dfrac{-\infty}{c} = +\infty.$

   Početní operace

   $$\boxed{\frac{+\infty}{0},\ \frac{-\infty}{0},\ \frac{+\infty}{+\infty},\ \frac{+\infty}{-\infty},\ \frac{-\infty}{+\infty},\ \frac{-\infty}{-\infty}}$$

   nejsou definovány.

Poznámka. Početní operace $\frac{c}{0}$ tedy není definována jak pro $c \in \mathbf{R}$, tak pro $c \in \mathbf{R}^*$. Speciálně není definována početní operace $\frac{0}{0}$.

6. Umocňování celým nezáporným mocnitelem

   Pro každé číslo $m \in \mathbf{N}$ platí:

   $(+\infty)^m = +\infty$,

   $(-\infty)^m = \begin{cases} -\infty, & \text{je-li číslo } m \text{ liché}, \\ +\infty, & \text{je-li číslo } m \text{ sudé}. \end{cases}$

   Početní operace $\boxed{(+\infty)^0 \text{ a } (-\infty)^0}$ nejsou definovány.

   Poznámka. Připomínáme, že $c^0 = 1$ pro každé číslo $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ a početní operace 0^0 není definována.

7. Odmocňování přirozeným odmocnitelem

   Pro každé číslo $m \in \mathbf{N}$ platí:

   $\sqrt[m]{+\infty} = +\infty$,

   $\sqrt[m]{-\infty} = -\infty$ pro m liché.

   Početní operace $\boxed{\sqrt[m]{-\infty}}$ není pro m sudé definována.

Interval

V matematické analýze velmi často pracujeme se speciálními podmnožinami množiny $\mathbf{R}$, které nazýváme intervaly.

I.5 Definice. Nechť $a \in \mathbf{R}$ a $b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$. *Intervalem s krajními body a a b* rozumíme kteroukoli z těchto množin:

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R};\ a < x < b\}$ — *otevřený interval*,
$\langle a, b) = \{x \in \mathbf{R};\ a \leq x < b\}$ — *polootevřený* nebo *polouzavřený interval*,
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbf{R};\ a < x \leq b\}$ — *polootevřený* nebo *polouzavřený interval*,
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbf{R};\ a \leq x \leq b\}$ — *uzavřený interval*.

Délka $d(a, b)$ intervalu s krajními body a a b je dána vzorcem $d(a, b) = b - a$.

Intervalem s krajním bodem a a nevlastním krajním bodem $+\infty$ nebo $-\infty$ rozumíme kteroukoli z těchto množin:

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R};\ x > a\}$ — *otevřený interval*,
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R};\ x < a\}$ — *otevřený interval*,
$\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R};\ x \geq a\}$ — *polootevřený* nebo *polouzavřený interval*,
$(-\infty, a\rangle = \{x \in \mathbf{R};\ x \leq a\}$ — *polootevřený* nebo *polouzavřený interval*.

Intervalem s nevlastními krajními body $-\infty$ a $+\infty$ rozumíme množinu
$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbf{R};\ -\infty < x < +\infty\}$ — *otevřený interval*.

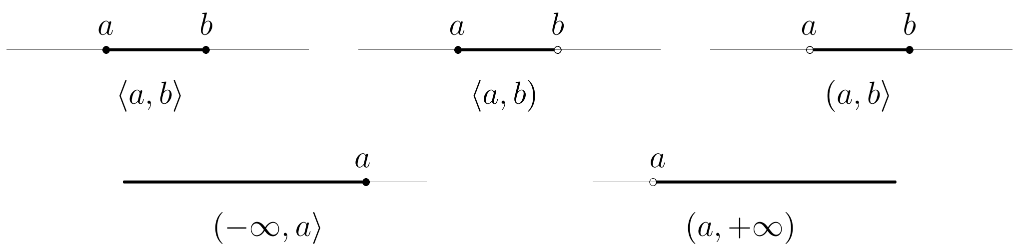
První, resp. druhé, vlastní nebo nevlastní číslo zleva v označení intervalu je *levý*, resp. *pravý*, krajní bod intervalu.

Každý bod intervalu, který není jeho krajním bodem, nazýváme *vnitřním bodem* intervalu. Množinu všech vnitřních bodů intervalu nazýváme *vnitřkem* intervalu.

Poznámka. Uzavřený interval s krajními body a a a, tj. $\langle a, a\rangle$, je množina $\{a\}$, ostatní intervaly s krajními body a a a, tj. $\langle a, a), (a, a\rangle$ a (a, a), jsou prázdné množiny.

Vnitřek intervalu je vždy otevřený interval, včetně prázdné množiny. Např. vnitřek každého z intervalů $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$ a (a, b) je interval (a, b).

Graficky znázorňujeme interval, který není prázdnou množinou, jako bod, úsečku, polopřímku nebo přímku. Plným nebo prázdným kroužkem vyznačujeme, zda jeho krajní bod k němu patří či nikoli.

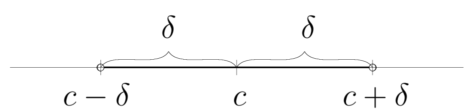


Obr. 1.1: Grafické znázornění některých intervalů

Okolí bodu

Povšimneme si teď jednoho speciálního typu otevřeného intervalu — okolí bodu. Okolí bodu nám poslouží při vyslovení některých definic a vět a v mnoha úvahách přispěje k přehlednému vyjadřování.

I.6 Definice. Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\delta \in \mathbf{R}^+$. *δ-okolím bodu c* nazýváme otevřený interval $(c-\delta, c+\delta)$. Číslo δ nazýváme *poloměrem δ-okolí bodu c*. δ-okolí bodu c značíme $\mathsf{U}(c, \delta)$ nebo $\mathsf{U}_\delta(c)$.



Obr. 1.2: Grafické znázornění δ-okolí bodu c

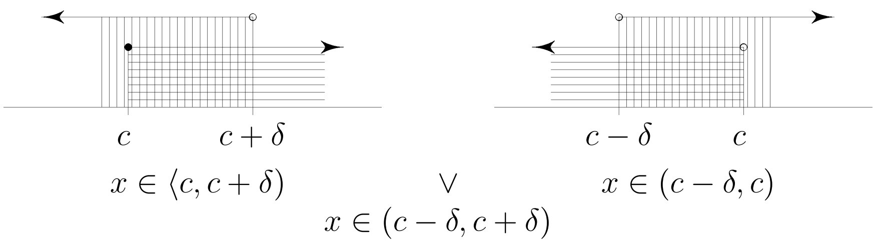
δ-okolí bodu c můžeme vyjádřit následujícími způsoby:

1. $\mathsf{U}(c, \delta) = \{x \in \mathbf{R};\ x \in (c-\delta, c+\delta)\}$,
2. $\mathsf{U}(c, \delta) = \{x \in \mathbf{R};\ c-\delta < x < c+\delta\}$,
3. $\mathsf{U}(c, \delta) = \{x \in \mathbf{R};\ |\ x-c\ | < \delta\}$.

Vyjádření 1 a 2 je zřejmé.

Zdůvodnění vyjádření 3: Z nerovnice $|x-c| < \delta$, kde $\delta > 0$, dostaneme užitím definice absolutní hodnoty

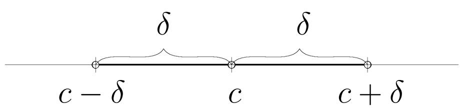
$$(x - c \geq 0 \wedge x - c < \delta) \vee (x - c < 0 \wedge -x + c < \delta),$$
$$(x \geq c \wedge x < c + \delta) \vee (x < c \wedge x > c - \delta),$$



Obr. 1.3

Někdy potřebujeme pracovat s δ-okolím bodu c, z něhož je bod c vyjmut. Proto zavádíme tuto definici:

I.7 Definice. Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\delta \in \mathbf{R}^+$. *Redukovaným δ-okolím bodu c* nazýváme množinu $\mathsf{U}(c,\delta) \setminus \{c\}$, již značíme $\mathsf{U}^*(c,\delta)$. Číslo δ nazýváme *poloměrem redukovaného δ-okolí bodu c.*



Obr. 1.4: Grafické znázornění redukovaného δ-okolí bodu c

Redukované δ-okolí bodu c můžeme vyjádřit následujícími způsoby:

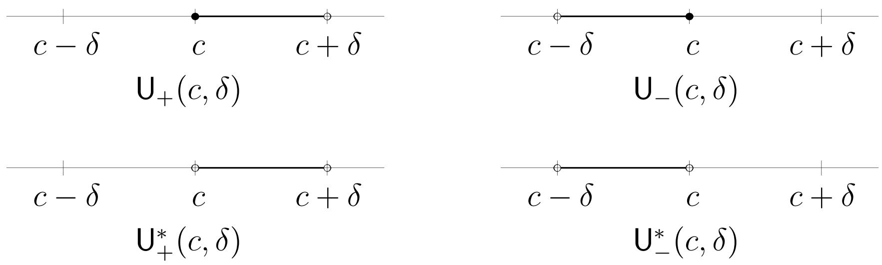
1. $\mathsf{U}^*(c,\delta) = \{x \in \mathbf{R};\ x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)\}$,
2. $\mathsf{U}^*(c,\delta) = \{x \in \mathbf{R};\ c-\delta < x < c \vee c < x < c+\delta\}$,
3. $\mathsf{U}^*(c,\delta) = \{x \in \mathbf{R};\ 0 < |\, x - c\,| < \delta\}$.

Zavedeme ještě pojmy jednostranného δ-okolí bodu a jednostranného redukovaného δ-okolí bodu.

I.8 Definice. Nechť $c \in \mathbf{R}$ a $\delta \in \mathbf{R}^+$. *Pravým δ-okolím bodu c* nazýváme polootevřený interval $\langle c, c+\delta)$. *Levým δ-okolím bodu c* nazýváme polootevřený interval $(c-\delta, c\rangle$. Právě definovaná *jednostranná δ-okolí bodu c* značíme $\mathsf{U}_+(c,\delta)$, resp. $\mathsf{U}_-(c,\delta)$.

Obdobně definujeme *jednostranná redukovaná δ-okolí bodu c*, a to *pravé*, resp. *levé, redukované δ-okolí bodu c*:

$$\mathsf{U}^*_+(c,\delta) = (c, c+\delta), \quad \text{resp.} \quad \mathsf{U}^*_-(c,\delta) = (c-\delta, c).$$



Obr. 1.5

Poznámka. V názvu i označení všech typů δ-okolí bodu c můžeme číslo δ vypouštět, není-li jeho velikost podstatná.

I.9 Definice. Nechť $s \in \mathbf{R}$. *s-okolím nevlastního bodu* $+\infty$ nazýváme otevřený interval $(s, +\infty)$. Toto okolí značíme $\mathsf{U}(+\infty, s)$. Tedy $\mathsf{U}(+\infty, s) = (s, +\infty)$.

Obdobně definujeme *s-okolí nevlastního bodu* $-\infty$: $\mathsf{U}(-\infty, s) = (-\infty, s)$.

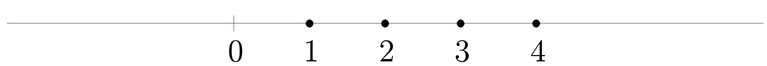
Obr. 1.6

Poznámka. V názvu i označení s-okolí nevlastních bodů $+\infty$ a $-\infty$ můžeme číslo s vypouštět, není-li jeho velikost podstatná.

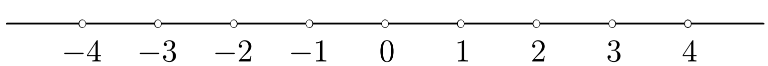
Intervaly a okolí bodů jsou speciální podmnožiny množiny $\mathbf{R}$. Podmnožiny množiny $\mathbf{R}$ však mohou mít i složitější strukturu.

Příklady.

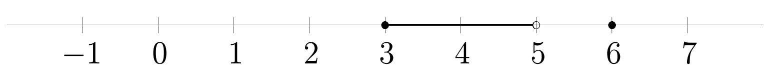
a) $\mathbf{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{n\} \subset \mathbf{R}$ je množina nekonečně mnoha izolovaných bodů (viz definici 1.18).



b) $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\ x \notin \mathsf{Z}\} = \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} (k, k+1) \subset \mathbf{R}$ je sjednocení nekonečně mnoha nepřekrývajících se otevřených intervalů.



c) $\mathsf{L} = \langle 3, 5) \cup \{6\} \subset \mathbf{R}$ je sjednocení polootevřeného intervalu a izolovaného bodu.



Dosud jsme se seznámili s pojmy otevřený, polootevřený, uzavřený interval a vnitřek intervalu. Nyní budeme tyto a některé další pojmy definovat pro obecnou podmnožinu množiny $\mathbf{R}$.

Vlastnosti podmnožin množiny R

V celém tomto a následujícím oddílu M značí neprázdnou podmnožinu množiny $\mathbf{R}$.

I.10 Definice. Říkáme, že *množina* M *je omezená shora*, resp. *zdola*, existuje-li číslo $k \in \mathbf{R}$, resp. $l \in \mathbf{R}$, takové, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ je $x \leq k$, resp. $x \geq l$. Číslo k se nazývá *horní mez množiny* M a číslo l se nazývá *dolní mez množiny* M.

Říkáme, že *množina* M *je omezená*, je-li omezená shora i zdola.

Příklad. Je-li $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\, 2 \leq x < 3\}$, potom každé číslo $k \in \langle 3, +\infty)$, např. $k = 3, \frac{7}{2}, 5, 150, \ldots$, je horní mez množiny M a každé číslo $l \in (-\infty, 2\rangle$, např. $l = 2, 1, \frac{1}{2}, 0, -10^4, \ldots$, je dolní mez množiny M.

I.11 Poznámky.

1. Existuje-li aspoň jedna horní, resp. dolní, mez množiny M, pak existuje nekonečně mnoho horních, resp. dolních, mezí množiny M.

2. Je-li množina M interval s krajními body a a b, $a < b$, pak podle definice 1.10 je tento interval omezená množina (*omezený interval*); číslo a je jednou z dolních mezí intervalu a číslo b je jednou z horních mezí intervalu. Intervaly $(a, +\infty)$ a $\langle a, +\infty)$ jsou množiny, které jsou omezené zdola a nejsou omezené shora, intervaly $(-\infty, a)$ a $(-\infty, a\rangle$ jsou množiny, které jsou omezené shora a nejsou omezené zdola, a interval $(-\infty, +\infty)$ je množina, která není omezená ani shora ani zdola; jsou to vesměs tzv. *neomezené intervaly.*

I.12 Věta. *Množina* M *je omezená, právě když existuje číslo* $K \in \mathbf{R}_0^+$ *takové, že pro každé* $x \in \mathsf{M}$ *platí* $|x| \leq K$.

Příklad. Je-li $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\, 2 \leq x < 3\}$, potom např. $K = 3$, neboť pro každé číslo $x \in \mathsf{M}$ platí $|x| \leq 3$ neboli $-3 \leq x \leq 3$.

I.13 Definice. Existuje-li číslo $x_1 \in \mathsf{M}$ takové, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ je $x \leq x_1$, pak číslo x_1 nazýváme *maximum* nebo *největší prvek (číslo) množiny* M a značíme $\max \mathsf{M}$.

Existuje-li číslo $x_2 \in \mathsf{M}$ takové, že pro každé $x \in \mathsf{M}$ je $x \geq x_2$, pak číslo x_2 nazýváme *minimum* nebo *nejmenší prvek (číslo) množiny* M a značíme $\min \mathsf{M}$.

Poznámka. Maximum nebo minimum množiny M nemusí existovat. Je-li např. $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\, 2 \leq x < 3\}$, potom $\min \mathsf{M} = 2$, ale $\max \mathsf{M}$ neexistuje. Je-li např. $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\, 2 < x < 3\}$, potom neexistuje ani maximum ani minimum množiny M.

Porovnejte definice 1.10 a 1.13 a *uvědomte si* toto: Je-li množina M omezená shora, pak její horní mez může, ale nemusí do ní patřit, zatímco její maximum, pokud existuje, do ní patří. Je-li množina M omezená zdola, pak její dolní mez může, ale nemusí do ní patřit, zatímco její minimum, pokud existuje, do ní patří.

I.14 Věta. *Maximum i minimum konečné množiny* M *vždy existují.*

Příklad. Je-li $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{N};\ 40 \leq x < 50\}$, potom $\max \mathsf{M} = 49$ a $\min \mathsf{M} = 40$.

I.15 Definice. Číslo $g \in \mathbf{R}$ se nazývá *supremum množiny* M a značí $\sup \mathsf{M}$, má-li tyto vlastnosti:

(1) pro každé $x \in \mathsf{M}$ je $x \leq g$,

(2) ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existuje aspoň jedno $x_1 \in \mathsf{M}$ takové, že $x_1 > g - \varepsilon$.

Číslo $h \in \mathbf{R}$ se nazývá *infimum množiny* M a značí $\inf \mathsf{M}$, má-li tyto vlastnosti:

(3) pro každé $x \in \mathsf{M}$ je $x \geq h$,

(4) ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existuje aspoň jedno $x_2 \in \mathsf{M}$ takové, že $x_2 < h + \varepsilon$.

Poznámka. Vlastnost (1) znamená, že supremum množiny M je horní mez množiny M, vlastnost (2) znamená, že žádné číslo menší než supremum množiny M již horní mezí množiny M není. Tedy supremum množiny M je nejmenší horní mez množiny M.

Obdobně vlastnost (3) znamená, že infimum množiny M je dolní mez množiny M, vlastnost (4) znamená, že žádné číslo větší než infimum množiny M již dolní mezí množiny M není. Tedy infimum množiny M je největší dolní mez množiny M.

Supremum nebo infimum množiny M nemusí existovat. Pokud $\sup \mathsf{M}$ existuje a $\sup \mathsf{M} \in \mathsf{M}$, pak existuje i $\max \mathsf{M}$ a $\max \mathsf{M} = \sup \mathsf{M}$. V opačném případě $\max \mathsf{M}$ neexistuje. Pokud $\inf \mathsf{M}$ existuje a $\inf \mathsf{M} \in \mathsf{M}$, pak existuje i $\min \mathsf{M}$ a $\min \mathsf{M} = \inf \mathsf{M}$. V opačném případě $\min \mathsf{M}$ neexistuje.

Příklad. Je-li $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\ 2 \leq x < 3\}$, potom $\sup \mathsf{M} = 3$, $3 \notin \mathsf{M}$, $\max \mathsf{M}$ neexistuje; $\inf \mathsf{M} = 2$, $2 \in \mathsf{M}$, $\min \mathsf{M} = \inf \mathsf{M} = 2$.

I.16 Věta (o existenci suprema a infima množiny). *Je-li množina* M *omezená shora, pak existuje její supremum v* $\mathbf{R}$*. Je-li množina* M *omezená zdola, pak existuje její infimum v* $\mathbf{R}$*.*

I.17 Věta. *Existuje-li* $\max \mathsf{M}$*, pak existuje i* $\sup \mathsf{M}$ *a* $\sup \mathsf{M} = \max \mathsf{M}$*. Existuje-li* $\min \mathsf{M}$*, pak existuje i* $\inf \mathsf{M}$ *a* $\inf \mathsf{M} = \min \mathsf{M}$*.*

Příklady.

a) $\mathsf{M} = \langle 1, 4)$.
Horní meze množiny M jsou např. $4, 10, 15, 36, 10^6$,
dolní meze množiny M jsou např. $1, 0, -\pi, -10^5$,
$\sup \mathsf{M} = 4,\ 4 \notin \mathsf{M},\ \max \mathsf{M}$ neexistuje,
$\inf \mathsf{M} = 1,\ 1 \in \mathsf{M},\ \min \mathsf{M} = \inf \mathsf{M} = 1$.

b) $\mathsf{M} = \{1, 2, 3\}$.
$\sup \mathsf{M} = 3,\ 3 \in \mathsf{M},\ \max \mathsf{M} = \sup \mathsf{M} = 3$,
$\inf \mathsf{M} = 1,\ 1 \in \mathsf{M},\ \min \mathsf{M} = \inf \mathsf{M} = 1$.

c) $\mathsf{M} = \{\frac{1}{n};\, n \in \mathbf{N}\}$.
$\sup \mathsf{M} = 1,\ 1 \in \mathsf{M},\ \max \mathsf{M} = \sup \mathsf{M} = 1,$
$\inf \mathsf{M} = 0,\ 0 \notin \mathsf{M},\ \min \mathsf{M}$ neexistuje.

d) $\mathsf{M} = \langle 0, +\infty)$.
$\sup \mathsf{M}$ neexistuje, $\max \mathsf{M}$ neexistuje,
$\inf \mathsf{M} = 0,\ 0 \in \mathsf{M},\ \min \mathsf{M} = \inf \mathsf{M} = 0.$

Vztah mezi množinou bodů a jejím prvkem

I.18 Definice. Bod $c \in \mathsf{M}$ se nazývá *vnitřní bod množiny* M, existuje-li jeho okolí $\mathsf{U}(c) \subset \mathsf{M}$. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá *vnitřek množiny* M a značí M°.

Bod $c \in \mathbf{R}$ se nazývá *hraniční bod množiny* M, leží-li v každém jeho okolí $\mathsf{U}(c)$ aspoň jeden bod množiny M a aspoň jeden bod množiny $\mathbf{R}$, který do množiny M nepatří. Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá *hranice množiny* M a značí $h(\mathsf{M})$.

Sjednocení množiny M a její hranice se nazývá *uzávěr množiny* M a značí $\overline{\mathsf{M}}$. Tedy $\overline{\mathsf{M}} = \mathsf{M} \cup h(\mathsf{M})$.

Bod $c \in \mathbf{R}$, který není ani vnitřním ani hraničním bodem množiny M, se nazývá *vnější bod množiny* M. Množina všech vnějších bodů množiny M se nazývá *vnějšek množiny* M; vnějšek množiny M je tedy množina $\mathbf{R} \setminus \overline{\mathsf{M}}$.

Množina M se nazývá *otevřená*, je-li $\mathsf{M} = \mathsf{M}^\circ$, a *uzavřená*, je-li $\mathsf{M} = \overline{\mathsf{M}}$.

Bod $c \in \mathbf{R}^*$ se nazývá *hromadný bod množiny* M, leží-li v každém jeho okolí $\mathsf{U}(c)$ nekonečně mnoho bodů množiny M. Množina všech hromadných bodů množiny M se nazývá *derivace množiny* M a značí M'.

Bod $c \in \mathbf{R}$ se nazývá *hromadný bod množiny* M *zprava*, resp. *zleva*, leží-li v každém jeho pravém okolí $\mathsf{U}_+(c)$, resp. levém okolí $\mathsf{U}_-(c)$, nekonečně mnoho bodů množiny M.

Bod množiny M, který není jejím hromadným bodem, se nazývá *izolovaný bod množiny* M. Množina, jejíž všechny body jsou izolované, se nazývá *diskrétní* nebo *izolovaná*.

I.19 Poznámky.

1. Vnitřní bod a izolovaný bod množiny M je prvkem množiny M, hraniční bod a hromadný bod množiny M může, ale nemusí být prvkem množiny M.

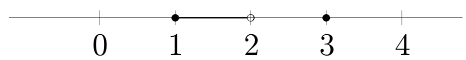
2. Množina M je otevřená, právě když je disjunktní se svou hranicí, tj. když $\mathsf{M} \cap h(\mathsf{M}) = \emptyset$; vnitřní body množiny M jsou právě ty její body, které nejsou jejími hraničními body. Množina M je uzavřená, právě když obsahuje svou hranici. Hromadný bod množiny M je bodem jejího uzávěru, bod uzávěru množiny M může, ale nemusí být jejím hromadným bodem.

3. Je-li množina M interval, např. $\mathsf{M} = \langle a, b)$, potom místo názvu hraniční bod užíváme název krajní bod. Vnitřek intervalu M je interval (a, b), hranice intervalu

M je množina $\{a,\, b\}$, uzávěr intervalu M je interval $\langle a, b\rangle$, vnějšek intervalu M je sjednocení intervalů $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, derivace intervalu M je interval $\langle a, b\rangle$. Interval M není ani otevřená ani uzavřená množina.

Příklady. Promyslete si řešení!

a) $\mathsf{M} = \langle 1, 2) \cup \{3\}$.



$\mathsf{M}^\circ = (1, 2)$, $h(\mathsf{M}) = \{1, 2, 3\}$, $\overline{\mathsf{M}} = \langle 1, 2\rangle \cup \{3\}$, $\mathbf{R} \setminus \overline{\mathsf{M}} = (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$, $\mathsf{M}' = \langle 1, 2\rangle$, přitom body intervalu $\langle 1, 2)$ jsou hromadné body množiny M, které jsou jejími prvky, a bod 2 je hromadný bod množiny M, který není jejím prvkem, body intervalu $\langle 1, 2)$ jsou hromadné body množiny M zprava, body intervalu $(1, 2\rangle$ jsou hromadné body množiny M zleva, bod 3 je izolovaný bod množiny M, $\mathsf{M} \neq \mathsf{M}^\circ \wedge \mathsf{M} \neq \overline{\mathsf{M}}$, takže množina M není ani otevřená ani uzavřená.

b) Množina $\mathbf{N}$ je diskrétní, neboť všechny její body jsou izolované.

Poznámka. Některé pojmy, které jsme zavedli v tomto a předchozích oddílech pro podmnožinu M množiny $\mathbf{R}$ a její body, je potřebné (např. v teorii reálné funkce n reálných proměnných, $n \in \mathsf{N}$) zobecnit pro podmnožinu M množiny $\mathbf{R}^2$ (reálné roviny — dvojrozměrného reálného prostoru) a její body, podmnožinu M množiny $\mathbf{R}^3$ (trojrozměrného reálného prostoru) a její body, $\ldots$, podmnožinu M množiny $\mathbf{R}^n$ (n-rozměrného reálného prostoru) a její body.

Kartézský součin množin a zobrazení

Dříve než budeme definovat pojem funkce, zopakujeme si potřebné pojmy. V celém tomto oddílu množina A je neprázdná množina určitých matematických objektů a množina B je rovněž neprázdná množina určitých (stejných nebo jiných) matematických objektů.

I.20 Definice. *Kartézským součinem množin* A a B nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic $[a, b]$, kde $a \in \mathsf{A}$ a $b \in \mathsf{B}$. Kartézský součin množin A a B značíme $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$.

Vybereme-li z kartézského součinu $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ jen ty dvojice $[a, b]$, kde čísla a a b jsou vázána nějakým vztahem (např. $a < b$, a dělitelno b apod.), dostaneme binární relaci.

I.21 Definice. *Binární relací R mezi množinami* A a B nazýváme neprázdnou podmnožinu R kartézského součinu $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$. Místo zápisu $[a, b] \in R$ zpravidla píšeme $a\ R\ b$.

I.22 Definice. Binární relaci R mezi množinami A a B nazýváme *zobrazení množiny* A *do množiny* B, existuje-li ke každému prvku $a \in \mathsf{A}$ právě jeden prvek $b \in \mathsf{B}$ takový, že $[a, b] \in R$. Zobrazení množiny do množiny značíme zpravidla kurzívním malým nebo velkým písmenem latinské abecedy.

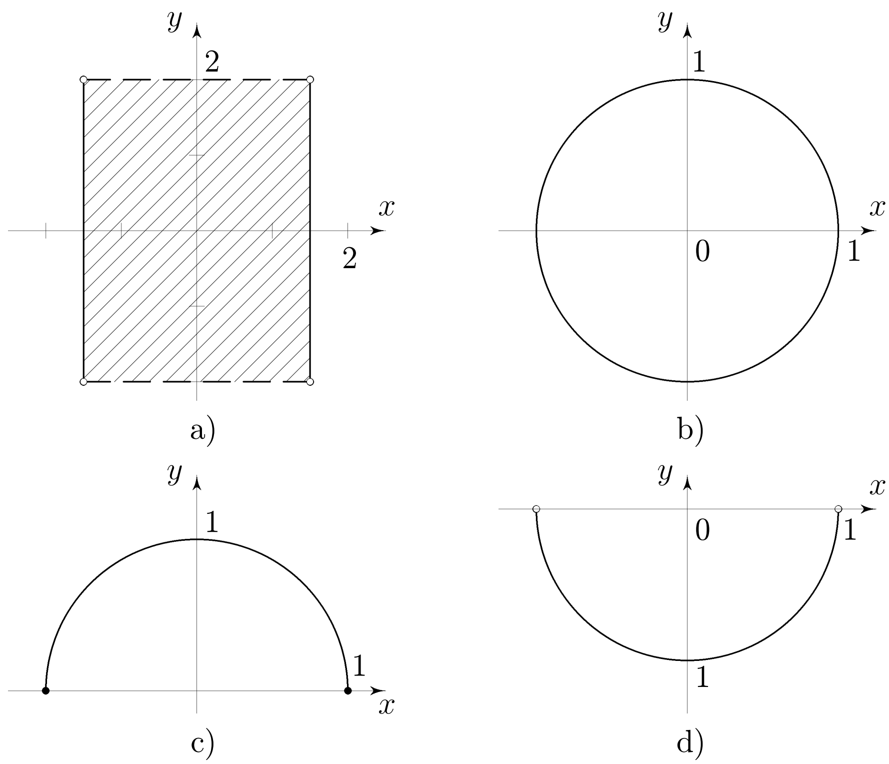
Poznámka. Binární relaci R mezi množinami A a B nazýváme *zobrazení z množiny* A *do množiny* B, existuje-li ke každému prvku $a \in \mathsf{A}$ nejvýše jeden prvek $b \in \mathsf{B}$ takový, že $[a, b] \in R$.

Jsou-li prvky množiny A body n-rozměrného reálného prostoru, $n \in \mathbf{N}$, a prvky množiny B body jednorozměrného reálného prostoru, tj. reálná čísla, pak zobrazení množiny A do množiny B nazýváme reálnou funkcí n reálných proměnných s definičním oborem A. V dalších kapitolách se budeme zabývat pouze reálnými funkcemi jedné reálné proměnné.

„Srovnání“ výše zavedených a známých pojmů podle jejich rozsahu od nejširšího k nejužšímu je takovéto: kartézský součin, binární relace, zobrazení, reálná funkce, posloupnost. Pro ilustraci uvádíme příklad.

Příklad. Znázorněme graficky množiny:

a) kartézský součin $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$,
kde $\mathsf{A} = \{x \in \mathbf{R};\ -1,5 \le x \le 1,5\}$ a $\mathsf{B} = \{y \in \mathbf{R};\ -2 < y < 2\}$.
b) binární relaci $R = \{[x, y];\ x \in \mathsf{A},\ y \in \mathsf{B},\ x^2 + y^2 = 1\}$,
c) zobrazení $f = \{[x, y];\ x \in \langle -1, 1\rangle,\ y = \sqrt{1 - x^2}\}$,
d) zobrazení $g = \{[x, y];\ x \in (-1, 1),\ y = -\sqrt{1 - x^2}\}$.



Obr. 1.7

Zobrazení f a g jsou reálné funkce jedné reálné proměnné.

II
Funkce

S funkcemi se často setkáváme v technických, přírodních, ekonomických a jiných vědách, ba i v běžném životě. Je to všude tam, kde se zkoumají hodnoty dvou (či více) veličin, které se obecně mění a jsou za daných podmínek vázány jistým vztahem tak, že hodnota jedné veličiny je určena jednoznačně hodnotou druhé veličiny (či hodnotami ostatních veličin). Říkáme přitom, že jedna veličina funkčně závisí na druhé veličině (či ostatních veličinách) nebo je funkcí druhé veličiny (či ostatních veličin).

V dalším výkladu se budeme zabývat pouze speciálním případem funkce, a to reálnou funkcí jedné reálné proměnné.

Pojem funkce

II.1 Definice. *Reálná funkce jedné reálné proměnné* (dále jen *funkce*) je zobrazení f množiny $\mathsf{A} \subset \mathbf{R}$ do množiny $\mathbf{R}$. Proměnné číslo $x \in \mathsf{A}$ nazýváme *nezávisle proměnnou* nebo *argumentem*, proměnné číslo $y \in \mathbf{R}$, pro které je $[x, y] \in f$, nazýváme *závisle proměnnou.*

Funkci značíme zpravidla kurzívním malým nebo velkým písmenem latinské nebo řecké abecedy, nejčastěji f, g, ϕ, F, G, Φ, proměnné značíme kromě x a y též jinými vhodnými písmeny. Skutečnost, že $[x, y] \in f$, $x \in \mathsf{A}$, tj. funkční závislost proměnné y na proměnné $x \in \mathsf{A}$, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in \mathsf{A}$. Číslo $f(x)$ nazýváme *hodnotou* nebo *funkční hodnotou funkce f v bodě x.*

Množinu A nazýváme *definičním oborem funkce f*, množinu všech různých hodnot funkce f v bodech $x \in \mathsf{A}$ nazýváme *oborem hodnot funkce f*. Definiční obor funkce f značíme $\mathsf{D}(f)$, obor hodnot funkce f značíme $\mathsf{H}(f)$.

II.2 Poznámka. Funkci f lze definovat také jako předpis, kterým je každé hodnotě nezávisle proměnné $x \in \mathsf{D}(f) \subset \mathbf{R}$ přiřazena právě jedna hodnota závisle proměnné $y \in \mathsf{H}(f) \subset \mathbf{R}$ (tzv. *funkční předpis*). Je-li funkce f zadána explicitně (viz níže), např. matematickým výrazem x^3 a definičním oborem A, pak funkci f zapisujeme $y = x^3$, $x \in \mathsf{A}$, nebo $f(x) = x^3$, $x \in \mathsf{A}$, nebo jen x^3, $x \in \mathsf{A}$.

II.3 Definice. *Grafem funkce f* (též *křivkou o rovnici $y = f(x)$*) nazýváme množinu všech bodů $[x, f(x)]$, kde $x \in \mathsf{D}(f)$, reálné roviny $\mathbf{R}^2$, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic. Značíme jej $\mathsf{G}(f)$.

Poznámka. Reálnou rovinu (stručně rovinu) $\mathbf{R}^2$ ztotožňujeme s kartézským součinem $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, tj. množinou všech uspořádaných dvojic reálných čísel. Každé uspořádané dvojici (x, y) reálných čísel lze totiž vzájemně jednoznačně přiřadit bod M roviny. Vzájemně jednoznačné přiřazení uspořádaných dvojic čísel bodům roviny se obvykle uskutečňuje zavedením *kartézské soustavy souřadnic v rovině*. Kartézská soustava souřadnic v rovině je zavedena volbou jejího bodu P, dvou kolmých přímek, ležících v ní a procházejících bodem P, a zavedením kartézské soustavy souřadnic s počátkem P na obou přímkách (viz poznámku 1.3). Bod P se nazývá *počátek souřadnic* (stručně *počátek*) a přímky se nazývají *osy souřadnic*, a to *první osa souřadnic* (též *osa* x) a *druhá osa souřadnic* (též *osa* y). Každému bodu M roviny je přiřazena uspořádaná dvojice (x, y) čísel. První, resp. druhé, číslo uspořádané dvojice je souřadnicí pravoúhlého průmětu bodu M na první, resp. druhou, osu souřadnic a nazývají se *první*, resp. *druhá* (též x-*ová*, resp. y-*ová*), *souřadnice bodu* M. Skutečnost, že bod M má první souřadnici rovnou číslu x a druhou souřadnici rovnou číslu y, zapisujeme $M = [x, y]$.

Vzdálenost — přesněji *euklidovská vzdálenost* — $d(A, B)$ bodů $A = [x_1, y_1]$ a $B = [x_2, y_2]$ roviny je dána vzorcem

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

proto se někdy místo o reálné rovině hovoří o euklidovské rovině.

Způsoby zadání funkce

Funkci f lze zadat rozmanitými způsoby.

1. Analyticky

   a) explicitně, tj. rovnicí $y = f(x)$, kde $f(x)$ je matematický výraz závislý na proměnné x, a množinou $\mathsf{D}(f)$,

   b) implicitně, tj. rovnicí $F(x, y) = 0$, splňující určité podmínky, s nimiž se seznámíte v teorii reálné funkce dvou reálných proměnných, a podmínkami pro proměnné x a y,

   c) parametricky, tj. soustavou dvou rovnic

   $$x = \phi(t), \quad y = \psi(t),$$

   kde ϕ a ψ jsou funkce nezávisle proměnné t (zvané *parametr*), splňující určité podmínky a mající společný definiční obor,

   d) rovnicí $\rho = g(\varphi)$, kde g je funkce, splňující určité podmínky, a podmínkou pro nezávisle proměnnou φ; proměnné ρ a φ jsou polární souřadnice bodu $[x, y] \in \mathbf{R}^2$, přičemž číslo ρ udává vzdálenost bodu $[x, y]$ od počátku a číslo φ udává velikost orientovaného úhlu s počátečním ramenem totožným s polární poloosou a koncovým ramenem totožným s průvodičem bodu $[x, y]$.

V případech b), c) a d) jsou zmíněné podmínky důležité, neboť bez nich by příslušné rovnice či soustavy rovnic nemusely určovat funkci.

Analytický způsob zadání funkce je nejčastější a pro matematické účely nejvhodnější.

2. Tabulkou, tj. dvojicemi čísel x a $f(x)$, sestavenými do tabulky.

   S tímto způsobem se setkáváme zpravidla v experimentálních úlohách při zjišťování závislosti veličin měřením. Tabulkou lze funkci zadat úplně jen tehdy, je-li její definiční obor konečná množina. Zahrnuje-li definiční obor funkce též jiné než tabulkové body, pak hodnotu funkce v těchto bodech je třeba určovat interpolací, tedy pouze přibližně.

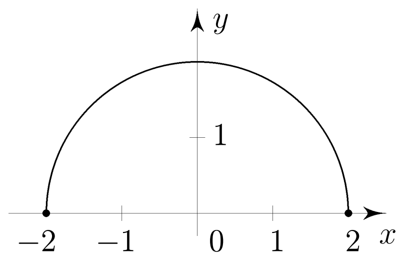
3. Grafem.

   Tento způsob se užívá zpravidla v technických aplikacích. Graf dává sice názornou představu o průběhu funkce, lze však z něho odečítat hodnoty funkce jen přibližně a je pro další matematické zpracování nejméně vhodný.

4. Kombinací výše uvedených způsobů.

Poznámka. Tutéž funkci lze zadat více způsoby a při stejném způsobu různě; je možné přejít od jednoho způsobu zadání k druhému.

Příklad. Funkce f je zadána grafem:



Obr. 2.1

Zadejme funkci f dalšími způsoby.

1. Analyticky:

   a) explicitně rovnicí $y = \sqrt{4 - x^2}$, kde $x \in \langle -2, 2 \rangle$,
   b) implicitně rovnicí $x^2 + y^2 = 4$, kde $x \in \langle -2, 2 \rangle$ a $y \in \langle 0, 2 \rangle$,
   c) parametricky soustavou rovnic $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, kde $t \in \langle 0, \pi \rangle$,
   d) rovnicí $\rho = 2$ a podmínkou $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$.

2. Tabulkou, např.:

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	0,00	1,32	1,73	1,94	2,00	1,94	1,73	1,32	0,00

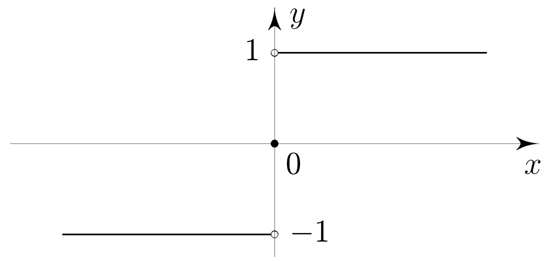
,

   $x \in \langle -2, 2 \rangle$. (Funkce však není zadána úplně.)

Poznámka. Funkce může být zadána na různých částech definičního oboru různě.

Příklad. Funkce „signum x“ (znaménko čísla x), označená symbolem $\operatorname{sgn} x$, je definována takto:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ pro } x < 0, \\ \ \ 0 \text{ pro } x = 0, \\ \ \ 1 \text{ pro } x > 0. \end{cases}$$



Obr. 2.2: Graf funkce $\operatorname{sgn} x$

II.4 Poznámky.

1. Množiny $\mathsf{D}(f)$ a $\mathsf{H}(f)$ mohou být rozmanité podmnožiny množiny $\mathbf{R}$: konečné i nekonečné množiny, intervaly, sjednocení konečného i nekonečného počtu intervalů, množina $\mathbf{N}$ aj.

2. Je-li funkce f zadána explicitně jediným matematickým výrazem $f(x)$ v celém definičním oboru $\mathsf{D}(f)$, nemusí to ještě znamenat, že neexistují čísla $x \in \mathbf{R} \setminus \mathsf{D}(f)$, pro která existuje číslo $f(x) \in \mathbf{R}$, tj. pro která má symbol $f(x)$ smysl. Znamená to jen, že definiční obor $\mathsf{D}(f)$ je podmnožinou množiny $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\ \exists f(x) \in \mathbf{R}\}$.

3. Je-li explicitní zadání funkce f neúplné z toho důvodu, že není udán definiční obor, pak se definičním oborem funkce f rozumí množina M, tj. množina všech hodnot nezávisle proměnné $x \in \mathbf{R}$, pro které existuje číslo $f(x) \in \mathbf{R}$.

Při určování definičního oboru neúplně zadané funkce vycházíme zejména z těchto podmínek:

1. jmenovatel zlomku musí být různý od čísla 0,
2. odmocněnec v odmocnině se sudým odmocnitelem musí být nezáporný,
3. argument logaritmu musí být kladný,
4. argument funkce tangens, resp. kotangens, musí být různý od lichých, resp. sudých, násobků čísla $\frac{\pi}{2}$,
5. argument funkcí arkussinus a arkuskosinus musí patřit do intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

II.5 Příklad. Určeme definiční obor funkce

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$,
b) $f(x) = \log(x^2 - x)$,
c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$,
d) $f(x) = \operatorname{cotg} 2x$,
e) $f(x) = \sqrt{-\dfrac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{8+2x-x^2}}}$.

Řešení:

a) $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$,

$\mathsf{D}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

b) $x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 1$,

$\mathsf{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

c) $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$,

$\mathsf{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle$.

d) $2x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

$\mathsf{D}(f) = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(\frac{(k-1)\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}\right)$.

e) $8 + 2x - x^2 > 0 \wedge -\log_{0,3}(x-1) \geq 0 \wedge x - 1 > 0$,

$x^2 - 2x - 8 < 0 \wedge \log_{0,3}(x-1) \leq 0 \wedge x > 1$,

$(x-4)(x+2) < 0 \wedge x - 1 \geq 1 \wedge x > 1$,

$-2 < x < 4 \wedge x \geq 2 \wedge x > 1$,

$\mathsf{D}(f) = \langle 2, 4)$.

Uvědomte si! K úplnému explicitnímu zadání funkce nestačí pouze rovnice $y = f(x)$, ale je nutné zadat i definiční obor $\mathsf{D}(f)$. Není-li $\mathsf{D}(f)$ zadán, musíme ho určit (viz poznámku 2.4.3).

Příklad. Srovnejme následující dva případy:

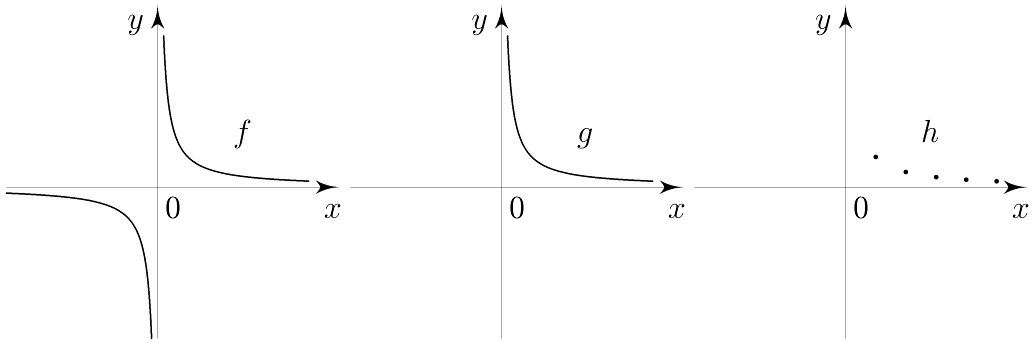
1. Jsou dány funkce

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

$$g(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty),$$

$$h(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbf{N}.$$

Přestože funkční předpisy se liší „pouze“ definičním oborem, jde o tři různé funkce, což dokumentují i jejich grafy.

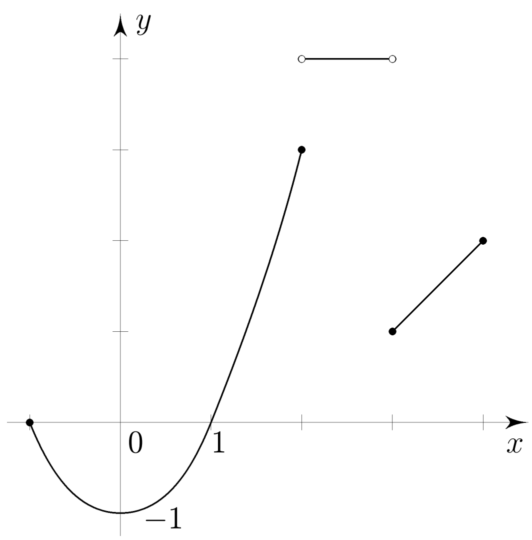


Obr. 2.3

2. Naproti tomu funkčním předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{pro } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ 4 & \text{pro } x \in (2, 3) \\ x - 2 & \text{pro } x \in \langle 3, 4 \rangle \end{cases}$$

je zadána jediná funkce s definičním oborem $\langle -1, 4 \rangle$, přestože její funkční předpis není jednotný na celém definičním oboru. Podstatná je skutečnost, že každému číslu $x \in \langle -1, 4 \rangle$ je přiřazeno právě jedno číslo $f(x) \in \langle -1, 3 \rangle \cup \{4\}$.



Obr. 2.4

Graf funkce může posloužit jednak k zadání funkce, jednak k získání názorné představy o ní. Ke každé funkci existuje její graf, avšak graf některých funkcí nelze exaktně zakreslit.

Příklad. Dirichletova funkce $D(x)$ je definována takto:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

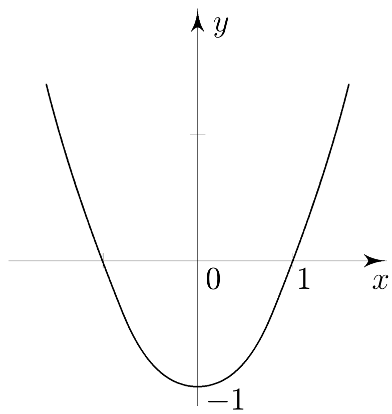
Její graf nelze zakreslit jinak než jako rovnoběžné přímky o rovnicích $y = 0$ a $y = 1$, což ovšem není správné. Nedokážeme totiž zakreslit přímku s nespočetně mnoha nekonečně malými mezerami hustě vedle sebe.

Nicméně při vyšetřování vlastností běžných „rozumných“ funkcí bývá jejich graf velmi užitečný.

Uvědomte si! $\mathsf{G}(f) \subset \mathbf{R}^2$, kdežto $\mathsf{H}(f) \subset \mathbf{R}$ a $\mathsf{D}(f) \subset \mathbf{R}$.

Příklady.

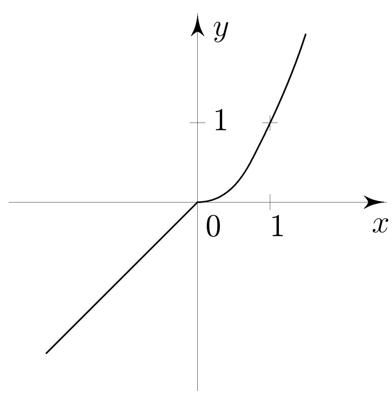
a) Sestrojme graf funkce $f_1(x) = x^2 - 1$.



Obr. 2.5

b) Sestrojme graf funkce

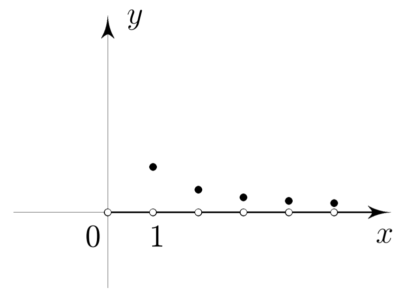
$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle, \\ x^2 & \text{pro } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$



Obr. 2.6

c) Sestrojme graf funkce

$$f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \in \mathbf{N}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}. \end{cases}$$

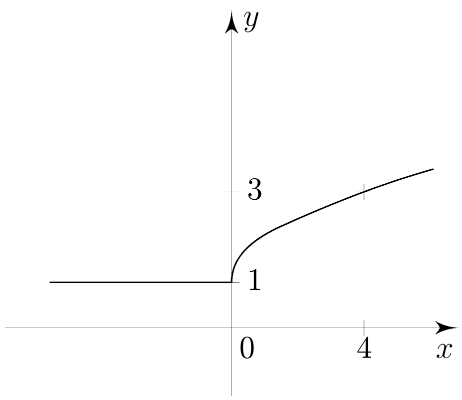


Obr. 2.7

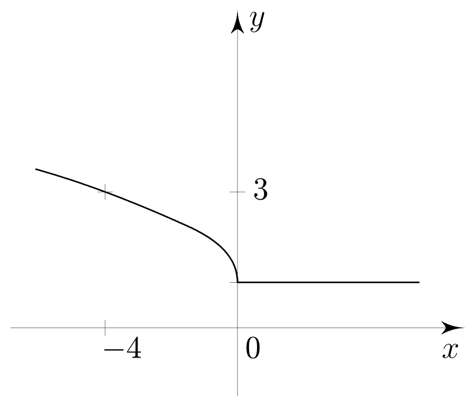
d) Sestrojme graf funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ \sqrt{x} + 1 & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty) \end{cases}$$

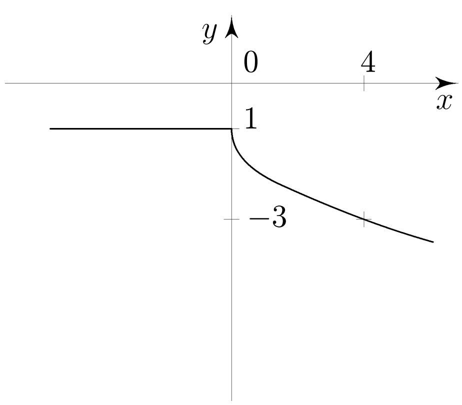
a následně grafy funkcí $f(-x)$, $-f(x)$, $f(x)+2$, $2f(x)$ a $f(2x)$.



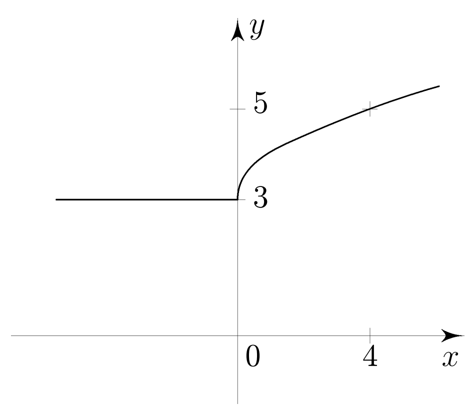
$y = f(x)$



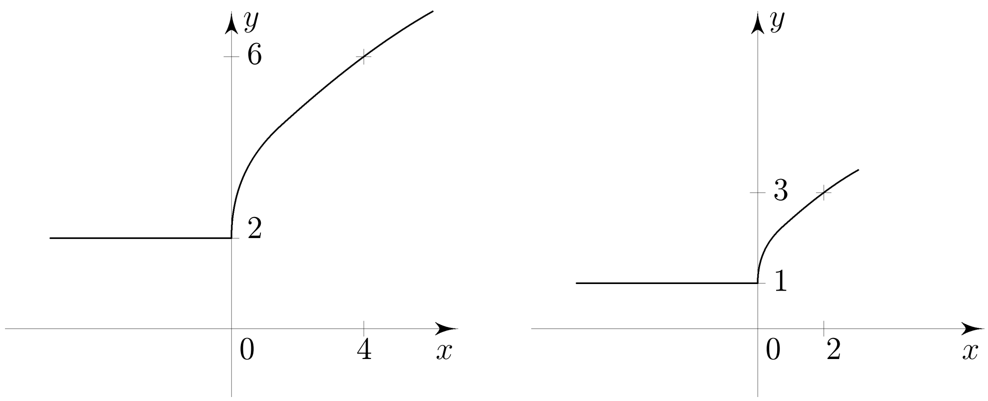
$y = f(-x)$



$y = -f(x)$



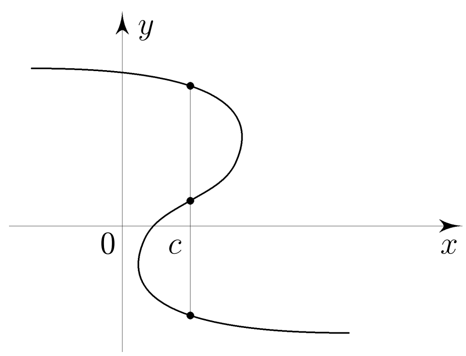
$y = f(x) + 2$



$y = 2f(x)$ $\qquad$ $y = f(2x)$

Obr. 2.8

Uvědomte si! Čára, nakreslená na následujícím obrázku 2.9, není grafem funkce, neboť některým hodnotám proměnné x, např. $x = c$, je přiřazena *více než jedna* hodnota proměnné y. (Rovnoběžka s osou y protíná graf funkce nejvýše v jednom bodě.)



Obr. 2.9

K sestrojení grafu funkce využíváme znalosti získané dříve, např. poznatek, že grafem kvadratické funkce je parabola, pomáháme si i tabulkou hodnot funkce. U komplikovanější funkce určujeme některé její význačné body, jako jsou body maxima, body minima a inflexní body, a zjišťujeme další její vlastnosti, např. monotónnost, konvexnost, konkávnost apod., tj. vyšetřujeme její průběh; k tomu potřebujeme znát diferenciální počet.

Globální vlastnosti funkcí

II.6 Definice. Funkce f se nazývá *periodická*, existuje-li reálné číslo $p \neq 0$ takové, že

(1) $x \in \mathsf{D}(f) \Leftrightarrow x + p \in \mathsf{D}(f)$,

(2) pro každé číslo $x \in \mathsf{D}(f)$ platí $f(x + p) = f(x)$.

Číslo p se nazývá *perioda funkce* f. Nejmenší kladné číslo této vlastnosti se nazývá *primitivní perioda funkce* f.

Příklad. Funkce $\sin x$ je periodická s primitivní periodou 2π. Čísla 4π, -2π a další celočíselné násobky čísla 2π (kromě 0) jsou rovněž její periody.

II.7 Poznámky.

1. Je-li číslo p perioda funkce, pak také každé číslo kp, kde $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, je perioda této funkce.

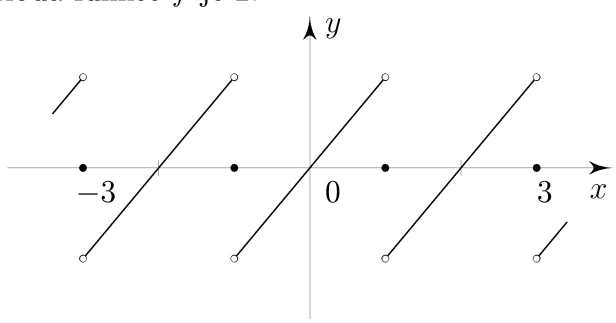
2. Při vyšetřování vlastností periodické funkce s primitivní periodou p stačí vyšetřit tyto vlastnosti jen na některém polouzavřeném intervalu, jehož délka je p, např. na intervalu $\langle 0, p)$. Takovému intervalu říkáme *základní interval periodicity* této funkce.

Příklady.

a) Sestrojme graf periodické funkce f, která je na základním intervalu periodicity $\langle -1, 1)$ zadána takto:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = -1, \\ x & \text{pro } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Primitivní perioda funkce f je 2.



Obr. 2.10: Graf funkce f

b) Najděme primitivní periodu konstantní funkce $f(x) = a$, $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$ (viz definici 2.16 a poznámku 2.26).

Pro každé číslo $x \in \mathbf{R}$ a každé číslo $p \in \mathbf{R}$ je $x + p \in \mathbf{R}$ a přitom $f(x + p) = f(x) = a$. Perioda konstantní funkce je tedy každé číslo $p \neq 0$, avšak mezi těmito čísly neexistuje nejmenší kladné číslo; tedy konstantní funkce nemá primitivní periodu.

II.8 Příklad. Najděme primitivní periodu funkce $f(x) = \sin 2x$.

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$. Pro každé číslo $x \in \mathbf{R}$ a každé číslo $p \in \mathbf{R}$ je $x + p \in \mathbf{R}$. Hledejme nejmenší kladné číslo p takové, že pro všechna čísla $x \in \mathbf{R}$ platí rovnost $\sin 2(x + p) = \sin 2x$. Má-li platit tato rovnost, musí platit též rovnosti

$$\sin(2x + 2p) - \sin 2x = 0,$$
$$2 \sin \frac{2x + 2p - 2x}{2} \cos \frac{2x + 2p + 2x}{2} = 0,$$
$$\sin p \cos(2x + p) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že tato rovnost má platit pro všechna čísla $x \in \mathbf{R}$, klademe pouze $\sin p = 0$ a odtud plyne, že $p = k\pi$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Nejmenší kladné číslo p této vlastnosti dostaneme pro $k = 1$, takže primitivní perioda funkce $\sin 2x$ je π.

II.9 Definice. Funkce f se nazývá *sudá*, resp. *lichá*, jestliže

(1) $x \in \mathsf{D}(f) \Leftrightarrow -x \in \mathsf{D}(f)$,

(2) pro každé číslo $x \in \mathsf{D}(f)$ platí $f(-x) = f(x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$.

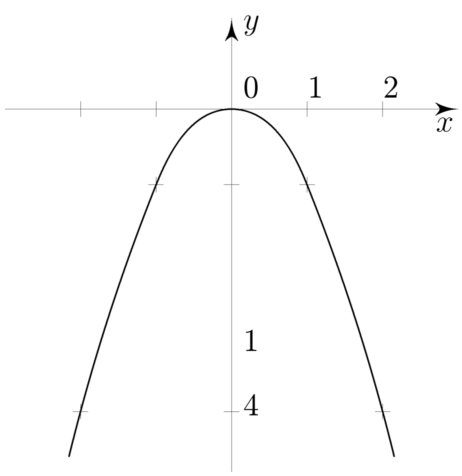
Poznámka. Z definice 2.9 je zřejmé, že

1. definiční obor sudé i liché funkce je souměrný podle počátku,
2. graf sudé funkce je souměrný podle osy y a graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

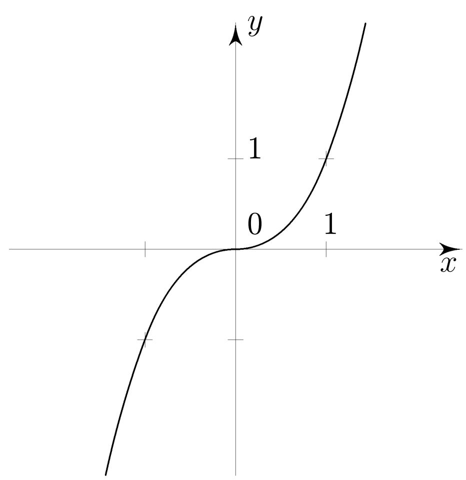
Příklady.

a) Funkce $f(x) = -x^2$ je sudá, neboť $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$, tedy $x \in \mathsf{D}(f) \Leftrightarrow -x \in \mathsf{D}(f)$, a $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$.

b) Funkce $f(x) = x^3$ je lichá, neboť $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$, tedy $x \in \mathsf{D}(f) \Leftrightarrow -x \in \mathsf{D}(f)$, a $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.



$f(x) = -x^2$



$f(x) = x^3$

Obr. 2.11

c) Existuje funkce, která je sudá i lichá zároveň. Je to např. funkce $f(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$. (Osa x je souměrná podle osy y i podle počátku.)

d) Je zřejmé, že funkce, jejíž definiční obor nesplňuje podmínku souměrnosti podle počátku, není ani sudá, ani lichá. Je to například funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle -1, 2\rangle$.

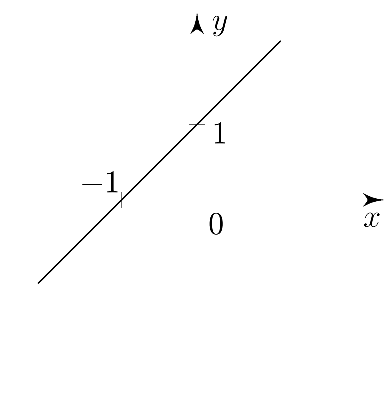
II.10 Definice. Funkce f se nazývá *prostá na množině* M,[♠] jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in \mathsf{M}$ taková, že $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$ (nebo jestliže množina M je bod).

II.11 Příklad. Rozhodněme, zda funkce $f_1(x) = x + 1$ a $f_2(x) = x^2 + 1$ jsou prosté na svém definičním oboru.

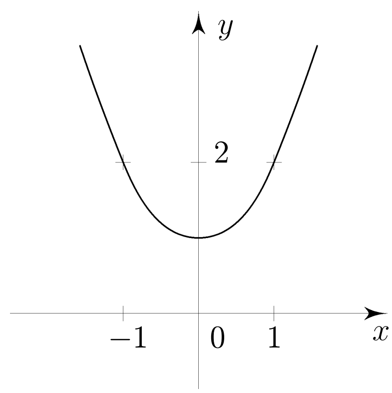
Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f_1) = \mathbf{R}$ a $\mathsf{D}(f_2) = \mathbf{R}$.

Pro všechna čísla $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ taková, že $x_1 \neq x_2$, je $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$, tj, $f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$, a tedy funkce f_1 je prostá na množině $\mathsf{D}(f_1) = \mathbf{R}$.

V případě funkce f_2 např. pro $x_1 = -1$ a $x_2 = 1 \neq x_1$ je $f_2(x_1) = (-1)^2 + 1 = 1^2 + 1 = f_2(x_2)$, a tedy funkce f_2 není prostá na množině $\mathsf{D}(f_2) = \mathbf{R}$. (Je ale prostá např. na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.)



$f_1(x) = x + 1$



$f_2(x) = x^2 + 1$

Obr. 2.12

Poznámka. Je-li funkce f prostá na množině M, pak každá rovnoběžka s osou x protíná její graf nejvýše v jednom bodě.

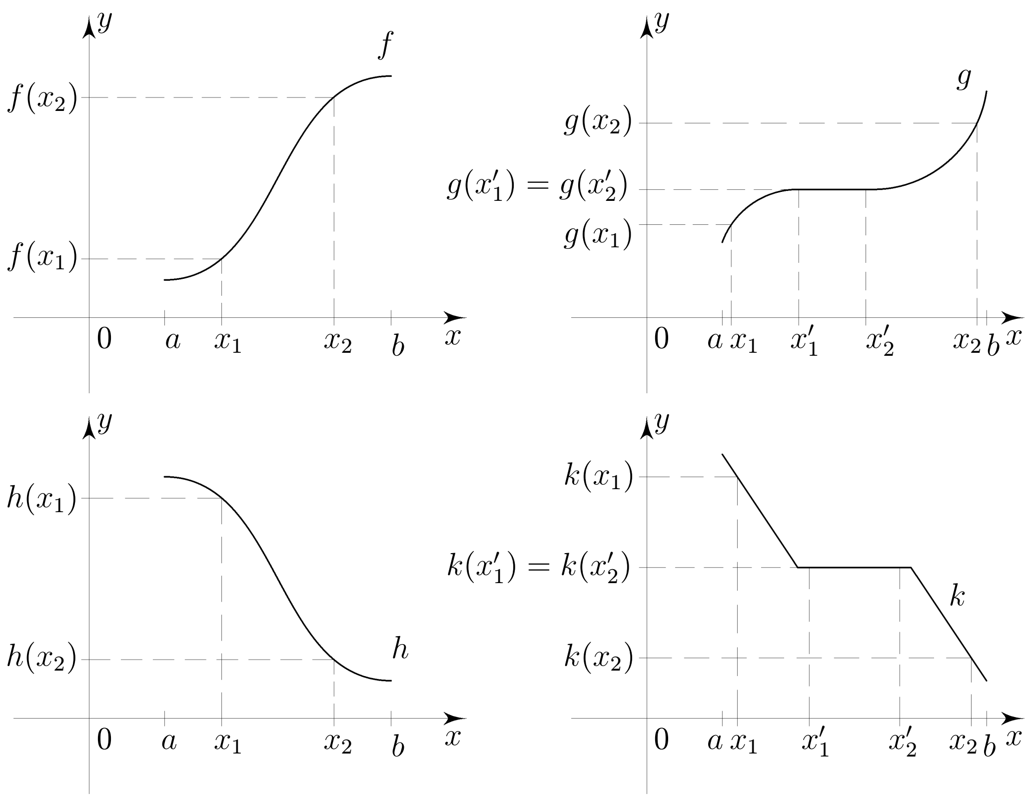
II.12 Příklad. Dokažme, že funkce $f(x) = ax + b$, kde $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ a $b \in \mathbf{R}$, je prostá na množině $\mathsf{D}(f)$.

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$. Máme dokázat: Je-li $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Nechť $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ a $a \neq 0$. Pak $ax_1 \neq ax_2 \Rightarrow ax_1 + b \neq ax_2 + b$, a tedy $f(x_1) \neq f(x_2)$. Funkce f je prostá na množině $\mathbf{R}$.

[♠] V celém tomto oddílu M značí neprázdnou podmnožinu množiny $\mathsf{D}(f)$.

II.13 Definice. Funkce f se nazývá $\left\{\begin{matrix} \textit{rostoucí} \\ \textit{neklesající} \\ \textit{klesající} \\ \textit{nerostoucí} \end{matrix}\right\}$ *na množině* M, jestliže pro všechna čísla $x_1 \in \mathsf{M}$ a $x_2 \in \mathsf{M}$ taková, že $x_1 < x_2$, platí $\left\{\begin{matrix} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \end{matrix}\right\}$.



Obr. 2.13: K definici 2.13

Na obrázcích 2.13 jsou grafy funkcí f, g, h a k. Tyto funkce jsou po řadě rostoucí (a zároveň neklesající), neklesající, klesající (a zároveň nerostoucí) a nerostoucí na množině $\mathsf{M} = \{x \in \mathbf{R};\ a \leq x \leq b\}$ neboli na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$.

II.14 Příklad. Dokažme, že funkce $f(x) = ax + b$, kde $a \in \mathbf{R}^-$ a $b \in \mathbf{R}$, je klesající na svém definičním oboru.

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$. Nechť $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ a $a \in \mathbf{R}^-$. Pak platí $ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Funkce f je tedy klesající na množině $\mathbf{R}$.

II.15 Definice. Funkce $\left\{\begin{matrix} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \end{matrix}\right\}$ na množině M se nazývá *ryze monotónní* na množině M.

Funkce $\left\{\begin{matrix} \text{nerostoucí} \\ \text{neklesající} \end{matrix}\right\}$ na množině M se nazývá *monotónní* na množině M.

Definice 2.13 a 2.15 rozšíříme později i pro případ, kdy množina M je vnitřní bod množiny $\mathsf{D}(f)$. (Viz definici 6.1.)

II.16 Definice. Funkce f se nazývá *konstantní* na množině M, jestliže pro všechna čísla $x_1, x_2 \in \mathsf{M}$ platí $f(x_1) = f(x_2)$.

Je-li funkce f konstantní na množině M, pak existuje $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro všechna $x \in \mathsf{M}$ je $f(x) = a$. Konstantní funkce na množině M, pro kterou je $a = 0$, se nazývá *nulová funkce* na množině M.

Příklad. Sledujme monotónnost konstantní funkce

$$f(x) = a, \quad a \in \mathbf{R},$$

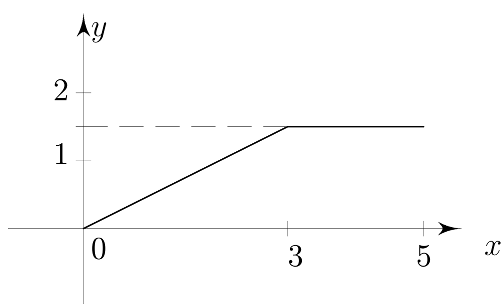
na množině $\mathbf{R}$.

Pro všechna $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ taková, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) = f(x_2) = a$, tzn. $f(x_1) \leq f(x_2)$ a zároveň $f(x_1) \geq f(x_2)$. Tedy konstantní funkce je neklesající i nerostoucí na množině $\mathbf{R}$, tj. monotónní na množině $\mathbf{R}$.

Příklad. Sledujme monotónnost funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in \langle 0, 3 \rangle \\ \frac{3}{2} & \text{pro } x \in (3, 5 \rangle \end{cases}$$

na intervalech $\langle 0, 3 \rangle$, $\langle 3, 5 \rangle$ a $\langle 0, 5 \rangle$.

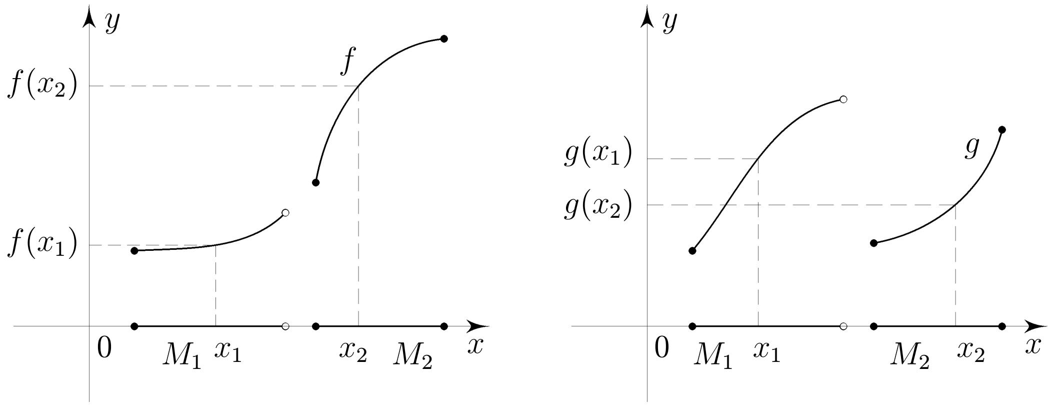


Obr. 2.14

Funkce f je rostoucí, tedy ryze monotónní a monotónní na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$, nerostoucí i neklesající, tedy monotónní na intervalu $\langle 3, 5 \rangle$, a neklesající, tedy monotónní na intervalu $\langle 0, 5 \rangle$.

II.17 Poznámka. Funkce rostoucí na množině M je zároveň neklesající na množině M, ale ne obráceně. Funkce klesající na množině M je zároveň nerostoucí na množině M, ale ne obráceně.

II.18 Poznámka. Funkce f a g jsou zadány grafy, uvedenými na obr. 2.15. Funkce f je rostoucí na množinách M_1, M_2 a $\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2$, naproti tomu funkce g je rostoucí na množinách M_1 a M_2, ale není rostoucí na množině $\mathsf{M}_1 \cup \mathsf{M}_2$.



Obr. 2.15

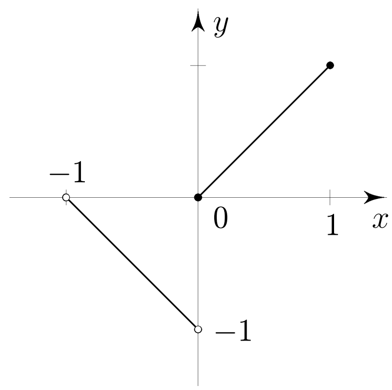
II.19 Věta. *Funkce ryze monotónní na množině* M *je prostá na množině* M.

Poznámka. Obrácená věta neplatí.

Příklad. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{pro } x \in (-1,0) \\ x & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle \end{cases}$$

je prostá a přitom není ryze monotónní na svém definičním oboru.



Obr. 2.16

II.20 Věta. *Je-li funkce f ryze monotónní, a to rostoucí, resp. klesající, na množině* M*, pak je též ryze monotónní, a to rostoucí, resp. klesající, na každé své neprázdné podmnožině, obsahující aspoň dva různé body.*

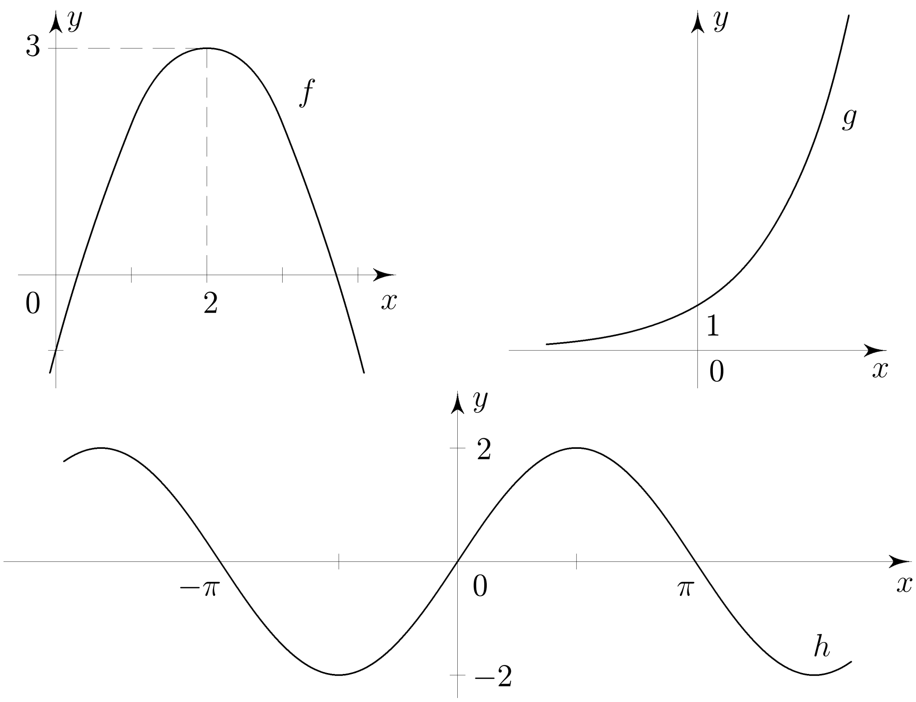
Poznámka. Obrácená implikace neplatí.

II.21 Definice. Říkáme, že funkce f *je omezená shora*, resp. *zdola, na množině* M, jestliže existuje $k \in \mathbf{R}$, resp. $l \in \mathbf{R}$, takové, že pro všechna $x \in \mathsf{M}$ platí $f(x) \leq k$, resp. $f(x) \geq l$.

Říkáme, že funkce f *je omezená na množině* M, je-li omezená shora i zdola na množině M.

II.22 Věta. *Funkce f je omezená na množině* M*, právě když existuje $K \in \mathbf{R}_0^+$ takové, že pro všechna $x \in \mathsf{M}$ platí $|f(x)| \leq K$ (tj. $-K \leq f(x) \leq K$).*

Příklad. Funkce $f(x) = -(x-2)^2 + 3$ je omezená shora, ale není omezená zdola na množině $\mathbf{R}$ (např. $k = 3$, l neexistuje), funkce $g(x) = e^x$ je omezená zdola, ale není omezená shora na množině $\mathbf{R}$ (např. $l = 0$, k neexistuje), funkce $h(x) = 2\sin x$ je omezená shora i zdola, a tedy omezená na množině $\mathbf{R}$ (např. $k = 2$, $l = -2$, $K = 2$).



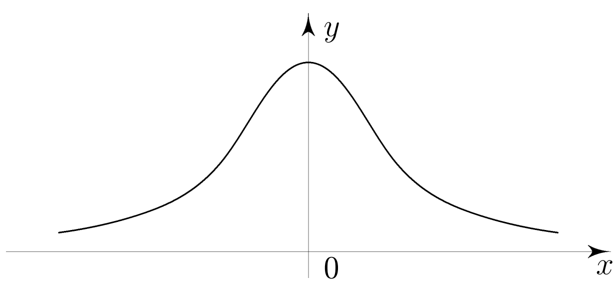
Obr. 2.17

II.23 Příklad. Zjistěme, zda funkce

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

je omezená na svém definičním oboru.

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$. Pro všechna čísla $x \in \mathbf{R}$ je $\frac{1}{1+x^2} > 0$ a $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ (a také $|\frac{1}{1+x^2}| \leq 1$), tedy funkce f je omezená na množině $\mathbf{R}$.



Obr. 2.18: Graf funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

II.24 Poznámka. Zvláštní případy funkcí omezených zdola na množině M jsou:
funkce kladná na množině M, tj. taková, že $\forall x \in \mathsf{M}$ je $f(x) > 0$,
funkce nezáporná na množině M, tj. taková, že $\forall x \in \mathsf{M}$ je $f(x) \geq 0$.

Zvláštní případy funkcí omezených shora na množině M jsou:
funkce záporná na množině M, tj. taková, že $\forall x \in \mathsf{M}$ je $f(x) < 0$,
funkce nekladná na množině M, tj. taková, že $\forall x \in \mathsf{M}$ je $f(x) \leq 0$.

II.25 Definice. Nechť $c \in \mathsf{M}$. Číslo $f(c)$ nazýváme *globální maximum*, resp. *globální minimum*, funkce f na množině M, jestliže pro všechna $x \in \mathsf{M}$ platí $f(x) \leq f(c)$, resp. $f(x) \geq f(c)$, a značíme $\max\limits_{x\in\mathsf{M}} f(x)$, resp. $\min\limits_{x\in\mathsf{M}} f(x)$.

Globální maximum a globální minimum funkce f na množině M nazýváme souhrnně *globálními* (též *absolutními*) *extrémy funkce* f na množině M.

Existuje-li globální extrém $f(c)$ funkce f na množině M, říkáme též, že funkce f *má globální extrém* $f(c)$ na množině M nebo že funkce f *nabývá globálního extrému* $f(c)$ na množině M.

Příklad. Viz. obr. 2.17. Funkce f má globální maximum 3 a nemá globální minimum na $\mathbf{R}$. Funkce g nemá globální extrémy na $\mathbf{R}$. Funkce h má globální maximum 2 a globální minimum -2 na $\mathbf{R}$.

II.26 Poznámka. Některé vlastnosti funkce f (periodicitu, sudost a lichost) jsme definovali na celém jejím definičním oboru. Jiné vlastnosti (např. prostotu, monotónnost, omezenost) jsme definovali na množině $\mathsf{M} \subset \mathsf{D}(f)$; pokud $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f)$, pak stručně říkáme, že funkce f má dotyčnou vlastnost, aniž uvádíme množinu M. Lokálními vlastnostmi funkcí se budeme zabývat v dalších kapitolách.

Početní operace s funkcemi

II.27 Definice. Říkáme, že funkce f a g *jsou si rovny na množině* M, jestliže pro všechna čísla $x \in \mathsf{M}$ je $f(x) = g(x)$. Jestliže přitom $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(g)$, říkáme prostě, že funkce f a g *jsou si rovny*. Rovnost funkcí f a g značíme $f = g$.

Poznámka. Funkce, které jsou si rovny, mají týž definiční obor, týž obor hodnot i týž graf.

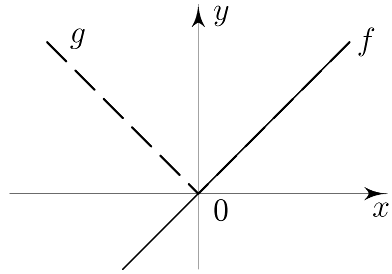
Uvědomte si! Je-li $\mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(g)$ a $\mathsf{H}(f) = \mathsf{H}(g)$, neznamená to ještě, že $f = g$.

II.28 Příklad. Rozhodněme, zda funkce $f(x) = \frac{x}{x^2}$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ jsou si rovny.
Řešení: $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\mathsf{D}(g) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, tedy $\mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(g)$.
$f(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = g(x)$ pro všechna $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Funkce f a g jsou si rovny.

II.29 Příklad. Rozhodněme, zda funkce $f(x) = x$ a $g(x) = \sqrt{x^2}$ jsou si rovny.
Řešení: $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$, $\mathsf{D}(g) = \mathbf{R}$, tedy $\mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(g)$.

Avšak
$$g(x) = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x & \text{pro } x \in \mathbf{R}^- \\ x & \text{pro } x \in \mathbf{R}_0^+ \end{cases}.$$

Je tedy $g(x) = f(x)$ jen na množině $\mathbf{R}_0^+$. Funkce f a g si proto nejsou rovny.



Obr. 2.19: Grafy funkcí f a g

II.30 Definice. Nechť $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f) \cap \mathsf{D}(g)$.

Součtem funkcí f a g nazýváme funkci $f + g$ takovou, že pro všechna čísla $x \in \mathsf{M}$ je

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Rozdílem funkcí f a g (v tomto pořadí) nazýváme funkci $f - g$ takovou, že pro všechna čísla $x \in \mathsf{M}$ je

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

Součinem funkcí f a g nazýváme funkci $f \cdot g$ takovou, že pro všechna čísla $x \in \mathsf{M}$ je

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Podílem funkcí f a g (v tomto pořadí) nazýváme funkci $\frac{f}{g}$ takovou, že pro všechna čísla $x \in \mathsf{M} \setminus \{x \in \mathsf{D}(g);\, g(x) = 0\}$ je

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Příklad. Jsou dány funkce $f(x) = x$ a $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Vyjádřeme jejich součet, rozdíl, součin a podíl v tomto i obráceném pořadí.

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$, $\mathsf{D}(g) = \langle -1, 1\rangle$ a $\mathsf{D}(f) \cap \mathsf{D}(g) = \langle -1, 1\rangle$.

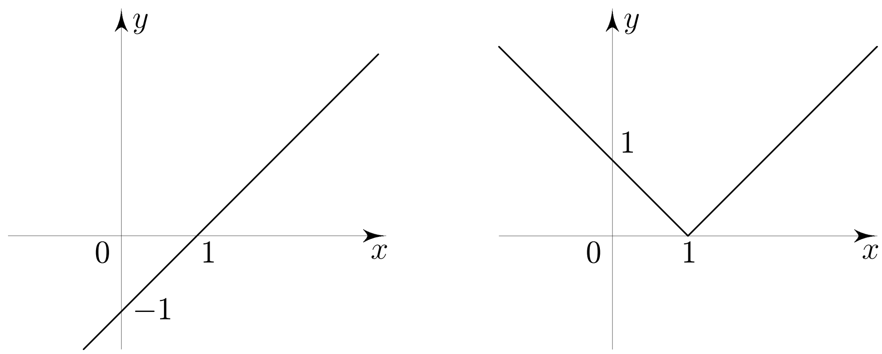
Součet funkcí f a g je funkce $(f + g)(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1, 1\rangle$,
rozdíl funkcí f a g je funkce $(f - g)(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1, 1\rangle$,
součin funkcí f a g je funkce $(f \cdot g)(x) = x\sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1, 1\rangle$,
podíl funkcí f a g je funkce $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$,

V obráceném pořadí: $(g + f)(x) = (f + g)(x)$, $(g - f)(x) = \sqrt{1 - x^2} - x$, $x \in \langle -1, 1\rangle$, $(g \cdot f)(x) = (f \cdot g)(x)$, $(\frac{g}{f})(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$.

II.31 Definice. *Absolutní hodnotou funkce* f nazýváme funkci $|f|$ takovou, že pro všechna čísla $x \in \mathsf{D}(f)$ je $|f|(x) = |f(x)|$.

Příklad. Je dána funkce $f(x) = x - 1$. Porovnejme grafy $\mathsf{G}(f)$ a $\mathsf{G}(|f|)$.

$|f|(x) = |x - 1|,\ x \in \mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$.



$f(x) = x - 1$ $\qquad$ $|f|(x) = |x - 1|$

Obr. 2.20

II.32 Poznámka. Graf $\mathsf{G}(|f|)$ můžeme sestrojit pomocí grafu $\mathsf{G}(f)$ tak, že ty jeho části, které jsou pod osou x, překlopíme souměrně podle osy x a ostatní jeho části ponecháme.

Složená funkce

II.33 Definice. Nechť $y = f(u)$ je funkce s definičním oborem $\mathsf{D}(f)$ a $u = g(x)$ funkce s definičním oborem $\mathsf{D}(g)$. Jestliže $\mathsf{H}(g) \subset \mathsf{D}(f)$, můžeme proměnnou y považovat za závislou na proměnné x, tj. za funkci $y = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$ s definičním oborem $\mathsf{D}(g)$. Tuto funkci nazýváme *funkcí složenou z funkcí f a g* (v tomto pořadí), stručně *složenou funkcí $f \circ g$* (též $f[g]$). Funkci f, resp. g, nazýváme *vnější*, resp. *vnitřní*, funkcí složené funkce $f \circ g$.

II.34 Příklad.

a) Nechť $f(u) = \sin u$ a $g(x) = x^2$. Vyjádřeme složenou funkci $(f \circ g)(x)$.

b) Nechť $g(u) = u^2$ a $f(x) = \sin x$. Vyjádřeme složenou funkci $(g \circ f)(x)$.

Řešení:

a) $\mathsf{D}(g) = \mathbf{R}$, $\mathsf{H}(g) = \langle 0, +\infty)$, $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$, takže $\mathsf{H}(g) \subset \mathsf{D}(f)$.
$(f \circ g)(x) = \sin x^2,\ x \in \mathbf{R}$.

b) $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$, $\mathsf{H}(f) = \langle -1, 1\rangle$, $\mathsf{D}(g) = \mathbf{R}$, takže $\mathsf{H}(f) \subset \mathsf{D}(g)$.
$(g \circ f)(x) = (\sin x)^2,\ x \in \mathbf{R}$.

Všimněte si, že v příkladech a) a b) funkce f a g jsou zadány shodně (neboť na označení proměnných nezáleží); v příkladě a) však funkce f je vnější funkcí a funkce g je vnitřní funkcí, zatímco v příkladě b) je tomu naopak.

II.35 Příklad. Nechť $f(u) = \sqrt{u}$ a $g(x) = 4 - x^2$. Vyjádřeme složenou funkci $(f \circ g)(x)$.

Řešení: $\mathsf{D}(g) = \mathbf{R}$, $\mathsf{H}(g) = (-\infty, 4\rangle$, $\mathsf{D}(f) = \langle 0, +\infty)$, takže $\mathsf{H}(g)$ není podmnožinou $\mathsf{D}(f)$. Protože není splněna podmínka $\mathsf{H}(g) \subset \mathsf{D}(f)$, složená funkce $(f \circ g)(x)$, $x \in \mathsf{D}(g) = \mathbf{R}$, neexistuje.

Jestliže však funkci $g(x)$ nahradíme funkcí $g_1(x) = 4 - x^2$, $x \in \langle -2, 2\rangle$, pak složená funkce $(f \circ g_1)(x)$, $x \in \mathsf{D}(g_1) = \langle -2, 2\rangle$, existuje, protože $\mathsf{H}(g_1) = \langle 0, 4\rangle \subset \subset \mathsf{D}(f)$, a je $(f \circ g_1)(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in \langle -2, 2\rangle$.

Inverzní funkce

II.36 Definice. Nechť f je funkce prostá na svém definičním oboru. Funkci f^{-1}, která každému číslu $y \in \mathsf{H}(f)$ přiřazuje číslo $x \in \mathsf{D}(f)$, pro které je $y = f(x)$, nazýváme *funkcí inverzní k funkci* f, stručně *inverzní funkcí* f^{-1}.

II.37 Poznámky.

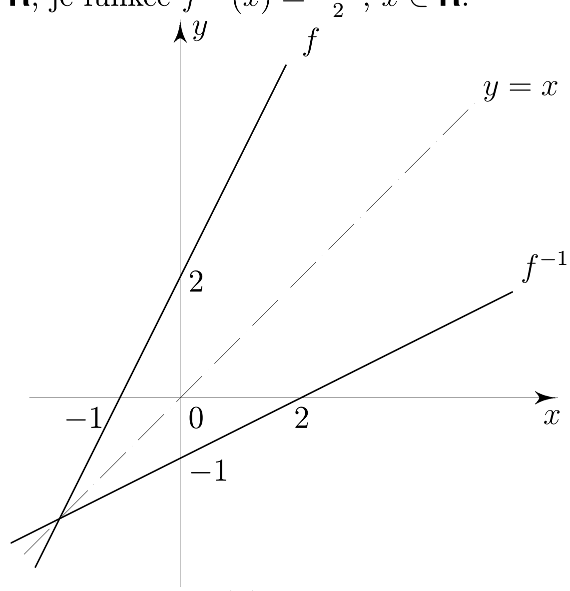
1. Zřejmě je $\mathsf{D}(f^{-1}) = \mathsf{H}(f)$, $\mathsf{H}(f^{-1}) = \mathsf{D}(f)$.
2. Podmínka, aby funkce f byla prostá na svém definičním oboru, je *nutná* pro existenci inverzní funkce f^{-1}.

II.38 Příklad. Určeme funkci inverzní k funkci $f(x) = 2x + 2$.

Řešení: Funkce f je prostá na svém definičním oboru $\mathbf{R}$ (viz příklad 2.12). Obor jejích funkčních hodnot je $\mathbf{R}$.

Funkci f zapíšeme ve tvaru $y = 2x+2$ a z této rovnice vyjádříme proměnnou x: $x = \frac{y-2}{2}$. Funkce $x = \frac{y-2}{2}$, $y \in \mathbf{R}$, je funkce inverzní k funkci f.

V tomto případě písmeno y udává nezávisle proměnnou a písmeno x závisle proměnnou. Protože je však zvykem označovat proměnné opačně, zaměníme označení proměnných: $y = \frac{x-2}{2}$ a budeme konstatovat, že inverzní funkcí k funkci $f(x) = 2x + 2$, $x \in \mathbf{R}$, je funkce $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

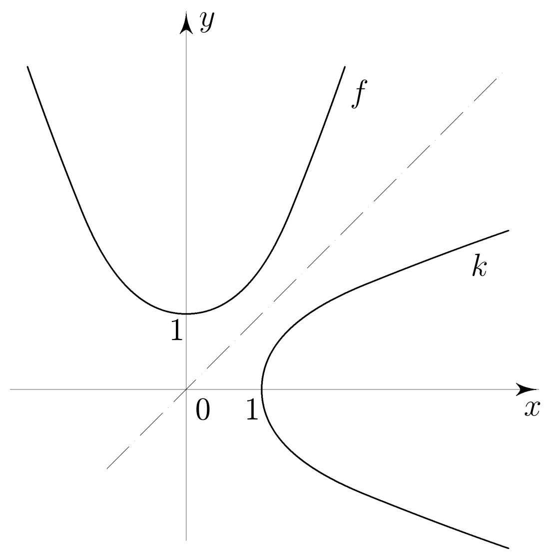


Obr. 2.21: Graf funkce $f(x) = 2x + 2$ a funkce k ní inverzní

II.39 Poznámka. Grafy $\mathsf{G}(f)$ a $\mathsf{G}(f^{-1})$ jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$.

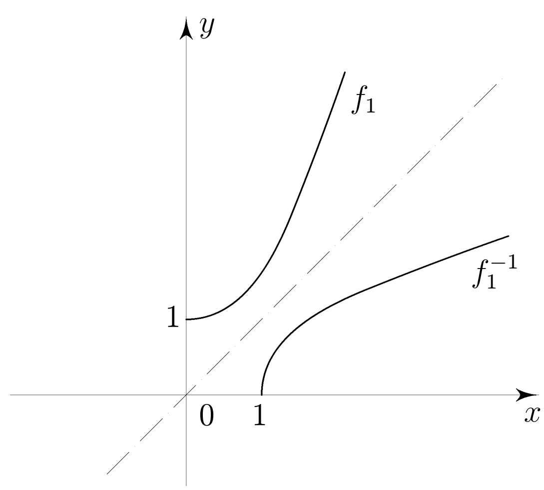
II.40 Poznámka. Místo funkce f, která není prostá na svém definičním oboru a ke které tedy neexistuje inverzní funkce, je někdy užitečné zavést novou funkci $f_1(x) = f(x)$, $x \in \mathsf{D}(f_1) \subset \mathsf{D}(f)$, jež je na svém definičním oboru prostá; k funkci f_1 pak existuje inverzní funkce f_1^{-1}.

Příklad. Z příkladu 2.11 víme, že funkce $f(x) = x^2 + 1$ není prostá na svém definičním oboru $\mathbf{R}$, a proto k ní neexistuje inverzní funkce. Sestrojíme-li totiž křivku k osově souměrnou s grafem funkce f podle přímky $y = x$, bude křivkou k parabola, která však není grafem funkce.



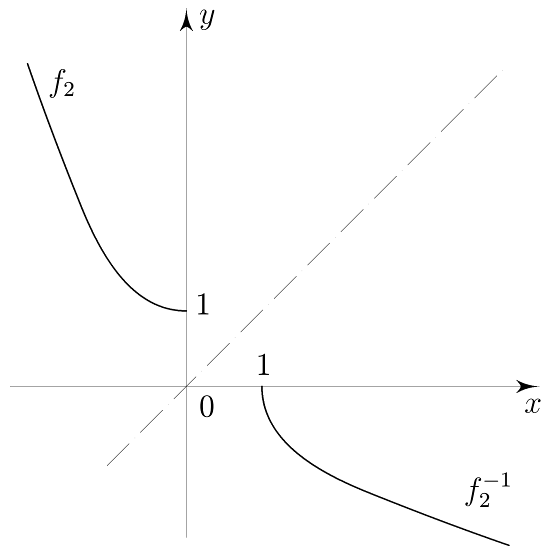
Obr. 2.22: Graf funkce $f(x) = x^2 + 1$ a křivka k

Kdybychom však zadali funkci $f_1(x) = x^2 + 1$, $x \in \langle 0, +\infty)$, prostou na svém definičním oboru, pak by k této funkci inverzní funkce existovala, a to $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$, $x \in \langle 1, +\infty)$. Dostali bychom ji tímto postupem: $y = x^2 + 1$, $x \in \langle 0, +\infty)$, $y \in \langle 1, +\infty)$, tedy $\mathsf{H}(f_1) = \langle 1, +\infty)$, $x^2 = y - 1$, $x = \sqrt{y-1}$, neboť $x \in \langle 0, +\infty)$. Po záměně proměnných je $y = f_1^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$, $x \in \mathsf{D}(f_1^{-1}) = \mathsf{H}(f_1) = \langle 1, +\infty)$.



Obr. 2.23: Graf navzájem inverzních funkcí f_1 a f_1^{-1}

Obdobným způsobem bychom mohli určit funkci inverzní k funkci $f_2(x) = x^2 + 1$, $x \in (-\infty, 0\rangle$.



Obr. 2.24: Graf navzájem inverzních funkcí f_2 a f_2^{-1}

Elementární funkce

Předmětem studia matematické analýzy jsou mimo jiné elementární funkce a jejich vlastnosti.

II.41 Definice. *Elementární funkcí* rozumíme funkci, kterou lze utvořit z několika funkcí, zvaných základní elementární funkce, pomocí konečného počtu sčítání, odčítání, násobení, dělení a tvoření složené funkce.

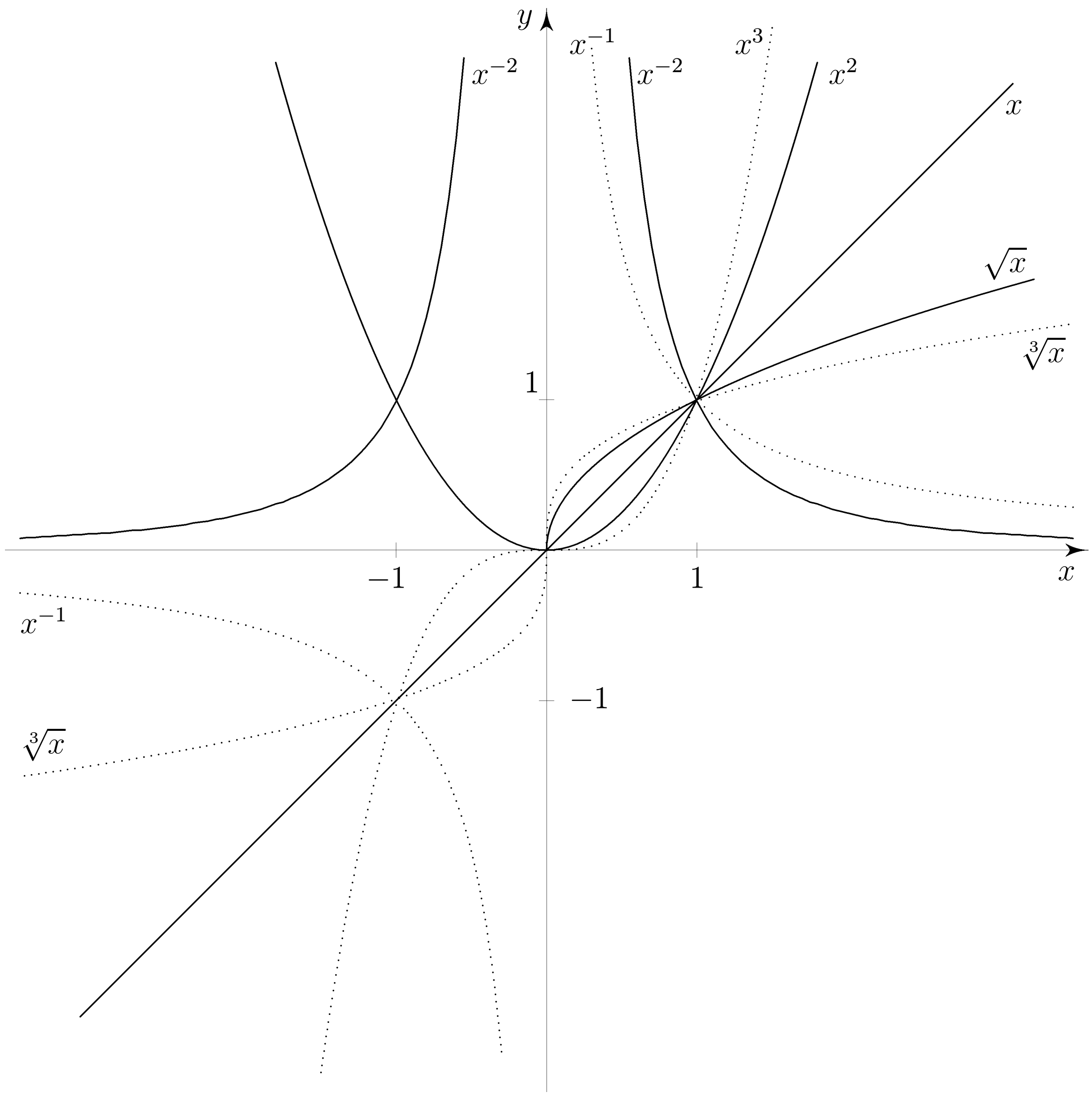
Za *základní elementární funkce* jsou zpravidla považovány tyto funkce:

1. konstantní:
$$f(x) = a, \quad a \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R},$$

2. mocninná s přirozeným exponentem:
$$y = x^n, \quad n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R}.$$

3. mocninná s reálným exponentem:
$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R},\ \mathrm{D}(f) = \mathbf{R}^+.$$

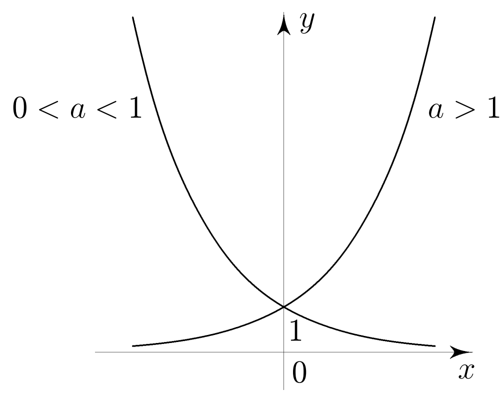
Ve speciálních případech lze definiční obor rozšířit, viz obr. 2.25:
je-li $\alpha > 0$, pak $\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}_0^+$,
je-li $\alpha = -\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbf{N}$ a q je liché, pak $\mathrm{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
je-li $\alpha = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbf{N}$ a q je liché, pak $\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$.



Obr. 2.25: Grafy mocninných funkcí

4. exponenciální:

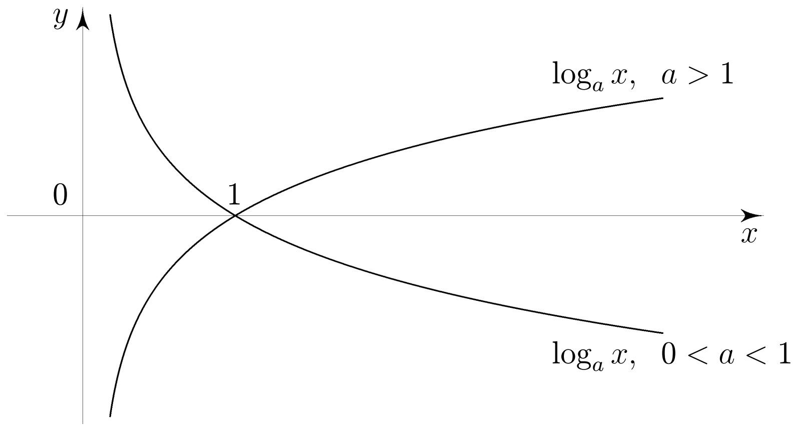
$$f(x) = a^x, \quad a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\},\ \mathsf{D}(f) = \mathbf{R},$$



Obr. 2.26: Graf exponenciální funkce a^x

5. logaritmická:

$$f(x) = \log_a x, \quad a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\},\ \mathsf{D}(f) = \mathbf{R}^+,$$

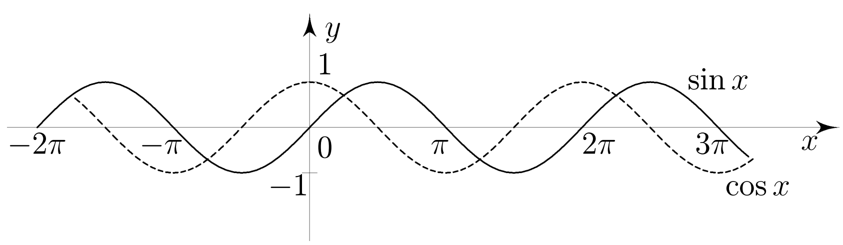


Obr. 2.27: Graf logaritmické funkce

6. goniometrické:

$$f(x) = \sin x, \quad \mathsf{D}(f) = \mathbf{R},$$

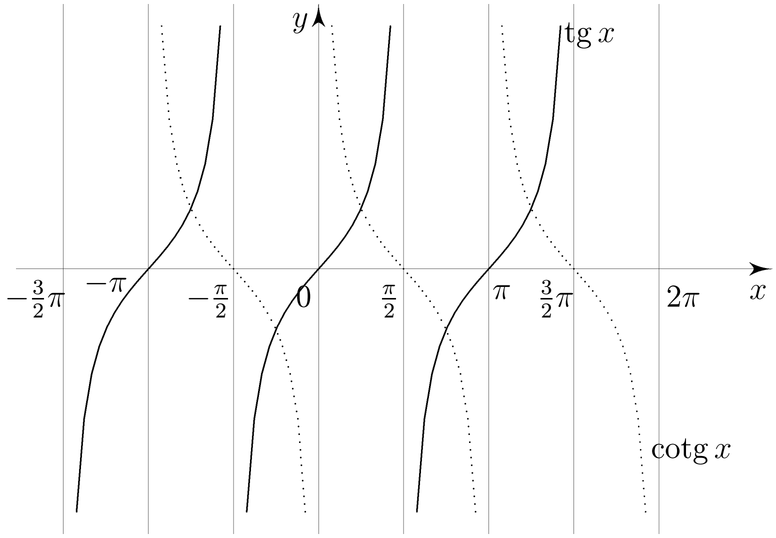
$$f(x) = \cos x, \quad \mathsf{D}(f) = \mathbf{R},$$



Obr. 2.28: Grafy funkcí $\sin x$ a $\cos x$

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad \mathsf{D}(f) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(-\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi\right),$$

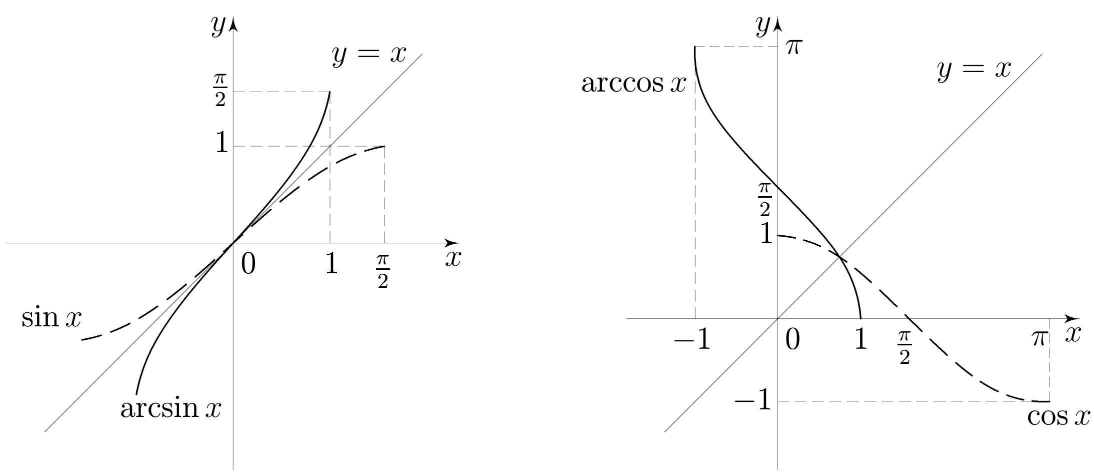
$$f(x) = \operatorname{cotg} x, \quad \mathsf{D}(f) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k\pi, \pi + k\pi),$$



Obr. 2.29: Grafy funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$

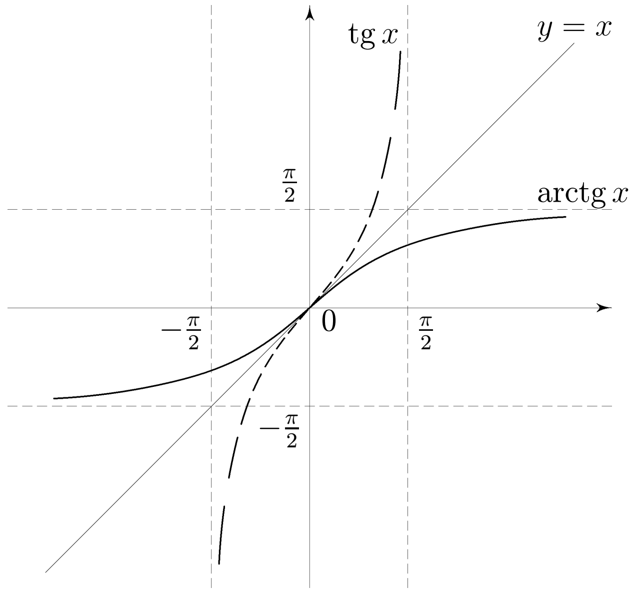
7. cyklometrické:

arkussinus: $f(x) = \arcsin x$, $\mathsf{D}(f) = \langle -1, 1\rangle$,
arkuskosinus: $f(x) = \arccos x$, $\mathsf{D}(f) = \langle -1, 1\rangle$,



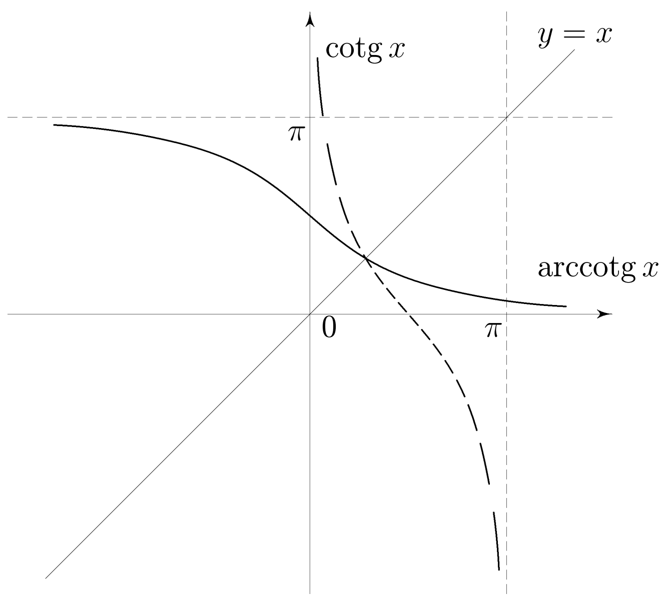
Obr. 2.30: Grafy funkcí $\arcsin x$ a $\arccos x$

arkustangens: $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad \mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$,



Obr. 2.31: Graf funkce $\operatorname{arctg} x$

arkuskotangens: $f(x) = \operatorname{arccotg} x, \quad \mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$.



Obr. 2.32: Graf funkce $\operatorname{arccotg} x$

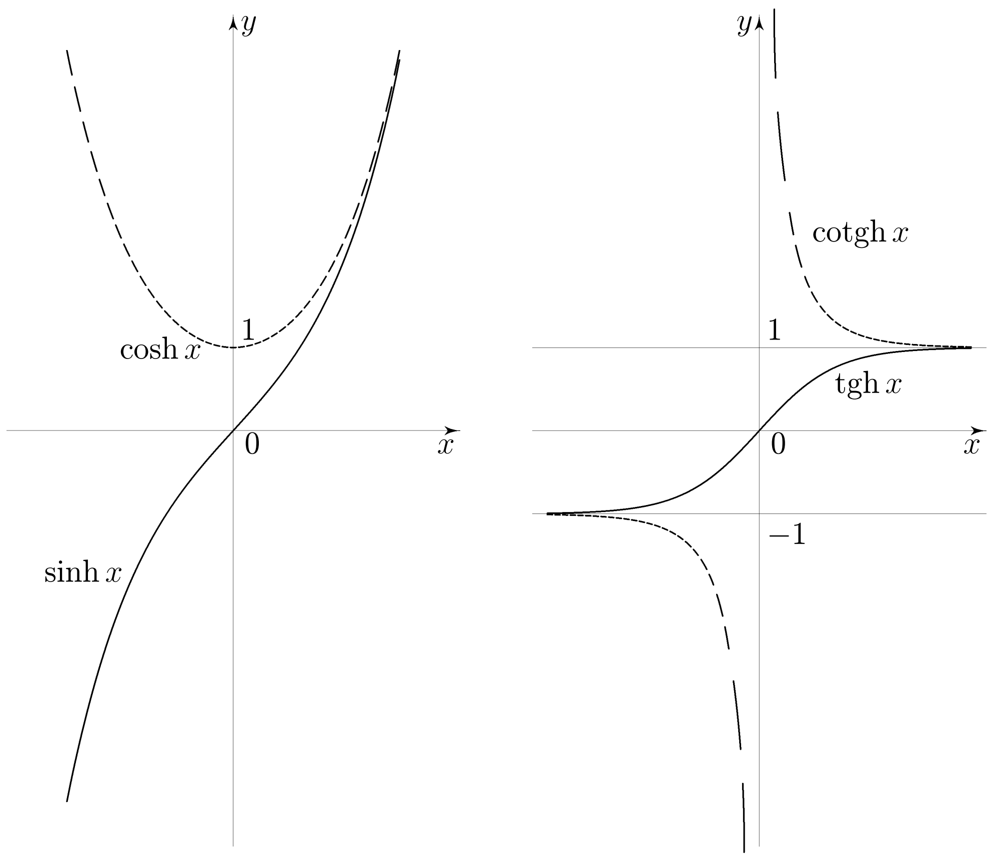
8. hyperbolické:

   hyperbolický sinus: $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$,

   hyperbolický kosinus: $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$,

   hyperbolický tangens: $f(x) = \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$,

   hyperbolický kotangens: $f(x) = \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,



Obr. 2.33: Grafy hyperbolických funkcí

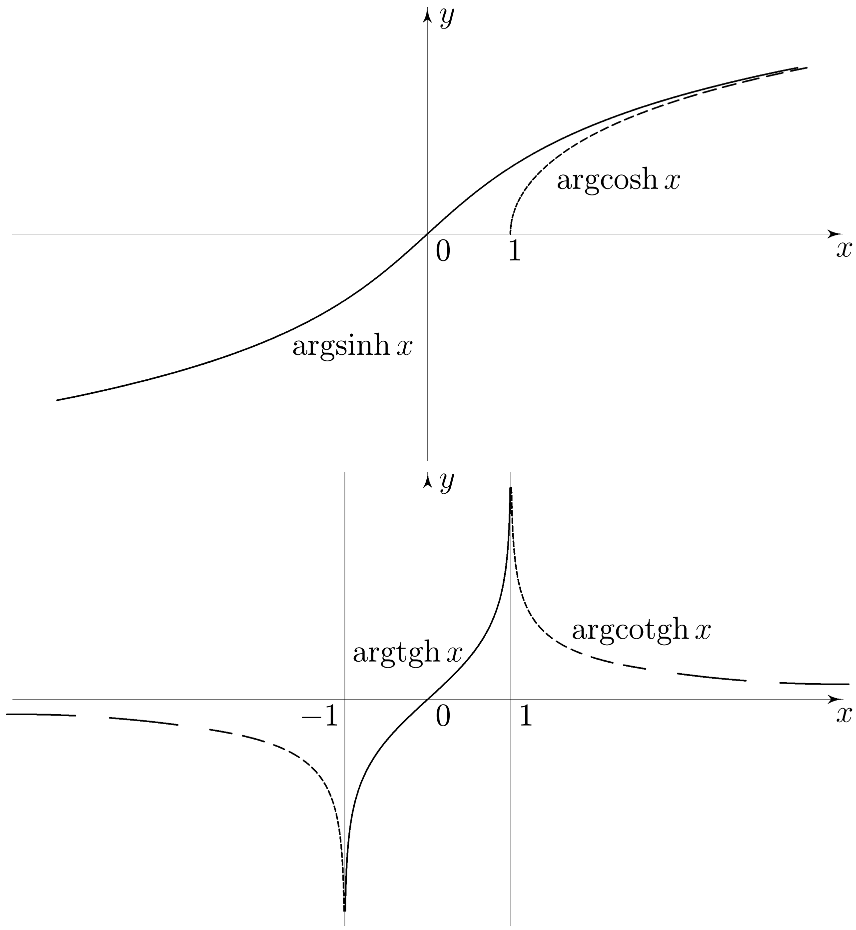
9. hyperbolometrické:

   argument hyperbolického sinu: $f(x) = \operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$,

   argument hyperbolického kosinu: $f(x) = \operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$,
   $\mathsf{D}(f) = \langle 1, +\infty)$,

   argument hyperbolického tangens: $f(x) = \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$,
   $\mathsf{D}(f) = (-1, 1)$,

   argument hyperbolického kotangens: $f(x) = \operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$,
   $\mathsf{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.



Obr. 2.34: Grafy hyperbolometrických funkcí

II.42 Poznámky.

1. Mezi základní elementární funkce patří též funkce, které se od vyjmenovaných funkcí liší jen definičním oborem.

2. Příslušné dvojice funkcí $4, 5$ a rovněž tak funkcí $6, 7$ a $8, 9$ jsou navzájem inverzní; u některých dvojic funkcí to však platí, jen když vhodně zúžíme jejich definiční obor.

Stanovení oboru hodnot a vlastností výše uvedených funkcí ponecháváme na čtenáři.

Příklad. Funkce $(6-3x)^2 + \frac{\cos x}{x} - \frac{e^x}{1+\ln x}$ je elementární, neboť je utvořena ze základních elementárních funkcí výše uvedeným způsobem.

Elementární funkce dělíme na algebraické a transcendentní.

II.43 Definice. *Algebraickou funkcí* nazýváme elementární funkci, která je utvořena z konstantní funkce a mocninné funkce x^a, $a \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, pomocí konečného počtu sčítání, odčítání, násobení, dělení a tvoření složené funkce.

Transcendentní funkcí nazýváme elementární funkci, která není algebraická.

II.44 Příklad. Funkce $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 1$, $g(x) = \frac{\frac{1}{x^2-1}}{3+\frac{x}{(x+2)^2}}$ a $h(x) = \frac{4-\sqrt[3]{x+2}}{x(3+\sqrt[5]{x^3})}$ jsou algebraické, funkce $p(x) = 2\sin(x^2-1)$ a $q(x) = e^x \cos x$ jsou transcendentní.

Algebraické funkce dělíme na racionální a iracionální.

II.45 Definice. *Racionální funkcí* nazýváme algebraickou funkci, která je utvořena z konstantní funkce a mocninné funkce x pomocí konečného počtu sčítání, odčítání, násobení a dělení.

Iracionální funkcí nazýváme algebraickou funkci, která není racionální.

Poznámka. Existují funkce, které se na první pohled jeví jako iracionální a přitom po úpravě jsou rovny racionálním funkcím; v takovém případě je považujeme za racionální funkce.

Příklad. Funkce f a g z příkladu 2.44 jsou racionální, funkce h z téhož příkladu je iracionální. Funkce $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ je racionální, neboť je rovna funkci $x - 1$.

Racionální funkce jsou jednak celé, jednak lomené.

II.46 Definice. *Celou racionální funkcí* nebo *polynomickou funkcí* (též *algebraickým mnohočlenem (polynomem)*) nazýváme racionální funkci, která je utvořena z konstantní funkce a mocninné funkce x pomocí konečného počtu sčítání, odčítání a násobení. Můžeme ji vyjádřit ve tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in \mathbf{N}_0$ je její *stupeň*, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$, jsou její *koeficienty*, $x \in \mathbf{R}$. Koeficienty polynomické funkce bývají někdy uváděny v obráceném pořadí, takže se píše

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \ a_0 \neq 0.$$

Polynomickou funkci, jejíž stupeň je n, nazýváme *polynomickou funkcí n-tého stupně*. Polynomickou funkci, jejíž stupeň je n nebo nižší, tj. funkci $P(x)$ bez podmínky $a_n \neq 0$, včetně nulové funkce, nazýváme *polynomickou funkcí nejvýše n-tého stupně*.

Lomenou racionální funkcí nazýváme racionální funkci, která není celá. Můžeme ji definovat jako podíl

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{x \in \mathbf{R};\, Q(x) = 0\},$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomické funkce, z nichž poslední je nejméně 1. stupně. Lomenou racionální funkci $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde stupeň polynomické funkce $P(x)$ je nižší než stupeň polynomické funkce $Q(x)$, nazýváme *ryze lomenou racionální funkcí*; v opačném případě ji nazýváme *neryze lomenou racionální funkcí*.

Připomeneme si některé známé racionální funkce:

1. celou racionální funkci 0. stupně (neboli nenulovou konstantní funkci)

$$y = a, \quad a \neq 0,\ x \in \mathbf{R},$$

2. celou racionální funkci 1. stupně (stručně *lineární funkci*)

$$y = ax + b, \quad a \neq 0,\ x \in \mathbf{R},$$

speciálně $y = kx$, $k \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$, vyjadřující přímou úměrnost,

3. celou racionální funkci 2. stupně (stručně *kvadratickou funkci*)

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,\ x \in \mathbf{R},$$

4. *lineární lomenou funkci*

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad \neq bc,\ c \neq 0,\ x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\},$$

speciálně $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, vyjadřující nepřímou úměrnost.

Příklad. Funkce f z příkladu 2.44 je polynomická, funkce g z téhož příkladu je lomená racionální, a to ryze.

Poznámka. Existují funkce, které se na první pohled jeví jako lomené racionální funkce a přitom po úpravě jsou rovny celým racionálním funkcím; v takovém případě je považujeme za celé racionální funkce.

Příklad. Funkce $\frac{2x^3-4x^2+10x-20}{x^2+5}$ je celá racionální funkce, neboť je rovna funkci $2x - 4$.

Schéma dělení elementárních funkcí

- Elementární funkce
  - algebraické funkce
    - racionální funkce
      - celé racionální funkce
      - lomené racionální funkce
        - ryze lomené racionální funkce
        - neryze lomené racionální funkce
    - iracionální funkce
  - transcendentní funkce

Poznámka. Zdaleka ne všechny funkce jsou elementární. Např. Dirichletova funkce a funkce $\operatorname{sgn} x$ nejsou elementární funkce.

III
Posloupnost

Posloupnost je důležitým speciálním případem funkce. Má jisté specifické vlastnosti, proto jí věnujeme zvláštní kapitolu.

V celé této kapitole n a n_0 značí přirozená čísla.

Pojem posloupnosti

III.1 Definice. *Posloupnost reálných čísel* (dále jen *posloupnost*) je zobrazení množiny $\mathbf{N}$ do množiny $\mathbf{R}$. Posloupnost, kterou je každému číslu $n \in \mathbf{N}$ přiřazeno číslo $a_n \in \mathbf{R}$, zapisujeme

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

nebo stručně

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

nebo jen $\{a_n\}$; číslo a_n se nazývá *n-tý člen posloupnosti* $\{a_n\}$, číslo n *index členu posloupnosti* $\{a_n\}$.

Poznámka. Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina $\mathbf{N}$. Posloupnost má vždy nekonečně mnoho členů.

Posloupnost můžeme zadat:

1. vzorcem pro n-tý člen (pokud existuje),
2. rekurentně, tj. m prvními členy a vzorcem (pokud existuje), kterým je n-tý člen vyjádřen pomocí m bezprostředně předcházejících členů,
3. výčtem všech členů, prakticky však pouze několika prvních členů, pokud je evidentní, jaké členy následují.

Příklad. Posloupnost $\{2n-5\}$ je zadána n-tým členem.

Její rekurentní zadání je $a_1 = -3$, $a_n = a_{n-1} + 2$, $n \geq 2$.

Její zadání výčtem členů je $\{-3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$.

Jistě jste si všimli, že je to speciální případ posloupnosti, a to aritmetická posloupnost.

III.2 Příklady.

a) Určeme prvních 5 členů posloupnosti $\left\{\dfrac{n+3}{2n-1}\right\}$.

Řešení:

$a_1 = \dfrac{1+3}{2\cdot 1-1} = 4,$

$a_2 = \dfrac{2+3}{2\cdot 2-1} = \dfrac{5}{3},$

$a_3 = \dfrac{3+3}{2\cdot 3-1} = \dfrac{6}{5},$

$a_4 = \dfrac{4+3}{2\cdot 4-1} = 1,$

$a_5 = \dfrac{5+3}{2\cdot 5-1} = \dfrac{8}{9}.$

b) Určeme prvních 5 členů posloupnosti zadané rekurentně:

$$a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 3(n-1),\ n \geq 3.$$

Řešení:

$a_1 = 3,$

$a_2 = 5,$

$a_3 = 2a_2 + a_1 - 3\cdot 2 = 2\cdot 5 + 3 - 3\cdot 2 = 7,$

$a_4 = 2a_3 + a_2 - 3\cdot 3 = 2\cdot 7 + 5 - 3\cdot 3 = 10,$

$a_5 = 2a_4 + a_3 - 3\cdot 4 = 2\cdot 10 + 7 - 3\cdot 4 = 15.$

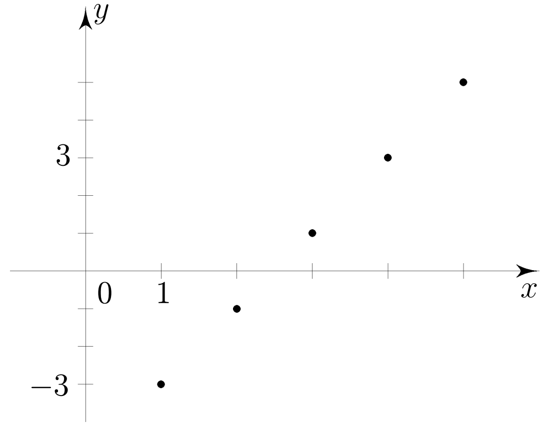
c) Určeme n-tý člen a_n posloupnosti

$$\left\{\frac{2}{11}, \frac{3}{12}, \frac{4}{13}, \frac{5}{14}, \frac{6}{15}, \dots, \right\}.$$

Řešení: Zřejmě je $a_n = \dfrac{n+1}{n+10}$.

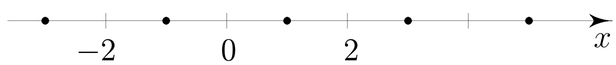
III.3 Definice. *Graf posloupnosti* $\{a_n\}$ je množina všech bodů $[n, a_n]$ v rovině $\mathbf{R}^2$, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic. Značíme jej $\mathsf{G}(\{a_n\})$.

Příklad. Sestrojme graf posloupnosti $\{2n-5\}$.



Obr. 3.1

Poznámka. Posloupnost $\{a_n\}$ lze graficky znázornit též jako množinu všech bodů $[a_n]$ na přímce $\mathbf{R}^1$, na které je zavedena kartézská soustava souřadnic. Např. posloupnost $\{2n-5\}$ lze graficky znázornit též takto:



Obr. 3.2

Uvědomte si! Definiční obor posloupnosti $\{a_n\}$ je diskrétní množina $\mathbf{N}$, proto je grafem posloupnosti $\{a_n\}$ množina *izolovaných* bodů v rovině $\mathbf{R}^2$.

III.4 Definice. *Konečnou posloupností reálných čísel* (stručně *konečnou posloupností*) rozumíme zobrazení prvních m přirozených čísel do množiny $\mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N}$. Konečnou posloupnost, kterou je každému číslu n, $n \leq m$, přiřazeno číslo a_n, značíme $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ nebo stručně $\{a_n\}_{n=1}^{m}$.

Příklad. Výrazem $\{n+1\}_{n=1}^{15} = \{2, 3, \ldots, 16\}$ je dána konečná posloupnost.

Pojem posloupnosti lze zobecnit. Její členy nemusí být jen čísla, ale i jiné matematické objekty, např. funkce.

Vlastnosti posloupností

III.5 Definice. Posloupnost, jejíž všechny členy se sobě rovnají, se nazývá *konstantní* nebo *stacionární*.

Příklad. Posloupnost $\{a\}_{n=1}^{\infty} = \{a, a, a, a, a, \ldots\}$ je konstantní.

III.6 Definice. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{rostoucí} \\ \textit{neklesající} \\ \textit{klesající} \\ \textit{nerostoucí} \end{array}\right\}, \text{ jestliže pro všechna čísla } n \text{ platí } \left\{\begin{array}{l} a_n < a_{n+1} \\ a_n \leq a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \end{array}\right\}.$$

Posloupnost $\left\{\begin{matrix}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\end{matrix}\right\}$ se nazývá *ryze monotónní.*

Posloupnost $\left\{\begin{matrix}\text{neklesající}\\ \text{nerostoucí}\end{matrix}\right\}$ se nazývá *monotónní.*

III.7 Definice. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *omezená shora*, resp. *zdola*, existuje-li číslo $k \in \mathbf{R}$, resp. $l \in \mathbf{R}$, takové, že pro všechna n je $a_n \leq k$, resp. $a_n \geq l$. Říkáme, že posloupnost je *omezená*, je-li omezená shora i zdola.

III.8 Věta. *Posloupnost je omezená, právě když existuje $K \in \mathbf{R}_0^+$ takové, že pro všechna n platí $|a_n| \leq K$.*

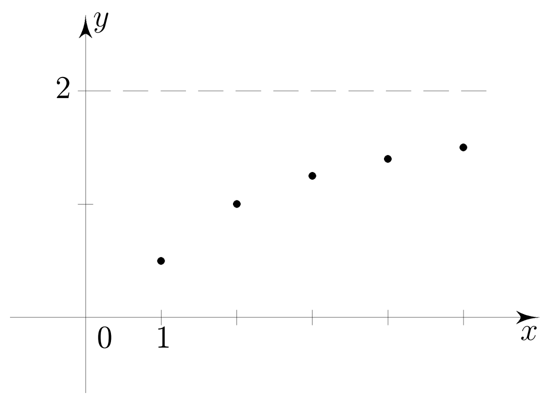
III.9 Příklad. Zjistěme, zda posloupnost

$$\{a_n\} = \left\{\frac{2n-1}{n+1}\right\}$$

je monotónní a omezená.

Řešení: Vypočítáme prvních 5 členů posloupnosti $\{a_n\}$ a nakreslíme její graf.

$$\{a_n\} = \left\{\frac{2n-1}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \dots\right\}.$$



Obr. 3.3

Ze znalosti prvních členů a grafu posloupnosti $\{a_n\}$ usoudíme, že tato posloupnost je rostoucí. Přesvědčíme se o tom, zda pro všechna čísla n je $a_n < a_{n+1}$, tj.

$$\frac{2n-1}{n+1} < \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2n+1}{n+2}\,.$$

Užitím ekvivalentních úprav této nerovnice dostaneme, že

$$\begin{aligned}(2n-1)(n+2) &< (2n+1)(n+1),\\ 2n^2+3n-2 &< 2n^2+3n+1,\\ -2 &< 1,\end{aligned}$$

což platí pro všechna čísla n; tím je důkaz toho, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí, a tedy ryze monotónní a monotónní, proveden.

Vzhledem k tomu, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí, je zdola omezená členem $a_1 = \frac{1}{2}$. Výpočtem několika členů a_n s velkým indexem n odhadneme číslo, kterým je posloupnost $\{a_n\}$ omezená shora.

Z toho, že $a_{99} = 1{,}97$ a $a_{999} = 1{,}997$, usoudíme, že pro všechna čísla n je $a_n < 2$.

Nejdříve se přesvědčíme, zda pro všechna čísla n je $a_n \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{n+1} &\geq \frac{1}{2}, \\ 2(2n-1) &\geq n+1, \\ 4n-2 &\geq n+1, \\ 3n &\geq 3, \\ n &\geq 1, \end{aligned}$$

tedy dokazovaná nerovnice je splněna pro všechna čísla n.

Dále se přesvědčíme, zda pro všechna čísla n je $a_n < 2$.

$$\frac{2n-1}{n+1} < 2 \Rightarrow 2n-1 < 2n+2 \Rightarrow -1 < 2,$$

tedy dokazovaná nerovnice je splněna pro všechna čísla n.

Dokázali jsme, že pro všechna čísla n je

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2n-1}{n+1} < 2,$$

tzn., že posloupnost $\{a_n\}$ je omezená shora i zdola, a tedy omezená. Rovněž můžeme tvrdit, že pro všechna čísla n platí nerovnost

$$\left|\frac{2n-1}{n+1}\right| \leq 2.$$

Početní operace s posloupnostmi

III.10 Definice. Říkáme, že posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ *jsou si rovny,* jestliže pro všechna čísla n platí $a_n = b_n$.

Pomocí početních operací můžeme ze dvou daných posloupností utvořit další posloupnosti.

III.11 Definice. $\left\{\begin{array}{l}\textit{Součtem}\\ \textit{Rozdílem}\\ \textit{Součinem}\\ \textit{Podílem}\end{array}\right\}$ posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ (v tomto pořadí) nazýváme posloupnost $\left\{\begin{array}{l}\{a_n+b_n\}\\ \{a_n-b_n\}\\ \{a_n\cdot b_n\}\\ \{\frac{a_n}{b_n}\}\end{array}\right\}$. V případě $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ musí $b_n\neq 0$ pro všechna n.

III.12 Poznámka. K posloupnosti $\{b_n\}$ lze speciálně utvořit posloupnost $\{a\cdot b_n\}$, $a\in\mathbf{R}$, což je součin konstantní posloupnosti $\{a\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnosti $\{b_n\}$, nebo posloupnost $\left\{\frac{a}{b_n}\right\}$, $a\in\mathbf{R}$, pokud pro všechna čísla n je $b_n\neq 0$, což je podíl konstantní posloupnosti $\{a\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnosti $\{b_n\}$, nebo posloupnost $\{|b_n|\}$ apod.

III.13 Příklad. Jsou dány posloupnosti

$$\{a_n\}=\left\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\dots\right\}\quad\text{a}\quad\{b_n\}=\left\{2,-\frac{3}{2},\frac{4}{3},-\frac{5}{4},\frac{6}{5},\dots\right\}.$$

Utvořme součet, rozdíl, součin a podíl posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a posloupnosti $\{-a_n\}$ a $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$.

Řešení:

$\{a_n+b_n\}=\{4,0,\frac{8}{3},0,\frac{12}{5},\dots\}$,
$\{a_n-b_n\}=\{0,3,0,\frac{5}{2},0,\dots\}$,
$\{a_n\cdot b_n\}=\{4,-\frac{9}{4},\frac{16}{9},-\frac{25}{16},\frac{36}{25},\dots\}$,
$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}=\{1,-1,1,-1,1,\dots\}$,
$\{-a_n\}=\{-2,-\frac{3}{2},-\frac{4}{3},-\frac{5}{4},-\frac{6}{5},\dots\}$,
$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}=\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\dots\}$.
Všimněte si, že $\{|b_n|\}=\{a_n\}$.

Důležitý je pojem posloupnosti vybrané z dané posloupnosti.

III.14 Definice. Posloupnost $\{a_{k_n}\}$, kde $\{a_n\}$ je daná posloupnost a $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, se nazývá *vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}$ (stručně *vybraná posloupnost*) nebo *podposloupnost posloupnosti* $\{a_n\}$.

Příklad. Z posloupnosti

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots\right\}$$

můžeme utvořit např. tyto vybrané posloupnosti:

a) $\{a_{k_n}\} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots\}$, kde $\{k_n\} = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ je rostoucí posloupnost všech lichých přirozených čísel,

b) $\{a_{k_n}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots\}$, kde $\{k_n\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ je rostoucí posloupnost všech sudých přirozených čísel,

c) $\{a_{k_n}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots\}$, kde $\{k_n\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je rostoucí posloupnost všech prvočísel,

d) $\{a_{k_n}\} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots\}$, kde $\{k_n\} = \{4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$ je rostoucí posloupnost všech přirozených čísel nejméně rovných 4.

Vybranou posloupnost získáme z dané posloupnosti, když z ní vynecháme konečný počet členů, popř. nekonečný počet členů, ale tak, aby jich zůstal nekonečný počet.

Příklad. Posloupnost

$$\{a_{k_n}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{1000}\right\}$$

není posloupnost vybraná z posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}$, protože posloupnost $\{a_{k_n}\}$ je konečná. Ani posloupnost

$$\{a_{k_n}\} = \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots\right\}$$

není vybraná z posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}$, protože posloupnost $\{k_n\} = \{5, 3, 1, 7, 9, \dots\}$ není rostoucí.

III.15 Definice. Existuje-li číslo n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ mají členy posloupnosti $\{a_n\}$ vlastnost V, jinými slovy, mají-li všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ vlastnost V s výjimkou jejich konečného počtu (tedy i bez výjimky), pak říkáme, že *skoro všechny členy posloupnosti* $\{a_n\}$ *mají vlastnost* V.

Příklad. Skoro všechny členy posloupnosti

$$\{a_n\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$$

jsou menší než $\frac{3}{2}$. Vskutku existuje číslo n_0 takové, že pro všechna čísla $n \geq n_0$ je $a_n < \frac{3}{2}$, totiž $n_0 = 3$.

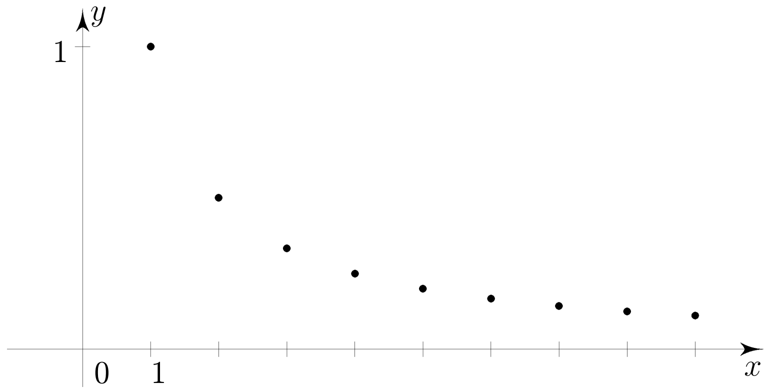
Limita posloupnosti

Sledujme, jaké jsou členy posloupnosti

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

pro čísla n rostoucí nade všechny meze.

Odpověď vyčteme přímo z členů nebo z grafu posloupnosti.



Obr. 3.4: Graf posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

(V zájmu lepší geometrické názornosti jsme zvolili v grafu rozdílná měřítka na osách.) S rostoucím číslem n se členy posloupnosti blíží k číslu 0, jež je jakousi mezí, matematicky řečeno limitou, posloupnosti. Toto zjištění budeme precizovat následující definicí, a to pomocí pojmu okolí bodu.

III.16 Definice (vlastní limity posloupnosti). Říkáme, že *posloupnost* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu* $a \in \mathbf{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ ($n \in \mathbf{N}$) platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Zapisujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nebo také $a_n \to a$.

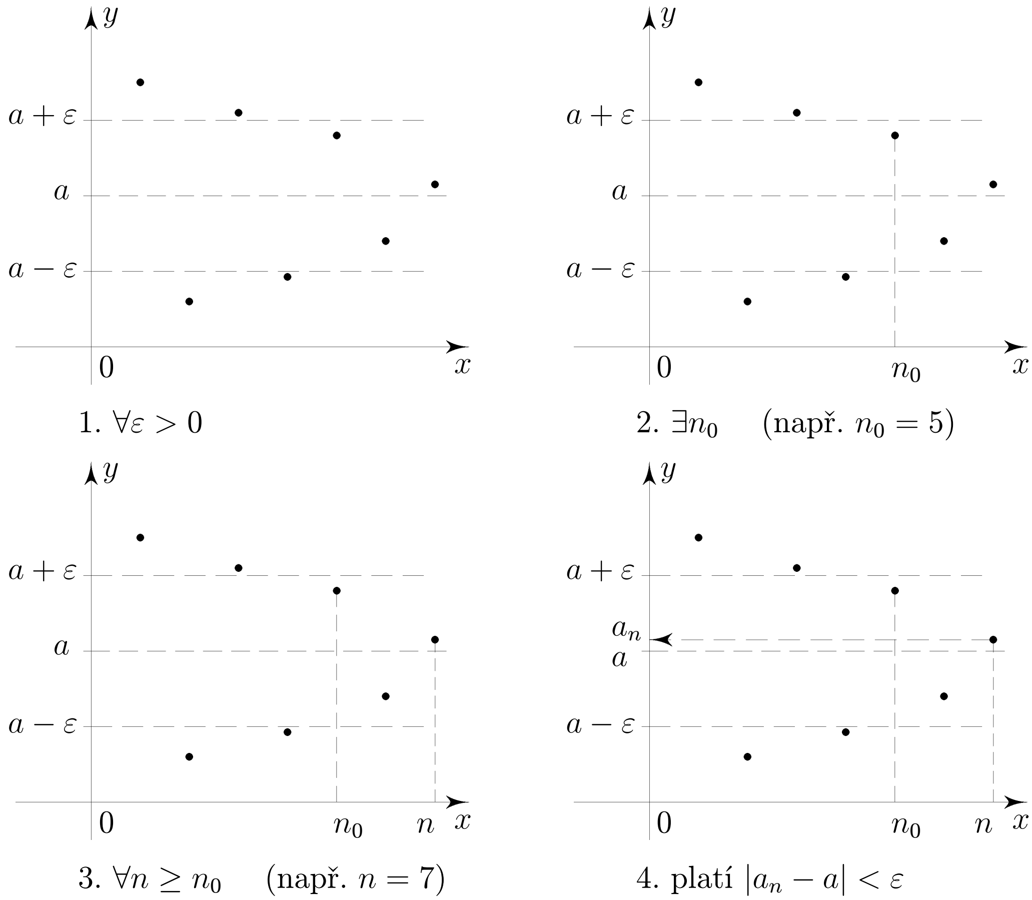
Tam, kde přívlastek „vlastní“ není nezbytný, budeme ho zpravidla vynechávat.

III.17 Poznámky.

1. $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.
2. Symbol lim je zkratka latinského slova limes, které znamená mez.
3. Stručný zápis definice vlastní limity posloupnosti $\{a_n\}$:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbf{R}^+ \; \exists\, n_0 : \; \forall\, n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon.$$
4. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, pak skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ patří do okolí $\mathsf{U}(a, \varepsilon)$, tzn. že skoro všechny body grafu $\mathsf{G}(\{a_n\})$ leží v pásu, ohraničeném přímkami o rovnicích $y = a - \varepsilon$ a $y = a + \varepsilon$.

5. Číslo n_0, pokud existuje, závisí na volbě kladného čísla ε, tedy je funkcí proměnné ε, což lze vyjádřit zápisem $n_0 = n_0(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$.

6. Geometrické znázornění



Obr. 3.5: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

III.18 Příklad. Na předchozí stránce jsme vyslovili hypotézu, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Dokažme ji na základě definice 3.16.

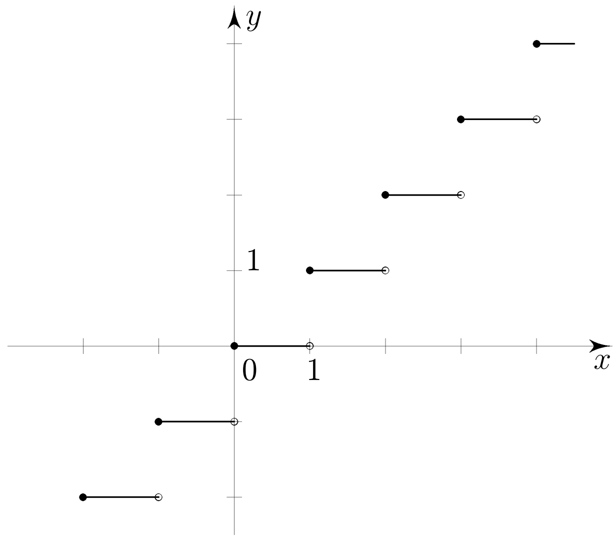
Řešení: Podle definice 3.16

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbf{R}^+ \;\exists\, n_0 : \;\forall\, n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Odtud $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Jestliže položíme $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, pak jsme našli číslo n_0 takové, že pro všechna čísla $n \geq n_0$ platí $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$, a tím dokázali, že $\lim \frac{1}{n} = 0$, což je limita jedné z důležitých posloupností.

III.19 Poznámka. Symbol $[x]$, který jsme pro $x = \frac{1}{\varepsilon}$ použili v předchozím důkazu, označuje největší z celých čísel nejvýše rovných číslu x, nazývané *celá* *část čísla* x. Jestliže číslo x považujeme za proměnnou, pak $[x]$, $x \in \mathbf{R}$, představuje funkci *celá část čísla* x.

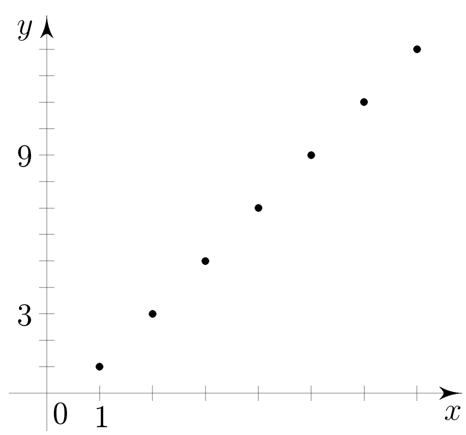


Obr. 3.6: Graf funkce $[x]$

Ve výrazu pro číslo n_0 píšeme $[\frac{1}{\varepsilon}]$, aby číslo n_0 bylo přirozené. Jedničku přičítáme proto, aby nerovnost $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ byla splněna i pro $n = n_0$. (Místo jedničky lze přičíst libovolné přirozené číslo.)

Zvolme např. $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Potom $n_0 = \left[\frac{1}{\frac{1}{100}}\right] + 1 = 101$. Pro všechna $n \geq 101$ je $|\frac{1}{n} - 0| < \frac{1}{100}$. Např. pro $n = 150$ má být $|a_{150} - 0| < \frac{1}{100}$, $|\frac{1}{150} - 0| < \frac{1}{100}$, $\frac{1}{150} < \frac{1}{100}$, což platí. Počínaje 101. členem posloupnosti jsou její členy menší než 0,01. Vzhledem k tomu, že posloupnost je klesající, pro všechna $n < 101$ je $|\frac{1}{n} - 0| \geq \frac{1}{100}$. Např. pro $n = 100$ je $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{100}$.

Uvažujme nyní o posloupnosti $\{2n - 1\}$ a položme si stejnou otázku jako v případě posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}$: Jaké jsou členy posloupnosti $\{2n - 1\}$ pro čísla n rostoucí nade všechny meze?



Obr. 3.7: Graf posloupnosti $\{2n - 1\} = \{1, 3, 5, \ldots, 99, \ldots, 999, \ldots\}$

Přímo z členů nebo z grafu posloupnosti lze usoudit, že s číslem n rostoucím nade všechny meze rostou i členy posloupnosti nade všechny meze. Obdobnou úvahou o posloupnosti $\{-2n+1\}$ usoudíme, že s číslem n rostoucím nade všechny meze klesají členy posloupnosti pode všechny meze. V takovýchto případech mluvíme o nevlastní limitě posloupnosti.

III.20 Definice (nevlastní limity posloupnosti). Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu $+\infty$, resp. $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbf{R}$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ ($n \in \mathbf{N}$) platí $a_n > K$, resp. $a_n < K$. Zapisujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($a_n \to +\infty$), resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ($a_n \to -\infty$).

III.21 Poznámky.

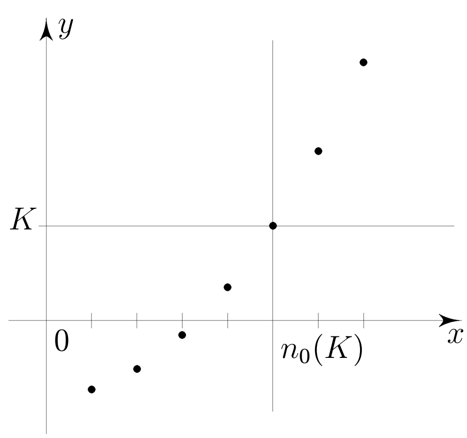
1. Stručný zápis definice nevlastních limit posloupnosti $\{a_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall K \in \mathbf{R}\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0 \ \Rightarrow\ a_n > K,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall K \in \mathbf{R}\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0 \ \Rightarrow\ a_n < K.$$

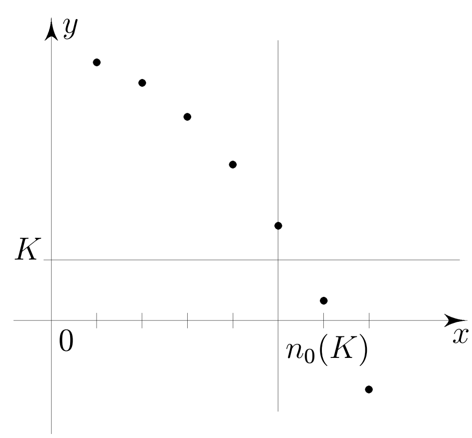
2. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pak skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ patří do okolí $\mathsf{U}(+\infty, K)$, $K \in \mathbf{R}$, tzn. že skoro všechny body grafu $\mathsf{G}(\{a_n\})$ leží nad přímkou o rovnici $y = K$.

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, pak skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ patří do okolí $\mathsf{U}(-\infty, K)$, $K \in \mathbf{R}$, tzn. že skoro všechny body grafu $\mathsf{G}(\{a_n\})$ leží pod přímkou o rovnici $y = K$.

3. Číslo n_0, pokud existuje, závisí na velikosti čísla K, tedy je funkcí proměnné K, což lze vyjádřit zápisem $n_0 = n_0(K)$, $K \in \mathbf{R}$.



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Obr. 3.8

III.22 Příklad. Dokažme na základě definice 3.20, že $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty$.

Řešení: Podle této definice

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty \iff \forall K \in \mathbf{R}\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0 \ \Rightarrow\ 2n-1 > K.$$

Odtud $2n-1 > K$, $2n > K+1$, $n > \frac{K+1}{2}$.

Jestliže položíme $n_0 = \max\{1, [\frac{K+1}{2}]+1\}$, pak jsme našli číslo n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $2n-1 > K$, a tím dokázali, že $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty$.

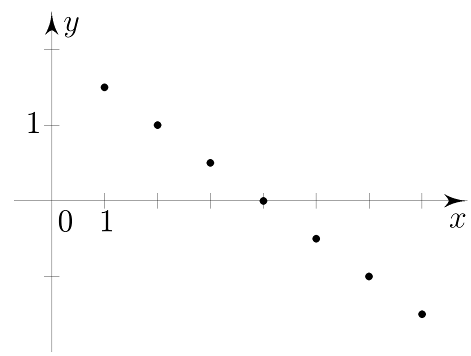
Zvolme např. $K = 120$. Potom

$$n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{120+1}{2}\right]+1\right\} = [60,5]+1 = 60+1 = 61.$$

Pro všechna $n \geq 61$ je $2n-1 > 120$. Např. pro $n = 100$ je $2n-1 = 199 > 120$. Vzhledem k tomu, že posloupnost je rostoucí, pro všechna $n < 61$ je $2n-1 \leq 120$. Např. pro $n = 50$ je $2n-1 = 99 < 120$.

III.23 Příklad. Odhadněme pomocí grafu limitu posloupnosti $\{2-\frac{n}{2}\}$ a potom dokažme, že odhad je správný.

Řešení: $\left\{2-\dfrac{n}{2}\right\} = \left\{\dfrac{3}{2}, 1, \dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}, \dots\right\}$.



Obr. 3.9: Graf posloupnosti $\{2-\frac{n}{2}\}$

Protože posloupnost je klesající aritmetická, odhadneme, že $\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{n}{2}) = -\infty$.

Důkaz:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n}{2}\right) = -\infty \iff \forall K \in \mathbf{R}\ \exists n_0 :\ \forall n \geq n_0 \ \Rightarrow\ 2-\frac{n}{2} < K.$$

Dále $2-\frac{n}{2} < K$, $-\frac{n}{2} < K-2$, $\frac{n}{2} > -K+2$, $n > -2K+4$.

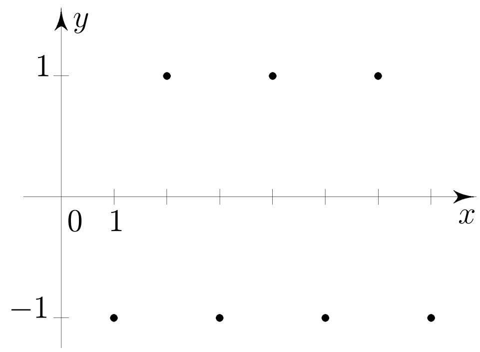
Jestliže položíme $n_0 = \max\{1, [-2K+4]+1\}$, pak jsme našli číslo n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $2-\frac{n}{2} < K$, a tím dokázali, že $\lim(2-\frac{n}{2}) = -\infty$.

Zvolme např. $K = -100$. Potom $n_0 = \max\{1, [-2(-100)+4]+1\} = 205$. Pro všechna $n \geq 205$ je $2-\frac{n}{2} < -100$. Např. pro $n = 300$ je $2-\frac{n}{2} = 2-\frac{300}{2} = -148 < -100$.

III.24 Definice. Posloupnost, která má vlastní limitu, se nazývá *konvergentní.* Posloupnost, která není konvergentní, se nazývá *divergentní.*

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbf{R}$, říkáme, že *posloupnost* $\{a_n\}$ *konverguje.* Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, říkáme, že *posloupnost* $\{a_n\}$ *diverguje k* $+\infty$*, resp.* $-\infty$. Neexistuje-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, říkáme, že *posloupnost* $\{a_n\}$ *osciluje.*

Příklad. Posloupnost $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$ nemá limitu, tedy osciluje.



Obr. 3.10: Graf posloupnosti $\{(-1)^n\}$

Neexistuje žádné číslo $a \in \mathbf{R}^*$, do jehož libovolného okolí by patřily skoro všechny členy posloupnosti $\{(-1)^n\}$.

III.25 Definice. Posloupnost, jejíž limita se rovná 0, se nazývá *nulová.*

Příklad. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je nulová, protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Poznámka. Speciálním případem nulové posloupnosti je konstantní posloupnost $\{0\}_{n=1}^{\infty}$.

Uvědomte si! Limitu posloupnosti hledáme vždy jen pro $n \to \infty$, proto můžeme psát pouze $\lim a_n$ místo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Vlastnosti limity posloupnosti

III.26 Věta. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

III.27 Věta. *Jestliže pro skoro všechna čísla n je $a_n = a$, $a \in \mathbf{R}$, pak* $\lim a_n = a$.

Důsledek. *Konstantní posloupnost má vždy limitu. Je-li $a_n = a$, $a \in \mathbf{R}$, pro všechna čísla n, potom* $\lim a_n = a$.

III.28 Věta. *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti takové, že pro skoro všechna čísla n je $a_n = b_n$. Pak limita posloupnosti $\{a_n\}$ existuje, právě když existuje limita posloupnosti $\{b_n\}$; v takovém případě obě limity jsou si rovny.*

Důsledek. *Vynechání, přidání nebo změna konečného počtu členů posloupnosti nemá vliv na existenci limity posloupnosti. Proto také můžeme počítat i limitu* *posloupnosti, dané takovým vzorcem pro n-tý člen, kterým není definován konečný počet členů posloupnosti. Chybějící členy si totiž můžeme doplnit libovolnými čísly, aniž to ovlivní limitu posloupnosti. Tak např.* $\lim \frac{1}{n-1} = 0$, *ačkoliv první člen posloupnosti* $\{\frac{1}{n-1}\}$ *není definován.*

III.29 Věta. *Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu a, $a \in \mathbf{R}^*$, pak každá posloupnost $\{a_{k_n}\}$ z ní vybraná má limitu a, tj.* $\lim a_{k_n} = \lim a_n = a$.

Větu 3.29 lze užít k důkazu existence či neexistence nebo k nalezení limity dané posloupnosti.

1. Je-li posloupnost $\{a_{k_n}\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$, jejíž limita existuje a je známá, pak existuje i limita $\lim a_{k_n}$ a $\lim a_{k_n} = \lim a_n$.

2. Lze-li z posloupnosti $\{a_n\}$ vybrat alespoň dvě podposloupnosti, jejichž limity si nejsou rovny, pak posloupnost $\{a_n\}$ nemá limitu.

III.30 Věta. *Je-li posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní a jedna posloupnost z ní vybraná má limitu a, $a \in \mathbf{R}$, pak* $\lim a_n = a$.

III.31 Věta. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Poznámka. Obrácená věta neplatí.

Příklad. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená a podle věty 3.29 nemá limitu, neboť z ní lze vybrat dvě konvergentní posloupnosti, a to konstantní posloupnost $\{1\}_{n=1}^{\infty}$, mající limitu 1, a konstantní posloupnost $\{-1\}_{n=1}^{\infty}$, mající limitu -1 (viz větu 3.27).

III.32 Věta. *Každá monotónní a omezená posloupnost je konvergentní.*
(Porovnejte větu 3.32 s větou 3.31!)

III.33 Věta. $\lim a_n = 0$, *právě když* $\lim |a_n| = 0$.

III.34 Věta. *Je-li* $\lim a_n = 0$ *a posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená, pak* $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$.

III.35 Věta (o limitě posloupností, vzniklých početními operacemi). *Nechť* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, $a, b \in \mathbf{R}^*$, *a početní operace* $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, a^m, $\sqrt[m]{a}$, $m \in \mathbf{N}$, *jsou definovány v množině* $\mathbf{R}^*$. *Potom je*

$$\lim(a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim(a_n - b_n) = a - b,$$

$$\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \qquad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

$$\lim |a_n| = |a|, \qquad \lim a_n^m = a^m,$$

$\lim \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}$ *(pokud pro skoro všechna čísla n je $a_n \geq 0$).*

III.36 Poznámky.

1. Tvrzení o limitě součtu, resp. součinu, ve větě 3.35 lze zobecnit pro libovolný konečný počet m sčítanců, resp. činitelů, $m \geq 2$.

2. Věta 3.35 je jednou z nejčastěji užívaných vět při výpočtu limit posloupností.

3. S pravými stranami rovností ve větě 3.35 mohou nastat problémy, když některá z limit a a b je rovna 0 nebo $+\infty$ nebo $-\infty$. V tomto případě můžeme totiž obdržet některou z nedefinovaných početních operací, kterým říkáme *neurčité výrazy*. Jsou to:

$+\infty + (-\infty),\ -\infty + (+\infty),\ +\infty - (+\infty),\ -\infty - (-\infty)$ — typ $\boxed{\infty - \infty}$,

$0 \cdot (+\infty),\ 0 \cdot (-\infty),\ (+\infty) \cdot 0,\ (-\infty) \cdot 0$ — typ $\boxed{0 \cdot \infty}$,

typ $\boxed{\dfrac{0}{0}}$,

$\dfrac{+\infty}{+\infty},\ \dfrac{+\infty}{-\infty},\ \dfrac{-\infty}{+\infty},\ \dfrac{-\infty}{-\infty}$ — typ $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$.

K nim řadíme ještě neurčité výrazy typu $\boxed{0^0, \infty^0,\ 1^\infty}$, s nimiž se setkáváme při výpočtu limit některých složitějších posloupností.

Název „neurčitý výraz“ není zrovna nejvhodnější, ale tradičně se používá. Pochází patrně z toho, že při výpočtu limity posloupnosti, při kterém se dospěje k některému z neurčitých výrazů, může být výsledkem jakékoli číslo, vlastní i nevlastní, nebo se zjistí, že limita posloupnosti neexistuje (viz následující příklad).

III.37 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim(a_n \cdot b_n)$, kde

a) $a_n = n,\ b_n = \dfrac{1}{n}$,

b) $a_n = n^2,\ b_n = \dfrac{1}{n}$,

c) $a_n = n,\ b_n = \dfrac{1}{n^2}$,

d) $a_n = n,\ b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Řešení:

a) $\lim a_n = \lim n = +\infty,\ \lim b_n = \lim \dfrac{1}{n} = 0$,

$\lim(a_n \cdot b_n) = (\lim n) \cdot \left(\lim \dfrac{1}{n}\right) = \infty \cdot 0$, což je neurčitý výraz.

Při výpočtu limity postupujeme takto:

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim 1 = 1.$$

b) $\lim a_n = \lim n^2 = +\infty,\ \lim b_n = \lim \dfrac{1}{n} = 0$,

$\lim(a_n \cdot b_n) = (\lim n^2) \cdot \left(\lim \dfrac{1}{n}\right)$, což je neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$.

Avšak

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim\left(n^2 \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim n = +\infty.$$

c) $\lim a_n = \lim n = +\infty,\ \lim b_n = \lim \dfrac{1}{n^2} = 0,$

$\lim(a_n \cdot b_n) = (\lim n) \cdot \left(\lim \dfrac{1}{n^2}\right)$, což je neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$.

Avšak
$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim\left(n \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \lim \frac{1}{n} = 0.$$

d) $\lim a_n = \lim n = +\infty,\ \lim b_n = \lim \dfrac{(-1)^n}{n} = 0,$

$\lim(a_n \cdot b_n) = (\lim n) \cdot \left(\lim \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, což je neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$.

Avšak
$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim\left(n \cdot \frac{(-1)^n}{n}\right) = \lim(-1)^n,$$

tato limita však neexistuje.

Limity, počítané v případech a) až d), jsou neurčité výrazy téhož typu, ale jejich výpočet dává pokaždé jiný výsledek.

Při výpočtu limit posloupností mohou být užitečné následující dvě věty:

III.38 Věta. *Nechť $a_n > 0$, resp. $a_n < 0$, pro skoro všechna čísla n. Potom*

$$\lim a_n = 0 \iff \lim \frac{1}{a_n} = +\infty, \quad \textit{resp.}\ \lim \frac{1}{a_n} = -\infty.$$

III.39 Věta. $\lim |a_n| = +\infty \iff \lim \dfrac{1}{a_n} = 0.$

III.40 Poznámka. Limitu $\lim \frac{a_n}{b_n}$, kde $\lim a_n = a$, $a \in \mathbf{R}^* \setminus \{0\}$ a $\lim b_n = 0$, nepovažujeme za neurčitý výraz; limita je rovna $+\infty$, resp. $-\infty$, v případě, že $\frac{a_n}{b_n} > 0$, resp. $\frac{a_n}{b_n} < 0$, pro skoro všechna čísla n a v ostatních případech neexistuje. Upozorňujeme, že je zahrnut i případ, kdy limita $\lim a_n$ je nevlastní.

Podobně limitu $\lim \frac{a_n}{b_n}$, kde $\lim a_n = a$, $a \in \mathbf{R}$ a limita $\lim b_n$ je nevlastní, nepovažujeme za neurčitý výraz; limita je rovna 0. Upozorňujeme, že je zahrnut i případ, kdy $\lim a_n = 0$ a limita $\lim b_n$ je nevlastní.

Další věty se týkají nerovností mezi limitami posloupností.

III.41 Věta. *Nechť $\lim a_n = a,\ \lim b_n = b,\ a, b \in \mathbf{R}^*$, a pro skoro všechna čísla n je $a_n \le b_n$. Potom platí $a \le b$.*

Speciálně: Je-li $a_n \le 0$, resp. $a_n \ge 0$, pro skoro všechna čísla n, pak $\lim a_n \le 0$, resp. $\lim a_n \ge 0$.

Poznámka. Jestliže pro skoro všechna čísla n je $a_n < b_n$, resp. $a_n > b_n$, nemusí být $\lim a_n < \lim b_n$, resp. $\lim a_n > \lim b_n$. Tato skutečnost bývá zdrojem chyb.

Proto si pamatujte, že ostrá nerovnost mezi členy posloupností může přejít i v rovnost limit těchto posloupností.

Příklad. Pro všechna čísla n je $\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$, avšak $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{2}{n} = 0$.

III.42 Věta (o limitě tří posloupností, též o limitě sevřené posloupnosti). *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti, pro které platí:*

1. $a_n \le c_n \le b_n$ *pro skoro všechna čísla* n,
2. $\lim a_n = \lim b_n = a,\ a \in \mathbf{R}^*$.

Potom existuje i limita $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = a$.

III.43 Věta. *Posloupnost*

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

je rostoucí a omezená, proto má podle věty 3.32 vlastní limitu.

III.44 Definice. Limitu posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ nazýváme *Eulerovo číslo* a značíme e. Tedy

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Tato limita je iracionálním číslem rovným 2,718 281 828 . . ., základem přirozených logaritmů a jednou z nejdůležitějších konstant nejen v matematice a ostatních přírodních vědách, ale i v technických vědách. Složené exponenciální funkce o základu e vyjadřují řadu důležitých fyzikálních zákonů.

V kapitole 1 jsme uvedli, co rozumíme hromadným bodem množiny. Tento pojem budeme nyní definovat i pro posloupnosti.

III.45 Definice. Číslo $s \in \mathbf{R}$ nazýváme *hromadný bod posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže v každém jeho okolí $\mathsf{U}(s)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ má dva hromadné body: 1 a -1.

Srovnejme rčení:

„skoro všechny členy posloupnosti“	„nekonečně mnoho členů posloupnosti“
(Zbývajících členů posloupnosti je konečně mnoho.)	(Zbývajících členů posloupnosti je konečně nebo nekonečně mnoho.)

Odtud je zřejmé, že vlastní limita posloupnosti je vždy hromadným bodem téže posloupnosti. Naproti tomu hromadný bod posloupnosti může, ale nemusí být limitou téže posloupnosti.

Posloupnost, která má více než jeden hromadný bod, je divergentní.

Číslo je hromadným bodem posloupnosti, právě když je limitou některé posloupnosti z ní vybrané.

III.46 Definice. Největší hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$ se nazývá *limes superior posloupnosti* $\{a_n\}$ a značí se $\limsup a_n$ nebo $\overline{\lim} a_n$.

Nejmenší hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$ se nazývá *limes inferior posloupnosti* $\{a_n\}$ a značí $\liminf a_n$ nebo $\underline{\lim} a_n$.

III.47 Věta. *Posloupnost* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu, právě když*

$$\limsup a_n = \liminf a_n;$$

v tom případě $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.

III.48 Příklad. Najděme všechny hromadné body, limes superior a limes inferior posloupnosti $\{a_n\}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{pro } n = 4m-3 \\ (-1)^m & \text{pro } n = 4m-2 \\ \frac{1}{m} & \text{pro } n = 4m-1 \\ \frac{2m}{m+1} & \text{pro } n = 4m \end{cases}, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Řešení: Vypíšeme několik prvních členů posloupnosti $\{a_n\}$ a pokusíme se najít vhodné posloupnosti z ní vybrané.

$$\begin{array}{lcllll} m=1 & : & a_1 = 3, & a_2 = -1, & a_3 = 1, & a_4 = 1, \\ m=2 & : & a_5 = 3, & a_6 = 1, & a_7 = \frac{1}{2}, & a_8 = \frac{4}{3}, \\ m=3 & : & a_9 = 3, & a_{10} = -1, & a_{11} = \frac{1}{3}, & a_{12} = \frac{3}{2}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m=100 & : & a_{397} = 3, & a_{398} = 1, & a_{399} = \frac{1}{100}, & a_{400} = \frac{200}{101}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Usoudíme, že $a_{4m-3} \to 3$, $a_{8m-6} \to -1$, $a_{8m-2} \to 1$, $a_{4m-1} \to 0$ a $a_{4m} \to 2$ pro $m \to \infty$.

Tedy hromadné body posloupnosti $\{a_n\}$ jsou $-1, 0, 1, 2$ a 3. Z nich největší je $\limsup a_n = 3$ a nejmenší je $\liminf a_n = -1$.

Z teoretického hlediska je důležitá následující definice a věta.

III.49 Definice. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $m, n \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

III.50 Věta (Cauchyova–Bolzanova nutná a postačující podmínka konvergence posloupnosti). *Posloupnost je konvergentní, právě když je cauchyovská.*

Výpočet limit posloupností

Při výpočtu limit posloupností užíváme znalost limit význačných posloupností a věty o limitách.

Přehled limit význačných posloupností

$$\lim \frac{1}{n} = 0,$$

$$\lim a^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } |a| < 1, \\ 1 & \text{pro } a = 1, \\ +\infty & \text{pro } a > 1, \end{cases}$$

limita $\lim a^n$ neexistuje pro $a \leq -1$,

$$\lim n^r = \begin{cases} +\infty & \text{pro } r > 0, \\ 1 & \text{pro } r = 0, \\ 0 & \text{pro } r < 0, \end{cases} \quad r \in \mathbf{R},$$

$$\lim \sqrt[n]{a} = \begin{cases} 0 & \text{pro } a = 0, \\ 1 & \text{pro } a > 0, \end{cases}$$

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim \frac{a^n}{n^k} = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq a \leq 1, \\ +\infty & \text{pro } a > 1, \end{cases} \quad k \in \mathbf{R}^+,$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

III.51 Poznámka. Limity posloupností, definovaných algebraickými výrazy, závisí na členu s „nejrychlejším růstem“ při rostoucím čísle n a na početní operaci, prováděné s tímto členem. Členy lze seřadit podle růstu (od nejpomalejšího k nejrychlejšímu) takto:

$$\log n,\ \ldots,\ \sqrt[3]{n},\ \sqrt{n},\ n,\ n^2,\ n^3,\ \ldots,\ 2^n,\ 3^n,\ \ldots,\ n!,\ n^n.$$

Obsahuje-li algebraický výraz více členů s touž „rychlostí růstu“, pak limita posloupnosti je určena početními operacemi s jejich koeficienty, pokud to není neurčitý výraz.

III.52 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim \dfrac{2n^3 + 4n^2 + 2}{5n^3 + 2n}$.

Řešení: Užitím věty 3.35 máme $\lim(2n^3 + 4n^2 + 2) = +\infty$, $\lim(5n^3 + 2n) = +\infty$. Limita posloupnosti je neurčitým výrazem typu $\frac{\infty}{\infty}$. Proto nejprve upravíme n-tý člen posloupnosti tak, že čitatele i jmenovatele zlomku vydělíme mocninou n^3 a potom využijeme poznatek, že $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, je-li $k > 0$.

$$\lim \frac{2n^3 + 4n^2 + 2}{5n^3 + 2n} = \lim \frac{2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^3}}{5 + \frac{2}{n^2}} = \frac{2 + 0 + 0}{5 + 0} = \frac{2}{5}.$$

Obdobně vyřešíme další dva příklady.

III.53 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim \dfrac{-4n^2 + 2n}{3n^3 + 1}$.

Řešení:

$$\lim \frac{-4n^2 + 2n}{3n^3 + 1} = \lim \frac{-\frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^3}} = \frac{-0 + 0}{3 + 0} = 0.$$

III.54 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim \dfrac{-3n^3 + 2n - 1}{-n^2 + 2}$.

Řešení:

$$\lim \frac{-3n^3 + 2n - 1}{-n^2 + 2} = \lim \frac{-3n + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{-1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{-\infty + 0 - 0}{-1 + 0} = +\infty.$$

III.55 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim(-7n^3 + 2n + 8)$.

Řešení: Užití věty 3.35 vede k neurčitému výrazu typu $\infty - \infty$. Proto nejprve vytkneme z algebraického výrazu n^3 a teprve pak užijeme větu 3.35.

$$\lim\left(-7n^3 + 2n + 8\right) = \lim\left[n^3\left(-7 + \frac{2}{n^2} + \frac{8}{n^3}\right)\right] = +\infty \cdot (-7 + 0 + 0) = -\infty.$$

III.56 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim \dfrac{\sin n}{n}$.

Řešení: Limita $\lim \sin n$ neexistuje, protože $\limsup \sin n = 1$ a $\liminf \sin n = -1$ (viz větu 3.47), $\lim n = +\infty$. Zřejmě pro každé n platí

$$\frac{\sin n}{n} \leq \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\,.$$

Protože

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad \lim \frac{1}{n} = 0,$$

je (viz větu 3.42)

$$\lim \left|\frac{\sin n}{n}\right| = 0.$$

Z věty 3.33 pak vyplývá, že

$$\lim \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Jiné řešení: Užitím věty 3.34 dostaneme

$$\lim \frac{\sin n}{n} = \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \sin n\right) = 0,$$

protože $\lim \frac{1}{n} = 0$ a posloupnost $\{\sin n\}$ je omezená.

III.57 Poznámka. Všimněte si, že limita posloupnosti tvaru podílu, popř. součinu, může existovat, i když některý z činitelů nemá limitu.

III.58 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim \dfrac{2n + \cos n}{3n - 1}$.

Řešení: Pro každé číslo n je $-1 \leq \cos n \leq 1$, tj.

$$2n - 1 \leq 2n + \cos n \leq 2n + 1,$$

$$\frac{2n-1}{3n-1} \leq \frac{2n+\cos n}{3n-1} \leq \frac{2n+1}{3n-1}.$$

$$\lim \frac{2n-1}{3n-1} = \lim \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3}.$$

Protože jsou splněny oba předpoklady věty 3.42, limita dané posloupnosti existuje a

$$\lim \frac{2n+\cos n}{3n-1} = \frac{2}{3}.$$

Jiné řešení: Užitím vět 3.35 a 3.34 dostaneme

$$\lim \frac{2n+\cos n}{3n-1} = \lim \frac{2n}{3n-1} + \lim \frac{\cos n}{3n-1} =$$

$$= \lim \frac{2}{3 - \frac{1}{n}} + \lim \left(\frac{1}{3n-1} \cdot \cos n\right) = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3},$$

neboť limita posloupnosti $\{\frac{1}{3n-1}\}$ je rovna 0 a posloupnost $\{\cos n\}$ je omezená.

III.59 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim \dfrac{(n - (-1)^n)(n^2+1)}{(n^2-3)(n^2+3)}$.

Řešení:

$$\lim \frac{(n-(-1)^n)(n^2+1)}{(n^2-3)(n^2+3)} = \lim \frac{n^3+n}{n^4-9} - \lim \frac{(-1)^n(n^2+1)}{n^4-9} = 0 - 0 = 0.$$

Ponecháváme na čtenáři, aby si sám vyhledal věty potřebné k výpočtu limity.

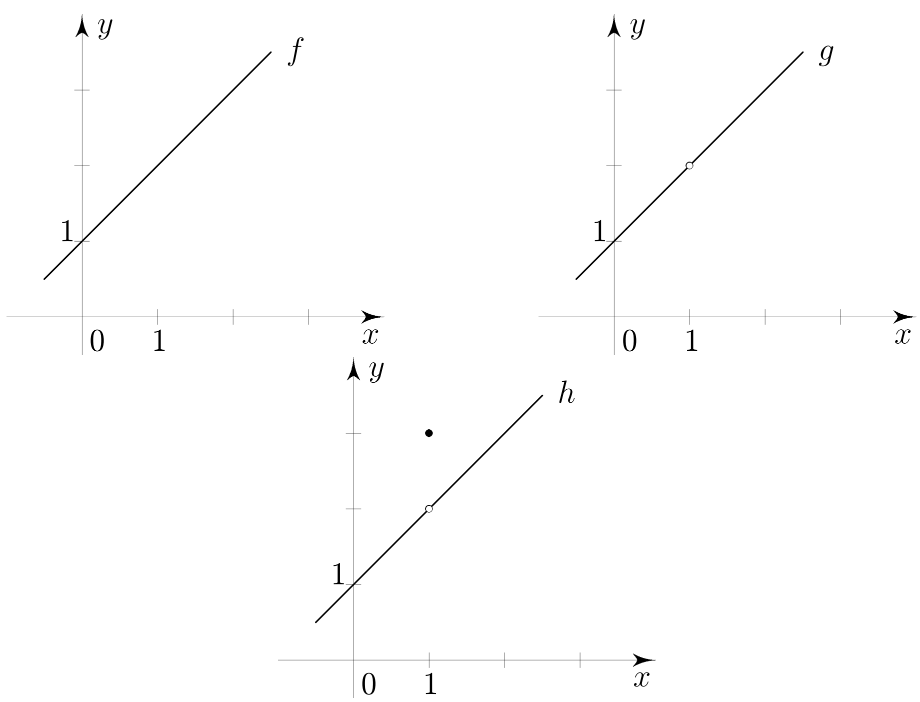
IV
Limita a spojitost funkce

Pojem limity funkce v bodě

Limita funkce v bodě je jedním ze základních pojmů diferenciálního a integrálního počtu, proto je nutné beze zbytku pochopit jeho podstatu. K uvedení do problematiky nám poslouží úvahy o průběhu funkcí, uvedených v následujícím příkladu.

Příklad. Jsou dány funkce

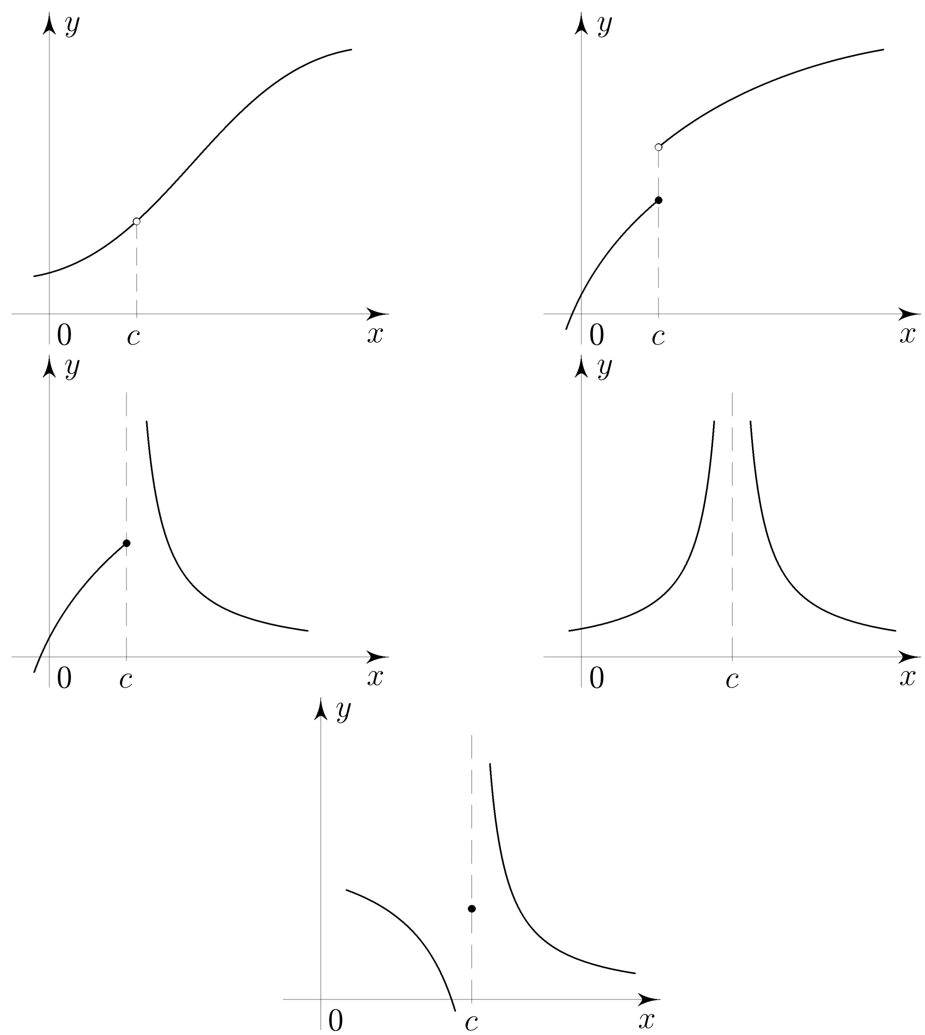
$$
\begin{aligned}
f(x) &= x+1, \quad \mathsf{D}(f) = \mathbf{R},\\
g(x) &= \frac{x^2-1}{x-1}, \quad \mathsf{D}(g) = \mathbf{R}\setminus\{1\},\\
h(x) &= \begin{cases} x+1 & \text{pro } x \neq 1,\\ 3 & \text{pro } x = 1 \end{cases} \quad \mathsf{D}(h) = \mathbf{R}.
\end{aligned}
$$



Obr. 4.1: Grafy funkcí f, g, h

Jde o tři různé funkce; jsou si rovny na množině $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, ale situace v bodě 1 je odlišná. Povšimněme si blíže, jaký je průběh funkcí na blízkém redukovaném okolí bodu 1. Z grafů funkcí je patrné, že blíží-li se nezávisle proměnná x k bodu 1, blíží se hodnoty funkcí k číslu 2. Tuto skutečnost lze vyjádřit slovy, že všechny tři funkce mají v bodě 1 stejnou limitu, a to 2.

Při vyšetřování průběhu funkce je mnohdy zapotřebí charakterizovat její lokální vlastnosti, tj. vlastnosti, které závisí jenom na průběhu funkce v blízkém okolí určitého bodu (s eventuálním vyloučením samotného bodu). K tomu nám poskytuje cenné informace právě limita funkce v bodě. Výpočet limity funkce je důležitý především v „problematických“ bodech, za něž považujeme např. hromadné body definičního oboru, ve kterých funkce není definována nebo ve kterých se hodnota funkce mění *skokem* nebo v jejichž blízkém redukovaném okolí nebo okolí funkce není omezená.



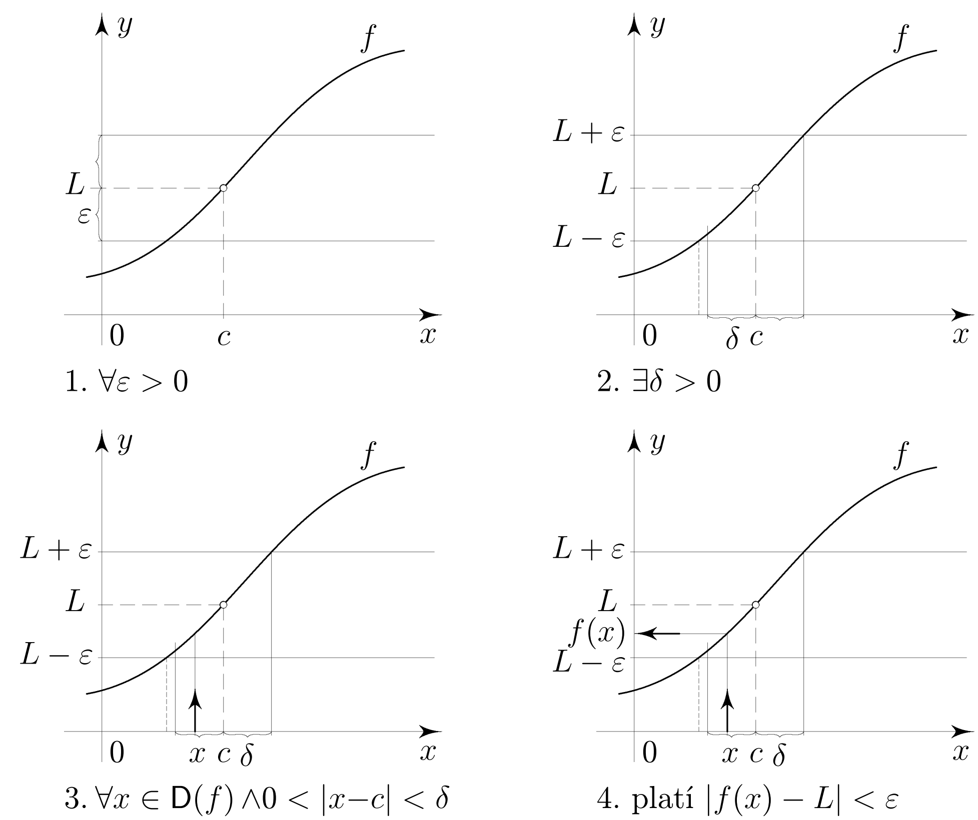
Obr. 4.2: Grafy funkcí s rozmanitými problematickými hromadnými body c definičního oboru

Budeme-li v dalším textu mluvit o (vlastní či nevlastní) limitě funkce v určitém (vlastním či nevlastním) bodě, budeme tímto bodem rozumět vždy hromadný bod definičního oboru funkce.

Vyslovíme nyní definici limity funkce v bodě podle francouzského matematika A. L. Cauchyho s využitím pojmu okolí bodu. Rozlišíme přitom čtyři základní případy:

- vlastní limitu $L \in \mathbf{R}$ funkce f ve vlastním bodě $c \in \mathbf{R}$,
- vlastní limitu $L \in \mathbf{R}$ funkce f v nevlastním bodě $c = +\infty$ nebo $c = -\infty$,
- nevlastní limitu $L = +\infty$ nebo $L = -\infty$ funkce f ve vlastním bodě $c \in \mathbf{R}$,
- nevlastní limitu $L = +\infty$ nebo $L = -\infty$ funkce f v nevlastním bodě $c = +\infty$ nebo $c = -\infty$.

IV.1 Definice (vlastní limity funkce ve vlastním bodě). Nechť $c \in \mathbf{R}$ je hromadný bod definičního oboru $\mathsf{D}(f)$ funkce f. Říkáme, že *funkce f má vlastní limitu $L \in \mathbf{R}$ ve vlastním bodě $c \in \mathbf{R}$*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbf{R}^+$ tak, že pro všechna $x \in \mathsf{D}(f)$, pro která je $0 < |x - c| < \delta$, platí $|f(x) - L| < \varepsilon$; zapisujeme $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.



Obr. 4.3: Grafické znázornění vlastní limity ve vlastním bodě

Stručný zápis definice vlastní limity funkce f ve vlastním bodě c:

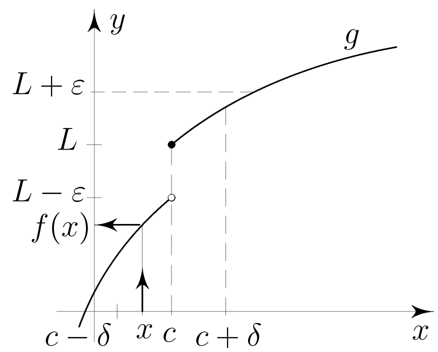
$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :$$
$$\forall x \in \mathsf{D}(f)\ \wedge\ 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{1}$$

IV.2 Poznámka.

1. Definici vlastní limity funkce f ve vlastním bodě c lze zapsat také užitím okolí bodu takto:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :$$
$$\forall x \in \mathsf{U}^*(c,\delta) \cap \mathsf{D}(f) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(L,\varepsilon). \tag{1'}$$

2. Číslo δ, pokud existuje, závisí na velikosti kladného čísla ε, tedy je funkcí proměnné ε, což lze vyjádřit zápisem $\delta = \delta(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$.
3. Pokud při určování δ obdržíme množinu $(c-\delta_1, c)\cup(c, c+\delta_2)$, pak klademe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
4. Hodnoty $f(x)$, kde $x \in \mathsf{U}^*(c,\delta) \cap \mathsf{D}(f)$ patří do okolí $\mathsf{U}(L,\varepsilon)$, tzn., že body grafu $\mathsf{G}(f)$ leží v rovině $\mathbf{R}^2$ v obdélníku, ohraničeném přímkami $y = L - \varepsilon$, $y = L + \varepsilon$, $x = c - \delta$ a $x = c + \delta$.
5. Graf funkce, která nemá limitu v bodě c může vypadat následovně:



Obr. 4.4: Funkce g nemá limitu v bodě c

Ať je L jakékoliv reálné číslo, vždy existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in \mathsf{U}^*(c,\delta)$ tak, že $f(x) \notin \mathsf{U}(L,\varepsilon)$.

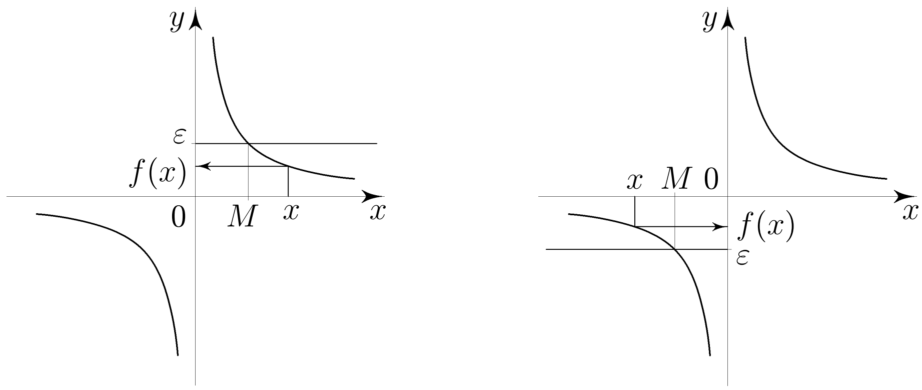
IV.3 Definice (vlastní limity funkce v nevlastních bodech). Nechť $+\infty$, resp. $-\infty$, je hromadný bod definičního oboru $\mathsf{D}(f)$ funkce f. Říkáme, že *funkce f má vlastní limitu L v nevlastním bodě* $+\infty$, resp. $-\infty$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existuje $M \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathsf{D}(f)$, pro která je $x > M$, resp. $x < M$, platí $|f(x) - L| < \varepsilon$; zapisujeme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Stručný zápis definice vlastní limity funkce f v nevlastním bodě $+\infty$, resp. $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbf{R} :$$
$$\forall x \in \mathsf{U}(+\infty, M) \cap \mathsf{D}(f) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(L,\varepsilon), \tag{2}$$

resp.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbf{R}:$$
$$\forall x \in \mathsf{U}(-\infty, M) \cap \mathsf{D}(f) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(L, \varepsilon), \qquad (2')$$



a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Obr. 4.5: Grafické znázornění vlastní limity v nevlastním bodě

IV.4 Poznámka. Číslo M, pokud existuje, závisí na velikosti kladného čísla ε, tedy je funkcí proměnné ε, což lze vyjádřit zápisem $M = M(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$.

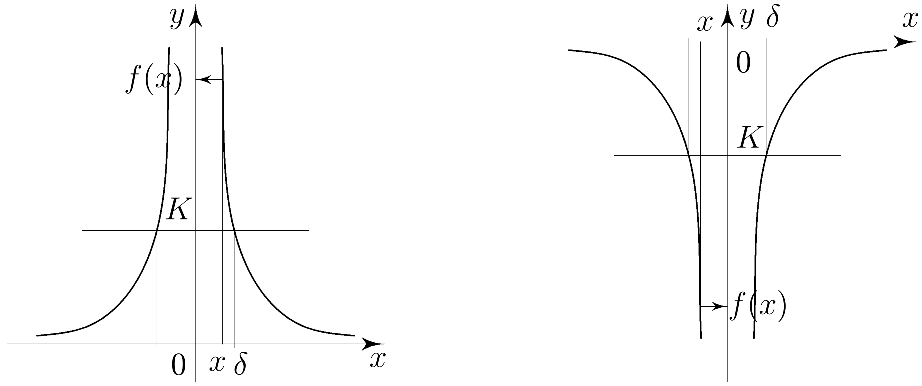
IV.5 Definice (nevlastní limity funkce ve vlastním bodě). Nechť $c \in \mathbf{R}$ je hromadný bod definičního oboru $\mathsf{D}(f)$ funkce f. Říkáme, že *funkce f má nevlastní limitu* $+\infty$, resp. $-\infty$, *ve vlastním bodě* $c \in \mathbf{R}$, jestliže ke každému $K \in \mathbf{R}$ existuje $\delta \in \mathbf{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in \mathsf{D}(f)$, pro která je $0 < |x - c| < \delta$, platí $f(x) > K$, resp. $f(x) < K$; zapisujeme $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$, resp. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$.

Stručný zápis definice nevlastních limit funkce f ve vlastním bodě c:

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \iff \forall K \in \mathbf{R}\ \exists\delta > 0:$$
$$\forall x \in \mathsf{U}^*(c, \delta) \cap \mathsf{D}(f) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(+\infty, K), \qquad (3)$$

resp.

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \iff \forall K \in \mathbf{R}\ \exists\delta > 0:$$
$$\forall x \in \mathsf{U}^*(c, \delta) \cap \mathsf{D}(f) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(-\infty, K), \qquad (3')$$



a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$

Obr. 4.6: Grafické znázornění nevlastní limity ve vlastním bodě

IV.6 Poznámka. Číslo δ, pokud existuje, závisí na velikosti čísla K, tedy je funkcí proměnné K, což lze vyjádřit zápisem $\delta = \delta(K)$, $K \in \mathbf{R}$.

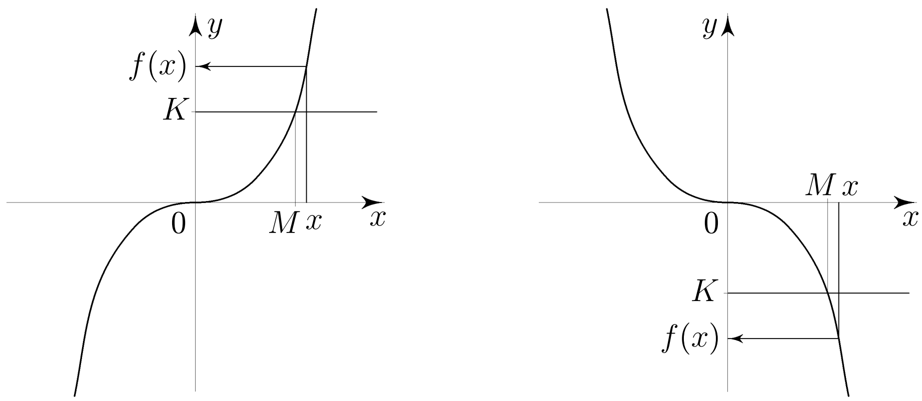
IV.7 Definice (nevlastní limity funkce v nevlastním bodě $+\infty$). Nechť nevlastní číslo $+\infty$ je hromadný bod definičního oboru $\mathsf{D}(f)$ funkce f. Říkáme, že *funkce f má nevlastní limitu* $+\infty$, resp. $-\infty$, *v nevlastním bodě* $+\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbf{R}$ existuje $M \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathsf{D}(f)$, pro která je $x > M$, platí $f(x) > K$, resp. $f(x) < K$; zapisujeme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Stručný zápis definice nevlastních limit funkce f v nevlastním bodě $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall K \in \mathbf{R}\ \exists M \in \mathbf{R}: \\ \forall x \in \mathsf{U}(+\infty, M) \cap \mathsf{D}(f) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(+\infty, K), \tag{4}$$

resp.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall K \in \mathbf{R}\ \exists M \in \mathbf{R}: \\ \forall x \in \mathsf{U}(+\infty, M) \cap \mathsf{D}(f) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(-\infty, K), \tag{4'}$$



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$

Obr. 4.7: Grafické znázornění nevlastní limity v nevlastním bodě

IV.8 Poznámka. Číslo M, pokud existuje, závisí na velikosti čísla K, tedy je funkcí proměnné K, což lze vyjádřit zápisem $M = M(K)$, $K \in \mathbf{R}$.

Analogicky lze vyslovit definici nevlastních limit funkce f v nevlastním bodě $-\infty$ a připojit k ní obdobnou poznámku. Uvedeme jen její stručný zápis:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall K \in \mathbf{R}\ \exists M \in \mathbf{R}: \\ \forall x \in \mathsf{U}(-\infty, M) \cap \mathsf{D}(f) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(+\infty, K), \tag{5}$$

resp.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall K \in \mathbf{R}\ \exists M \in \mathbf{R}: \\ \forall x \in \mathsf{U}(-\infty, M) \cap \mathsf{D}(f) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(-\infty, K), \tag{5'}$$

IV.9 Poznámky. Poznámky k definicím 4.1, 4.3, 4.5 a 4.7.

1. Vlastní, resp. nevlastní, limitu funkce nazýváme také *konečná*, resp. *nekonečná, limita funkce.*

2. Tam, kde to není nutné, přívlatky „vlastní“ a „nevlastní“ u bodu a limity funkce vypouštíme.

3. Zápis $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, kde $c \in \mathbf{R}^*$ a $L \in \mathbf{R}^*$, nahrazujeme též implikací $x \to c \Rightarrow f(x) \to L$.

4. *Uvědomte si,* že c je hromadný bod množiny $\mathsf{D}(f)$, což znamená, že může, ale nemusí patřit do množiny $\mathsf{D}(f)$.

5. Limita funkce f v bodě $c \in \mathbf{R}$ je lokální vlastnost funkce f. Vypovídá o chování funkce f na redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(c, \delta)$, kde δ je libovolné kladné číslo, a nevypovídá nic o hodnotě funkce f v samotném bodě c. Z toho vyplývá: (a) limita funkce f v bodě c nezávisí na hodnotě $f(c)$, jež ostatně ani nemusí být definována, (b) limita funkce f v bodě c nezávisí na hodnotách funkce f dostatečně vzdálených od bodu c, (c) nemá smysl hovořit o limitě funkce f v izolovaném bodě jejího definičního oboru.

6. Definice 4.1, 4.3, 4.5 a 4.7 spolu se zápisy (5) a (5′) zahrnují 9 definic; bylo by je možné shrnout do jediné definice, jež by však nebyla příliš názorná.

7. Definice limity posloupnosti jakožto limity funkce s definičním oborem $\mathbf{N}$ je v souladu s definicí limity funkce v nevlastním bodě $+\infty$. Nevlastní bod $+\infty$ je jediným hromadným bodem množiny $\mathbf{N}$, proto u posloupností přichází v úvahu jedině limita v nevlastním bodě $+\infty$.

8. Na rozdíl od zjednodušeného označení limity posloupnosti, kde není nutné psát $n \to \infty$, u označení limity funkce v bodě $c \in \mathbf{R}^*$ nelze vypustit $x \to c$.

Pojem jednostranné limity funkce v bodě

V definicích 4.1 a 4.5 jsme předpokládali, že bod $c \in \mathbf{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f, aniž jsme rozlišovali, zda je hromadným bodem zprava či zleva. Budeme-li vlastní hromadné body definičního oboru funkce f rozlišovat podle tohoto hlediska, pak budeme rozlišovat i limity funkce f v těchto bodech a budeme mluvit o *vlastních* či *nevlastních jednostranných limitách funkce f v bodě c*, a to o *vlastní* či *nevlastní limitě funkce f zprava v bodě c* a *vlastní* či *nevlastní limitě funkce f zleva v bodě c*. Ve vlastním hromadném bodě zprava i zleva definičního oboru funkce f definujeme obě jednostranné limity funkce f.

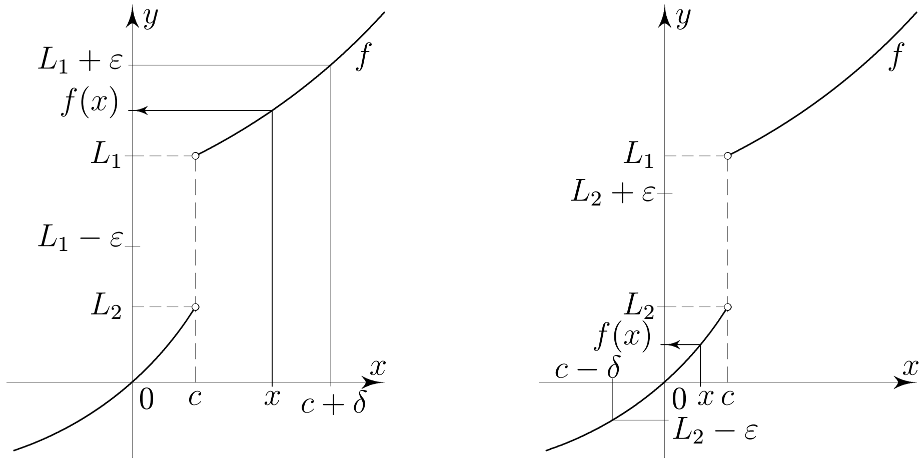
Stručný zápis definic těchto nových pojmů dostaneme ze zápisů (1′), (3) a (3′) tak, že v nich nahradíme okolí $\mathsf{U}^*(c,\delta)$ pravým okolím $\mathsf{U}^*_+(c,\delta)$, resp. levým okolím $\mathsf{U}^*_-(c,\delta)$, a symbol $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ symbolem $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$, resp. $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$. Např. vlastní limitu funkce f zprava, resp. zleva, v bodě c definujeme takto:

IV.10 Definice (vlastní limity funkce zprava, resp. zleva, ve vlastním bodě). Nechť $c \in \mathbf{R}$ je hromadný bod zprava, resp. zleva, definičního oboru $\mathsf{D}(f)$ funkce f. Říkáme, že *funkce f má vlastní limitu $L \in \mathbf{R}$ zprava*, resp. *zleva, ve vlastním bodě $c \in \mathbf{R}$*, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbf{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in \mathsf{D}(f)$, pro která je $c < x < c+\delta$, resp. $c-\delta < x < c$, platí $|f(x)-L| < \varepsilon$; zapisujeme $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = L$, resp. $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = L$.

IV.11 Poznámky.

1. Poznámky 4.9.1–4.9.5 platí po patřičných úpravách i pro jednostranné limity funkce ve vlastním bodě.

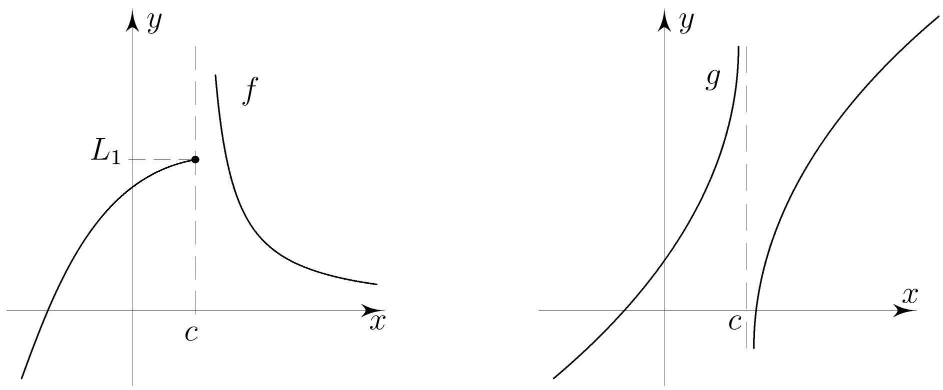
2. Je-li definiční obor funkce f interval, např. $\langle a, b)$, $a < b$, pak a je hromadný bod zprava definičního oboru $\mathsf{D}(f)$ a b je hromadný bod zleva definičního oboru $\mathsf{D}(f)$. V tom případě počítáme v bodě a limitu funkce f zprava a v bodě b limitu funkce f zleva.



a) $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = L_1$ b) $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = L_2$

Obr. 4.8: Grafické znázornění vlastních jednostranných limit

Obr. 4.9. znázorňuje vlastní i nevlastní jednostranné limity funkcí f a g v bodě c: $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to c+} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to c-} g(x) = +\infty$.



Obr. 4.9

Užitečnost výpočtu jednostranných limit funkce v bodě oceníte při hledání vertikálních asymptot grafu funkce.

Z definic limity a jednostranných limit funkce v bodě je zřejmé, jaký je mezi nimi vztah.

IV.12 Věta. *Nechť c je hromadný bod zprava i zleva definičního oboru funkce f. Funkce f má v bodě c limitu L, právě když má v bodě c limitu zprava i limitu zleva a platí*

$$\lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x) = L.$$

Příklad. Funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá limitu v bodě 0, protože $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1$, avšak $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x\to 0-} (-1) = -1$, tj. $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x \neq \lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x$, viz obr. 2.2.

Vlastnosti limit funkcí v bodě

IV.13 Věta. *Funkce má v hromadném bodě svého definičního oboru nejvýše jednu limitu.*

IV.14 Věta. *Má-li funkce f vlastní limitu v bodě $c \in \mathsf{D}'(f)$, pak existuje okolí $\mathsf{U}(c)$ takové, že funkce f je omezená na množině $\mathsf{U}(c) \cap \mathsf{D}(f)$.*

IV.15 Věta (o limitě a algebraických operacích). *Nechť f a g jsou funkce, $c \in \mathsf{D}'(f) \cap \mathsf{D}'(g)$. Jestliže $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$, $L \in \mathbf{R}^*$, $M \in \mathbf{R}^*$, a početní operace $L + M$, $L - M$, $L \cdot M$ a $\frac{L}{M}$ jsou definovány na množině $\mathbf{R}^*$, pak platí*

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M, \qquad \lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M,$$

$$\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M, \qquad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M},$$

$$\lim_{x \to c} |f(x)| = |L|.$$

Poznámka. Není-li některá početní operace na pravé straně rovností definována, neznamená to ještě, že příslušná limita funkce na levé straně rovností neexistuje. Znamená to jen, že v takovém případě nelze použít větu 4.15 a je třeba limitu funkce počítat jiným způsobem, např. vhodnou úpravou matematického výrazu, kterým je funkce definována.

IV.16 Věta. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x \to c} |f(x)| = 0.$

IV.17 Věta. $\lim\limits_{x \to c} |f(x)| = +\infty \iff \lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$

IV.18 Věta. *Je-li $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \neq 0$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ a $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} L$, resp. $\operatorname{sgn} g(x) = -\operatorname{sgn} L$, na jistém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(c)$, potom*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \quad \textit{resp.} \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Poznámka. Jestliže $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \neq 0$ a na každém redukovaném okolí bodu c hodnoty funkce g mají různá znaménka, pak limita $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje.

IV.19 Věta. *Je-li $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ a funkce g omezená na jistém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(c)$, potom*

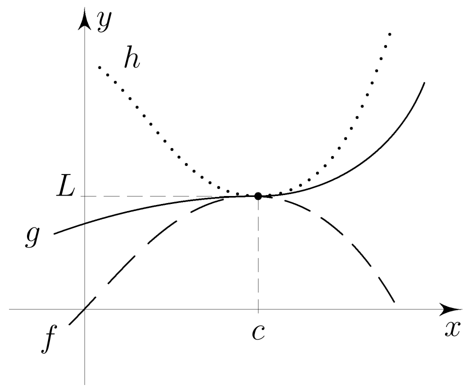
$$\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

IV.20 Věta (o limitě tří funkcí, též o limitě sevřené funkce). *Nechť f, g a h jsou funkce, pro které platí:*

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ na jistém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(c)$,

2. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$.

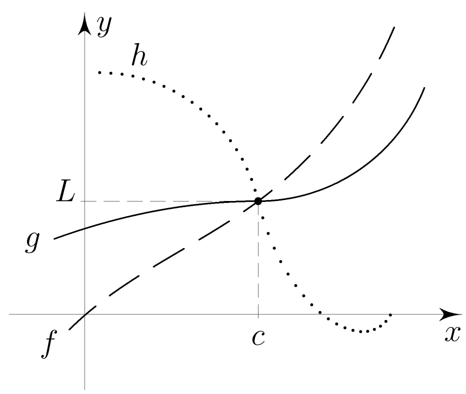
Potom existuje i limita $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$.



Obr. 4.10

Poznámka. Věta 4.20 zůstává v platnosti, i když v ní redukované okolí bodu c nahradíme pravým, resp. levým, redukovaným okolím bodu c a limity funkcí v bodě c limitami funkcí zprava, resp. zleva, v bodě c. Odtud pak lze snadno odvodit, že věta 4.20 zůstává v platnosti, když v ní 1. podmínku nahradíme podmínkou

1′. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ na jistém levém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*_-(c)$,
$h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ na jistém pravém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*_+(c)$.

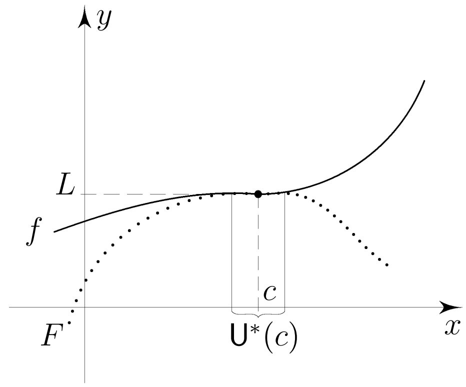


Obr. 4.11

Větu 4.20 užíváme při výpočtu limit některých elementárních funkcí ve význačných bodech. Pomocí této věty lze např. snadno dokázat, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

IV.21 Věta (o náhradní funkci). *Nechť $f(x) = F(x)$ na jistém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(c)$. Potom limita $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existuje, právě když existuje limita $\lim\limits_{x\to c} F(x)$ a platí*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} F(x).$$



Obr. 4.12

Uvědomte si! V bodech $x \notin \mathsf{U}^*(c)$ nemusí platit rovnost $f(x) = F(x)$; limita funkce v bodě je lokální vlastnost funkce.

IV.22 Poznámka. Řada vlastností limit funkcí v bodě je podobná vlastnostem limit posloupností. Je to pochopitelné, protože posloupnosti jsou speciálním případem funkcí. U limit funkcí se však zajímáme o hodnoty funkcí v bodech $x \in \mathsf{U}^*(c)$, $c \in \mathbf{R}$, nebo $x \in \mathsf{U}(+\infty)$ nebo $x \in \mathsf{U}(-\infty)$, kdežto u limit posloupností se zajímáme o velikost členů posloupností pro přirozená čísla $n \in \mathsf{U}(+\infty)$.

IV.23 Poznámka. Věty 4.13 až 4.21 zůstávají po patřičných úpravách v platnosti i pro jednostranné limity funkcí v bodě.

Spojitost funkce v bodě

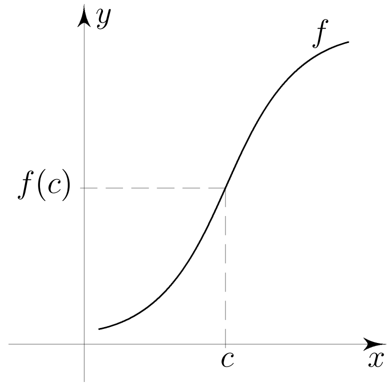
Nebude-li uvedeno jinak, v celém tomto oddílu a dalších oddílech kapitoly 4 značí c bod množiny $\mathbf{R}$, nikoli tedy nevlastní bod $+\infty$ nebo $-\infty$.

Uvažujme nyní o několika funkcích, které jsou definovány na jistém redukovaném okolí bodu c, který je hromadným bodem jejich definičního oboru, a přitom jsou nebo nejsou definovány v bodě c a mají vlastní nebo nevlastní limitu nebo nemají limitu v bodě c. Omezíme-li se jen na „rozumné“ funkce, mohou nastat tyto případy:

1. Funkce f je definována v bodě c, $c \in \mathsf{D}(f) \cap \mathsf{D}'(f)$,

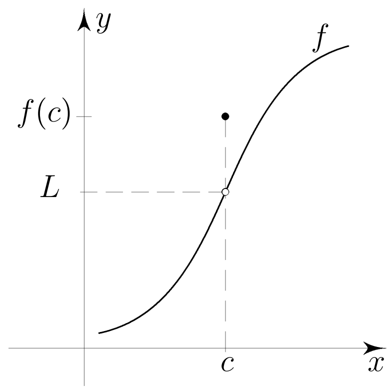
   a) má v bodě c vlastní limitu,

i. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$,



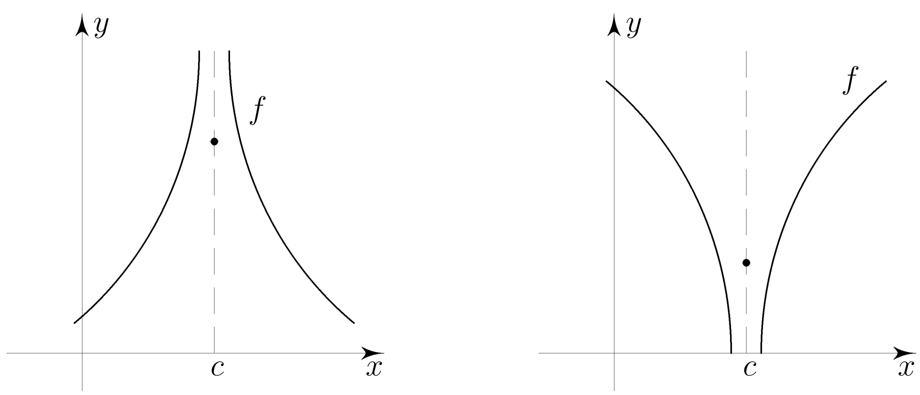
Obr. 4.13

ii. $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$,



Obr. 4.14

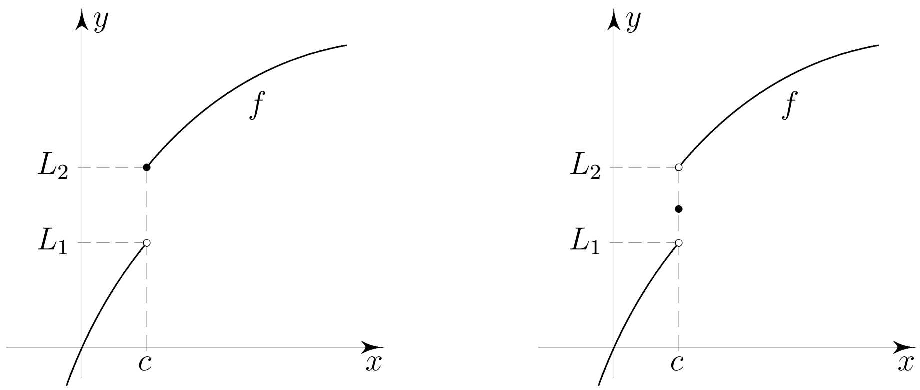
b) má v bodě c nevlastní limitu ($|\lim\limits_{x\to c} f(x)| = +\infty$),



Obr. 4.15

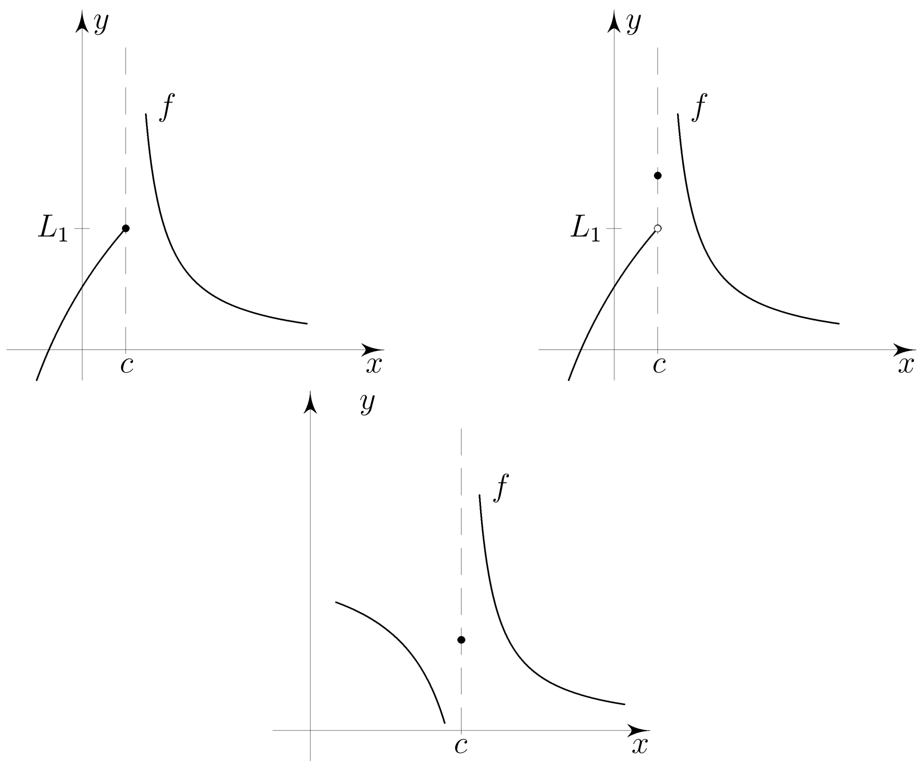
c) nemá v bodě c limitu,

i. obě její jednostranné limity v bodě c jsou vlastní,



Obr. 4.16

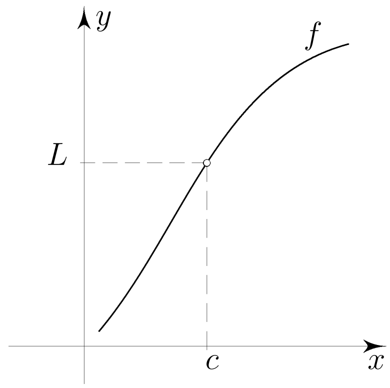
ii. aspoň jedna její jednostranná limita v bodě c je nevlastní,



Obr. 4.17

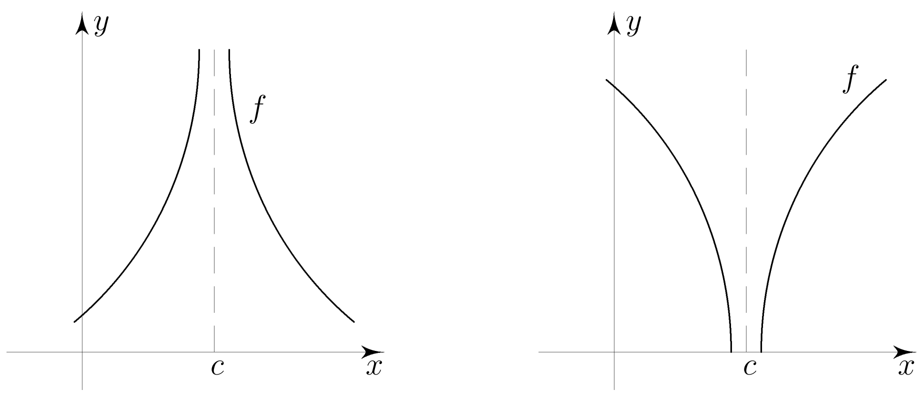
2. Funkce f není definována v bodě c, $c \in \mathsf{D}'(f) \setminus \mathsf{D}(f)$,

   a) má v bodě c vlastní limitu ($\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \in \mathbf{R}$),



Obr. 4.18

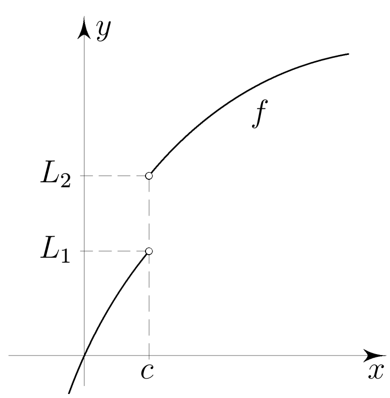
   b) má v bodě c nevlastní limitu ($|\lim\limits_{x\to c} f(x)| = +\infty$),



Obr. 4.19

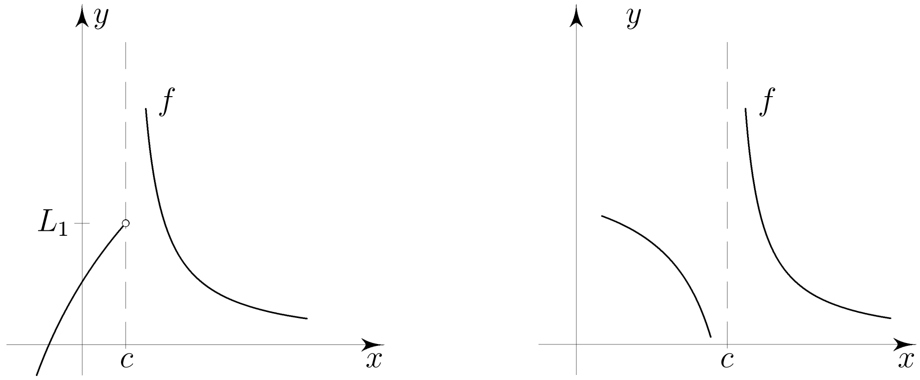
   c) nemá v bodě c limitu,

      i. obě její jednostranné limity v bodě c jsou vlastní,



Obr. 4.20

ii. aspoň jedna její jednostranná limita v bodě c je nevlastní,



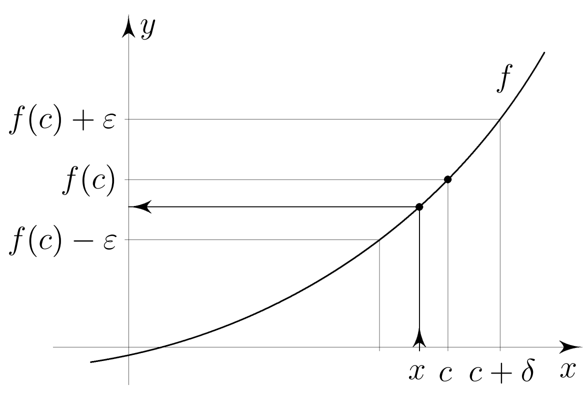
Obr. 4.21

Pouze v případě 1a)i lze graf $\mathsf{G}(f)$ nakreslit „jedním tahem" — jedinou nepřerušovanou čarou při průchodu bodem c. Tato vlastnost grafu funkce úzce souvisí s pojmem spojitosti funkce v bodě c. Dá se také říci, že spojitost funkce v bodě c odpovídá názorné představě, že „malé" změně argumentu, který má hodnotu c, odpovídá „malá" změna funkční hodnoty $f(c)$. Opět, jako u limity funkce, nám pomůže při definici spojitosti funkce v bodě pojem okolí bodu.

IV.24 Definice (spojitosti funkce v bodě). Nechť $c \in \mathsf{D}(f)$. Říkáme, že funkce f je *spojitá v bodě* c, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbf{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in \mathsf{D}(f)$, pro která je $|x - c| < \delta$, platí $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Stručný zápis definice:

$$\text{Funkce } f \text{ je spojitá v bodě } c \in \mathsf{D}(f) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \\ \forall x \in \mathsf{U}(c, \delta) \cap \mathsf{D}(f) \Rightarrow f(x) \in \mathsf{U}(f(c), \varepsilon). \tag{6}$$



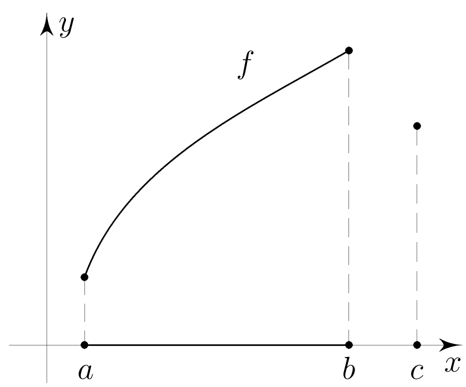
Obr. 4.22: Funkce f je spojitá v bodě c

Srovnejme tento obrázek s obr. 4.3 (vpravo dole) a stručné zápisy $(1')$ a (6) definic vlastní limity a spojitosti funkce f v bodě c.

Vlastní limita	Spojitost
funkce f v bodě c	
• $c \in \mathsf{D}'(f)$, tj. bod c může, ale nemusí patřit do množiny $\mathsf{D}(f)$,	• $c \in \mathsf{D}(f)$, tj. bod c patří do množiny $\mathsf{D}(f)$,
• užíváme redukované okolí $\mathsf{U}^*(c,\delta)$,	• užíváme okolí $\mathsf{U}(c,\delta)$,
• $\lvert f(x) - \lim\limits_{x\to c} f(x)\rvert < \varepsilon$,	• $\lvert f(x) - f(c)\rvert < \varepsilon$,
• nemá smysl hovořit o vlastní limitě funkce v izolovaném bodě množiny $\mathsf{D}(f)$ (vlastní ani nevlastní limita funkce f v izolovaném bodě množiny $\mathsf{D}(f)$ není definována).	• má smysl hovořit o spojitosti funkce v izolovaném bodě množiny $\mathsf{D}(f)$ (dostatečně malé okolí izolovaného bodu množiny $\mathsf{D}(f)$ obsahuje pouze tento bod množiny $\mathsf{D}(f)$ a podmínka spojitosti je triviálně splněna).

Poznámka. Funkce je v izolovaném bodě svého definičního oboru spojitá.

Uvědomte si! Graf funkce f, spojité v izolovaném bodě c jejího definičního oboru $\langle a, b\rangle \cup \{c\}$, může vypadat takto:

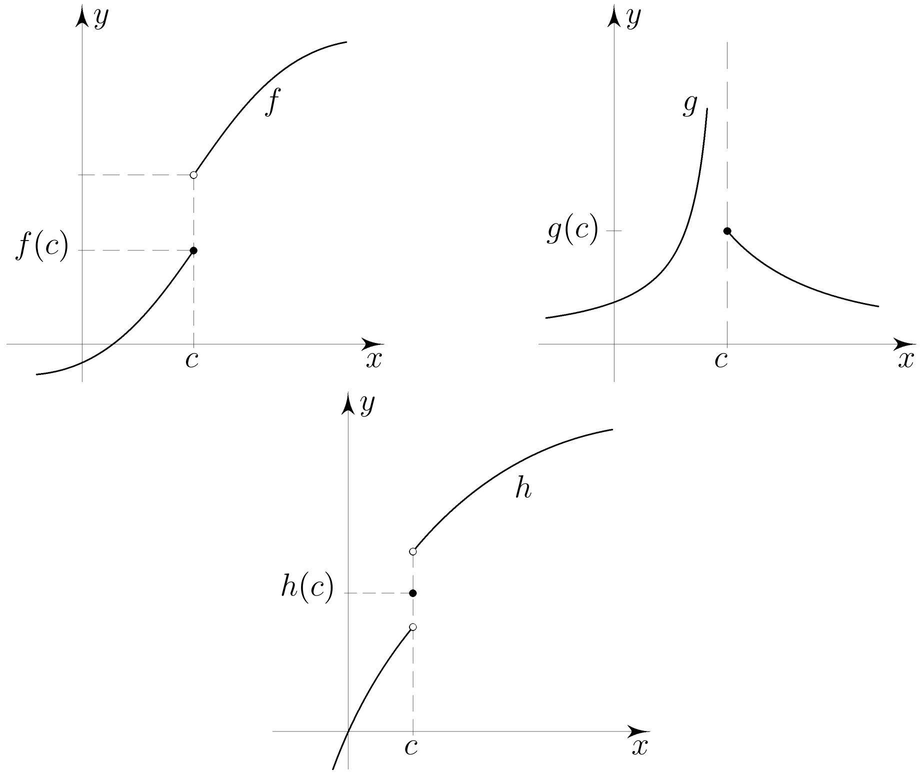


Obr. 4.23

K pojmu funkce spojité v bodě lze zavést — podobně jako u limity funkce v bodě — pojem funkce spojité zprava, resp. zleva, v bodě.

IV.25 Definice (jednostranné spojitosti funkce v bodě). Nechť $c \in \mathsf{D}(f)$. Říkáme, že funkce f je *spojitá zprava*, resp. *spojitá zleva*, *v bodě* c, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbf{R}^+$ takové, že pro všechna $x \in \mathsf{D}(f)$, pro která je $c \le x < c + \delta$, resp. $c - \delta < x \le c$, platí $\lvert f(x) - f(c)\rvert < \varepsilon$.

Na následujících obrázcích je funkce f spojitá zleva v bodě c, funkce g spojitá zprava v bodě c. Funkce h není spojitá zprava ani zleva v bodě c.



Obr. 4.24: Grafy funkcí f, g, h

IV.26 Věta. *Nechť $c \in \mathsf{D}(f)$ je hromadný bod zprava i zleva definičního oboru funkce f. Funkce f je spojitá v bodě c, právě když je spojitá zprava i zleva v bodě c.*

Všechny body množiny $\mathbf{R}$, ve kterých funkce není spojitá, bychom mohli nazvat *body nespojitosti* funkce. Nazveme tak však pouze hromadné body definičního oboru funkce, ve kterých funkce není spojitá. Rozlišujeme tři typy bodů nespojitosti funkce.

IV.27 Definice (bodů nespojitosti funkce). Nechť $c \in \mathsf{D}'(f)$.

Bod c nazýváme *bod odstranitelné nespojitosti* funkce f, jestliže existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ a přitom $L \neq f(c)$ nebo $c \notin \mathsf{D}(f)$.

Bod c nazýváme *bod nespojitosti prvního* $(I.)$ *druhu* funkce f, jestliže existují vlastní jednostranné limity funkce f v bodě c a přitom

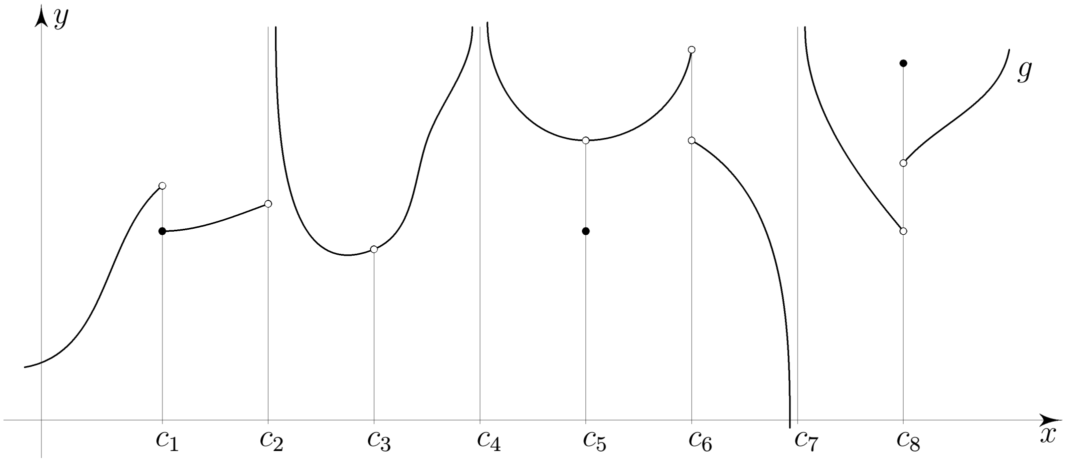
$$\lim_{x\to c+} f(x) \neq \lim_{x\to c-} f(x).$$

Číslo

$$|\lim_{x\to c+} f(x) - \lim_{x\to c-} f(x)|$$

nazýváme *skok* funkce f v bodě c.

Bod c nazýváme *bod nespojitosti druhého (II.) druhu* funkce f, jestliže aspoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě c je nevlastní nebo neexistuje.



Obr. 4.25: Funkce g a její body nespojitosti

Body c_3 a c_5 jsou body odstranitelné nespojitosti, body c_1, c_6 a c_8 jsou body nespojitosti I. druhu a body c_2, c_4 a c_7 jsou body nespojitosti II. druhu funkce g.

Vraťme se k obrázkům na začátku tohoto oddílu. Funkce f má v bodě c odstranitelnou nespojitost v případech 1a)ii a 2a), nespojitost I. druhu v případech 1c)i a 2c)i a nespojitost II. druhu v případech 1b), 1c)ii, 2b) a 2c)ii.

IV.28 Poznámka. Je-li bod c bodem odstranitelné nespojitosti funkce f, lze funkci f *spojitě dodefinovat v bodě* c, tj. definovat novou funkci F funkčním předpisem

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in \mathsf{D}(f) \setminus \{c\} \\ \lim\limits_{x \to c} f(x) & \text{pro } x = c \end{cases} ;$$

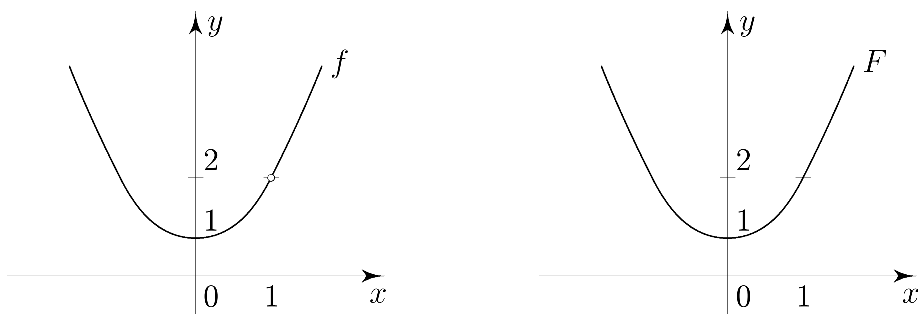
funkce F je spojitá v bodě c.

IV.29 Příklady.

a) Bod 1 je bodem odstranitelné nespojitosti funkce $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$, poněvadž

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2(x-1) + x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x^2 + 1) = 2$$

a přitom $1 \notin \mathsf{D}(f)$. Funkce $F(x) = x^2 + 1$ spojitě dodefinovává funkci f v bodě 1.



Obr. 4.26: Grafy funkcí f a F

b) Bod 0 je bodem nespojitosti I. druhu funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$, poněvadž obě jednostranné limity funkce f v bodě 0 jsou vlastní a nejsou si rovny.

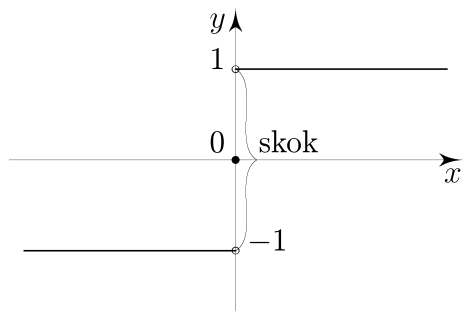
$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = \lim_{x\to 0+} 1 = 1,$$
$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = \lim_{x\to 0-} (-1) = -1,$$

tj.

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x \neq \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x.$$

Skok funkce f v bodě 0 je roven

$$\left|\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x - \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x\right| = |1 - (-1)| = 2.$$



Obr. 4.27: Graf funkce $\operatorname{sgn} x$

c) Bod 0 je bodem nespojitosti II. druhu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, poněvadž obě jednostranné limity funkce f v bodě 0 jsou nevlastní.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

IV.30 Věta (o vztahu mezi limitou a spojitostí). *Nechť $c \in \mathsf{D}(f) \cap \mathsf{D}'(f)$. Funkce f je spojitá v bodě c, právě když $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.*

Poznámka. Věta 4.30 je jednou z nejužívanějších vět při výpočtu limity funkce spojité v bodě jejího definičního oboru, který je zároveň hromadným bodem jejího definičního oboru. Lze ji přeformulovat na definici spojitosti funkce v takovémto bodě (tj. nikoliv v izolovaném bodě jejího definičního oboru).

IV.31 Věta. *Nechť f je funkce spojitá v bodě c. Pak existuje jisté okolí $\mathsf{U}(c)$ takové, že funkce f je omezená na množině $\mathsf{U}(c) \cap \mathsf{D}(f)$. (Stručně: Funkce spojitá v bodě je v něm lokálně omezená.)*

IV.32 Věta. *Nechť f je funkce spojitá v bodě c a $f(c) \neq 0$. Pak existuje jisté okolí $\mathsf{U}(c)$ takové, že ve všech bodech $x \in \mathsf{U}(c) \cap \mathsf{D}(f)$ je $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(c)$. (Stručně: Funkce spojitá v bodě nemění na jeho blízkém okolí znaménko.)*

IV.33 Věta. *Nechť f a g jsou funkce spojité bodě c. Pak funkce $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (pokud je $g(c) \neq 0$) a $|f|$ jsou také spojité v bodě c.*

Poznámka. Tvrzení o spojitosti součtu, resp. součinu, dvou funkcí spojitých v bodě c lze zobecnit na konečný počet sčítanců, resp. činitelů; speciálně, je-li funkce f spojitá v bodě c, pak i funkce f^n, $n \in \mathbf{N}$, je spojitá v bodě c.

IV.34 Věta (o spojitosti složené funkce v bodě). *Nechť g je funkce spojitá v bodě c, f funkce spojitá v bodě $g(c)$ a $\mathsf{H}(g) \subset \mathsf{D}(f)$. Potom složená funkce $f[g]$ je spojitá v bodě c.*

IV.35 Věta. *Je-li funkce f prostá na svém definičním oboru a spojitá v bodě c, pak funkce f^{-1} inverzní k funkci f je spojitá v bodě $f(c)$.*

IV.36 Poznámka. Věty 4.30 až 4.35 zůstávají po patřičných úpravách v platnosti i pro funkce spojité zprava či zleva v bodě c.

Spojitost funkce na množině

Podobně jako limita funkce je i spojitost funkce v bodě lokální vlastnost funkce. Na rozdíl od limity funkce lze však pojem spojitosti funkce v bodě rozšířit na pojem spojitosti funkce na jejím definičním oboru nebo na části jejího definičního oboru.

IV.37 Definice (spojitosti funkce na množině). Říkáme, že funkce f je *spojitá na neprázdné množině* $\mathsf{M} \subset \mathsf{D}(f)$, je-li spojitá v každém bodě množiny M.

Je-li $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f)$, říkáme, že funkce f je *spojitá na svém definičním oboru* nebo prostě, že funkce f je *spojitá*.

Speciálně, je-li množina $\mathsf{M} \subset \mathsf{D}(f)$ interval s krajními body a a b, $a < b$, říkáme, že funkce f je *spojitá na intervalu* M, je-li spojitá v každém bodě intervalu M, tj. spojitá v každém vnitřním bodě intervalu M, spojitá zprava v bodě a, pokud $a \in \mathsf{M}$, a spojitá zleva v bodě b, pokud $b \in \mathsf{M}$.

IV.38 Věta. *Každá základní elementární funkce je spojitá.*

Příklad. Funkce x^2 a $\sin x$ jsou spojité.

Na základě vět 4.33 a 4.34 můžeme vyslovit následující větu:

IV.39 Věta. *Součet, rozdíl, součin a podíl dvou spojitých funkcí, absolutní hodnota spojité funkce a funkce složená ze dvou spojitých funkcí jsou spojité funkce.*

Příklad. Funkce $y = \sqrt{x^2+4}$, $x \in \mathbf{R}$, je spojitá, neboť je složená ze spojitých funkcí $y = \sqrt{u}$, $u \in \mathbf{R}_0^+$, a $u = x^2 + 4$, $x \in \mathbf{R}$; přitom pro všechna čísla $x \in \mathbf{R}$ je $x^2 + 4 \in \mathbf{R}_0^+$.

Na základě předchozích výsledků můžeme vyslovit tvrzení:

IV.40 Věta. *Každá elementární funkce je spojitá.*

Poznámka. Věty 4.39 a 4.40 často užíváme při rozhodování o spojitosti funkcí.

IV.41 Věta. *Je-li funkce spojitá, pak je spojitá na každé podmnožině svého definičního oboru.*

Příklad. Funkce $\sin x$ je spojitá na svém definičním oboru $\mathbf{R}$, ale také např. na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ nebo na intervalu $(0, 2\pi)$.

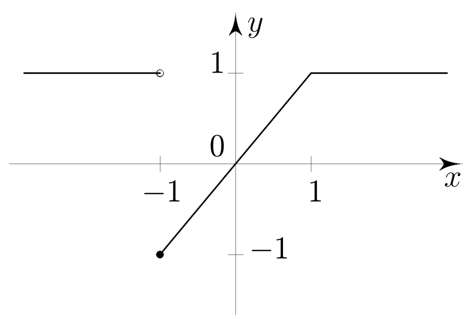
IV.42 Definice. Říkáme, že funkce f je *po částech spojitá na intervalu* I, má-li n, $n \in \mathbf{N}$, bodů odstranitelné nespojitosti nebo nespojitosti I. druhu a nemá žádné jiné body nespojitosti na intervalu I.

Poznámka. Zařadíme-li bod odstranitelné nespojitosti mezi body nespojitosti I. druhu s nulovým skokem, můžeme funkci po částech spojitou na intervalu definovat jako funkci, která má nejvýše konečný počet skoků na tomto intervalu a nemá žádné jiné body nespojitosti.

Příklad. Funkce $\operatorname{sgn} x$ je po částech spojitá na intervalu $\mathbf{R}$, neboť má 1 skok na tomto intervalu, a to v bodě 0, a nemá žádné jiné body nespojitosti.

IV.43 Příklad. Sledujme spojitost funkce $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } |x| \le 1, \\ 1 & \text{pro } |x| > 1. \end{cases}$

Řešení: $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$.



Obr. 4.28

Funkce x a 1 jsou základní elementární funkce a podle věty 4.38 jsou spojité na intervalu $\mathbf{R}$. Podle věty 4.41 je funkce x spojitá na intervalu $(-1, 1)$ a funkce 1 je spojitá na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$. Problémy se spojitostí funkce f by mohly nastat pouze v bodech -1 a 1. Vypočítejme proto limity funkce f v těchto bodech. Poněvadž právě v těchto bodech se mění funkční předpis, musíme napřed vypočítat jednostranné limity funkce f v těchto bodech.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -1+} f(x) &= \lim_{x\to -1+} x = -1 \\ \lim_{x\to -1-} f(x) &= \lim_{x\to -1-} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) \text{ neexistuje, přitom } f(-1) = -1.$$

Funkce f je spojitá v bodě -1 pouze zprava.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1).$$

Funkce f je spojitá v bodě 1 (podle věty 4.30).

Závěr: Funkce f je spojitá na intervalech $(-\infty,-1)$ a $\langle -1,+\infty)$, má pouze 1 bod nespojitosti, a to bod -1, jenž je bodem nespojitosti I. druhu se skokem 2, takže je po částech spojitá na svém definičním oboru.

IV.44 Příklad. Funkce

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

není definována v bodě 0. Lze ji spojitě dodefinovat v tomto bodě? Pokud ano, proveďme to!

Řešení: Pokud ano, bod 0 musí být bodem odstranitelné nespojitosti funkce f. To zjistíme pomocí výpočtu limity funkce f v bodě 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{3}{2} \in \mathbf{R},$$

tedy bod 0 je bodem odstranitelné nespojitosti funkce f. Funkci f lze spojitě dodefinovat v bodě 0.

Podle poznámky 4.28 je spojitým dodefinováním funkce f nová funkce F, která je dána funkčním předpisem

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & \text{pro } x \neq 0, \\ \frac{3}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

IV.45 Příklad. Určeme (nejdelší) intervaly, na kterých je funkce

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x + \ln(1-x)$,

b) $g(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \ln(1-x)$

spojitá.

Řešení:

a) Nejprve určíme definiční obor funkce: $1-x>0$, $x<1$, $\mathsf{D}(f) = (-\infty, 1)$.

Víme, že podle věty 4.40 funkce $\ln(1-x)$ je spojitá na intervalu $(-\infty,1)$ a podle výsledku příkladu 4.29b funkce $\operatorname{sgn} x$ není spojitá v bodě 0. Tedy funkce f je spojitá na intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,1)$, neboť je součtem funkcí spojitých na těchto intervalech. Zbývá vyšetřit její spojitost v bodě 0.

Vypočítáme limitu funkce f v bodě 0 a porovnáme ji s hodnotou funkce f v bodě 0.

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \ln(1-x) & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 + \ln(1-x) & \text{pro } x \in (0, 1). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} (1 + \ln(1-x)) = 1, \\ \lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} (-1 + \ln(1-x)) = -1, \end{aligned}$$

tedy limita

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{sgn} x + \ln(1-x))$$

neexistuje, takže funkce f není spojitá v bodě 0.

Závěr: Funkce f je spojitá na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, 1)$.

b) Postupujeme obdobně jako v případě a). $\mathsf{D}(g) = (-\infty, 1)$.

$$g(x) = \begin{cases} -\ln(1-x) & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ \ln(1-x) & \text{pro } x \in (0, 1). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} g(x) &= \lim_{x\to 0+} \ln(1-x) = 0, \\ \lim_{x\to 0-} g(x) &= \lim_{x\to 0-} (-\ln(1-x)) = 0, \end{aligned}$$

tedy

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{sgn} x \cdot \ln(1-x)) = 0 = g(0),$$

takže funkce g je spojitá v bodě 0.

Závěr: Funkce g je spojitá na intervalu $(-\infty, 1)$.

Z příkladů 4.45a) a 4.45b) je patrné, že z nespojitosti jedné nebo několika funkcí v bodě c, z nichž je utvořena nová funkce, nevyplývá nespojitost této funkce v bodě c. (Stručně: Nespojitost se nemusí operacemi s funkcemi zachovávat.)

Vlastnosti funkcí spojitých na uzavřeném intervalu

Zajímavé a užitečné vlastnosti mají funkce spojité na uzavřeném intervalu.

IV.46 Věta (o vlastnostech funkce spojité na uzavřeném intervalu). *Nechť f je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí:*

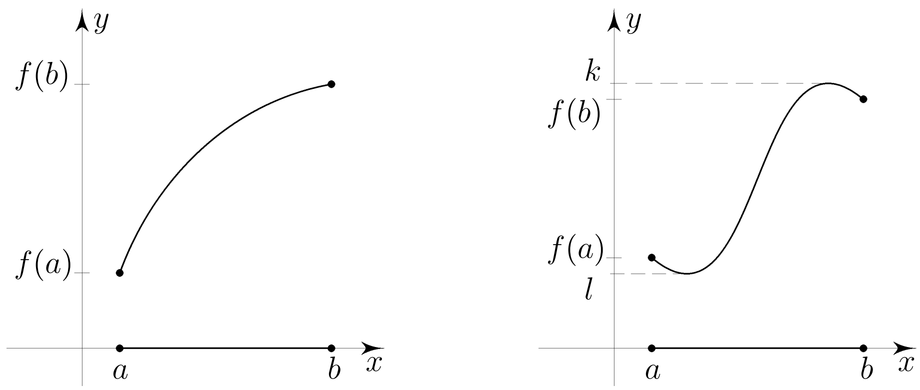
1. Weierstrassova věta: *Funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

2. Weierstrassova věta: *Funkce f má globální maximum a globální minimum na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Bolzanova věta, též věta o nulovém bodě: *Je-li nadto $f(a) \cdot f(b) < 0$, existuje aspoň jeden bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$, tj. nulový bod funkce f.*

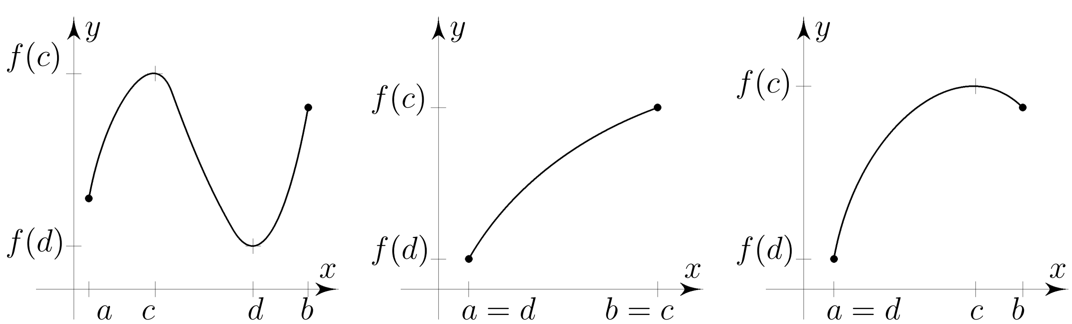
Věta o mezihodnotě: *Je-li nadto $f(a) \neq f(b)$, funkce f nabývá v bodech intervalu (a, b) všech hodnot, které leží mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$.*

Grafické znázornění věty o vlastnostech funkce spojité na uzavřeném intervalu:



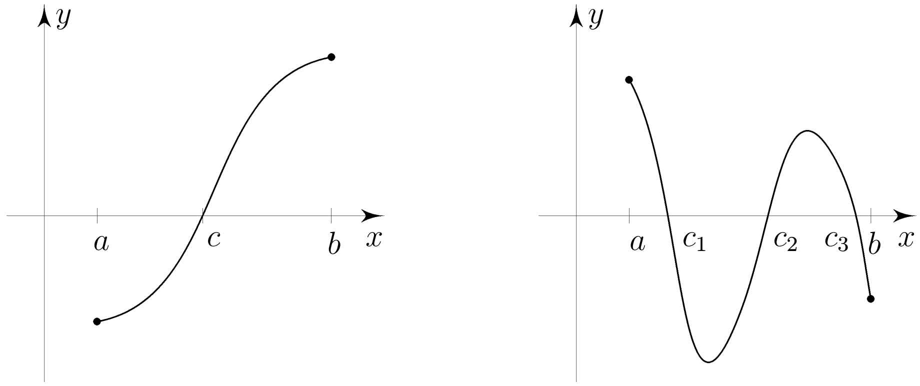
$\forall x \in \langle a, b\rangle$ je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ $\qquad$ $\forall x \in \langle a, b\rangle$ je $l \leq f(x) \leq k$

Obr. 4.29: K 1. Weierstrassově větě



Obr. 4.30: K 2. Weierstrassově větě

Existují body c a d intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že pro všechna čísla $x \in \langle a, b\rangle$ je $f(x) \leq f(c)$ a $f(x) \geq f(d)$; číslo $f(c)$ je globální maximum a číslo $f(d)$ je globální minimum funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, čili $\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(c)$ a $\min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(d)$.



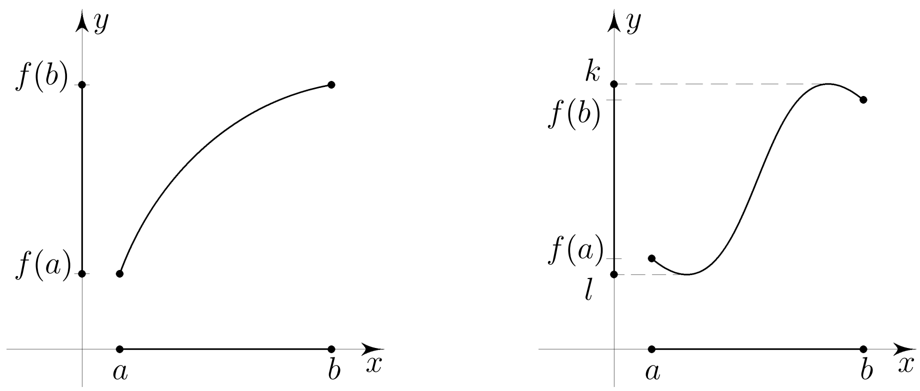
Bod c je nulovým bodem funkce f

Body c_1, c_2 a c_3 jsou nulovými body funkce f

Obr. 4.31: K Bolzanově větě

Nulový bod funkce f nazýváme též kořenem rovnice $f(x) = 0$.

Bolzanovu větu užíváme při numerickém řešení (tj. přibližném určování kořenů) rovnice $f(x) = 0$.



$\mathsf{H}(f) = \langle f(a), f(b)\rangle$

$\mathsf{H}(f) \supset \langle f(a), f(b)\rangle$

Obr. 4.32: K větě o mezihodnotě

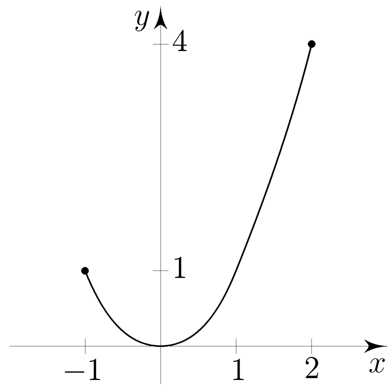
Z věty o mezihodnotě vyplývá, že množina hodnot funkce spojité na uzavřeném intervalu je uzavřený interval (v případě konstantní funkce bod).

Příklad. Funkce $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Podle věty 4.46:

1. je omezená na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ (skutečně pro všechna čísla $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ je $|\sin x| \le 1$),
2. má globální maximum $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ a globální minimum $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$,
3. má aspoň jeden nulový bod na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a to 0 ($\sin 0 = 0$), protože $\sin(-\frac{\pi}{2}) \cdot \sin\frac{\pi}{2} < 0$,
4. nabývá v bodech otevřeného intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ všech hodnot, které leží mezi čísly $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ a $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, protože $\sin(-\frac{\pi}{2}) \neq \sin\frac{\pi}{2}$.

Poznámka. Pokud nejsou splněny některé podmínky věty 4.46, není zaručena platnost příslušných tvrzení. Protože však tyto podmínky jsou jen postačující a nikoliv nutné, mohou příslušná tvrzení platit i pro některé funkce, nesplňující tyto podmínky.

Příklad. Funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle -1, 2 \rangle$, je spojitá na intervalu $\langle -1, 2 \rangle$.



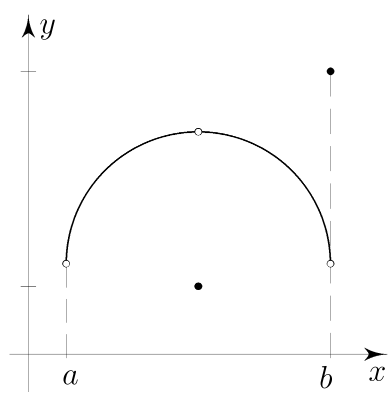
Obr. 4.33: Graf $f(x) = x^2$, $x \in \langle -1, 2 \rangle$

Podle věty 4.46:

1. je omezená na intervalu $\langle -1, 2 \rangle$: pro všechna čísla $x \in \langle -1, 2 \rangle$ je $0 \leq x^2 \leq 4$,
2. má globální maximum 4 (v bodě 2) a globální minimum 0 (v bodě 0) na intervalu $\langle -1, 2 \rangle$,
3. má nulový bod 0 na intervalu $(-1, 2)$, ačkoliv $f(-1) \cdot f(2) \geq 0$ (na intervalu $(1, 2)$ však již nulový bod nemá),
4. nabývá v bodech intervalu $(-1, 2)$ všech hodnot, ležících mezi čísly $f(-1) = 1$ a $f(2) = 4$.

Příklady.

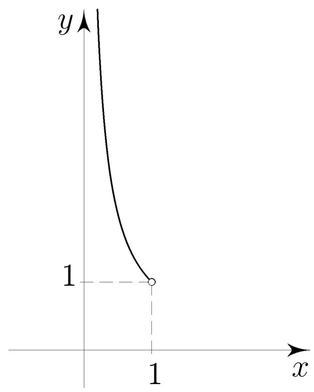
a) Na obrázku 4.34 je graf funkce, která není spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, a přesto je něm omezená a má na něm globální minimum i globální maximum.



Obr. 4.34

b) Funkce $f(x) = \sin x$, $x \in (0, 2\pi)$, je spojitá na otevřeném intervalu $(0, 2\pi)$, a přesto je na tomto intervalu omezená (pro všechna čísla $x \in (0, 2\pi)$ je $|\sin x| \leq 1$), má globální maximum 1 (v bodě $\frac{\pi}{2}$), globální minimum -1 (v bodě $\frac{3\pi}{2}$) i nulový bod π ($\sin \pi = 0$) na tomto intervalu a v bodech tohoto intervalu nabývá všech bodnot mezi čísly -1 a 1.

c) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$, viz obr. 4.35, je spojitá na otevřeném intervalu $(0, 1)$; není na tomto intervalu omezená a nemá na něm ani globální maximum ani globální minimum ani nulový bod; v bodech intervalu $(0, 1)$ nabývá všech hodnot z intervalu $(1, +\infty)$.



Obr. 4.35

Výpočet limit a jednostranných limit funkcí v bodě

Vše, co je v tomto oddílu řečeno o limitách funkcí v bodě, platí s patřičnými úpravami i pro jednostranné limity funkcí v bodě.

Při výpočtu limit funkcí v bodě potřebujeme kromě již uvedených vět také větu o limitě složené funkce v bodě a znalost limit některých elementárních funkcí ve význačných bodech (stručně základních limit).

IV.47 Věta (o limitě složené funkce v bodě). *Nechť* $c \in \mathbf{R}^*$. *Je-li* $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L \in \mathbf{R}$ *a funkce* f *spojitá v bodě* L, *pak platí*

$$\lim_{x \to c} f[g(x)] = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L).$$

Poznámka. Zjednodušeně se dá říci, že je-li vnější funkce spojitá, pak symbol limity před složenou funkcí můžeme přemístit přímo před vnitřní funkci. Toto přemístění je umožněno právě spojitostí vnější funkce a obecně neplatí. Kromě věty 4.47 platí věta o limitě složené funkce v bodě se slabší podmínkou pro funkci f. Záměrně však uvádíme větu 4.47, protože s ní vystačíme téměř při všech výpočtech limit složených funkcí v bodě.

IV.48 Poznámka. Větu 4.47 užíváme zejména při výpočtu limit složených funkcí těchto typů v bodě c:

1. $$\lim_{x\to c} \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to c} f(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty, \\ \mathrm{e}^L, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = L \in \mathbf{R}, \\ 0, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty, \end{cases}$$

2. $$\lim_{x\to c} \ln f(x) = \ln \lim_{x\to c} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty \\ \ln L, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = L \in \mathbf{R}^+ \\ -\infty, & \text{je-li } \lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 \end{cases}$$

   a přitom $f(x) > 0$,

3. $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \mathrm{e}^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to c} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to c}(g(x)\ln f(x))}$, je-li $f(x) > 0$.

Základní limity

Je užitečné pamatovat si následující vzorce:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}, \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \le a < 1 \\ 1 & \text{pro } a = 1 \\ +\infty & \text{pro } a > 1 \end{cases}, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{pro } a = 1 \\ 0 & \text{pro } a > 1 \end{cases},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\},\ \text{speciálně } \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ a od ní odvozené } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \text{ a od ní odvozená } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Nyní již máme k dispozici aparát, pomocí něhož můžeme počítat limity funkcí v hromadných bodech jejich definičního oboru.

Při výpočtu limity funkce f v bodě c se můžeme setkat s těmito případy:

1. c je vlastní bod množiny $\mathsf{D}'(f)$.

   a) Funkce f je spojitá v bodě c. V tomto případě je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ (podle věty 4.30).

   b) Funkce f není spojitá v bodě c. V tomto případě užíváme vhodné věty, které vybíráme z vět 4.12, 4.15–4.20, a základní limity; dospějeme-li přitom k některému typu neurčitých výrazů, snažíme se vhodnými úpravami (vytýkáním, rozkladem, rozšiřováním, krácením apod.) nahradit funkci f funkcí spojitou v bodě c, a pak užijeme větu 4.21.

2. c je nevlastní bod množiny $\mathsf{D}'(f)$.

   V tomto případě postupujeme jako při výpočtu limity posloupnosti a užíváme případně základní limity

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

   V případě limity funkce v nevlastním bodě $-\infty$ musíme dát pozor na znaménka. Dospějeme-li k některému typu neurčitých výrazů, postupujeme obdobně jako v případě 1b).

Poznámka. K výpočtu limity funkce, který vede k neurčitému výrazu typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, lze také užít l'Hospitalovo pravidlo, s nímž se seznámíte v kapitole 5.

Příklady na výpočet limit funkcí v bodě

Vede-li výpočet limity funkce v bodě k neurčitému výrazu, uvádíme jeho typ v závorkách za rovnítkem.

IV.49 Příklad. Vypočtěme limitu funkce

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-7x+12}$$

a) v bodě 0,
b) v bodech, ve kterých není definována,
c) v nevlastních bodech $+\infty$ a $-\infty$.

Řešení: Nejprve určíme definiční obor funkce f:

$$\begin{aligned} x^2-7x+12&\neq 0,\\ (x-3)(x-4)&\neq 0, \end{aligned}$$

a tedy $\mathsf{D}(f)=(-\infty,3)\cup(3,4)\cup(4,+\infty)$.

a) $0\in\mathsf{D}(f)$, $f(0)=\frac{0^2-9}{0^2-7\cdot 0+12}=-\frac{3}{4}$, podle věty 4.40 je funkce f spojitá v bodě 0. Podle věty 4.30 je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-9}{x^2-7x+12}=-\frac{3}{4}$. (Případ 1a).)

b) Funkce f není definována a tudíž ani spojitá v hromadných bodech 3 a 4 svého definičního oboru.

Vypočteme napřed limitu funkce f v bodě 3. Dosazením čísla 3 za proměnnou x dostaneme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$. Užijeme proto větu 4.21. Náhradní funkcí funkce f bude funkce F, kterou získáme následující úpravou výrazu, jímž je funkce f zadána:

$$\frac{x^2-9}{x^2-7x+12} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}, \quad x \neq 3,\ x \neq 4.$$

Funkce $F(x) = \frac{x+3}{x-4}$ je v bodě 3 spojitá a na jistém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(3)$ je rovna funkci f.

$$\lim_{x\to 3} F(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-4} = \frac{3+3}{3-4} = -6,$$

proto

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-7x+12} = -6.$$

Zpravidla užíváme zkrácený zápis výpočtu:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-7x+12} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-4} = -6.$$

(Případ 1b).)

Dosazením čísla 4 za proměnnou x nedostaneme neurčitý výraz. Při výpočtu limity funkce f v bodě 4 užijeme větu 4.18 a poznámku k ní. Zvolíme-li číslo $\delta < 1$, pak na redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(4,\delta)$ je $f = F$, takže místo limity funkce f v bodě 4 můžeme počítat limitu funkce F v bodě 4.

$\lim\limits_{x\to 4}(x+3) = 7$, přitom na levém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*_-(4,\delta)$ je $x-4<0$ a na pravém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*_+(4,\delta)$ je $x-4>0$, tedy limita $\lim\limits_{x\to 4} F(x)$ a s ní limita $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ neexistují.

K témuž závěru bychom dospěli výpočtem jednostranných limit funkce f nebo F v bodě 4:

$$\lim_{x\to 4-} \frac{x+3}{x-4} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 4+} \frac{x+3}{x-4} = +\infty,$$

takže podle věty 4.12, limity $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x+3}{x-4}$ a $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-9}{x^2-7x+12}$ neexistují. (Případ 1b).)

c)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9}{x^2-7x+12} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{7}{x}+\frac{12}{x^2}} = \frac{1-0}{1-0+0} = 1.$$

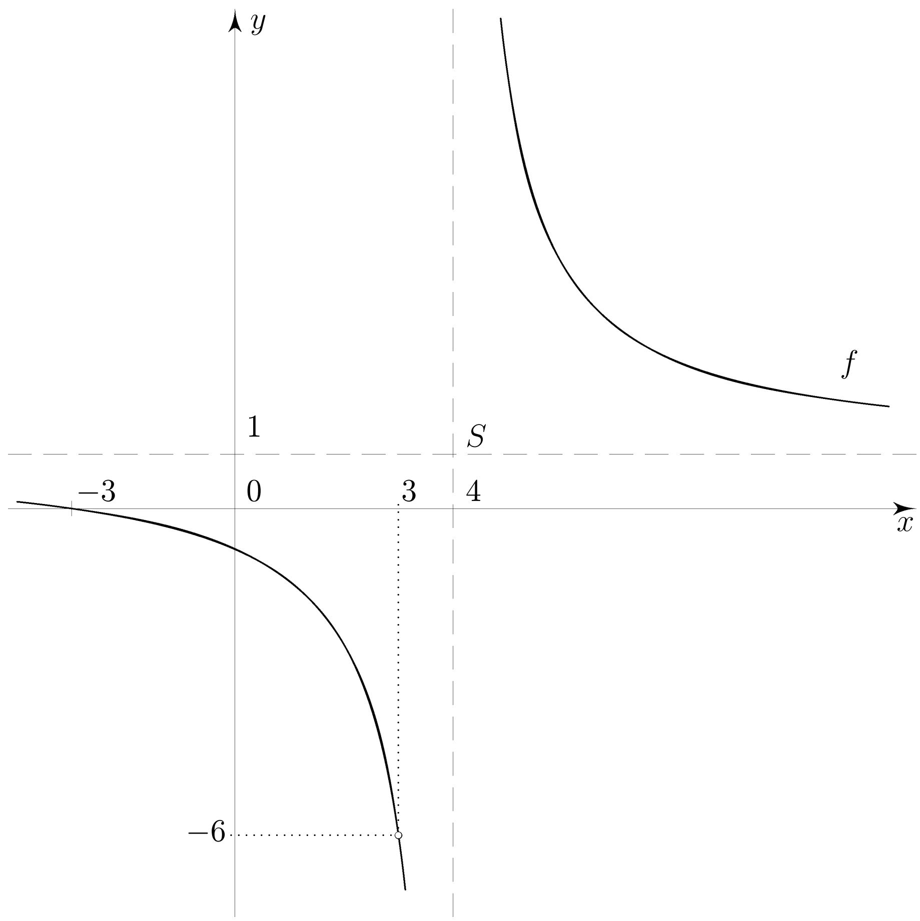
Při výpočtu jsme užili základní limitu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. (Případ 2.)

Obdobně vypočteme

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-9}{x^2-7x+12} = 1.$$

(Případ 2.)

Sestrojíme graf $\mathsf{G}(f)$, abychom mohli lépe postihnout vzájemné souvislosti mezi limitou funkce f v uvažovaných bodech a průběhem funkce f na redukovaných okolích těchto bodů.



Obr. 4.36

Z grafu $\mathsf{G}(f)$ vypozorujeme tyto skutečnosti: Jestliže $x \to 3$ (ať zprava či zleva), pak $f(x) \to -6$. Jestliže $x \to 4+$, pak $f(x) \to +\infty$, a jestliže $x \to 4-$, pak $f(x) \to -\infty$, což znamená, že přímka o rovnici $x = 4$ je vertikální asymptotou grafu $\mathsf{G}(f)$. Jestliže $x \to +\infty$ nebo $x \to -\infty$, pak $f(x) \to 1$, což znamená, že přímka o rovnici $y = 1$ je asymptotou se směrnicí grafu $\mathsf{G}(f)$. (Víme, že graf $\mathsf{G}(f)$ je hyperbola se středem $S = [4, 1]$, k níž nepatří bod $[3, -6]$.)

Jak vypadá graf $\mathsf{G}(F)$? $\mathsf{D}(F) = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$, takže graf $\mathsf{G}(F)$ se liší od grafu $\mathsf{G}(f)$ jen tím, že k němu navíc patří bod $[3, -6]$.

IV.50 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{3+\cos^2 x}{\sin x - 2}$.

Řešení: Funkce

$$f(x) = \frac{3+\cos^2 x}{\sin x - 2}$$

je spojitá v bodě $\frac{\pi}{2} \in \mathsf{D}(f)$ podle věty 4.40 a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ podle věty 4.30. Tedy

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3+\cos^2 x}{\sin x - 2} = \frac{3+\cos^2 \frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2} - 2} = \frac{3+0}{1-2} = -3.$$

(Případ 1a).)

IV.51 Příklad. Vypočtěme limitu funkce $f(x) = -3x^3 + x^2 + 4$ v nevlastních bodech.

Řešení: a)

$$\lim_{x\to+\infty}(-3x^3 + x^2 + 4) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(-3 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(-\lim_{x\to+\infty} 3 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^3}\right) = +\infty\cdot(-3+0+0) = -\infty.$$

Užili jsme přitom větu 4.15. (Případ 2.)

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3 + x^2 + 4\right) = +\infty + \infty + 4 = +\infty.$$

Všimněte si, že na rozdíl od výpočtu limity funkce f v nevlastním bodě $+\infty$ výpočet limity funkce f v nevlastním bodě $-\infty$ nevede k neurčitému výrazu.

IV.52 Příklad. Vypočtěme limitu funkce $f(x) = x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ v nevlastních bodech.

Řešení: a) Podle věty 4.15 je

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right).$$

Výpočet druhé limity však vede k neurčitému výrazu typu $\infty - \infty$. Rozšíříme proto zlomek $\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1}$ výrazem $\sqrt{x^2+1} + x$ a dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$
$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

(Případ 2.)

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right] = -\infty(+\infty+\infty) = -\infty.$$

(Případ 2.)

V tomto případě jsme nemuseli dělat žádné úpravy funkce, neboť po dosazení nevlastního čísla $-\infty$ za proměnnou x jsme obdrželi výraz s početními operacemi, které jsou na množině $\mathbf{R}^*$ definovány.

IV.53 Příklad. Vypočtěme limitu funkce $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$ v nevlastních bodech.

Řešení:

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}}{\frac{x+3}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = 1.$$

(Případ 2.)

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}}{\frac{x+3}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+0}}{1+0} = -1.$$

(Případ 2.)

Při výpočtu limity jsme vydělili čitatel i jmenovatel zlomku nejvyšší mocninou proměnné x ve jmenovateli, tj. x. Museli jsme však přitom dbát na to, že platí

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x & \text{pro } x<0 \\ x & \text{pro } x\ge 0 \end{cases},$$

a tedy

$$x = \begin{cases} -\sqrt{x^2} & \text{pro } x<0 \\ \sqrt{x^2} & \text{pro } x\ge 0 \end{cases}.$$

To jsou ona úskalí, na něž jsme upozornili výše.

IV.54 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Řešení: Výpočet limity funkce vede k neurčitému výrazu typu $\frac{0}{0}$. Zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{x+1}+1$ a užijeme větu 4.21.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

(Případ 1b).)

IV.55 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$.

Řešení: Výpočet limity funkce vede k neurčitému výrazu typu $\frac{0}{0}$. Rozložíme kvadratické funkce v součin lineárních funkcí, zlomek zkrátíme společným činitelem $x-4$ a užijeme větu 4.21.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+11)}{(x-4)(x-2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x+11}{x-2} = \frac{15}{2}.$$

(Případ 1b).)

Poznámka. V zájmu stručnosti, pokud to nebude nutné, nebudeme již slovně popisovat úpravy funkcí při výpočtu limit, neboť je lze snadno vyčíst z podrobného řešení, ani uvádět, o jaký případ výpočtu limity jde.

IV.56 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to \pi} \frac{(1-\operatorname{tg} x)-(1+\operatorname{tg} x)}{\sin 2x\cdot\left(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to \pi} \frac{-2\operatorname{tg} x}{\sin 2x\cdot\left(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to \pi} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}} \cdot \lim_{x\to \pi} \frac{-2\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cdot\cos x} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to \pi} \frac{-1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{(-1)^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

IV.57 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - 5\,\mathrm{tg}\,x}{3\sin x - x}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - 5\,\mathrm{tg}\,x}{3\sin x - x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(2x - 5\,\mathrm{tg}\,x)}{x}}{\frac{3\sin x - x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - 5\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}}{3\frac{\sin x}{x} - 1} = \frac{2 - 5\cdot 1}{3\cdot 1 - 1} = -\frac{3}{2}.$$

Při výpočtu jsme užili základní limity $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\,x}{x} = 1$.

IV.58 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{arctg}\, \dfrac{x}{2\left(\sqrt{x+1} - 1\right)}$.

Řešení: Funkce

$$u = g(x) = \frac{x}{2(\sqrt{x+1} - 1)}$$

má limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2\left(\sqrt{x+1} - 1\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1} + 1\right)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} + 1}{2} = 1$$

a funkce $f(u) = \mathrm{arctg}\, u$ je spojitá v bodě 1. Proto podle věty 4.47

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{arctg}\, \frac{x}{2\left(\sqrt{x+1} - 1\right)} = \mathrm{arctg} \lim_{x\to 0} \frac{x}{2\left(\sqrt{x+1} - 1\right)} = \mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

IV.59 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 \sin \dfrac{1}{x}\right)$.

Řešení: Limita $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje, ale víme, že pro všechna čísla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ je $\left|sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$, tzn., že funkce $\sin\frac{1}{x}$ je omezená na množině $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, a tedy i na každém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(0)$, a $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. Užitím věty 4.19 dostaneme,

$$\lim_{x\to 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right) = 0.$$

K výpočtu limity můžeme užít též větu 4.20. Z nerovností $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ vyplývá, že

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

na každém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(0)$ a přitom

$$\lim_{x\to 0} \left(-x^2\right) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Jsou splněny oba předpoklady věty 4.20, a proto

$$\lim_{x\to 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Uvědomte si! Je-li funkce f součtem, resp. součinem, několika sčítanců, resp. činitelů, z nichž některé nemají limitu v bodě c, nemusí to ještě znamenat, že limita funkce f v bodě c neexistuje. To potvrzuje i následující příklad.

IV.60 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Řešení: Ani jedna z funkcí $\frac{1}{1-x}$ a $-\frac{3}{1-x^3}$ nemá limitu v bodě 1, neboť

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\tfrac{1}{1-x}&=-\infty\\ \lim_{x\to 1-}\tfrac{1}{1-x}&=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ \text{neexistuje}$$

a

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\left(-\tfrac{3}{1-x^3}\right)&=+\infty\\ \lim_{x\to 1-}\left(-\tfrac{3}{1-x^3}\right)&=-\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(-\frac{3}{1-x^3}\right)\ \text{neexistuje.}$$

Přesto limita součtu obou funkcí v bodě 1 existuje, avšak k jejímu výpočtu nemůžeme užít větu 4.15. Proto postupujeme takto:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{-2+x+x^2}{1-x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(-1+x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to 1}\frac{2+x}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

IV.61 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2}$.

Řešení: Podle věty 4.18 je

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\infty,$$

protože $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\sin x=-1$ a $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2=0$, přičemž v každém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ je $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2>0$ neboli $\operatorname{sgn}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2=-\operatorname{sgn}\sin x$.

IV.62 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+6}\right)^{\frac{3x-1}{2}}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+6}\right)^{\frac{3x-1}{2}}=(1^\infty)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+6-9}{2x+6}\right)^{\frac{3x-1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-9}{2x+6}\right)^{\frac{3x-1}{2}}.$$

Zavedeme substituci $\frac{-9}{2x+6}=\frac{1}{z}$, tj. $z=\frac{2x+6}{-9}$, odkud $x=\frac{-9z-6}{2}$ a

$$\frac{3x-1}{2}=\frac{3\left(\frac{-9z-6}{2}\right)-1}{2}=\frac{-27z-20}{4};\quad x\to+\infty\Rightarrow z\to-\infty.$$

Je tedy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-9}{2x+6}\right)^{\frac{3x-1}{2}} = \lim_{z\to-\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{-27z-20}{4}} =$$

$$= \lim_{z\to-\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]^{-\frac{27}{4}}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-5}\right\} = \mathrm{e}^{-\frac{27}{4}}\cdot(1+0)^{-5} = \mathrm{e}^{-\frac{27}{4}}.$$

V závěru výpočtu jsme užili věty 4.15 a 4.47 a vzorec $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}$.

IV.63 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$.

Řešení: Jde o limitu složené funkce typu $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$, takže postupujeme podle návodu v poznámce 4.48.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x} = (1^{\infty}) = \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\operatorname{cotg}^2 x\cdot\ln(1+x^2)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}[\operatorname{cotg}^2 x\cdot\ln(1+x^2)]}.$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg}^2 x\cdot\ln(1+x^2)\right] = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg}^2 x\cdot\ln\left(1+x^2\right)^{\frac{x^2}{x^2}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[x^2\operatorname{cotg}^2 x\cdot\ln\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right] = \lim_{x\to 0}\left(x^2\operatorname{cotg}^2 x\right)\cdot\lim_{x\to 0}\ln\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\ln\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}} = 1\cdot 1\cdot\ln\mathrm{e} = 1.$$

Užili jsme základní limity $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$ a $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}$ po substituci $x^2 = z$. Tedy

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x} = \mathrm{e}.$$

IV.64 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

Řešení: Jde opět o limitu složené funkce typu $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{x^3}{1-x}\cdot\ln\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{1-x}\cdot\ln\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right]}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{1-x}\cdot\ln\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1-x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\frac{1}{x}-1}\cdot\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\infty\cdot\ln\frac{3}{2} = -\infty.$$

Užitím vzorce 1 pro limitu složené funkce typu $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{e}^{f(x)}$ v poznámce 4.48 dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}} = 0.$$

Častým zdrojem chyb při výpočtu limit funkcí v bodě je nedůsledné užití věty 4.15, konkrétně její užití jen na některý sčítanec součtu nebo činitel součinu. Následující příklad je upozorněním a varováním před chybnými úvahami.

IV.65 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \ln(1+x)}{2x - \ln(1+x)}$.

Nesprávné řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(1+x)}{2x - \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{0 + \ln(1+x)}{0 - \ln(1+x)} = -1$$

nebo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(1+x)}{2x - \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x + 0}{2x - 0} = \frac{1}{2}\,.$$

Správné řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(1+x)}{2x - \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{\ln(1+x)}{x}}{2 - \frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1+1}{2-1} = 2.$$

A nyní, když již umíme počítat limity funkcí, můžeme se věnovat nejdůležitější aplikaci limity funkce — derivaci funkce.

V
Derivace funkce

Derivace funkce je jedním ze základních pojmů diferenciálního počtu.

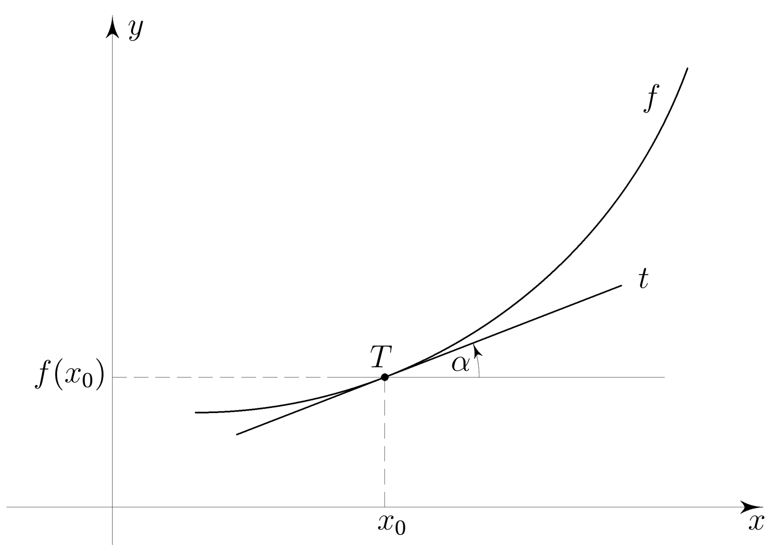
Pojem derivace funkce vznikl ve druhé polovině 17. století při řešení konkrétních úloh matematiky a fyziky. Obecnou metodu řešení těchto úloh nalezli nezávisle na sobě Angličan Isaac Newton (1642–1727) a Němec Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).

Derivace funkce v bodě

K zavedení pojmu derivace funkce v bodě vedly především tyto dvě úlohy:

- Úloha o tečně grafu funkce (Leibniz).
- Úloha o okamžité rychlosti přímočarého pohybu hmotného bodu (Newton).

V.1 Úloha o tečně grafu funkce (geometrická motivace). Uvažujme o grafu spojité funkce $y = f(x)$, majícím v bodě dotyku $T = [x_0, f(x_0)]$ tečnu t, která není rovnoběžná s osou y. Úkolem je určit směrnici tečny t grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T.



Obr. 5.1: Graf funkce f s tečnou t v bodě T

Tečna t, která není rovnoběžná s osou y, je určena „pevným“ bodem T a směrnicí $k_t = \operatorname{tg} \alpha$, kde $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, je velikost směrového úhlu tečny

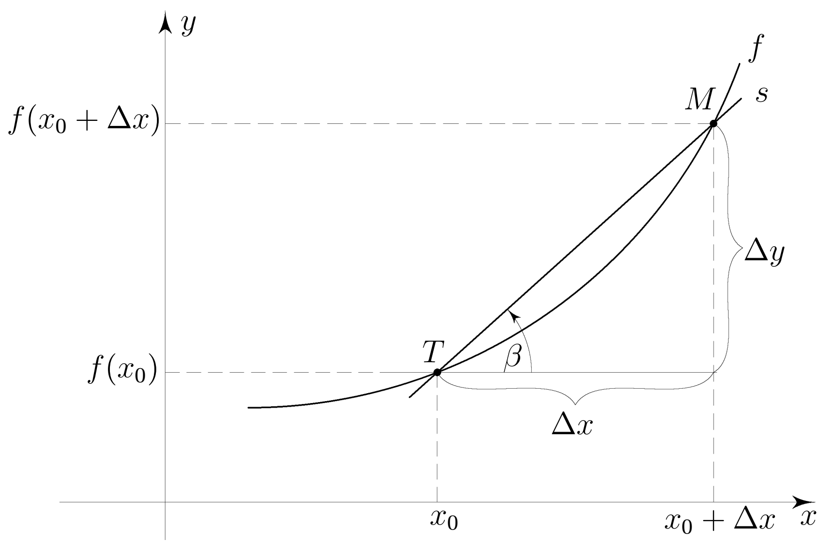
t neboli úhlu, který by musela proběhnout kladná poloosa x při svém otáčení kolem počátku v kladném smyslu (proti otáčení hodinových ručiček), aby splynula s tečnou t. Směrnici k_t zatím neznáme. Zvolme na grafu $\mathsf{G}(f)$ „proměnný“ bod $M = [x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$, závislý na proměnné Δx, zvané *diference (přírůstek) nezávisle proměnné* x. Přímka $s = TM$ je sečnou grafu $\mathsf{G}(f)$ a má směrnici

$$k_s = \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Proměnná $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, jež se značí též $\Delta f(x_0)$, se nazývá *diference (přírůstek) závisle proměnné* y nebo *diference (přírůstek) funkce* f *v bodě* x_0 a podíl

$$k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

se nazývá *diferenční podíl funkce* f *v bodě* x_0.



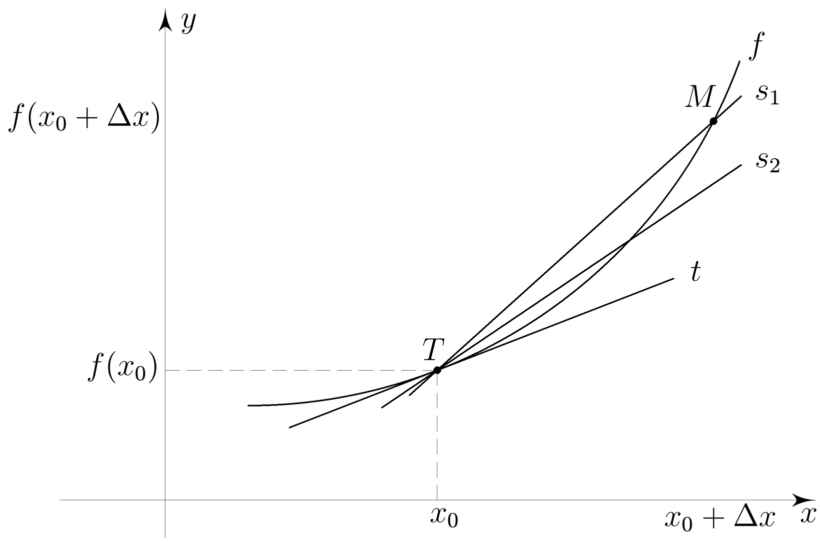
Obr. 5.2: Graf funkce f a sečny $s = TM$

Poznámka. Ve všech obrázcích kapitoly 5, na kterých jsou znázorněny diference Δx a Δy, předpokládáme, že tyto diference jsou kladné.

Směrnice k_s je funkcí proměnné Δx. Blíží-li se proměnná Δx k číslu 0, bod M se blíží po grafu $\mathsf{G}(f)$ k bodu T, sečna s přechází v tečnu t a směrnice k_s se blíží k směrnici k_t.

Tečna grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T je tedy „limitní polohou“ sečen grafu $\mathsf{G}(f)$ a směrnice k_t je vlastní limitou směrnice k_s pro $\Delta x \to 0$ čili

$$k_t = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

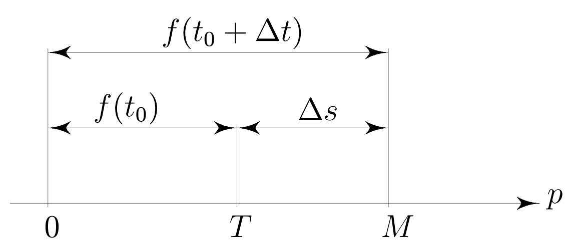


Obr. 5.3: Sečna s přechází v tečnu t

V.2 Úloha o okamžité rychlosti přímočarého pohybu hmotného bodu (fyzikální motivace). Předpokládejme, že souřadnice s polohy (zvaná dráha) hmotného bodu, pohybujícícího se po přímce, na které je zavedena kartézská soustava souřadnic, je funkcí času t, tj. $s = f(t)$, a že hmotný bod je v časovém okamžiku (stručně čase) t_0 v poloze $T = [f(t_0)]$ a v čase $t_0 + \Delta t$ v poloze $M = [f(t_0 + \Delta t)]$, kde Δt je diference nezávisle proměnné t, jež udává časový rozdíl. Absolutní hodnota rozdílu $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ — diference závisle proměnné s (funkce f) v bodě t_0 — udává vzdálenost bodů M a T, a podíl

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \tag{2}$$

— diferenční podíl funkce f v bodě t_0 — udává průměrnou rychlost v pohybu hmotného bodu v časovém intervalu $\langle t_0, t_0 + \Delta t\rangle$.



Obr. 5.4

Průměrná rychlost v pohybu hmotného bodu v časovém intervalu $\langle t_0, t_0 + \Delta t\rangle$ závisí na proměnné Δt. Blíží-li se proměnná Δt k číslu 0, průměrná rychlost v se blíží okamžité rychlosti v_0 pohybu hmotného bodu v čase t_0. Okamžitá rychlost v_0 pohybu hmotného bodu v čase t_0 je tedy vlastní limitou průměrné rychlosti v

pohybu hmotného bodu pro $\Delta t \to 0$ čili

$$v_0 = \lim_{\Delta t\to 0} v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

V.3 Poznámka. Jak při výpočtu směrnice tečny grafu funkce, tak při výpočtu okamžité rychlosti přímočarého pohybu hmotného bodu, jsme se setkali s formálně stejnou limitou, totiž vlastní limitou diferenčního podílu funkce v bodě. S touto limitou se setkáváme při řešení mnoha dalších problémů matematických, fyzikálních, chemických a technických, např. při výpočtu okamžité rychlosti změny objemu kapaliny, přitékající do nádoby, oteplování zahřívaného tělesa, chemické reakce či spotřeby paliva. Pro svůj význam a důležitost dostala tato limita zvláštní název, a to vlastní derivace funkce v bodě. Určitý význam má i nevlastní limita diferenčního podílu funkce v bodě, a tu nazýváme nevlastní derivací funkce v bodě. Ve společné definici budeme nezávisle proměnnou značit x, avšak symbol Δx pro diferenci nezávisle proměnné zaměníme jednodušším symbolem h.

V.4 Definice. Nechť funkce f je definována na jistém okolí bodu x_0 a nechť existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{3}$$

Limitu (3) nazýváme *derivace funkce f v bodě x_0* a značíme $f'(x_0)$.

Existuje-li derivace funkce f v bodě x_0 (stručně derivace $f'(x_0)$), říkáme též, že *funkce f má derivaci v bodě x_0* (stručně derivaci $f'(x_0)$).

V.5 Poznámky.

1. Podle toho, zda limita (3) je vlastní nebo nevlastní, mluvíme o vlastní, resp. nevlastní, derivaci funkce f v bodě x_0. Tam, kde nebude záležet na tom, zda derivace funkce je vlastní či nevlastní, budeme přívlastek *vlastní* či *nevlastní* vypouštět.

2. Derivace funkce f v bodě x_0 bývá značena též $\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$, při zápisu $y = f(x)$ též $y'_{x=x_0}$, $[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}]_{x=x_0}$, u konkrétní funkce též $[f(x)]'_{x=x_0}$, $[\frac{\mathrm{d}(f(x))}{\mathrm{d}x}]_{x=x_0}$ atp.

3. Limitu (3) lze vyjádřit také ve tvaru $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (položí-li se $x = x_0+h$).

4. Derivace funkce f v bodě x_0 je číslo $f'(x_0) \in \mathbf{R}^*$.

V.6 Geometrický význam derivace funkce f v bodě. Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$, je to směrnice tečny grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Existence nevlastní derivace funkce f v bodě x_0 nás informuje o tom, že směrový úhel tečny grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je roven $\frac{\pi}{2}$, tj. že tato tečna je rovnoběžná s osou y.

V.7 Fyzikální význam vlastní derivace funkce $y = f(t)$ v bodě. Derivace funkce $y = f(t)$ v bodě t_0 udává nejen okamžitou rychlost přímočarého pohybu hmotného bodu v časovém okamžiku t_0, ale též okamžitou rychlost změny jakékoli fyzikální veličiny y, závislé na čase t, v časovém okamžiku t_0.

Obdobně jako jsme u pojmu limity funkce v bodě zavedli pojem jednostranných limit funkce v bodě, zavádíme u pojmu derivace funkce v bodě pojem jednostranných derivací funkce v bodě.

V.8 Definice. Nechť funkce f je definována na jistém pravém, resp. levém, okolí bodu x_0 a nechť existuje limita

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad \text{resp.} \quad \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{4}$$

Limitu (4) nazýváme derivací funkce f *zprava*, resp. *zleva*, v bodě x_0 a značíme $f'_+(x_0)$, resp. $f'_-(x_0)$.

Existuje-li derivace funkce f zprava, resp. zleva, v bodě x_0 (stručně derivace $f'_+(x_0)$, resp. $f'_-(x_0)$), říkáme též, že *funkce f má derivaci zprava,* resp. *zleva, v bodě x_0*.

Čísla $f'_+(x_0) \in \mathbf{R}^*$ a $f'_-(x_0) \in \mathbf{R}^*$ nazýváme souhrnně *jednostrannými derivacemi funkce f v bodě x_0*.

O vztahu mezi derivací funkce v bodě a jednostrannými derivacemi funkce v bodě vypovídá následující věta.

V.9 Věta. *Funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$, právě když má v bodě x_0 derivaci zleva $f'_-(x_0)$ a derivaci zprava $f'_+(x_0)$ a platí $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Potom $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.*

Poznámka. Jestliže jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 existují, ale nejsou si rovny, nebo alespoň jedna z jednostranných derivací funkce f v bodě x_0 neexistuje, pak derivace funkce f v bodě x_0 neexistuje.

V.10 Příklad. Vypočtěme derivaci dané funkce v bodě 1.

a) $f(x) = x^3$,

b) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$,

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \neq 1 \\ -1 & \text{pro } x = 1 \end{cases}$,

d) $f(x) = |x-1|$.

Řešení: a)

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \\ = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$$

Funkce f má vlastní derivaci $f'(1) = 3$ v bodě 1.

b)

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty.$$

Funkce f má nevlastní derivaci $f'(1) = +\infty$ v bodě 1.

c)

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{x-(-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1},$$

avšak tato derivace neexistuje, neboť jednostranné derivace funkce f v bodě 1 sice existují, ale nejsou si rovny:

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty, \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty.$$

d)

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|-|0|}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1},$$

avšak tato derivace neexistuje, neboť jednostranné derivace funkce f v bodě 1 sice existují, ale nejsou si rovny:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x\to 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{x-1} = 1, \\ f'_-(1) &= \lim_{x\to 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{-x+1}{x-1} = -1. \end{aligned}$$

V.11 Věta (o vztahu mezi spojitostí a derivací). *Má-li funkce f vlastní derivaci v bodě x_0, pak je v tomto bodě spojitá.*

V.12 Poznámky.

1. Požadavek existence *vlastní* derivace $f'(x_0)$ ve větě 5.11 je podstatný. Uvažujme o funkci $f(x) = \operatorname{sgn} x$ a vypočtěme její derivaci v bodě 0.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{x} = +\infty, \end{aligned}$$

a tedy $f'(0) = +\infty$. Funkce $\operatorname{sgn} x$ má derivaci v bodě 0, ale nevlastní, a není spojitá v bodě 0. Vidíme, že existence nevlastní derivace funkce v bodě nestačí k tomu, aby funkce byla spojitá v tomto bodě.

2. Věta obrácená k větě 5.11 neplatí. Funkce $f(x) = |x-1|$ je spojitá v bodě 1, ale nemá derivaci v bodě 1, viz příklad 5.10 d). Tedy funkce spojitá v bodě x_0 nemusí mít derivaci v bodě x_0.

3. *Hierarchie pojmů:* funkce f má vlastní derivaci v bodě $x_0 \Rightarrow$ funkce f je spojitá v bodě $x_0 \Rightarrow$ funkce f má limitu v bodě x_0 rovnou hodnotě funkce f v bodě $x_0 \Rightarrow$ funkce f je definována v bodě x_0.

V.13 Geometrický význam jednostranných derivací funkce v bodě. Tento význam je analogický jako u derivace funkce v bodě. Vlastní derivace funkce f zprava, resp. zleva, v bodě x_0 udává směrnici tečny t_+ zprava, resp. t_-

zleva, grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$. Nevlastní derivace funkce f v bodě x_0 nás informuje o tom, že směrový úhel tečny zprava, resp. zleva, v bodě T je roven $\frac{\pi}{2}$, tj. že tečna zprava, resp. zleva, grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T je rovnoběžná s osou y.

Poznámky.

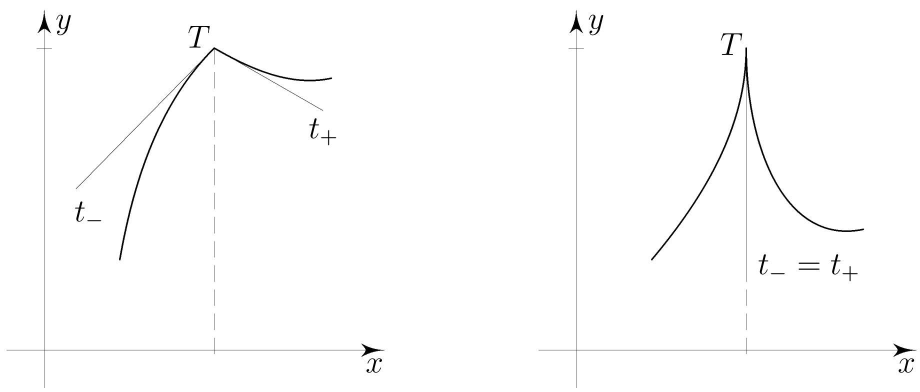
1. Tečna zprava, resp. zleva, grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T je limitní polohou sečen TM zprava, resp. zleva, kde $M = [x, f(x)]$, pro $x \to x_0+$, resp. $x \to x_0-$.

2. Tečna zprava a tečna zleva mají společný název *jednostranné tečny*.

Je-li funkce f spojitá v bodě x_0 a neexistuje derivace $f'(x_0)$, takže neexistuje tečna grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T, avšak

a) existují vlastní jednostranné derivace $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, pak existují obě jednostranné tečny grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T a mají různé směrnice, tj. graf $\mathsf{G}(f)$ má v bodě T *tupý hrot*, je v bodě T *zlomený*,

b) existují nevlastní jednostranné derivace$f'_+(x_0)$ a$f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0) = -f'_-(x_0)$, pak existují obě jednostranné tečny grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T, jsou rovnoběžné s osou y a splývají, tj. $\mathsf{G}(f)$ má v bodě T *ostrý hrot*.



Obr. 5.5

Rovnice tečny a normály grafu funkce

V.14 Věta. *Nechť funkce f je spojitá a má derivaci v bodě x_0. Potom existuje tečna t grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$ a její rovnice je*

$$t : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

pokud derivace $f'(x_0)$ je vlastní, a

$$t : x = x_0,$$

pokud derivace $f'(x_0)$ je nevlastní.

Tečna grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$ neexistuje, když funkce f není spojitá v bodě x_0 nebo neexistuje derivace $f'(x_0)$.

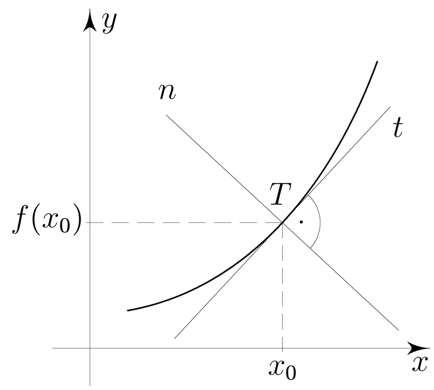
V.15 Věta. *Nechť existuje tečna t grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$. Potom rovnice přímky n, která prochází bodem T a je kolmá k tečně t, tj.* normály grafu *$\mathsf{G}(f)$ v bodě T, je*

$$n : y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

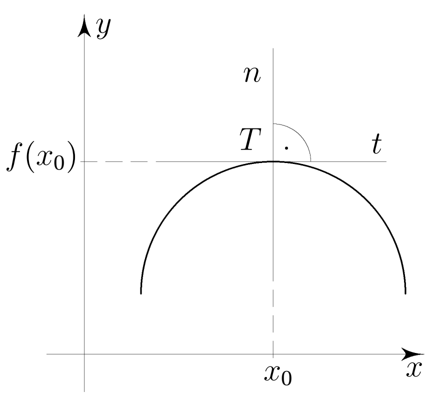
pokud derivace $f'(x_0)$ je vlastní a není rovna 0,

$n : x = x_0$, *pokud derivace $f'(x_0)$ je rovna 0 a*

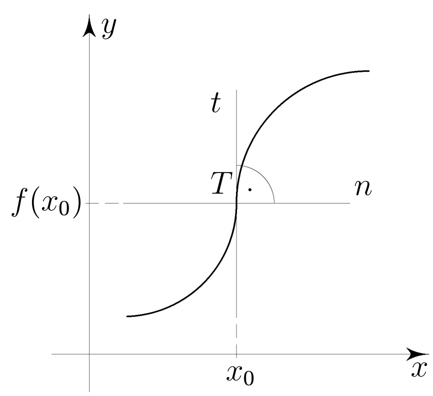
$n : y = f(x_0)$, *pokud je $|f'(x_0)| = +\infty$.*



a) $f'(x_0) \in \mathbf{R} \wedge f'(x_0) \neq 0$



b) $f'(x_0) = 0$



c) $f'(x_0) = +\infty$

Obr. 5.6: Tečna a normála

Poznámka. Normála grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T existuje, právě když existuje tečna grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T.

V.16 Věta. *Nechť funkce f je spojitá zprava, resp. zleva, a má derivaci zprava, resp. zleva, v bodě x_0. Potom existuje tečna t_+ zprava, resp. t_- zleva, grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$ a její rovnice je*

$$t_+ : y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0) \quad x \in \langle x_0, +\infty),$$

resp.

$$t_- : y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0), \quad x \in (-\infty, x_0\rangle,$$

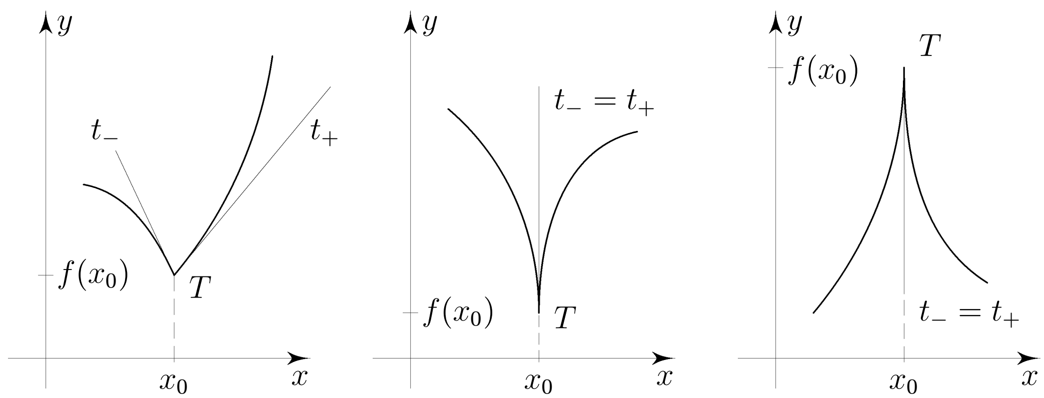
pokud derivace $f'_+(x_0)$, resp. $f'_-(x_0)$, je vlastní,

$$t_+ = t_- : x = x_0, \quad y \in \langle f(x_0), +\infty),$$

pokud $f'_+(x_0) = +\infty$ a $f'_-(x_0) = -\infty$ a

$$t_+ = t_- : x = x_0, \quad y \in (-\infty, f(x_0)\rangle,$$

pokud $f'_+(x_0) = -\infty$ a $f'_-(x_0) = +\infty$.



a) $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ $\quad$ $f'_+(x_0) \in \mathbf{R} \wedge f'_-(x_0) \in \mathbf{R}$

b) $f'_+(x_0) = +\infty$ $\quad$ $f'_-(x_0) = -\infty$

b) $f'_+(x_0) = -\infty$ $\quad$ $f'_-(x_0) = +\infty$

Obr. 5.7: Jednostranné tečny

V.17 Příklad. Určeme rovnici tečny t, popř. jednostranných tečen t_+ a t_-, a normály n grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T.

a) $f(x) = x^3$, $T = [1, 1]$.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$, $T = [1, 0]$.

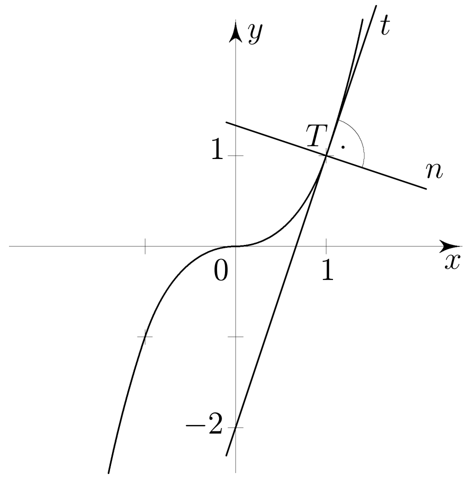
c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \neq 1 \\ -1 & \text{pro } x = 1 \end{cases}$, $T = [1, -1]$.

d) $f(x) = |x - 1|$, $T = [1, 0]$.

e) $f(x) = |\sin x|$, $T = [0, 0]$.

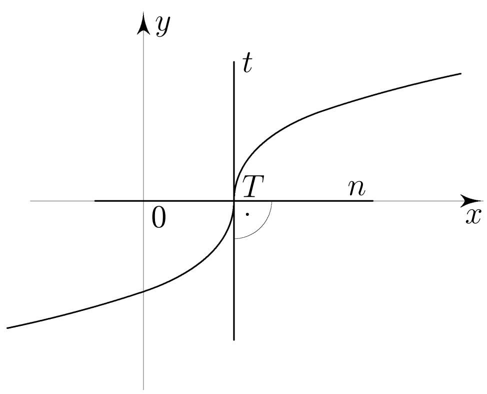
Řešení:

a) Z výsledku příkladu 5.10a víme, že $f'(1) = 3$.
$t : y = 1 + 3(x - 1)$, neboli $y = 3x - 2$,
$n : y = 1 - \frac{1}{3}(x - 1)$, neboli $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.



Obr. 5.8

b) Z výsledku příkladu 5.10b víme, že $f'(1) = +\infty$.
$t : x = 1$,
$n : y = 0$.

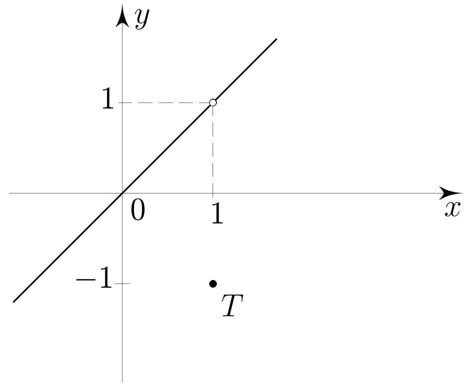


Obr. 5.9

c) Z výsledku příkladu 5.10c víme, že derivace $f'(1)$ neexistuje a existují pouze nevlastní jednostranné derivace $f'_+(1)$ a $f'_-(1)$. Přitom

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \neq f(1) = -1,$$

čili funkce f není v bodě 1 spojitá. Z toho vyplývá, že neexistuje ani tečna (ani jednostranné tečny) ani normála grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T.

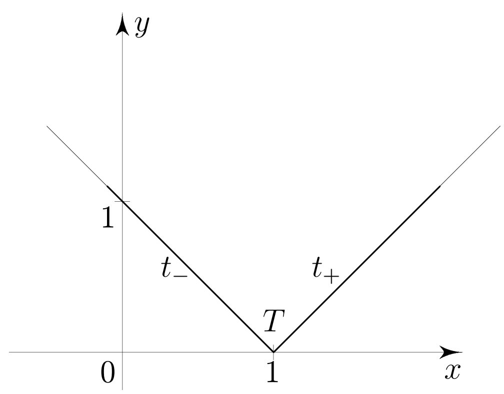


Obr. 5.10

d) Z výsledku příkladu 5.10d víme, že derivace $f'(1)$ neexistuje a existují pouze jednostranné derivace $f'_+(1) = 1$ a $f'_-(1) = -1$. Přitom $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$, čili funkce f je v bodě 1 spojitá. Existují pouze jednostranné tečny.

$$\begin{aligned} t_+ &: y = -1 + x, \quad && x \in \langle 1, +\infty), \\ t_- &: y = 1 - x, \quad && x \in (-\infty, 1\rangle, \end{aligned}$$

normála grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T neexistuje.



Obr. 5.11

e) $f(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{pro } x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi), \\ \sin x & \text{pro } x \in \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Nejdříve musíme vypočítat jednostranné derivace funkce f v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sin x}{x} = -1,$$

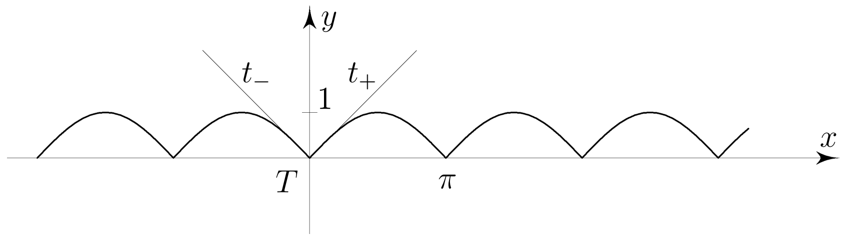
$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0)$ neexistuje, přitom funkce f je v bodě 0 spojitá.

Graf $\mathsf{G}(f)$ nemá tečnu v bodě T, má pouze jednostranné tečny v bodě T

$$t_+ : y = x, \qquad x \in \langle 0, +\infty),$$

$$t_- : y = -x, \quad x \in (-\infty, 0\rangle,$$

normála grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T neexistuje.



Obr. 5.12

Derivace funkce na množině

Vedle pojmu *derivace funkce v bodě* zavádíme pojem *derivace funkce*.

V.18 Definice. Nechť funkce f je definována na množině $\mathsf{D}(f) \subset \mathbf{R}$. Označme $\mathsf{D}(f') \subset \mathsf{D}(f)$ množinu všech bodů, ve kterých funkce f má vlastní derivaci. Je-li tato množina neprázdná, potom funkci, kterou je každému bodu x množiny $\mathsf{D}(f')$ přiřazeno číslo $f'(x)$, nazýváme *derivací funkce* f a značíme f' (stručně ji nazýváme *derivací* f'); jejím definičním oborem je množina $\mathsf{D}(f')$.

Existuje-li derivace f', říkáme též, že *funkce* f *má derivaci* f'.

Je-li $\mathsf{M} \subset \mathsf{D}(f')$, $\mathsf{M} \neq \emptyset$, říkáme, že *funkce* f *má derivaci* f' *na množině* M.

Je-li $\mathsf{M} \subset \mathsf{D}(f)$ interval s krajními body a a b, $a < b$, říkáme, že *funkce* f *má derivaci* f' *na intervalu* M, jestliže má vlastní derivaci v každém vnitřním bodě intervalu M, vlastní derivaci zprava v bodě a, pokud $a \in \mathsf{M}$, a vlastní derivaci zleva v bodě b, pokud $b \in \mathsf{M}$.

V.19 Poznámky.

1. Derivace funkce f bývá též značena $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, při zápisu $y = f(x)$ též y', $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, u konkrétní funkce též $(f(x))'$, $\frac{\mathrm{d}(f(x))}{\mathrm{d}x}$ apod.

2. Známe-li derivaci funkce f, tj. funkci f', pak derivaci funkce f v bodě x_0 obdržíme tak, že vypočteme funkční hodnotu $f'(x_0)$.

3. *Uvědomte si!* Derivace funkce f v bodě x_0 je *číslo* $f'(x_0) \in \mathbf{R}^*$, kdežto derivace funkce f je *funkce* f', definovaná na množině $\mathsf{D}(f')$, přičemž $\mathsf{H}(f') \subset \mathbf{R}$. (Ve speciálním případě to může být konstantní funkce. Např. $f(x) = 2x$, $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 2$, $x \in \mathbf{R}$.)

4. Množina $\mathsf{D}(f')$ bývá zpravidla otevřený interval nebo sjednocení nepřekrývajících se otevřených intervalů.

V.20 Věta. *Má-li funkce* f *derivaci* f' *na množině* M*, pak je funkce* f *spojitá na množině* M.

Důležitý je případ, kdy funkce f má derivaci spojitou na množině M.

V.21 Definice. Říkáme, že funkce f je *hladká na množině* M, má-li derivaci f' spojitou na množině M.

V.22 Poznámka. Má-li funkce f derivaci f' spojitou na množině M, znamená to (geometricky), že v každém bodě $x \in \mathsf{M}$ existuje tečna grafu $\mathsf{G}(f)$, která není rovnoběžná s osou y, přičemž směr tečny se spojitě mění s plynulou změnou proměnné x; graf takové funkce je oblý, bez hrotů.

Derivování elementárních funkcí

Při *výpočtu derivací* (derivování) funkcí užíváme vzorce pro derivaci základních elementárních funkcí a další vzorce a pravidla, která lze odvodit z definice derivace a z vět o limitách a spojitosti funkce.

Vzorce pro derivaci základních elementárních funkcí se odvozují na základě definice 5.4. Na ukázku odvodíme vzorce pro derivaci konstantní funkce a, $a \in \mathbf{R}$, mocninné funkce x^n, $n \in \mathbf{N}$, goniometrických funkcí $\sin x$ a $\cos x$ a exponenciální funkce e^x.

V.23 Příklad. Odvoďme vzorec pro derivaci funkce a, $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$.
Řešení: $(a)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = 0$. Tedy $(a)' = 0$, $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$.

V.24 Příklad. Ukažme, že pro všechna čísla $n \in \mathbf{N}$ a pro všechna čísla $x \in \mathbf{R}$ je $(x^n)' = nx^{n-1}$.
Řešení:

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right] = \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Tedy
$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R}.$$

V.25 Příklad. Odvoďme vzorec pro derivaci funkce $\sin x$.
Řešení:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\frac{(2x+h)}{2}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\frac{(2x+h)}{2} = 1\cdot\cos\frac{2x}{2} = \cos x.$$

Tedy
$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

V.26 Příklad. Odvoďme vzorec pro derivaci funkce $\cos x$.
Řešení: Obdobně jako v příkladu 5.25, ale užitím vzorce

$$\cos(x+h) - \cos x = -2\sin\frac{h}{2} \cdot \sin\frac{2x+h}{2}$$

dostaneme, že

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

V.27 Příklad. Odvoďme vzorec pro derivaci funkce e^x.
Řešení:

$$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\mathrm{e}^h-1)\mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\mathrm{e}^h-1)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\mathrm{e}^x = 1\cdot\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x,$$

$x \in \mathbf{R}$.

V.28 Věta (o derivaci a algebraických operacích). *Nechť funkce f a g mají vlastní derivaci v bodě x_0. Potom funkce $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ a také funkce $\frac{f}{g}$, pokud $g(x_0)\neq 0$, mají vlastní derivaci v bodě x_0 a platí:*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \tag{a$_1$}$$

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0), \tag{b$_1$}$$

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0), \tag{c$_1$}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}. \tag{d$_1$}$$

V.29 Poznámka. Nechť funkce f a g mají derivace f' a g' a nechť dále $\mathsf{M}_1 = \mathsf{D}(f')\cap\mathsf{D}(g')$ a $\mathsf{M}_2 = \mathsf{M}_1 \setminus \{x\in\mathbf{R}; g(x)=0\}$ jsou neprázdné množiny. Potom funkce $f+g$, $f-g$ a $f\cdot g$ mají derivaci na množině M_1 a funkce $\frac{f}{g}$ má derivaci na množině M_2. Nahradíme-li symboly f a g tradičními symboly u a v, můžeme psát, že na množině M_1, resp. M_2, platí:

$$(u+v)' = u' + v', \tag{a$_2$}$$

$$(u-v)' = u' - v', \tag{b$_2$}$$

$$(u\cdot v)' = u'v + uv', \tag{c$_2$}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{d$_2$}$$

V.30 Poznámky.

1. Je-li funkce u konstantní, $u = a$, $a \in \mathsf{R}$, pak podle příkladu 5.23 je $u' = 0$ a ze vzorce [c$_2$] plyne vzorec
$$(av)' = av'. \qquad [\mathrm{c}_3]$$

2. Je-li $u = 1$, a tedy $u' = 0$, pak ze vzorce [d$_2$] plyne vzorec
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}. \qquad [\mathrm{d}_3]$$

3. Ze vzorců [a$_2$] a [c$_2$] plyne vzorec
$$(a_1u + a_2v)' = a_1u' + a_2v', \quad a_1, a_2 \in \mathbf{R},$$
který lze zobecnit pro libovolný konečný počet sčítanců:
$$(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n)' = a_1u_1' + a_2u_2' + \cdots + a_nu_n', \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R};$$
vzorec platí pro všechna čísla $x \in \mathsf{D}(u_1') \cap \mathsf{D}(u_2') \cap \ldots \cap \mathsf{D}(u_n')$.

4. Vzorec [c$_2$] lze rovněž zobecnit pro libovolný konečný počet činitelů. Např. pro všechna čísla $x \in \mathsf{D}(u') \cap \mathsf{D}(v') \cap \mathsf{D}(w')$ platí:
$$(uvw)' = (uv)'w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

V.31 Příklad. Vypočtěme derivaci funkce $\operatorname{tg} x$.

Řešení:
$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. (Využili jsme výsledky příkladů 5.25 a 5.26.)

V.32 Věta (o derivaci složené funkce). *Nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě x_0 a funkce f má vlastní derivaci v bodě $g(x_0)$. Potom složená funkce $f[g]$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí*
$$(f[g])'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \qquad [\mathrm{e}_1]$$

V.33 Poznámka. Je-li M neprázdná množina všech čísel $x \in \mathsf{D}(g')$, pro která je $g(x) \in \mathsf{D}(f')$, pak složená funkce $f[g]$ má derivaci $(f[g])'$ na množině M a pro každé $x \in \mathsf{M}$ je
$$(f[g])'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \qquad [\mathrm{e}_2]$$

V.34 Příklad. Vypočtěme derivaci funkce $F(x) = (3x^4 - 5x^2 + 3)^6$.

Řešení: Pro lepší představu popíšeme složenou funkci $F = f[g]$ schématem

$$x \xrightarrow{g} (3x^4 - 5x^2 + 3) \xrightarrow{f} (3x^4 - 5x^2 + 3)^6,$$

kde $g(x) = 3x^4 - 5x^2 + 3$ a $f(y) = y^6$.

Podle výsledků příkladů 5.23 a 5.24 a vzorců [a$_2$], [b$_2$] a [c$_3$] je $f'(y) = 6y^5$ a $g'(x) = 12x^3 - 10x$. Podle vzorce [e$_2$] je $F'(x) = 6(3x^4 - 5x^2 + 3)^5 \cdot (12x^3 - 10x)$, $x \in \mathbf{R}$.

V.35 Poznámky.

1. Povšimněte si, že derivace polynomické funkce je opět polynomická funkce, ale její stupeň je o jeden nižší. Platí to obecně pro polynomickou funkci nejméně 1. stupně.

2. Při výpočtu derivace složené funkce zpravidla píšeme výsledek přímo, bez vypisování jednotlivých složek (viz příklad 5.36).

V.36 Příklad. Vypočtěme derivaci funkce $\cos^3 x$.

Řešení:

$$(\cos^3 x)' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\cos^2 x \cdot \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

(Využili jsme výsledek příkladu 5.26 a vzorec [e$_2$]).

Užitím vzorce [e$_2$] a vhodných vět můžeme vypočítat např. derivace hyperbolických funkcí.

V.37 Příklad. Vypočtěme derivaci funkce $\sinh x$.

Řešení:

$$(\sinh x)' = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,$$

$x \in \mathbf{R}$.

(Využili jsme vzorec [c$_3$], kde jsme položili $a = \frac{1}{2}$, vzorec [b$_2$] a [e$_2$] a výsledek příkladu 5.27; méně vhodné by bylo užití vzorce [d$_2$].)

V.38 Poznámka. Vzorec [e$_2$] lze zobecnit i pro vícenásobně složené funkce, např. pro funkci $f[g(h)]$. Platí: Jestliže M je neprázdná množina všech čísel $x \in \mathsf{D}(h')$, pro která $h(x) \in \mathsf{D}(g')$ a $(g[h](x) \in \mathsf{D}(f')$, pak funkce $f[g(h)]$ má derivaci $(f[g(h)])'$ na množině M a pro všechna čísla $x \in \mathsf{M}$ je

$$(f[g(h)])'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

V.39 Příklad. Vypočtěme derivaci funkce $F(x) = \sin \mathrm{e}^{(3x+1)^2}$.

Řešení: Složenou funkci F popíšeme schématem

$$x \xrightarrow{i} (3x+1) \xrightarrow{h} (3x+1)^2 \xrightarrow{g} \mathrm{e}^{(3x+1)^2} \xrightarrow{f} \sin \mathrm{e}^{(3x+1)^2}.$$

Podle vzorce [e_2] z poznámky 5.33 a jeho dalšího zobecnění v poznámce 5.38, vzorců [a_2] a [c_3] a výsledků příkladů 5.24, 5.25 a 5.27 je

$$F'(x) = \cos \mathrm{e}^{(3x+1)^2} \cdot \mathrm{e}^{(3x+1)^2} \cdot 2(3x+1) \cdot 3 = 6(3x+1)\mathrm{e}^{(3x+1)^2} \cos \mathrm{e}^{(3x+1)^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

V.40 Věta (o derivaci inverzní funkce). *Nechť funkce f je spojitá a ryze monotónní na intervalu I, f^{-1} je funkce k ní inverzní a $y_0 = f^{-1}(x_0)$ vnitřní bod intervalu I. Nechť funkce f má v bodě y_0 vlastní derivaci $f'(y_0) \neq 0$. Potom funkce f^{-1} má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0)$ a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}. \qquad [\mathrm{f}_1]$$

V.41 Poznámka. Je-li pro spojitou a ryze monotónní funkci f na otevřeném intervalu I splněna podmínka $f'(y) \neq 0$ v každém bodě $y \in \mathsf{I}$, pak pro každé $x \in \mathsf{I}$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)}. \qquad [\mathrm{f}_2]$$

kde $x = f(y)$.

V.42 Příklad. Odvoďme vzorec pro derivaci funkce $\arcsin x$.

Řešení: Funkce $\arcsin x$ je spojitá a rostoucí na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, který zobrazuje na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Položíme-li $y = \arcsin x$, je $x = \sin y$. Vzhledem k tomu, že $(\sin y)' = \cos y$ a

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

musíme krajní body obou intervalů z dalších úvah vyloučit, abychom mohli použít větu 5.40. Pro $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je $(\sin y)' = \cos y \neq 0$, tedy

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}.$$

Ze vztahu $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ plyne, že $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$, odkud

$$|\cos y| = \sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

Protože $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, je $\cos y > 0$ a tedy $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$. Dosazením dostaneme

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Vzorce pro derivace základních funkcí

[1]	$a' = 0$	$a \in \mathbf{R}$
[2]	$(x^n) = nx^{n-1}$	$n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{R}$
	$(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^+$
[3]	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$x \in \mathbf{R}$
[4]	$(a^x)' = a^x \ln a$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}$
[5]	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$x \in \mathbf{R}^+$
[6]	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}^+$
[7]	$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbf{R}$
[8]	$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbf{R}$
[9]	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
[10]	$(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$
[11]	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
[12]	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
[13]	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$
[14]	$(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$
[15]	$(\sinh x)' = \cosh x$	$x \in \mathbf{R}$
[16]	$(\cosh x)' = \sinh x$	$x \in \mathbf{R}$
[17]	$(\operatorname{tgh} x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbf{R}$
[18]	$(\operatorname{cotgh} x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
[19]	$(\operatorname{argsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in \mathbf{R}$
[20]	$(\operatorname{argcosh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, +\infty)$
[21]	$(\operatorname{argtgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$
[22]	$(\operatorname{argcotgh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Při odvozování vzorců pro derivace základních funkcí se používají kromě definice derivace funkce některé limity a vzorce [a$_2$] až [f$_2$]. (Některé vzorce jsme odvodili v předchozím oddílu — viz příklady 5.23 až 5.27, 5.31, 5.37 a 5.42.)

Výpočet derivací funkcí

Výpočet derivace funkce je velmi častá a potřebná úloha v matematické analýze, zvláště v jejích aplikacích. Při výpočtu derivací funkcí užíváme vzorce [a_2] až [f_2], popř. též [c_3] a [d_3], a vzorce [1]–[22] uvedené v předchozím oddílu.

V.43 Příklad. Vypočtěme derivaci funkce

a) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2+x-2},\ x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$,

b) $f(x) = \sin \frac{1}{x},\ x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

c) $f(x) = x^2 - \mathrm{e}^x + \sin x + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{\sqrt[4]{x^5}},\ x \in \mathbf{R}^+$,

d) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 4x + 5)^2},\ x \in \mathbf{R}$,

e) $f(x) = \frac{3x^2-5}{2},\ x \in \mathbf{R}$.

Řešení:

a) Užijeme vzorce [d_2], [a_2], [b_2], [1] a [2].

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + x - 2) - (x^2 + 4)(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 2x^2 - 4x - 2x^3 - 8x - x^2 - 4}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{x^2 - 12x - 4}{(x^2 + x - 2)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

b) Zlomek $\frac{1}{x}$ upravíme na tvar x^{-1}, a potom užijeme vzorce [e_2], [8] a [2], popř. bez úpravy užijeme vzorce [e_2], [8], [d_3] a [2].

$$f'(x) = \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

c) Nejdříve funkci upravíme na tvar $x^2 - \mathrm{e}^x + \sin x + x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-3} + 4x^{-\frac{5}{4}}$, a potom užijeme vzorce [a_2], [b_2], [c_3], [2], [3] a [7].

$$f'(x) = 2x - \mathrm{e}^x + \cos x + \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - 2 \cdot (-3)x^{-4} + 4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) x^{-\frac{9}{4}} =$$
$$= 2x - \mathrm{e}^x + \cos x + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{6}{x^4} - \frac{5}{\sqrt[4]{x^9}}, \quad x \in \mathbf{R}^+.$$

d) Nejdříve funkci upravíme na tvar $(x^2 - 4x + 5)^{\frac{2}{3}}$, a potom užijeme vzorce [e_2], [2], [a_2], [b_2] a [c_3].

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(x^2 - 4x + 5\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2x - 4) = \frac{4(x - 2)}{3\sqrt[3]{x^2 - 4x + 5}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

e) Funkci je možné derivovat jako podíl, ale to je velmi neobratné. Rozumnější je upravit ji na tvar $\frac{1}{2}\,(3x^2 - 5)$ a užít vzorce [c_3], [2] a [1].

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 6x = 3x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Poznámka. V řešeních dalších příkladů již nebudeme uvádět, které vzorce byly užity; čtenář to jistě pozná sám.

V.44 Příklad. Vypočtěme derivaci funkce

a) $f(x) = 2^{3^x}, \ x \in \mathbf{R}$,

b) $f(x) = \log_x \mathrm{e}, \ x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$,

c) $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}, \ x \in \mathbf{R}$.

Řešení:

a)

$$f'(x) = 2^{3^x} \ln 2 \cdot 3^x \ln 3 = 3^x \, 2^{3^x} \ln 2 \cdot \ln 3, \quad x \in \mathbf{R}.$$

b) Nejprve funkci upravíme: $\log_x \mathrm{e} = \frac{\ln e}{\ln x} = \frac{1}{\ln x}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \log_x^2 \mathrm{e}, \quad x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}.$$

c)

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \left[1 + \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}\right)\right], \quad x \in \mathbf{R}.$$

V.45 Příklad. Vypočtěme derivaci funkce $f(x) = x \arcsin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus (-1, 1)$.

Řešení:

$$f'(x) = \arcsin \frac{1}{x} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \arcsin \frac{1}{x} - \frac{|x|}{x\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \begin{cases} \arcsin \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{pro } x \in (-\infty, -1), \\ \arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{pro } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

V.46 Příklad. Vypočtěme derivaci funkce $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$

Řešení:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ \lim\limits_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(h \sin \frac{1}{h}\right) = 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Při výpočtu derivace $f'(0)$ jsme užili definici 5.4 a větu 4.19.

V.47 Příklad. Vypočtěme derivaci funkce $f(x) = \ln(1 + |x|), \ x \in \mathbf{R}$.

Řešení:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 - x) & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ \ln(1 + x) & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-x} & \text{pro } x < 0, \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{\ln(1+h) - \ln(1+0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1,$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{\ln(1-h) - \ln(1-0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-\ln(1+(-h))}{-h} = -1,$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$, tedy derivace $f'(0)$ neexistuje.

Poznámka. Jednostranné derivace funkce $f(x) = \ln(1+|x|)$ v bodě 0 lze vypočítat též užitím věty: Je-li funkce f spojitá zprava, resp. zleva, v bodě c a existuje-li jednostranná limita $\lim\limits_{x\to c+} f'(x)$, resp. $\lim\limits_{x\to c-} f'(x)$, pak je $f'_+(c) = \lim\limits_{x\to c+} f'(x)$, resp. $f'_-(c) = \lim\limits_{x\to c-} f'(x)$. Protože funkce $f(x) = \ln(1+|x|)$ je spojitá zprava i zleva v bodě 0 a existují jednostranné limity $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{1+x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \left(-\frac{1}{1-x}\right) = -1$, můžeme psát: $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = 1$ a $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = -1$.

Logaritmická derivace funkce

Při výpočtu derivace funkce $f(x) = x^x$, $x \in \mathbf{R}^+$, se při našich dosavadních znalostech dostáváme do obtíží. Nemůžeme použít ani vzorec pro derivaci mocninné funkce x^α, protože mocnitel není konstantní, ani vzorec pro derivaci exponenciální funkce a^x, protože základ není konstantní.

Můžeme však použít rovnost

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$$

a vzorec [e_2] pro derivaci složené funkce:

$$(x^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)' = \mathrm{e}^{x\ln x}\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

Můžeme také vyjít od derivace logaritmu funkce x^x a postupovat takto:

$$(\ln x^x)' = \frac{1}{x^x}\,(x^x)'\,,$$

takže

$$(x^x)' = x^x\,(\ln x^x)' = x^x(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1).$$

Tento postup se nazývá *logaritmická derivace* funkce.

Oba postupy užíváme při výpočtu derivace funkcí tvaru

$$f(x)^{g(x)}, \quad x \in \{x \in \mathbf{R};\ f(x) > 0\}.$$

Podle prvního postupu

$$\begin{aligned}\left(f(x)^{g(x)}\right)' &= \left(\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\right)' = \\ &= \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = \\ &= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).\end{aligned}$$

Podle druhého postupu

$$\left(\ln f(x)^{g(x)}\right)' = \frac{1}{f(x)^{g(x)}}\left(f(x)^{g(x)}\right)',$$

odkud

$$\begin{aligned}\left(f(x)^{g(x)}\right)' &= f(x)^{g(x)}\left(\ln f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)}\left(g(x)\ln f(x)\right)' = \\ &= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).\end{aligned}$$

Oba postupy vedou ke vzorci

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

V.48 Příklad. Vypočtěme derivaci funkce $f(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$.
Řešení:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\mathrm{e}^{2x\ln\frac{1}{x^2+1}}\right)' = \mathrm{e}^{2x\ln\frac{1}{x^2+1}}\left(2x\ln\frac{1}{x^2+1}\right)' = \\ &= \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{2x}\left[2\ln\frac{1}{x^2+1} + 2x(x^2+1)\left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)\right] = \\ &= 2\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{2x}\left(\ln\frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Poznámka. Zřejmě je snazší užívat postup uvedený v příkladu 5.48, než pamatovat si výše uvedený vzorec.

Diferenciál funkce

V praktických úlohách často potřebujeme aproximovat (tj. přibližně nahradit) danou funkci f jinou, obvykle jednodušší, funkcí g. Funkci g hledáme tak, aby se od funkce f lišila jen málo, tj. aby absolutní hodnota rozdílu $f(x) - g(x)$ byla malá. Týká-li se aproximace funkce pouze blízkého okolí daného bodu, hovoříme o *lokální aproximaci funkce*. Interpretujeme-li lokální aproximaci geometricky, požadujeme, aby se grafy funkcí f a g v okolí daného bodu těsně přimykaly.

Úlohu o lokální aproximaci funkce budeme nyní formulovat přesněji. Předpokládejme, že funkce f je definována na jistém okolí $\mathsf{U}(x_0)$. Hledejme jednoduchou funkci g, spojitou na okolí $\mathsf{U}(x_0)$, takovou, aby platily rovnosti

$$f(x_0) = g(x_0) \tag{5}$$

a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|}. \tag{6}$$

Takových funkcí může být celá řada. Omezme se pouze na polynomické funkce nejvýše 1. stupně. Aby funkce g tohoto typu splňovala podmínku (5), musí být $g(x) = f(x_0) + k(x - x_0)$, kde $k \in \mathbf{R}$.

Položme $x - x_0 = \Delta x$. Potom podmínku (6) můžeme psát ve tvaru

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - k\Delta x}{\Delta x} \right| = 0. \tag{7}$$

Vzniká otázka, zda existuje číslo k a s ním funkce $k\Delta x$ proměnné Δx takové, aby platila rovnost (7). Jestliže ano, pak funkci $k\Delta x$ nazveme diferenciálem funkce f v bodě x_0.

V.49 Definice. Nechť funkce f je definována na jistém okolí $\mathsf{U}(x_0)$ a existuje funkce $k\Delta x$, $k \in \mathbf{R}$, $\Delta x \in \mathbf{R}$, taková, že platí rovnost (7). Pak tuto funkci nazýváme *diferenciál funkce f v bodě x_0* a značíme $\mathrm{d}f(x_0)$.

Existuje-li diferenciál funkce f v bodě x_0, říkáme též, že *funkce f má diferenciál* nebo *je diferencovatelná v bodě x_0.*

Poznámky.

1. Zdůrazňujeme, že diferenciál funkce f v bodě x_0 je funkcí proměnné Δx (nikoliv x).

2. Diferenciál funkce f v bodě x_0 se při zápisu $y = f(x)$ značí též $[\mathrm{d}y]_{x=x_0}$, u konkrétní funkce též $[\mathrm{d}(f(x))]_{x=x_0}$.

Hledejme nyní číslo k, splňující podmínku (7).

Podmínka (7) je ekvivalentní s podmínkami

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - k \right| = 0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}-k\right)=0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)=k,$$

pokud existuje vlastní limita $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ neboli vlastní derivace $f'(x_0)$.

V.50 Věta (o existenci a jednoznačnosti diferenciálu). *Funkce f má diferenciál v bodě x_0, právě když má vlastní derivaci v bodě x_0. V tom případě je diferenciál $\mathrm{d}f(x_0)$ určen jednoznačně vzorcem*

$$\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x. \tag{8}$$

Poznámky.

1. Věta 5.50 udává nutnou a zároveň postačující podmínku k tomu, aby funkce f měla diferenciál v bodě x_0, tzn. že výroky „funkce f má diferenciál v bodě x_0“ a „funkce f má vlastní derivaci v bodě x_0“ jsou ekvivalentní.

2. Pojem diferenciálu funkce v bodě se uplatňuje především u funkcí více než jedné proměnné. Z hlediska úlohy o lokální aproximaci funkce polynomickou funkcí nejvýše 1. stupně má však pojem diferenciálu svůj význam i u funkce jedné proměnné. Později tuto úlohu zobecníme na úlohu o aproximaci funkce polynomickou funkcí nejvýše n-tého stupně, $n\in\mathbf{N}$.

V.51 Poznámka. Zvolíme-li $f(x)=x$, pak $f'(x)=1$, $x\in\mathbf{R}$, a $\mathrm{d}f(x)=\mathrm{d}x=1\cdot\Delta x=\Delta x$, a tedy $\mathrm{d}x=\Delta x$. Diferenciál $\mathrm{d}x$ nazýváme *diferenciálem nezávisle proměnné x.*

Vzorec (8) se proto také uvádí ve tvaru

$$\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\cdot\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Uvědomte si! $\mathrm{d}x=\Delta x$, ale obecně $\mathrm{d}f(x)\neq\Delta f(x)$.

Z rovnosti (9) vyplývá, že $f'(x_0)=\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, tj. že derivace funkce v bodě je podíl diferenciálu funkce v bodě a diferenciálu nezávisle proměnné. Tím se zdůvodňuje zápis derivace funkce f v bodě x_0, uvedený v poznámce 5.5.2.

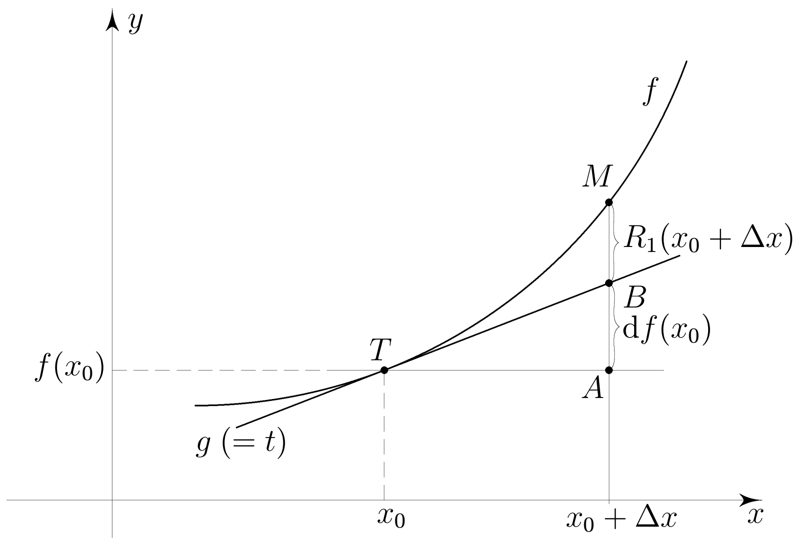
Změní-li se hodnota nezávisle proměnné z čísla x_0 na číslo $x_0+\Delta x$, změní se hodnota funkce f o číslo $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, což je diference (přírůstek) funkce f v bodě x_0. Diferenci funkce f v bodě x_0 můžeme vyjádřit jako součet dvou sčítanců: první sčítanec je diferenciál $\mathrm{d}f(x_0)$, hlavní část diference, druhý sčítanec je $R_1(x_0+\Delta x)$, zbytek diference, jenž udává chybu, které se dopustíme, nahradíme-li diferenci $\Delta f(x_0)$ diferenciálem $\mathrm{d}f(x_0)$. Tedy

$$\Delta f(x_0)=\mathrm{d}f(x_0)+R_1(x_0+\Delta x).$$

Položíme-li $x - x_0 = \Delta x$ a rovnost upravíme, dostaneme rovnost

$$f(x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) + R_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x).$$

V.52 Geometrická interpretace lokální aproximace funkce polynomickou funkcí nejvýše 1. stupně. V okolí bodu $T = [x_0, f(x_0)]$ nahrazujeme graf $\mathsf{G}(f)$ grafem $\mathsf{G}(g)$ (tj. přímkou), procházejícím bodem T (podmínka (5)) a mající s grafem $\mathsf{G}(f)$ společnou tečnu t v bodě T (podmínka (7)), tedy graf $\mathsf{G}(f)$ nahrazujeme v okolí bodu T tečnou t.



Obr. 5.13: Diferenciál funkce f

Délka úsečky AM je rovna absolutní hodnotě diference $\Delta f(x_0)$, délka úsečky TA je rovna absolutní hodnotě diference Δx, délka úsečky AB je rovna absolutní hodnotě diferenciálu $\mathrm{d}f(x_0)$ a délka úsečky BM je rovna absolutní hodnotě zbytku $R_1(x_0 + \Delta x)$ diference. Veličiny $\Delta f(x_0)$, $\mathrm{d}f(x_0)$ a $R_1(x_0 + \Delta x)$ závisí nejen na čísle x_0, ale též na diferenci Δx (jsou funkcemi proměnné Δx).

Geometricky bývá diferenciál funkce f v bodě x_0 definován jako diference y-ové souřadnice bodu B na tečně t grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$, odpovídající diferenci jeho x-ové souřadnice.

Hledaná polynomická funkce g, jejímž grafem je tečna t, je

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Výpočet diferenciálu funkce v bodě je snadný. Vypočteme derivaci funkce, určíme její hodnotu v daném bodě a tu dosadíme do vzorce (9).

V.53 Příklad. Vypočtěme diferenciál funkce $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$ v bodě 2.
Řešení: $f'(x) = 3x^2 - 8x$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = -4$, $\mathrm{d}f(2) = -4\mathrm{d}x$.

V.54 Definice. Nechť množina $\mathsf{D}(f')$ je neprázdná. Potom funkci $f'(x)\mathrm{d}x$ proměnných $x \in \mathsf{D}(f')$ a $\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$ nazýváme *diferenciál funkce* f a značíme $\mathrm{d}f$.

Existuje-li diferenciál funkce f, říkáme též, že *funkce* f *má diferenciál* $\mathrm{d}f$ nebo je *diferencovatelná na množině* $\mathsf{D}(f')$, stručně *je diferencovatelná.*

Je-li $\mathsf{M} \subset \mathsf{D}(f')$ neprázdná množina, říkáme, že *funkce* f *má diferenciál* nebo je *diferencovatelná na množině* M.

Poznámka. Diferenciál funkce f se při zápisu $y = f(x)$ značí též $\mathrm{d}y$, u konkrétní funkce též $\mathrm{d}(f(x))$.

V.55 Příklad. Vypočtěme diferenciál funkce $f(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$, $x \in \mathbf{R}$.

Řešení: $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-1}$, $\mathrm{d}f(x) = 3\mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x$, $x \in \mathbf{R}$.

Užití diferenciálu funkce

Diferenciál funkce užíváme:

- k přibližným numerickým výpočtům,
- k lokální aproximaci dané funkce lineární funkcí,
- v teorii chyb.

Diference funkce f v bodě x_0 obecně není rovna diferenciálu funkce f v bodě x_0. Pro $\Delta x \to 0$ se jak diference, tak diferenciál funkce f v bodě x_0 blíží k 0, přičemž, je-li $f'(x_0) \neq 0$, zbytek diference se blíží k 0 daleko rychleji než diference Δx, tzn. že pro malá čísla Δx je diference funkce f v bodě x_0 téměř přímo úměrná diferenci Δx s koeficientem $f'(x_0)$ přímé úměrnosti.

Platí tedy přibližná rovnost

$$\Delta f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

s chybou $R_1(x_0 + \Delta x)$ takovou, že $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{R_1(x_0+\Delta x)}{\Delta x} = 0$, což znamená, že absolutní hodnota chyby $R_1(x_0 + \Delta x)$ je v porovnání s absolutní hodnotou diference Δx zanedbatelná. (Symbol $\approx$ čteme „je přibližně rovno“.) Z této přibližné rovnosti vyplývá přibližná rovnost

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

již lze po substituci $x - x_0 = \Delta x$ psát ve tvaru

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{10}$$

slovy: *Hodnota funkce v bodě blízkém bodu* x_0 *je přibližně rovna součtu hodnoty funkce v bodě* x_0 *a diferenciálu funkce v bodě* x_0.

Užití přibližných rovností pro $\Delta f(x_0)$ a $f(x_0 + \Delta x)$ si ukážeme na příkladech.

V.56 Příklad. Vypočtěme přibližně číslo $\sqrt[3]{8,03}$.

Řešení: Hrubou aproximací čísla $\sqrt[3]{8,03}$ je číslo $\sqrt[3]{8} = 2$. Lepší aproximaci obdržíme užitím přibližné rovnosti $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, v níž zvolíme $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbf{R}_0^+$, $x_0 = 8$ a $\Delta x = 0{,}03$. (Volbu provádíme tak, abychom mohli snadno vypočítat funkční hodnotu $f(x_0)$ a aby diference Δx byla malé číslo.)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \in \mathbf{R}^+, \\ f'(8) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}. \\ \sqrt[3]{8{,}03} &\approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{12} \cdot 0{,}03 = 2 + 0{,}0025 = 2{,}0025. \end{aligned}$$

V.57 Příklad. O kolik se přibližně změní objem koule o poloměru $r_0 = 2$ dm, zmenší-li se její poloměr o 1 mm?

Řešení: Pro objem V koule o poloměru $r > 0$ platí vzorec $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Objem V je tedy funkcí proměnné r s definičním oborem $\mathbf{R}^+$.

Změna (diference) objemu V o poloměru r_0 je přibližně rovna diferenciálu $\mathrm{d}V(r_0) = 4\pi r_0^2 \Delta r$, přičemž $\Delta r = -1$ mm $= -0{,}01$ dm.

$$\mathrm{d}V(2) = 4\pi 2^2 \cdot (-0,01) = -0,16\pi \doteq -0{,}5027.$$

Objem koule se zmenší přibližně o 0,5027 dm^3.

Derivace druhého a vyšších řádů funkce

V celém tomto a dalších oddílech této kapitoly n značí číslo množiny $\mathbf{N}_0$.

Budeme nyní rekurentně definovat derivaci n-tého řádu funkce, $n \geq 2$.

V.58 Definice. Vlastní derivaci f' funkce f, definovanou na neprázdné množině $\mathsf{D}(f') \subset \mathsf{D}(f)$, nazýváme též *derivace prvního řádu* nebo *první derivace funkce f* a značíme též $f^{(1)}$.

Nechť $\mathsf{D}(f'') \subset \mathsf{D}(f')$ je neprázdná množina všech bodů, ve kterých funkce f' má vlastní derivaci. Funkci, kterou je každému bodu x množiny $\mathsf{D}(f'')$ přiřazeno číslo $(f'(x))'$, nazýváme *derivace druhého řádu* nebo *druhá derivace funkce f* a značíme f'' nebo $f^{(2)}$. Tedy $f'' = (f')'$ s definičním oborem $\mathsf{D}(f'')$.

Nechť $\mathsf{D}(f''') \subset \mathsf{D}(f'')$ je neprázdná množina všech bodů, ve kterých funkce f'' má vlastní derivaci. Funkci, kterou je každému bodu x množiny $\mathsf{D}(f''')$ přiřazeno číslo $(f''(x))'$, nazýváme *derivace třetího řádu* nebo *třetí derivace funkce f* a značíme f''' nebo $f^{(3)}$. Tedy $f''' = (f'')'$ s definičním oborem $\mathsf{D}(f''')$.

Obecně: Nechť $n \geq 2$ a $\mathsf{D}(f^{(n)}) \subset \mathsf{D}(f^{(n-1)})$ je neprázdná množina všech bodů, ve kterých funkce $f^{(n-1)}$ má vlastní derivaci. Funkci, kterou je každému bodu x množiny $\mathsf{D}(f^{(n)})$ přiřazeno číslo $(f^{(n-1)}(x))'$, nazýváme *derivace n-tého* *řádu* nebo *n-tá derivace funkce f* a značíme $f^{(n)}$ (stručně ji nazýváme *derivace $f^{(n)}$*). Tedy $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ s definičním oborem $\mathsf{D}(f^{(n)})$.

Existuje-li derivace n-tého řádu funkce f, říkáme též, že *funkce f má derivaci $f^{(n)}$*.

V.59 Poznámky.

1. Zřejmě platí: $\mathsf{D}(f^{(n)}) \subset \mathsf{D}(f^{(n-1)}) \subset \ldots \subset \mathsf{D}(f') \subset \mathsf{D}(f)$.

2. Je účelné zavést název *derivace nultého řádu* nebo *nultá derivace funkce f* a označení $f^{(0)}$ pro funkci f.

3. Derivace 1. až 3. řádu funkce f se značí zpravidla příslušným počtem čárek, derivace 4. a vyšších řádů funkce f přirozeným číslem, udávajícím řád, v okrouhlých závorkách. Tedy: $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, … V případě $n \geq 2$ se užívá též označení $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, při zápisu $y = f(x)$ též $y^{(n)}$, $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$, u konkrétní funkce též $(f(x))^{(n)}$, $\frac{\mathrm{d}^n (f(x))}{\mathrm{d}x^n}$, přičemž symbol ${}^{(n)}$ může být nahrazen příslušným počtem čárek apod.

V.60 Definice. Nechť $n \geq 0$. Hodnotu funkce $f^{(n)}$ v bodě $x_0 \in \mathsf{D}(f^{(n)})$, tj. číslo $f^{(n)}(x_0)$, nazýváme *vlastní derivací n-tého řádu* nebo *vlastní n-tou derivací funkce f v bodě x_0*.

Existuje-li vlastní derivace n-tého řádu funkce f v bodě x_0 (stručně vlastní derivace $f^{(n)}(x_0)$), říkáme též, že funkce f má *vlastní derivaci n-tého řádu* nebo *vlastní n-tou derivaci v bodě x_0* (stručně vlastní derivaci $f^{(n)}(x_0)$).

V.61 Poznámky.

1. V případě $n \geq 2$ se vedle označení $f^{(n)}(x_0)$ užívá též označení $\frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n}$, $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0)$, při zápisu $y = f(x)$ též $y^{(n)}_{x=x_0}$, $\left[\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right]_{x=x_0}$, u konkrétní funkce též $[f(x)]^{(n)}_{x=x_0}$, $\left[\frac{\mathrm{d}^n (f(x))}{\mathrm{d}x^n}\right]_{x=x_0}$, přičemž symbol ${}^{(n)}$ může být nahrazen příslušným počtem čárek apod.

2. Derivace n-tého řádu funkce f v bodě x_0, $n \geq 2$, je též definována jako limita

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}.$$

Je-li tato limita vlastní, resp. nevlastní, pak se derivace n-tého řádu funkce f v bodě x_0 nazývá vlastní, resp. nevlastní. Je-li derivace n-tého řádu funkce f v bodě x_0 nevlastní, a to $+\infty$, resp. $-\infty$, píše se $f^{(n)}(x_0) = +\infty$, resp. $f^{(n)}(x_0) = -\infty$. Terminologie, používaná pro vlastní derivaci n-tého řádu funkce f v bodě x_0, platí obdobně i pro nevlastní derivace n-tého řádu funkce f v bodě x_0. Tam, kde nebude záležet na tom, zda derivace n-tého řádu funkce f v bodě x_0 je vlastní či nevlastní, budeme přívlastek „vlastní" či „nevlastní" vypouštět.

V.62 Poznámka. Má-li funkce f vlastní derivaci n-tého řádu, $n \geq 2$, v bodě x_0, pak má též vlastní derivace všech řádů nižších než n v bodě x_0 a derivace $f^{(n-1)}$, …, f' jsou definovány na jistém okolí $\mathsf{U}(x_0)$; tím spíše je i funkce f definována na jistém okolí $\mathsf{U}(x_0)$.

Výpočet derivace n-tého řádu funkce, $n \geq 2$, provádíme tak, že postupně počítáme derivace 1. až n-tého řádu funkce.

V.63 Příklad. Vypočtěme derivaci 5. řádu funkce $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 1$, $x \in \mathbf{R}$.
Řešení: Postupným derivováním dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10x^4 - 12x^2, \\ f''(x) &= 40x^3 - 24x, \\ f'''(x) &= 120x^2 - 24, \\ f^{(4)}(x) &= 240x, \\ f^{(5)}(x) &= 240. \end{aligned}$$

Všimněte si, že $f^{(n)}(x) = 0$ pro všechna čísla $n \geq 6$ a že funkce f a její derivace všech řádů jsou definovány (a spojité) na množině $\mathbf{R}$.

V.64 Příklad. Vypočtěme derivace 1.–3. řádu funkce $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, +\infty)$.
Řešení: Pro $x \in (0, +\infty)$ je

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}.$$

Všimněte si, že $\mathsf{D}(f''') = \mathsf{D}(f'') = \mathsf{D}(f') \subset \mathsf{D}(f)$.

Výpočet derivace n-tého řádu funkce může být při velkém čísle n dost pracný; v některých případech však lze odvodit poměrně jednoduše obecný vzorec pro derivaci n-tého řádu funkce a dokázat jej matematickou indukcí.

V.65 Příklad. Stanovme vzorec pro derivaci n-tého řádu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$, $n \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$.
Řešení: $f^{(0)}(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$, $f''(x) = \mathrm{e}^x$, $\dots$, $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbf{R}$, $n \geq 0$.

V.66 Příklad. Stanovme vzorec pro derivaci n-tého řádu, $n \geq 1$, funkce $f(x) = \ln(x + 1)$, $x \in (-1, +\infty)$.
Řešení: Pro $x \in (-1, +\infty)$ je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}, \\ f''(x) &= -1 \cdot (x+1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^2}, \\ f'''(x) &= -1 \cdot (-2)(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}, \\ f^{(4)}(x) &= 2 \cdot (-3)(x+1)^{-4} = -\frac{2 \cdot 3}{(x+1)^4}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Vzorec lze dokázat matematickou indukcí.

Při výpočtu derivace n-tého řádu součinu dvou funkcí se můžeme vyhnout postupnému počítání derivací nižšího řádu, a to užitím tzv. Leibnizova vzorce.

V.67 Věta (Leibnizovo pravidlo). *Nechť funkce u a v mají na množině M derivace až do n-tého řádu včetně, $n \geq 0$. Potom na množině M platí tzv.* Leibnizův vzorec*:*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Poznámky.

1. Větu lze dokázat matematickou indukcí.
2. Větu lze výhodně použít zejména tehdy, derivujeme-li součin takových funkcí u a v, jejichž n-tou derivaci umíme určit obecně.
3. *Uvědomte si!*

$$\begin{aligned} (u+v)^{(n)} &= u^{(n)} + v^{(n)}, \\ (av)^{(n)} &= av^{(n)}, \quad a \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}_0. \end{aligned}$$

V.68 Příklad. Vypočtěme derivaci 10. řádu funkce $f(x) = x^3 \mathrm{e}^x,\ x \in \mathbf{R}$.
Řešení: Označme $u(x) = x^3$ a $v(x) = \mathrm{e}^x$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= 3x^2, \\ u''(x) &= 6x, \\ u'''(x) &= 6, \\ u^{(n)}(x) &= 0, \quad n \geq 4. \end{aligned}$$

Podle příkladu 5.65 je $v^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$, $n \geq 0$. Podle Leibnizova vzorce je

$$\begin{aligned} f^{(10)}(x) = {} & \binom{10}{0}(x^3)^{(10)}(\mathrm{e}^x)^{(0)} + \binom{10}{1}(x^3)^{(9)}(\mathrm{e}^x)^{(1)} + \cdots + \binom{10}{6}(x^3)^{(4)}(\mathrm{e}^x)^{(6)} + \\ & + \binom{10}{7}(x^3)^{(3)}(\mathrm{e}^x)^{(7)} + \binom{10}{8}(x^3)^{(2)}(\mathrm{e}^x)^{(8)} + \binom{10}{9}(x^3)^{(1)}(\mathrm{e}^x)^{(9)} + \\ & + \binom{10}{10}(x^3)^{(0)}(\mathrm{e}^x)^{(10)} = \\ = {} & 0 + 0 + \ldots + 0 + \binom{10}{7} 6\mathrm{e}^x + \binom{10}{8} 6x\mathrm{e}^x + \binom{10}{9} 3x^2\mathrm{e}^x + \binom{10}{10} x^3\mathrm{e}^x = \\ = {} & \left(720 + 270x + 30x^2 + x^3\right) \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

V součtu jsou jen 4 nenulové členy, neboť všechny derivace řádu vyššího než třetího funkce x^3 jsou rovny 0. Všechny derivace funkcí u, v a f jsou definovány na množině $\mathbf{R}$.

Stejně jako vlastní derivace 1. řádu funkce v bodě mají i vlastní derivace 2. a vyšších řádů funkce v bodě různé interpretace jak v geometrii, tak ve fyzice i ostatních přírodních vědách. S geometrickou interpretací vlastní derivace 2. řádu funkce v bodě se seznámíte později, při vyšetřování průběhu funkce.

V.69 Fyzikální interpretace vlastní derivace 2. řádu funkce v bodě. Je-li dráha s hmotného bodu, pohybujícího se po přímce, popsána funkcí $s = f(t)$, pak okamžitá rychlost v pohybu hmotného bodu v proměnném čase t je popsána funkcí $v = s'(t)$ (viz úlohu 5.2).

Diferenční podíl $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ funkce v v bodě t_0 se v klasické mechanice nazývá průměrné zrychlení pohybu hmotného bodu v časovém intervalu $\langle t_0, t_0{+}\Delta t\rangle$. Existuje-li vlastní limita průměrného zrychlení $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ pro $\Delta t \to 0$, pak ji nazýváme okamžitým zrychlením pohybu hmotného bodu v čase t_0 a značíme $a(t_0)$. Tedy

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{v(t_0+\Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = v'(t_0).$$

Protože $a(t_0) = v'(t_0)$ a $v(t_0) = s'(t_0)$, zřejmě je $a(t_0) = s''(t_0)$. Okamžité zrychlení pohybu hmotného bodu v čase t_0 je vlastní derivací 2. řádu dráhy s hmotného bodu v čase t_0.

Diferenciál druhého a vyšších řádů funkce

Podobně jako jsme nejprve rekurentně definovali derivaci n-tého řádu funkce a teprve potom derivaci n-tého řádu funkce v bodě, budeme nejprve rekurentně definovat diferenciál n-tého řádu funkce a teprve potom diferenciál n-tého řádu funkce v bodě.

V.70 Definice. Diferenciál funkce f nazýváme též diferenciál *prvního řádu* nebo *první diferenciál funkce* f a značíme též $\mathrm{d}^1 f$. Tedy $\mathrm{d}^1 f = \mathrm{d}f$.

Nechť $\mathsf{D}(f'') \neq \emptyset$. Diferenciál diferenciálu funkce f nazýváme diferenciál *druhého řádu* nebo *druhý diferenciál funkce* f a značíme $\mathrm{d}^2 f$. Tedy $\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f)$.

Nechť $\mathsf{D}(f''') \neq \emptyset$. Diferenciál diferenciálu 2. řádu funkce f nazýváme diferenciál *třetího řádu* nebo *třetí diferenciál funkce* f a značíme $\mathrm{d}^3 f$. Tedy $\mathrm{d}^3 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 f)$.

Obecně: Nechť $n \geq 2$ a $\mathsf{D}(f^{(n)}) \neq \emptyset$. Diferenciál diferenciálu $(n-1)$-ho řádu funkce f nazýváme diferenciál *n-tého řádu* nebo *n-tý diferenciál funkce* f a značíme $\mathrm{d}^n f$ (stručně ho nazýváme diferenciál $\mathrm{d}^n f$). Tedy $\mathrm{d}^n f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f)$.

Existuje-li diferenciál n-tého řádu funkce f, říkáme též, že funkce f má *diferenciál n-tého řádu* $\mathrm{d}^n f$ nebo že je *n-krát diferencovatelná na množině* $\mathsf{D}(f^{(n)})$, stručně *n-krát diferencovatelná*.

Poznámka. Je účelné zavést název diferenciál nultého řádu nebo nultý diferenciál funkce f a označení $\mathrm{d}^0 f$ pro funkci f.

V.71 Věta. *Nechť $n \geq 0$. Pro všechna čísla $x \in \mathsf{D}(f^{(n)})$ a všechna čísla $\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$ platí rovnost*

$$\mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n,$$

kde symbol $\mathrm{d}x^n$ značí mocninu $(\mathrm{d}x)^n$.

V.72 Poznámka. K rovnosti $\mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$, $n \geq 2$, se dospěje takto: $\mathrm{d}^n f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f(x)) = \mathrm{d}(f^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x^{n-1}) = (f^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x^{n-1})'\mathrm{d}x = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$ (při derivování se proměnná $\mathrm{d}x$ považuje za konstantu, protože nezávisí na proměnné x).

V.73 Definice. Nechť $n \geq 0$. Funkci $f^{(n)}(x_0)\mathrm{d}x^n$ proměnné $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x \in \mathbf{R}$, nazýváme *diferenciál n-tého řádu* nebo *n-tý diferenciál funkce f v bodě x_0* a značíme $\mathrm{d}^n f(x_0)$. Tedy

$$\mathrm{d}^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\mathrm{d}x^n.$$

Existuje-li diferenciál n-tého řádu funkce f v bodě x_0, říkáme též, že funkce f má *diferenciál n-tého řádu* nebo je *n-krát diferencovatelná* v bodě x_0.

V.74 Poznámky.

1. V případě $n \geq 2$ značíme diferenciál n-tého řádu funkce f v bodě x_0 také $[\mathrm{d}^n f(x)]_{x=x_0}$, při zápisu $y = f(x)$ též $[\mathrm{d}^n y]_{x=x_0}$, u konkrétní funkce též $[\mathrm{d}^n(f(x))]_{x=x_0}$.

2. Z definice 5.70 a věty 5.71, resp. z definice 5.73, vysvítá, proč se derivace n-tého řádu funkce f, resp. derivace n-tého řádu funkce f v bodě x_0, $n \geq 2$, značí také jako podíl $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, resp. $\frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n}$.

V.75 Příklad. Vypočtěme diferenciál 3. řádu funkce $f(x) = (3-x)^5$ v bodě 2.

Řešení: $f'(x) = -5(3-x)^4$, $f''(x) = 20(3-x)^3$, $f'''(x) = -60(3-x)^2$, $x \in \mathbf{R}$.
$\mathrm{d}^3 f(x) = -60(3-x)^2\mathrm{d}x^3$, $x \in \mathbf{R}$, a tedy $\mathrm{d}^3 f(2) = -60\mathrm{d}x^3$.

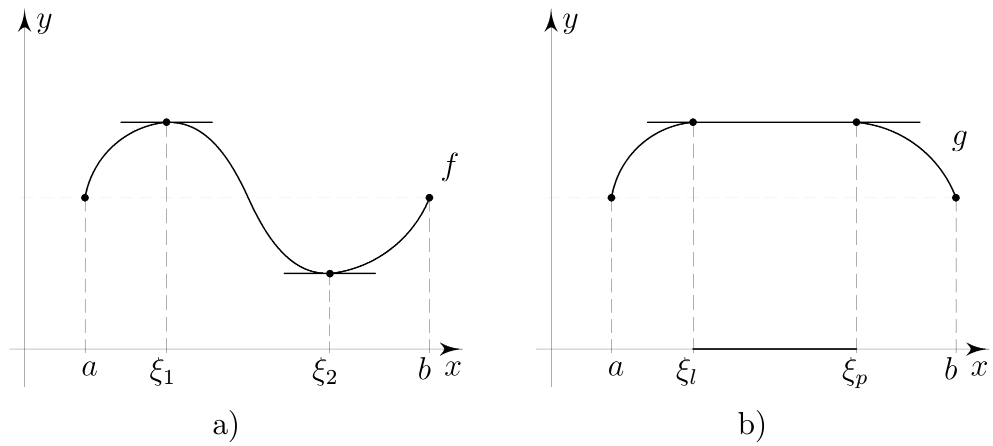
Základní věty diferenciálního počtu

Věta 4.46 nás informovala o zajímavých a užitečných vlastnostech funkcí spojitých na uzavřeném intervalu. Další zajímavé a užitečné vlastnosti mají funkce spojité na uzavřeném intervalu, pokud mají derivaci (vlastní či nevlastní) v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. V tomto oddílu předpokládáme, že uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ má nenulovou délku.

V.76 Věta (Rolleova). *Nechť funkce f má tyto vlastnosti:*
1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. má derivaci na otevřeném intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.
Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.

Poznámka. Věta 5.76 zaručuje jen existenci aspoň jednoho vnitřního bodu intervalu, ve kterém je derivace funkce f rovna 0. Neumožňuje určení počtu ani polohy takovýchto bodů.

V.77 Geometrická interpretace. Splňuje-li funkce f předpoklady Rolleovy věty, existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že tečna t grafu $\mathsf{G}(f)$ sestrojená v bodě $[\xi, f(\xi)]$ je rovnoběžná s osou x, protože pro směrnici k_t tečny t platí $k_t = f'(\xi) = 0$.



Obr. 5.14: K Rolleově větě

Graf $\mathsf{G}(f)$ na obr. 5.14a) má jednotlivé body ξ_1, ξ_2, graf $\mathsf{G}(g)$ na obr. 5.14b) má nekonečně mnoho bodů $\langle \xi_l, \xi_p \rangle$, ve kterých je jeho tečna rovnoběžná s osou x.

V.78 Věta (Lagrangeova, též o střední hodnotě nebo o diferenci (přírůstku) funkce). *Nechť funkce f má tyto vlastnosti:*
1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. má derivaci na otevřeném intervalu (a, b).
Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Poznámka. Lagrangeova věta je zobecněním Rolleovy věty, neobsahuje její třetí podmínku. Jestliže funkce f splňuje tuto podmínku, pak tvrzení Lagrangeovy věty je shodné s tvrzením Rolleovy věty: existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že je $f'(\xi) = 0$.

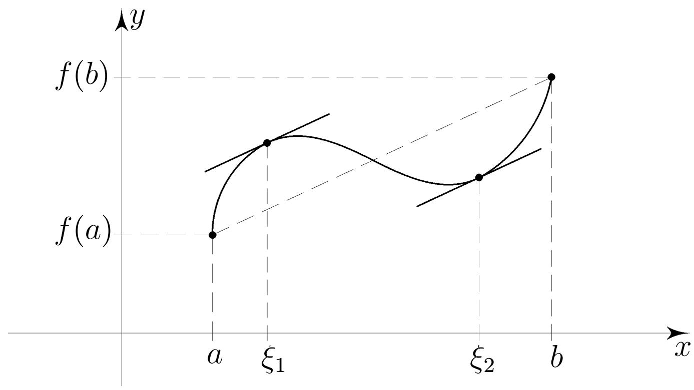
Vztah pro derivaci $f'(\xi)$ lze upravit a vyjádřit tak diferenci funkce f v bodě a:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

V.79 Geometrická interpretace. Splňuje-li funkce f předpoklady Lagrangeovy věty, existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že tečna t grafu $\mathsf{G}(f)$ sestrojená v bodě $[\xi, f(\xi)]$ je rovnoběžná se sečnou s, procházející body $A[a, f(a)]$ a $B[b, f(b)]$ grafu $\mathsf{G}(f)$. Číslo $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je směrnice k_s sečny s a platí

$$k_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) = k_t,$$

k_t je směrnice tečny t.



Obr. 5.15: K Lagrangeově větě

Lagrangeova věta měla velký význam pro rozvoj diferenciálního počtu a má řadu důsledků; uvedeme dva z nich:

V.80 Věta. *Nechť funkce f splňuje podmínky Lagrangeovy věty a navíc pro všechna čísla $x \in (a, b)$ je $f'(x) \neq 0$. Potom funkce f je prostá na intervalu $\langle a, b \rangle$.*

V.81 Věta. *Funkce f je konstantní na intervalu (a, b), právě když pro všechna čísla $x \in (a, b)$ je $f'(x) = 0$.*

V.82 Věta (Cauchyova, též zobecněná věta o střední hodnotě). *Nechť funkce f a g mají tyto vlastnosti:*
1. jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. mají derivaci na otevřeném intervalu (a, b), přitom $g'(x)$ je vlastní pro každé $x \in (a, b)$,
3. $g'(x) \neq 0$ pro každé $x \in (a, b)$.
Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Poznámka. Cauchyova věta je zobecněním Lagrangeovy věty. Jestliže $g(x) = x$, $x \in \langle a, b \rangle$, pak tvrzení Cauchyovy věty je shodné s tvrzením Lagrangeovy věty: Existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že je $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

V.83 Poznámka. Připomínáme, že v Rolleově, Lagrangeově i Cauchyově větě, jež se někdy souhrnně nazývají větami o střední hodnotě, se derivací rozumí vlastní nebo nevlastní derivace.

L'Hospitalovo pravidlo

K výpočtu limit funkcí v bodě jsme zatím užívali převážně věty 4.15–4.21 a 4.47 a základní limity. V tomto oddílu si ukážeme, jak lze užitím derivací funkcí vypočítat limity některých funkcí pohodlněji. Půjde především o výpočty limit funkcí, vedoucí k některému z neurčitých výrazů. Úplný výčet typů neurčitých výrazů je uveden v poznámce 3.34.3.

Nejprve se zaměříme na neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. Neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$, obdržíme při výpočtu limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$, je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, resp. $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = \lim\limits_{x\to c} |g(x)| = +\infty$. Limity funkcí, vedoucí k některému z těchto typů neurčitých výrazů, lze často vypočítat užitím následující věty.

V.84 Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť $c \in \mathbf{R}^*$ a nechť funkce f a g splňují tyto podmínky:*

1. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = \lim\limits_{x\to c} |g(x)| = +\infty$,

2. existuje limita $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Pak existuje i limita $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí rovnost

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámky.

1. Ve větě 5.84 limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ a $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ jsou vlastní nebo nevlastní.

2. Věta 5.84 platí i v případě, kdy $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, $L \in \mathbf{R}$, a $\lim\limits_{x\to c} |g(x)| = +\infty$.

3. Je-li $c \in \mathbf{R}$, věta 5.84 zůstává v platnosti, když všechny limity funkcí v bodě c nahradíme limitami funkcí zprava, resp. zleva, v bodě c.

4. Věta obrácená k větě 5.84 neplatí; z existence limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ nevyplývá existence limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

5. Hlavní význam l'Hospitalova pravidla spočívá v tom, že výpočet limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bývá často jednodušší než výpočet limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Uvědomte si! Při použití l'Hospitalova pravidla nederivujeme podíl dvou funkcí, nýbrž derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli zlomku.

V.85 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-3x-9}{x^2+2x-15}$.

Řešení: Protože

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(2x^2-3x-9) = 0, \qquad \lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3}(x^2+2x-15) = 0,$$

vede limita $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$ k neurčitému výrazu typu $\frac{0}{0}$ a jsme oprávněni použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 3} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{4x-3}{2x+2} = \frac{9}{8}.$$

Podle věty 5.84 existuje i limita $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-3x-9}{x^2+2x-15}$ a je rovna limitě $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4x-3}{2x+2}$. Tedy

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3x-9}{x^2+2x-15} = \frac{9}{8}.$$

Při dalších výpočtech budeme užívat stručnějšího zápisu a typ neurčitého výrazu budeme psát do závorek.

Stručný zápis řešení:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3x-9}{x^2+2x-15} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 3} \frac{4x-3}{2x+2} = \frac{9}{8}.$$

Poznámka. Rovnítko $\stackrel{\text{l'H}}{=}$ za neurčitými výrazy při použití l'Hospitalova pravidla je třeba chápat podmíněně; rovnost se potvrdí, až se zjistí v průběhu dalšího výpočtu, zda limita funkce za rovnítkem existuje.

V.86 Příklad. Vypočtěme limitu

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{3}{x}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}, \qquad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}.$$

Řešení:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{3}{x}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\frac{3}{x}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cos\frac{3}{x}}{\frac{x^2}{x^2+1}} = \frac{3\cdot 1}{1} = 3.$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\cos x} = 2.$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

V.87 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Poslední dvě limity neexistují, protože neexistuje $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$. Protože nejsou splněny všechny podmínky l'Hospitalova pravidla, nelze je použít. Výpočet, počínaje druhým rovnítkem, je neplatný.

Limitu můžeme určit přímým výpočtem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0.$$

Uvědomte si! Neexistuje-li limita $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, nemusí to znamenat, že neexistuje limita $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$; o té nemůžeme nic vypovídat. Znamená to pouze, že nelze použít l'Hospitalovo pravidlo.

V.88 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\cos x}{1},$$

avšak tato limita neexistuje, takže l'Hospitalovo pravidlo nelze použít.

Zadaná limita však existuje, o čemž se přesvědčíme jiným způsobem výpočtu:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+0=1.$$

V.89 Poznámka. Při použití l'Hospitalova pravidla se může stát, že limita $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ je opět neurčitým výrazem typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. V tom případě zkusíme k jejímu výpočtu použít znovu l'Hospitalovo pravidlo, takže dostaneme, že

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)},$$

pokud limita na pravé straně rovnosti existuje. Použití l'Hospitalova pravidla můžeme — jsou-li splněny příslušné podmínky — opakovat vícekrát. Zjistíme-li po n krocích, $n\geq 1$, že limita $\lim\limits_{x\to c}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ existuje, pak víme, že existuje i limita $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Při opakovaném použití l'Hospitalova pravidla je užitečné provádět po každém kroku zjednodušující úpravy zlomků.

V.90 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1} = \lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}} = -\lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = -1 \cdot 1 = -1.$$

Poznámka. Bývá výhodné kombinovat užití l'Hospitalova pravidla s užitím vět o limitách funkcí a základních limit, případně i elementárních úprav zlomků.

V.91 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{1} = 2 \lim_{x\to +\infty} (\mathrm{e}^2)^x = +\infty.$$

V.92 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}.$$

Opakované užití l'Hospitalova pravidla nevede k cíli. Danou limitu vypočteme např. tímto způsobem:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - (\frac{1}{\mathrm{e}^2})^x}{1 + (\frac{1}{\mathrm{e}^2})^x} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Další užití l'Hospitalova pravidla

L'Hospitalovo pravidlo lze použít i k výpočtu takových limit funkcí, které vedou k neurčitým výrazům jiných typů než $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. Funkce, jejichž limity počítáme, je však nutno napřed náležitě upravit.

V.93 Neurčitý výraz typu $\boxed{0 \cdot \infty}$**.** Tento neurčitý výraz obdržíme při výpočtu limity $\lim\limits_{x\to c}(f(x)\cdot g(x))$, je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to c}|g(x)| = +\infty$. Součin $f(x)g(x)$ upravíme takto:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{nebo} \qquad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Tím se neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$ převede na neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

V.94 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0+}(x^2 \ln x)$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0+}(x^2\ln x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{2} = 0.$$

Poznámka. Je výhodnější součin upravit tak, aby funkce $\ln x$ byla čitatelem zlomku.

V.95 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\operatorname{tg} x \cdot \ln\frac{1}{x}\right)$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0+}\left(\operatorname{tg} x\cdot\ln\frac{1}{x}\right) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\operatorname{cotg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} x \cdot \lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{x^2} = 0\cdot 1^2 = 0.$$

Užili jsme vzorec $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$.

V.96 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to -\infty}(x\mathrm{e}^x)$.

Řešení:

$$\lim_{x\to-\infty}(x\mathrm{e}^x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\mathrm{e}^{-x}} = 0.$$

Jiná úprava součinu nevede k cíli:

$$\lim_{x\to-\infty}(x\mathrm{e}^x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{-\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\frac{2}{x^3}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \dots$$

V.97 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0}(x \operatorname{cotg} x)$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}(x \operatorname{cotg} x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

nebo

$$\lim_{x\to 0}(x \operatorname{cotg} x) = (0\cdot\infty) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg} x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x} = 1^2 = 1.$$

Srovnejte oba postupy!

V.98 Neurčitý výraz typu $\boxed{\infty-\infty}$. Tento neurčitý výraz obdržíme při výpočtu limity $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))$, je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = -\infty$. Rozdíl $f(x)-g(x)$ upravíme takto:

$$f(x)-g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \qquad \text{nebo} \qquad f(x)-g(x) = \frac{f(x)g(x)}{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}}.$$

Tím se neurčitý výraz typu $\infty-\infty$ přemění na neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$. Někdy stačí provést jednodušší úpravy rozdílu $f(x)-g(x)$ v závislosti na jeho konkrétním tvaru.

V.99 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right) = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{6-(x+3)}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x^2-9} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{6}.$$

V.100 Neurčité výrazy typu $\boxed{0^0}$, $\boxed{\infty^0}$ a $\boxed{1^\infty}$. Tyto neurčité výrazy můžeme obdržet při výpočtu limity $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$, kde $f(x)>0$. Mocninu upravíme takto:

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)},$$

takže při splnění podmínek věty 4.47 je

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to c}(g(x)\ln f(x))}.$$

Exponentem je neurčitý výraz typu $0\cdot\infty$, a ten vypočteme podle návodu 5.93.

V.101 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0+} x^x = (0^0) = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0+}(x\ln x)}.$$

$$\lim_{x\to 0+}(x\ln x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \mathrm{e}^0 = 1$.

V.102 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\mathrm{tg} x)^{2x-\pi}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\mathrm{tg}\, x)^{2x-\pi} = (\infty^0) = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}[(2x-\pi)\ln\mathrm{tg}\, x]}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}[(2x-\pi)\ln\mathrm{tg}\, x] = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\ln\mathrm{tg}\, x}{\frac{1}{2x-\pi}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{l'H}}{=}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{1}{\mathrm{tg}\, x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{4(2x-\pi)}{2\cos 2x} = 0.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\mathrm{tg}\, x)^{2x-\pi} = \mathrm{e}^0 = 1$.

V.103 Příklad. Vypočtěme limitu $\lim\limits_{x\to 0+} (1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to 0+} (1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = (1^\infty) = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0+}(\frac{1}{\sin x}\ln(1-x))}.$$

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{\sin x}\ln(1-x)\right) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1-x)}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{1-x}}{\cos x} = -1.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 0+} (1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = \mathrm{e}^{-1}$.

Taylorova věta

Mnohé kvantitativní vztahy, které jsou zkoumány přírodními a technickými vědami, bývají matematicky vyjádřeny funkcemi. U složitějších funkcí bývá účelné aproximovat je jednoduššími funkcemi, aby se usnadnily početní operace s nimi a ulehčilo zkoumání jejich průběhu v blízkém okolí bodu. Mezi takové jednoduché funkce patří polynomické funkce.

Ve výkladu o užití diferenciálu funkce jsme ukázali, že funkci f, splňující jisté podmínky, lze lokálně aproximovat polynomickou funkcí nejvýše 1. stupně (viz přibližnou rovnost (10)).

Úlohu o lokální aproximaci funkce nyní zobecníme.

Předpokládejme, že funkce f je definována na jistém okolí $\mathsf{U}(x_0)$ a má vlastní derivaci n-tého řádu, $n \geq 0$, v bodě x_0. Hledejme polynomickou funkci T_n nejvýše n-tého stupně takovou, aby co nejlépe aproximovala funkci f v okolí bodu x_0, tj. aby splňovala podmínky

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k \leq n,\ k \in \mathbf{N}_0, \tag{11}$$

tj. aby polynomická funkce T_n měla s funkcí f v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu, stejnou hodnotu derivace 1. řádu, ..., stejnou hodnotu derivace n-tého řádu.

Zapíšeme-li polynomickou funkci nejvýše n-tého stupně ve tvaru

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k,$$

vypočteme její derivace až do n-tého řádu v bodě x_0 a na tyto derivace uplatníme podmínky (11), obdržíme soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé koeficienty b_k:

$$b_0 = f(x_0), \quad b_1 = f'(x_0), \quad 2b_2 = f''(x_0), \quad \ldots, \quad n!\, b_n = f^{(n)}(x_0),$$

jejímž řešením je

$$b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k \leq n,\ k \in \mathbf{N}_0.$$

V.104 Definice. Polynomická funkce nejvýše n-tého stupně

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{12}$$

se nazývá *Taylorův mnohočlen (polynom) n-tého stupně funkce f v bodě x_0*.

Vzorec

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x), \tag{13}$$

se nazývá *Taylorův vzorec* a funkce $R_n(x)$ *zbytek v Taylorově vzorci.*

V.105 Poznámka. Pro $x_0 = 0$ má Taylorův mnohočlen $T_n(x)$ tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{14}$$

a nazývá se *Maclaurinův mnohočlen (polynom) n-tého stupně funkce f*. Taylorův vzorec se v tomto případě nazývá *Maclaurinův vzorec.*

V.106 Věta (Taylorova). *Nechť funkce f má na jistém okolí $\mathsf{U}(x_0)$ derivace až do $(n+1)$-tého řádu včetně, $n \geq 0$. Potom na okolí $\mathsf{U}(x_0)$ platí Taylorův vzorec, tj. rovnost*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

se zbytkem $R_n(x)$, který lze vyjádřit v tzv. Lagrangeově tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodný vnitřní bod intervalu s krajními body x_0 a x neboli

$$\xi = x_0 + \Theta(x-x_0), \quad 0 < \Theta < 1.$$

Poznámka. Existují další tvary zbytku $R_n(x)$, z nichž nejužívanější je Cauchyův tvar:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0), \quad \xi = x_0 + \Theta(x-x_0),\ 0 < \Theta < 1.$$

V.107 Poznámka. Pro zjednodušení vzorce (13) někdy klademe $x - x_0 = \Delta x$ a pak tento vzorec píšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\Delta x)^k + R_n(x_0+\Delta x), \\ R_n(x_0+\Delta x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1. \end{aligned} \tag{13'}$$

Podobně Maclaurinův vzorec někdy zapisujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} f(\Delta x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(\Delta x)^k + R_n(\Delta x), \\ R_n(\Delta x) &= \frac{f^{(n+1)}(\Theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1. \end{aligned} \tag{15}$$

Vzhledem k tomu, že je $\mathrm{d}^k f(x_0) = f^{(k)}(x_0)(\Delta x)^k$, můžeme vzorec (13′) psát též ve tvaru

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{d}^k f(x_0) + R_n(x_0+\Delta x), \\ R_n(x_0+\Delta x) &= \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1} f(x_0+\Theta\Delta x), \quad 0 < \Theta < 1. \end{aligned} \tag{13''}$$

V.108 Poznámka. Taylorův mnohočlen funkce f v bodě x_0 aproximuje funkci f pouze lokálně, tj. na blízkém okolí $\mathsf{U}(x_0)$. Na blízkém okolí $\mathsf{U}(x_0)$ platí přibližná rovnost

$$f(x) \approx T_n(x), \tag{16}$$

a to s chybou $R_n(x)$, pro niž platí, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Při přibližném výpočtu hodnoty funkce f podle vzorce (16) můžeme očekávat uspokojivé výsledky jen pro ty body x, které jsou blízko bodu x_0. S rostoucí vzdáleností bodu x od bodu x_0 se absolutní hodnota chyby obvykle zvětšuje. Přitom zvyšování stupně aproximujícího mnohočlenu T_n obecně nezaručuje získání přesnějšího výsledku.

V.109 Geometrická interpretace lokální aproximace funkce Taylorovým mnohočlenem T_n. Na blízkém okolí bodu $x_0 = 0$ nahrazujeme graf dané funkce f grafy jejích Taylorových mnohočlenů $T_n(x)$.

V.110 Příklad. Sestrojme Maclaurinovy polynomy stupně 0–4 funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$.

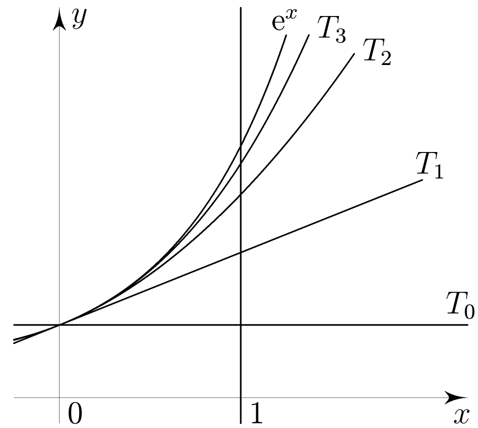
Řešení: Víme, že $f^{(i)}(x) = \mathrm{e}^x$ a $f^{(i)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ pro $i = 0, 1, 2, \ldots$, proto mají Maclaurinovy polynomy tvar

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= 1 + x, \\ T_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!}, \\ T_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \\ T_4(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}. \end{aligned}$$

Sestavíme tabulku hodnot Maclaurinových polynomů a funkce e^x v některých bodech z okolí bodu 0.

x	$T_0(x)$	$T_1(x)$	$T_2(x)$	$T_3(x)$	$T_4(x)$	e^x
$\frac{1}{2}$	1	1,5	1,625	1,6458	1,6484	1,6487
1	1	2	2,5	$2{,}\overline{6}$	2,7083	2,7183
$\frac{3}{2}$	1	2,5	3,625	4,1875	4,3984	4,4817

Tabulka potvrzuje fakt, že přesnost vyjádření funkce e^x závisí na vzdálenosti bodu x od bodu 0 a na stupni n Maclaurinova polynomu, viz obr. 5.16. Z tabulky lze také vyčíst, jak velké chyby se při náhradě funkce e^x polynomy $T_n(x)$, $n = 1, 2, 3, 4$ dopouštíme.



Obr. 5.16: Graf funkce e^x a jejích Maclaurinových polynomů

Aproximace některých základních elementárních funkcí Maclaurinovým mnohočlenem

Pro všechna čísla $x \in \mathbf{R}$ a všechna čísla $n \in \mathbf{N}_0$ platí

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

kde pro zbytek $R_n(x)$, vyjádřený v Lagrangeově tvaru, platí

$$R_n(x) = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Lokální aproximace funkce e^x vypadá tedy takto:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Pro lokální aproximaci funkce $\sin x$ platí

$$\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

a pro lokální aproximaci funkce $\cos x$ platí

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Lokální aproximace dalších význačných elementárních funkcí lze nalézt v četných tabulkách vzorců, proto je neuvádíme.

Taylorova věta se uplatnila např. při sestavování logaritmických tabulek a tabulek goniometrických funkcí.

VI
Aplikace diferenciálního počtu

Diferenciální počet má rozsáhlou oblast užití. Již jsme hovořili o jeho užití při určení rovnice tečny a normály grafu funkce v bodě (geometrický význam derivace funkce v bodě), při výpočtu okamžité rychlosti přímočarého pohybu hmotného bodu v časovém okamžiku (fyzikální význam derivace funkce v bodě), při přibližném výpočtu diference funkce v bodě (diferenciál funkce v bodě), při výpočtu limity funkce v bodě (l'Hospitalovo pravidlo) a při lokální aproximaci funkce (Taylorova věta). V této kapitole se budeme zabývat především dalším využitím pojmů, zavedených v předchozích kapitolách, a to při vyšetřování průběhu funkce a vlastností jejího grafu.

V celé této kapitole budeme intervalem rozumět interval nenulové délky a derivací funkce vlastní i nevlastní derivaci funkce.

Monotónní funkce

Jednou z důležitých vlastností funkce je monotónnost. Proto budeme při vyšetřování průběhu funkce určovat množiny, na kterých je funkce monotónní. Těmito množinami budou výhradně intervaly. Definicemi 2.13 a 2.15 jsme zavedli pojem funkce monotónní na množině, která není bod, a tím i na intervalu. Interval, na kterém je funkce monotónní, resp. ryze monotónní, nazýváme *intervalem monotónnosti*, resp. *ryzí monotónnosti*, funkce.

Následující definice zavádí pojem funkce monotónní v bodě.

VI.1 Definice. Funkci f nazýváme $\left\{\begin{array}{l} \textit{rostoucí} \\ \textit{klesající} \\ \textit{neklesající} \\ \textit{nerostoucí} \end{array}\right\}$ v bodě $c \in \mathsf{D}(f)$, existuje-li redukované okolí $\mathsf{U}^*(c,\delta) \subset \mathsf{D}(f)$ takové, že pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*_-(c,\delta)$ platí $\left\{\begin{array}{l} f(x) < f(c) \\ f(x) > f(c) \\ f(x) \le f(c) \\ f(x) \ge f(c) \end{array}\right\}$ a pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*_+(c,\delta)$ platí $\left\{\begin{array}{l} f(x) > f(c) \\ f(x) < f(c) \\ f(x) \ge f(c) \\ f(x) \le f(c) \end{array}\right\}$.

Funkci rostoucí nebo klesající v bodě nazýváme funkcí *ryze monotónní v bodě*, funkci nerostoucí nebo neklesající v bodě nazýváme funkcí *monotónní v bodě*.

Promyslete si řádně definici 6.1 a srovnejte ji s definicemi 2.13 a 2.15!

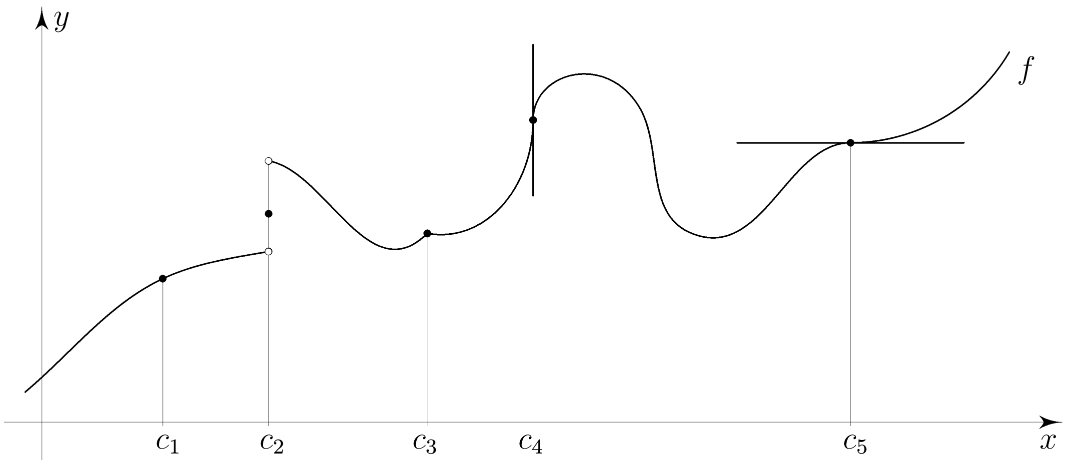
VI.2 Poznámka. Je-li funkce rostoucí, resp. klesající, na otevřeném intervalu, je zřejmě rostoucí, resp. klesající, v každém bodě tohoto intervalu.

Má-li funkce f první derivaci v bodě c, můžeme rozhodnout o tom, zda je rostoucí či klesající v tomto bodě, podle následující věty.

VI.3 Věta (o ryzí monotónnosti funkce v bodě). *Nechť funkce f má první derivaci v bodě c. Je-li $f'(c) > 0$, resp. $f'(c) < 0$, pak je funkce f rostoucí, resp. klesající, v bodě c.*

VI.4 Poznámky.

1. Věta 6.3 platí i v případě nevlastní první derivace funkce f v bodě c. Funkce f na obr. 6.1 má $f'(c_2) = f'(c_4) = +\infty$ a je v bodech c_2 a c_4 rostoucí.



Obr. 6.1: Ryzí monotónnost funkce f v bodě

2. Věta 6.3 udává postačující, nikoliv však nutnou podmínku pro to, aby funkce f, mající 1. derivaci v bodě c, byla rostoucí, resp. klesající, v tomto bodě, tzn., že obrácená věta neplatí. Funkce f na obr. 6.1, jež je rostoucí v bodech c_1 až c_5, má pouze derivace $f'(c_1)$, $f'(c_2)$ a $f'(c_4)$ kladné; derivace $f'(c_3)$ neexistuje a $f'(c_5) = 0$.

VI.5 Příklad. Funkce $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, je rostoucí v bodě 0, protože

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{pro } x < 0 \\ = 0 & \text{pro } x = 0\,, \\ > 0 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

i když $f'(0) = 0$.

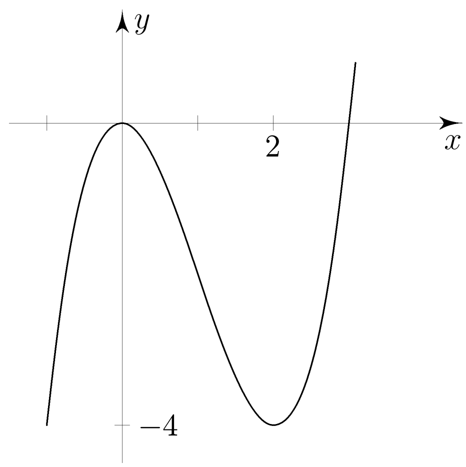
Při určování intervalů ryzí monotónnosti funkce užíváme zpravidla následující větu.

VI.6 Věta (o ryzí monotónnosti funkce na otevřeném intervalu). *Nechť funkce f má první derivaci na intervalu (a,b). Jestliže pro všechny body $x \in (a,b)$ je $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$, pak je funkce f rostoucí, resp. klesající, na intervalu (a,b).*

VI.7 Příklad. Určeme (nejdelší) intervaly ryzí monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbf{R}$.

Řešení: Vypočteme derivaci $f'(x) = 3x^2 - 6x$ a řešíme nerovnice $f'(x) > 0$ a $f'(x) < 0$. Polynomickou funkci f' rozložíme: $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ a zjistíme, že $f'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (2, +\infty)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (0,2)$.

Tedy funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, +\infty)$ a klesající na intervalu $(0,2)$.



Obr. 6.2: Graf funkce $f(x) = x^3 - 3x^2$

Uvědomte si! Nelze psát: Funkce f je rostoucí na množině $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Vyšetřování ryzí monotónnosti funkce na otevřených intervalech, obsažených v jejím definičním oboru, můžeme přehledně zapsat formou tabulky. První řádek tabulky obsahuje rozdělení definičního oboru funkce na otevřené intervaly a jejich krajní body. V dalších dvou řádcích tabulky jsou údaje o funkci a její 1. derivaci. Číselný údaj značí funkční hodnotu a symbol $\neg\exists$ značí „neexistuje“. Symboly $+$, $-$, $\nearrow$, $\searrow$ značí pořadě „je kladná“, „je záporná“, „je rostoucí“, „je klesající“.

Pro funkci f z příkladu 6.7 tabulka vypadá takto:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

Poznámka. Věta obrácená k větě 6.6 neplatí. Je-li funkce rostoucí, resp. klesající, na otevřeném intervalu, nemusí mít 1. derivaci kladnou, resp. zápornou, v každém bodě tohoto intervalu. (Viz příklad 6.5.)

Je třeba si uvědomit, že monotónnost funkce na intervalu může být daleko rozmanitější než u funkce z příkladu 6.7. K postižení těchto rozmanitostí slouží následující věta.

VI.8 Věta (o monotónnosti funkce na intervalu). *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\mathsf{I} \subset \mathsf{D}(f)$ a má první derivaci na intervalu I°. Potom platí:*

1. *funkce f je neklesající, resp. nerostoucí, na intervalu I, právě když pro všechny body $x \in \mathsf{I}^\circ$ je $f'(x) \geq 0$, resp. $f'(x) \leq 0$,*
2. *funkce f je rostoucí, resp. klesající, na intervalu I, právě když pro všechny body $x \in \mathsf{I}^\circ$ je $f'(x) \geq 0$, resp. $f'(x) \leq 0$, a její první derivace není nulová na žádném otevřeném intervalu, obsaženém v intervalu I°.*

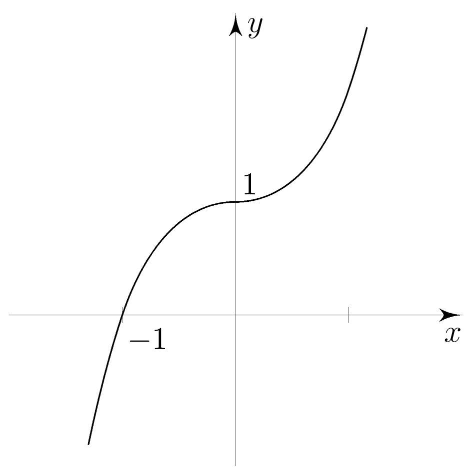
VI.9 Poznámky.

1. Připomínáme, že symbolem I° označujeme vnitřek intervalu I.

2. Připomínáme, že funkce f je na intervalu I° konstantní, právě když pro všechny body $x \in \mathsf{I}^\circ$ je $f'(x) = 0$. (Viz větu 5.81.)

3. *Uvědomte si!* Tvrzení 2 věty 6.8 je ekvivalentní tvrzení, že funkce f je ryze monotónní na intervalu I, právě když množina všech bodů intervalu I°, ve kterých je derivace f' nulová, je izolovaná nebo prázdná. Kdyby totiž derivace f' byla nulová na některém otevřeném intervalu $\mathsf{I}_0 \subset \mathsf{I}^\circ$, funkce f by byla konstantní na intervalu I_0, a tedy funkce f by nebyla rostoucí ani klesající na intervalu I.

VI.10 Příklad. Vyšetřeme monotónnost funkce $f(x) = x^3 + 1$, $x \in \mathbf{R}$.



Obr. 6.3: Graf funkce $f(x) = x^3 + 1$

Řešení: Vypočteme derivaci $f'(x) = 3x^2$ a určíme její znaménko. Je zřejmé, že $f'(x) \geq 0$ pro každé číslo $x \in \mathbf{R}$, přičemž $f'(x) = 0$ pouze v bodě 0. Tedy funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	1	$\nearrow$
		$\nearrow$	

Intervaly, na kterých je $f'(x) \geq 0$, resp. $f'(x) \leq 0$, nemají pro vyšetřování průběhu funkce f tak zásadní význam. Důležitější je zjistit, pro které body x je $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$, a také $f'(x) = 0$ — to již souvisí s vyšetřováním lokálních extrémů funkce f.

VI.11 Postup při určování (nejdelších) intervalů ryzí monotónnosti funkce f, obsažených v množině $\mathsf{D}(f')$.

- Vypočteme 1. derivaci funkce f, řešíme nerovnici $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$, $x \in \mathsf{D}(f')$, a užijeme větu 6.6 nebo 6.8.
- Monotónnost v bodech $x \notin \mathsf{D}(f')$ vyšetříme podle definice 6.1.

Extrémy funkce

Vyhledávání extrémů funkce je jednou z úloh, které mají četná uplatnění v praxi. S pojmem extrému funkce na množině jsme se seznámili již v kapitole 2 (viz definici 2.25), nyní se seznámíme s extrémem funkce v bodě, zvaným lokální extrém funkce, a ukážeme si, jak se vyhledává. V dalším oddílu se pak seznámíme s vyhledáváním extrémů funkce na množině, tj. globálních extrémů funkce.

Lokální extrém funkce

VI.12 Definice (lokálního extrému funkce). Číslo $f(c) \in \mathbf{R}$ nazýváme *lokální maximum*, resp. *lokální minimum,* funkce f v bodě c, existuje-li okolí $\mathsf{U}(c)$ takové, že pro všechny body $x \in \mathsf{U}(c)$ platí $f(x) \leq f(c)$, resp. $f(x) \geq f(c)$. Lokální maximum a lokální minimum funkce nazýváme souhrnně *lokální extrémy* (též relativní extrémy) funkce.

Existuje-li lokální extrém $f(c)$ funkce f v bodě c, řekneme, že *funkce f má lokální extrém $f(c)$ v bodě c* nebo že *funkce f nabývá lokálního extrému $f(c)$ v bodě c.*

Číslo $f(c) \in \mathbf{R}$ nazýváme *ostré lokální maximum*, resp. *ostré lokální minimum*, funkce f v bodě c, existuje-li redukované okolí $\mathsf{U}^*(c)$ takové, že pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*(c)$ platí $f(x) < f(c)$, resp. $f(x) > f(c)$. Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum funkce nazýváme souhrnně *ostré lokální extrémy* funkce.

Existuje-li ostrý lokální extrém $f(c)$ funkce f v bodě c, říkáme též, že *funkce f má ostrý lokální extrém $f(c)$ v bodě c* nebo že *funkce f nabývá ostrého lokálního extrému $f(c)$ v bodě c.*

Lokální extrémy funkce, které nejsou ostré, nazýváme někdy *neostré lokální extrémy* funkce.

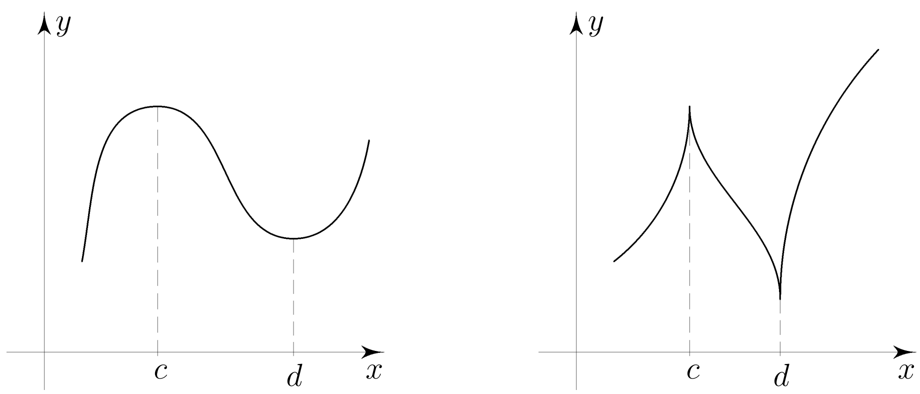
VI.13 Poznámky.

1. Ostré lokální extrémy funkce jsou zvláštními případy lokálních extrémů funkce.

2. V praxi nejčastěji vyšetřujeme ostré lokální extrémy funkce.

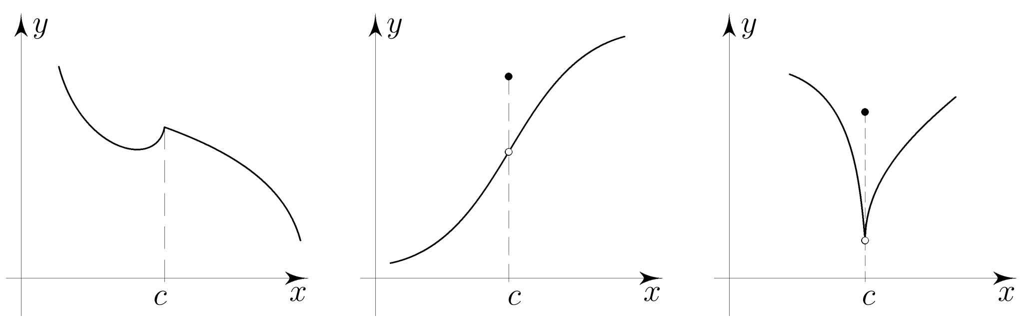
3. Z definice 6.12 vyplývá, že má-li funkce mít lokální extrém v nějakém bodě, musí být definována na jistém okolí tohoto bodu. Proto lokální extrémy funkce hledáme na otevřených intervalech, obsažených v definičním oboru funkce. (Funkce nemůže mít lokální extrém v hraničním bodě svého definičního oboru.)

4. Na obr. 6.4 jsou příklady grafů funkcí, které mají ostré lokální maximum v bodě c a ostré lokální minimum v bodě d.



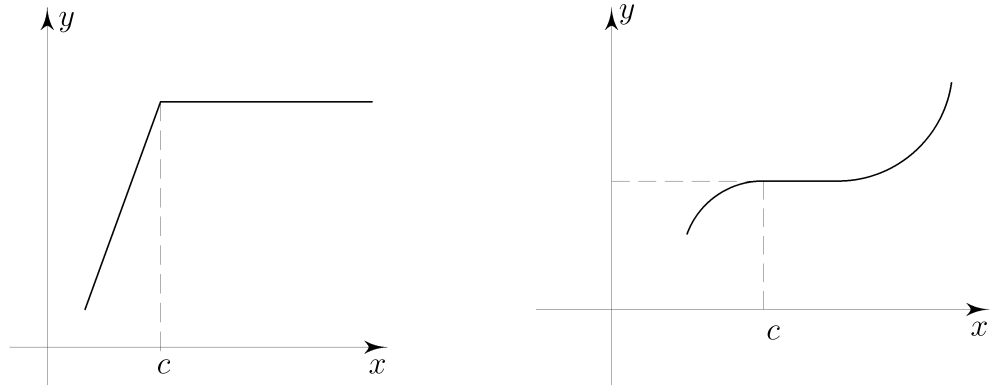
Obr. 6.4

5. Na obr. 6.5 jsou příklady grafů funkcí, které mají ostré lokální maximum v bodě c.



Obr. 6.5

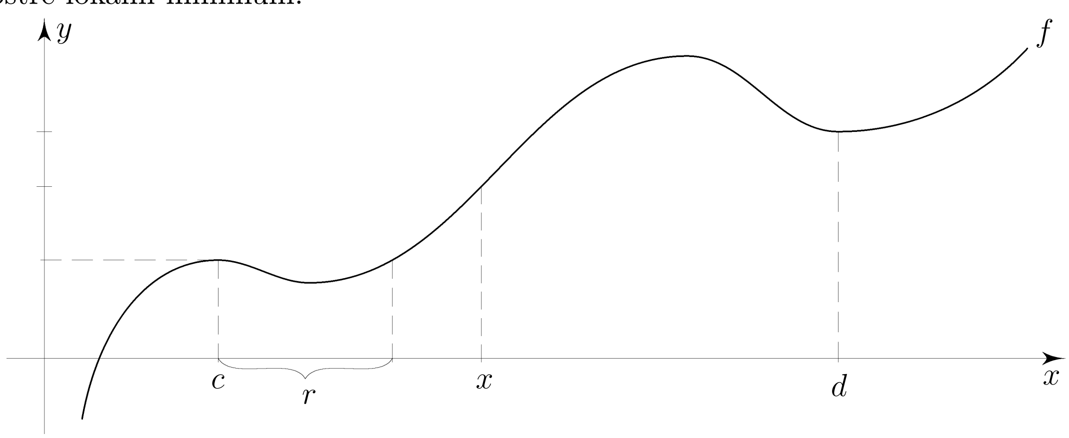
6. Na obr. 6.6 jsou příklady grafů funkcí, které mají neostré lokální maximum v bodě c.



Obr. 6.6

Grafy funkcí, které mají ostré, resp. neostré, lokální minimum v bodě c, jistě dokážete načrtnout sami. (Příklady grafů funkcí, které nemají lokální extrém, najde čtenář např. na obr. 6.3, obr. 6.14b a jinde.)

Uvědomte si! Přídavné jméno „ostrý“ u pojmu lokální extrém funkce v bodě c neudává, že graf funkce má ostrý hrot v bodě c, ale vyjadřuje skutečnost, že pro všechna čísla x z jistého redukovaného okolí $\mathsf{U}^*(c)$ platí *ostrá nerovnost* $f(x) < f(c)$, resp. $f(x) > f(c)$. Přídavné jméno „lokální“ udává, že příslušné nerovnosti platí na blízkém redukovaném okolí bodu c a na širším redukovaném okolí platit nemusí. Tak např. funkce na obr. 6.7 má ostré lokální maximum v bodě c a přitom na pravém redukovaném okolí s poloměrem větším než r je $f(x) > f(c)$, mimo jiné $f(d) > f(c)$, kde $f(d)$ je ostré lokální minimum funkce v bodě d. Může se tedy stát, že ostré lokální maximum funkce je menší než její ostré lokální minimum.



Obr. 6.7: Graf funkce f

Poznámka. Funkce může mít jeden lokální extrém, může mít i několik, dokonce nekonečně mnoho lokálních extrémů; naproti tomu nemusí mít žádný lokální extrém.

Příklad.

1. Funkce $y = x^2$ má 1 ostrý lokální extrém.
2. Funkce $y = \sin x$ má nekonečně mnoho ostrých lokálních extrémů.
3. Funkce $y = x^3$ nemá žádný lokální extrém.
4. Konstantní funkce, definovaná na otevřeném intervalu, má lokální extrém, a to lokální maximum i lokální minimum, v každém bodě tohoto intervalu. V žádném bodě tohoto intervalu však nemá ostrý lokální extrém.

Při hledání lokálních extrémů funkcí jsou užitečné následující věty.

VI.14 Věta (Nutná podmínka pro lokální extrém). *Má-li funkce f lokální extrém v bodě c a existuje-li první derivace $f'(c)$, pak $f'(c) = 0$*

Důsledek. *Má-li funkce f první derivaci různou od čísla 0 v bodě c, pak nemá lokální extrém v tomto bodě.*

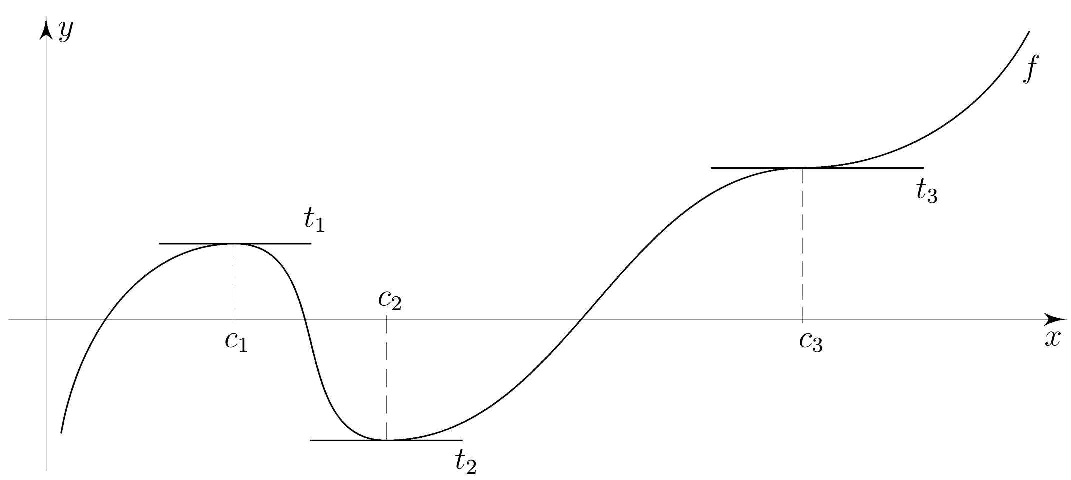
Poznámka. Věta obrácená k větě 6.14 neplatí. Jinými slovy: Rovnost $f'(c) = 0$ není postačující podmínkou pro existenci lokálního extrému funkce f v bodě c. Je-li totiž $f'(c) = 0$, funkce f nemusí mít lokální extrém v bodě c.

Příklad. Funkce $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, má derivaci $f'(x) = 3x^2$, $x \in \mathbf{R}$, která je v bodě 0 rovna 0. Přitom však funkce f nemá lokální extrém v bodě 0, neboť je rostoucí v tomto bodě. (Viz příklad 6.5.)

VI.15 Definice (stacionárního bodu funkce). Bod c nazýváme *stacionárním bodem* funkce f, jestliže existuje derivace $f'(c)$ a je-li $f'(c) = 0$.

Poznámky.

1. Na základě geometrického významu 1. derivace funkce v bodě můžeme říci, že tečna grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $[c, f(c)]$, kde c je stacionární bod funkce f, je rovnoběžná s osou x. Na obr. 6.8 je graf funkce f s tečnami t_1, t_2 a t_3 v bodech $[c_1, f(c_1)]$, $[c_2, f(c_2)]$ a $[c_3, f(c_3)]$, kde c_1, c_2 a c_3 jsou stacionární body funkce f.



Obr. 6.8: Graf funkce f s tečnami ve stacionárních bodech

2. Stacionární body funkce f určíme tímto postupem: Vypočteme 1. derivaci funkce f a řešíme rovnici $f'(x) = 0$; reálné kořeny rovnice $f'(x) = 0$, patřící do množiny $\mathsf{D}(f')$, jsou stacionární body funkce f.

Zmínili jsme se již o tom, že rovnost $f'(c) = 0$ není postačující podmínkou pro existenci lokálního extrému funkce f v bodě c. O tom, za jakých podmínek některý z ostrých lokálních extrémů funkce f nastane v bodě c, hovoří věta 6.16.

VI.16 Věta (1. postačující podmínka pro ostrý lokální extrém). *Nechť c je stacionární bod funkce f a funkce f má 2. derivaci v bodě c. Pak platí: Je-li $f''(c) \neq 0$, má funkce f ostrý lokální extrém v bodě c, a to ostré lokální maximum pro $f''(c) < 0$ a ostré lokální minimum pro $f''(c) > 0$.*

VI.17 Příklad. Najděme ostré lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbf{R}$.

Řešení: Vypočteme derivaci $f'(x) = 3x^2 - 6x,\ x \in \mathbf{R}$.

Najdeme reálné kořeny rovnice $f'(x) = 0$: $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x-2) = 0$. Kořeny této rovnice $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$ jsou stacionární body funkce f.

Vypočteme derivaci $f''(x) = 6x - 6,\ x \in \mathbf{R}$. Podle věty 6.16 rozhodneme o existenci a typu ostrého lokálního extrému funkce f v jejích stacionárních bodech.

$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$, $f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$.

Tedy funkce f má ostré lokální maximum 0 v bodě 0 a ostré lokální minimum -4 v bodě 2. (Viz obr. 6.2 v řešení příkladu 6.7.)

VI.18 Příklad. Najděme ostré lokální extrémy funkce $f(x) = -x^4 + 4x^3$, $x \in \mathbf{R}$.

Řešení: Vypočteme derivace

$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 = -4x^2(x-3),\ x \in \mathbf{R}$,

$f''(x) = -12x^2 + 24x,\ x \in \mathbf{R}$.

Stacionární body funkce f jsou reálné kořeny rovnice $-4x^2(x-3) = 0$, tedy $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

$f''(0) = 0$, $f''(3) = 24 \cdot 3 - 12 \cdot 3^2 = -36 < 0$.

Funkce f má ostré lokální maximum 27 v bodě 3. O ostrém lokálním extrému funkce f v bodě 0 věta 6.16 nic nevypovídá, protože $f''(0) = 0$.

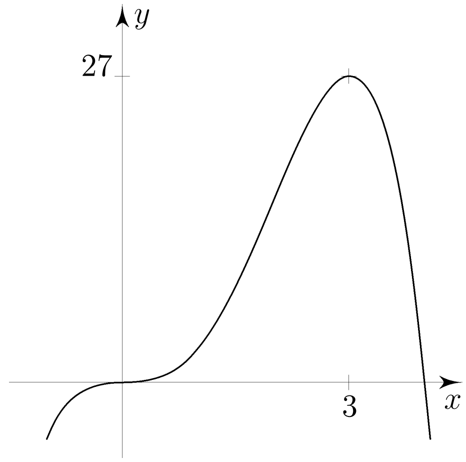
Abychom mohli rozhodnout o existenci a typu ostrého lokálního extrému funkce i v těch jejích stacionárních bodech, ve kterých je její 2. derivace rovna číslu 0, užijeme větu 6.19, zobecňující větu 6.16 a zároveň větu 6.3.

VI.19 Věta (Zobecněná postačující podmínka pro ostrý lokální extrém). *Nechť funkce f má v bodě c derivace až do n-tého řádu včetně, $n \in \mathbf{N}$, přičemž $f^{(m)}(c) = 0$ pro všechna $m < n$, $m \in \mathbf{N}$, a $f^{(n)}(c) \neq 0$. Potom platí:*

Je-li n sudé, má funkce f ostrý lokální extrém v bodě c, a to ostré lokální maximum pro $f^{(n)}(c) < 0$ a ostré lokální minimum pro $f^{(n)}(c) > 0$.

Je-li n liché, je funkce f ryze monotónní v bodě c, a to rostoucí pro $f^{(n)}(c) > 0$ a klesající pro $f^{(n)}(c) < 0$.

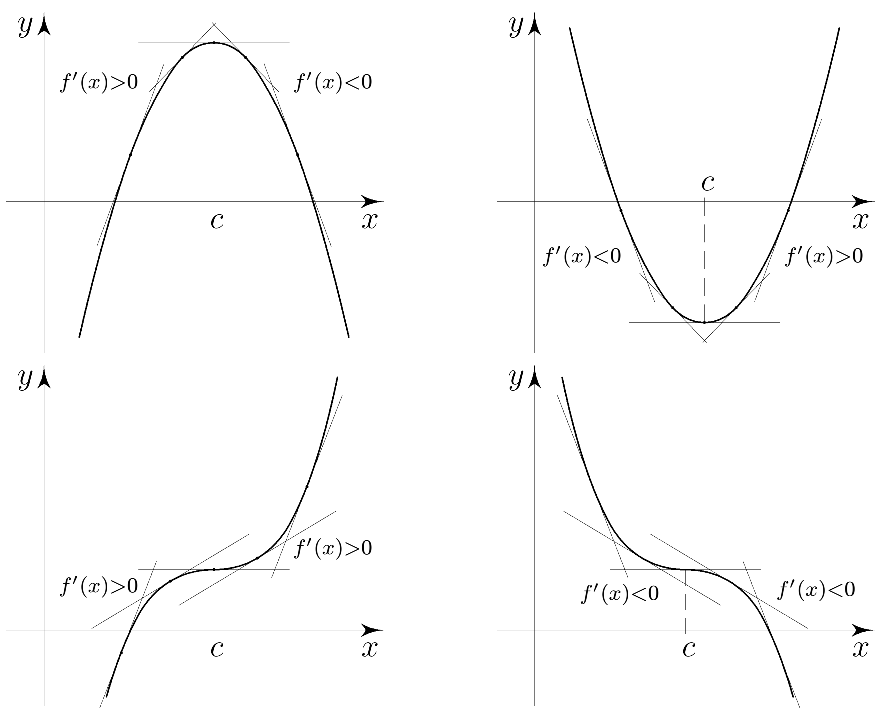
Nyní již můžeme dořešit příklad 6.18. Vypočteme derivaci $f'''(x) = -24x+24$, $x \in \mathbf{R}$, a zjistíme, že $f'''(0) = 24 \neq 0$. Nejnižší řád nenulové derivace funkce f v bodě 0 je roven 3, což je liché číslo. Podle věty 6.19 je funkce f rostoucí v bodě 0, a tedy nemá lokální extrém v tomto bodě.



Obr. 6.9: Graf funkce $f(x) = -x^4 + 4x^3$

Připomínáme, že příklad 6.18 také dokládá, že z podmínky $f'(0) = 0$ neplyne existence lokálního extrému funkce f v bodě 0.

Než vyslovíme další větu, pozorně si prohlédneme na obr. 6.10 grafy funkcí s jejich tečnami v bodech blízkého redukovaného okolí stacionárního bodu c. K posouzení, zda funkce má či nemá ve svém stacionárním bodě lokální extrém, případně k určení jeho typu, nám postačuje znalost znaménka její 1. derivace na blízkém redukovaném okolí tohoto stacionárního bodu.



Obr. 6.10: Grafy funkcí a jejich tečny

VI.20 Věta (2. postačující podmínka pro ostrý lokální extrém). *Nechť c je stacionární bod funkce f a funkce f má 1. derivaci na jistém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(c,\delta)$. Pak platí:*

Je-li $f'(x) < 0$, resp. $f'(x) > 0$, pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*_-(c,\delta)$ a $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$, pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*_+(c,\delta)$, má funkce f ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum, v bodě c.

Je-li $f'(x) > 0$ pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*(c,\delta)$ nebo $f'(x) < 0$ pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*(c,\delta)$, nemá funkce f lokální extrém v bodě c.

(Stručně: Mění-li derivace f' znaménko ze záporného na kladné, resp. z kladného na záporné, v bodě c, pak má funkce f ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum, v bodě c. Nemění-li derivace f' znaménko v bodě c, pak nemá funkce f lokální extrém v bodě c.)

Uvědomte si souvislosti mezi monotónností a existencí lokálních extrémů funkce!

VI.21 Příklad. Řešme příklad 6.18 pomocí věty 6.20.

Řešení: $f(x) = -x^4 + 4x^3$, $f'(x) = -4x^3 + 12x^2$, $x \in \mathbf{R}$.

Stacionární body funkce f: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

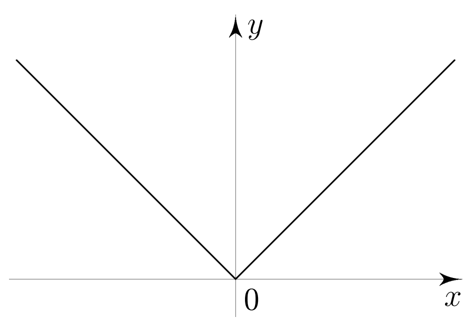
Určíme intervaly ryzí monotónnosti funkce f podle znaménka derivace f'. Stacionární body 0 a 3 dělí množinu $\mathbf{R} \setminus \{0,3\}$ na intervaly $(-\infty,0)$, $(0,3)$ a $(3,+\infty)$. Snadno zjistíme, že $f'(x) > 0$ na intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,3)$ a $f'(x) < 0$ na intervalu $(3,+\infty)$. Derivace f' nemění znaménko v bodě 0, tedy funkce f nemá lokální extrém v bodě 0, derivace f' mění znaménko z kladného na záporné v bodě 3, tedy funkce f má ostré lokální maximum 27 v bodě 3.

Poznámka. Pokud nepotřebujeme z jiných důvodů (např. pro zjišťování konvexity nebo konkavity funkce) počítat 2. derivaci funkce, neužíváme při vyšetřování existence lokálního extrému funkce v jejím stacionárním bodě větu 6.16 nebo 6.19, ale přednostně větu 6.20.

Funkce f může mít lokální extrém nejen ve svých stacionárních bodech, ale též ve vnitřních bodech svého definičního oboru, ve kterých její 1. derivace neexistuje.

Příklady.

a) Funkce $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$, má podle definice 6.12 ostré lokální minimum v bodě 0 a přitom derivace $f'(0)$ neexistuje ($f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$).

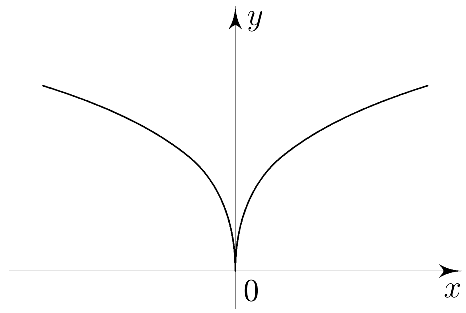


Obr. 6.11: Graf funkce $f(x) = |x|$

b) Funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|} = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & \text{pro } x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

má podle definice 6.12 ostré lokální minimum v bodě 0 a přitom derivace $f'(0)$ neexistuje ($f'_-(0) = -\infty$, $f'_+(0) = +\infty$).

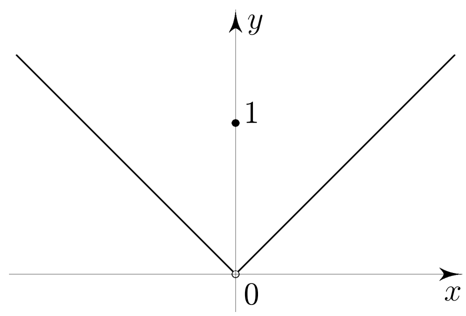


Obr. 6.12: Graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$

c) Funkce

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

má podle definice 6.12 ostré lokální maximum v bodě 0 a přitom derivace $f'(0)$ neexistuje ($f'_-(0) = +\infty$, $f'_+(0) = -\infty$).



Obr. 6.13: Graf funkce $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$

Můžeme tedy rozlišit dvě skupiny bodů, ve kterých by funkce mohla mít lokální extrém:

(A) Vnitřní body definičního oboru funkce, ve kterých 1. derivace funkce existuje a je rovna číslu 0, tj. stacionární body funkce.

(B) Vnitřní body definičního oboru funkce, ve kterých 1. derivace funkce neexistuje. (Sem patří např. body odstranitelné nespojitosti funkce a body, v nichž má graf funkce *hrot.*)

Bodům obou skupin budeme říkat *body podezřelé z lokálního extrému funkce.*

Vzhledem k tomu, že v bodech skupiny (B) neexistuje 1. derivace funkce, a tedy ani 2. derivace funkce, o existenci, případně typu lokálního extrému funkce v těchto bodech nelze rozhodnout podle vět 6.16, 6.19 a 6.20; rozhoduje se proto na základě definice 6.12. U některých funkcí lze však v bodech skupiny (B) rozhodnout též na základě věty 6.22, jež se liší od věty 6.20 tím, že předpoklad „c je stacionární bod funkce f“ je nahrazen slabším předpokladem „funkce f je spojitá v bodě c“.

VI.22 Věta. *Nechť funkce f je spojitá v bodě c a má 1. derivaci na jistém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(c,\delta)$. Pak platí:*

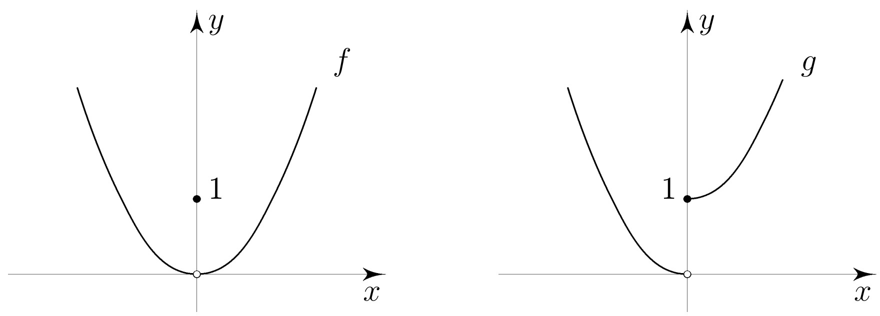
Je-li $f'(x) < 0$, resp. $f'(x) > 0$, pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*_-(c,\delta)$ a $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$, pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*_+(c,\delta)$, má funkce f ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum, v bodě c.

Je-li $f'(x) > 0$ pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*(c,\delta)$ nebo $f'(x) < 0$ pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*(c,\delta)$, nemá funkce f lokální extrém v bodě c.

Poznámka. Předpoklad spojitosti funkce f v bodě c ve větě 6.22 je důležitý. Větu 6.22 *nelze* užít k vyšetření existence ostrého lokálního extrému, popř. neexistence lokálního extrému, funkce f v bodě c, pokud funkce f není v bodě c spojitá.

Příklad. Hledejme lokální extrémy funkcí

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x < 0 \\ x^2+1 & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}.$$



a) Graf funkce f b) Graf funkce g

Obr. 6.14

Řešení: $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $g'(x) = 2x$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Funkce f a g nemají stacionární bod, protože $f'(x) \neq 0$ a $g'(x) \neq 0$ pro všechna čísla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Funkce f a g nemají první derivaci v bodě 0 a nejsou v něm spojité; nemůžeme tedy použít větu 6.22. O existenci lokálního extrému funkcí f a g tedy rozhodneme na základě definice 6.12. Na blízkém redukovaném okolí bodu 0 je $f(x) < 1 = f(0)$, takže funkce f má ostré lokální maximum v bodě 0. Na blízkém levém redukovaném okolí bodu 0 je $g(x) < 1 = g(0)$, na blízkém pravém redukovaném okolí bodu 0 je $g(x) > 1 = g(0)$, takže funkce g je rostoucí v bodě 0 a nemá lokální extrém v bodě 0.

Kdybychom přehlédli, že funkce f a g nejsou spojité v bodě 0, a použili větu 6.22, dopustili bychom se této chybné úvahy: Na blízkém levém redukovaném okolí bodu 0 jsou funkce f i g klesající ($f'(x) < 0$, $g'(x) < 0$), na blízkém pravém redukovaném okolí bodu 0 jsou funkce f i g rostoucí ($f'(x) > 0$, $g'(x) > 0$); tedy funkce f a g mají ostré lokální minimum v bodě 0.

VI.23 Příklad. Najděme lokální extrémy funkce $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$.

Řešení: Funkce f je zřejmě spojitá na množině $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$.

$$f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-5)\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{3x + 2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}, \quad \mathsf{D}(f') = \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Najdeme body podezřelé z lokálního extrému funkce f:

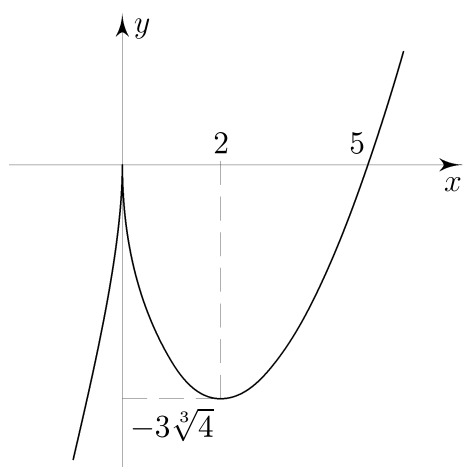
(A) $f'(x) = 0 \iff \dfrac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \iff x_1 = 2.$

(B) $x \in \mathsf{D}^{\circ}(f) \wedge \neg\exists\, f'(x) \iff x_2 = 0.$

O existenci, případně typu, lokálního extrému funkce rozhodneme na základě vět 6.20 a 6.22, k čemuž potřebujeme určit znaménka 1. derivace funkce f na intervalech, na které je definiční obor $\mathsf{D}(f)$ rozdělen body 0 a 2.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$+$	$\neg\exists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$
		ostré lok. max.		ostré lok. min.	

Derivace f' je kladná na jistém levém redukovaném okolí bodu 0 a záporná na jistém pravém redukovaném okolí bodu 0, takže podle věty 6.22 funkce f má ostré lokální maximum 0 v bodě 0. Derivace f' mění znaménko ze záporného na kladné v bodě 2, takže podle věty 6.20 funkce f má ostré lokální minimum $-3\sqrt[3]{4}$ v bodě 2.



Obr. 6.15: Graf funkce $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$

VI.24 Postup při hledání lokálních extrémů funkce f.

1. Vyhledáme všechny body podezřelé z lokálního extrému funkce f, tj.

   (A) vnitřní body definičního oboru $\mathsf{D}(f)$, v nichž je *první* derivace f' rovna číslu 0 (stacionární body funkce f),

   (B) vnitřní body definičního oboru $\mathsf{D}(f)$, v nichž 1. derivace f' neexistuje.

2. Rozhodneme o existenci a typu lokálního extrému funkce f v bodech skupiny (A) podle některé z vět 6.16, 6.19, 6.20 a 6.22 nebo na základě definice 6.12 a v bodech skupiny (B) podle věty 6.22, splňuje-li funkce f její předpoklady, nebo na základě definice 6.12. Volba vět, které užijeme, závisí na konkrétní funkci, případně na tom, zda se mají či nemají vyšetřovat další vlastnosti funkce.

Globální extrém funkce

V aplikacích se velmi často setkáváme s úlohou najít největší nebo nejmenší hodnotu funkce, tj. globální extrémy funkce, na nějaké podmnožině jejího definičního oboru. Tato úloha bývá někdy potřebnější a důležitější než úloha nalézt lokální extrémy funkce.

S definicí globálního extrému funkce na množině, která je částí definičního oboru funkce, jsme se seznámili již v kapitole 2 (viz definici 2.25).

Uvědomte si! Pojmy lokální extrém funkce a globální extrém funkce zdaleka nejsou tytéž pojmy! Z definic 6.12 a 2.25 je zřejmé, že lokální extrémy funkce v bodě hledáme zásadně na otevřeném intervalu, který obsahuje tento bod a je částí definičního oboru funkce, kdežto globální extrémy funkce můžeme hledat na jakékoli neprázdné množině $\mathsf{M} \subset \mathsf{D}(f)$, speciálně $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f)$; nejčastěji množinou M bývá uzavřený interval. Pokud $\mathsf{M} = \mathsf{D}(f)$, pak stručně hovoříme o globálních extrémech funkce bez udání množiny M.

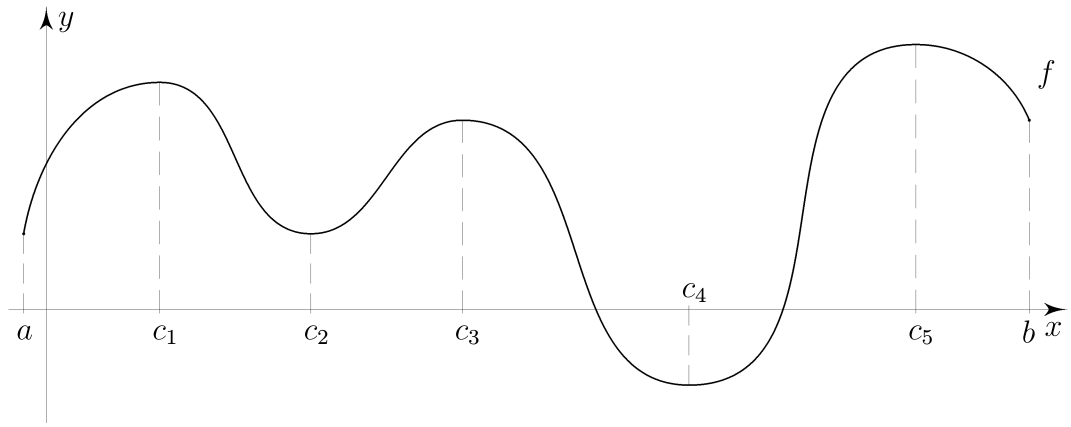
Funkce může mít libovolný, i nekonečný, počet lokálních maxim a lokálních minim (pokud existují), jichž nabývá v odpovídajícím počtu vnitřních bodů svého definičního oboru, a tyto lokální extrémy mohou být různé. Naproti tomu funkce může mít *pouze jedno globální maximum a jedno globální minimum* (pokud existuje) a může jich nabývat v libovolném, i nekonečném počtu bodů svého definičního oboru.

Příklady.

a) Funkce $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, má ostrá lokální maxima, jejichž velikost je rovna 1, v nekonečně mnoha bodech $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, a ostrá lokální minima, jejichž velikost je rovna -1, v nekonečně mnoha bodech $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Přitom má jedno globální maximum 1, které nabývá v nekonečně mnoha bodech $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, a jedno globální minimum -1, které nabývá v nekonečně mnoha bodech $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Funkce $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, nemá žádný lokální extrém ani žádný globální extrém.

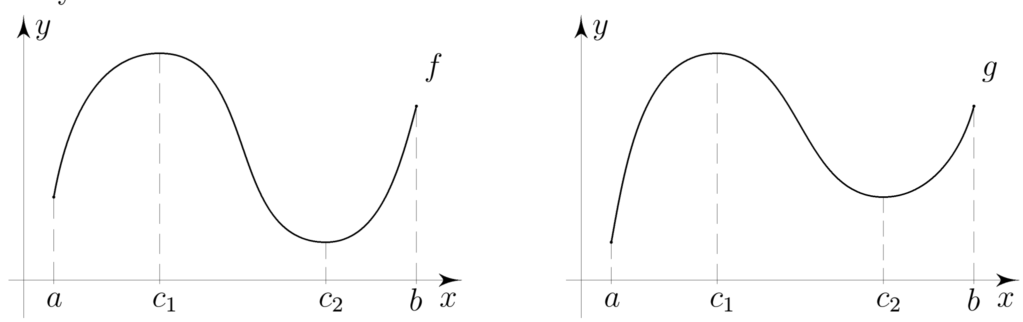
c) Funkce f, jejíž graf je na obr. 6.16, má ostrá lokální maxima v bodech c_1, c_3, c_5 a ostrá lokální minima v bodech c_2 a c_4, přitom je $\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(c_5)$ a $\min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(c_4)$.



Obr. 6.16: Graf funkce f

V souvislosti s globálními extrémy vyvstávají dvě otázky: (1) zda má funkce f globální extrémy na množině M, (2) jak globální extrémy funkce f na množině M (pokud existují) najít.

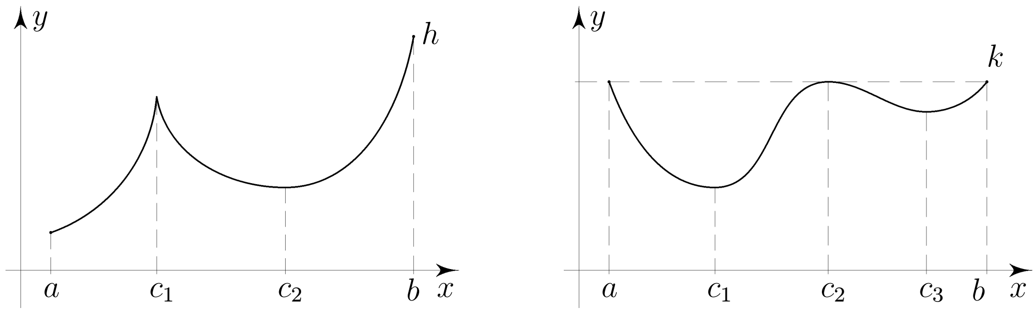
Jasnou odpověď na první otázku dává Weierstrassova věta (věta 4.46): Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu, nabývá globálního maxima i globálního minima na tomto intervalu. Funkce může těchto hodnot nabýt buď ve vnitřních bodech nebo v krajních bodech uzavřeného intervalu. Prohlédněte si následující obrázky!



Graf funkce f Graf funkce g

Obr. 6.17

Funkce f má ostré lokální maximum v bodě c_1 a ostré lokální minimum v bodě c_2. $\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(c_1)$, $\min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(c_2)$.
Funkce g má ostré lokální maximum v bodě c_1 a ostré lokální minimum v bodě c_2. $\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} g(x) = g(c_1)$, $\min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} g(x) = g(a)$; a je krajní bod intervalu $\langle a,b\rangle$.



Graf funkce h Graf funkce k

Obr. 6.18

Funkce h má ostré lokální maximum v bodě c_1 a ostré lokální minimum v bodě c_2. $\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} h(x) = h(b)$, $\min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} h(x) = h(a)$; a a b jsou krajní body intervalu.
Funkce k má ostré lokální maximum v bodě c_2 a ostré lokální minimum v bodech c_1 a c_3. $\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} k(x) = k(a) = k(c_2) = k(b)$, $\min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} k(x) = k(c_1)$; a a b jsou krajní body intervalu.

Je zřejmé, že je-li $f(c) = \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, pak c je buď krajním bodem intervalu $\langle a,b\rangle$ (tj. $c = a \vee c = b$) nebo funkce f má v bodě c lokální maximum. Podobné tvrzení platí i pro případ, kdy $f(c) = \min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$.

Na druhou otázku odpovíme v odstavci 6.25.

VI.25 Postup při hledání globálních extrémů funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, na němž je spojitá.

1. Vyhledáme všechny body podezřelé z globálního extrému funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$. Jsou to:

   a) body $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in (a,b)$ podezřelé z lokálního extrému funkce f na intervalu (a,b), tj.

      (A) stacionární body funkce f na intervalu (a,b),
      (B) body intervalu (a,b), ve kterých 1. derivace funkce f neexistuje,

   b) krajní body intervalu $\langle a,b\rangle$, tj. body a a b.

2. Vypočteme hodnoty funkce f v bodech podezřelých z globálního extrému funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$, tj. čísla $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots, f(b)$.

3. Vyhledáme největší a nejmenší z těchto čísel. Největší, resp. nejmenší, číslo je globální maximum, resp. globální minimum, funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$.

   Tedy

$$\max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = \max\{f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots, f(b)\},$$

$$\min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = \min\{f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots, f(b)\}.$$

Poznámka. Je zbytečné vyšetřovat existenci a typ lokálních extrémů funkce v bodech $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, protože to, zda nastane v těchto bodech lokální extrém, je nepodstatné. Rozhodující je hodnota funkce v těchto bodech. Stačí tedy vypočítat hodnoty funkce v bodech $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, abychom porovnali jejich velikosti mezi sebou a s hodnotami funkce v bodech a a b.

VI.26 Příklad. Najděme globální extrémy funkce $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$, $x \in \mathbf{R}$, na intervalu $\langle 0, 3\rangle$.

Řešení: Funkce f je spojitá na intervalu $\langle 0, 3\rangle$, a tedy podle Weierstrassovy věty má globální extrémy na tomto intervalu.

1. Vyhledáme všechny body podezřelé z globálního extrému funkce f na $\langle 0, 3\rangle$.

a) Vyhledáme všechny body podezřelé z lokálního extrému funkce f na $(0, 3)$.

(A) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$, $x \in \mathbf{R}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$,
$6(x + 1)(x - 2) = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $-1 \notin \langle 0, 3\rangle$, $2 \in \langle 0, 3\rangle$.
Funkce f má pouze jeden stacionární bod na intervalu $(0, 3)$, a to 2.

(B) $x \in (0, 3) \wedge \neg\exists\, f'(x) \Leftrightarrow x \in \emptyset$.
Neexistuje žádný bod intervalu $(0, 3)$, ve kterém funkce f nemá 1. derivaci.

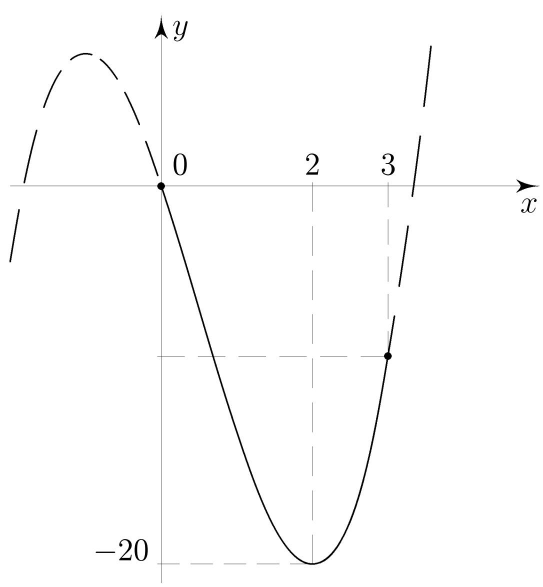
b) Krajní body intervalu $\langle 0, 3\rangle$ jsou 0 a 3.

Body podezřelé z globálního extrému funkce f na intervalu $\langle 0, 3\rangle$ jsou $0, 2$ a 3.

2. Vypočteme hodnoty funkce f v těchto bodech.
$f(0) = 0$, $f(2) = -20$, $f(3) = -9$.

3. Vyhledáme největší a nejmenší z těchto funkčních hodnot.
Funkce f má globální maximum 0 v bodě 0 a globální minimum -20 v bodě 2.

Stručně: $\max\limits_{x \in \langle 0,3\rangle} f(x) = f(0) = 0$, $\min\limits_{x \in \langle 0,3\rangle} f(x) = f(2) = -20$.



Obr. 6.19: Graf funkce $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

VI.27 Postup při hledání globálních extrémů funkce f na otevřeném intervalu (a,b), na němž je spojitá. Globální extrémy funkce f na otevřeném intervalu (a,b) hledáme obdobně jako na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ s tím rozdílem, že nebereme v úvahu funkční hodnoty $f(a)$ a $f(b)$.

Je třeba si uvědomit, že funkce spojitá na otevřeném intervalu nemusí mít globální extrém na tomto intervalu. Je tomu tak např. u funkce $f(x) = x^3$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

K nalezení globálních extrémů funkce na otevřeném intervalu nám někdy pomůže vyšetření monotónnosti funkce na tomto intervalu nebo výpočet jednostranných limit $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$. Je-li např. $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} f(x) = +\infty$, lze usoudit, že funkce f má globální minimum na intervalu (a,b).

Při řešení slovních úloh na globální extrémy funkce nebývá vždy zadána funkce jen jedné proměnné, ale n proměnných, $n \in \mathbf{N}\setminus\{1\}$, kde však tyto proměnné jsou vázány $n-1$ podmínkami. Podaří-li se na základě těchto podmínek eliminovat $n-1$ proměnných, obdržíme funkci jen jedné proměnné a její globální extrémy pak najdeme postupem vyloženým výše.

VI.28 Příklad. Určeme rozměry uzavřeného plechového sudu tvaru rotačního válce, který má daný objem V a na jehož výrobu se spotřebuje co nejméně materiálu.

Řešení: Označme r poloměr podstavy válce a v výšku válce. Pro objem V válce platí vzorec $V = \pi r^2 v$. Požadujeme, aby spotřeba materiálu byla co nejmenší, tj. aby povrch válce S byl co nejmenší.

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v, \quad r > 0,\ v > 0,$$

což je funkce proměnných r a v. Ze vzorce pro objem válce vyjádříme výšku válce $v = \frac{V}{\pi r^2}$ a dosadíme ji do vzorce pro povrch válce

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Tím je povrch S válce při jeho daném objemu vyjádřen jako funkce proměnné r.

Najdeme globální minimum funkce S na intervalu $(0,+\infty)$, na němž je spojitá. Napřed vyhledáme stacionární body funkce S na intervalu $(0,+\infty)$.

$$S' = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}.$$

Vyřešíme rovnici $S' = 0$, tedy

$$4\pi r^3 - 2V = 0, \quad r^3 = \frac{2V}{4\pi}, \quad r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$

r_0 je stacionární bod funkce S.

Vypočteme derivaci

$$S'' = \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2} = 4\pi + \frac{4V}{r^3}.$$

Protože

$$S''(r_0) = 4\pi + \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0,$$

má funkce S ostré lokální minimum a zároveň globální minimum v bodě r_0, neboť

$$\lim_{r\to 0+}\left(2\pi r^2 + \frac{2V}{r}\right) = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{r\to +\infty}\left(2\pi r^2 + \frac{2V}{r}\right) = +\infty.$$

Poloměru r_0 válce odpovídá výška válce

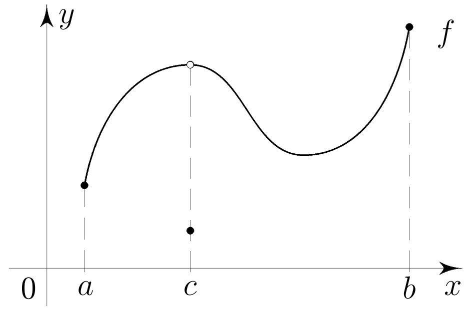
$$v_0 = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V^3 4\pi^2}{\pi^3 V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_0.$$

Sud s minimálním povrchem má tvar rovnostranného rotačního válce, tj. válce, jehož osový řez je čtverec, o straně $2r_0$.

Předpokládáme, že při vyšetřování globálních extrémů funkce na polootevřených intervalech, na nichž je funkce spojitá, si na základě předchozích úvah poradíte sami.

Snadno lze globální extrémy funkce na jakémkoli intervalu vyčíst z jejího grafu, který sestrojíme na základě úplného vyšetření jejího průběhu.

VI.29 Poznámka. Hledání globálních extrémů funkce, která není na uzavřeném, resp. otevřeném, intervalu spojitá, je obtížnějším problémem. V jednodušším případě, viz obr. 6.20, kdy funkce f je po částech spojitá na intervalu s krajními body a a b a má uvnitř tohoto intervalu body nespojitosti $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, je daný interval sjednocením $n+1$ uzavřených, otevřených nebo polootevřených intervalů s krajními body $a, c_1, c_2, \ldots, c_n, b$. Globální extrémy funkce f se vyšetří na každém z dílčích intervalů zvlášť, přičemž k funkčním hodnotám v bodech podezřelých z globálního extrému funkce f se přidají funkční hodnoty v bodech nespojitosti, pokud existují. Z globálních extrémů funkce f na dílčích intervalech se pak vyberou globální extrémy funkce f na daném intervalu; jejich existence však závisí na velikosti jednostranných limit funkce f v bodech nespojitosti, jež je nutno napřed vypočítat. Není-li funkce omezená shora, resp. zdola, na intervalu, pak nemá globální maximum, resp. globální minimum, na tomto intervalu.



Obr. 6.20: Graf funkce, která není spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$.
$\max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(b)$, $\min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(c)$

Konvexní a konkávní funkce

Další vlastností funkce je konvexita (konvexnost) a konkavita (konkávnost), jež charakterizuje typ prohnutosti jejího grafu.

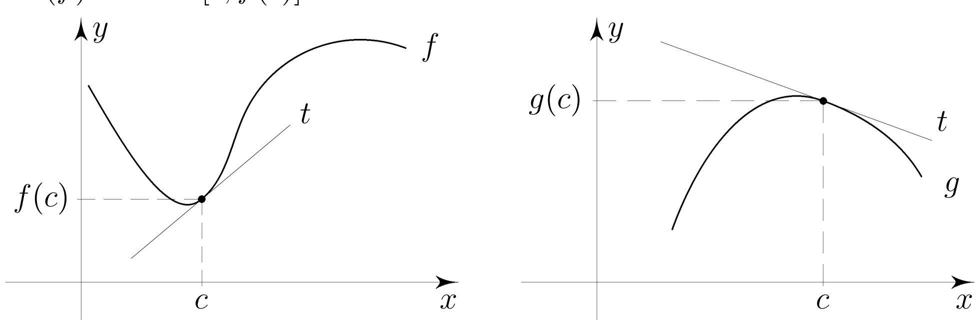
VI.30 Definice (funkce ryze konvexní, resp. ryze konkávní, v bodě). Říkáme, že funkce f *je ryze konvexní*, resp. *ryze konkávní*, v bodě c, existuje-li vlastní derivace $f'(c)$ a jisté redukované okolí $\mathsf{U}^*(c)$ takové, že pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*(c)$ platí

$$f(x) > f'(c)(x-c) + f(c), \tag{1}$$

resp.

$$f(x) < f'(c)(x-c) + f(c). \tag{2}$$

Geometrická interpretace. Rovnice $y = f'(c)(x-c) + f(c)$ je rovnice tečny t grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $[c, f(c)]$. Nerovnost (1), resp. (2), vyjadřuje tedy skutečnost, že body $[x, f(x)]$ grafu $\mathsf{G}(f)$, pro které $x \in \mathsf{U}^*(c)$, leží nad, resp. pod, tečnou t grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $[c, f(c)]$.



Obr. 6.21

Na obr. 6.21 je zobrazen graf funkce f, která je ryze konvexní v bodě c a graf funkce g, která je ryze konkávní v bodě c.

Definici 6.30 lze vyslovit ve znění, které vychází z geometrického názoru a snadněji se pamatuje.

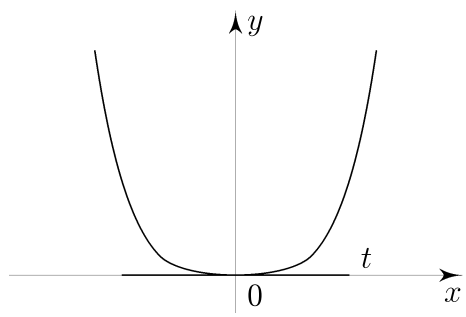
VI.31 Definice (funkce ryze konvexní, resp. ryze konkávní, v bodě — geometrická). Říkáme, že funkce f je *ryze konvexní*, resp. *ryze konkávní*, v bodě c, existuje-li tečna grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $[c, f(c)]$, která není rovnoběžná s osou y, a jisté redukované okolí $\mathsf{U}^*(c)$ takové, že všechny body $[x, f(x)]$ grafu $\mathsf{G}(f)$, pro které $x \in \mathsf{U}^*(c)$, leží nad, resp. pod, tečnou grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě $[c, f(c)]$.

O tom, zda funkce f, mající 2. derivaci v bodě c, je ryze konvexní či ryze konkávní v bodě c, můžeme rozhodnout podle následující věty.

VI.32 Věta (o ryzí konvexitě, resp. ryzí konkavitě, funkce v bodě). *Nechť funkce f má 2. derivaci v bodě c. Pak platí: Je-li $f''(c) > 0$, resp. $f''(c) < 0$, je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, v bodě c.*

Poznámka. Věta 6.32 udává postačující, nikoliv nutnou, podmínku pro ryzí konvexitu, resp. ryzí konkavitu, funkce f v bodě c.

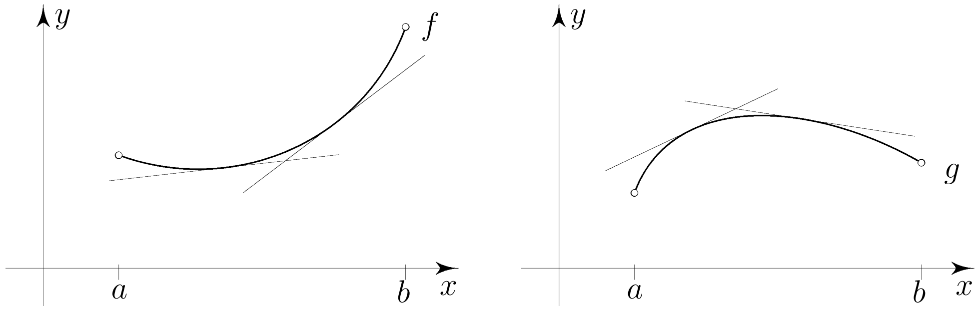
VI.33 Příklad. Funkce $f(x) = x^4$ je ryze konvexní v bodě 0, neboť body jejího grafu jsou nad tečnou t v bodě $[0, 0]$, přestože není $f''(0) > 0$ ($f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$). Funkce f má ostré lokální minimum v bodě 0.



Obr. 6.22: Graf funkce $f(x) = x^4$

Při vyšetřování průběhu funkce nás spíše než body zajímají intervaly, na kterých je funkce ryze konvexní či ryze konkávní. Ty nás totiž informují o tom, kde je graf funkce nad či pod svou tečnou, neboli kde a jak je graf funkce prohnutý. Proto nyní zavedeme pojmy funkce ryze konvexní a funkce ryze konkávní na otevřeném intervalu.

VI.34 Definice (funkce ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na otevřeném intervalu). Říkáme, že funkce f je *ryze konvexní*, resp. *ryze konkávní, na intervalu* (a, b), je-li ryze konvexní, resp. ryze konkávní, v každém bodě tohoto intervalu.

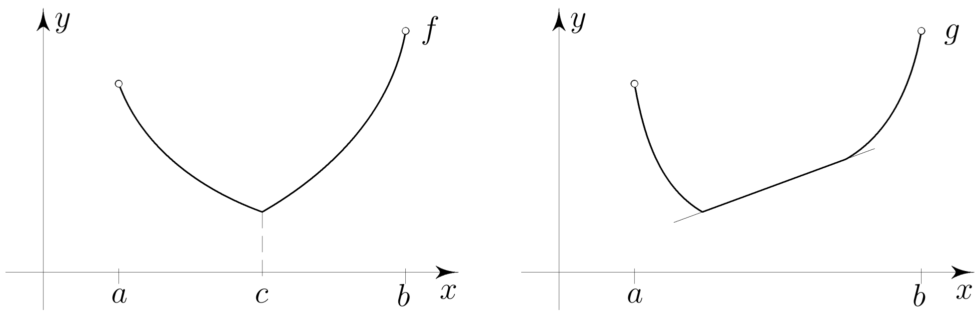


a) Graf funkce f ryze konvexní na intervalu (a, b)

b) Graf funkce g ryze konkávní na intervalu (a, b)

Obr. 6.23

Průběhy a grafy funkcí jsou však daleko rozmanitější než ty, s nimiž jsme se v tomto odstavci setkali. Zamysleme se nad tím, co lze říci o ryzí konvexitě či ryzí konkavitě funkcí f a g na intervalu (a, b), znázorněných na následujícím obrázku 6.24.



Obr. 6.24

V těchto případech není podle definice 6.34 ani funkce f, ani funkce g ryze konvexní na intervalu (a, b). U funkce f to způsobuje bod c, v němž funkce f nemá 1. derivaci a graf $\mathsf{G}(f)$ tečnu. Aby funkce f mohla být považována za funkci ryze konvexní na intervalu (a, b), což by bylo rozumné, rozšíříme poněkud definici 6.34 a v dalším textu budeme užívat rozšířené definice.

VI.35 Definice (funkce ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na otevřeném intervalu — rozšířená). Říkáme, že funkce f je *ryze konvexní*, resp. *ryze konkávní, na intervalu* (a, b), jestliže pro každé tři body x_1, x_2, x takové, že $a < x_1 < x < x_2 < b$, platí

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1), \tag{3}$$

resp.

$$f(x) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1). \tag{4}$$

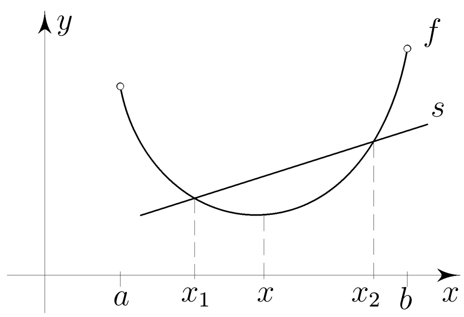
Zatímco funkce f, graficky znázorněná na obrázku 6.24, je podle definice 6.35 ryze konvexní na intervalu (a,b), funkce g není podle definice 6.35 ryze konvexní na intervalu (a,b). Je jen konvexní na intervalu (a,b). Tento pojem spolu s pojmem funkce konkávní na intervalu (a,b) zavedeme nyní.

VI.36 Definice (funkce konvexní, resp. konkávní, na otevřeném intervalu). Říkáme, že funkce f je *konvexní*, resp. *konkávní, na intervalu* (a,b), jestliže pro každé tři body x_1, x_2, x takové, že $a < x_1 < x < x_2 < b$, platí

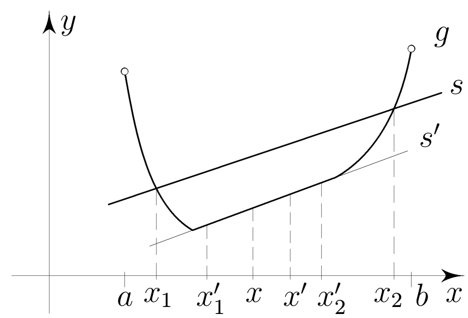
$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1), \tag{5}$$

resp.

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1). \tag{6}$$



a) Graf funkce f ryze konvexní na intervalu (a,b)



b) Graf funkce g konvexní na intervalu (a,b)

Obr. 6.25

Geometrická interpretace. Rovnice

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

je rovnice sečny s, která prochází body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ grafu $\mathsf{G}(f)$. Nerovnost (3), resp. (4), vyjadřuje skutečnost, že bod $[x, f(x)]$ grafu $\mathsf{G}(f)$, pro který $x_1 < x < x_2$, leží pod, resp. nad, sečnou s grafu $\mathsf{G}(f)$. Nerovnost (5), resp. (6), vyjadřuje skutečnost, že bod $[x, f(x)]$ grafu $\mathsf{G}(f)$, pro který $x_1 < x < x_2$, leží pod, resp. nad, sečnou s nebo na ní (v posledním případě je sečna zároveň tečnou).

Rovněž definice 6.35 a 6.36 lze vyslovit ve znění, které vychází z geometrického názoru. Vyslovíme v tomto znění pouze definici funkce ryze konvexní a funkce konvexní na otevřeném intervalu. Formulaci definice ryze konkávní a konkávní funkce na otevřeném intervalu ponecháváme čtenáři.

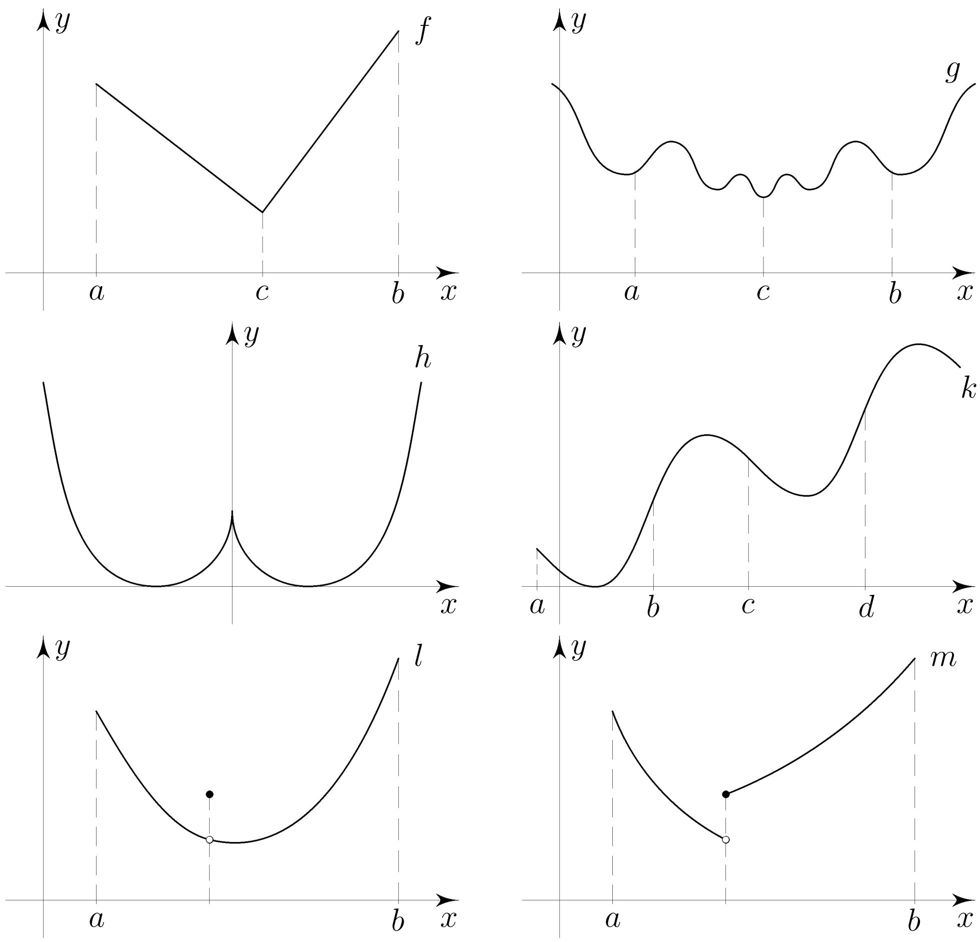
VI.37 Definice (funkce ryze konvexní, resp. konvexní, na otevřeném intervalu — geometrická). Říkáme, že funkce f je *ryze konvexní*, resp. *konvexní, na intervalu* (a, b), jestliže všechny body $[x, f(x)]$ grafu $\mathsf{G}(f)$, pro které platí $a < x_1 < x < x_2 < b$, leží pod přímkou procházející body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$, resp. pod přímkou procházející body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ nebo na ní.

Zřejmě platí tato věta:

VI.38 Věta. *Funkce f je ryze konkávní, resp. konkávní, na intervalu (a, b), právě když funkce $-f$ je ryze konvexní, resp. konvexní, na tomto intervalu.*

Příklady.

a) Grafy některých funkcí, zajímavých z hlediska jejich konvexity:



Obr. 6.26

Funkce f je konvexní na intervalu (a, b), ale nikoli ryze. Funkce g je ryze konvexní v bodě c, ale není konvexní na intervalu (a, b). Funkce h je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$, ale není ryze konvexní na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Funkce k je ryze konvexní na intervalech (a, b) a (c, d), ale není ryze konvexní na sjednocení těchto intervalů. Funkce l a m nejsou konvexní na intervalu (a, b).

b) Lineární funkce $f(x) = ax+b$, $a \neq 0$, je konvexní i konkávní v každém bodě, neboť její graf — přímka — je sama sobě tečnou. Není však ani ryze konvexní ani ryze konkávní v žádném bodě.

Při vyšetřování průběhu funkce je důležité určit intervaly, na kterých je funkce ryze konvexní, resp. ryze konkávní, tzv. intervaly ryzí konvexity, resp. ryzí konkavity, funkce. Při něm se užívá následující věta.

VI.39 Věta (o ryzí konvexitě, resp. ryzí konkavitě, funkce na otevřeném intervalu). *Nechť funkce f má 2. derivaci na intervalu (a,b). Je-li $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$, pro všechny body $x \in (a,b)$, pak je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu (a,b).*

VI.40 Příklad. Určeme (nejdelší) intervaly ryzí konvexity a (nejdelší) intervaly ryzí konkavity funkce $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$.

$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x,\ x \in \mathbf{R}$,

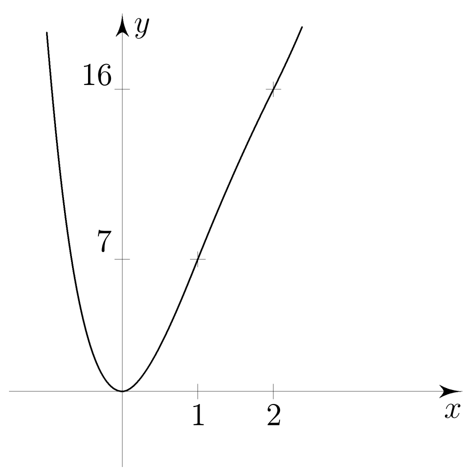
$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24,\ x \in \mathbf{R}$.

Rozložíme derivaci f'' v součin kořenových činitelů

$$12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$

a řešíme nerovnice $12(x-1)(x-2) > 0$ a $12(x-1)(x-2) < 0$. Zjistíme, že $f''(x) > 0$ pro $x < 1$ nebo $x > 2$ a $f''(x) < 0$ pro $1 < x < 2$. Tedy podle věty 6.39 je funkce f ryze konvexní na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(2, +\infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(1, 2)$. Získané poznatky můžeme shrnout do tabulky, v níž symbol $\cup$, resp. $\cap$, značí „je ryze konvexní“, resp. „je ryze konkávní“.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	7	$\cap$	16	$\cup$



Obr. 6.27: Graf funkce $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$

Intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní, — zvané intervaly konvexity, resp. konkavity — určujeme podle následující věty.

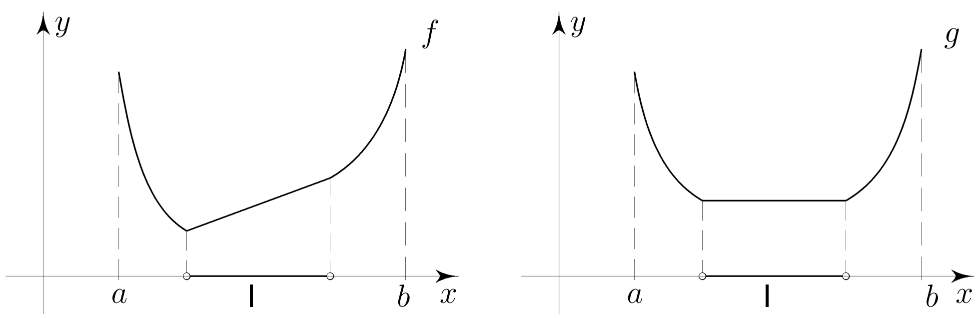
VI.41 Věta (o konvexitě, resp. konkavitě, funkce na otevřeném intervalu). *Nechť funkce f má druhou derivaci na intervalu (a, b). Potom platí:*

1. *Funkce f je konvexní, resp. konkávní, na intervalu (a, b), právě když pro všechny body $x \in (a, b)$ je $f''(x) \geq 0$, resp. $f''(x) \leq 0$.*

2. *Funkce f je ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu (a, b), právě když pro všechny body $x \in (a, b)$ je $f''(x) \geq 0$, resp. $f''(x) \leq 0$, a její druhá derivace není nulová na žádném otevřeném intervalu, obsaženém v intervalu (a, b).*

Poznámka. Je-li derivace f'' nulová na otevřeném intervalu I, obsaženém v intervalu (a, b), pak derivace f' je konstantní na intervalu I, funkce f je lineární na intervalu I a graf $\mathsf{G}(f)$ na intervalu I představuje úsečku. V tomto případě funkce f není ani ryze konvexní, ani ryze konkávní na intervalu (a, b).

Tvrzení 1 věty 6.41 tedy zahrnuje i případy, kdy graf $\mathsf{G}(f)$ obsahuje úsečku či několik úseček.

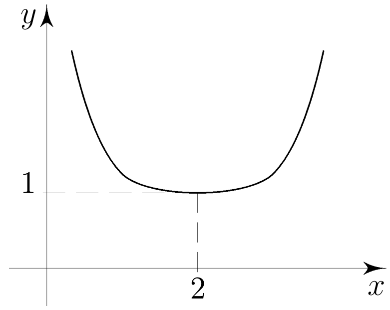


Obr. 6.28

Funkce f a g, jejichž grafy jsou na obr. 6.28, jsou konvexní na intervalu (a, b). Přitom derivace f'' i g'' jsou nulové na otevřeném intervalu $\mathsf{I} \subset (a, b)$. Grafy obou funkcí na intervalu I představují úsečku; u grafu $\mathsf{G}(g)$ je tato úsečka rovnoběžná s osou x.

Tvrzení 2 věty 6.41 je ekvivalentní tvrzení, že funkce f je ryze konvexní nebo ryze konkávní na intervalu (a, b), právě když množina všech bodů intervalu (a, b), ve kterých je derivace f'' nulová, je izolovaná nebo prázdná.

Příklad. Funkce $h(x) = (x - 2)^4 + 1$, jejíž graf je na obr. 6.29, je ryze konvexní na intervalu $(-\infty, \infty)$, a přitom $h''(2) = 0$.



Obr. 6.29: Graf funkce $h(x) = (x-2)^4 + 1$

VI.42 Postup při určování (nejdelších) intervalů ryzí konvexity, resp. ryzí konkavity, funkce f, obsažených v množině $\mathsf{D}(f'')$. Vypočteme druhou derivaci funkce f, řešíme nerovnici $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$, $x \in \mathsf{D}(f'')$, a užijeme větu 6.39 nebo 6.41.

Inflexe funkce a inflexní body grafu funkce

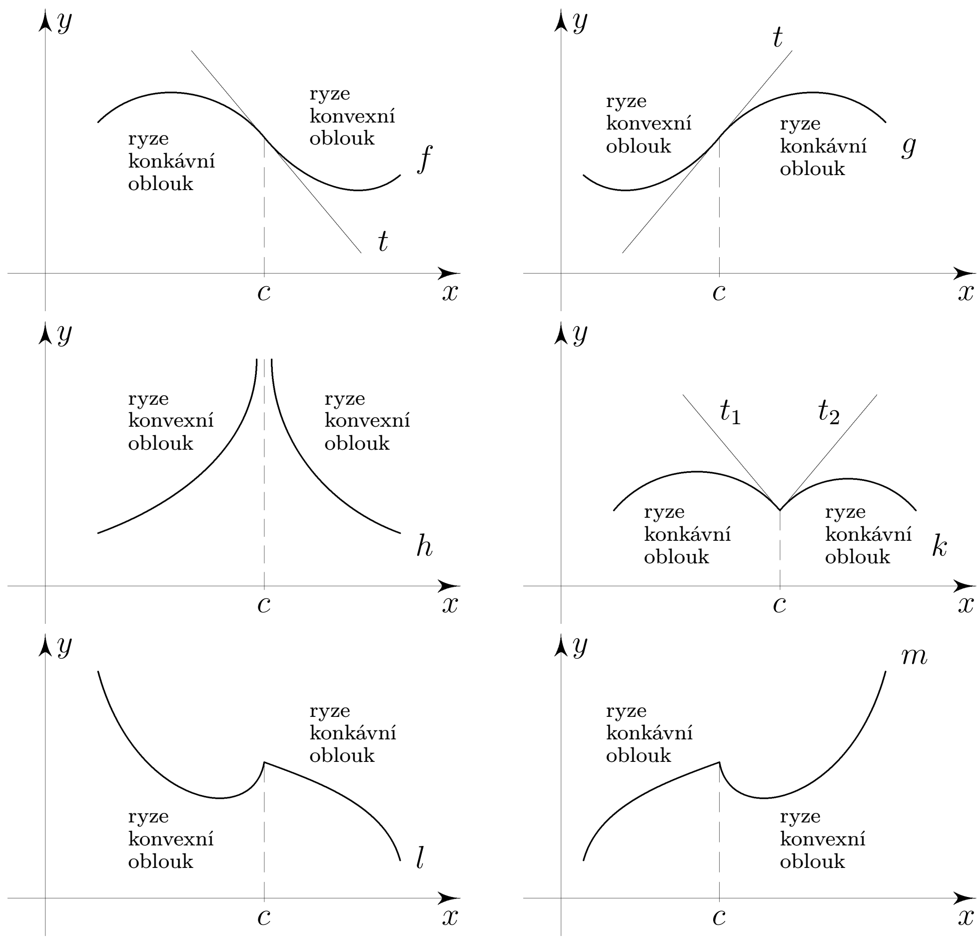
V odstavcích o extrémech funkcí jsme zjistili, jak jsou důležité body, které oddělují intervaly, na nichž je funkce rostoucí od intervalů, na nichž je funkce klesající, tj. body, v nichž má funkce ostré lokální extrémy.

Stejně důležité jsou i body, které oddělují intervaly, na nichž je funkce ryze konvexní, od intervalů, na nichž je funkce ryze konkávní, tj. body, ve kterých má funkce inflexi. Doslovný překlad termínu inflexe — ohyb — napovídá, že pojem inflexe souvisí s prohýbáním grafu funkce.

VI.43 Definice. Nechť funkce f je spojitá v bodě c a má 1. derivaci v bodě c (vlastní či nevlastní). Říkáme, že funkce f má *inflexi v bodě* c, existuje-li levé redukované okolí bodu c takové, že funkce f je na něm ryze konvexní, resp. ryze konkávní, a pravé redukované okolí bodu c takové, že funkce f je na něm ryze konkávní, resp. ryze konvexní.

Bod $[c, f(c)]$ nazýváme *inflexním bodem* grafu $\mathsf{G}(f)$ a tečnu grafu $\mathsf{G}(f)$ v inflexním bodě nazýváme *inflexní tečnou* grafu $\mathsf{G}(f)$.

Geometrická interpretace. Je-li funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu (a, b), pak oblouk grafu $\mathsf{G}(f)$ s krajními body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$, k němu nepatřícími, nazýváme ryze konvexním, resp. ryze konkávním, obloukem grafu funkce f na intervalu (a, b). Funkce f má inflexi v bodě c, jestliže její graf má tečnu v bodě $[c, f(c)]$, která není rovnoběžná s osou y, a přechází (prohýbá se) ryze konvexním obloukem z polohy nad tečnou, resp. ryze konkávním obloukem z polohy pod tečnou, do ryze konkávního oblouku v poloze pod tečnou, resp. do ryze konvexního oblouku v poloze nad tečnou, nebo jestliže její graf má tečnu v bodě $[c, f(c)]$, která je rovnoběžná s osou y. Stručně řečeno — inflexní bod odděluje ryze konvexní oblouk grafu $\mathsf{G}(f)$ od jejího ryze konkávního oblouku nebo naopak.



Obr. 6.30

Funkce f a g mají inflexi v bodě c, funkce h, k, l a m nemají inflexi v bodě c.

VI.44 Poznámky.

1. Na příkladě ukážeme, že funkce může mít inflexi i v bodě, ve kterém je její 1. derivace nevlastní. Funkce $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $x \in \mathbf{R}$, má inflexi v bodě 1.

S využitím výsledku příkladu 5.10b dostaneme

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} & \text{pro } x \in \mathbf{R} \setminus \{1\} \\ +\infty & \text{pro } x = 1 \end{cases}$$

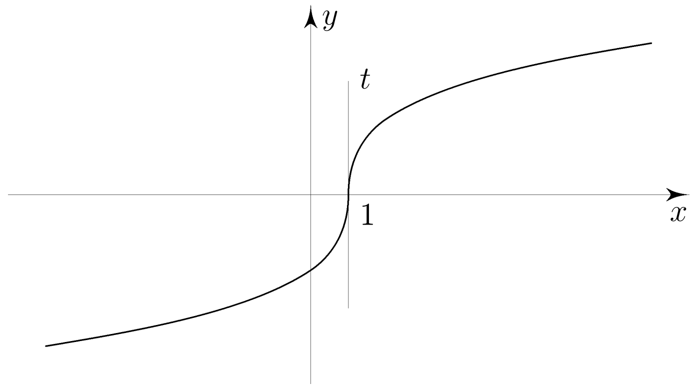
$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}} \quad \text{pro } x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}.$$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f''	$+$	$\neg\exists$	$-$
f	$\cup$	0	$\cap$

inflexe

Tedy podle definice 6.43 má funkce f inflexi v bodě 1, přičemž $f'(1) = +\infty$.

Inflexní tečna t grafu $\mathsf{G}(f)$ je rovnoběžná s osou y. To platí obecně pro každou inflexní tečnu v bodě $[c, f(c)]$ takovém, že 1. derivace $f'(c)$ je nevlastní.



Obr. 6.31: Graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

2. Existence 1. derivace funkce, byť i nevlastní, v bodě, ve kterém hledáme inflexi, je důležitá. Funkce f může být spojitá na intervalu (a, b), její 2. derivace může být kladná na intervalu (a, c) a záporná na intervalu (c, b), $c \in (a, b)$, a přesto funkce f nemusí mít inflexi v bodě c.

Nechť např.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x < 0, \\ \sqrt{x} & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na množině $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x < 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

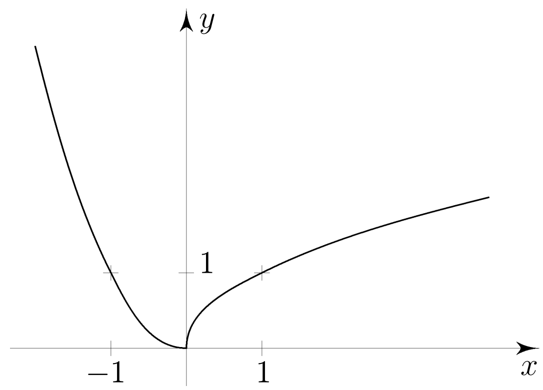
Derivace $f'(0)$ neexistuje, neboť

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{a} \quad f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} 2x = 0.$$

(Viz poznámku za příkladem 5.47.)

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x < 0, \\ -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Funkce f je ryze konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$ a ryze konkávní na intervalu $(0, +\infty)$, ale nemá inflexi v bodě 0, protože nesplňuje podmínku existence derivace $f'(0)$. (Bod $[0, 0]$ odděluje ryze konvexní oblouk grafu $\mathsf{G}(f)$ od jejího ryze konkávního oblouku, ale není inflexním bodem grafu $\mathsf{G}(f)$, protože graf $\mathsf{G}(f)$ v něm nemá tečnu.)



Obr. 6.32: Graf funkce $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$

Obdobně jako v oddílu, pojednávajícím o lokálním extrému funkce, kde jsme vyslovili věty, týkající se podmínek existence lokálního extrému funkce, vyslovíme v tomto oddílu věty, týkající se podmínek existence inflexe funkce.

VI.45 Věta (Nutná podmínka pro existenci inflexe). *Má-li funkce f inflexi v bodě c a existuje-li druhá derivace $f''(c)$, pak $f''(c) = 0$.*

Důsledek. *Je-li $f''(c) \neq 0$, pak funkce f nemá inflexi v bodě c.*

Poznámka. Podmínka $f''(c) = 0$ ovšem není postačující podmínkou pro existenci inflexe funkce f v bodě c. (Viz příklad 6.33.)

Na základě věty 6.45 hledáme inflexi funkce f v bodech množiny $\mathsf{D}(f'')$, které jsou reálnými kořeny rovnice $f''(x) = 0$. Avšak ne ve všech těchto bodech musí mít funkce f inflexi (stejně jako ne ve všech stacionárních bodech funkce f musí mít lokální extrém).

Obdobou věty 6.16, použitelné při vyšetřování existence ostrého lokálního extrému funkce v jejím stacionárním bodě, je věta 6.46, umožňující rozhodnout o existenci inflexe funkce v bodě, ve kterém je její 2. derivace rovna číslu 0.

VI.46 Věta (1. postačující podmínka pro existenci inflexe). *Nechť funkce f má druhou derivaci v bodě c a platí $f''(c) = 0$. Je-li $f'''(c) \neq 0$, pak má funkce f inflexi v bodě c.*

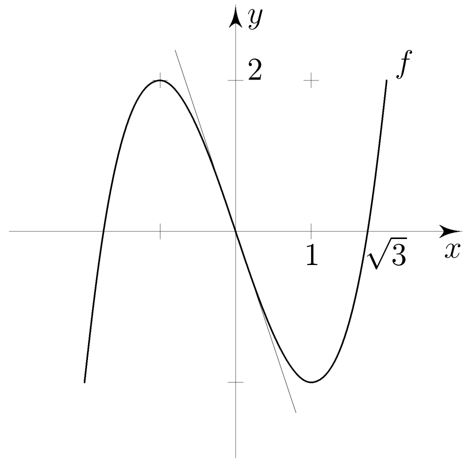
VI.47 Příklad. Vyšetřeme inflexi funkce $f(x) = x^3 - 3x$.

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$. Vypočteme derivace

$f'(x) = 3x^2 - 3,\ x \in \mathbf{R}$,

$f''(x) = 6x,\ x \in \mathbf{R}$.

Jediným reálným kořenem rovnice $f''(x) = 0$ je číslo $x_1 = 0$. Funkce f by tedy mohla mít inflexi v bodě 0. Vypočteme derivaci $f'''(x) = 6$, $x \in \mathbf{R}$. Protože $f'''(0) = 6 \neq 0$, podle věty 6.46 má funkce f inflexi v bodě 0. Inflexní tečna grafu $\mathsf{G}(f)$ v inflexním bodě $[0, 0]$ má rovnici $y = -3x$, neboť $f'(0) = -3$ a $f(0) = 0$.



Obr. 6.33: Graf funkce $f(x) = x^3 - 3x$

Může se však stát, že nejen 2. derivace f'' v bodě c je rovna 0, ale i 3. derivace f''' v bodě c je rovna 0. V tom případě použijeme větu 6.48, zobecňující větu 6.46 a zároveň větu 6.32.

VI.48 Věta (zobecněná postačující podmínka pro existenci inflexe). *Nechť funkce f má v bodě c derivace až do n-tého řádu včetně, $n \in \mathbf{N}$, přičemž $f^{(m)}(c) = 0$ pro všechna čísla $1 < m < n$, $m \in \mathbf{N}$, a $f^{(n)}(c) \neq 0$. Potom platí:*

Je-li n liché, má funkce f inflexi v bodě c.

Je-li n sudé, je funkce f v bodě c ryze konvexní pro $f^{(n)}(c) > 0$ a ryze konkávní pro $f^{(n)}(c) < 0$.

VI.49 Příklad. Najděme body, ve kterých má funkce $f(x) = -x^5 + 2$ inflexi.

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$. Vypočteme derivace

$f'(x) = -5x^4,\ x \in \mathbf{R}$,

$f''(x) = -20x^3,\ x \in \mathbf{R}$.

Vyřešíme rovnici $-20x^3 = 0$: $x_1 = 0$. V bodě 0 by funkce f mohla mít inflexi.

Vypočteme derivaci

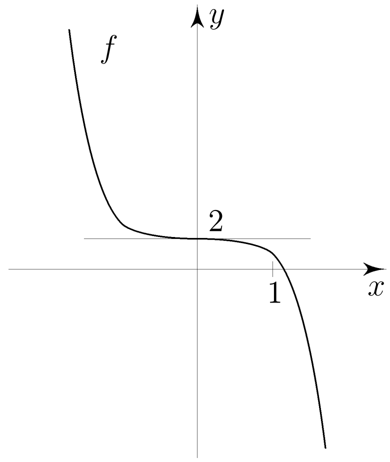
$f'''(x) = -60x^2,\ x \in \mathbf{R}$,

a její hodnotu $f'''(0) = 0$. Protože $f'''(0) = 0$, vypočteme derivace dalších řádů funkce f a jejich hodnoty v bodě 0.

$f^{(4)}(x) = -120x$, $x \in \mathbf{R}$, $f^{(4)}(0) = 0$,

$f^{(5)}(x) = -120$, $x \in \mathbf{R}$, $f^{(5)}(0) = -120 \neq 0$.

Nejnižší řád nenulové derivace funkce f v bodě 0 je 5, což je liché číslo. Podle věty 6.48 má funkce f inflexi v bodě 0. Inflexní tečna t grafu $\mathsf{G}(f)$ v inflexním bodě $[0, 2]$ je rovnoběžná s osou x, neboť $f'(0) = 0$ a $f(0) = 2$; rovnice inflexní tečny $t : y = 2$.



Obr. 6.34: Graf funkce $f(x) = -x^5 + 2$

Poznámka. Pokud nevyšetřujeme pouze inflexi funkce, zpravidla nepočítáme její derivace vyššího řádu než druhého a inflexi funkce určujeme podle znaménka 2. derivace funkce, tedy na základě znalosti intervalů ryzí konvexity a ryzí konkavity funkce. Jednoduché kritérium pro existenci inflexe funkce, mající určité vlastnosti, vyplývá z definice 6.43.

VI.50 Věta (2. postačující podmínka pro existenci inflexe). *Nechť funkce f má 1. derivaci spojitou v bodě c a 2. derivaci na jistém redukovaném okolí $\mathsf{U}^*(c, \delta)$. Pak platí:*

Je-li $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$, pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*_-(c, \delta)$ a $f''(x) < 0$, resp. $f''(x) > 0$, pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*_+(c, \delta)$, pak má funkce f inflexi v bodě c.

Je-li $f''(x) > 0$ pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*(c, \delta)$ nebo $f''(x) < 0$ pro všechny body $x \in \mathsf{U}^*(c, \delta)$, pak funkce f nemá inflexi v bodě c.

(Stručně: Mění-li derivace f'' v bodě c znaménko, má funkce f inflexi v bodě c. Nemění-li derivace f'' v bodě c znaménko, nemá funkce f inflexi v bodě c.)

VI.51 Příklad. Najděme inflexní body funkce $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$ a určeme rovnice inflexních tečen.

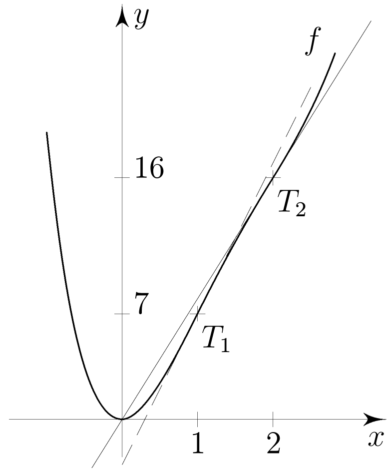
Řešení: Postupujeme stejně jako při řešení příkladu 6.40 a dospějeme k tabulce

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	7	$\cap$	16	$\cup$
		inflexe		inflexe	

Derivace f'' mění znaménko v bodech 1 a 2, proto podle věty 6.50 má funkce f inflexi v těchto bodech. Inflexní body grafu $\mathsf{G}(f)$ jsou $T_1 = [1, 7]$ a $T_2 = [2, 16]$.

Rovnice inflexních tečen určíme takto: Víme, že $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x$. Vypočteme $f'(1) = 10$ a $f'(2) = 8$. Potom $t_1 : y - 7 = 10(x - 1)$ a $t_2 : y - 16 = 8(x - 2)$.

Rovnice inflexních tečen jsou $t_1 : y = 10x - 3$ a $t_2 : y = 8x$. Graf funkce $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$ s inflexními body T_1, T_2 a inflexními tečnami t_1, t_2 je na obr. 6.35.



Obr. 6.35: Graf funkce $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$

Podobně jako v případě lokálních extrémů funkce můžeme rozlišit dvě skupiny bodů, ve kterých by funkce mohla mít inflexi, tzv. *bodů podezřelých z inflexe funkce:*

(A) Vnitřní body definičního oboru funkce, ve kterých existuje 2. derivace funkce a je rovna číslu 0.

(B) Vnitřní body definičního oboru funkce, ve kterých neexistuje 2. derivace funkce a přitom existuje 1. derivace funkce a funkce je spojitá.

O existenci inflexe funkce v bodech skupiny (B) zpravidla rozhodujeme na základě definice 6.43.

VI.52 Příklad. Vyšetřeme inflexi funkce

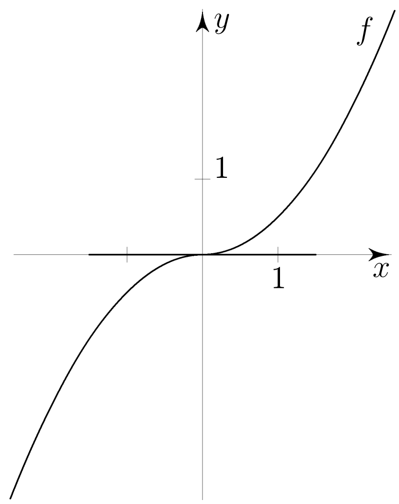
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{pro } x < 0, \\ \frac{x^2}{2} & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Řešení: Vypočteme 1. a 2. derivaci funkce f.

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \geq 0. \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

(derivace $f''(0)$ neexistuje, protože $f''_+(0) = 1$ a $f''_-(0) = -1$).

Funkce f je ryze konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$, neboť $f''(x) < 0$ na tomto intervalu, a ryze konvexní na intervalu $(0, +\infty)$, neboť $f''(x) > 0$ na tomto intervalu. Tedy funkce f má inflexi v bodě 0. Inflexní tečna t grafu $\mathsf{G}(f)$ v inflexním bodě $[0, 0]$ je totožná s osou x, neboť $f'(0) = f(0) = 0$.



Obr. 6.36: Graf funkce $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{pro } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$

VI.53 Postup při vyšetřování inflexe funkce f.

1. Vyhledáme všechny body podezřelé z inflexe funkce f, tj.

   (A) vnitřní body definičního oboru $\mathsf{D}(f)$, v nichž je *druhá* derivace f'' rovna číslu 0,

   (B) vnitřní body definičního oboru $\mathsf{D}(f)$, v nichž *druhá* derivace f'' neexistuje a přitom existuje derivace f' a funkce f je spojitá.

2. Rozhodneme o existenci inflexe funkce f v bodech skupiny (A) podle některé z vět 6.46, 6.48 a 6.50 nebo na základě definice 6.43 a v bodech skupiny (B) na základě definice 6.43. Volba vět, které užijeme, závisí na konkrétní funkci, případně na tom, zda se mají či nemají vyšetřovat další vlastnosti funkce.

Asymptoty grafu funkce

Asymptoty grafu funkce jsou přímky, které poskytují důležité informace o průběhu funkce na jednostranných redukovaných okolích jejích bodů nespojitosti, pokud v nich existuje nevlastní jednostranná limita funkce, a na okolích nevlastních bodů, pokud tato okolí patří do definičního oboru funkce. Znalost asymptot grafu funkce nám slouží především při sestrojování grafu funkce.

Rozlišujeme dva typy asymptot grafu funkce:

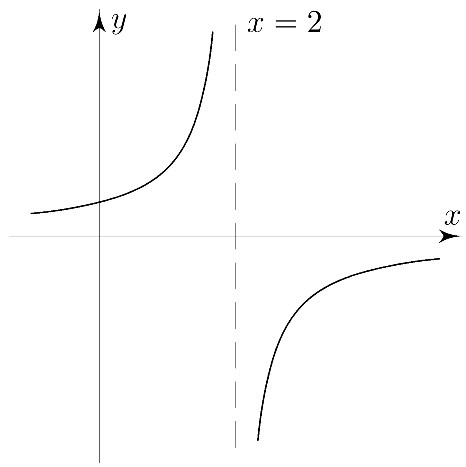
1. asymptoty rovnoběžné s osou y — ty nazýváme asymptotami bez směrnice,

2. asymptoty různoběžné s osou y — ty nazýváme asymptotami se směrnicí.

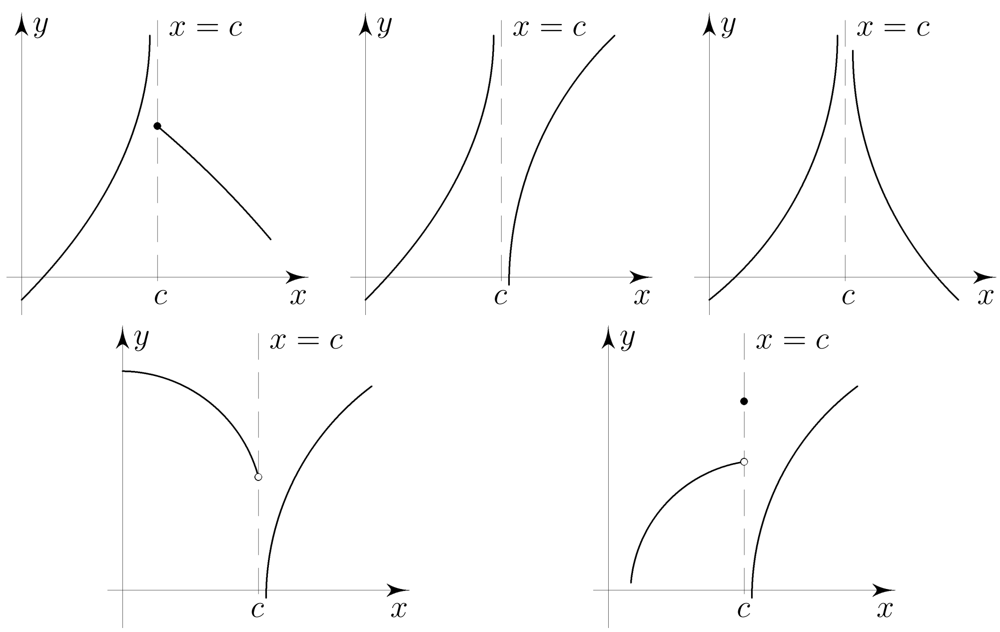
VI.54 Definice (asymptoty bez směrnice). Nechť funkce f je definována aspoň na jednom jednostranném redukovaném okolí bodu c. Přímku $x = c$ nazýváme *asymptotou bez směrnice* nebo *vertikální (svislou) asymptotou* grafu funkce f, má-li funkce f aspoň jednu jednostrannou limitu v bodě c nevlastní.

Existuje-li asymptota bez směrnice $x = c$, říkáme též, že graf $\mathsf{G}(f)$ má asymptotu bez směrnice o rovnici $x = c$.

Příklad. Graf funkce
$$f(x) = -\frac{1}{x-2}$$
má jednu asymptotu bez směrnice, a to asymptotu o rovnici $x = 2$. Existují totiž nevlastní jednostranné limity $\lim\limits_{x\to 2+}\left(-\frac{1}{x-2}\right) = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to 2-}\left(-\frac{1}{x-2}\right) = +\infty$.



Obr. 6.37: Graf funkce $f(x) = -\frac{1}{x-2}$



Obr. 6.38: Grafy funkcí, majících asymptotu o rovnici $x = c$

VI.55 Poznámky.

1. Počet asymptot bez směrnice grafu funkce může být konečný i nekonečný. Např. graf funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ nemá žádnou asymptotu bez směrnice, graf funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má jednu asymptotu bez směrnice a graf funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$ má nekonečně mnoho asymptot bez směrnice.

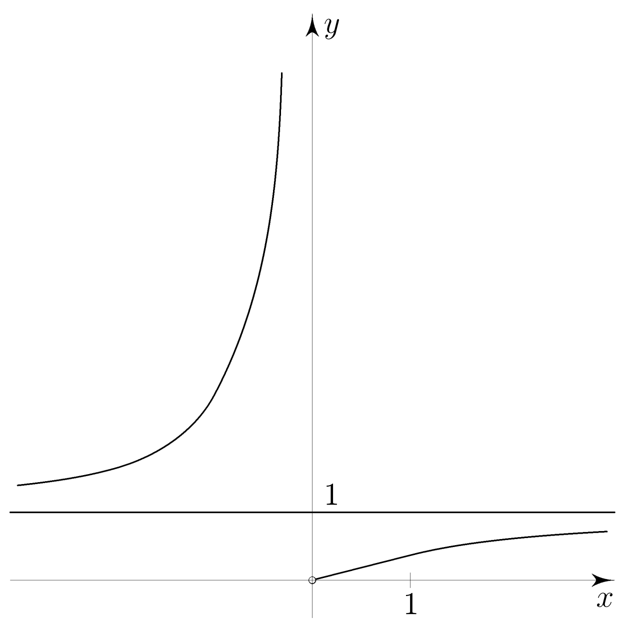
2. Graf $\mathsf{G}(f)$ může mít asymptotu bez směrnice pouze v bodech množiny $\mathsf{D}'(f)$, které jsou body nespojitosti II. druhu funkce f. Tyto body hledáme mezi body množiny $\mathsf{D}'(f)$, ve kterých funkce f není spojitá, a to především mezi body, ve kterých funkce f není definována nebo které jsou hraničním bodem intervalů v nichž je funkce f zadána různými matematickými výrazy. O tom, zda tyto body jsou skutečně body nespojitosti II. druhu funkce f, se ovšem musíme přesvědčit výpočtem jednostranných limit funkce f v těchto bodech.

VI.56 Příklad. Určeme rovnice asymptot bez směrnice grafu funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ (pokud existují).

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, takže bod 0 je jediný hromadný bod množiny $\mathsf{D}(f)$, ve kterém funkce f není spojitá.

$$\lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to 0-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Protože aspoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě 0 je nevlastní, bod 0 je bod nespojitosti II. druhu funkce f a $x = 0$ je rovnice asymptoty bez směrnice grafu $\mathsf{G}(f)$. (Přímka $y = 1$ je horizontální asymptota grafu $\mathsf{G}(f)$, o tom dále.)



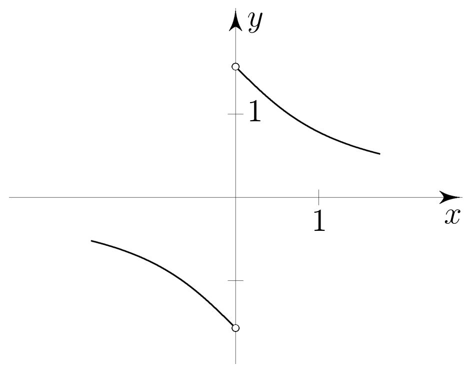
Obr. 6.39: Graf funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

VI.57 Příklad. Zjistěme, zda graf funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ má asymptoty bez směrnice.

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, takže 0 je jediný hromadný bod množiny $\mathsf{D}(f)$, ve kterém funkce f není spojitá.

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 0-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Protože ani jedna z jednostranných limit funkce f v bodě 0 není nevlastní, bod 0 není bod nespojitosti II. druhu funkce f. Tedy graf $\mathsf{G}(f)$ nemá žádnou asymptotu bez směrnice.



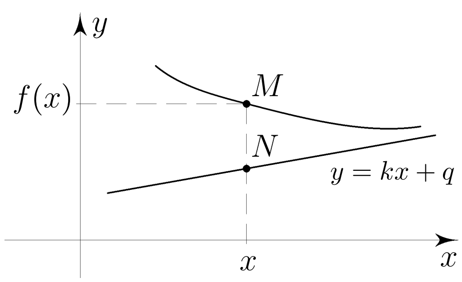
Obr. 6.40: Graf funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

VI.58 Definice (asymptoty se směrnicí). Nechť funkce f je definována na okolí jednoho nebo na okolích obou nevlastních bodů. Přímku $y = kx + q$ nazýváme *asymptotou se směrnicí (šikmou asymptotou)* grafu funkce f, jestliže platí

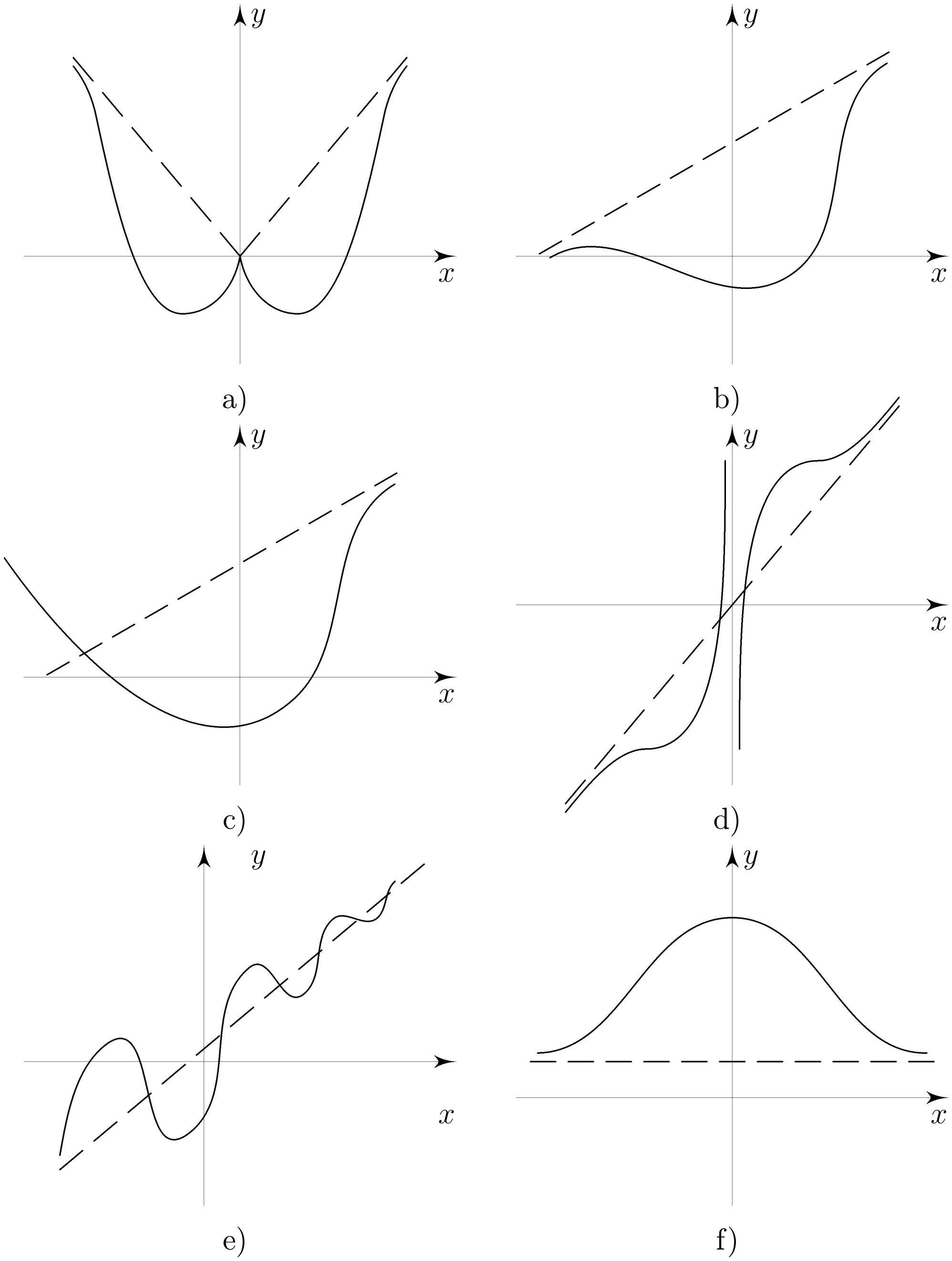
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Existuje-li asymptota se směrnicí grafu $\mathsf{G}(f)$ o rovnici $y = kx + q$, říkáme též, že *graf* $\mathsf{G}(f)$ *má asymptotu se směrnicí o rovnici* $y = kx + q$.

Poznámka. Rovnost $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+q)] = 0$, resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(kx+q)] = 0$, znamená toto: Pohybuje-li se bod $M = [x, f(x)]$ po grafu $\mathsf{G}(f)$ tak, že $x \to +\infty$, resp. $x \to -\infty$, pak délka úsečky MN, kde $N = [x, kx+q]$, a tím spíše vzdálenost bodu M od přímky o rovnici $y = kx + q$, se blíží k 0.



Obr. 6.41: Asymptota se směrnicí



Obr. 6.42: Grafy funkcí s asymptotami se směrnicí

VI.59 Poznámky.

1. Graf funkce může mít nanejvýš 2 asymptoty se směrnicí — jednu v nevlastním bodě $+\infty$ a druhou v nevlastním bodě $-\infty$.

2. Případy, kdy tatáž přímka je asymptotou grafu funkce jak v nevlastním bodě $+\infty$, tak v nevlastním bodě $-\infty$, nejsou ojedinělé (viz obr. 6.42b, d, f).

3. Asymptota se směrnicí grafu funkce může protnout graf funkce v konečném i nekonečném počtu bodů (např. na obr. 6.42c jej protíná v jednom bodě, na obr.

6.42d ve dvou bodech, na obr. 6.42e, kde graf funkce osciluje kolem své asymptoty, v nekonečně mnoha bodech).

4. Z definice 6.58 vyplývá, že graf $\mathsf{G}(f)$ má ve speciálním případě asymptotu o rovnici $y = q$, tzv. *horizontální* asymptotu, právě když existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = q$, resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = q$ (viz obr. 6.42f a příklad 6.56).

Rovnici asymptoty se směrnicí grafu $\mathsf{G}(f)$ určíme podle této věty:

VI.60 Věta (o rovnici asymptoty se směrnicí). *Přímka o rovnici $y = kx+q$ je asymptotou se směrnicí grafu $\mathsf{G}(f)$, a to asymptotou v nevlastním bodě $+\infty$, resp. $-\infty$, právě když existují vlastní limity*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = q,$$

resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = q$.

Poznámka. Pokud některá z limit ve větě 6.60 je nevlastní nebo neexistuje, nemá graf $\mathsf{G}(f)$ asymptotu v příslušném nevlastním bodě.

VI.61 Příklad. Určeme rovnice asymptot grafu funkce $f(x) = x - \dfrac{1}{2x^2}$.

Řešení: $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Bod 0 je jediný hromadný bod množiny $\mathsf{D}(f)$, ve kterém funkce f není spojitá.

$$\lim_{x\to0+} \left(x - \frac{1}{2x^2}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to0-} \left(x - \frac{1}{2x^2}\right) = -\infty.$$

Bod 0 je bod nespojitosti II. druhu funkce f, a tedy přímka o rovnici $x = 0$ je asymptota bez směrnice grafu $\mathsf{G}(f)$.

Asymptoty se směrnicí (pokud existují) určíme podle věty 6.60.

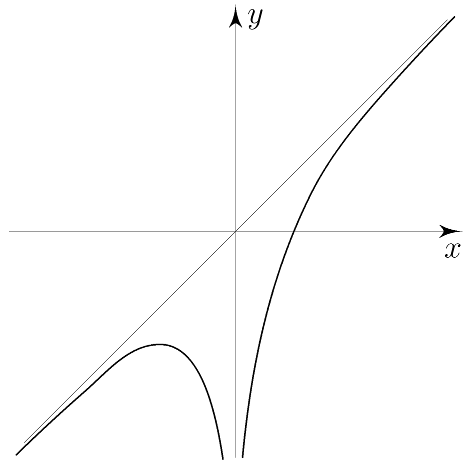
Čísla k a q vypočteme podle vzorců

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \frac{1}{2x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2x^3}\right) = 1,$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{2x^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = 0,$$

a tedy asymptota grafu $\mathsf{G}(f)$ v nevlastním bodě $+\infty$ má rovnici $y = x$.

Protože $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$, má asymptota grafu $\mathsf{G}(f)$ v nevlastním bodě $-\infty$ rovněž rovnici $y = x$.

Graf funkce f má tedy 2 asymptoty — asymptotu bez směrnice o rovnici $x = 0$ a asymptotu se směrnicí o rovnici $y = x$.



Obr. 6.43: Graf funkce $f(x) = x - \frac{1}{2x^2}$

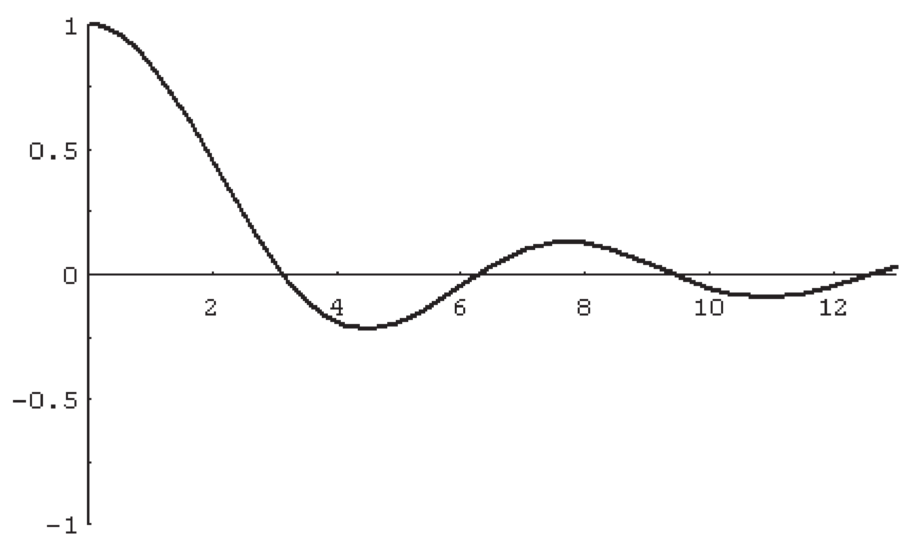
VI.62 Příklad. Určeme rovnici asymptoty se směrnicí grafu funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Řešení: Čísla k a q vypočteme podle vzorců ve větě 6.60.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0,$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

V nevlastním bodě $+\infty$ má graf $\mathsf{G}(f)$ horizontální asymptotu, jejíž rovnice je $y = 0$. Graf $\mathsf{G}(f)$ osciluje kolem osy x, protíná tedy asymptotu v nekonečně mnoha bodech. (Asymptotu bez směrnice graf $\mathsf{G}(f)$ nemá.)



Obr. 6.44: Graf funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

VI.63 Příklad. Určeme rovnice asymptot grafu funkce $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f)=(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty)$. Funkce f nemá body nespojitosti, a proto graf $\mathsf{G}(f)$ nemá asymptoty bez směrnice.

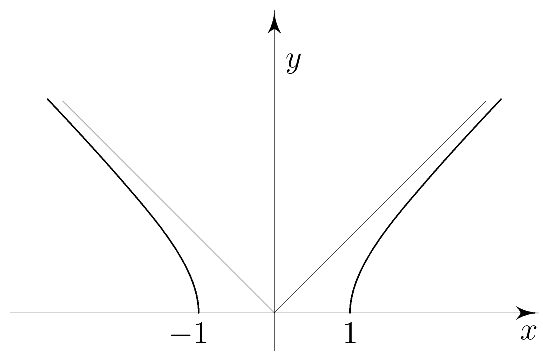
$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1,\\
q &= \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1}=0,
\end{aligned}$$

a tedy asymptota grafu $\mathsf{G}(f)$ v nevlastním bodě $+\infty$ má rovnici $y=x$.

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=-1,\\
q &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-1}=0,
\end{aligned}$$

a tedy asymptota grafu $\mathsf{G}(f)$ v nevlastním bodě $-\infty$ má rovnici $y=-x$.

Graf $\mathsf{G}(f)$ má 2 asymptoty se směrnicí: asymptotu v nevlastním bodě $+\infty$ o rovnici $y=x$ a asymptotu v nevlastním bodě $-\infty$ o rovnici $y=-x$.



Obr. 6.45: Graf funkce $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

VI.64 Příklad. Určeme rovnice asymptot grafu funkce $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+3}{2x^2}$.

Řešení: Zřejmě je $\mathsf{D}(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, takže bod 0 je jediný hromadný bod množiny $\mathsf{D}(f)$, ve kterém funkce f není spojitá.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0+}\frac{x^3-2x^2+3}{2x^2}&=\lim_{x\to0+}\left(\frac{x}{2}-1+\frac{3}{2x^2}\right)=+\infty,\\
\lim_{x\to0-}\frac{x^3-2x^2+3}{2x^2}&=\lim_{x\to0-}\left(\frac{x}{2}-1+\frac{3}{2x^2}\right)=+\infty.
\end{aligned}$$

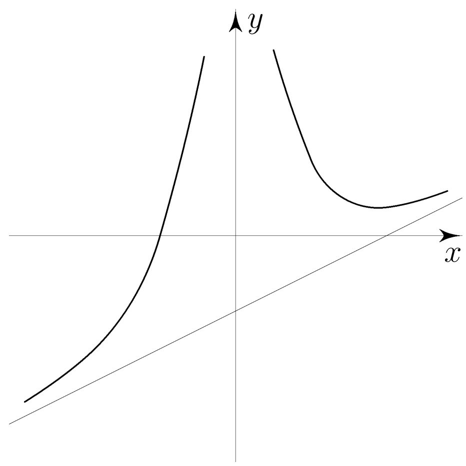
Graf $\mathsf{G}(f)$ má asymptotu bez směrnice o rovnici $x = 0$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^3} = \frac{1}{2},$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2 + 3}{2x^2} = -1.$$

Graf $\mathsf{G}(f)$ má asymptotu v nevlastním bodě $+\infty$ o rovnici $y = \frac{1}{2}\,x - 1$.

Protože $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$, graf $\mathsf{G}(f)$ má asymptotu v nevlastním bodě $-\infty$ totožnou s asymptotou grafu $\mathsf{G}(f)$ v nevlastním bodě $+\infty$.

Graf $\mathsf{G}(f)$ má 2 asymptoty: asymptotu bez směrnice o rovnici $x = 0$ a asymptotu se směrnicí o rovnici $y = \frac{1}{2}\,x - 1$.



Obr. 6.46: Graf funkce $f(x) = \frac{x^3-2x^2+3}{2x^2}$

VI.65 Postup při určování rovnic asymptot grafu funkce f. Najdeme body nespojitosti funkce f, vypočteme jednostranné limity funkce f v těchto bodech a rovnice asymptot bez směrnice grafu funkce f určíme na základě definice 6.54. Rovnice asymptot se směrnicí grafu funkce f určíme na základě věty 6.60.

Průběh funkce

V tomto oddílu využijeme téměř všechny poznatky až dosud získané. Průběh funkce není přesně vymezeným pojmem. Vyšetřováním průběhu funkce budeme rozumět získávání souhrnu informací o vlastnostech funkce, postačujícího k bezchybnému sestrojení grafu funkce. Domluvíme se nyní na tom, které informace do tohoto souhrnu zařadíme. Tento souhrn bude maximální v tom smyslu, že u některých funkcí budeme muset zjišťovat všechny informace a u jiných jen některé z nich (např. u funkcí s omezeným definičním oborem odpadá výpočet limit funkce v nevlastních bodech).

VI.66 Postup při vyšetřování průběhu funkce.

1. Určíme definiční obor funkce, zjistíme, zda je funkce sudá nebo lichá nebo periodická, určíme intervaly, na kterých je kladná či záporná, body, ve kterých je nulová, tj. průsečíky jejího grafu s osou x, a průsečíky jejího grafu s osou y.
2. Vyšetříme spojitost funkce, určíme body nespojitosti funkce a jejich typ, což zahrnuje výpočet jednostranných limit funkce v jejích bodech nespojitosti, určíme rovnice asymptot bez směrnice jejího grafu a vypočteme limity funkce v krajních bodech intervalů, na které je rozdělen její definiční obor, případně v nevlastních bodech.
3. Vypočteme 1. derivaci funkce, určíme definiční obor této derivace, intervaly ryzí monotónnosti funkce, body, ve kterých má funkce ostré lokální extrémy, a ostré lokální extrémy funkce v těchto bodech.
4. Vypočteme 2. derivaci funkce, určíme definiční obor této derivace, intervaly ryzí konvexity či ryzí konkavity funkce, body, ve kterých má funkce inflexi, a inflexní body grafu funkce.
5. Určíme rovnice asymptot se směrnicí grafu funkce.
6. Zjistíme dodatečné údaje podle potřeby:
   — určíme směrnice inflexních tečen, event. souřadnice dalších bodů grafu funkce (údaje slouží k upřesnění grafu funkce).
   — zjistíme, zda je funkce omezená, určíme globální extrémy a body, v nichž těchto extrémů funkce nabývá.
   — najdeme intervaly, na kterých je funkce konstantní či lineární aj.
7. Sestrojíme graf funkce.

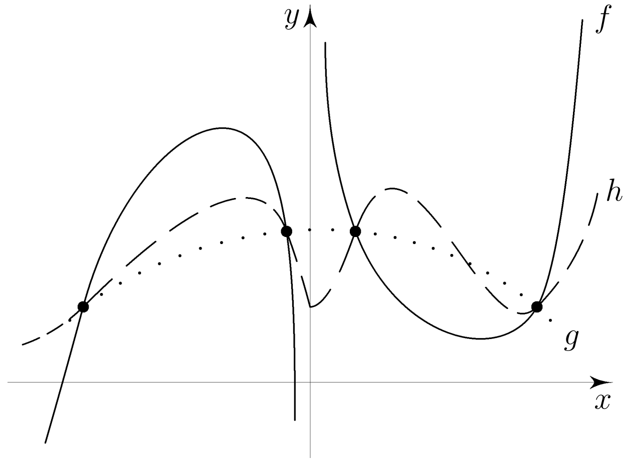
Postup 6.66 není závazným předpisem, je pouze systematickým návodem k tomu, jak získat názornou představu o průběhu funkce. Při řešení příkladů budeme však tento postup dodržovat.

Již dříve jsme kreslili grafy funkcí (především základních elementárních a některých elementárních), a to tak, že jsme vypočítali funkční hodnoty v několika zvolených bodech, zakreslili příslušné body grafu funkce v rovině $\mathbf{R}^2$ a spojili je souvislou čarou. Měli jsme však předem jasnou představu o podobě grafu. Při takovémto jednoduchém sestrojování grafů funkcí, zejména složitějších, o jejichž průběhu toho moc nevíme, může ovšem dojít k závažným omylům.

Příklad. Známe 4 body grafu $\mathsf{G}(f)$. Sestrojme tento graf.

Řešení: Viz obr. 6.47. Skutečný graf $\mathsf{G}(f)$ s jejími 4 danými body je zakreslen plnou čarou. Tečkovaně, resp. čárkovaně, je zakreslen graf $\mathsf{G}(g)$, resp. $\mathsf{G}(h)$, který také prochází danými 4 body, ale je zcela odlišný od grafu $\mathsf{G}(f)$. Přitom sestrojení tohoto domnělého grafu $\mathsf{G}(f)$ se zdá být logické.

Znalost kterékoli vlastnosti funkce f by mohla vést k zpřesnění grafu $\mathsf{G}(f)$. Kdybychom kromě 4 daných bodů grafu $\mathsf{G}(f)$ znali např. intervaly ryzí konvexity a intervaly ryzí konkavity funkce f, již by se čára, spojující dané 4 body, asi příliš nelišila od grafu $\mathsf{G}(f)$.



Obr. 6.47

Ani po úplném vyšetření průběhu funkce podle postupu 6.66 nemáme zaručeno, že graf funkce bude dokonalý. Můžeme ho totiž sestrojovat jen na základě znalosti konečného počtů bodů. Hustota těchto bodů by měla být vyšší v okolí význačných bodů (bodů nespojitosti funkce, bodů, ve kterých funkce má lokální extrémy, bodů, ve kterých funkce má inflexi,…) nebo bodů, na jejichž okolí je průběh funkce méně jasný.

Praktické rady pro sestrojení grafu funkce:

1. Je užitečné využít znalost všech zjištěných vlastností funkce a jejich geometrické interpretace. (Zjistíme-li např., že funkce je sudá, zakreslíme její graf pro nezáporné hodnoty nezávisle proměnné a pro nekladné hodnoty nezávisle proměnné ho nakreslíme souměrně podle osy y).
2. Kvůli přehlednosti je vhodné zaznamenávat nejdůležitější údaje o průběhu funkce do tabulky.
3. Vyplatí se průběžně zakreslovat body, jejichž souřadnice byly zjištěny, a zjištěné dílčí údaje do obrázku. Mohou se tím odhalit případné chyby.

Postup 6.66 uplatníme nyní na příkladech. Komentář k jejich řešení bude stručný, poněvadž vyšetřování funkce podle bodů 1 až 6 bylo podrobně probíráno v předchozích oddílech této kapitoly.

VI.67 Příklad. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Řešení:

1. $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

   $f(-x) = \frac{-2x}{1-x^2} = -f(x) \Rightarrow$ funkce f je lichá $\Rightarrow$ graf $\mathsf{G}(f)$ je souměrný podle počátku.

   Průsečíky grafu $\mathsf{G}(f)$ s osami: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Graf $\mathsf{G}(f)$ protíná osu x (i osu y) v bodě $P = [0, 0]$.

Výpočtem hodnoty funkce f ve vhodném bodě každého z intervalů, na které je definiční obor $\mathsf{D}(f)$ rozdělen body $-1, 0$ a 1, zjistíme intervaly, na kterých je funkce f kladná či záporná.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f	$+$	$\neg\exists$	$-$	0	$+$	$\neg\exists$	$-$

Funkce f je kladná na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(0,1)$ a záporná na intervalech $(-1,0)$ a $(1,+\infty)$.

2. Funkce f je spojitá, neboť je elementární. Body -1 a 1 jsou její body nespojitosti II. druhu, což zjistíme výpočtem jejích jednostranných limit v těchto bodech.

   $\lim\limits_{x\to-1+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty$, neboť $\lim\limits_{x\to-1+} 2x = -2$ a $1-x^2 \to 0+$ pro $x \to -1+$,

   $\lim\limits_{x\to-1-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty$, neboť $\lim\limits_{x\to-1-} 2x = -2$ a $1-x^2 \to 0-$ pro $x \to -1-$,

   $\lim\limits_{x\to1+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty$, neboť $\lim\limits_{x\to1+} 2x = 2$ a $1-x^2 \to 0-$ pro $x \to 1+$,

   $\lim\limits_{x\to1-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty$, neboť $\lim\limits_{x\to1-} 2x = 2$ a $1-x^2 \to 0+$ pro $x \to 1-$.

   Přímky o rovnicích $x=-1$ a $x=1$ jsou vertikální asymptoty grafu $\mathsf{G}(f)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}-1} = 0.$$

3. $f'(x) = \frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = 2\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},\ x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	$\neg\exists$	$+$	$\neg\exists$	$+$
f	$\nearrow$	$\neg\exists$	$\nearrow$	$\neg\exists$	$\nearrow$

   Protože derivace f' existuje a $f'(x) > 0$ pro všechna čísla $x \in \mathsf{D}(f)$, funkce f nemá žádný stacionární bod, je rostoucí na intervalech $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ a $(1,+\infty)$ a nemá žádný lokální extrém.

4. $f''(x) = 2\frac{2x(1-x^2)^2-(1+x^2)\cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^4)^4} = 4\frac{x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1-x^2)^3} = 4\frac{x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$,

   $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$.

   Body podezřelé z inflexe funkce f: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

   $x \in \mathsf{D}^\circ(f) \wedge \neg\exists\, f''(x) \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f''	$+$	$\neg\exists$	$-$	0	$+$	$\neg\exists$	$-$
f	$\cup$	$\neg\exists$	$\cap$	0	$\cup$	$\neg\exists$	$\cap$
				inflexe			

Funkce f je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$ a ryze konkávní na intervalech $(-1, 0)$ a $(1, +\infty)$.

Funkce f má inflexi v bodě 0, protože její 1. derivace je spojitá v bodě 0 a její 2. derivace mění znaménko v bodě 0. Bod $T = [0, 0]$ je inflexní bod grafu $\mathsf{G}(f)$.

5. Asymptoty se směrnicí grafu $\mathsf{G}(f)$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0,$$

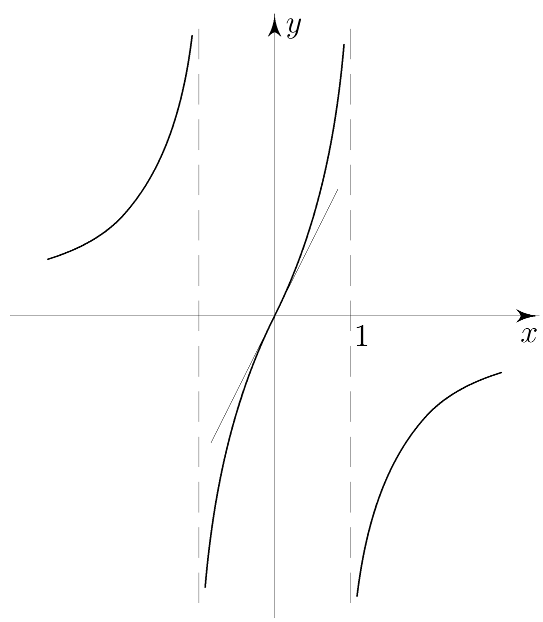
$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0.$$

Přímka o rovnici $y = 0$ je asymptota grafu $\mathsf{G}(f)$ v nevlastním bodě $+\infty$.

Protože $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 0x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, přímka o rovnici $y = 0$ je zároveň asymptota grafu $\mathsf{G}(f)$ v nevlastním bodě $-\infty$.

6. Funkce f není omezená, a tedy nemá žádný globální extrém. Pro zpřesnění grafu $\mathsf{G}(f)$ určíme směrnici $f'(0) = 2$ inflexní tečny a souřadnice dalších bodů grafu, např. $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$, $\left[2, -\frac{4}{3}\right]$ a $\left[3, -\frac{3}{4}\right]$.

7. Graf $\mathsf{G}(f)$:



Obr. 6.48: Graf funkce $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

Poznámka. Vzhledem k tomu, že funkce f je lichá a graf $\mathsf{G}(f)$ je souměrný podle počátku, stačilo by vyšetřovat průběh funkce f na množině $\langle 0, 1) \cup (1, +\infty)$.

VI.68 Příklad. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

Řešení:

1. $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$.

   Funkce $f(-x)$ není rovna funkci $f(x)$ ani funkci $-f(x)$, a tedy funkce f není ani sudá ani lichá.

   Průsečíky grafu $\mathsf{G}(f)$ s osami:

   $$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2(x-6)} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 6.$$

   Graf $\mathsf{G}(f)$ protíná osu x v bodech $P_1 = [0,0]$ a $P_2 = [6,0]$ a osu y v bodě P_1.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,6)$	6	$(6,+\infty)$
f	$-$	0	$-$	0	$+$

   Funkce f je kladná na intervalu $(6,+\infty)$ a záporná na intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,6)$.

2. Funkce f je spojitá, je to funkce elementární. Nemá body nespojitosti, proto její graf nemá asymptoty bez směrnice.

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2(x-6)} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{6}{x}\right)} = +\infty,$$
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{6}{x}\right)} = -\infty.$$

3. $f'(x) = \frac{2x(x-6)+x^2}{3\sqrt[3]{x^4(x-6)^2}} = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0,6\}.$

   Derivace $f'(0)$ neexistuje, protože

   $$f'_+(0) = \lim_{x\to0+} \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}} = -\infty,$$
   $$f'_-(0) = \lim_{x\to0-} \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}} = +\infty.$$

   (Viz poznámku za příkladem 5.47.)

   $$f'(6) = \lim_{x\to6} \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}} = +\infty$$

   Body podezřelé z lokálního extrému funkce f: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4$,

$x \in \mathsf{D}^\circ(f) \wedge \neg\exists\, f'(x) \Leftrightarrow x_2 = 0.$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, 6)$	6	$(6, +\infty)$
f'	$+$	$\neg\exists$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-2\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
		ostré lok. max.		ostré lok. min.		$\nearrow$	

Funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(4, +\infty)$ (včetně bodu 6 — podle věty 6.3) a klesající na intervalu $(0, 4)$.

Funkce f má ostré lokální maximum 0 v bodě 0, protože je v něm spojitá a derivace f' v něm mění znaménko z kladného na záporné, a ostré lokální minimum $-2\sqrt[3]{4}$ v bodě 4, protože je v něm spojitá a derivace f' v něm mění znaménko ze záporného na kladné.

4. Druhá derivace

$$f''(x) = \frac{\sqrt[3]{x(x-6)^2} - (x-4)\frac{3x^2-24x+36}{3\sqrt[3]{x^2(x-6)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(x-6)^4}} = \frac{\sqrt[3]{x(x-6)^2} - (x-4)\frac{x^2-8x+12}{\sqrt[3]{x^2(x-6)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(x-6)^4}} =$$

$$= \frac{x(x-6)^2 - (x-4)(x-6)(x-2)}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^8}} = \frac{(x-6)[x(x-6) - (x-4)(x-2)]}{(x-6)\sqrt[3]{x^4(x-6)^5}} =$$

$$= \frac{-8}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^5}}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 6\}.$$

Body podezřelé z inflexe funkce f: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$,

$x \in \mathsf{D}^\circ(f) \wedge \neg\exists\, f''(x) \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 6.$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 6)$	6	$(6, +\infty)$
f''	$+$	$\neg\exists$	$+$	$\neg\exists$	$-$
f	$\cup$	0	$\cup$	0	$\cap$
		nemá inflexi		inflexe	

Vyšetřování lokální vlastnosti funkce f v bodě 0 odpadá, neboť již bylo provedeno. Funkce f je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, 6)$ a ryze konkávní na intervalu $(6, +\infty)$. V bodě 6 má funkce f inflexi, neboť na jeho blízkém levém redukovaném okolí je funkce f ryze konvexní a na jeho blízkém pravém redukovaném okolí je funkce f ryze konkávní. Bod $T = P_2 = [6, 0]$ je inflexní bod grafu $\mathsf{G}(f)$.

5. Asymptoty grafu $\mathsf{G}(f)$ se směrnicí:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-6)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2(x-6)} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x-6)-x^3}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^2} + x\sqrt[3]{x^2(x-6)} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{6}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1-\frac{6}{x}} + 1} = -2.$$

Přímka o rovnici $y = x-2$ je asymptota grafu $\mathsf{G}(f)$ v nevlastním bodě $+\infty$.

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2(x-6)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{1-\frac{6}{x}} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^2(x-6)} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(x-6)-x^3}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^2} + x\sqrt[3]{x^2(x-6)} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-6}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{6}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1-\frac{6}{x}} + 1} = -2.$$

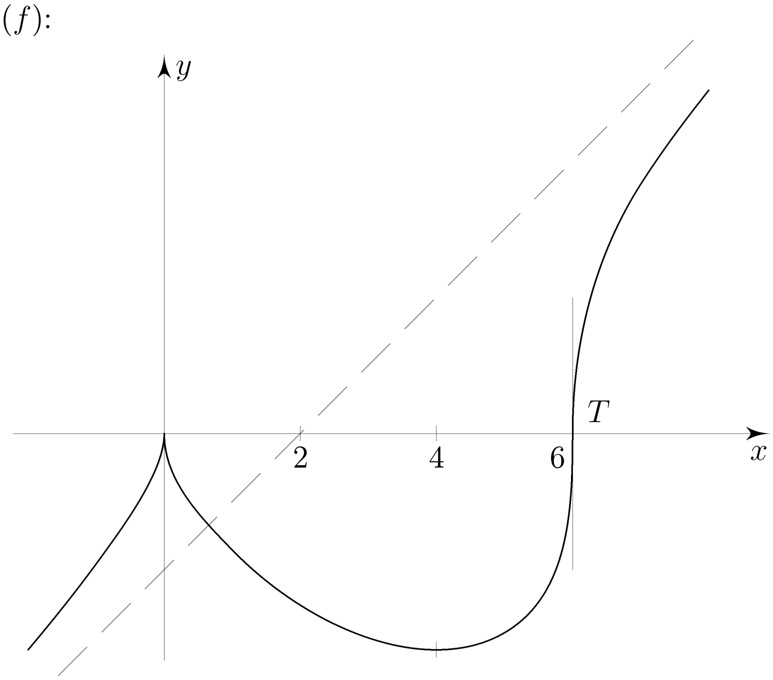
Přímka o rovnici $y = x - 2$ je rovněž asymptota grafu $\mathsf{G}(f)$ v nevlastním bodě $-\infty$.

Asymptota grafu $\mathsf{G}(f)$ o rovnici $y = x - 2$ protíná graf $\mathsf{G}(f)$.

6. Funkce f není omezená a nemá globální extrémy.

   Inflexní tečna grafu $\mathsf{G}(f)$ v bodě T nemá směrnici, je tedy rovnoběžná s osou y a má rovnici $x = 6$.

7. Graf $\mathsf{G}(f)$:



Obr. 6.49: Graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$

VI.69 Příklad. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = -\dfrac{x^3(x-4)}{5}$ a její 1. a 2. derivace, tj. funkcí $g = f'$ a $h = f''$.

Řešení: A. Vyšetření průběhu funkce f.

1. $\mathsf{D}(f) = \mathbf{R}$.

   Funkce f není ani sudá ani lichá.

   Průsečíky grafu $\mathsf{G}(f)$ s osami: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 4$.

   Graf $\mathsf{G}(f)$ protíná osu x v bodech $P_1 = [0,0]$ a $P_2 = [4,0]$ a osu y v bodě P_1.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,+\infty)$
f	$-$	0	$+$	0	$-$

   Funkce f je kladná na intervalu $(0,4)$ a záporná na intervalech $(-\infty,0)$ a $(4,+\infty)$.

2. Funkce f je spojitá, nemá body nespojitosti ani asymptoty bez směrnice.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^3(x-4)}{5}\right) = -\frac{1}{5}\lim_{x\to+\infty}\left[x^4\left(1-\frac{4}{x}\right)\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{5}\lim_{x\to-\infty}\left[x^4\left(1-\frac{4}{x}\right)\right] = -\infty.$$

3. $f'(x) = -\dfrac{3x^2(x-4)+x^3}{5} = -\dfrac{4x^2(x-3)}{5}$, $x \in \mathbf{R}$.

   Body podezřelé z lokálního extrému funkce f: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 3$, $x \in \mathsf{D}^\circ(f) \wedge \neg\exists\, f'(x) \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{27}{5}$	$\searrow$
		$\nearrow$		ostré lok. max.	

   Funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty,3)$ (v bodě 0 je rostoucí podle definice 6.1) a klesající na intervalu $(3,+\infty)$. Funkce f má ostré lokální maximum $\frac{27}{5}$ v bodě 3.

4. Druhá derivace

$$f''(x) = -\frac{4}{5}\left[2x(x-3)+x^2\right] = -\frac{12x(x-2)}{5}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

   Body podezřelé z inflexe funkce f: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$,

$x \in \mathsf{D}^\circ(f) \wedge \neg\exists\, f''(x) \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	0	$\cup$	$\frac{16}{5}$	$\cap$
		inflexe		inflexe	

Funkce f je ryze konvexní na intervalu $(0, 2)$ a ryze konkávní na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, +\infty)$. Funkce f má inflexi v bodech 0 a 2, neboť v nich má spojitou 1. derivaci a 2. derivace v nich mění znaménko. Body $T_1 = [0, 0]$ a $T_2 = \left[2, \frac{16}{5}\right]$ jsou inflexní body grafu $\mathsf{G}(f)$.

5. Asymptoty se směrnicí grafu $\mathsf{G}(f)$:

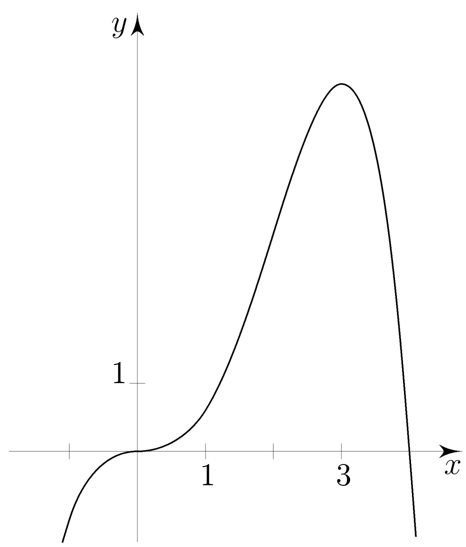
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2(x-4)}{5} = -\frac{1}{5} \lim_{x\to+\infty} \left[x^3\left(1 - \frac{4}{x}\right)\right] = -\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{5} \lim_{x\to-\infty} \left[x^3\left(1 - \frac{4}{x}\right)\right] = +\infty.$$

Graf $\mathsf{G}(f)$ nemá asymptoty se směrnicí.

6. Funkce f je omezená shora, ale není omezená zdola. Má globální maximum $f(2) = \frac{27}{5}$.

7. Graf $\mathsf{G}(f)$:



Obr. 6.50: Graf funkce $f(x) = -\frac{x^3(x-4)}{5}$

B. Vyšetření průběhu funkce $g(x) = f'(x) = -\dfrac{4x^2(x-3)}{5}$.

1. $\mathsf{D}(g) = \mathbf{R}$.

   Funkce g není ani sudá ani lichá.

   Průsečíky grafu $\mathsf{G}(g)$ s osami: $g(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 3$.

   Graf $\mathsf{G}(g)$ protíná osu x v bodech $Q_1 = [0, 0]$ a $Q_2 = [3, 0]$ a osu y v bodě Q_1.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
g	$+$	0	$+$	0	$-$

   Funkce g je kladná na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, 3)$ a záporná na intervalu $(3, +\infty)$.

2. Funkce g je spojitá, tedy nemá body nespojitosti ani asymptoty bez směrnice.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4x^2(x-3)}{5}\right) = -\frac{4}{5}\lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\frac{4}{5}\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)\right] = +\infty.$$

3. $g'(x) = f''(x) = -\dfrac{12x(x-2)}{5}$, $x \in \mathbf{R}$.

   Body podezřelé z lokálního extrému funkce g: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$,

   $x \in \mathsf{D}^\circ(f) \wedge \neg\exists\, g'(x) \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{5}$	$\searrow$
		ostré lok. min.		ostré lok. max.	

   Funkce g je rostoucí na intervalu $(0, 2)$ a klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, +\infty)$. Funkce g má ostré lokální maximum $\frac{16}{5}$ v bodě 2 a ostré lokální minimum 0 v bodě 0.

4. $g''(x) = -\frac{12}{5}\left[(x-2) + x\right] = -\frac{24(x-1)}{5}$, $x \in \mathbf{R}$.

   Body podezřelé z inflexe funkce g: $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$,

   $x \in \mathsf{D}^\circ(g) \wedge \neg\exists\, g''(x) \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
g''	$+$	0	$-$
g	$\cup$	$\frac{8}{5}$	$\cap$
		inflexe	

Funkce g je ryze konvexní na intervalu $(-\infty, 1)$ a ryze konkávní na intervalu $(1, +\infty)$. Funkce g má inflexi v bodě 1, neboť v něm má spojitou 1. derivaci a 2. derivace v něm mění znaménko. Bod $U = \left[1, \frac{8}{5}\right]$ je inflexní bod grafu $\mathsf{G}(g)$.

5. Asymptoty se směrnicí grafu $\mathsf{G}(f)$:

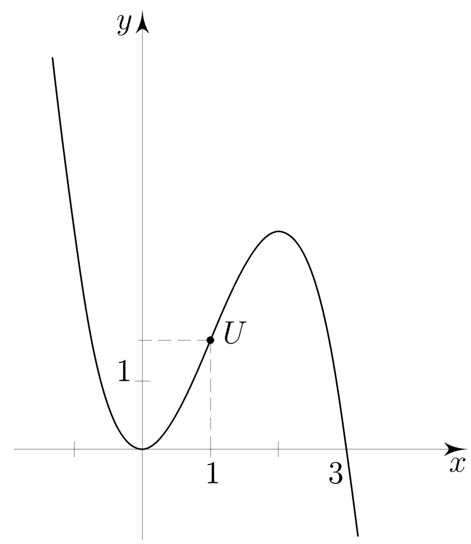
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{4x(x-3)}{5} = -\frac{4}{5} \lim_{x\to+\infty} \left[x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)\right] = -\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = -\frac{4}{5} \lim_{x\to-\infty} \left[x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)\right] = -\infty.$$

Graf $\mathsf{G}(g)$ nemá asymptoty se směrnicí.

6. Funkce g je není omezená a nemá globální extrémy.

7. Graf $\mathsf{G}(g)$:



Obr. 6.51: Graf funkce $f'(x) = -\frac{4x^2(x-3)}{5}$

C. Vyšetření průběhu funkce $h(x) = f''(x) = -\dfrac{12x(x-2)}{5}$.

1. $\mathsf{D}(h) = \mathbf{R}$.

Funkce h není ani sudá ani lichá.

Průsečíky grafu $\mathsf{G}(h)$ s osami: $h(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$.

Graf $\mathsf{G}(h)$ protíná osu x v bodech $R_1 = [0, 0]$ a $R_2 = [2, 0]$ a osu y v bodě R_1.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
h	$-$	0	$+$	0	$-$

Funkce h je kladná na intervalu $(0, 2)$ a záporná na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, +\infty)$.

2. Funkce h je spojitá, nemá body nespojitosti ani asymptoty bez směrnice.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{12x(x-2)}{5}\right) = -\frac{12}{5}\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\frac{12}{5}\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)\right] = -\infty.$$

3. $h'(x) = g''(x) = -\frac{24(x-1)}{5}$, $x \in \mathbf{R}$.

   Body podezřelé z lokálního extrému funkce h: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$,

   $x \in \mathsf{D}^\circ(h) \wedge \neg\exists\, h'(x) \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
h'	$+$	0	$-$
h	$\nearrow$	$\frac{12}{5}$	$\searrow$
		ostré lok. max.	

   Funkce h je rostoucí na intervalu $(-\infty, 1)$ a klesající na intervalu $(1, +\infty)$. Funkce h má ostré lokální maximum $\frac{12}{5}$ v bodě 1.

4. $h''(x) = -\frac{24}{5}$, $x \in \mathbf{R}$.

   Body podezřelé z inflexe funkce h: $h''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$,

   $x \in \mathsf{D}^\circ(h) \wedge \neg\exists\, h''(x) \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

x	$(-\infty, +\infty)$
h''	$-$
h	$\cap$

   Funkce h je ryze konkávní na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

5. Asymptoty se směrnicí grafu $\mathsf{G}(h)$:

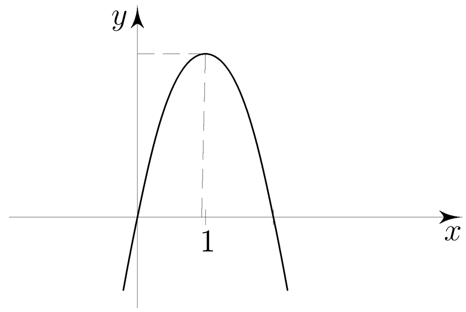
$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{12(x-2)}{5} = -\frac{12}{5}\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{2}{x}\right)\right] = -\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = -\frac{12}{5}\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{2}{x}\right)\right] = +\infty.$$

   Graf $\mathsf{G}(h)$ nemá asymptoty se směrnicí.

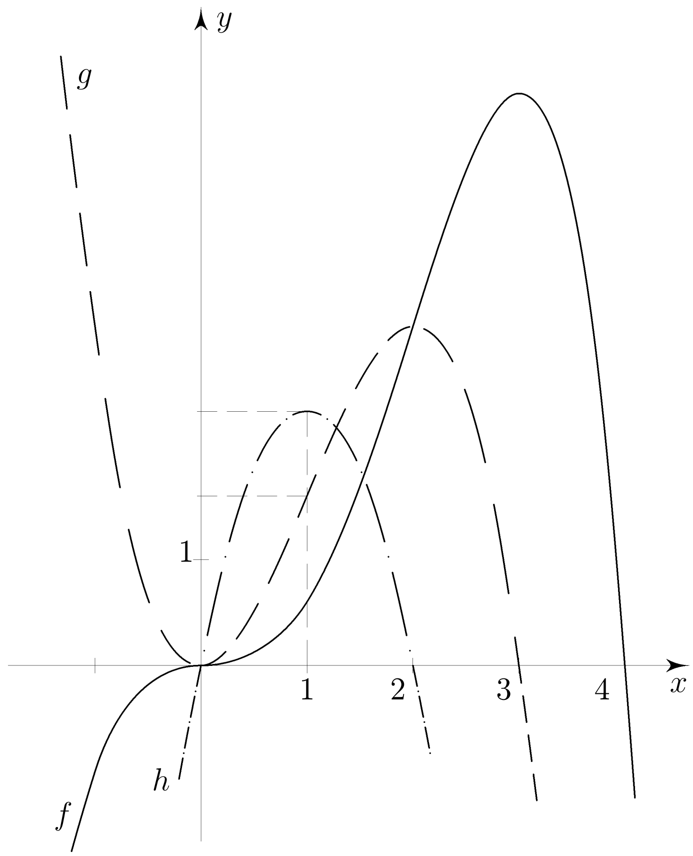
6. Funkce h je omezená shora, ale není omezená zdola. Nabývá globálního maxima $h(1) = \frac{12}{5}$.

7. Graf $\mathsf{G}(h)$:



Obr. 6.52: Graf funkce $f''(x) = -\frac{12x(x-2)}{5}$

Poznámka. Graf funkce $h = f''$ jsme mohli sestrojit také na základě dříve získané znalosti kvadratické funkce, pro ilustraci jsme však dodrželi postup 6.66.



Obr. 6.53: Grafy funkcí f, $g = f'$ a $h = f''$

Obr. 6.53 poskytuje názornou představu o průběhu funkcí f, f' a f''. Umožňuje srovnávat vlastnosti funkce a její první a druhé derivace, sledovat vzájemné souvislosti a vztahy mezi nimi a uvědomit si vizuálně poznatky, jejichž podrobné studium bylo obsahem těchto skript.

Literatura

[1] Brabec, J., Martan, F., Rozenský, Z.: *Matematická analýza I.* SNTL, Praha, 1989.

[2] Budinský, B., Charvát, J.: *Matematika I.* SNTL/Alfa, Praha, 1987.

[3] Jarník, V.: *Diferenciální počet I.* ČSAV, Praha, 1955.

[4] Jarník, V.: *Diferenciální počet II.* ČSAV, Praha, 1956.

[5] Kaňka, M., Henzler, J.: *Matematika pro ekonomy (2).* Ekopress, Praha, 1997.

[6] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užité matematiky.* Prometheus, Praha, 1995.

---

[7] Berman, G. N.: *Sbírka úloh z matematické analýzy.* Nauka, Moskva, 1965 (rusky).

[8] Děmidovič, B. P.: *Sbírka úloh a příkladů z matematické analýzy.* Moskva, 1961 (rusky).

[9] Hlaváček, A: *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky I. a II.* SPN, Praha, 1965.

[10] Jirásek, F., Kriegelstein, E., Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky I.* SNTL/Alfa, Praha, 1987.

[11] Prágerová, A: *Cvičení z matematiky.* SNTL/Alfa, Praha, 1987.

[12] Vanžura, J.: *Řešené příklady z MA I.* PřF UP, Olomouc, 1982, skripta.

---

[13] Bartsch, H.-J.: *Matematické vzorce.* SNTL, Praha, 1971.