Obsah

I
Primitivní funkce

I.1. Definice a vlastnosti primitivní funkce

I.1.1. Existence a jednoznačnost primitivní funkce

Definice. Nechť funkce $f(x)$ a $F(x)$ jsou definovány na intervalu $\mathcal{I}$. Jestliže pro každé $x \in \mathcal{I}$ platí
$$F'(x) = f(x)\,, \tag{1}$$
nazývá se funkce $F(x)$ *primitivní funkce* k funkci $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$.

(V krajních bodech intervalu $\mathcal{I}$, které do $\mathcal{I}$ patří, jde o příslušné jednostranné derivace.)

Poznámka. Z rovnice (1) plyne, že funkce $F(x)$ je spojitá na $\mathcal{I}$.

Věta (nutná podmínka existence). *Nechť k funkci $f(x)$ existuje na $\mathcal{I}$ primitivní funkce, pak $f(x)$ je darbouxovská na $\mathcal{I}$.*

Poznámka. Připomeňme, že funkce f se nazývá *darbouxovská* na intervalu $\mathcal{I} \subseteq D(f)$, jestliže pro každé dva body x_1, x_2 z $\mathcal{I}$ s vlastností $f(x_1) < f(x_2)$ a každé číslo $y_0 \in \mathbb{R}$, pro něž $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$, existuje v intervalu o krajních bodech x_1, x_2 bod x_0 takový, že $f(x_0) = y_0$.

Věta (postačující podmínka existence). *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na $\mathcal{I}$, pak k funkci $f(x)$ existuje na $\mathcal{I}$ primitivní funkce.*

Věta. *Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ na $\mathcal{I}$, pak pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ je $F(x) + c$ primitivní funkce k $f(x)$ na $\mathcal{I}$.*

Věta. *Nechť $F(x)$ a $G(x)$ jsou primitivní funkce k $f(x)$ na $\mathcal{I}$, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) - G(x) = c$ pro každé $x \in \mathcal{I}$.*

Důsledek. *Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ na $\mathcal{I}$, pak $\{F(x) + c; c \in \mathbb{R}\}$ je množina všech primitivních funkcí k $f(x)$ na $\mathcal{I}$.*

Označení. Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$ se značí symbolem
$$\int f(x)\, dx\,, \tag{2}$$
a vzhledem k předchozím tvrzením můžeme psát
$$\int f(x)\, dx = F(x) + c\,, \tag{3}$$
kde $F(x)$ je nějaká primitivní funkce k $f(x)$ na $\mathcal{I}$ a $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

Symbol $\int f(x)\,dx$ se čte *integrál* z funkce $f(x)$ a postup hledání primitivní funkce se nazývá *integrování.*

I.1.2. Vlastnosti primitivní funkce

Věta. *Nechť funkce $f(x)$ má primitivní funkci na $\mathcal{I}$, pak*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

na $\mathcal{I}$.

Nechť funkce $f(x)$ má derivaci na $\mathcal{I}$, pak

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R},$$

na $\mathcal{I}$.

Věta. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají primitivní funkce na $\mathcal{I}$ a $k \in \mathbb{R}$. Pak funkce $f(x) + g(x)$ a $kf(x)$ mají primitivní funkce na $\mathcal{I}$ a platí*

$$\begin{aligned} \int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,, \\ \int kf(x)\,dx &= k\int f(x)\,dx\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Poznámka. Nechť $\mathcal{F}$ je třída elementárních funkcí, tj. množina všech funkcí, které vzniknou konečným počtem algebraických operací a skládáním ze základních elementárních funkcí*), pak platí: *Je-li funkce $f(x) \in \mathcal{F}$, pak její derivace $f'(x) \in \mathcal{F}$, ale její primitivní funkce $F(x) = \int f(x)\,dx$ nemusí patřit do $\mathcal{F}$.*

Např. funkce $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$, e^{-x^2}, $\sin x^2$, $\sqrt{\sin x}$ apod. mají primitivní funkci na svém definičním oboru, protože jsou spojité, ale tyto primitivní funkce nejsou elementární funkce.

I.1.3. Vzorce

Ze známých vzorců pro derivace funkcí plynou následující vzorce, které platí na každém intervalu, který patří do definičního oboru integrované funkce.

I. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\,, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1$

II. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

*)Za základní elementární funkce považujeme mocninnou funkci, exponenciální funkci, logaritmickou funkci, goniometrické funkce a funkce k nim inverzní, hyperbolické funkce a funkce k nim inverzní.

III. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$

IV. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c\,, \quad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$

V. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

VI. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + c$

VII. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c$

VIII. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

IX. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccotg} x + c$

X. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$

XI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$

XII. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

XIII. $\displaystyle\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$

XIV. $\displaystyle\int \cosh x\, dx = \sinh x + c$

XV. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + c$

XVI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + c$

I.1.4. Řešené příklady

1. $\displaystyle\int (x - 2e^x)\, dx = \int x\, dx - 2\int e^x dx = \frac{x^2}{2} - 2e^x + c$

2. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x}\, dx = \int dx - 4\int x^{-\frac{1}{6}}\, dx + 4\int x^{-\frac{1}{3}}\, dx = x - \frac{24}{5}x^{\frac{5}{6}} + 6x^{\frac{2}{3}} + c$

3. $\displaystyle\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + c$

4. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int dx =$

$\displaystyle = \operatorname{tg} x - x + c$

5. $\displaystyle\int 3^x \cdot 5^{2x}\, dx = \int 75^x\, dx = \frac{75^x}{\ln 75} + c$

Použitím vzorců najděte primitivní funkce:

6. $\displaystyle\int (3-x^2)^3\, dx$

7. $\displaystyle\int x^2\,(5-x)^4\, dx$

8. $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

9. $\displaystyle\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\, dx$

12. $\displaystyle\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\, dx$

13. $\displaystyle\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}\, dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^2}\, dx$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\, dx$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

19. $\displaystyle\int (2^x + 3^x)^2\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\, dx$

21. $\displaystyle\int (1 + \sin x + \cos x)\, dx$

22. $\displaystyle\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx, \quad 0 \le x \le \pi$

23. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx$

24. $\displaystyle\int (a \sinh x + b \cosh x)\, dx$

25. $\displaystyle\int \operatorname{tgh}^2 x\, dx$

26. $\displaystyle\int \operatorname{cotgh}^2 x\, dx$

27. Dokažte, že je-li

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

pak

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c, \quad a \neq 0.$$

Použitím vzorců a příkladu 27 najděte primitivní funkce:

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a}$

29. $\displaystyle\int (2x-3)^{10}\,dx$

30. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3x^2}$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-3x^2}$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+2}$

Návod: $x^2 - x + 2 =$
$= (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} =$
$= \frac{7}{4}\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right]$

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$

41. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$

42. $\displaystyle\int \left(e^{-x}+e^{-2x}\right)dx$

43. $\displaystyle\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})}$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$

46. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos x}$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$

48. $\displaystyle\int \Big(\sinh(2x+1)+\cosh(2x-1)\Big)\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2\frac{x}{2}}$

50. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

51. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

52. $\displaystyle\int \sinh^2 x\,dx$

53. $\displaystyle\int \cosh^2 x\,dx$

54. $\int \sin^4 x \, dx$

55. $\int \cos^4 x \, dx$

56. $\int \dfrac{dx}{(\sin^2 x)\cos^2 x}$

Návod: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

57. $\int \dfrac{dx}{(\sinh^2 x)\cosh^2 x}$

58. $\int (\sin x)\sin(x+\alpha)\, dx$

59. $\int (\sin 3x)\sin 5x \, dx$

60. $\int \left(\cos \dfrac{x}{2}\right)\cos \dfrac{x}{3}\, dx$

61. $\int \left(\sin(2x - \frac{\pi}{6})\right)\cos(3x + \frac{\pi}{4})\, dx$

62. $\int (\sinh x)\sinh 2x \, dx$

63. $\int (\cosh x)\cosh 3x \, dx$

64. $\int (\sin^2 3x)\sin^3 2x \, dx$

65. $\int |x| \, dx$

66. $\int x|x| \, dx$

67. $\int (x + |x|)^2 \, dx$

68. $\int e^{-|x|} \, dx$

69. $\int \max(1, x^2)\, dx$

70. $\int [x]\, |\sin \pi x| \, dx, \quad x \geq 0$

---

71. Vypočtěte $\int f(x)\, dx$, kde $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{pro } |x| \leq 1 \\ 1 - |x| & \text{pro } |x| > 1 \end{cases}$

72. Vypočtěte $\int f(x)\, dx$, kde $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -\infty < x \leq 0 \\ x + 1 & \text{pro } 0 < x \leq 1 \\ 2x & \text{pro } 1 < x < +\infty \end{cases}$

73. Vypočtěte $\int f'(2x)\, dx$

74. Najděte $f(x)$, je-li $f'(x^2) = \frac{1}{x}, \ x > 0$

75. Najděte $f(x)$, je-li $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$

76. Najděte $f(x)$, je-li $f'(\ln x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 < x \leq 1 \\ x & \text{pro } 1 < x < +\infty \end{cases}$ a $f(0) = 0$.

I.2. Metody výpočtu primitivních funkcí

I.2.1. Substituce

Věta (1. věta o substituci). *Nechť funkce $\varphi(x)$ je definována na intervalu $\mathcal{I}_1$, $\varphi(\mathcal{I}_1) \subset \mathcal{I}_2$, a nechť existuje $\varphi'(x)$ na $\mathcal{I}_1$. Nechť funkce $f(t)$ je definována na intervalu $\mathcal{I}_2$. Má-li funkce $f(t)$ primitivní funkci na $\mathcal{I}_2$, pak funkce $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ má primitivní funkci na $\mathcal{I}_1$. Je-li $F(t)$ primitivní funkce k funkci $f(t)$ na intervalu $\mathcal{I}_2$, je $F(\varphi(x))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na intervalu $\mathcal{I}_1$.*

Poznámka. 1. větu o substituci zapisujeme ve tvaru

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\,, \tag{5}$$

kde $t = \varphi(x)$, $dt = \varphi'(x)\,dx$, $x \in \mathcal{I}_1$, $t \in \mathcal{I}_2$.

Věta (2. věta o substituci). *Nechť funkce $\varphi(t)$ je definována na intervalu $\mathcal{I}_1$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, a nechť existuje $\varphi'(t) \neq 0$ na $\mathcal{I}_1$. Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\mathcal{I}_2$. Funkce $f(x)$ má primitivní funkci na $\mathcal{I}_2$, právě když má funkce $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ primitivní funkci na $\mathcal{I}_1$.*

1. *Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\mathcal{I}_2$, je $F(\varphi(t))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na $\mathcal{I}_1$.*
2. *Je-li $\Phi(t)$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na $\mathcal{I}_1$, je $\Phi(\varphi^{-1}(x))$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\mathcal{I}_2$.*

Poznámka. První část 2. věty o substituci je vlastně 1. věta o substituci s omezeným předpokladem $\varphi' \neq 0$. Druhou část 2. věty o substituci zapisujeme ve tvaru

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,, \tag{6}$$

kde $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$, $t \in \mathcal{I}_1$, $x \in \mathcal{I}_2$.

I.2.2. Per partes

Věta (metoda per partes). *Nechť funkce $u(x), v(x)$ mají derivace $u'(x), v'(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$. Existuje-li na $\mathcal{I}$ primitivní funkce k jedné z funkcí $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$, existuje i ke druhé z nich. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k $u(x)v'(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$, je $u(x)v(x) - F(x)$ primitivní funkce k $u'(x)v(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$.*

Poznámka. Metodu per partes zapisujeme ve tvaru

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx\,. \tag{7}$$

Poznámka. Pro volbu funkcí $u(x)$ a $v'(x)$ ve vzorci (7) neexistuje žádné pravidlo. Ze zkušenosti zjistíme, že ve většině případů volíme jako $u(x)$ funkce ln, arcsin, arccos, arctg, arccotg, x^n a jako $v'(x)$ funkce e^x, sin, cos, x^n, 1. V případě, že integrál $\int u'(x)v(x)\,dx$ je složitější než původní, je vhodné zkusit volit $u(x)$ a $v'(x)$ obráceně nebo jiným způsobem tehdy, když $u(x)v'(x)$ je součin aspoň tří funkcí.

Metodu per partes tedy používáme tak, že volíme funkce $u(x)$ a $v'(x)$ a počítáme $u'(x)$ a $v(x)$, přitom $v(x)$ je libovolná primitivní funkce k $v'(x)$, zpravidla volíme integrační konstantu rovnu nule.

Poznámka. Při hledání primitivních funkcí používáme také kombinaci substituční metody a metody per partes a dále samozřejmě vztahy (4) a vzorce I.1.3.

Většinou existuje více způsobů nalezení primitivní funkce k dané funkci, např. různé substituce i metoda per partes — primitivní funkci $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ lze nalézt metodou per partes nebo Eulerovými substitucemi (I.4.2.1) nebo Ostrogradského metodou (I.4.2.3) nebo goniometrickými substitucemi (I.4.2.6). Nalezené primitivní funkce se přitom mohou lišit pouze o konstantu.

I.2.3. Řešené příklady

77. Použitím 1. věty o substituci najděte primitivní funkce:

a) $\displaystyle\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-\infty, +\infty)$, volíme $t = \varphi(x) = 1 + x^3$, pak $dt = 3x^2 dx$. $\mathcal{I}_1 = (-\infty, \infty)$, $\mathcal{I}_2 = (-\infty, \infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = (-\infty, \infty) = \mathcal{I}_2$.

$$\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{1}{4}\sqrt[3]{t^4} + c = \frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4} + c\,.$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(0, +\infty)$, volíme $t = \varphi(x) = \sqrt{x}$, pak $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. $\mathcal{I}_1 = (0, \infty)$, $\mathcal{I}_2 = (-\infty, \infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = (0, \infty) \subset \mathcal{I}_2$.

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t + c = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c\,.$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$, volíme $t = \varphi(x) = \sqrt{x^2+1}$, pak $dt = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Funkce $f(t) = \frac{1}{t^2-1}$ je definována na sjednocení intervalů $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) = Df$, tedy

1) $\mathcal{I}_1 = (-\infty, 0)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = (1, +\infty) \subset Df$.

2) $\mathcal{I}_1 = (0, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = (1, +\infty) \subset Df$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| + c\,.$$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, +\infty)$, volíme $t = \varphi(x) = 1 - x$, pak $dt = -dx$.

Funkce $f(t) = \frac{(1-t)^2}{t^{100}}$ je definována na $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = Df$, tedy

1) $\mathcal{I}_1 = (-\infty, 1)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = (0, +\infty) \subset Df$.

2) $\mathcal{I}_1 = (1, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = (-\infty, 0) \subset Df$.

$$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx = -\int \frac{(1-t)^2}{t^{100}}\,dt =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^{100}} + 2\int \frac{dt}{t^{99}} - \int \frac{dt}{t^{98}} = \frac{1}{99t^{99}} - \frac{1}{49t^{98}} + \frac{1}{97t^{97}} + c =$$

$$= \frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}} + c\,.$$

78. Použitím 1. věty o substituci najděte primitivní funkce:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-\infty, +\infty)$, volíme $t = \varphi(x) = 2 + e^x$, pak $dt = e^x dx$.

Funkce $f(t) = \frac{1}{t}$ je definována na sjednocení intervalů $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = Df$, tedy $\mathcal{I}_1 = (-\infty, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = (2, +\infty) \subset Df$.

$$\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln(2+e^x) + c\,.$$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(0, +\infty)$, volíme $t = \varphi(x) = \ln x$, pak $dt = \frac{dx}{x}$. $\mathcal{I}_1 = (0, \infty)$, $\mathcal{I}_2 = (-\infty, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = (-\infty, +\infty) = \mathcal{I}_2$.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\ln^3 x}{3} + c$$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, volíme $t=\varphi(x)=\cos x$, pak $dt=-\sin x\,dx$.

$\mathcal{I}_k = \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $\varphi(\mathcal{I}_k)=(0,1\rangle$ pro každé $k\in\mathbb{Z}$, $\mathcal{I}_2 =$ $=(0,+\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_k)\subset\mathcal{I}_2$.

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = \frac{2}{\sqrt{t}} + c = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + c\,.$$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

1) Volíme $t=\varphi(x)=\cos x$, pak $dt=-\sin x dx$.

Funkce $f(t)=\frac{1}{t^2-1}$ je definována na sjednocení intervalů $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)=Df$ a $\varphi((k\pi,(k+1)\pi))=(-1,1)$ pro každé $k\in\mathbb{Z}$, tedy $\varphi((k\pi,(k+1)\pi))\subset Df$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x}=\int\frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x}=\int\frac{dt}{t^2-1}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c\,.$$

2) Volíme $t=\varphi(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, pak $dt=\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$.

Funkce $f(t)=\frac{1}{t}$ je definována na sjednocení intervalů $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=Df$ a $\varphi((k\pi,(k+1)\pi))=(0,+\infty)$ pro $k\in\mathbb{Z}$ sudé, $\varphi((k\pi,(k+1)\pi))=(-\infty,0)$ pro $k\in\mathbb{Z}$ liché, tedy $\varphi((k\pi,(k+1)\pi))\subset Df$.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2(\sin\frac{x}{2})\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{(\operatorname{tg}\frac{x}{2})2\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{dt}{t}=$$
$$=\ln|t|+c=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c\,.$$

79. Použitím 2. věty o substituci najděte primitivní funkce:

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-\infty,+\infty)$, položíme $t=\sqrt{1+e^x}$ $(t>1)$, vypočítáme x a volíme $x=\varphi(t)=\ln(t^2-1)$, pak $dx=\frac{2t\,dt}{t^2-1}$.

$\mathcal{I}_2 = (-\infty, +\infty)$, $\mathcal{I}_1 = (1, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(1, +\infty)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2-1}\, dt = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + c\,.$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 1)$, volíme $x = \varphi(t) = \sin t$, pak $dx = \cos t\, dt$.

1) $\mathcal{I}_2 = (-1, 0)$, $\mathcal{I}_1 = (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(-\frac{\pi}{2}, 0)$,

2) $\mathcal{I}_2 = (0, 1)$, $\mathcal{I}_1 = (0, \frac{\pi}{2})$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(0, \frac{\pi}{2})$.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t\, dt}{(\sin^2 t)\cos t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

$$= -\operatorname{cotg} t + c = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + c = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c\,.$$

(Poznámka: Primitivní funkci lze též vyjádřit ve tvaru $-\operatorname{cotg}\arcsin x + c$.)

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(0, +\infty)$, položíme $t = \sqrt{x}$ $(t > 0)$, vypočítáme x a volíme $x = \varphi(t) = t^2$, pak $dx = 2t\, dt$.

$\mathcal{I}_2 = (0, +\infty)$, $\mathcal{I}_1 = (0, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(0, +\infty)$.

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \int \frac{2t}{2+t}\, dt = 2\int \frac{t+2-2}{2+t}\, dt = 2\int dt - 4\int \frac{dt}{2+t} =$$

$$= 2t - 4\ln(2+t) + c = 2\sqrt{x} - 4\ln(2+\sqrt{x}) + c\,.$$

80. Použitím metody per partes najděte primitivní funkce:

a) $\displaystyle\int \ln x\, dx$

$$\int \ln x\, dx \begin{bmatrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int dx =$$

$= x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$

b) $\displaystyle\int x \sin x\, dx$

$$\int x\sin x\, dx \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x + \int \cos x\, dx =$$

$= -x\cos x + \sin x + c$

81. Použitím metody per partes najděte primitivní funkce:

a) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$

$$\int x^2 e^x\,dx \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^x & v = e^x \end{bmatrix} = x^2 e^x - 2\int x e^x dx \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{bmatrix}$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$$

b) $\displaystyle\int \arccos^2 x\,dx$

$$\int \arccos^2 x\,dx \begin{bmatrix} u = \arccos^2 x & u' = -\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\arccos^2 x + 2\int \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \begin{bmatrix} u = \arccos x & u' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & v = -\sqrt{1-x^2} \end{bmatrix} =$$

$$= x\arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2\int dx =$$

$$= x\arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + c$$

82. Použitím metody per partes najděte primitivní funkce:

a) $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$

$$I = \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx =$$

$$= \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} & v = \sqrt{a^2+x^2} \end{bmatrix} =$$

$$= a^2\ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx =$$

$$= a^2\ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + x\sqrt{a^2+x^2} - I.$$

Máme tedy

$$2I = a^2\ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + x\sqrt{a^2+x^2}$$

a odsud dostáváme

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + c$$

b) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx, \quad a \neq 0,\ b \neq 0$

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx \begin{bmatrix} u = \cos bx & u' = -b\sin bx \\ v' = e^{ax} & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx \begin{bmatrix} u = \sin bx & u' = b\cos bx \\ v' = e^{ax} & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Tedy

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I$$

Dále řešíme tuto rovnici a dostáváme

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + c$$

83. Odvoďte rekurentní vzorce pro integrály:

a) $I_n = \int \sin^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N},\ n > 2$

$$I_n = \int \sin^n x \, dx \begin{bmatrix} u = \sin^{n-1} x & u' = (n-1)(\sin^{n-2} x) \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= -(\sin^{n-1} x) \cos x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x) \cos^2 x \, dx =$$

$$= -(\sin^{n-1} x) \cos x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x)(1 - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= -(\sin^{n-1} x) \cos x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x) \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx.$$

Máme tedy

$$I_n = -(\sin^{n-1} x) \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \,.$$

Dále řešíme tuto rovnici a dostaneme rekurentní vzorec

$$I_n = -\frac{1}{n}(\sin^{n-1} x) \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

b) $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}, \quad a \neq 0,\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$

Integrál upravíme

$$I_n = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^n} \, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^n} \, dx.$$

Druhý integrál řešíme per partes

$$\int \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^n} \, dx \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} & v = \frac{1}{2(1-n)(a^2+x^2)^{n-1}} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x}{2(1-n)(a^2 + x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}}.$$

Po dosazení pak dostaneme rekurentní vzorec

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}$$

Pro $n = 1$ je $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

I.2.4. Příklady

84. Nechť funkce $\varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $\mathcal{I}$. Dokažte, že platí

$$\int (\varphi(x))^\alpha \varphi'(x)\,dx = \begin{cases} \frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c_1 & \text{je-li } \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1 \\ \ln|\varphi(x)| + c_2 & \text{je-li } \alpha = -1 \end{cases}$$

Substituční metodou najděte primitivní funkce:

85. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

86. $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}$

87. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$

88. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

89. $\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$

90. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^5+1)^4}$

91. $\int \frac{x\,dx}{4+x^4}$

92. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}$

93. $\int xe^{-x^2}\,dx$

94. $\int (\sin \frac{1}{x}) \frac{dx}{x^2}$

95. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

96. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

97. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

98. $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

99. $\int (\sin\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}}$

100. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$
Návod: volte $t = x - \frac{1}{x}$

101. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$

102. $\int \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1+x^{\alpha+2}}}\,dx\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

103. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

104. $\int x(1-x)^{10}\,dx$

105. $\int \frac{1+x}{1-x}\,dx$

106. $\int \frac{x^2}{1+x}\,dx$

107. $\int \frac{x^3}{3+x}\,dx$

108. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx$

109. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\,dx$

110. $\int \frac{x^5}{x+1}\,dx$

111. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

112. $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$

113. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$

114. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

115. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

116. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

117. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$

118. $\int x^3(1-5x^2)^{10}\,dx$

119. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-x}}$

120. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

121. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,dx$

122. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

123. $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx$

124. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}\,dx$

125. $\int \frac{2^x3^x}{9^x-4^x}\,dx$

126. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$

127. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

128. $\int \frac{dx}{(x\ln x)\ln\ln x}$

129. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

130. $\int \left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x^2-1}$

131. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\,dx$

132. $\int (\sin^5 x)\cos x\,dx$

133. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

134. $\int \operatorname{tg} x\,dx$

135. $\int \operatorname{cotg} x\,dx$

136. $\int (\cos^5 x)\sqrt{\sin x}\,dx$

137. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

138. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}\,dx$

139. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$

140. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$

141. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$

142. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}\,dx$

143. $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}}\,dx$

144. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}\,dx$

145. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}}\,dx$

146. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}}$

147. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\cosh^2 x)\sqrt[3]{\operatorname{tgh}^2 x}}$

148. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

149. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos^2 x}$

150. $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

151. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

152. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$

153. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^3 x\,dx$

154. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

155. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh x}$

156. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh x}$

157. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$

158. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$

159. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$

160. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$

161. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

Návod: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

162. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$

163. $\displaystyle\int \frac{\cos \ln x}{x}\,dx$

164. $\displaystyle\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$

165. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{cotg} x}{\cos^2 x}\,dx$

166. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{e^{\sin x}-1}}\,dx$

167. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\arcsin^2 x)\sqrt{1-x^2}}$

168. $\displaystyle\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

169. $\displaystyle\int \frac{\ln \arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\,dx$

170. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$

171. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}$

172. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{\cosh x}\,dx$

Metodou per partes najděte primitivní funkce:

173. $\int x^\alpha \ln x \, dx\,, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1$

174. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

177. $\int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx$

178. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2 \sqrt{x}} \, dx$

179. $\int \frac{\ln \ln x}{x} \, dx$

180. $\int x e^{-x} \, dx$

181. $\int x^3 e^{-x^2} \, dx$

182. $\int x \sin^2 x \, dx$

183. $\int x^2 \sin 2x \, dx$

184. $\int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} \, dx$

185. $\int x \sinh x \, dx$

186. $\int x^3 \cosh 3x \, dx$

187. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$

188. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} \, dx$

189. $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

190. $\int \arcsin x \, dx$

191. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$

175. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$

176. $\int \ln^2 x \, dx$

192. $\int x^2 \arccos x \, dx$

193. $\int x^3 \operatorname{arctg} x \, dx$

194. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx$

195. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

196. $\int x \sqrt{1 - x^2} \arcsin x \, dx$

197. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \, dx$

198. $\int x \ln \frac{1 + x}{1 - x} \, dx$

199. $\int x^2 \ln \frac{1 - x}{1 + x} \, dx$

200. $\int \frac{x \ln x}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx$

201. $\int \frac{\ln(x^2 - 1)}{\sqrt{x + 1}} \, dx$

202. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx$

203. $\int x \ln \left|1 + \frac{1}{x}\right| \, dx$

204. $\int (\sin x) \ln \operatorname{tg} x \, dx$

205. $\int x^5 e^{x^3} \, dx$

206. $\int \arcsin^2 x \, dx$

207. $\int x \operatorname{arctg}^2 x \, dx$

208. $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$

209. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx$

210. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

211. $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

212. $\int x^2 e^{\sqrt{x}} \, dx$

213. $\int x \sin \sqrt{x} \, dx$

214. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$

215. $\int \frac{\operatorname{arccotg} e^x}{e^x} \, dx$

216. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \,, \quad a \neq 0$

217. $\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} \, dx \,, \quad a \neq 0$

218. $\int \sin \ln x \, dx$

219. $\int \cos \ln x \, dx$

220. $\int x^2 \sin \ln x \, dx$

221. $\int e^{ax} \sin bx \, dx$

222. $\int e^{\arccos x} \, dx$

223. $\int e^{2x} \sin^2 x \, dx$

224. $\int \left(\frac{\cos x}{e^x} \right)^2 dx$

225. $\int (e^x - \cos x)^2 \, dx$

226. $\int x e^x \sin x \, dx$

227. $\int x e^x \sin^2 x \, dx$

228. $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} \, dx$

229. $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} \, dx$

230. $\int \frac{\ln (x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a)(x+b)} \, dx$

231. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x \, dx$

232. $\int x f''(x) \, dx$

233. Nechť $f(x)$ je ryze monotónní spojitá funkce na intervalu $\mathcal{I}$ a $f^{-1}(x)$ je její inverzní funkce na intervalu $f(\mathcal{I})$. Dokažte, že je-li

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c \,,$$

pak

$$\int f^{-1}(x) \, dx = x f^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right) + c \,.$$

Uvažujte případy: a) $f(x) = x^n$ $(n > 0)$; b) $f(x) = e^x$; c) $f(x) = \arcsin x$; d) $f(x) = \operatorname{argtgh} x$.

Odvoďte rekurentní vzorce pro integrály I_n $(n \in \mathbb{N})$:

234. $I_n = \int x^n e^{ax}\,dx, \quad a \neq 0$

235. $I_n = \int \ln^n x\,dx$

236. $I_n = \int x^\alpha \ln^n x\,dx, \quad \alpha \neq -1$

237. $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a}}\,dx, \quad n > 2$

238. $I_n = \int \sin^n x\,dx, \quad n > 2$

239. $I_n = \int \cos^n x\,dx, \quad n > 2$

240. $I_n = \int \sinh^n x\,dx, \quad n > 2$

241. $I_n = \int \cosh^n x\,dx, \quad n > 2$

242. $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}\,, \quad n > 2$

243. $I_n = \int \frac{dx}{\cosh^n x}\,, \quad n > 2$

Najděte primitivní funkce:

244. $\int x^8 e^{-x}\,dx$

245. $\int \ln^4 x\,dx$

246. $\int x^3 \ln^3 x\,dx$

247. $\int \frac{x^6}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

248. $\int \cos^5 x\,dx$

249. $\int \sin^6 x\,dx$

250. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}\,dx$

251. $\int \frac{dx}{\cosh^7 x}\,dx$

252. Dokažte následující vzorce

I. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c\,, \quad a \neq 0$

II. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c\,, \quad a \neq 0$

III. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + c$

IV. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c\,, \quad a > 0$

V. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c\,, \quad a > 0$

VI. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + c\,, \quad a > 0$

VII. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c\,, \qquad a > 0$

VIII. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c\,, \qquad a > 0$

Upravením kvadratického trojčlenu na tvar $y^2 \pm a^2$, resp. $a^2 - y^2$, kde y je lineární funkce proměnné x, a použitím příkladu 252 najděte primitivní funkce:

253. $\displaystyle\int \frac{dx}{a + bx^2}\,, \quad ab \neq 0$

254. $\displaystyle\int \frac{dx}{7x^2 + 5}$

255. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7}$

256. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 12x - 9x^2}$

257. $\displaystyle\int \frac{dx}{15x^2 - 34x + 15}$

258. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^4 - 2x^2 - 1}$

259. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx$

260. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$

261. $\displaystyle\int \frac{x^3\, dx}{x^4 - x^2 + 2}$

262. $\displaystyle\int \frac{x^5\, dx}{x^6 - x^3 - 2}$

263. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}$

264. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$

265. Dokažte, že je-li

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

pak platí

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\dfrac{y'}{2} + \sqrt{ay}\right| + c_1 & \text{pro } a > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \dfrac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + c_2 & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

266. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}}\,, \quad b \neq 0$

267. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}$

268. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$

269. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$

270. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{17 - 4x - x^2}}$

271. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - 3x^2 - 2x^4}}$

272. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}$

273. $\displaystyle\int \frac{(\sinh x)\cosh x}{\sqrt{\sinh^4 x+\cosh^4 x}}\,dx$

274. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$

275. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

276. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}\,dx$

277. $\displaystyle\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx$

278. $\displaystyle\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$

279. $\displaystyle\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx$

280. $\displaystyle\int x\sqrt{x^4+2x^2-1}\,dx$

I.3. Racionální funkce

I.3.1. Rozklad na parciální zlomky

Definice. *Racionální funkcí* se nazývá funkce $f(x)$ tvaru

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\,, \tag{8}$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy s reálnými koeficienty.

Věta. *Nechť $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ a $Q(x)$ je polynom s reálnými koeficienty stupně n, tj.*

$$Q(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0\,,$$

kde $a_i\in\mathbb{R}$, $i=0,\dots,n$, $a_n\neq 0$. Pak platí

$$\begin{aligned} Q(x)=a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_i)^{k_i}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\\ \cdot(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\dots(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}\,, \end{aligned} \tag{9}$$

kde $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_i$ jsou reálné různé kořeny polynomu Q a $k_1,k_2,\dots,k_i$ jejich násobnosti a kvadratické členy $(x^2+p_1x+q_1),(x^2+p_2x+q_2),\dots,(x^2+p_jx+q_j)$ jsou reálné, navzájem různé a mají komplexně sdružené kořeny (komplexní kořeny polynomu Q), jejichž násobnosti jsou $l_1,l_2,\dots,l_j$.

Poznámka. Vztah (9) se nazývá rozklad polynomu Q na *součin kořenových činitelů.* V rozkladu (9) může být $i=0$ nebo $j=0$, pak rozklad neobsahuje lineární nebo kvadratické členy. Platí ovšem

$$k_1+k_2+\cdots+k_i+2l_1+2l_2+\cdots+2l_j=n\,.$$

Věta (o rozkladu racionální funkce na parciální zlomky). *Nechť $P(x)$ je reálný polynom stupně m a $Q(x)$ je reálný polynom stupně n a (9) je rozklad polynomu $Q(x)$ na součin kořenových činitelů. Pak existuje polynom $R(x)$ stupně $m-n$ (je-li $m < n$ je $R(x) \equiv 0$) a n reálných čísel*

$$\begin{gathered}
A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1k_1}, \\
A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2k_2}, \\
\dots, \\
A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik_i}, \\
B_{11}, C_{11}, B_{12}, C_{12}, \dots, B_{1l_1}, C_{1l_1}, \\
B_{21}, C_{21}, B_{22}, C_{22}, \dots, B_{2l_2}, C_{2l_2}, \\
\dots, \\
B_{j1}, C_{j1}, B_{j2}, C_{j2}, \dots, B_{jl_j}, C_{jl_j}
\end{gathered} \tag{10}$$

tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro které $Q(x) \neq 0$, platí

$$\begin{gathered}
\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \\
+ \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \\
+ \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \\
\dots \\
+ \frac{A_{i1}}{x-\alpha_i} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}} + \\
+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \\
+ \frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{B_{2l_2}x + C_{2l_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}} + \\
\dots \\
+ \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \dots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{l_j}} \; .
\end{gathered} \tag{11}$$

Poznámka. Hledání primitivní funkce k racionální funkci (8) se tedy skládá ze dvou částí. Nejprve nalezneme rozklad (11) a pak nalezneme primitivní funkce k parciálním zlomkům. Nalézt rozklad (11) znamená nalézt n konstant (10).

Je-li $m \geq n$, vydělíme polynomy $P(x) : Q(x)$ a dostaneme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

kde stupeň $P_1(x)$ je menší než stupeň $Q(x)$. Zbytek, tj. racionální funkci $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$, pak rozkládáme na parciální zlomky. Je-li $m < n$, je $R(x) \equiv 0$ a racionální funkci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

rozkládáme přímo na parciální zlomky.

Důležité! *Rozkládat na parciální zlomky můžeme jen racionální funkci $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$, kde stupeň $P_1(x)$ je menší než stupeň $Q(x)$.*

Nechť tedy racionální funkce $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$, kde stupeň $P_1(x) < n$, je součtem parciálních zlomků z rovnosti (11), tj. zkráceně

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}}, \tag{12}$$

potom při hledání konstant (10) postupujeme následujícím způsobem: Sečteme zlomky na pravé straně rovnosti (12) a porovnáme polynomy v čitateli racionálních funkcí na obou stranách rovnosti (12). Dostaneme tak rovnost dvou polynomů, kterou můžeme k nalezení konstant (10) využít dvěma způsoby:*)

1) Dva polynomy se sobě rovnají, mají-li u stejných mocnin proměnné x stejné koeficienty. Porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné x dostaneme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých konstantách.

2) Dva polynomy (funkce) se sobě rovnají, rovnají-li se funkční hodnoty v každém bodě. Dosazováním různých vhodně zvolených čísel, nejlépe kořenů polynomu Q, dostaneme také soustavu n lineárních rovnic o n neznámých konstantách, která má v případě dosazování kořenů polynomu Q jednodušší tvar. Tato metoda je výhodná zejména v případě, kdy má polynom Q jednoduché kořeny.

Obě metody lze vzájemně kombinovat, např. postupným dosazením i reálných různých kořenů získáme přímo i konstant a dalších $n - i$ konstant získáme ze soustavy $n - i$ rovnic, které dostaneme buď porovnáním koeficientů u vybraných $n - i$ mocnin proměnné x (např. nejvyšších nebo nejnižších) nebo dosazením dalších $n - i$ různých čísel.

*)**Poznámka.** Má-li polynom Q pouze násobné reálné kořeny, můžeme k nalezení konstant (10) použít *metodu derivování.* Postupným dosazováním všech různých j-násobných kořenů ($j = 1, 2, \ldots, k$, kde $k \in \mathbb{N}$ je největší násobnost) do $(j-1)$. derivace rovnosti dvou polynomů v čitateli rovnosti (12) získáme všechny konstanty (10), viz [4].

I.3.2. Integrace parciálních zlomků

- 1. druhu

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,dx = \begin{cases} A\ln|x-\alpha| + c_1 & \text{pro } k=1 \\ \dfrac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + c_2 & \text{pro } k>1 \end{cases}$$

- 2. druhu

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

Nechť $B \neq 0$, pak upravíme

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\frac{2C}{B}}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p+\frac{2C}{B}-p}{(x^2+px+q)^k}\,dx =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}\,.$$

První integrál najdeme podle 1. věty o substituci, kde $t = \varphi(x) = x^2+px+q$.

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \begin{cases} \ln(x^2+px+q) + c_1 & \text{pro } k=1 \\ \dfrac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + c_2 & \text{pro } k>1 \end{cases}$$

Druhý integrál je vlastně také parciální zlomek 2. druhu pro případ $B=0$. Upravíme kvadratický trojčlen

$$x^2+px+q = \left(\frac{2x+p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = a^2\left(\left(\frac{2x+p}{2a}\right)^2 + 1\right),$$

kde označíme $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, což lze vzkledem k tomu, že x^2+px+q nemá reálné kořeny. Dále substitucí $t = \varphi(x) = \frac{2x+p}{2a}$ dostváme

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{a^{2k}\left(\left(\frac{2x+p}{2a}\right)^2+1\right)^k} = \frac{1}{a^{2k-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}\,.$$

Pro $k=1$ je $\int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t$, pro $k>0$ označme

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$$

a metodou per partes odvodíme rekurentní vzorec (viz př. 83b)

$$I_k = \frac{t}{2(k-1)(t^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} I_{k-1}\,. \tag{13}$$

Upravíme-li kvadratický trojčlen na tvar

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2,$$

kde $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, a označíme-li

$$I_k = \int \frac{dx}{\left((x + \frac{p}{2})^2 + a^2\right)^k}$$

dostaneme rekurentní vzorec ve tvaru (viz př. 83b)

$$I_k = \frac{x + \frac{p}{2}}{2a^2(k-1)\left((x + \frac{p}{2})^2 + a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} I_{k-1} \tag{14}$$

pro $k > 1$, a

$$\int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a}.$$

Poznámka. Z popsané metody integrace parciálních zlomků vyplývá, že primitivní funkcí ke každé racionální funkci je elementární funkce.

Poznámka. Uvedená metoda integrace racionální funkce je obecná. S její pomocí lze nalézt primitivní funkci ke každé racionální funkci za podmínky, že jsou známy nebo mohou být vypočítány všechny kořeny polynomu ve jmenovateli. V některých případech vidíme, že není nezbytně nutné použít tuto obecnou metodu, ale použití jiného způsobu (algebraické úpravy integrované funkce na jiný tvar, substituční metoda, metoda per partes) vede rychleji k cíli. (viz př. 349–366).

I.3.3. Ostrogradského metoda

V případě násobných kořenů polynomu $Q(x)$ je rozklad racionální funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky spojen s náročným výpočtem konstant (10) a dále pak integrace parciálních zlomků zvláště v případě násobných komplexních kořenů vede na opakované používání rekurentního vzorce (13) resp. (14), tedy ke zdlouhavým výpočtům. Tyto problémy řeší algebraická metoda výpočtu racionální části primitivní funkce k racionální funkci, která se nazývá *Ostrogradského metoda.* Jak víme z integrace parciálních zlomků, má-li polynom $Q(x)$ násobné kořeny, reálné nebo komplexní, je primitivní funkce vždy součtem *racionální funkce* a funkcí ln a arctg (případně jen jedné z nich).

Věta. *Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou reálné polynomy, stupeň $P <$ stupeň Q, a polynom $Q(x)$ má násobné kořeny. Pak existují dva polynomy $P_1(x)$ a $P_2(x)$ tak, že platí*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx\,, \tag{15}$$

kde $Q_1(x)\cdot Q_2(x) = Q(x)$ a polynom $Q_2(x)$ má jen jednoduché kořeny, stupeň $P_1 \leq$ $\leq$ stupeň $Q_1 - 1$, stupeň $P_2 \leq$ stupeň $Q_2 - 1$.

Poznámka. Vztah (15) se nazývá *Ostrogradského vzorec*, $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ se nazývá *racionální část* a $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$ *transcendentní část* primitivní funkce $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

Poznámka. Metoda spočívá v nalezení polynomů $P_1(x)$ a $P_2(x)$ a integraci transcendentní části $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$ metodou rozkladu na parciální zlomky. Polynomy $P_1(x)$ a $P_2(x)$ vyjádříme obecně s neurčitými koeficienty. Derivováním rovnosti (15) dostaneme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

a po úpravě

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_2(x) - P_1(x)\,\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)}\,Q_2(x) + P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}\,. \tag{16}$$

Porovnání polynomů v čitateli zlomků na obou stranách rovnosti (16) vede k rovnosti dvou polynomů a např. porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x, je-li stupeň $Q = n$, dostaneme soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých koeficientů polynomů $P_1(x)$ a $P_2(x)$. Tato soustava rovnic je většinou jednodušší než soustava rovnic pro koeficienty při rozkladu funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky. Dále je výhodné, že racionální část $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ získáme pouze algebraickou cestou bez použití integrace.

I.3.4. Řešené příklady

281. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

odkud

$$x = A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2)\,.$$

Dosazením

$$\begin{aligned} x = -1: &\quad -1 = -4A \Rightarrow A = \tfrac{1}{4} \\ x = -2: &\quad -2 = 5B \quad \Rightarrow B = -\tfrac{2}{5} \\ x = 3: &\quad\quad 3 = 20C \Rightarrow C = \tfrac{3}{20} \end{aligned}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{20}\int \frac{dx}{x-3} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{2}{5}\ln|x+2| + \frac{3}{20}\ln|x-3| + c\,.$$

282. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx$

Vydělením a rozkladem jmenovatele dostaneme

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{2x^2+2x+1}$$

odkud

$$6x^2+x-2 = A(2x^2+2x+1) + (Bx+C)(x-1)\,.$$

Dosazením

$$x = 1: \quad 5 = 5A \Rightarrow A = 1$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{aligned} x^2: &\quad\quad 6 = 2A+B \Rightarrow B = 4 \\ x^0: &\quad -2 = A - C \quad \Rightarrow C = 3\,. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,dx + 2\int \frac{dx}{(2x+1)^2+1} =$$
$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln(2x^2+2x+1) + \operatorname{arctg}(2x+1) + c\,.$$

283. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

odkud

$$2x^3+x^2+5x+1 = (Ax+B)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+3)$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{aligned} x^3: &\quad 2 = A + C \\ x^2: &\quad 1 = -A + B + D \\ x^1: &\quad 5 = A - B + 3C \\ x^0: &\quad 1 = B + 3D \end{aligned}$$

dostaneme $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 0$.

Upravíme

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$$

a vypočteme

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx &= \int \frac{dx}{x^2+3} + \int \frac{2x}{x^2-x+1}\,dx = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}} &+ \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1} = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}} &+ \ln(x^2-x+1) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c\,. \end{aligned}$$

284. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,dx$

Úpravou jmenovatele

$$x^5+x^4-x^3-x^2 = x^2(x^3+x^2-x-1) = x^2(x+1)(x^2-1) = x^2(x+1)^2(x-1)$$

a rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x-1}\,.$$

Máme

$$x^4+1 = Ax(x+1)^2(x-1) + B(x+1)^2(x-1) + \\ + Cx^2(x^2-1) + Dx^2(x-1) + Ex^2(x+1)^2,$$

odkud dosazením

$$\begin{aligned} x=0: &\quad 1=-B \quad \Rightarrow B=-1 \\ x=-1: &\quad 2=-2D \Rightarrow D=-1 \\ x=1: &\quad 2=4E \quad \Rightarrow E=\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{aligned} x^4: &\quad 1=A+C+E \\ x^1: &\quad 0=-A-B \end{aligned}$$

dostaneme $A=1$, $B=-1$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=-1$, $E=\frac{1}{2}$.

Je tedy

$$\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,dx = \\ = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \int\frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} = \\ = \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c\,.$$

285. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$

Rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}\,.$$

Máme

$$4x^2-8x = A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + \\ + (Cx+D)(x-1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)^2,$$

odkud dosazením

$$\begin{aligned} x=1: &\quad -4=4B \\ x=i: &\quad -4-8i=(Ei+F)(i-1)^2=2E-2iF \end{aligned}$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{aligned} x^5: &\quad 0 = A + C \\ x^4: &\quad 0 = -A + B - 2C + D \\ x^0: &\quad 0 = -A + B + D + F \end{aligned}$$

dostaneme $A = 2$, $B = -1$, $C = -2$, $D = -1$, $E = -2$, $F = 4$.
Je tedy

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\, dx =$$

$$= 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{2x+1}{x^2+1}\, dx - \int \frac{2x-4}{(x^2+1)^2}\, dx =$$

$$= 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x^2+1} + 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,.$$

Podle rekurentního vzorce (13) je

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\,.$$

Máme tedy

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\, dx = \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x-1} + \frac{1+2x}{x^2+1} + c\,.$$

286. Ostrogradského metodou vypočtěte (příklad 285) $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\, dx$

Protože $Q(x) = (x-1)^2(x^2+1)^2$ je $Q_1(x) = (x-1)(x^2+1)$, $Q_2(x) = (x - - 1)(x^2+1)$ a $P_1(x) = Ax^2 + Bx + C$, $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Tedy

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\, dx = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x^2+1)}\, dx\,.$$

Derivováním

$$\frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(2Ax+B)(x-1)(x^2+1) - (3x^2-2x+1)(Ax^2+Bx+C)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} + \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x^2+1)}$$

a po úpravě

$$\begin{aligned}4x^2-8x = {} & (2Ax+B)(x^3-x^2+x-1)-(Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+1)+ \\ & +(ax^2+bx+c)(x^3-x^2+x-1)\,.\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{aligned} x^5: &\quad 0 = a \\ x^4: &\quad 0 = -A+b \\ x^3: &\quad 0 = -2B+c-b \\ x^2: &\quad 4 = A+B-3C+b-c \\ x^1: &\quad -8 = -2A+2C+c-b \\ x^0: &\quad 0 = -B-C-c \end{aligned}$$

dostaneme $A=3$, $B=-1$, $C=0$, $a=0$, $b=3$, $c=1$. Rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{D}{x-1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}\,,$$

a tedy

$$3x+1=D(x^2+1)+(Ex+F)(x-1),$$

odkud dosazením

$$x=1: \quad 4=2D \Rightarrow D=2$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{aligned} x^2: &\quad 0=D+E \Rightarrow E=-2 \\ x^0: &\quad 1=D-F \Rightarrow F=1\,. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned}\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx &= \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+2\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{2x-1}{x^2+1}\,dx = \\ &= \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+2\ln|x-1|-\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+c = \\ &= \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+c\,.\end{aligned}$$

287. Najděte racionální část primitivní funkce $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

Použijeme Ostrogradského metodu. Protože $Q(x) = (x^2+1)^3$, je $Q_1(x) = (x^2+ +1)^2$, $Q_2(x) = x^2+1$ a $P_1(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D$, $P_2(x) = ax+b$. Tedy

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2} + \int \frac{ax+b}{x^2+1}\,dx\,.$$

Derivováním

$$\frac{1}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)(2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)}{(x+1)^4} + \frac{ax+b}{x^2+1}$$

a po úpravě

$$1 = (3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1) - 4x(Ax^3+Bx^2+Cx+D) + (ax+b)(x^2+1)^2.$$

Porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{aligned}
x^5: &\quad 0 = a\\
x^4: &\quad 0 = -A+b\\
x^3: &\quad 0 = -2B\\
x^2: &\quad 0 = 3A-3C+2b\\
x^1: &\quad 0 = -4D\\
x^0: &\quad 1 = C+b
\end{aligned}$$

dostaneme $A = \frac{3}{8}$, $B = 0$, $C = \frac{5}{8}$, $D = 0$, $a = 0$, $b = \frac{3}{8}$.

Racionální část primitivní funkce je $\displaystyle\frac{1}{8}\,\frac{3x^3+5x}{(x^2+1)^2}$.

I.3.5. Příklady

Rozkladem na parciální zlomky najděte primitivní funkce:

288. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$

289. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-2}$

290. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$

291. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

292. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$

293. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$

294. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$

295. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$

296. $\displaystyle\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,dx$

297. $\displaystyle\int \frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}\,dx$

298. $\displaystyle\int \frac{2x+11}{x^2+6x+13}\,dx$

299. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-6x+10}\,dx$

300. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$

301. $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$

302. $\displaystyle\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$

303. $\displaystyle\int \frac{5x-3}{(x-2)(3x^2+2x-1)}\,dx$

304. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$

305. $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$

306. $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$

307. $\displaystyle\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}\,dx$

308. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

309. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$

310. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

311. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$

312. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-13x^2+36}$

313. $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx$

314. $\displaystyle\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$

315. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

316. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$

317. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$

318. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$

319. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$

320. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

321. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$

322. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6-1}$

323. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$

324. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

325. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

326. $\int \frac{dx}{x^8-1}$

327. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

328. $\int \frac{dx}{x^6+1}$

329. $\int \frac{dx}{x^8+1}$

330. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$

331. $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$

332. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$

333. Při jaké podmínce je primitivní funkce

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$$

racionální funkce?

Ostrogradského metodou najděte primitivní funkce:

334. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$

335. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$

336. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

337. $\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$

338. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$

339. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$

340. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,dx$

341. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$

342. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx$

343. $\int \frac{x(2x^2+2x-1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx$

344. $\int \frac{x^6-x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx$

Najděte racionální část primitivní funkce:

345. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^4+x^2+1)^2}$

346. $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$

347. $\int \frac{(4x^5-1)\,dx}{(x^5+x+1)^2}$

348. Při jaké podmínce je primitivní funkce

$$\int \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + bx + c)^2}\, dx \qquad a \neq 0,\ b^2 \neq 4ac,$$

racionální funkce?

Použitím vhodných postupů (algebraických úprav, substituce, rozkladu na parciální zlomky apod.) najděte primitivní funkce:

349. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\, dx$

350. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^8 - 1}$

351. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8 + 3}\, dx$

352. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1}\, dx$

353. $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)}\, dx$

354. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x^{10} - 10)^2}\, dx$

355. $\displaystyle\int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2}\, dx$

356. $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}\, dx$

357. $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1}\, dx$

358. $\displaystyle\int \frac{x^{3n} - 1}{(x^{2n} + 1)^2}\, dx$

359. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)}$

360. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^{10} + 1)^2}$

361. $\displaystyle\int \frac{1 - x^7}{x(1 + x^7)}\, dx$

362. $\displaystyle\int \frac{x^4 - 1}{x(x^4 - 5)(x^5 - 5x + 1)}\, dx$

363. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}\, dx$

364. $\displaystyle\int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1}\, dx$

365. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx$

366. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^6 + 1}\, dx$

367. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}\, dx$

368. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6(1 + x^2)}\, dx$

369. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8 + x^4 + 1}\, dx$

I.4. Iracionální funkce

Při hledání primitivních funkcí některých funkcí (transcendentních) lze integrované funkce vhodnou substitucí (nebo více substitucemi) převést na integraci racionálních funkcí. V této části uvedeme nejvíce používané substituce pro některé významné třídy iracionálních funkcí.

Úmluva. Označme $R(x_1, \ldots, x_n)$ racionální funkci n proměnných, tj. podíl dvou polynomů s reálnými koeficienty n proměnných, kde za proměnné dosazujeme funkce, např.

$$\frac{x^2 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{1 + x^3}} = R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{1 + x^3}\right) .$$

I.4.1. $\displaystyle\int \boldsymbol{R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{s_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{s_n}\right) dx}$

Předpoklady: $n \in \mathbb{N},\ s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{Q},\ a, b, c \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0.$

I.4.1.1. Substituce

Položíme

$$t^s = \frac{ax + b}{cx + d},$$

kde s je společný jmenovatel zlomků $s_1, \ldots, s_n$ (jsou z $\mathbb{Q}$), vypočítáme x, volíme substituci

$$x = \varphi(t) = \frac{b - dt^s}{ct^s - a}$$

a podle 2. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce.

I.4.1.2. Řešené příklady

370. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\, dx\,, \quad a > 0$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(-\infty, -a)$ a $(a, +\infty)$, položíme

$$t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$$

vypočítáme x a volíme $x = \varphi(t) = -a\,\frac{t^2+1}{t^2-1}$, pak

$$dx = \frac{4at}{(t^2-1)^2}\, dt\,.$$

1) $\mathcal{I}_2 = (-\infty, -a)$, $\mathcal{I}_1 = (1, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(1, +\infty)$,
2) $\mathcal{I}_2 = (a, +\infty)$, $\mathcal{I}_1 = (0, 1)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(0, 1)$.

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\, dx = \int t \, \frac{4at}{(t^2-1)^2}\, dt = 4a \int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\, dt \; .$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} \, ,$$

takže

$$t^2 = A(t+1)^2(t-1) + B(t+1)^2 + C(t-1)^2(t+1) + D(t-1)^2 \, .$$

Dosazením

$$\begin{aligned} t = -1: &\quad 1 = 4D \Rightarrow D = \tfrac{1}{4} \\ t = 1: &\quad 1 = 4B \Rightarrow B = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{aligned} t^3: &\quad 0 = A + C \\ t^0: &\quad 0 = -A + B + C + D \end{aligned}$$

dostaneme $A = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{4}$. Můžeme tedy dopočítat náš integrál

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\, dx = 4a \int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\, dt =$$

$$= a\left(\int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{(t-1)^2} - \int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{dt}{(t+1)^2} \right) =$$

$$= a \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{2at}{t^2-1} + c = a \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} - 1}{\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} + 1} \right| - 2a \frac{\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}{\frac{-2a}{x+a}} + c =$$

$$= 2a \ln \left| \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} - 1 \right| + (x+a)\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} + k,$$

kde

$$k = c - a \ln 2a \, .$$

371. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(0,+\infty)=\mathcal{I}_2$, protože $s_1=\frac{2}{3}$, $s_2=\frac{1}{6}$, $s_3=\frac{1}{3}$ je $s=6$, volíme $x=\varphi(t)=t^6$, $dx=6t^5\,dt$.

$\mathcal{I}_1=(0,+\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)>0$ na $(0,+\infty)$.

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx=$$

$$=6\int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}\,t^5\,dt=6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}\,dt=6\int t^3\,dt+6\int \frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{3}{2}t^4+6\operatorname{arctg} t+c=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c\ .$$

372. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(2,+\infty)$.

Upravíme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{1}{(2-x)^2}\,,$$

položíme

$$t^3=\frac{2-x}{2+x}\,,$$

vypočítáme x a volíme

$$x=\varphi(t)=2\frac{1-t^3}{1+t^3}\,,$$

pak

$$dx=-12\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt\ .$$

1) $\mathcal{I}_2=(-\infty,-2)$, $\mathcal{I}_1=(-\infty,-1)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)<0$ na $(-\infty,-1)$,

2) $\mathcal{I}_2=(-2,2)$, $\mathcal{I}_1=(0,+\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)<0$ na $(0,+\infty)$,

3) $\mathcal{I}_2=(2,+\infty)$, $\mathcal{I}_1=(-1,0)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)<0$ na $(-1,0)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}=\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}=$$

$$=-12\int \frac{(t^3+1)^2t^3}{16t^6(t^3+1)^2}\,dt=-\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^3}=\frac{3}{8}\frac{1}{t^2}+c=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+c\ .$$

I.4.1.3. Příklady

Vypočítejte:

373. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

374. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$

375. $\displaystyle\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\,dx$

376. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$

377. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

378. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x}}$

379. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$

380. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$

381. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

382. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$

383. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

384. $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx\,, \quad a>0$

385. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$

386. $\displaystyle\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\,\frac{dx}{x^3}$

387. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\,dx\,, \quad a>0$

388. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

389. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,, \quad a>0,\ b>$
>0

390. $\displaystyle\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx\,, \quad a>0,\ b>0,\ a\neq b$

391. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}\,dx\,, \quad a>0,\ b>0,\ a\neq b,\ n\in\mathbb{N}$

392. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$

393. Dokažte, že primitivní funkce

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{(x-a)^p(x-b)^q}\right)\,dx\,,$$

kde $R(x,y)$ je racionální funkce proměnných x a $y = \sqrt[n]{(x-a)^p(x-b)^q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $a,b\in\mathbb{R}$, je elementární funkce, jestliže $\frac{p+q}{n}\in\mathbb{Z}$.

I.4.2. $\displaystyle\int \boldsymbol{R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx}$

Předpoklady: $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ b^2 - 4ac \neq 0.$

I.4.2.1. Eulerovy substituce

1. Eulerova substituce: Je-li $a > 0$, položíme

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t\,,$$

vypočítáme x a volíme substituci

$$x = \varphi(t) = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$$

a podle 2. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce proměnné t.

2. Eulerova substituce: Je-li $c > 0$, položíme

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}\,,$$

a za předpokladu $x \neq 0$ vypočítáme x a volíme substituci

$$x = \varphi(t) = \frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$$

a podle 2. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce proměnné t.

Jestliže bod 0 patří do definičniho oboru integrované funkce, pak pro $x > 0$ a pro $x < 0$ volíme integrační konstanty a dodefinujeme integrací získanou funkci v bodě 0 tak, aby primitivní funkce byla spojitá na celém definičním oboru integrované funkce.

3. Eulerova substituce: Má-li polynom $ax^2 + bx + c$ reálné kořeny (různé), pak $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ a

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x - \alpha_2|\sqrt{a\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}} = |x - \alpha_1|\sqrt{a\frac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}}\,,$$

čímž se dostaneme k případu funkce, který je řešen v sekci I.4.1 (str. 42).

Poznámka. Znaménko u $\sqrt{a}$ v 1. Eulerově substituci a u $\sqrt{c}$ ve 2. Eulerově substituci volíme většinou s přihlédnutím k tvaru funkce $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, ale v podstatě lze volit libovolně.

Poznámka. Z uvedených substitucí je zřejmé, že bychom vystačili s 1. a 3. Eulerovou substitucí, protože pro $a < 0$ musí mít polynom $ax^2 + bx + c$ reálné kořeny, aby integrovaná funkce neměla definiční obor roven prázdné množině. Nejsou-li kořeny polynomu ax^2+bx+c celočíselné, vede často 3. Eulerova substituce ke složitým algebraickým úpravám integrované funkce proměnné t, a proto, pokud to jde, používáme v těchto případech 2. Eulerovu substituci.

Jestliže polynom $ax^2 + bx + c$ splňuje podmínky dvou nebo všech tří Eulerových substitucí, lze použít kteroukoliv z těchto substitucí (s přihlédnutím k předešlé poznámce).

I.4.2.2. $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{R_1(x)\,dx}}{\boldsymbol{\sqrt{ax^2+bx+c}}}$

Eulerovými substitucemi lze převést integraci každé funkce $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ na integraci racionální funkce $\frac{P(t)}{Q(t)}$ proměnné t. V některých případech ale může být polynom $Q(t)$ dosti vysokého stupně nebo nelze algebraickými metodami nalézt jeho kořeny, takže nedokážeme polynom $Q(t)$ rozložit na součin kořenových činitelů, a tedy nenalezneme rozklad (11). V takových případech lze použít při integraci jiné metody nebo substituce. Každou racionální funkci

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$$

lze algebraickými úpravami vyjádřit ve tvaru součtu

$$\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + R_2(x)\,,$$

kde $R_1(x)$ a $R_2(x)$ jsou racionální funkce. Jestliže nyní nalezneme rozklad (11) racionální funkce $R_1(x)$ na součet polynomu $P_k(x)$ a parciálních zlomků, dostaneme se k integrálům následujících tří typů:

$$\text{I.} \qquad \int \frac{P_k(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$\text{III.} \qquad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\text{III.} \qquad \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\,, \qquad p^2-4q<0.$$

I.4.2.3. $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{P_k(x)}}{\boldsymbol{\sqrt{ax^2+bx+c}}}\,\boldsymbol{dx}$

Primitivní funkci tohoto typu nalezneme tzv. *metodou Ostrogradského*; podobně jako při integraci racionálních funkcí nalezneme část výsledku algebraickými operacemi.

Věta. *Nechť $P_k(x)$ je reálný polynom stupně k. Pak existuje polynom $Q(x)$, stupeň $Q(x) \leq k-1$, a konstanta λ tak, že platí*

$$\int \frac{P_k(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,. \tag{17}$$

Poznámka. Metoda spočívá v nalezení polynomu $Q(x)$ a konstanty λ a dále v nalezení primitivní funkce k funkci $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Polynom $Q(x)$ vyjádříme obecně s neurčitými koeficienty a derivováním rovnosti (17) dostáváme

$$\frac{P_k(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + Q(x)\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,,$$

odkud po vynásobení výrazem $\sqrt{ax^2+bx+c}$ dostaneme rovnost dvou polynomů

$$P_k(x) = Q'(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}\,Q(x)(2ax+b) + \lambda\,. \tag{18}$$

Porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x na obou stranách rovnosti (18) dostaneme soustavu $k+1$ lineárních rovnic pro k neznámých koeficientů polynomu $Q(x)$ a konstantu λ. Primitivní funkci

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

nalezneme úpravou kvadratického trojčlenu ax^2+bx+c podle vzorců X. a XI. uvedených v sekci I.1.3 Vzorce (str. 9).

I.4.2.4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Primitivní funkci tohoto typu převedeme substitucí na typ I. Položíme

$$t = \frac{1}{x-\alpha}\,,$$

vypočítáme x a volíme substituci $x = \varphi(t) = \frac{1}{t} + \alpha$ a podle 2. věty o substituci přejdeme k integrálu

$$-\operatorname{sgn} t \int \frac{t^{k-1}\,dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}}\,,$$

který je řešen v sekci I.4.2.3 (str. 47).

I.4.2.5. $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,, \quad p^2-4q<0,\ k\in\mathbb{N}$

1. Je-li $x^2+px+q = ax^2+bx+c$, pak upravíme

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2k+1}{2}}} = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2k+1}{2}}} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2k+1}{2}}}$$

První integrál nalezneme podle 1. věty o substituci. Substitucí

$$t=\varphi(x)=x^2+px+q,$$

druhý integrál nejprve upravíme

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2k+1}{2}}} = \int \frac{dt}{(t^2+\gamma^2)^{\frac{2k+1}{2}}}\,,$$

kde $t=x+\frac{p}{2}$ a $\gamma^2=q-\frac{p^2}{4}$. Dále položíme

$$u=\frac{t}{\sqrt{t^2+\gamma^2}}\,,$$

vypočítáme t a volíme substituci (Abelovu)

$$t=\varphi(u)=\frac{\gamma u}{\sqrt{1-u^2}}$$

a konečně podle 2. věty o substituci dostáváme

$$\int \frac{dt}{(t^2+\gamma^2)^{\frac{2k+1}{2}}} = \frac{1}{\gamma^{2k}}\int (1-u^2)^{k-1}du\,.$$

2. Je-li $x^2+px+q \neq ax^2+bx+c$, pak hledáme substituci $x=\varphi(t)$ takovou, aby v obou kvadratických trojčlenech vymizely lineární členy.

V případě $p=\frac{b}{a}$ jde o substituci

$$x=t-\frac{p}{2}\,.$$

V případě $p\neq\frac{b}{a}$ položíme

$$x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\,,$$

kde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Dosadíme za x do obou kvadratických trojčlenů a zjistíme, že čísla α,β jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2\alpha\beta+p(\alpha+\beta)+2q&=0\\ 2a\alpha\beta+b(\alpha+\beta)+2c&=0, \end{aligned}$$

tedy

$$\alpha + \beta = -2\,\frac{aq-c}{ap-b}\,, \qquad \alpha\beta = \frac{bq-pc}{ap-b}\,,$$

což znamená, že α, β jsou kořeny kvadratické rovnice

$$(ap-b)z^2 + 2(aq-c)z + (bq-pc) = 0\,.$$

Substituce $x = t - \frac{p}{2}$, resp. $x = \frac{\alpha t + \beta}{t+1}$, převádí hledaný integrál na integrál tvaru

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{st^2+r}}\,,$$

kde $P(t)$ je polynom stupně $2k-1$ a $\lambda > 0$.

Pro $k > 1$ rozložíme racionální funkci

$$\frac{P(t)}{(t^2+\lambda)^k}$$

na parciální zlomky a dostaneme součet integrálů typu

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+\lambda)^l\sqrt{st^2+r}}\,, \quad \int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^l\sqrt{st^2+r}}\,, \quad l = 1, 2, \ldots, k.$$

První integrál nalezneme podle 1. věty o substituci substitucí $u = \varphi(t) = \sqrt{st^2+r}$ a druhý integrál podle 2. věty o substituci Abelovou substitucí: položíme

$$v = \frac{st}{\sqrt{st^2+r}}\,,$$

vypočítáme t a volíme substituci (Abelovu)

$$t = \varphi(v) = \sqrt{\frac{r}{s}}\frac{v}{\sqrt{s-v^2}}\,,$$

které převádí hledaný integrál na integrál tvaru

$$s^l \int \frac{(s-v^2)^{l-1}}{\left((r-s\lambda)v^2+\lambda s^2\right)^l}\,dv\,.$$

I.4.2.6. Goniometrické a hyperbolické substituce

Primitivní funkci

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

lze vždy algebraickými úpravami kvadratického trojčlenu a odpovídající lineární substitucí upravit na jeden z následujících typů

$$\int R(t, \sqrt{\alpha^2-t^2})\,dt\,, \qquad \int R(t, \sqrt{t^2-\alpha^2})\,dt\,, \qquad \int R(t, \sqrt{\alpha^2+t^2})\,dt\,.$$

Substitucemi v případech

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha^2-t^2}:&\ t=\alpha\sin u,\ t=\alpha\cos u,\ t=\alpha\,\mathrm{tgh}\,u,\\
\sqrt{t^2-\alpha^2}:&\ t=\frac{\alpha}{\cos u},\ t=\pm\,\alpha\cosh u,\ t=\alpha\,\mathrm{cotgh}\,u,\\
\sqrt{t^2+\alpha^2}:&\ t=\alpha\sinh u,\ t=\alpha\,\mathrm{tg}\,u,\ t=\alpha\,\mathrm{cotg}\,u,
\end{aligned}$$

podle 2. věty o substituci přejdeme k primitivní funkci

$$\int R_1(\sin u,\cos u)\,du\,,\quad \text{resp.}\quad \int R_2(\sinh u,\cosh u)\,du\,,$$

kterou nalezneme buď použitím vzorců nebo dalšími substitucemi (viz I.5, I.6).

I.4.2.7. Řešené příklady

394. Vypočtěte $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$. Použijeme 1. Eulerovu substituci. Položíme

$$\sqrt{x^2+x+1}=-x+t\,,$$

vypočítáme x a volíme

$$x=\varphi(t)=\frac{t^2-1}{1+2t}\,,$$

pak

$$dx=2\,\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,dt\,.$$

1) $\mathcal{I}_2=(-\infty,-1)$, $\mathcal{I}_1=(-\frac{1}{2},0)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)>0$ na $(-\frac{1}{2},0)$,

2) $\mathcal{I}_2=(-1,+\infty)$, $\mathcal{I}_1=(0,+\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)>0$ na $(0,+\infty)$.

$$I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{1}{t}\,\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,dt\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}\,,$$

takže

$$t^2+t+1=A(1+2t)^2+Bt(1+2t)+Ct\,.$$

Dosazením

$$\begin{array}{lll} t = 0: & 1 = A & \\ t = -\frac{1}{2}: & \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}C & \Rightarrow C = -\frac{3}{2} \\ t = 1: & 3 = 9A + 3B + C & \Rightarrow B = -\frac{3}{2} \end{array}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{dt}{t} - 3\int \frac{dt}{1+2t} - 3\int \frac{dt}{(1+2t)^2} = \\ &= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2}\,\frac{1}{1+2t} + c = \\ &= 2\ln(x + \sqrt{x^2+x+1}) - \frac{3}{2}\ln(1 + 2x + 2\sqrt{x^2+x+1}) + \\ &\quad + \frac{3}{2}\,\frac{1}{1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}} + c. \end{aligned}$$

395. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}) = \mathcal{I}_2$. Použijeme 2. Eulerovu substituci: položíme $\sqrt{1-2x-x^2} = xt - 1$ a pro $x \neq 0$ vypočítáme x a volíme

$$x = \varphi(t) = 2\,\frac{t-1}{t^2+1},$$

pak

$$dx = 2\,\frac{1+2t-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

1) $x < 0$: $\mathcal{I}_2 = (-(1+\sqrt{2}), 0)$, $\mathcal{I}_1 = (1-\sqrt{2}, 1)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(1-\sqrt{2}, 1)$,

2) $x > 0$: $\mathcal{I}_2 = (0, \sqrt{2}-1)$, $\mathcal{I}_1 = (1, 1+\sqrt{2})$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(1, 1+\sqrt{2})$.

$$I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{1}{2\,\frac{t-1}{t^2+1}\,t}\,2\,\frac{1+2t-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = -\int \frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)}\,dt.$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

takže

$$t^2 - 2t - 1 = A(t-1)(t^2+1) + Bt(t^2+1) + (Ct+D)t(t-1).$$

Dosazením

$$t = 0: \quad -1 = -A \Rightarrow A = 1$$
$$t = 1: \quad -2 = 2B \ \Rightarrow B = -1$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné t

$$t^3: \quad 0 = A + B + C \Rightarrow C = 0$$
$$t^2: \quad 1 = -A + D \quad \ \Rightarrow D = 2\,.$$

Je tedy

$$I = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\, t + c_0 =$$
$$= \ln \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1-x}{\sqrt{1-2x-x^2}+1} - 2\,\mathrm{arctg}\, \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} + c_0\,.$$

Závěr: Protože

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1-x}{\sqrt{1-2x-x^2}+1} = 0$$

a

$$\lim_{x\to 0-} \mathrm{arctg}\, \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} = -\frac{\pi}{2}\,, \quad \lim_{x\to 0+} \mathrm{arctg}\, \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x} = \frac{\pi}{2}\,,$$

volíme pro $x > 0$ a pro $x < 0$ integrační konstanty a dodefinujeme integrací získanou funkci v bodě 0 tak, aby primitivní funkce

$$F(x) = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$$

byla spojitá na intervalu $(-(1+\sqrt{2}), -1+\sqrt{2})$. Označme

$$F_0(x) = \ln \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1-x}{\sqrt{1-2x-x^2}+1} - 2\,\mathrm{arctg}\, \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x}\,,$$

pak

$$F(x) = \begin{cases} F_0(x) - \pi + c & \text{pro } x \in (-(1+\sqrt{2}), 0) \\ c & \text{pro } x = 0 \\ F_0(x) + \pi + c & \text{pro } x \in (0, -1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

396. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\, dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(-\infty, -2)$, $(-1, -\frac{2}{3})$ a $(-\frac{2}{3}, +\infty)$, přičemž -1 a -2 jsou kořeny polynomu x^2+3x+2. Použijeme 3. Eulerovu substituci. Upravíme

$$\sqrt{x^2+3x+2} = \sqrt{(x+2)(x+1)} = |x+1|\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,,$$

položíme

$$t = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,,$$

vypočítáme x a volíme

$$x = \varphi(t) = \frac{2-t^2}{t^2-1}\,,$$

pak

$$dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt\,.$$

1) $\mathcal{I}_2 = (-\infty, -2)$, $\mathcal{I}_1 = (0,1)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) < 0$ na $(0,1)$,

2) $\mathcal{I}_2 = (-1, -\frac{2}{3})$, $\mathcal{I}_1 = (2, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) < 0$ na $(2, +\infty)$.

3) $\mathcal{I}_2 = (-\frac{2}{3}, +\infty)$, $\mathcal{I}_1 = (1,2)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) < 0$ na $(1,2)$.

a) $x > -1 \Rightarrow |x+1| = x+1$

$$\int \frac{x - (x+1)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}{x + (x+1)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{2-t^2}{t^2-1} - (\frac{2-t^2}{t^2-1}+1)t}{\frac{2-t^2}{t^2-1} + (\frac{2-t^2}{t^2-1}+1)t}\,\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt = -2\int \frac{t(t+2)}{(t+1)^3(t-1)(t-2)}\,dt\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{t^2+2t}{(t+1)^3(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{(t+1)^3} + \frac{D}{t-1} + \frac{E}{t-2}$$

takže

$$\begin{aligned} t^2 + 2t = {} & A(t+1)^2(t-1)(t-2) + B(t+1)(t-1)(t-2) + \\ & + C(t-1)(t-2) + D(t+1)^3(t-2) + E(t+1)^3(t-1)\,. \end{aligned}$$

Dosazením

$$\begin{aligned} t = -1: & \quad C = -\tfrac{1}{6} \\ t = 1: & \quad D = -\tfrac{3}{8} \\ t = 2: & \quad E = \tfrac{8}{27} \end{aligned}$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné t

$$\begin{aligned} t^4: & \quad 0 = A + D + E & \Rightarrow A = \tfrac{17}{216} \\ t^0: & \quad 0 = 2A + 2B + 2C - 2D - E & \Rightarrow B = -\tfrac{5}{36}\,. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\int \frac{x-(x+1)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}{x+(x+1)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}\,dx =$$

$$= -\frac{17}{108}\int\frac{dt}{t+1} + \frac{5}{18}\int\frac{dt}{(t+1)^2} + \frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^3} + \frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{16}{27}\int\frac{dt}{t-2} =$$

$$= -\frac{5}{18}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{6}\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{17}{108}\ln|t+1| + \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{16}{27}\ln|t-2| + c\,,$$

kde

$$t = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,, \quad \text{resp.} \quad t = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}\,.$$

b) $x < -2 \Rightarrow |x+1| = -(x+1)$

$$\int \frac{x+(x+1)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}{x-(x+1)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}\,dx = -2\int\frac{t(t-2)}{(t-1)^3(t+1)(t+2)}\,dt\,,$$

substitucí $-t = y$ převedeme na tvar, který je řešen v části a), kde

$$y = -\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,, \quad \text{resp.} \quad y = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}\,,$$

tzn., že pro $x > -1$ i pro $x < -2$ dostáváme stejný výsledek.

397. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\,dx$

Použijeme Ostrogradského metodu (17); protože stupeň $P_k(x) = 3$, je stupeň $Q(x) \leq 2$, tedy $Q(x) = ax^2+bx+c$, pak

$$\int \frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\,dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{4x^2+4x+2} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\,,$$

derivací získáme

$$\frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}} =$$

$$= (2ax+b)\sqrt{4x^2+4x+2} + (ax^2+bx+c)\frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\,,$$

dále násobíme výrazem $\sqrt{4x^2+4x+2}$ a dostaneme rovnost dvou polynomů

$$12x^3+16x^2+9x+2 = (2ax+b)(4x^2+4x+2) + (ax^2+bx+c)(4x+2) + \lambda\,,$$

porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{array}{lrcll} x^3: & 12 &=& 8a+4a & \Rightarrow\ a=1 \\ x^2: & 16 &=& 8a+4b+4b+2a & \Rightarrow\ b=\frac{3}{4} \\ x^1: & 9 &=& 4a+4b+4c+2b & \Rightarrow\ c=\frac{1}{8} \\ x^0: & 2 &=& 2b+2c+\lambda & \Rightarrow\ \lambda=\frac{1}{4}\,, \end{array}$$

a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+1}} = \frac{1}{2}\ln\Bigl(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+2}\Bigr).$$

Výsledkem tedy je

$$\int \frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\,dx =$$

$$= \left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}\right)\sqrt{4x^2+4x+2}+\frac{1}{8}\ln\Bigl(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+2}\Bigr)+c\,.$$

398. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(-\infty,-1-\sqrt{6})$ a $(-1+\sqrt{6},+\infty)$. Položíme

$$t=\frac{1}{x+2}\,,$$

vypočítáme x a volíme

$$x=\varphi(t)=\frac{1}{t}-2\,,\qquad dx=-\frac{1}{t^2}\,dt\,.$$

1) $\mathcal{I}_2=(-\infty,-1-\sqrt{6})$, $\mathcal{I}_1=\Bigl(\frac{1}{1-\sqrt{6}},0\Bigr)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)<0$ na $\Bigl(\frac{1}{1-\sqrt{6}},0\Bigr)$,

2) $\mathcal{I}_2=(-1+\sqrt{6},+\infty)$, $\mathcal{I}_1=\Bigl(0,\frac{1}{1+\sqrt{6}}\Bigr)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)<0$ na $\Bigl(0,\frac{1}{1+\sqrt{6}}\Bigr)$.

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} =$$

$$= \int \frac{t^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+2\left(\frac{1}{t}-2\right)-5}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int \frac{|t|\,dt}{\sqrt{1-2t-5t^2}}\,;$$

upravíme

$$5t^2+2t-1=\frac{1}{5}\,(25t^2+10t+1-6)=\frac{6}{5}\left(\left(\frac{5t+1}{\sqrt{6}}\right)^2-1\right).$$

a) $t \in \left(\frac{1}{1-\sqrt{6}}, 0\right)$

$$-\int \frac{|t|\,dt}{\sqrt{1-2t-5t^2}} = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-2t-5t^2}} = -\frac{1}{10}\int \frac{-10t-2+2}{\sqrt{1-2t-5t^2}}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{10}\int \frac{-10t-2}{\sqrt{1-2t-5t^2}}\,dt - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{6}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-(\frac{5t+1}{\sqrt{6}})^2}} =$$

$$= -\frac{1}{5}\sqrt{1-2t-5t^2} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{5t+1}{\sqrt{6}} + c =$$

$$= -\frac{1}{5}\sqrt{1-\frac{2}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2}} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{\frac{5}{x+2}+1}{\sqrt{6}} + c =$$

$$= -\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{|x+2|} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}(x+2)} + c =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}(x+2)} + c\,,$$

b) $t \in \left(0, \frac{1}{1+\sqrt{6}}\right)$

$$-\int \frac{|t|\,dt}{\sqrt{1-2t-5t^2}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-2t-5t^2}} =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{1-2t-5t^2} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{5t+1}{\sqrt{6}} + c =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}(x+2)} + c\,,$$

Výsledkem pro $x \in (-\infty, -1-\sqrt{6}) \cup (-1+\sqrt{6}, +\infty)$ je

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}} = \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}\,|x+2|} + c\,.$$

399. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ a $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$; protože koeficienty u x jsou v obou kvadratických trojčlenech stejné, volíme substituci

$$x = \varphi(t) = t - \frac{1}{2}\,,$$

pak $dx = dt$.

1) $\mathcal{I}_2 = \left(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $\mathcal{I}_1 = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$,

2) $\mathcal{I}_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, $\mathcal{I}_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left((t-\frac{1}{2})^2 + (t-\frac{1}{2}) + 1\right)\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2 + (t-\frac{1}{2}) - 1}} = \int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}}$$

a dále použijeme Abelovu substituci. Položíme

$$v = \frac{t}{\sqrt{t^2 - \frac{5}{4}}}$$

vypočítáme t a volíme

$$t = \varphi(v) = \sqrt{\frac{5}{4}}\,\frac{v}{\sqrt{v^2-1}}\,,$$

pak

$$dt = \sqrt{\frac{5}{4}}\,\frac{-1}{(v^2-1)\sqrt{v^2-1}}\,dv\,.$$

1) $\mathcal{I}_2 = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $\mathcal{I}_1 = (-\infty, -1)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(v) < 0$ na $(-\infty, -1)$,

2) $\mathcal{I}_2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, $\mathcal{I}_1 = (1, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(v) < 0$ na $(1, +\infty)$.

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}} = \int \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\frac{v^2}{v^2-1} + \frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{5}{4}}\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}}\sqrt{\frac{5}{4}}\,\frac{-dv}{(v^2-1)\sqrt{v^2-1}} =$$

$$= -4\int \frac{dv}{8v^2-3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}v}{\sqrt{3}-\sqrt{8}v}\right| + c = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}+\sqrt{8}t}{\sqrt{3}\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}-\sqrt{8}t}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}+\sqrt{8}(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}-\sqrt{8}(x+\frac{1}{2})}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2}(2x+1)}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2}(2x+1)}\right| + c\,.$$

400. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-\infty,\infty)$, a protože koeficienty u x v kvadratických trojčlenech jsou různé, položíme

$$x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1}$$

a dosadíme

$$x^2+2 = \left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)^2 + 2 = \frac{(\alpha^2+2)t^2+(2\alpha\beta+4)t+\beta^2+2}{(t+1)^2}$$

$$2x^2-2x+5 = 2\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right) + 5 =$$

$$= \frac{(2\alpha^2-2\alpha+5)t^2+(4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10)t+2\beta^2-2\beta+5}{(t+1)^2}\,.$$

Protože chceme, aby v kvadratických trojčlenech vymizely lineární členy, musí platit

$$2\alpha\beta+4=0\,, \qquad 4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+10=0\,,$$

tedy

$$\alpha+\beta=1\,, \qquad \alpha\beta=-2\,,$$

a čísla α,β jsou kořeny kvadratické rovnice

$$z^2-3z-2=0\,.$$

Řešením této rovnice jsou čísla -1 a 2, volíme-li tedy např. $\alpha=-1$, $\beta=2$, pak

$$x=\varphi(t)=\frac{2-t}{t+1} \quad \text{a} \quad dx = \frac{-3}{(t+1)^2}\,dt\,.$$

1) $\mathcal{I}_2=(-\infty,-1)$, $\mathcal{I}_1=(-\infty,-1)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)<0$ na $(-\infty,-1)$,

2) $\mathcal{I}_2=(-1,+\infty)$, $\mathcal{I}_1=(-1,+\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)<0$ na $(-1,+\infty)$.

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} =$$

$$= -3\int \frac{(t+1)^2|t+1|}{(3t^2+6)\sqrt{9t^2+9}}\,\frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{3}\int \frac{|t+1|}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}\,dt\,.$$

a) $t\in(-\infty,-1)$, a tedy $x\in(-\infty,-1)$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{|t+1|\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{3}\int \frac{t\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}\,.$$

Integrál
$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}$$
nalezneme podle 1. věty o substituci substitucí $u = \varphi(t) = \sqrt{t^2+1}$, pak
$$du = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt\,,$$
$\mathcal{I}_1 = (-\infty, -1)$, $\mathcal{I}_2 = \mathbb{R}$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = (\sqrt{2}, +\infty) \subset \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) < 0$ na $(-\infty, -1)$,
$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u + c_1 =$$
$$= \operatorname{arctg}\sqrt{t^2+1} + c_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x^2-2x+5}{(x+1)^2}} + c_1 =$$
$$= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{|x+1|} + c_1 = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} + c_1\,.$$
Integrál
$$\int \frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}$$
nalezneme Abelovou substitucí: položíme
$$v = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,,$$
vypočítáme t a volíme
$$t = \varphi(v) = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,,$$
pak
$$dt = \frac{dv}{(1-v^2)\sqrt{1-v^2}}\,.$$
$\mathcal{I}_2 = (-\infty, -1)$, $\mathcal{I}_1 = \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
$$\int \frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{1}{\left(\frac{v^2}{1-v^2}+2\right)\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}}\,\frac{dv}{(1-v^2)\sqrt{1-v^2}} = \int \frac{dv}{2-v^2} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+v}{\sqrt{2}-v}\right| + c_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{2}\sqrt{t^2+1}-t}\right| + c_2 =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{2x^2-2x+5}{(x+1)^2}} + \frac{2-x}{x+1}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{2x^2-2x+5}{(x+1)^2}} - \frac{2-x}{x+1}}\right| + c_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}}{|x+1|} + \frac{2-x}{x+1}}{\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}}{|x+1|} - \frac{2-x}{x+1}}\right| + c_2 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{-\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{-\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x} \right| + c_2 =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x} \right| + c_2 \,.$$

Výsledkem pro $x \in (-\infty, -1)$ je

$$-\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x} \right| + c_3$$

b) $t \in (-1, \infty)$, a tedy $x \in (-1, +\infty)$

$$-\frac{1}{3} \int \frac{|t+1|\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} = -\frac{1}{3} \int \frac{t\,dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} - \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x} \right| + c_4 \,.$$

Závěr: Protože

$$\lim_{x \to -1+} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} = \frac{\pi}{2} \,, \quad \lim_{x \to -1-} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} = -\frac{\pi}{2} \,,$$

a

$$\lim_{x \to -1} \ln \left| \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x} \right| = \ln \frac{\sqrt{18}+3}{\sqrt{18}-3} \,,$$

zvolíme na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, +\infty)$ integrační konstanty a dodefinujeme integrací získanou funkci v bodě -1 tak, aby primitivní funkce

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$$

byla spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$. Označme pro $x \neq -1$

$$F_0(x) = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x} \right| \,,$$

pak

$$F(x) = \begin{cases} F_0(x) + c & \text{pro } x < -1 \\ F_0(x) + \frac{1}{3}\pi + c & \text{pro } x > -1 \end{cases} \,,$$

$$F(-1) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{18}+3}{\sqrt{18}-3} + c \,.$$

401. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-1,1)$, volíme substituci $x=\varphi(t)=\sin t$, pak $dx=\cos t\,dt$.

$\mathcal{I}_2=(-1,1)$, $\mathcal{I}_1=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)>0$ na $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{\cos t\,dt}{(1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\operatorname{tg} t+c=\frac{\sin t}{\cos t}+c=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}+c=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c\,.$$

402. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(-\infty,-\sqrt{2})$ a $(\sqrt{2},+\infty)$.

a) $x\in(-\infty,-\sqrt{2})$,

volíme substituci $x=\varphi(t)=-\sqrt{2}\cosh t$, pak $dx=-\sqrt{2}\sinh t\,dt$.

$\mathcal{I}_2=(-\infty,-\sqrt{2})$, $\mathcal{I}_1=(0,+\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)<0$ na $(0,+\infty)$,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}=-\int \frac{2\cosh^2 t}{\sqrt{2\cosh^2 t-2}}\sqrt{2}\sinh t\,dt=-2\int \cosh^2 t\,dt=$$

$$=-\int(\cosh 2t+1)\,dt=-\frac{1}{2}\sinh 2t-t+c_1=-\sinh t\cosh t-t+c_1=$$

$$=-(\cosh t)\sqrt{\cosh^2 t-1}-t+c_1=\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x^2}{2}-1}-\operatorname{argcosh}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c_1=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}-\ln\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{x^2}{2}-1}\right)+c_1=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)+c_1=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\frac{-2}{\sqrt{x^2-2}+x}+\ln\sqrt{2}+c_1=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\left(-(x+\sqrt{x^2-2}\,)\right)-\ln 2+\ln\sqrt{2}+c_1=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\left(-(x+\sqrt{x^2-2}\,)\right)+c\,.$$

b) $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$,
volíme substituci $x = \varphi(t) = \sqrt{2}\cosh t$, pak $dx = \sqrt{2}\sinh t\, dt$.
$\mathcal{I}_2 = (\sqrt{2}, +\infty)$, $\mathcal{I}_1 = (0, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(0, +\infty)$,

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{2\cosh^2 t}{\sqrt{2\cosh^2 t - 2}} \sqrt{2}\sinh t\, dt = 2\int \cosh^2 t\, dt =$$

$$= (\cosh t)\sqrt{\cosh^2 t - 1} + t + c_2 = \frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x^2}{2} - 1} + \operatorname{argcosh}\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2} + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{2} - 1}\right) + c_2 =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2} + \ln\left(x + \sqrt{x^2-2}\right) - \ln\sqrt{2} + c_2 = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2} + \ln\left(x + \sqrt{x^2-2}\right) + c\,.$$

Výsledkem pro $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ je

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2} + \ln\left|x + \sqrt{x^2-2}\right| + c\,.$$

403. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\quad a > 0$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-\infty, +\infty)$, volíme substituci $x = \varphi(t) = a\operatorname{tg} t$, pak $dx = \frac{a}{\cos^2 t}\, dt$.
$\mathcal{I}_2 = (-\infty, +\infty)$, $\mathcal{I}_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + a^2}} \frac{a\, dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + c_0$$

(viz příklad 78 d)). Dále upravujeme

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + c_0 = \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| + c_0 = \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t\right| + c_0 =$$

$$= \ln\left|\sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}} + \operatorname{tg} t\right| + c_0 = \ln\left|\sqrt{\operatorname{tg}^2 + 1} + \operatorname{tg} t\right| + c_0 =$$

$$= \ln\left|\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} + \frac{x}{a}\right| + c_0 = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c_0 - \ln|a| =$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c\,.$$

I.4.2.8. Příklady

Vypočítejte:

404. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(1+x)}\right)^2}$

405. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

406. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$

407. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$

408. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$

409. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{1+x+x^2}-1)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$

410. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,, \quad a\neq 0$

411. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx$

412. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx$

413. $\displaystyle\int \frac{(3x+2)\,dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$

414. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{3x^2+1}}$

415. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}}$

416. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}\,dx$

417. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx$

418. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

419. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$

420. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$

421. $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$

422. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

423. $\displaystyle\int \frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

424. $\displaystyle\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,, \quad a\neq 0$

425. $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$

426. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$

427. $\displaystyle\int \sqrt{3-4x+4x^2}\,dx$

428. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$

429. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$

430. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

431. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$

432. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$

433. $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$

434. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

435. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$

436. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

437. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

438. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$

439. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$

440. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

441. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

442. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$

443. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$

444. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$

445. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$

446. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$

447. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

448. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}$

449. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^2+x+4}}$

450. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+7)^{\frac{3}{2}}}$

451. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{\frac{5}{2}}}$

452. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{7}{2}}}$

453. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$

454. $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$

455. $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

456. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

457. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$

458. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(3x^2+2x+3)\sqrt{2x^2-x+2}}$

459. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$

460. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,,\quad a\neq 0$

461. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,,\quad a\neq 0$

462. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}\,,\quad a\neq 0$

463. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,,\quad a\neq 0$

464. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx\,,\quad a>0$

465. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx\,, \quad a>0$

466. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,, \quad a,b>0$

Návod: $x-a=(b-a)\sin^2 t$

467. $\displaystyle\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx\,, \quad a,b>0$

468. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\,, \quad a,b>0$

Návod: $x+a=(b-a)\sinh^2 t$

469. $\displaystyle\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx\,, \quad a,b>0$

470. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

471. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$

472. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$

473. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx$

474. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}\,dx$

475. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}\,dx$

476. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$

477. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}\,dx$

I.4.3. $\displaystyle\int x^m\,(a+bx^n)^p\,dx$

Předpoklady: $a,b\in\mathbb{R},\ m,n,p\in\mathbb{Q}$.

Poznámka. Jsou-li $a\neq 0,\ b\neq 0,\ n\neq 0,\ p\neq 0$, nazývá se primitivní funkce tohoto tvaru *binomický integrál.* Primitivní funkce tohoto typu patří do množiny elementárních funkcí pouze ve třech případech:

- p je celé číslo,
- $\dfrac{m+1}{n}$ je celé číslo,
- $\dfrac{m+1}{n}+p$ je celé číslo,

I.4.3.1. Substituce

p je celé číslo. Jde o případ funkce, který je řešen v sekci I.4.1. Volíme substituci

$$x=\varphi(t)=t^s,$$

kde $s\in\mathbb{N}$ je společný jmenovatel zlomků m a n, a podle 2. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce.

$\frac{m+1}{n}$ *je celé číslo.* Položíme
$$a + bx^n = t^s,$$
kde $s \in \mathbb{N}$ je jmenovatel zlomku p, vypočítáme x a volíme substituci
$$x = \varphi(t) = \sqrt[n]{\frac{t^s - a}{b}}$$
a podle 2. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce.

$\frac{m+1}{n} + p$ *je celé číslo.* Za předpokladu $x \neq 0$ položíme
$$ax^{-n} + b = t^s,$$
kde $s \in \mathbb{N}$ je jmenovatel zlomku p, vypočítáme x a volíme substituci
$$x = \varphi(t) = \sqrt[n]{\frac{a}{t^s - b}}$$
a podle 2. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce. Patří-li bod 0 do definičního oboru integrované funkce, pak pro $x > 0$ a pro $x < 0$ volíme integrační konstanty a dodefinujeme integrací získanou funkci v bodě 0 tak, aby primitivní funkce byla spojitá na celém definičním oboru integrované funkce.

I.4.3.2. Řešené příklady

478. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(0, +\infty)$. Protože p je celé číslo, volíme $x = \varphi(t) = t^6$, pak $dx = 6t^5\,dt$.

$\mathcal{I}_2 = (0, +\infty)$, $\mathcal{I}_1 = (0, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(0, +\infty)$.

Je tedy
$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = \int \frac{t^3}{(1+t^2)^2}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}\,dt =$$
$$= 6\int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt =$$
$$= 6\int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+4}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(t^2+1)^2}\right)dt =$$
$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{t^2+1} - 21\operatorname{arctg} t + c\,,$$
kde $t = \sqrt[6]{x}$.

479. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-1,1)$. Protože $m=5$, $n=2$, $\frac{m+1}{n}=$ $=3$ je celé číslo, položíme $t^2=1-x^2$, vypočítáme $|x|=\sqrt{1-t^2}$ a pro $x>0$ volíme $\varphi(t)=\sqrt{1-t^2}$ a pro $x<0$ volíme $\varphi(t)=-\sqrt{1-t^2}$. Funkce $\varphi(t)$ je definována na intervalu $\langle -1,1\rangle$, ale protože není prostá, $\varphi'(0)=0$, vybereme si jeden z intervalů $(-1,0)$ nebo $(0,1)$, na kterém je $\varphi'(t)\neq 0$ a existuje tedy $\varphi^{-1}(x)$ a tím jsou splněny předpoklady 2. věty o substituci.

a) $x>0$: Volíme substituci $x=\varphi(t)=\sqrt{1-t^2}$, pak $dx=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

$\mathcal{I}_2=(0,1)$, $\mathcal{I}_1=(0,1)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)<0$ na $(0,1)$,

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^5}{t}\,\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int\left(1-t^2\right)^2dt=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+c,$$

kde $t=\sqrt{1-x^2}$.

b) $x<0$: Volíme substituci $x=\varphi(t)=-\sqrt{1-t^2}$, pak $dx=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

$\mathcal{I}_2=(-1,0)$, $\mathcal{I}_1=(0,1)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)>0$ na $(0,1)$,

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\left(-\sqrt{1-t^2}\right)^5}{t}\,\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int\left(1-t^2\right)^2dt=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+c,$$

kde $t=\sqrt{1-x^2}$.

Závěr: Protože $\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=1$, dostáváme pro $x\in(-1,1)$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5+c\,.$$

480. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$. Protože $m=$ $=0$, $n=3$, $p=-\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n}+p=0$ je celé číslo, položíme $t^3=1+x^{-3}$, $x\neq 0$, vypočítáme x a volíme

$$x=\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}}\,,$$

pak

$$dx=-\frac{t^2}{(t^3-1)^{\frac{4}{3}}}\,dt\,.$$

1) $\mathcal{I}_2=(-\infty,-1)$, $\mathcal{I}_1=(0,1)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)<0$ na $(0,1)$,

2) $\mathcal{I}_2 = (-1, 0)$, $\mathcal{I}_1 = (-\infty, 0)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) < 0$ na $(-\infty, 0)$.

3) $\mathcal{I}_2 = (0, +\infty)$, $\mathcal{I}_1 = (1, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) < 0$ na $(1, +\infty)$.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = -\int \frac{1}{t\,\frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}}}\,\frac{t^2}{\left(\sqrt[3]{t^3-1}\right)^4}\,dt = -\int \frac{t}{t^3-1}\,dt\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{t}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}$$

$$t = A(t^2+t+1) + (Bt+C)(t-1)$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné t

$$\begin{array}{lr} t^2: & A+B=0 \\ t^1: & A-B+C=1 \\ t^0: & A-C=0 \\ \hline & A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{1}{3}\,. \end{array}$$

Upravíme kvadratický trojčlen

$$t^2+t+1 = \frac{1}{4}\left(4t^2+4t+1+3\right) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$$

a pokračujeme dále ve výpočtu integrálu

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{3}\int \frac{t-1}{t^2+t+1}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{6}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) - \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c_0 =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\right)^2 + \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} + 1}{\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} - 1\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+1}{\sqrt{3}} + c_0 =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 + x\sqrt[3]{1+x^3} + x^2}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 - 2x\sqrt[3]{1+x^3} + x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} + c_0\,.$$

Závěr: Protože

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}\,, \quad \lim_{x\to 0-} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{2}\,,$$

a

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 + x\sqrt[3]{1+x^3} + x^2}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 - 2x\sqrt[3]{1+x^3} + x^2} = 0\,,$$

zvolíme na intervalech $(-1,0)$ a $(0,+\infty)$ integrační konstanty a dodefinujeme integrací získanou funkci v bodě 0 tak, aby primitivní funkce

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

byla spojitá na intervalu $(-1,+\infty)$. Označme pro $x \neq 0$

$$F_0(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 + x\sqrt[3]{1+x^3} + x^2}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 - 2x\sqrt[3]{1+x^3} + x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}\,,$$

pak

$$F(x) = \begin{cases} F_0(x) + c & \text{pro } x < 0 \\ F_0(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + c & \text{pro } x > 0 \end{cases}\,,$$

$$F(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\pi}{2} + c\,.$$

I.4.3.3. Příklady

Vypočítejte:

481. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(1-\sqrt[6]{x})}$

482. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+\sqrt[3]{x})^3}$

483. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^{10}}$

484. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

485. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$

486. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$

487. $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}\,dx$

488. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

489. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

490. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\,dx$

491. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

492. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}$

493. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$

494. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

495. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx$

496. $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$

497. $\displaystyle\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$

498. V jakém případě je primitivní funkce

$$\int \sqrt{1+x^m}\,dx\,, \quad m \in \mathbb{Q},$$

elementární funkcí?

I.5. Goniometrické funkce

I.5.1. $\displaystyle\int \boldsymbol{R(\sin x, \cos x)\,dx}$

I.5.1.1. Substituce

I. Univerzální substituce. Za předpokladu $x \in (-\pi, \pi)$ položíme

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\,,$$

vypočítáme x a volíme substituci

$$x = \varphi(t) = 2\operatorname{arctg} t$$

a podle 2. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce proměnné t. Vyjádříme funkce $\sin x$ a $\cos x$ pomocí funkce $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}\,,$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}\,.$$

Poznámka. Pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, plyne z rovnice $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

$$x = \varphi_k(t) = 2 \operatorname{arctg} t + 2k\pi\,.$$

Protože pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\varphi_k'(t) = \frac{2}{t^2+1}\,, \qquad \varphi_k^{-1}\left((-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)\right) = (-\infty, +\infty)\,,$$

a i vyjádření funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pomocí funkce $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ je stejné na každém intervalu $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$, dostaneme pro $x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$ substitucí $x = 2 \operatorname{arctg} t + 2k\pi$ stejnou racionální funkci proměnné t pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Formálně tedy stačí nalézt primitivní funkci na intervalu $(-\pi, \pi)$ substitucí $x = \varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} t$, a pak na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ zvolit integrační konstanty a dodefinovat integrací získanou funkci v bodech $\pi + 2k\pi$ tak, aby primitivní funkce byla spojitá na celém definičním oboru integrované funkce.

Univerzální substituci je možné použít při integraci funkce $R(\sin x, \cos x)$ v každém případě, někdy se ale dostaneme k racionální funkci proměnné t, která obsahuje polynomy dosti vysokých stupňů a obtížně se hledá rozklad polynomu ve jmenovateli na kořenové činitele (pokud ho lze vůbec najít). Proto při speciálním tvaru funkce $R(\sin x, \cos x)$ používáme následující substituce:

II. 1) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$**.**
Za předpokladu $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ položíme

$$\operatorname{tg} x = t\,,$$

vypočítáme x a volíme substituci

$$x = \varphi(t) = \operatorname{arctg} t$$

a podle 2. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce proměnné t.

Vyjádříme funkce $\sin x$ a $\cos x$ pomocí funkce $\operatorname{tg} x$

$$\sin x = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,,$$

$$\cos x = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,.$$

Poznámka. U substituce $\operatorname{tg} x = t$ nastává analogická situace jako u univerzální substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, plyne z rovnice $\operatorname{tg} x = t$

$$x = \varphi_k(t) = \operatorname{arctg} t + k\pi$$

a pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\varphi_k'(t) = \frac{1}{t^2+1}, \qquad \varphi_k^{-1}\left(\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right) = (-\infty, +\infty).$$

Vyjádření $\sin x$ a $\cos x$ pomocí funkce $\operatorname{tg} x$ se sice na intervalech $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ liší znaménkem $\operatorname{sgn}\cos x$, protože $\cos x = (\operatorname{sgn}\cos x)\sqrt{\cos^2 x}$, ale vzhledem ke tvaru funkce $R(\sin x, \cos x)$ se znaménka minus buď zkrátí nebo vynásobí na znaménko plus, takže není nutné znaménko $\operatorname{sgn}\cos x$ uvažovat. Pro $x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ dostaneme substitucí $x = \operatorname{arctg} t + k\pi$ stejnou racionální funkci proměnné t pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Formálně tedy stačí nalézt primitivní funkci na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ substitucí $x = \varphi(t) = \operatorname{arctg} t$, a pak na intervalech $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ zvolit integrační konstanty a dodefinovat integrací získanou funkci v bodech $\frac{\pi}{2}+k\pi$ tak, aby primitivní funkce byla spojitá na celém definičním oboru integrované funkce.

Poznámka. Použijeme-li při integraci funkce $R(\sin x, \cos x)$, která splňuje podmínku $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ univerzální substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, dostaneme v racionální funkci proměnné t polynomy dvojnásobně vyšších stupňů než při použití substituce $\operatorname{tg} x = t$.

II. 2) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$**.**

V tomto případě lze funkci $R(\sin x, \cos x)$ upravit na tvar $R_1(\cos x)\sin x$, kde R_1 je racionální funkce jedné proměnné $\cos x$. Volíme substituci

$$t = \varphi(x) = \cos x$$

a podle 1. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce proměnné t.

II. 3) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$**.**

V tomto případě lze funkci $R(\sin x, \cos x)$ upravit na tvar $R_2(\sin x)\cos x$, kde R_2 je racionální funkce jedné proměnné $\sin x$. Volíme substituci

$$t = \varphi(x) = \sin x$$

a podle 1. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce proměnné t.

Poznámka. V některých případech je vhodné použít i jiné substituce, například $t = \sin^2 x$ nebo $t = \cos^2 x$ apod., záleží to na tvaru funkce $R(\sin x, \cos x)$.

Poznámka. Uvedené substituce I a II lze použít i při integraci jiných funkcí proměnných $\sin x$ a $\cos x$, např. funkcí iracionálních. V tomto případě ale musíme uvažovat znaménko při vyjádření funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pomocí funkce $\operatorname{tg} x$.

I.5.1.2. Řešené příklady

499. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Protože je $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme $t = \varphi(x) = \cos x$; $dt = -\sin x\, dx$. Funkce

$$f(t) = -\frac{1}{(2+t)(1-t^2)}$$

je definována na sjednocení intervalů $(-\infty, -2)\cup(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty) = Df$ a $\varphi\left((k\pi,(k+1)\pi)\right) = (-1,1)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$, tedy $\varphi\left((k\pi,(k+1)\pi)\right) \subset Df$.

$$I = \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = -\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\, dx = -\int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)}$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{1}{(2+t)(1-t^2)} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}$$

$$1 = A(1-t^2) + B(2+t)(1+t) + C(2+t)(1-t)$$

a dosazením

$$\begin{array}{lll} t=1: & 1 = 6B & \Rightarrow B = \frac{1}{6} \\ t=-1: & 1 = 2C & \Rightarrow C = \frac{1}{2} \\ t=-2: & 1 = -3A & \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \end{array}.$$

Je tedy

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2+t} - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|2+t| + \frac{1}{6}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\ln|1+t| + c =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(2+t)^2(1-t)}{(1+t)^3} + c = \frac{1}{6}\ln\frac{(2+\cos x)^2(1-\cos x)}{(1+\cos x)^3} + c\,.$$

500. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\, dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Nejprve upravíme

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\, dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = x - \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

a primitivní funkci

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

hledáme na $(-\infty,+\infty)$. Protože $R(-\sin x,-\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$, pro $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ položíme $\operatorname{tg} x = t$, vypočítáme x a volíme $x=\varphi(t)=\operatorname{arctg} t$, pak

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

$\mathcal{I}_2=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\mathcal{I}_1=(-\infty,+\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1)=\mathcal{I}_2$, $\varphi'(t)>0$ na $(-\infty,+\infty)$.

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{2t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}t+c_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\operatorname{tg}x+c_0\,.$$

Protože

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\operatorname{tg}x=-\frac{\pi}{2}\quad\text{pro každé } k\in\mathbb{Z}$$

a

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)-}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\operatorname{tg}x=\frac{\pi}{2}\quad\text{pro každé } k\in\mathbb{Z},$$

zvolíme na intervalech $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, integrační konstanty a dodefinujeme integrací získanou funkci v bodech $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, tak, aby primitivní funkce

$$F(x)=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

byla spojitá na intervalu $(-\infty,\infty)$. Tedy

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}k\pi+c & \text{pro } x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}k\pi+c & \text{pro } x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\,.$$

Závěr:

$$\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx = x-F(x),\quad x\in(-\infty,+\infty)\,.$$

501. Vypočtěte $\displaystyle\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-\infty,+\infty)$. Pro $x\in(-\pi,\pi)$ položíme $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, vypočítáme x a volíme $x=\varphi(t)=2\operatorname{arctg}t$, pak

$$dx=\frac{2\,dt}{t^2+1}\,.$$

$\mathcal{I}_2 = (-\pi, \pi)$, $\mathcal{I}_1 = (-\infty, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(-\infty, +\infty)$.

$$I = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{1}{2\,\frac{2t}{t^2+1} - \frac{1-t^2}{t^2+1} + 5}\,\frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2}\,;$$

upravíme kvadratický trojčlen

$$3t^2 + 2t + 2 = \frac{1}{3}\left(9t^2 + 6t + 1 + 5\right) = \frac{5}{3}\left(\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1\right)$$

a pokračujeme ve výpočtu integrálu

$$I = \frac{3}{5}\int \frac{dt}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + c_0 = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + c_0\,.$$

Protože

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)+} \operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{Z}$$

a

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)-} \operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{Z},$$

zvolíme na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, integrační konstanty a dodefinujeme integrací získanou funkci v bodech $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tak, aby primitivní funkce

$$F(x) = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$$

byla spojitá na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Tedy

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{5}}{5}k\pi + c & \text{pro } x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\[2ex] \dfrac{\sqrt{5}}{5}\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{5}k\pi + c & \text{pro } x = \pi + 2k\pi \end{cases}.$$

502. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sin x\,\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Volíme $t = \varphi(x) = \sin^2 x$, pak $dt = 2\sin x\cos x\,dx$.

$\mathcal{I}_1 = (-\infty, +\infty)$, $\mathcal{I}_2 = (-\infty, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \langle 0, 1\rangle \subset \mathcal{I}_2$.

$$I = \int \frac{\sin x\,\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + (1-t)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1}\,;$$

upravíme kvadratický trojčlen

$$2t^2 - 2t + 1 = \frac{1}{2}\left(4t^2 - 4t + 1 + 1\right) = \frac{1}{2}\left((2t-1)^2 + 1\right)$$

a dokončíme výpočet integrálu

$$I = \int \frac{dt}{(2t-1)^2 + 1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t-1) + c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\sin^2 x - 1) + c\,.$$

I.5.1.3. Příklady

Vypočítejte:

503. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{(3\cos x - 1)^3}$

504. $\displaystyle\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x}\,dx$

505. $\displaystyle\int \frac{2\sin^3 x + (\cos^2 x)\sin 2x}{\sin^4 x + 3\cos^2 x}\,dx$

506. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin 4x}\,dx$

507. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}$

508. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{3 + 4\sin^2 x}$

509. $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x + \cos^3 x}{\sin^4 x + \sin^2 x}\,dx$

510. $\displaystyle\int \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \sin^4 x}\,dx$

511. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 3}\,dx$

512. $\displaystyle\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$

513. $\displaystyle\int \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}}\,dx$

514. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$

515. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}$

516. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x\cos x + \sin^2 x}$

517. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos 2x - \sin 2x}$

518. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos^2 x - 2\sin 2x + \sin^2 x}$

519. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + \cos^2 x}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$

520. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + 3\sin 2x - 4\cos^2 x}$

521. $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin 2x + c\sin^2 x}, \quad c > 0$

522. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x}$

523. $\displaystyle\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$

524. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx$

525. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$

526. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$

527. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

528. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x}\, dx$

529. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$

530. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}$, $a^2 + b^2 \neq 0$

531. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\, dx$

532. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$

533. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

534. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x + \sin x}$

535. $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$, $a^2 + b^2 \neq 0$

536. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\, dx$

537. $\displaystyle\int \frac{1 + \sin x}{\sin 2x + 2\sin x}\, dx$

538. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

539. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x}$, $a)\ 0 < \varepsilon < 1,\ b)\ \varepsilon > 1$

540. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + 4\cos x}$

541. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + \cos x}$

542. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - \sin x}$

543. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin 2x + 4\sin x - 4\sin^2 x}$

544. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x + \sin x)^2}\, dx$

545. $\displaystyle\int \frac{2\sin x - \sin 2x}{\sin^3 x + (1 - \cos x)^3}\, dx$

546. $\displaystyle\int \frac{dx}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}$

547. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 1}$

548. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x + 5}$

549. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 5}$

550. $\displaystyle\int \frac{dx}{7\cos x - 4\sin x + 8}$

551. $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$, $\quad c > \sqrt{a^2 + b^2} > 0$

---

552. Najděte čísla A, B, C tak, že pro $a^2 + b^2 \neq 0$ platí rovnost

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x}\, dx = Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x| + C\,.$$

553. $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\,dx$

554. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}\,dx$

555. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 + 5\,\mathrm{tg}\, x}$

556. $\displaystyle\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}\,dx$

---

557. Najděte čísla A, B, C tak, že pro $a^2 + b^2 \neq 0$ platí rovnost

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c}\,dx =$$
$$= Ax + B \ln|a \sin x + b\cos x + c| + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}\,.$$

558. $\displaystyle\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\,dx$

559. $\displaystyle\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x}\,dx$

560. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}\,dx$

561. $\displaystyle\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2}\,dx$

562. $\displaystyle\int \frac{1 - \cos(x-a)}{1 - \cos(x+a)}\,dx$

---

563. Najděte čísla A, B, C tak, že pro $a^2 + b^2 \neq 0$ platí rovnost

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}\,dx =$$
$$= A\sin x + B\cos x + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}\,.$$

564. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx$

565. $\displaystyle\int \frac{1 - 2\sin 2x + 2\cos^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx$

566. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \sin x\cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx$

567. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \sin x\cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx$

---

568. Najděte čísla A, B tak, že platí rovnost

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x}\, dx = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2}\,,$$

kde $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$ a λ_1, λ_2 jsou řešení rovnice $(a-\lambda)(c-\lambda) = b^2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x, \quad k_i = \frac{1}{a - \lambda_i}\,, \quad i = 1, 2\,.$$

569. $\displaystyle\int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x}\, dx$

570. $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}\, dx$

571. $\displaystyle\int \frac{\sin x - 2 \cos x}{1 + 4 \sin x \cos x}\, dx$

---

572. Nechť

$$I_n = \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n}\,, \quad a^2 + b^2 \neq 0,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Dokažte rekurentní vzorec

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)} \left(\frac{b \sin x - a \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + (n-2) I_{n-2} \right), \quad n > 1,$$

a pomocí tohoto vzorce najděte

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^3}\,.$$

573. Nechť

$$I_n = \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n}\,, \quad |a| \neq |b|,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Dokažte rekurentní vzorec

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(b^2-a^2)} \left(\frac{b \sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}} - (2n-3) a I_{n-1} + (n-2) I_{n-2} \right), \quad n > 1,$$

a pomocí tohoto vzorce najděte

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2}\,, \quad 0 < \varepsilon < 1,$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^3}\,, \quad \varepsilon > 1,$

I.5.2. $\int \sin^\nu x \, \cos^\mu x \, dx$

Předpoklady: $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$.

I.5.2.1. Poznámky

I. $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$.

Pak $\sin^\nu x \, \cos^\mu x = R(\sin x, \cos x)$ a tento případ je řešen v odstavci I.5.1.

II. μ, ν nejsou současně celá čísla.

Substitucí

$$u = \varphi(x) = \sin^2 x$$

převedeme podle 1. věty o substituci primitivní funkci

$$\int \sin^\nu x \, \cos^\mu x \, dx$$

na binomický integrál

$$\frac{1}{2} \int (1-u)^{\frac{\mu-1}{2}} \, u^{\frac{\nu-1}{2}} \, du \qquad \text{(viz. I.4.3.)}$$

Primitivní funkce tohoto typu patří do množiny elementárních funkcí ve třech případech:

1) $\frac{\mu-1}{2}$ je celé číslo $\Rightarrow \mu$ je celé liché číslo,

2) $\frac{\nu-1}{2} + 1$ je celé číslo $\Rightarrow \nu$ je celé liché číslo,

3) $\frac{\nu-1}{2} + 1 + \frac{\mu-1}{2}$ je celé číslo $\Rightarrow \nu + \mu$ je celé sudé číslo.

I.5.2.2. Substituce

1) μ je celé liché číslo.

Podle 1. věty o substituci volíme substituci

$$t = \varphi(x) = \sin x \, .$$

2) ν je celé liché číslo.

Podle 1. věty o substituci volíme substituci

$$t = \varphi(x) = \cos x \, .$$

3) $\mu + \nu$ je celé sudé číslo.

Položíme $t = \operatorname{tg} x$ nebo $t = \operatorname{cotg} x$ a podle 2. věty o substituci volíme substituci

$$x = \operatorname{arctg} t \quad \text{nebo} \quad x = \operatorname{arccotg} t \, .$$

Výše uvedené substituce převádí primitivní funkci

$$\int \sin^\nu x\, \cos^\mu x\, dx$$

na integrál z racionální funkce proměnné t nebo na binomický integrál proměnné t.

I.5.2.3. Řešené příklady

574. Vypočtěte $\displaystyle\int \cos^5 x\, dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Protože je $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme $t = \varphi(x) = \sin x$, pak $dt = \cos x\, dx$.

$\mathcal{I}_1 = (-\infty, +\infty)$, $\mathcal{I}_2 = (-\infty, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \langle -1, 1\rangle \subset \mathcal{I}_2$.

$$\int \cos^5 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx = \int (1-t^2)^2\, dt = \int (1-2t^2+t^4)\, dt =$$

$$= t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c\,.$$

575. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\, \cos^4 x}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $\left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Protože je $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ položíme $t = \operatorname{tg} x$, vypočítáme x a volíme $x = \varphi(t) = \operatorname{arctg} t$, pak $dx = \frac{dt}{t^2+1}$.

1) $\mathcal{I}_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathcal{I}_1 = (-\infty, 0)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(-\infty, 0)$,

2) $\mathcal{I}_2 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathcal{I}_1 = (0, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(0, +\infty)$,

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}\, dt}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2}} = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^4}\, dt =$$

$$= \int \left(t^2 + 3 + \frac{3}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) dt = \frac{t^3}{3} + 3t - \frac{3}{t} - \frac{1}{3t^3} + c =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}^3 x - \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}\right) + 3\left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) + c\,.$$

Protože definiční obor integrované funkce je

$$Df = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

je primitivní funkce spojitá na Df.

576. Vypočtěte $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $\left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Protože je $\nu = -\frac{2}{3}$ a $\mu = -1$, a tedy μ je celé liché číslo, volíme $t = \varphi(x) = \sin x$, pak $dt = \cos x \, dx$.

Funkce

$$f(t) = \frac{1}{(1-t^2)\sqrt[3]{t^2}}$$

je definována na sjednocení intervalů $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) = Df$ a pro $\mathcal{I}_k = \left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, je $\varphi(\mathcal{I}_k) = (0, 1)$ nebo $\varphi(\mathcal{I}_k) = (-1, 0)$, tedy pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je $\varphi(\mathcal{I}_k) \subset Df$.

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{\cos x \, dx}{(1-\sin^2 x)\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt[3]{t^2}} =$$

$$= \int t^{-\frac{2}{3}}(1-t^2)^{-1} \, dt \, .$$

Nyní řešíme binomický integrál (viz I.4.3), a protože $p = -1$ je celé číslo, volíme substituci $t = \varphi(u) = u^3$, pak $dt = 3u^2 \, du$.

1) $\mathcal{I}_2 = (-1, 0)$, $\mathcal{I}_1 = (-1, 0)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(u) > 0$ na $(-1, 0)$,

2) $\mathcal{I}_2 = (0, 1)$, $\mathcal{I}_1 = (0, 1)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(u) > 0$ na $(0, 1)$.

$$I = \int u^{-2}(1-u^6)^{-1} \cdot 3u^2 \, du = -3 \int \frac{du}{u^6 - 1} \, .$$

Nalezneme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{1}{u^6-1} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1} + \frac{Cu+D}{u^2-u+1} + \frac{Eu+F}{u^2+u+1}$$

$$\begin{aligned} 1 = {} & A(u-1)(u^4+u^2+1) + B(u+1)(u^4+u^2+1) + \\ & + (Cu+D)(u^2-1)(u^2+u+1) + (Eu+F)(u^2-1)(u^2-u+1) \, . \end{aligned}$$

Dosazením

$$\begin{array}{ll} u = 1: & 1 = 6B \ \ \Rightarrow B = \frac{1}{6} \\ u = -1: & 1 = -6A \Rightarrow A = -\frac{1}{6} \end{array} .$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné u

$$\begin{array}{lr} u^5: & A + B + C + E = 0 \\ u^4: & -A + B + C + D - E + F = 0 \\ u^2: & -A + B - C + E = 0 \\ u^1: & A + B - D + F = 0 \\ \hline & C = \frac{1}{6}, \ D = -\frac{1}{3}, \ E = -\frac{1}{6}, \ F = -\frac{1}{3} \, . \end{array}$$

Upravíme kvadratický trojčlen

$$u^2 \pm u + 1 = \frac{1}{4}\left(4u^2 \pm 4u + 1 + 3\right) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2u \pm 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

a pokračujeme dále ve výpočtu integrálu

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{4}\int \frac{2u-4}{u^2-u+1}\,du + \frac{1}{4}\int \frac{2u+4}{u^2+u+1}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{1}{4}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}\,du +$$

$$+ \int \frac{du}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} + \frac{1}{4}\int \frac{2u+1}{u^2+u+1}\,du + \int \frac{du}{\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + \frac{1}{4}\ln\frac{u^2+u+1}{u^2-u+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + c\,,$$

kde $u = \sqrt[3]{\sin x}$.

Poznámka. Kdybychom hned volili substituci $u = \sqrt[3]{\sin x}$, potom je

$$du = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$$

a dostali bychom

$$\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{\cos x\,dx}{(1-\sin^2 x)\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{du}{1-u^6}\,.$$

577. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$

Primitivní funkci hledáme na intervalech $\left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Protože je $\nu = -\frac{1}{3}$ a $\mu = \frac{1}{3}$, a tedy $\mu + \nu = 0$ je celé sudé číslo, položíme $t = \operatorname{tg} x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}, 0)$, vypočítáme x a volíme $x = \varphi(t) = \operatorname{arctg} t$, pak $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

1) $\mathcal{I}_2 = (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\mathcal{I}_1 = (-\infty, 0)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(-\infty, 0)$,

2) $\mathcal{I}_2 = (0, \frac{\pi}{2})$, $\mathcal{I}_1 = (0, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(0, +\infty)$.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt[3]{t}} = \int t^{-\frac{1}{3}}(1+t^2)^{-1}\,dt\,.$$

Nyní řešíme binomický integrál (viz I.4.3), a protože $p = -1$ je celé číslo, volíme substituci $t = \varphi(u) = u^3$, pak $dt = 3u^2\,du$.

1) $\mathcal{I}_2 = (-\infty, 0)$, $\mathcal{I}_1 = (-\infty, 0)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(-\infty, 0)$,

2) $\mathcal{I}_2 = (0, +\infty)$, $\mathcal{I}_1 = (0, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(t) > 0$ na $(0, +\infty)$.

$$I = \int u^{-1}(1+u^6)^{-1} \cdot 3u^2\,du = \frac{3}{2}\int \frac{2u\,du}{1+u^6} = \frac{3}{2}\int \frac{dv}{1+v^3}\,,$$

kde jsme použili substituci $u^2 = v$. Nalezneme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{1}{v^3+1} = \frac{A}{1+v} + \frac{Bv+C}{v^2-v+1}$$
$$1 = A(v^2-v+1) + (Bv+C)(1+v)\,.$$

Dosazením

$$\begin{array}{ll} v = -1: & 1 = 3A \\ v = 1: & 1 = A + 2B + 2C \\ v = 0: & 1 = A + C \\ \hline & A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3},\ C = \frac{2}{3}\,. \end{array}$$

Upravíme kvadratický trojčlen

$$v^2 - v + 1 = \frac{1}{4}\,(4v^2 - 4v + 1 + 3) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2v-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

a pokračujeme dále ve výpočtu integrálu

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{dv}{1+v^3} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{1+v} - \frac{1}{4}\int \frac{2v-4}{v^2-v+1}\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+v| - \frac{1}{4}\ln(v^2-v+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2v-1}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{(u^2+1)^2}{u^4-u^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2u^2-1}{\sqrt{3}} + c\,,$$

kde $u = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$.

Poznámka. Kdybychom hned volili substituci $v = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$, potom je

$$dv = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}\,\frac{dx}{\cos^2 x}$$

a dostali bychom

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}} = \frac{3}{2}\int \frac{2}{3}\,\frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\,\cos^2 x} = \frac{3}{2}\int \frac{dv}{1+v^3}\,.$$

I.5.2.4. Příklady

Vypočítejte:

578. $\int \cos^3 x\,dx$

579. $\int \sin^3 x\,\cos^4 x\,dx$

580. $\int \cos^3 x\,\sin^8 x\,dx$

581. $\int \sin^4 x\,\cos^5 x\,dx$

582. $\int \sin^5 x\,\cos^5 x\,dx$

583. $\int \cos^5 2x\,\sin^7 2x\,dx$

584. $\int \cos^3 x\,\cos 2x\,dx$

585. $\int \cos^2 3x\,\sin x\,dx$

586. $\int \sin^2 x\,\cos^2 x\,dx$

587. $\int \sin^6 x\,dx$

588. $\int \cos^6 x\,dx$

589. $\int \sin^2 x\,\cos^4 x\,dx$

590. $\int \sin^4 x\,\cos^6 x\,dx$

591. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

592. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

593. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\,dx$

594. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$

595. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx$

596. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,dx$

597. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$

598. $\int \frac{dx}{\sin x\,\cos^3 x}$

599. $\int \frac{dx}{\sin x\,\cos^4 x}$

600. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\,\cos^5 x}$

601. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\,\cos^4 x}$

602. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

603. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$

604. $\int \mathrm{tg}^5\, x\,dx$

605. $\int \mathrm{tg}^6\, x\,dx$

606. $\int \mathrm{cotg}^6\, x\,dx$

607. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx$

608. $\int \frac{\sin 3x}{\cos x}\,dx$

609. $\int \frac{\cos 3x}{\sin^5 x}\,dx$

610. Odvoďte rekurentní vzorce pro integrály:

a) $I_n = \int \sin^n x \, dx$; b) $K_n = \int \cos^n x \, dx$; $n \in \mathbb{N},\ n > 2$

a pomocí těchto vzorců najděte $\int \sin^6 x \, dx$ a $\int \cos^8 x \, dx$.

611. Odvoďte rekurentní vzorce pro integrály:

a) $I_n = \int \dfrac{dx}{\sin^n x}$; b) $K_n = \int \dfrac{dx}{\cos^n x}$; $n \in \mathbb{N},\ n > 2$

a pomocí těchto vzorců najděte $\int \dfrac{dx}{\sin^5 x}$ a $\int \dfrac{dx}{\cos^7 x}$.

---

612. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} \, dx$

613. $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin x}} \, dx$

614. $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} \, dx$

615. $\int \dfrac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\sin 2x}}$

616. $\int \dfrac{dx}{\cos x \sqrt{\sin^3 2x}}$

617. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$

618. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{\sin^3 x \cos^5 x}}$

619. $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}} \, dx$

620. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x} \, dx$

621. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} \, dx$

622. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

623. $\int \sin 5x \cos x \, dx$

624. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$

625. $\int \sin x \sin \dfrac{x}{2} \sin \dfrac{x}{3} \, dx$

626. $\int \sin x \sin(x+a) \sin(x+b) \, dx$

627. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx \, dx$

628. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x \, dx$

629. $\int \dfrac{dx}{\sin(x+a) \sin(x+b)}$

630. $\int \dfrac{dx}{\sin(x+a) \cos(x+b)}$

631. $\int \dfrac{dx}{\cos(x+a) \cos(x+b)}$

632. $\int \dfrac{dx}{\sin x - \sin a}$

633. $\int \dfrac{dx}{\cos x + \cos a}$

634. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) \, dx$

I.6. Hyperbolické funkce

I.6.1. $\int R(\sinh x, \cosh x)\, dx$

I.6.1.1. Substituce

Při hledání této primitivní funkce používáme analogické substituce jako v případě $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ (viz I.5.1).

I. Univerzální substituce. Položíme

$$t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2} \,,$$

pak

$$\sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \,, \quad \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \,, \quad dx = \frac{2\, dt}{1-t^2}$$

a podle 2. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce proměnné t.

II. 1) $R(-\sinh x, -\cosh x) = R(\sinh x, \cosh x)$**.**
Položíme

$$t = \operatorname{tgh} x \,,$$

pak

$$\sinh x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \,, \quad \cosh x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,, \quad dx = \frac{dt}{1-t^2}$$

a podle 2. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce proměnné t.

II. 2) $R(-\sinh x, \cosh x) = -R(\sinh x, \cosh x)$**.**
V tomto případě volíme substituci

$$t = \cosh x$$

a podle 1. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce proměnné t.

II. 3) $R(\sinh x, -\cosh x) = -R(\sinh x, \cosh x)$**.**
V tomto případě volíme substituci

$$t = \sinh x$$

a podle 1. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální funkce proměnné t.

I.6.2. $\int \sinh^\nu x \, \cosh^\mu x \, dx$

Předpoklady: $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$.

Při hledání této primitivní funkce používáme analogické substituce jako v případě $\int \sin^\nu x \, \cos^\mu x \, dx$ (viz I.5.2).

1) Je-li μ celé liché číslo, volíme $t = \sinh x$,

2) Je-li ν celé liché číslo, volíme $t = \cosh x$,

3) Je-li $\mu + \nu$ celé sudé číslo, volíme $t = \operatorname{tgh} x$ nebo $t = \operatorname{cotgh} x$,

a přejdeme k integrálu z racionální funkce proměnné t nebo k binomickému integrálu proměnné t (viz I.4.3).

Poznámka. Protože hyperbolické funkce jsou definovány pomocí exponenciální funkce e^x, lze funkce $R(\sinh x, \cosh x)$ a $\sinh^\nu x \, \cosh^\mu x$ vyjádřit jako racionální nebo iracionální funkci proměnné e^x a použít substituci uvedenou v části I.7.

I.6.3. Řešené příklady

635. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^3 x + 3\cosh x}$

Volíme

$$t = \sinh x, \quad \text{pak} \quad dt = \cosh x \, dx.$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^3 x + 3\cosh x} = \int \frac{dx}{\cosh x \, (\cosh^2 x + 3)} = \int \frac{\cosh x \, dx}{\cosh^2 x \, (\cosh^2 x + 3)} =$$

$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)(4+t^2)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{4+t^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sinh x - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sinh x}{2} + c\,.$$

636. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sinh^2 x - 7\sinh x \, \cosh x + 2\cosh^2 x}$

Protože $R(-\sinh x, -\cosh x) = R(\sinh x, \cosh x)$, volíme $t = \operatorname{tgh} x$, potom $dx = \frac{dt}{1-t^2}$.

$$\int \frac{dx}{3\sinh^2 x - 7\sinh x \, \cosh x + 2\cosh^2 x} = \int \frac{1}{\frac{3t^2}{1-t^2} - \frac{7t}{1-t^2} + \frac{2}{1-t^2}} \, \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{3t^2 - 7t + 2} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t-2} - \frac{3}{5}\int \frac{dt}{3t-1} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-2}{3t-1}\right| = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tgh} x - 2}{3\operatorname{tgh} x - 1}\right| + c\,.$$

637. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sinh^3 x}{\sqrt[3]{\cosh^2 x}}\,dx$

Protože $\nu = 3$ je celé liché číslo, volíme $t = \cosh x$, pak $dt = \sinh x\,dx$.

$$\int \frac{\sinh^3 x}{\sqrt[3]{\cosh^2 x}}\,dx = \int \frac{t^2-1}{\sqrt[3]{t^2}}\,dt = \int t^{\frac{4}{3}}\,dt - \int t^{-\frac{2}{3}}\,dt = \frac{3}{7}\,t^{\frac{1}{3}}(t^2-1) + c =$$
$$= \frac{3}{7}\sqrt[3]{\cosh x}\,(\cosh^2 x - 7) + c\,.$$

I.6.4. Příklady

Vypočítejte:

638. $\displaystyle\int \frac{\sinh 2x + 4\sinh x}{\cosh^2 x - 3\cosh x}\,dx$

639. $\displaystyle\int \frac{\sinh 2x\ dx}{(\sinh x + 1)(\cosh^2 x - \sinh x)}$

640. $\displaystyle\int \frac{4\cosh x - 3\sinh x}{2\cosh x - \sinh x}\,dx$

641. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tgh} x}$

642. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2 x - 4\sinh x\,\cosh x + 9\cosh^2 x}$

643. $\displaystyle\int \frac{dx}{10\cosh^2 x - 2\sinh 2x - 1}$

644. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + 3\sinh^2 x}$

645. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - 6\sinh 2x - 37\cosh^2 x}$

646. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tgh} x}{(\operatorname{tgh} x + 2)^2}\,dx$

647. $\displaystyle\int \frac{\sinh^2 x}{1 - \sinh^2 x}\,dx$

648. $\displaystyle\int \frac{\cosh 2x}{\sinh^4 x + \cosh^4 x}\,dx$

649. $\displaystyle\int \frac{\sinh 2x}{1 + \sinh^4 x}\,dx$

650. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\cosh 2x + \cosh^2 x)^2}$

651. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{3\sinh x - 4\cosh x}\,dx$

652. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh x + 2\cosh x}$

653. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sinh x - \cosh x}$

654. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + 10\cosh x}$

655. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + \cosh x)^2}$

656. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sinh^2 x + 5\sinh x + 2}$

657. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh x + \sinh x + 2}$

658. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cosh x + 5\sinh x + 3}$

659. $\displaystyle\int \frac{\sinh x + 2\cosh x}{2\sinh x - \cosh x - 1}\,dx$

660. $\displaystyle\int \frac{\cosh x + 2\sinh x + 3}{4\cosh x + 5\sinh x + 6}\,dx$

661. $\displaystyle\int \frac{\sinh 2x}{5\sinh x + 3\cosh x}\,dx$

662. $\displaystyle\int \frac{\cosh 2x}{3\sinh x + 5\cosh x}\,dx$

663. $\displaystyle\int \frac{2\sinh x - \cosh x}{3\sinh^2 x + 4\cosh^2 x}\,dx$

664. $\displaystyle\int \frac{2\sinh x + \cosh x}{(3\sinh^2 x + 4\cosh^2 x)^2}\,dx$

665. $\displaystyle\int \sinh^2 x\, \cosh^2 x\; dx$

666. $\displaystyle\int \cosh^4 x\; dx$

667. $\displaystyle\int \sinh^3 x\; dx$

668. $\displaystyle\int \operatorname{tgh} x\; dx$

669. $\displaystyle\int \operatorname{cotgh}^2 x\; dx$

670. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh x\, \cosh^2 x}$

671. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^3 x\, \cosh^2 x}$

672. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^5 x}$

673. $\displaystyle\int \frac{\sinh^4 x}{\cosh^3 x}\,dx$

674. $\displaystyle\int \frac{\sinh^4 x}{\cosh^6 x}\,dx$

675. $\displaystyle\int \frac{\cosh^5 x}{\sinh x}\,dx$

676. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^4 x\, \cosh^2 x}$

677. $\displaystyle\int \operatorname{tgh}^3 x\; dx$

678. $\displaystyle\int \operatorname{tgh}^4 x\; dx$

679. $\displaystyle\int \cosh^3 x\, \sqrt[3]{\sinh^2 x}\; dx$

680. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tgh}^2 x}}{\cosh^4 x}\,dx$

681. $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{tgh} x}\,dx$

682. $\displaystyle\int \sinh x\, \sinh 7x\; dx$

683. $\displaystyle\int \sinh x\, \sinh 2x\, \sinh 3x\; dx$

684. $\displaystyle\int \cosh x\, \cosh 2x\, \cosh 3x\; dx$

685. $\displaystyle\int \cosh^3 x\, \sinh x\; dx$

686. $\displaystyle\int \sinh^2 x\, \cosh^3 x\; dx$

687. $\displaystyle\int \sinh^4 x\, \cosh \frac{x}{2}\; dx$

688. $\displaystyle\int \sinh^3 x\, \cosh 2x\; dx$

689. $\displaystyle\int \sinh^2 2x\, \cosh^2 2x\; dx$

690. $\displaystyle\int \sinh^2 x\, \cosh^4 x\; dx$

691. $\displaystyle\int \sinh^4 \frac{x}{2}\, \cosh^2 \frac{x}{2}\; dx$

692. $\displaystyle\int \sinh ax\, \sin bx\; dx$

693. $\displaystyle\int \sinh ax\, \cos bx\; dx$

I.7. Exponenciální funkce

I.7.1. $\int f(e^{ax})\,dx$

Předpoklady: $a \in \mathbb{R}$, $f(x_1)$ je racionální nebo iracionální funkce jedné proměnné $x_1 = e^{ax}$.

Při hledání primitivní funkce volíme substituci $t = \varphi(x) = e^{ax}$, pak $dt = ae^{ax}dx$, a podle 1. věty o substituci přejdeme k integrálu z racionální nebo iracionální funkce proměnné t.

V případě, že výraz $f(e^{ax})\,dx$ neobsahuje přímo součin $e^{ax}dx$, rozšíříme integrovanou funkci výrazem e^{ax}, přičemž definiční obor integrované funkce se nezmění, protože $e^{ax} > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

I.7.2. Řešené příklady

694. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(-\infty, +\infty)$, volíme $t = \varphi(x) = e^x$, pak $dt = e^x dx$. Funkce

$$f(t) = \frac{1}{t(1+t)}$$

je definována na sjednocení intervalů $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty) = Df$, tedy $\mathcal{I}_1 = (-\infty, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = (0, +\infty) \subset Df$,

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} =$$
$$= \ln|t| - \ln|1+t| + c = x - \ln(1+e^x) + c\,.$$

695. Vypočtěte $\displaystyle\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}\,dx$

Primitivní funkci hledáme na intervalu $(\ln(\sqrt{5}-2), +\infty)$, volíme $t = \varphi(x) = e^x$, pak $dt = e^x dx$. Funkce

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2+4t-1}}{t}$$

je definována na sjednocení intervalů $(-\infty, -(2+\sqrt{5})) \cup (\sqrt{5}-2, +\infty) = Df$, tedy $\mathcal{I}_1 = (\ln(\sqrt{5}-2), +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = (\sqrt{5}-2, +\infty) \subset Df$,

$$I = \int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx = \int \frac{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}{e^x}\,e^x dx = \int \frac{\sqrt{t^2+4t-1}}{t}\,dt$$

a použijeme 1. Eulerovu substituci; položíme $\sqrt{t^2+4t-1} = -t+u$, vypočítáme t a volíme

$$t = \varphi(u) = \frac{u^2+1}{2(2+u)} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{2}\,\frac{u^2+4u-1}{(2+u)^2}\,du\,.$$

1) $\mathcal{I}_2 = (-\infty, -(2+\sqrt{5}))$, $\mathcal{I}_1 = (-\infty, -(2+\sqrt{5}))$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(u) > 0$ na $(-\infty, -(2+\sqrt{5}))$,
2) $\mathcal{I}_2 = (\sqrt{5}-2, +\infty)$, $\mathcal{I}_1 = (\sqrt{5}-2, +\infty)$, $\varphi(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_2$, $\varphi'(u) > 0$ na $(\sqrt{5}-2, +\infty)$.

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{-\frac{u^2+1}{2(2+u)}+u}{\frac{u^2+1}{2(2+u)}}\,\frac{u^2+4u-1}{(2+u)^2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(u^2+4u-1)^2}{(u^2+1)(2+u)^2}\,du = \frac{1}{2}\int du + \frac{1}{2}\int \frac{4u^3+9u^2-12u-3}{(u^2+1)(2+u)^2}\,du$$

a nalezneme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{4u^3+9u^2-12u-3}{(u^2+1)(2+u)^2} = \frac{A}{2+u} + \frac{B}{(2+u)^2} + \frac{Cu+D}{u^2+1}$$

$$4u^3+9u^2-12u-3 = A(2+u)(u^2+1) + B(u^2+1) + (Cu+D)(2+u)^2.$$

Dosazením

$$u = -2: \quad 25 = 5B \;\Rightarrow\; B = 5$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné u

$$\begin{array}{rl} u^3: & 4 = A + C \\ u^2: & 9 = 2A + B + 4C + D \\ u^0: & -3 = 2A + B + 4D \\ \hline & A = 4,\; C = 0,\; D = -4\,. \end{array}$$

Pokračujeme dále ve výpočtu integrálu

$$I = \frac{1}{2}\int du + 2\int \frac{du}{2+u} + \frac{5}{2}\int \frac{du}{(2+u)^2} - 2\int \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\,u + 2\ln|2+u| - \frac{5}{2}\,\frac{1}{2+u} - 2\,\mathrm{arctg}\,u + c_0 =$$

$$= \frac{1}{2}(t+\sqrt{t^2+4t-1}) + 2\ln(2+t+\sqrt{t^2+4t-1}) - \frac{5}{2}\,\frac{1}{2+t+\sqrt{t^2+4t-1}} -$$

$$- 2\,\mathrm{arctg}(t+\sqrt{t^2+4t-1}) + c_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{2}\sqrt{t^2+4t-1} + 2\ln(2+t+\sqrt{t^2+4t-1}) - 1 - \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{2}\,\sqrt{t^2+4t-1} -$$

$$- 2\operatorname{arctg}(t+\sqrt{t^2+4t-1}) + c_0 =$$

$$= \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} + 2\ln\left(2+e^x+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\right) -$$

$$- 2\operatorname{arctg}\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\right) + c\,.$$

I.7.3. Příklady

Vypočítejte:

696. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$

697. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

698. $\displaystyle\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}\,dx$

699. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$

700. $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{3x}}{1-e^{2x}+e^{4x}}\,dx$

701. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-e^x-e^{2x}}$

702. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x+e^{2x}+e^{3x}}$

703. $\displaystyle\int \frac{dx}{(e^x-1)^4}$

704. $\displaystyle\int \frac{dx}{(e^{x-1}+1)^2-(e^{x+1}+1)^2}$

705. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$

706. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$

707. $\displaystyle\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}\,dx$

708. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

709. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$

710. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx$

711. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$

---

712. Dokažte, že je-li $P(x)$ polynom stupně n, pak

$$\int P(x)\,e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + c\,.$$

Vypočítejte:

713. $\int x^3 e^{3x}\,dx$

714. $\int (x^2-2x+2)e^{-x}\,dx$

715. $\int (x^3+x)e^{-x^2}\,dx$

716. $\int x^7 e^{-x^2}\,dx$

717. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\,dx$

---

718. Dokažte, že primitivní funkce

$$\int R(x)\, e^{ax}\,dx\,,$$

kde $R(x)$ je racionální funkce taková, že polynom ve jmenovateli má jen reálné kořeny, je vyjádřena elementárními funkcemi a transcendentní funkcí

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \mathrm{li}\,(e^{ax}) + c\,, \quad \text{kde } \mathrm{li}\,x = \int \frac{dx}{\ln x}\,,\ x\in(0,1),\ \lim_{x\to 0+} \mathrm{li}\,x = 0.$$

Pomocí funkce $\mathrm{li}(e^{ax})$ vyjádřete:

719. $\int \left(1-\frac{1}{x}\right) e^{-x}\,dx$

720. $\int \frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}\,dx$

721. $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2}\,dx$

722. V jakém případě je primitivní funkce

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x\,dx\,, \quad \text{kde} \quad P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\,, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\,,$$

elementární funkcí?

I.8. Integrace některých dalších funkcí

Vypočítejte:

723. $\int \frac{x\,dx}{x^3+8}$

724. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+4}$

725. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$

726. $\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}$

727. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

728. $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+3x^3+5x^2+3x+1}$

729. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+x^4+1}$

730. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^8+1)^2}$

731. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

732. $\displaystyle\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$

733. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$

734. $\displaystyle\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

735. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$

736. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

737. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$

738. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$

739. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$

740. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$

741. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx$

742. $\displaystyle\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x+x^2}}\,dx$

743. $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}\,dx$

744. $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx$

745. $\displaystyle\int x\ln(4+x^4)\,dx$

746. $\displaystyle\int \frac{(x\ln x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

747. $\displaystyle\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx$

748. $\displaystyle\int \frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\,dx$

749. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(\ln x+1)^2}\,dx$

750. $\displaystyle\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

751. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$

752. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

753. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx$

754. $\displaystyle\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx$

755. $\displaystyle\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\,dx$

756. $\displaystyle\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

757. $\displaystyle\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\,dx$

758. $\int e^x \ln(1+e^{-x})\,dx$

759. $\int x^x(1+\ln x)\,dx$

760. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$

761. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx$

762. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$

763. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx$

764. $\int \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx$

765. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}\,dx$

766. $\int x^5 \sin 5x\,dx$

767. $\int (1+x^2)^2 \cos x\,dx$

768. $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx$

769. $\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx$

770. $\int \left(\frac{\sin x}{e^x}\right)^2 dx$

771. $\int xe^x \sin x\,dx$

772. $\int x^2 e^x \cos x\,dx$

773. $\int xe^x \sin^2 x\,dx$

774. $\int x^3 \sin x^2\,dx$

775. $\int x \operatorname{cotg}^2 x\,dx$

776. $\int \frac{x}{1+\cos x}\,dx$

777. $\int \frac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx$

778. $\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\,dx$

779. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin^2 x}\,e^x\,dx$

780. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,e^x\,dx$

781. $\int \frac{\ln x\ \cos\ln x}{x}\,dx$

782. $\int \sin x\ \ln\left(\cos x+\sqrt{2-\sin^2 x}\right)dx$

783. $\int \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,dx$

784. $\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2-(e^{x-1}+1)^2}$

785. $\int \frac{x+1}{2^x}\,dx$

786. $\int xe^{\sqrt{x}}\,dx$

787. $\int e^{2x}\sqrt{e^x+e^{2x}}\,dx$

788. $\int e^{x+e^x}\,dx$

789. $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

790. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

791. $\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx$

792. $\int \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2 e^x\,dx$

793. $\int x \operatorname{arctg}(x+1)\,dx$

794. $\int x(1+x^2)\operatorname{arccotg} x\,dx$

795. $\int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

796. $\int x\arcsin(1-x)\,dx$

797. $\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,dx$

798. $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$

799. $\int \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}\,dx$

800. $\int x\arccos\dfrac{1}{x}\,dx$

801. $\int \arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

802. $\int x\sqrt{1-x^2}\arccos x\,dx$

803. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$

804. $\int \dfrac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,dx$

805. $\int \dfrac{x^4}{1+x^2}\operatorname{arctg} x\,dx$

806. $\int \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\operatorname{arctg} x\,dx$

807. $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x\,dx$

808. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\,dx$

809. $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}\dfrac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

810. $\int \dfrac{\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$

811. $\int \dfrac{x\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$

812. $\int x\operatorname{arctg} x\,\ln(1+x^2)\,dx$

813. $\int \dfrac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx$

814. $\int e^{\arcsin x}\,dx$

815. $\int (2x+1)e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$

816. $\int \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx$

817. $\int \dfrac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx$

818. $\int \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}(1+e^x)}\,dx$

819. $\int \sqrt{\operatorname{tgh}^2 x+1}\,dx$

820. $\int \sinh x\,\operatorname{arctg}\sinh x\,dx$

II
Riemannův integrál

II.1. Definice a vlastnosti R-integrálu

II.1.1. Integrální součty a definice R-integrálu

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Množina $\mathscr{D} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ se nazývá dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Čísla x_i se nazývají dělicí body a intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ dělicí intervaly dělení $\mathscr{D}$.
Číslo $\nu(\mathscr{D}) = \max\{(x_i - x_{i-1});\ i = 1, \ldots, n\}$ se nazývá norma dělení $\mathscr{D}$.

Označení. Množinu všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ budeme značit symbolem $\mathscr{D}(\langle a, b\rangle)$.

Definice. Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$. Označme

$$s(f, \mathscr{D}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\,, \qquad m_i = \inf\{f(x);\ x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\},$$
$$S(f, \mathscr{D}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})\,, \qquad M_i = \sup\{f(x);\ x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}.$$

Číslo $s(f, \mathscr{D})$ nazýváme dolní součet a číslo $S(f, \mathscr{D})$ horní součet funkce f při dělení $\mathscr{D}$.

Definice. Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$. Označme

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \sup\{s(f, \mathscr{D});\ \mathscr{D} \in \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)\}\,,$$

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx = \inf\{S(f, \mathscr{D});\ \mathscr{D} \in \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)\}\,.$$

Číslo $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$ nazýváme dolní Riemannův integrál a číslo $\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx$ horní Riemannův integrál funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$.

Definice. Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$. Jestliže platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,,$$

nazývá se funkce f riemannovsky integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a její Riemannův integrál (R-integrál) přes $\langle a, b\rangle$ pak definujeme jako

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Jestliže platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

říkáme, že funkce f není riemannovsky integrovatelná na $\langle a, b\rangle$.

Označení. Množinu všech riemannovsky integrovatelných funkcí na $\langle a, b\rangle$ budeme značit symbolem $\mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$.

Definice. Nechť $\mathscr{D} \in \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)$, $\mathscr{D} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Pak množinu

$$\mathcal{V} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\},$$

kde $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou libovolné, nazýváme výběr reprezentantů dělicích intervalů dělení $\mathscr{D}$.

Definice. Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$. Označme

$$\sigma(f, \mathscr{D}, \mathcal{V}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\,.$$

Číslo $\sigma(f, \mathscr{D}, \mathcal{V})$ nazýváme integrální součet funkce f při dělení $\mathscr{D}$ a výběru reprezentantů $\mathcal{V}$.

Definice. Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$. Říkáme, že integrální součty $\sigma(f, \mathscr{D}, \mathcal{V})$ mají limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení $\mathscr{D} \in \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)$ s normou $\nu(\mathscr{D}) < \delta$ a libovolný výběr reprezentantů $\mathcal{V}$, platí

$$|\sigma(f, \mathscr{D}, \mathcal{V}) - A| < \epsilon\,.$$

Číslo A pak nazýváme Riemannův integrál funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ a značíme

$$A = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Poznámka. Definice R-integrálu přes dolní a horní součty a definice přes integrální součty jsou ekvivalentní.

Definice. Nechť $\{\mathscr{D}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Posloupnost $\{\mathscr{D}_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá nulová, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\mathscr{D}_n) = 0\,.$$

Věta. *Nechť funkce f je omezená na $\langle a,b\rangle$ a $\{\mathscr{D}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\mathscr{D}_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\,, \qquad \lim_{n\to\infty} S(f,\mathscr{D}_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Je-li $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, pak

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\mathscr{D}_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,\mathscr{D}_n) = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

a je-li $\mathcal{V}_n$ libovolný výběr reprezentantů dělicích intervalů dělení $\mathscr{D}_n$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f,\mathscr{D}_n,\mathcal{V}_n) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

II.1.2. Podmínky existence R-integrálu

Věta. *Nechť f je monotónní na $\langle a,b\rangle$. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.*

Věta. *Nechť f je spojitá na $\langle a,b\rangle$. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.*

Věta. *Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$ a má v $\langle a,b\rangle$ konečně mnoho bodů nespojitosti. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.*

Věta. *Nechť f a g jsou omezené na $\langle a,b\rangle$ a množina $\{x \in \langle a,b\rangle;\ f(x) \neq g(x)\}$ je konečná. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, právě když $g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. V tomto případě platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

II.1.3. Vlastnosti R-integrálu.

Věta. *Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Pak platí:*

1) Je-li $f(x) \geq 0$, $x \in \langle a,b\rangle$, pak $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$,

2) je-li $|f(x)| \leq K$, $x \in \langle a,b\rangle$, pak $\displaystyle\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq K(b-a)$.

Věta. *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$, $k \in \mathbb{R}$. *Pak*

1) $(f+g) \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ *a platí*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

2) $kf \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ *a platí*

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Věta. *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ *a* $f(x) \le g(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. *Pak*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Věta. *Nechť* $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$. *Pak* $|f| \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ *a platí*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Věta. *Nechť* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, *a nechť* $f \in \mathcal{R}(\langle a, c\rangle)$ *a* $f \in \mathcal{R}(\langle c, b\rangle)$. *Pak* $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ *a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Věta. *Nechť* $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ *a* $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$. *Pak* $f \in \mathcal{R}(\langle c, d\rangle)$.

Definice. Nechť f je definovaná na uzavřeném intervalu s krajními body a, b. Pak

1) je-li $a < b$ a $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$, pak $\int_a^b f(x)\,dx$ značí R-integrál, který byl definován,
2) je-li $a = b$, definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$,
3) je-li $a > b$ a $f \in \mathcal{R}(\langle b, a\rangle)$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Věta. *Nechť* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Nechť* $f \in \mathcal{R}(\langle \min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}\rangle)$. *Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

II.1.4. Příklady

1. Najděte $s(f, \mathscr{D}_n)$ a $S(f, \mathscr{D}_n)$ pro následující funkce na odpovídajících intervalech, kde $\mathscr{D}_n$ volte tak, že dělicí intervaly mají stejnou délku:

a) $f(x) = x^3$ na $\langle -2, 3\rangle$,

b) $f(x) = \sqrt{x}$ na $\langle 0, 1\rangle$,

c) $f(x) = 2^x$ na $\langle 0, 10\rangle$.

2. Najděte $\sigma(f, \mathscr{D}_n, \mathcal{V})$ pro funkci $f(x) = 1 + x$ na intervalu $\langle -1, 4\rangle$, kde $\mathscr{D}_n$ volte tak, že dělicí intervaly mají stejnou délku a ξ_i jsou středy dělicích intervalů.

3. Najděte $s(f, \mathscr{D}_n)$ pro funkci $f(x) = x^4$ na intervalu $\langle 1, 2\rangle$, kde $\mathscr{D}_n$ volte tak, aby délky dělicích intervalů tvořily geometrickou posloupnost ($x_i = aq^i$).

Vypočítejte $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, \mathscr{D}_n)$.

4. Podle definice R-integrálu vypočítejte $\int_0^T (v_0 + gt)\, dt$, kde v_0 a g jsou konstanty.

Následující R-integrály vypočítejte jako limity odpovídajících integrálních součtů $\sigma(f, \mathscr{D}_n, \mathcal{V})$, kde $\{\mathscr{D}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová posloupnost dělení:

5. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\, dx$

6. $\displaystyle\int_0^1 a^x dx\,, \quad a > 0$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$

8. $\displaystyle\int_0^x \cos t\, dt$

9. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2}\,, \quad 0 < a < b$ Návod: volte $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$, $i = 1, \dots, n$.

10. $\displaystyle\int_a^b x^m\, dx \quad 0 < a < b,\ m \neq -1$

Návod: volte dělení $\mathscr{D}_n$ tak, že souřadnice x_i dělicích bodů tvoří geometrickou posloupnost ($x_i = aq^i$).

11. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} \quad 0 < a < b$ Návod: dělení $\mathscr{D}_n$ volte jako v příkladu 10.

12. Dokažte, že nespojitá funkce $f(x) = \operatorname{sgn} \sin \frac{\pi}{x}$ má R-integrál na $\langle 0, 1\rangle$.

13. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}] & \text{je-li } x \neq 0, \\ 0 & \text{je-li } x = 0, \end{cases}$$

má R-integrál na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

14. Dokažte, že Riemannova funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q}\,,\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ nesoudělná}, \\ 0 & \text{v ostatních bodech z } \mathbb{R}, \end{cases}$$

má R-integrál na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

15. Dokažte, že Dirichletova funkce

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nemá R-integrál na žádném intervalu.

16. Nechť funkce $f(x)$ má R-integrál na $\langle a, b \rangle$ a pro $x \in \langle a, b \rangle$ platí $A \leq f(x) \leq$ $\leq B$. Nechť funkce $g(x)$ je spojitá na $\langle A, B \rangle$. Dokažte, že funkce $g(f(x))$ má R-integrál na $\langle a, b \rangle$.

17. Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ riemannovsky integrovatelné, je také funkce $f(g(x))$ riemannovsky integrovatelná? Uvažujte příklad

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a $g(x)$ je Riemannova funkce (viz př. 14).

18. Uveďte příklad funkce, která je spojitá v bodě x_0 a nemá R-integrál na žádném intervalu, který obsahuje bod x_0.

19. Uveďte příklad funkce $f(x)$, pro kterou platí, že $f(x)$ nemá R-integrál na $\langle a, b \rangle$ a $f^2(x)$ má R-integrál na $\langle a, b \rangle$.

20. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ spojitá a kladná na $\langle 0, 1 \rangle$, pak platí

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{f(\tfrac{1}{n}) f(\tfrac{2}{n}) \dots f(\tfrac{n}{n})} = e^{\int_0^1 \ln f(x)\, dx}.$$

21. Nechť funkce $f(x)$ má R-integrál na $\langle a, b \rangle$ a pro $x \notin \langle a, b \rangle$ platí $f(x) = 0$. Dokažte, že

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0\,.$$

22. Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají R-integrál na $\langle a, b \rangle$. Dokažte, že platí nerovnost (Cauchyova–Buňakovského)

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)\, dx}\,.$$

23. Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají R-integrál na $\langle a, b\rangle$ a nechť $p, q \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dokažte, že platí nerovnost (Hölderova)

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Návod: Použijte nerovnost $\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$.

24. Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají R-integrál na $\langle a, b\rangle$ a nechť $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$. Dokažte, že platí nerovnost (Minkowského)

$$\Big(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Který integrál je větší?

25. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx$ nebo $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$

26. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ nebo $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

27. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\, dx$ nebo $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$

28. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ nebo $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$

29. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$ nebo $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$

II.2. R-integrál jako funkce horní meze

II.2.1. Teorie

Definice. Nechť funkce $f(x)$ má R-integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak funkci

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt\,, \quad \text{kde } c, x \in \langle a, b\rangle\,, \tag{$*$}$$

nazýváme integrál jako funkce horní meze.

Poznámka. Analogicky definujeme funkci $\int_x^c f(t)\, dt$ integrál jako funkce dolní meze. Platí

$$\int_x^c f(t)\, dt = -\int_c^x f(t)\, dt\,.$$

Věta. *Funkce $F(x)$ definovaná vztahem $(*)$ má vlastnosti*
1) $F(x)$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$,
2) je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě $x_0 \in \langle a,b\rangle$,
pak má funkce $F(x)$ derivaci v x_0 a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důsledek. *Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a,b\rangle$, pak $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$.*

Poznámka. Nechť f je spojitá na intervalu $\mathcal{J}$. Pak funkce

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,, \quad \text{kde } c, x \in \mathcal{J}\,,$$

je primitivní funkce k funkci f na intervalu $\mathcal{J}$.

II.2.2. Příklady

Vypočítejte derivace:

30. a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,dx$

b) $\dfrac{d}{da}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,dx$

c) $\dfrac{d}{db}\displaystyle\int_a^b \sin x^2\,dx$

31. a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$

b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

c) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3\,dt$

32. Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle A,B\rangle$ a nechť $\langle a,b\rangle \subset \langle A,B\rangle$. Vypočítejte

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+y)\,dy\,, \quad \text{kde } A-a < x < B-b\,.$$

33. Nechť $f(x)$ je spojitá kladná funkce. Dokažte, že funkce

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t\,f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$

je rostoucí na $\langle 0,+\infty)$.

Vypočítejte limity:

34. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}$

37. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,dt}$

II.3. Metody výpočtu R-integrálu

II.3.1. Teorie

Věta (Leibnizův–Newtonův vzorec). *Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a nechť F je primitivní funkce k funkci f na $\langle a,b\rangle$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Poznámka. Používáme též označení $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Věta (per partes). *Nechť funkce u, v mají derivaci na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $u', v' \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Pak platí*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx\,.$$

Věta (1. věta o substituci). *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a,b\rangle$. Nechť funkce φ má derivaci na $\langle\alpha,\beta\rangle$ a $\varphi' \in \mathcal{R}(\langle\alpha,\beta\rangle)$. Nechť $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle) \subset \langle a,b\rangle$. Pak platí*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt\,.$$

Věta (2. věta o substituci). *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a,b\rangle$. Nechť funkce φ má derivaci $\varphi' \neq 0$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$ a $\varphi' \in \mathcal{R}(\langle\alpha,\beta\rangle)$. Nechť $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle) = \langle a,b\rangle$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt \qquad \left(= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right).$$

Při výpočtu R-integrálů používáme kromě výše uvedených vět ještě vlastnosti R--integrálu (viz II.1.3), a sice

Věta. *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Pak*

1) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$

2) $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad$ *kde* $k \in \mathbb{R}$,

3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,, \quad$ *kde* $a < c < b$.

II.3.2. Řešené příklady

38. Užitím Leibnizova–Newtonova vzorce vypočítejte $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1}\, dx$

Funkce $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ je primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$, a tedy

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1}\, dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,.$$

39. Dokažte nerovnost $\displaystyle\frac{4}{9}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x\, dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}(e-1)\,.$

Na intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí pro funkci $\frac{1}{(x+1)(2-x)}$ nerovnost

$$\frac{4}{9} \le \frac{1}{(x+1)(2-x)} \le \frac{1}{2}$$

a je-li $x \ne 0$, $x \ne \frac{1}{2}$ a $x \ne 1$, platí na $\langle 0,1\rangle$

$$\frac{4}{9} < \frac{1}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}\,,$$

tedy i

$$\frac{4}{9}\, e^x < \frac{e^x}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}\, e^x\,.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{4}{9}\int_0^1 e^x\, dx < \int_0^1 \frac{e^x\, dx}{(x+1)(2-x)} < \frac{1}{2}\int_0^1 e^x\, dx$$

a protože $\int_0^1 e^x\, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$, je nerovnost dokázána.

40. Užitím R-integrálu vypočítejte limitu posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}\,, \qquad \alpha > 0\,.$$

Protože součet

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{i}{n}\Big)^\alpha$$

je integrálním součtem funkce $f(x) = x^\alpha$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$, tak

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 x^\alpha\, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}\,.$$

41. Užitím metody per partes vypočítejte

a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\, e^{-x^2}\, dx\,;$ b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cosh x\, \cos nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$

a) Volíme $u = x^2$, $v' = x\, e^{-x^2}$, pak $u' = 2x$, $v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ a dostáváme

$$\int_0^1 x^3\, e^{-x^2}\, dx = [-\frac{1}{2}\, x^2 e^{-x^2}]_0^1 + \int_0^1 x\, e^{-x^2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2e} + \Big[-\frac{1}{2}\, e^{-x^2}\Big]_0^1 = -\frac{1}{2e} - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}\,.$$

b) Použijeme dvakrát metodu per partes. Nejprve volíme $u = \cosh x$, $v' = \cos nx$, pak $u' = \sinh x$, $v = \frac{1}{n}\sin nx$ a dostáváme

$$I = \Big[\frac{1}{n}\cosh x\, \sin nx\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh x\, \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh x\, \sin nx\, dx\,.$$

Nyní znovu použijeme metodu per partes. Volíme $u = \sinh x$, $v' = \sin nx$, pak $u' = \cosh x$, $v = -\frac{1}{n}\cos nx$ a dostáváme

$$I = -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh x\, \sin nx\, dx = \Big[\frac{1}{n^2}\sinh x\, \cos nx\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh x\, \cos nx\, dx\,.$$

Po dosazení dostáváme rovnici

$$I = (-1)^n\, \frac{2\sinh \pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\, I\,, \quad \text{a tedy} \quad I = (-1)^n\, \frac{2\sinh\pi}{n^2+1}\,.$$

42. Užitím substituce vypočítejte

a) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx\,;$ b) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

a) Použijeme 1. větu o substituci. Volíme $t = \varphi(x) = 1+x^2$, pak $dt = \varphi'(x)\, dx = 2x\, dx$ a meze integrace jsou $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 2$. Dostáváme

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{3}\Big[\sqrt{t^3}\Big]_1^2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\,.$$

b) Použijeme 2. větu o substituci. Volíme $x = \varphi(t) = a\sin t$, potom $dx = \varphi'(t)\, dt = a\cos t\, dt$ a meze integrace jsou $\varphi^{-1}(0) = 0$, $\varphi^{-1}(a) = \frac{\pi}{2}$. Dostáváme tedy

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t\, dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\, dt =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2}\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}\,.$$

II.3.3. Příklady

Použitím Leibnizova–Newtonova vzorce vypočítejte integrály:

43. $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$

44. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$

45. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

46. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

47. $\displaystyle\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

48. $\displaystyle\int_{0}^{2} |1-x|\,dx$

49. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}\,, \quad 0<\alpha<\pi$

50. $\displaystyle\int_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

Dokažte nerovnosti:

51. $\displaystyle\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx < \frac{1}{10}$

52. $\displaystyle\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,dx < \frac{1}{20}$

53. $\displaystyle 0 < \int_0^{200} \frac{e^{-5x}}{x+20}\,dx < 0{,}01$

54. $\displaystyle 1 < \int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < 1+\frac{1}{21}$

55. $\displaystyle 0 < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx < \ln 3$

56. $\displaystyle \sin 1 < \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx < 2\sin 1$

57. $\displaystyle \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi+2}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x(x+1)}\,dx < \ln\frac{\pi+2}{2}$

58. $\displaystyle 0 < \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}\,dx < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$

59. $\displaystyle \frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{\pi+\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}}\,dx < \frac{3}{2}$

60. $\displaystyle \frac{1}{3} < \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{2+x^2}\,dx < 1$

Pomocí R-integrálu vypočítejte limity posloupností:

61. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(a+i\frac{b-a}{n}\Big)\right)$

62. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

63. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)$

64. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$

65. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

66. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

67. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}\right)$

68. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\cdots+\frac{(4n-1)^3}{n^4}\right)$

69. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left(1+\frac{i}{n}\right)\sin\frac{i\pi}{n^2}$

70. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{i\pi}{n}}$

71. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(nx+i)(nx+i+1)},\quad x>0$

72. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}$

73. Vypočítejte:

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx,\quad$ je-li $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{pro } 0\le x\le 1,\\ 2-x & \text{pro } 1<x\le 2.\end{cases}$

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx,\quad$ je-li $f(x)=\begin{cases}x & \text{pro } 0\le x\le t,\\ t\frac{1-x}{1-t} & \text{pro } t<x\le 1.\end{cases}$

74. Vypočítejte následující integrály $I = I(\alpha)$ a nakreslete jejich grafy jako grafy funkcí parametru α:

a) $I = \displaystyle\int_0^1 x|x-\alpha|\,dx$

b) $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx$

c) $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}\,dx$

Metodou per partes vypočítejte integrály:

75. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x\,e^{-x}\,dx$

76. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

77. $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$

78. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\ dx$

79. $\displaystyle\int_0^{1} \arccos x\,dx$

80. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$

Dokažte rovnosti ($n \in \mathbb{N}$):

81. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos(n+2)x\,dx = 0$

Návod: Použijte dvakrát metodu per partes na integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\cos(n+2)x\,dx$. Příklady 82–86 řešte analogicky.

82. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin(n+2)x\,dx = \frac{1}{n+1}$

83. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos(n+2)x\,dx = -\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}$

84. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\sin(n+2)x\,dx = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+1}$

85. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x\cos(n+1)x\,dx = 0$

86. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{n-1} x\sin(n+1)x\,dx = 0$

Substituční metodou vypočítejte integrály:

87. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$

88. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}\,, \qquad |a|<1,\ |b|<1,\ ab>0$

89. $\displaystyle\int_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

90. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

91. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

92. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

---

93. Dokažte, že je-li funkce $f(x)$ spojitá na $\langle 0,1\rangle$, pak

a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\,dx\,.$

94. Dokažte, že pro funkci $f(x)$ spojitou na $\langle -a,a\rangle$ platí

a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$, je-li $f(x)$ sudá,

b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, je-li $f(x)$ lichá.

95. Dokažte, že jedna z primitivních funkcí sudé funkce je funkce lichá a každá primitivní funkce liché funkce je funkce sudá.

96. V integrálu

$$\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

použijte substituci $t=\sin x$.

97. Dokažte rovnost

$$\int_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\,dt\,.$$

98. Vypočítejte integrál

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

použitím substituce $x = \operatorname{tg} t$ a vzorce

$$1 + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)}{\cos\alpha}\,.$$

99. Dokažte rovnost

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx\,.$$

100. Vypočítejte integrál

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$$

použitím substituce $t = x + \frac{1}{x}$.

101. Vypočítejte integrál

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\cos\ln\frac{1}{x}\right| dx\,, \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}.$$

102. Vypočítejte integrál

$$\int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx\,,$$

kde

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}\,.$$

103. Dokažte, že je-li $f(x)$ spojitá funkce na $(-\infty, +\infty)$ a periodická s periodou p, pak

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je libovolné.

104. Dokažte, že funkce

$$F(x) = \int_0^x \sin^n t\,dt \quad \text{a} \quad G(x) = \int_0^x \cos^n t\,dt$$

jsou periodické s periodou 2π, je-li n liché, a je-li n sudé, je každá z nich součtem lineární funkce a periodické funkce.

Vypočítejte integrály:

105. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\sin x}\, dx$

106. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x\, dx$

107. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + x^2 \sin x)\, dx$

108. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x}) \operatorname{tg} x\, dx$

109. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

110. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x^2 \sin 5x + \cos \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^3 x)\, dx$

111. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x^7 - x^5 + 2x^3 - x + 1}{\cos^2 x}\, dx$

112. $\displaystyle\int_{0}^{2} x\, e^{x^2}\, dx$

113. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx$

114. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (x \sin x)^2\, dx$

115. $\displaystyle\int_{1}^{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$

116. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

117. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^{2x}+1}\, dx$

118. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$

119. $\displaystyle\int_{1}^{9} x \sqrt[3]{1-x}\, dx$

120. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

121. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^{15} \sqrt{1+3x^8}\, dx$

122. $\displaystyle\int_{1}^{2} x^2 \ln x\, dx$

123. $\displaystyle\int_{1}^{n} x^n \ln x\, dx$

124. $\displaystyle\int_{0}^{1} x(2-x^2)^{12}\, dx$

125. $\displaystyle\int_{0}^{1} \arcsin \sqrt{x}\, dx$

126. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx$

127. $\displaystyle\int_{0}^{3} \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}\, dx$

Použitím rekurentních vzorců vypočítejte integrály ($n \in \mathbb{N}$):

128. $\displaystyle I_n = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx$

Návod: Použijte v I_{n+2} vzorec pro $\sin(\alpha+\beta)$.

129. $\displaystyle I_{2n+1} = \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\, dx$

130. $\displaystyle I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$

131. $\displaystyle I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$

132. $\displaystyle I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\, dx$

133. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$

134. $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx$

135. $I_n = \int_0^1 x^m \ln^n x \, dx\,, \quad m \in \mathbb{N}$

136. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx \, dx$

Návod: Po integraci per partes přičtěte k oběma stranám rovnosti I_n. Analogicky řešte příklady 137 a 138.

137. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx \, dx$

138. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \sin nx \, dx$

139. $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \, dx\,,$ $m \in \mathbb{N}$ *)

Návod: po integraci per partes dosaďte rovnost $x = 1-(1-x)$ a rekurentní vztahy odvoďte postupně pro n a pro m.

Vypočítejte integrály (z nespojitých funkcí):

140. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) \, dx$

141. $\int_0^2 [e^x] \, dx$

142. $\int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} \, dx$

143. $\int_0^\pi x \operatorname{sgn} \cos x \, dx$

144. $\int_1^{n+1} \ln[x] \, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}$

145. $\int_0^1 \operatorname{sgn} \sin \ln x \, dx$

146. Vypočítejte

$$\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} \, dx\,,$$

kde $E \subset \langle 0, 4\pi \rangle$ je množina, na které je funkce $\sqrt{\sin x}$ definovaná.

*) $B(m,n)$ je speciální případ Eulerova integrálu 1. druhu — funkce beta $B(a,b)$, kde $a,b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$.

III
Nevlastní Riemannův integrál

III.1. Nevlastní R-integrál na neomezeném intervalu

III.1.1. Definice a metody výpočtu

III.1.1.1. Konvergence a divergence

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $\langle a, +\infty)$. Nechť $f(x)$ je riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $b \in \mathbb{R}$, $b > a$. Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,, \quad x \in \langle a, +\infty)\,.$$

Existuje-li vlastní limita $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *konverguje* a definujeme

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} F(x)\,.$$

Neexistuje-li vlastní $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverguje.*

Poznámka. Analogicky definujeme nevlastní integrál $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definovaná na $(-\infty, +\infty)$ a je riemannovsky integrovatelná na každém omezeném intervalu. Říkáme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ konverguje, jestliže pro nějaké (a tedy pro každé) $a \in \mathbb{R}$ konvergují oba nevlastní integrály $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Pak definujeme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Věta (nutná podmínka konvergence). *Nechť* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *konverguje a nechť existuje* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. *Pak*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$

III.1.1.2. Metody výpočtu

Věta (linearita integrálu). *Nechť integrály* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *a* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *konvergují. Pak pro libovolné* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *konverguje integrál*

$$\int_a^{+\infty} (k_1 f(x) + k_2 g(x))\,dx$$

a platí

$$\int_a^{+\infty} (k_1 f(x) + k_2 g(x))\,dx = k_1 \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + k_2 \int_a^{+\infty} g(x)\,dx\,. \tag{1}$$

Poznámka. Obrácená věta neplatí. Jestliže $\int_a^{+\infty}(f(x) + g(x))\,dx$ konverguje, tak $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ a $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ konvergovat nemusí. Například $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1-x}$ a $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$ divergují, ale $\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{2}{1-x^2}\,dx$ konverguje (viz př. 1). Dále platí, že jestliže $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konverguje a $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverguje, pak nutně $\int_a^{+\infty}(f(x) + g(x))\,dx$ diverguje.

Věta (Leibnizův–Newtonův vzorec). *Nechť funkce* $f(x)$ *je spojitá na intervalu* $\langle a, +\infty)$ *a funkce* $F(x)$ *je primitivní funkce k funkci* $f(x)$ *na* $\langle a, +\infty)$*. Pak platí*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)\,, \tag{2}$$

přitom integrál v (2) konverguje, právě když existuje vlastní $\lim_{x\to+\infty} F(x)$*.*

Věta (o substituci). *Nechť funkce* $f(x)$ *je spojitá na* $\langle a, +\infty)$ *a funkce* $\varphi(t)$ *má spojitou derivaci na* $\langle \alpha, \beta)$*,* $\varphi'(t) > 0$*. Nechť* $\varphi(\alpha) = a$*,* $\lim_{t\to\beta-} \varphi(t) = +\infty$*. Pak platí*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,. \tag{3}$$

Přitom oba integrály v (3) buď současně konvergují nebo současně divergují.

Věta (o substituci). *Nechť funkce* $f(x)$ *je spojitá na* $\langle \alpha, \beta)$ *a funkce* $\varphi(t)$ *má spojitou derivaci na* $\langle a, +\infty)$*,* $\varphi'(t) > 0$*. Nechť* $\varphi(a) = \alpha$*,* $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \beta$*. Pak platí*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,. \tag{4}$$

Poznámka. Věty o substituci lze analogicky vyslovit pro $\varphi'(t) < 0$.

Substituce daná vztahem (4) se používá hlavně při integraci funkcí $f(\sin x, \cos x)$, kdy volíme substituční funkci $\varphi(t) = \operatorname{arctg} x$ nebo $\varphi(t) = 2\operatorname{arctg} x$. Přitom, je-li integrál na levé straně rovnosti (4) nevlastní vlivem funkce (viz III.2), pak oba integrály v (4) buď současně konvergují nebo současně divergují.

Věta (per partes). *Nechť funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojitou derivaci na $\langle a, +\infty)$ a nechť existuje vlastní limita $\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x)$. Pak platí*

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx\,, \tag{5}$$

kde

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) - u(a)v(a)\,.$$

Přitom oba integrály v (5) buď současně konvergují nebo současně divergují.

III.1.1.3. Řešené příklady

1. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci integrálů:

a) $$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{dt}{t^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_2^x =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x-1}{x+1} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 3 \Rightarrow \text{integrál konverguje.}$$

b) $$\int_0^{+\infty} \cos 2x\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \cos 2t\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^x =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 2x}{2} \text{ neexistuje} \Rightarrow \text{integrál diverguje.}$$

c) $$\int_1^{+\infty} e^{3x}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x e^{3t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}e^{3t}\right]_1^x =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\lim_{x\to+\infty} e^{3x} - e^3\right) = +\infty \Rightarrow \text{integrál diverguje.}$$

d) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+9} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \frac{dt}{t^2+4t+9} + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{dt}{t^2+4t+9} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t+2}{\sqrt{5}}\right]_x^0 + \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t+2}{\sqrt{5}}\right]_0^x =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}} -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\pi \Rightarrow \text{integrál konverguje.}$$

2. Vyšetřete, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

a) $\alpha \neq 1$:
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{(1-\alpha)\,t^{\alpha-1}}\right]_1^x =$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{pro } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{pro } \alpha < 1 \end{cases}$$

b) $\alpha = 1$:
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \lim_{x\to+\infty} [\ln t]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Závěr: Integrál $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

3. Vypočítejte integrály:

a)
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{(x+1)}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{3}\,.$$

b)
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

Řešíme substitucí $x = \frac{1}{t}$, pak $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$ a meze integrace jsou $x = 1 \Rightarrow t = 1$ a $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0+$. Pak
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} =$$
$$= \left[\ln\left(t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

c)
$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = 2\int_0^1 \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,dx =$$

řešíme substitucí $t = x - \frac{1}{x}$, pak $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx$ a meze integrace jsou $x = 0 \Rightarrow t \to -\infty$ a $x = 1 \Rightarrow t = 0$, pak
$$= 2\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^2+2} = \left[\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\,.$$

d)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}\,dx$$

Řešíme metodou per partes. Volíme $u = \mathrm{arctg}\,x$ a $v' = \frac{1}{x^2}$, pak $u' = \frac{1}{1+x^2}$ a $v = -\frac{1}{x}$, a dostáváme
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} =$$
$$= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi}{4} + \left[\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

III.1.1.4. Příklady

Vypočítejte integrály nebo rozhodněte o jejich divergenci:

4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin 3x\, dx$

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-3x}\, dx$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x+1}$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1}\, dx$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}$

11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

12. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

13. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

14. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, 2^{-x}\, dx$

15. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x}\, dx$

16. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

17. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

18. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^4\, dx}{(x^5+1)^4}$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

20. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$

21. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sinh x}{\sinh 2x}\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$

23. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x\, dx}{x^3-1}$

24. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$

25. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+12}{(x^2+1)^2}\, dx$

26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

27. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$

28. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}$

29. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}}\, dx$

30. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^2}\, dx$

31. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\, dx$

32. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\, e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\, dx$

33. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\, dx\,, \quad a>0$

34. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx\,,\quad a>0$

35. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^2 bx\,dx\,,\quad a>0$

36. Vypočítejte

$$\int\limits_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx\,,$$

kde $E\subset(0,+\infty)$ je definiční obor funkce za integračním symbolem.

Použitím rekurentních vzorců vypočítejte integrály ($n\in\mathbb{N}$):

37. $\displaystyle I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$

38. $\displaystyle I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+bx+x)^n}\,,\quad a>0,\ ac-b^2>0$

39. Dokažte rekurentní vzorec

$$I_n=\frac{n(n-1)}{n^2+\alpha^2}\,I_{n-2}\,,\quad n>1\,,$$

pro integrál

$$I_n=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin^n x\,dx\,,\quad \alpha>0\,.$$

Substituční metodou vypočítejte integrály:

40. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$

41. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx$

42. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,,\quad ab\neq 0$

43. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+b\cos x}\,,\quad a^2>b^2>0$

44. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}\,,\quad 0<\varepsilon<1$

III.1.2. Srovnávací kriteria konvergence

Věta (srovnávací kriterium). *Nechť* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *pro* $x \in \langle a, +\infty)$. *Pak platí*

1) konverguje-li $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, *konverguje i* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$,

2) diverguje-li $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, *diverguje i* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Věta (limitní srovnávací kriterium). *Nechť* $f(x) \geq 0$ *a* $g(x) > 0$ *pro* $x \in \langle a, +\infty)$ *a nechť existuje limita*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k\,. \tag{6}$$

Pak platí

1) je-li $k < +\infty$ *a konverguje-li* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, *konverguje i* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$,

2) je-li $k > 0$ *a diverguje-li* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, *diverguje i* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Poznámka. Je-li v limitě (6) $k \in (0, +\infty)$, pak oba integrály $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ buď současně konvergují nebo současně divergují. Speciálně: Je-li $f(x) \sim g(x)$, $x \to +\infty$, pak oba integrály $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ buď současně konvergují nebo současně divergují.

III.1.2.1. Řešené příklady

45. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci integrálů:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx.$

Pro $x \in \langle 1, +\infty)$ platí nerovnost

$$0 \leq \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,,$$

a protože integrál

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}dx$$

konverguje (viz př. 2), konverguje i vyšetřovaný integrál.

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}.$

Nechť

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+\ln x}} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

a protože

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+\ln x}}=\frac{1}{2}\,,$$

tak z divergence integrálu

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

(viz př. 2) plyne divergence vyšetřovaného integrálu.

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^3+\sin x}\,dx.$

Protože

$$\frac{x}{x^3+\sin x}\sim\frac{1}{x^2}\,,\qquad x\to+\infty$$

a integrál

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$

konverguje (viz př. 2), konverguje i vyšetřovaný integrál.

46. Vyšetřete, pro která $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ konverguje $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln^\beta x}.$

a) $\alpha>1$: Položíme $\varepsilon=\alpha-1$, pak $\varepsilon>0$. Integrovanou funkci upravíme následujícím způsobem

$$\frac{1}{x^\alpha\ln^\beta x}=\frac{1}{x^{1+\varepsilon}\ln^\beta x}=\frac{1}{x^{\frac{\varepsilon}{2}}\ln^\beta x}\,\frac{1}{x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\,.$$

Protože pro každé β je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{\varepsilon}{2}}\ln^\beta x}=0\,,$$

existuje $x_0\geq 2$ tak, že pro $x>x_0$ platí

$$\frac{1}{x^{\frac{\varepsilon}{2}}\ln^\beta x}<1\,.$$

Odtud plyne pro $x>x_0$ nerovnost

$$\frac{1}{x^\alpha\ln^\beta x}<\frac{1}{x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\,.$$

Protože

$$\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$$

konverguje, konverguje i

$$\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha\ln^\beta x}.$$

Vyšetřovaný integrál vyjádříme jako součet dvou integrálů

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \int_2^{x_0} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}\,,$$

kde první z nich je (vlastní) R-integrál a druhý konverguje, takže vyšetřovaný integrál konverguje pro $\alpha > 1$ a β libovolné.

b) $\alpha = 1$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}\,,$$

a protože $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ konverguje pro $\beta > 1$ a diverguje pro $\beta \le 1$, tak vyšetřovaný integrál konverguje pro $\alpha = 1$, $\beta > 1$ a diverguje pro $\alpha = 1$, $\beta \le 1$.

c) $\alpha < 1$: Položíme $\varepsilon = 1 - \alpha$, pak $\varepsilon > 0$. Integrovanou funkci upravíme následujícím způsobem

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1-\varepsilon} \ln^\beta x} = \frac{x^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\ln^\beta x} \frac{1}{x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}\,.$$

Protože pro každé β je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\ln^\beta x} = +\infty\,,$$

existuje $x_0 \ge 2$ tak, že pro $x > x_0$ platí

$$\frac{x^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\ln^\beta x} > 1\,.$$

Odtud plyne pro $x > x_0$ nerovnost

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} > \frac{1}{x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}\,.$$

Protože

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}$$

diverguje, diverguje i

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}\,,$$

a tedy vyšetřovaný integrál diverguje pro $\alpha < 1$ a β libovolné.

Závěr: Integrál

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$$

konverguje pro $\alpha > 1$, β libovolné, pro $\alpha = 1$, $\beta > 1$, a diverguje pro všechna ostatní α a β.

III.1.2.2. Příklady

Vyšetřete konvergenci nebo divergenci integrálů:

47. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3+7}{x^5-x^2+2}\,dx$

48. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx$

49. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^5+2}}\,dx$

50. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^7+1}}\,dx$

51. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2}\,dx$

52. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$

55. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+2}}\,dx$

56. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}\,dx$

57. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\cos\frac{2}{x}-1\right)\,dx$

58. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

59. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{(x-\cos\frac{\pi}{x})^2}\,dx$

60. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}-e^{-\frac{4}{x^2}}\right)\,dx$

62. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-2}\operatorname{arctg}^3\frac{x^3}{1+x^2}\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2+x}\,dx$

64. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}\,dx$

Vyšetřete, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergují integrály:

65. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}\,dx$

66. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$

67. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$

68. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^\alpha x}$

69. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\alpha}\right)dx\,, \quad a\neq 0$

70. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(x-1)^\alpha \ln x}\,dx$

71. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha \cosh x}{x^2\ln^3(1+\frac{1}{x})}\,dx$

72. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha\sin^2 x}$

73. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{(x+\alpha)^2}\,dx$

74. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^\alpha}\,dx\,, \quad a\neq 0$

Vyšetřete, pro která $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konvergují integrály:

75. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{(e^{\frac{1}{x^2}} - 1)^\beta}\, dx$

76. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{\sqrt[3]{x^2}\, \operatorname{arctg}^\beta \frac{1}{x}}\, dx$

77. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^\alpha |\sin x|^\beta}\, dx$

III.1.3. Bolzanovo–Cauchyovo kriterium

III.1.3.1. Teorie

Věta. *Integrál $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ konverguje, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 > a$ tak, že pro libovolné $x_1 > x_0$ a $x_2 > x_0$ platí*

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| < \varepsilon\,.$$

Poznámka. Bolzanovo–Cauchyovo kriterium (B-C kriterium) se často používá pro důkaz divergence integrálu: *Integrál $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverguje, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro libovolné $x_0 > a$ existují $x_1 > x_0$ a $x_2 > x_0$ tak, že*

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| \geq \varepsilon\,.$$

III.1.3.2. Příklad

78. Dokažte divergenci integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\, dx$ pro $\alpha \leq 1$.

Nechť $x_0 \in (1, +\infty)$ a vezměme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\pi n > x_0$, a položme $x_1 = \pi n$ a $x_2 = 2\pi n$. Pak platí

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\, dx \right| = \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\, dx \geq \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2\pi n} \frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

Existuje tedy $\varepsilon = \frac{1}{4}$ tak, že pro libovolné $x_0 > 1$ existují $x_1 = \pi n > x_0$ a $x_2 = 2\pi n > x_0$, pro které platí

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\, dx \right| \geq \varepsilon\,,$$

tedy pro $\alpha \leq 1$ daný integrál diverguje.

III.1.4. Postačující podmínky konvergence

III.1.4.1. Absolutní a relativní konvergence

Věta. *Nechť* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *konveguje, pak konverguje i* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Definice. Integrál $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ se nazývá *absolutně konvergentní*, jestliže konverguje $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, a *relativně konvergentní*, jestliže $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konverguje a $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ diverguje.

III.1.4.2. Dirichletovo a Abelovo kriterium

Věta (Dirichletovo kriterium). *Nechť existuje* $K > 0$ *tak, že* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le K$ *pro každé* $b > a$. *Nechť funkce* $g(x)$ *je monotónní na* $\langle a, +\infty)$ *a* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. *Pak* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *konverguje.*

Věta (Abelovo kriterium). *Nechť* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *konverguje a funkce* $g(x)$ *je monotónní a omezená na* $\langle a, +\infty)$. *Pak* $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ *konverguje.*

III.1.4.3. Řešené příklady

79. Dokažte, že integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ konverguje relativně.

Konvergenci dokážeme podle Dirichletova kriteria: Pro každé $b > 1$ je

$$\int_1^b \sin x\,dx = \cos 1 - \cos b\,,$$

tedy existuje $K > 0$ tak, že $\left|\int_1^b \sin x\,dx\right| \le K$ pro každé $b > 1$. Funkce $\frac{1}{x}$ je klesající na $\langle 1, +\infty)$ a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, tedy $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ konverguje.

Použitím srovnávacího kriteria ukážeme, že $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|dx$ diverguje. Na intervalu $\langle 1, +\infty)$ platí nerovnost

$$\frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{\sin^2 x}{x}\,,$$

a protože $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ diverguje (viz př. 78), diverguje i $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|dx$.

80. Vyšetřete absolutní a relativní konvergenci integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

a) $\alpha > 1$: Na intervalu $\langle 1, +\infty)$ platí nerovnost $|\frac{\sin x}{x^\alpha}| \le \frac{1}{x^\alpha}$, a protože pro $\alpha > 1$ integrál $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje, konverguje $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ absolutně.

b) $0 < \alpha \le 1$: Funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ splňují na $\langle 1, +\infty)$ předpoklady Dirichletova kriteria: Existuje $K > 0$ tak, že $|\int_1^b \sin x\,dx| = |\cos 1 - \cos b| \le K$

pro každé $b > 1$, a funkce $\frac{1}{x^\alpha}$ je klesající na $\langle 1, +\infty)$, protože její derivace $-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ je záporná, a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$, takže $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ konverguje.

Divergence integrálu $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x^\alpha}|\,dx$ plyne z nerovnosti $|\frac{\sin x}{x^\alpha}| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}$ a z divergence $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx$ (viz př. 78).

c) $\alpha \leq 0$: Dokážeme pomocí B-C kriteria, že $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ diverguje. Pro libovolné $x_0 > 1$ vezmeme $n \in \mathbb{N}$ tak, že platí $2\pi n > x_0$, a položíme $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ a $x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n$. Pak

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\right| = \int_{\frac{\pi}{6}+2\pi n}^{\frac{5}{6}\pi+2\pi n} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \geq \int_{\frac{\pi}{6}+2\pi n}^{\frac{5}{6}\pi+2\pi n} \sin x\,dx \geq \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} dx = \frac{\pi}{3}\,.$$

Existuje tedy $\varepsilon = \frac{\pi}{3}$ tak, že pro libovolné $x_0 > 1$, existují $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n > x_0$ a $x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n > x_0$, pro které $\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx\right| \geq \varepsilon$.

Závěr: Integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ konverguje absolutně pro $\alpha > 1$, konverguje relativně pro $0 < \alpha \leq 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 0$.

81. Dokažte, že $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \operatorname{arctg} x\,dx$ konverguje pro $\alpha > 0$.

Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}$ a $g(x) = \operatorname{arctg} x$ splňují na intervalu $\langle 1, +\infty)$ předpoklady Abelova kriteria: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ konverguje pro $\alpha > 0$ (viz př. 80) a funkce $\operatorname{arctg} x$ je rostoucí a omezená na $\langle 1, +\infty)$.

III.1.4.4. Příklady

Vyšetřete absolutní nebo relativní konvergenci integrálů:

82. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\cos 7x}{x^2+2x+2}\,dx$

83. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin 2x}{x^2-4x+5}\,dx$

84. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$

85. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cos x^4\,dx$

86. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^3(x^2+2x)\,dx$

87. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}\sin\ln x}{x}\,dx$

88. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$

89. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \sin\frac{\cos x^3}{x+1}\,dx$

90. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1 - e^{\frac{\sin x}{x}}\right)\sqrt{x}\,dx$

91. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1 - e^{x^{-\frac{2}{3}}\sin x}\right)dx$

92. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

93. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \sqrt{x}\,\ln\left(1 - \frac{\sin x^2}{x-1}\right)dx$

Vyšetřete absolutní nebo relativní konvergenci integrálů pro $\alpha \in \mathbb{R}$:

94. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{x^3+1}\,dx$

95. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha \sin x}{\ln x}\,dx$

96. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha + \ln x}\,dx$

97. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(\ln(x+1)-\ln x)^\alpha}\,dx$

98. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{(\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2})^\alpha}\,dx$

99. $\displaystyle\int_2^{+\infty} (x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x))^\alpha \sin x\,dx$

100. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{(2x - \cos\ln x)^\alpha}\,dx$

101. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1+2x)}{(\sqrt{x} - \ln x)^\alpha}\,dx$

102. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^\alpha} \sin x^3\,dx$

103. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x^\alpha \ln x}\,dx$

104. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 \cos x^3}{(3x - \operatorname{arctg} x)^\alpha}\,dx$

105. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha}\,dx$

106. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^\alpha}$

107. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha (\sin\frac{1}{x}) \cos x\,dx$

III.2. Nevlastní R-integrál z neomezené funkce

III.2.1. Definice a metody výpočtu

III.2.1.1. Konvergence a divergence

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť funkce $f(x)$ je definovaná a neomezená na intervalu $\langle a, b)$. Nechť $f(x)$ je riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $\langle a, c\rangle$, kde $a < c < b$. Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,, \quad x \in \langle a, b)\,.$$

Existuje-li vlastní limita $\lim_{x\to b-} F(x)$, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)\,dx$ *konverguje* a definujeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x)\,.$$

Neexistuje-li vlastní $\lim_{x\to b-} F(x)$, říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)\,dx$ *diverguje.*

Poznámka. Analogicky definujeme nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, kde $f(x)$ je neomezená na $(a, b\rangle$.

V obecném případě, je-li funkce $f(x)$ definovaná na (a,b) a neomezená na nějakém pravém okolí bodu a a také neomezená na nějakém levém okolí bodu b, říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje, jestliže pro nějaké (a tedy pro každé) $c \in (a,b)$ konvergují oba nevlastní integrály $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$. Pak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

III.2.1.2. Metody výpočtu

Věta (linearita integrálu). *Nechť nevlastní integrály $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergují. Pak pro libovolná $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ konverguje nevlastní integrál $\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x))\,dx$ a platí*

$$\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x))\,dx = k_1 \int_a^b f(x)\,dx + k_2 \int_a^b g(x)\,dx\,. \tag{7}$$

Poznámka. Jestliže $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje a integrál $\int_a^b g(x)\,dx$ diverguje, pak nutně $\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x))\,dx$ diverguje.

Věta (Leibnizův–Newtonův vzorec). *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle a,b)$ a funkce $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\langle a,b)$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - F(a)\,, \tag{8}$$

přitom nevlastní integrál v (8) konverguje, právě když existuje vlastní limita $\lim_{x\to b-} F(x)$.

Věta (o substituci). *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na $\langle a,b)$ a funkce $\varphi(t)$ má spojitou derivaci na $\langle \alpha,\beta)$, $\varphi'(t) > 0$. Nechť $\varphi(\alpha) = a$ a $\lim_{t\to\beta-} \varphi(t) = b$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,. \tag{9}$$

Přitom oba integrály v (9) buď současně konvergují nebo současně divergují.

Poznámka. Větu o substituci lze analogicky vyslovit pro $\varphi'(t) < 0$.

Věta (per partes). *Nechť funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojitou derivaci na $\langle a,b)$ a nechť existuje vlastní limita $\lim_{x\to b-} u(x)v(x)$. Pak platí*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx\,, \tag{10}$$

kde $[u(x)v(x)]_a^b = \lim_{x\to b-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.
Přitom oba integrály v (10) buď současně konvergují nebo současně divergují.

III.2.1.3. Řešené příklady

108. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci integrálů:

a) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{x\to 1-} \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x =$$
$$= -2 \lim_{x\to 1-} \left(\sqrt{1-x} - 1\right) = 2 \Rightarrow \text{integrál konverguje.}$$

b) $$\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\, dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t^2} \sin\frac{1}{t}\, dt = \lim_{x\to 0+} \left[\cos\frac{1}{t}\right]_x^1 =$$
$$= \lim_{x\to 0+} \left(\cos 1 - \cos\frac{1}{x}\right) = \cos 1 - \lim_{x\to 0+} \cos\frac{1}{x}\,,\ \text{limita neexistuje} \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ integrál diverguje.

c) $$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = \lim_{x\to 0-} \int_{-1}^x \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0-} \left[\ln|t|\right]_{-1}^x = \lim_{x\to 0-} \ln|x| = -\infty \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ integrál diverguje.

d) $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to -1+} \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \lim_{x\to 1-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$
$$= \lim_{x\to -1+} \left[\arcsin t\right]_x^0 + \lim_{x\to 1-} \left[\arcsin t\right]_0^x =$$
$$= \lim_{x\to -1+} (-\arcsin x) + \lim_{x\to 1-} \arcsin x = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ integrál konverguje.

109. Vyšetřete, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

a) $\alpha \neq 1$: $$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0+} \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_x^1 =$$
$$= \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{pro } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{pro } \alpha > 1. \end{cases}$$

b) $\alpha = 1$: $$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0+} \left[\ln t\right]_x^1 = -\lim_{x\to 0+} \ln x = +\infty\,.$$

Závěr: Integrál $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje pro $\alpha < 1$ a diverguje pro $\alpha \geq 1$.

110. Vypočítejte integrály:

a) $$\int_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} + 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}\right]_0^1 + 2\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_0^1 + \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = \frac{31}{5}\,.$$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

Řešíme substitucí $t=\sqrt{1-x}$, pak $dt=-\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ a meze integrace jsou $x=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow t=1$ a $x\to 1- \Rightarrow t\to 0+$. Pak

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2\int_1^0 \frac{dt}{t^2+1} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2\,[\operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

Řešíme metodou per partes. Volíme $u=\ln x$ a $v'=\frac{1}{\sqrt{x}}$, pak $u'=\frac{1}{x}$ a $v=2\sqrt{x}$ a dostáváme

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -2\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\ln x - 4\left[\sqrt{x}\right]_0^1 = -4\,.$$

111. Vypočítejte integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$.

Nejprve dokážeme konvergenci metodou per partes. Volíme $u=\ln\sin x$ a $v'=$ $=1$, pak $u'=\frac{\cos x}{\sin x}$ a $v=x$ a dostáváme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = [x\ln\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{cotg} x\,dx =$$

$$= -\lim_{x\to 0+} x\ln\sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{cotg} x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\operatorname{cotg} x\,dx\,.$$

Protože funkce $x\operatorname{cotg} x$ je omezená na intervalu $(0,\frac{\pi}{2}\rangle$, je $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{cotg} x\,dx$ (vlastní) R-integrál, tedy vyšetřovaný integrál konverguje.

Výpočet: Označme $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$, substitucí $x=2t$ dostáváme

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t)\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt\,,$$

dále substitucí $t=\frac{\pi}{2}-z$ v posledním integrálu dostáváme

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin z\,dz\,,$$

z čehož plyne rovnost

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I\,,$$

a tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2\,.$$

III.2.1.4. Příklady

Vypočítejte integrály nebo rozhodněte o jejich divergenci:

112. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

113. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$

114. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$

115. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$

116. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$

117. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

118. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}$

119. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$

120. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

121. $\displaystyle\int_a^b x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx\,, \quad b>a$

122. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

123. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

124. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x\ln^2 x}$

125. $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{tg} x\,dx$

126. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$

127. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

128. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{cotg} x}\,dx$

129. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$

130. $\displaystyle\int_0^2 \left(x\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right)dx$

131. $\displaystyle\int_0^e \frac{dx}{e^x-1}$

132. $\displaystyle\int_{-1}^0 e^{\frac{1}{x}}\,\frac{dx}{x^3}$

133. $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{\frac{1}{x}}\,\frac{dx}{x^3}$

134. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

135. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

136. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$

137. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arccos x}}$

138. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

139. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3\ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

140. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx$

Návod: viz př. 111

141. $\int_0^{\pi} x \ln \sin x \, dx$

Návod: viz př. 111

142. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \cos x) \cos 2nx \, dx \,, \quad n \in \mathbb{N}$

Návod: viz kap. II př. 129

Pomocí rekurentních vzorců vypočítejte integrály ($n \in \mathbb{N}$):

143. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

144. $I_n = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x \, dx \,, \quad \alpha > -1$

III.2.2. Srovnávací kriteria konvergence

III.2.2.1. Teorie

Věta (srovnávací kriterium). *Nechť* $0 \le f(x) \le g(x)$ *pro* $x \in \langle a, b)$. *Pak platí*

1) konverguje-li $\int_a^b g(x) \, dx$, *konverguje i* $\int_a^b f(x) \, dx$,

2) diverguje-li $\int_a^b f(x) \, dx$, *diverguje i* $\int_a^b g(x) \, dx$.

Věta (limitní srovnávací kriterium). *Nechť* $f(x) \ge 0$ *a* $g(x) > 0$ *pro* $x \in \langle a, b)$ *a nechť existuje limita*

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = k \,. \tag{11}$$

Pak platí 1) je-li $k < +\infty$ *a konverguje-li* $\int_a^b g(x) \, dx$, *konverguje i* $\int_a^b f(x) \, dx$,

2) je-li $k > 0$ *a diverguje-li* $\int_a^b g(x) \, dx$, *diverguje i* $\int_a^b f(x) \, dx$.

Poznámka. Je-li v limitě (11) $k \in (0, +\infty)$, pak oba nevlastní integrály $\int_a^b f(x) \, dx$, $\int_a^b g(x) \, dx$ buď současně konvergují nebo současně divergují. Speciálně: Jestliže $f(x) \sim g(x)$, $x \to b-$, pak oba nevlastní integrály $\int_a^b f(x) \, dx$, $\int_a^b g(x) \, dx$ buď současně konvergují nebo současně divergují.

III.2.2.2. Řešené příklady

145. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci integrálů:

a) $\int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

Pro $x \in (0, 1\rangle$ platí nerovnost

$$0 \le \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \,,$$

protože $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konverguje (viz př. 109), konverguje i vyšetřovaný integrál.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$

Nechť $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$ a $g(x) = \frac{1}{1-x}$, protože

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-} \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{3}\,,$$

tak z divergence integrálu $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ (viz př. 109) plyne divergence vyšetřovaného integrálu.

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2}\,)}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\,dx$

Protože

$$\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2}\,)}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} \sim \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,, \qquad x \to 0+\,,$$

a $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ konverguje (viz př. 109), konverguje i vyšetřovaný integrál.

146. Vyšetřete pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^\alpha}\,dx$.

a) $\alpha < 1$: Položíme $\varepsilon = 1-\alpha$, pak $\varepsilon > 0$. Integrovanou funkci upravíme následujícím způsobem

$$\frac{|\ln x|}{x^\alpha} = \frac{|\ln x|}{x^{1-\varepsilon}} = \frac{x^{\frac{\varepsilon}{2}}|\ln x|}{x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}\,.$$

Protože $\lim_{x\to 0+} x^{\frac{\varepsilon}{2}}|\ln x| = 0$, existuje $x_0 \in (0,1)$ tak, že pro $x \in (0,x_0)$ platí $x^{\frac{\varepsilon}{2}}|\ln x| < 1$. Odtud plyne pro $x \in (0,x_0)$ nerovnost

$$\frac{|\ln x|}{x^\alpha} < \frac{1}{x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}\,.$$

Protože $\int_0^{x_0} \frac{dx}{x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}$ konverguje, konverguje i $\int_0^{x_0} \frac{|\ln x|}{x^\alpha}\,dx$. Vyšetřovaný integrál vyjádříme jako součet dvou integrálů

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^\alpha}\,dx = \int_0^{x_0} \frac{|\ln x|}{x^\alpha}\,dx + \int_{x_0}^1 \frac{|\ln x|}{x^\alpha}\,dx\,,$$

kde druhý z nich je (vlastní) R-integrál a první konverguje, takže vyšetřovaný integrál konverguje pro $\alpha < 1$.

b) $\alpha \geq 1$: V tomto případě platí pro $x \in (0,\frac{1}{e})$ $|\ln x| > 1$, a odtud plyne pro $x \in (0,\frac{1}{e})$ nerovnost

$$\frac{|\ln x|}{x^\alpha} > \frac{1}{x^\alpha}\,.$$

Protože $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverguje, diverguje i $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{|\ln x|}{x^\alpha}\,dx$, a tedy vyšetřovaný integrál diverguje pro $\alpha \geq 1$.

Závěr: Integrál $\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^\alpha}\,dx$ konverguje pro $\alpha < 1$ a diverguje pro $\alpha \geq 1$.

III.2.2.3. Příklady

Vyšetřete konvergenci nebo divergenci integrálů:

147. $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$

148. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}}\,dx$

149. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}$

150. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-2}{x^3-3x^2+4}\,dx$

151. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2}\,dx$

152. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

153. $\displaystyle\int_0^\pi \sin\frac{1}{\cos x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$

154. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}}\,dx$

155. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}(x^3-7x^2+15x-9)}}$

156. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}$

157. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$

158. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}\,dx$

159. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sinh x}{e^{x^2}-\cos x}\,dx$

160. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\operatorname{arctg} x}$

161. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)^3}}\,dx$

162. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

163. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

164. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln\sin x}{x\sqrt{\sin x}}\,dx$

165. $\displaystyle\int_0^1 \ln|1-4\sin^2 x|\,dx$

166. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\ln^2(1+x)}\,dx$

167. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$

Vyšetřete pro která $\alpha\in\mathbb{R}$ konvergují integrály:

168. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx$

169. $\displaystyle\int_0^1 \frac{6e^{2x^2}+24\cos x-13x^4-30}{\sin^\alpha x}\,dx$

170. $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{\alpha}{x}}(\cos x)^{\frac{1}{x^3}}\,dx$

171. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1+x}}{\cosh x-\cos x}\,dx$

172. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{e^2+x^2}-e^{\cos x}}{x^\alpha}\,dx$

173. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 2x-e^{-4x^2}}{x^\alpha\operatorname{tg} x}\,dx$

174. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\alpha\cos x} - \sqrt{1+2\cos x}}{\cos^{\frac{5}{2}} x}\, dx$

175. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh(\alpha x) - \ln(1+x^2) - 1}{\sqrt[3]{8-x^3} - 2}\, dx$

176. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(e^{x^\alpha} + x) - x}{\operatorname{tg} x}\, dx$

177. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{(4x\cos x - \pi \sin x)^\alpha}\, dx$

178. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^\alpha \cosh \frac{1}{x}}{\ln^3(1+x)}\, dx$

179. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\sqrt{1+2x} - xe^x}{1-\cos^\alpha x}\, dx$

180. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha \ln(2+x)\, dx$

181. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^\alpha}\, dx$

182. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\arcsin x + x^3) - x}{\sin^\alpha x}\, dx$

183. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^{-\frac{5}{3}}}{\operatorname{arctg}^\alpha(x-x^2)}\, dx$

184. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x+x^{2\alpha})}{x\ln^\alpha(1+x)}\, dx$

185. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln|x-\alpha|}$

Vyšetřete, pro která $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konvergují integrály:

186. $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta\, dx$

187. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx$

188. $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \ln^\beta \frac{1}{x}\, dx$

189. $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \ln x\, dx$

190. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^\alpha \frac{1}{x}}{\operatorname{tg}^\beta x}\, dx$

191. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^{\alpha-1} x}{(1+\beta\cos x)^\alpha}\, dx\,, \quad \beta \geq 0$

III.2.3. Bolzanovo–Cauchyovo kriterium

III.2.3.1. Teorie

Věta *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na $\langle a, b)$ a neomezená na nějakém levém okolí bodu b. Pak nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\, dx$ konverguje, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že pro libovolné $x_1 \in (x_0, b)$ a $x_2 \in (x_0, b)$ platí*

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| < \varepsilon\,.$$

Poznámka. B-C kriterium se často používá pro důkaz divergence integrálu: *Nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ diverguje, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro libovolné $x_0 \in (a,b)$ existují $x_1 \in (x_0,b)$ a $x_2 \in (x_0,b)$ tak, že*

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| \geq \varepsilon\,.$$

III.2.3.2. Příklad

192. Dokažte divergenci $\displaystyle\int_0^1 \sin^2 \frac{1}{1-x}\,\frac{dx}{1-x}$.

Nechť $x_0 \in (0,1)$ a vezměme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n > \frac{1}{\pi(1-x_0)}$. Položme $x_1 = 1 - \frac{1}{\pi n}$, $x_2 = 1 - \frac{1}{2\pi n}$, a dále provedeme substituci $t = \frac{1}{1-x}$. Pak platí

$$\left| \int_{1-\frac{1}{\pi n}}^{1-\frac{1}{2\pi n}} \sin^2 \frac{1}{1-x}\,\frac{dx}{1-x} \right| = \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt \geq \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \sin^2 t\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi n} \int_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2\pi n}\,\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

Existuje tedy $\varepsilon = \frac{1}{4}$ tak, že pro libovolné $x_0 \in (0,1)$ existují $x_1 = 1 - \frac{1}{\pi n}$ a $x_2 = 1 - \frac{1}{2\pi n}$, pro které platí

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{1}{1-x}\,\frac{dx}{1-x} \right| \geq \varepsilon\,,$$

tedy daný integrál diverguje.

III.2.4. Postačující podmínky konvergence

III.2.4.1. Absolutní a relativní konvergence

Věta *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na $\langle a,b)$ a neomezená na nějakém levém okolí bodu b. Nechť $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konverguje, pak konverguje i $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Definice. Nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ se nazývá *absolutně konvergentní*, konverguje-li $\int_a^b |f(x)|\,dx$, a *relativně konvergentní*, jestliže $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje a $\int_a^b |f(x)|\,dx$ diverguje.

III.2.4.2. Dirichletovo a Abelovo kriterium

Nechť funkce $f(x)\,g(x)$ je definovaná na $\langle a,b)$ a neomezená na nějakém levém okolí bodu b. Pak platí

Věta (Dirichletovo kriterium). *Nechť existuje $K>0$ tak, že $|\int_a^c f(x)\,dx|\le K$ pro každé $c\in(a,b)$. Nechť funkce $g(x)$ je monotónní na $\langle a,b)$ a $\lim_{x\to b-} g(x)=0$. Pak nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ konverguje.*

Věta (Abelovo kriterium). *Nechť (nevlastní) integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje a funkce $g(x)$ je monotónní a omezená na $\langle a,b)$. Pak nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ konverguje.*

III.2.4.3. Řešené příklady

193. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{1-x}\,\frac{dx}{1-x}$ konverguje relativně.

Konvergenci dokážeme podle Dirichletova kriteria. Položíme

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\sin\frac{1}{1-x}\,,\qquad g(x)=1-x\,.$$

Pro každé $c\in(0,1)$ je

$$\int_0^c \frac{1}{(1-x)^2}\sin\frac{1}{1-x}\,dx=\left[-\cos\frac{1}{1-x}\right]_0^c=\cos 1-\cos\frac{1}{1-c}\,,$$

existuje tedy $K>0$ tak, že

$$\left|\int_0^c \frac{1}{(1-x)^2}\sin\frac{1}{1-x}\,dx\right|\le K$$

pro každé $c\in(0,1)$. Funkce $1-x$ je klesající na $\langle 0,1)$ a $\lim_{x\to 1-}(1-x)=0$, tedy $\int_0^1 \sin\frac{1}{1-x}\,\frac{dx}{1-x}$ konverguje.

Pomocí srovnávacího kriteria ukážeme, že $\int_0^1 \left|\frac{1}{1-x}\sin\frac{1}{1-x}\right|\,dx$ diverguje. Na intervalu $\langle 0,1)$ platí nerovnost

$$\left|\frac{1}{1-x}\sin\frac{1}{1-x}\right|\ge\frac{1}{1-x}\sin^2\frac{1}{1-x}\,,$$

a protože $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\sin^2\frac{1}{1-x}\,dx$ diverguje (viz př. 192), také $\int_0^1 \left|\frac{1}{1-x}\sin\frac{1}{1-x}\right|\,dx$ diverguje.

194. Vyšetřete absolutní a relativní konvergenci $\int_0^1 x^\alpha \sin \frac{1}{x}\, dx\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Použijeme výsledku příkladu 80. Substitucí $t = \frac{1}{x}$ dostáváme

$$\int_0^1 x^\alpha \sin \frac{1}{x}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt$$

a $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}}\, dt$ konverguje absolutně pro $\alpha + 2 > 1$, konverguje relativně pro $0 < \alpha + 2 \leq 1$ a diverguje pro $\alpha + 2 \leq 0$.

Závěr: Integrál $\int_0^1 x^\alpha \sin \frac{1}{x}\, dx$ konverguje absolutně pro $\alpha > -1$, konverguje relativně pro $-2 < \alpha \leq -1$ a diverguje pro $\alpha \leq -2$.

III.2.4.4. Příklady

Vyšetřete absolutní nebo relativní konvergenci integrálů:

195. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2 + \sqrt{x^3} + x^2 \cos \frac{1}{x}}\, dx$

196. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \cos \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}\, dx$

197. $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - e^{\sqrt[3]{x^2} \cos \frac{1}{x}}\right) \frac{dx}{x^2}$

198. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^3 \ln x}{x \ln x}\, dx$

Vyšetřete absolutní nebo relativní konvergenci integrálů pro $\alpha \in \mathbb{R}$:

199. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)^\alpha \sin \frac{\pi}{1 - x}\, dx$

200. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{x^2 + 1} \sin \frac{1}{x}\, dx$

201. $\displaystyle\int_0^1 \cos \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \frac{dx}{x^\alpha}$

202. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1 - x}\right)^\alpha \cos \frac{1}{x^2}\, dx$

203. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2 (\frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x})^\alpha}\, dx$

204. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \frac{1}{\sin x} \frac{dx}{\sin^\alpha x}$

205. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^\alpha x) \cos \operatorname{cotg} x\, dx$

206. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sin \frac{1 + x}{1 - x} \frac{dx}{(1 - x^2)^\alpha}$

207. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{e^x - 1} \sin \frac{1}{x}\, dx$

208. $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha (\operatorname{arctg} x) \cos \frac{1}{x}\, dx$

209. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^2}\, dx$

210. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{(\sqrt{x} - x)^\alpha}\, dx$

211. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1 - x)^\alpha}{x} \sin \frac{1}{x}\, dx$

212. Vyšetřete pro která $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ absolutně nebo relativně konverguje integrál

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^\alpha (1-x^2)^\beta}\, dx\,.$$

III.3. Nevlastní R-integrál z neomezené funkce na neomezeném intervalu

III.3.1. Konvergence a divergence

Definice. Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $(a, +\infty)$ a neomezená na nějakém pravém okolí bodu a. Jestliže pro nějaké (a tedy pro každé) $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > a$, konvergují oba nevlastní integrály

$$\int_a^{x_0} f(x)\, dx\,, \qquad \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\, dx\,,$$

řekneme, že nevlastní integrál $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ konverguje a klademe

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^{x_0} f(x)\, dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\, dx\,.$$

Jestliže aspoň jeden z integrálů $\int_a^{x_0} f(x)\, dx$, $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\, dx$ diverguje, pak řekneme, že nevlastní integrál $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverguje.

Poznámka. Vyšetřování konvergence nevlastního integrálu $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$, kde $f(x)$ je neomezená na nějakém pravém okolí bodu a, se převádí na vyšetřování konvergence dvou nevlastních integrálů popsaných v částech III.1 a III.2.

III.3.2. Řešené příklady

213. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci integrálů:

$$a) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}\,, \qquad b) \quad \int_{-\frac{3}{2}}^{+\infty} \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\, dx\,.$$

a) Daný integrál budeme vyšetřovat např. na intervalech $(0,1)$ a $(1,+\infty)$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}\,.$$

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}}.$

Konvergenci dokážeme podle Abelova kriteria: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konverguje a funkce $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ je klesající a omezená na $\langle 0,1\rangle$.

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}.$

Konvergenci dokážeme podle limitního srovnávacího kriteria. Platí

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,, \qquad x \to +\infty\,,$$

a protože $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ konverguje, konverguje i vyšetřovaný integrál.

Závěr: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ konverguje.

b) Protože i $\lim_{x\to 0} \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}} = +\infty$, budeme daný integrál vyšetřovat na intervalech $(-\frac{3}{2}, 0)$ a $(0,+\infty)$.

1. $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{0} \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx.$

Použijeme substituci $t = \sqrt{2x+3}$, potom $dt = \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$ a meze integrace jsou $x \to -\frac{3}{2}+ \Rightarrow t \to 0$ a $x \to 0- \Rightarrow t \to \sqrt{3}$, tedy

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{0} \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+3}{(t^2-3)^2}\,dt =$$

$$= \left[-\frac{2t}{t^2-3}\right]_0^{\sqrt{3}} = -\lim_{t\to\sqrt{3}-} \frac{2t}{t^2-3} = +\infty \Rightarrow \text{integrál diverguje.}$$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx.$

Daný integrál budeme vyšetřovat např. na intervalech $(0,1)$ a $(1,+\infty)$, tedy

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx = \int_0^1 \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx\,.$$

2a) První integrál řešíme substitucí $t = \sqrt{2x+3}$, pak $dt = \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$ a meze integrace jsou $x \to 0+ \Rightarrow t \to \sqrt{3}$ a $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{5}$, tedy

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx = 2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2+3}{(t^2-3)^2}\,dt =$$

$$= \left[-\frac{2t}{t^2-3}\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} = -\sqrt{5} + \lim_{t\to\sqrt{3}+} \frac{2t}{t^2-3} = +\infty \Rightarrow \text{integrál diverguje.}$$

2b) Konvergenci druhého integrálu dokážeme podle limitního srovnávacího kriteria, platí

$$\frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,, \quad x \to +\infty\,,$$

a protože $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ konverguje, konverguje i vyšetřovaný integrál.

Závěr: $\int_{-\frac{3}{2}}^{+\infty} \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx$ diverguje.

214. Vyšetřete, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Daný integrál budeme vyšetřovat např. na intervalech $(0,1)$ a $(1,+\infty)$, pak platí

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\,,$$

a protože první integrál konverguje pro $\alpha < 1$ (viz př. 109) a druhý integrál konverguje pro $\alpha > 1$ (viz př. 2), tak $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverguje pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.

III.3.3. Příklady

Vypočítejte integrály:

215. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

216. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-1}}$

217. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

218. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1-x)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\,dx$

219. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$

220. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

221. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2-x^2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$

222. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^\alpha+1)(x^2+1)}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Vyšetřete, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergují integrály:

223. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$

224. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,dx$

225. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^\alpha}\,dx\,, \quad a \neq 0$

226. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\frac{4\alpha}{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^\alpha}\,dx$

227. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-x}\,dx$

Vyšetřete, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, konvergují integrály:

228. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^3+x^\alpha}-1}{x^3}\,dx$

229. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\frac{dx}{x}$

230. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x+x^\alpha)}{\sqrt{x^3}}\,dx$

231. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^\alpha+e^x)}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx$

Vyšetřete, pro která $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konvergují integrály:

232. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$

233. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx\,, \quad \beta \geq 0$

234. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha+x^\beta}$

235. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha |x-1|^\beta\,dx$

236. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x-1|^\alpha |x+1|^\beta\,dx$

237. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} x}{2+x^\beta}\,dx\,, \quad \beta \geq 0$

238. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^\alpha x}{(x^2+2)(e^x-1)^\beta}\,dx$

239. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(\sqrt[3]{x+1}-1)^\beta \sin^\beta \frac{x}{x+1}}\,dx$

240. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^\alpha(e^x-x)}{(x+\sqrt{x})^\beta \arcsin \frac{x}{x+1}}\,dx$

241. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)-2\ln x}{(\sqrt[4]{x+1}-1)^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}\,dx$

Vyšetřete absolutní a relativní konvergenci integrálů pro $\alpha \in \mathbb{R}$:

242. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \sin\sin x\, dx$

243. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}\, dx$

244. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{tg}\sin\frac{1}{x}\, dx$

245. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha}\, dx$

Vyšetřete absolutní a relativní konvergenci integrálů pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

246. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \sin x^\beta\, dx\,, \quad \beta \neq 0$

247. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{1+x^\beta}\, dx\,, \quad \beta \geq 0$

Dokažte následující rovnosti za předpokladu, že integrály na levé straně rovností konvergují:

248. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\Big(\alpha x + \frac{\beta}{x}\Big) dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} f\Big(\sqrt{x^2+4\alpha\beta}\,\Big) dx\,, \quad \alpha > 0\,, \beta > 0\,.$

249. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x^2)\, dx = \alpha \int_0^{+\infty} f\Big(\alpha^2 x^2 - 2\alpha\beta + \frac{\beta^2}{x^2}\Big) dx\,, \quad \alpha > 0\,,\ \beta > 0\,.$

250. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x}\right) \frac{\ln x}{x}\, dx = \ln\alpha \int_0^{+\infty} f\Big(\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x}\Big)\frac{dx}{x}\,, \quad \alpha > 0\,.$

251. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\Big(x^\alpha + \frac{1}{x^\alpha}\Big)\frac{\ln x}{x}\, dx = 0\,, \quad \alpha \neq 0\,.$

IV
Aplikace Riemannova integrálu

IV.1. Obsah množin v $\mathbb{R}^2$

IV.1.1. Obsah omezené množiny

Definice. Nechť funkce $f(x)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak číslo

$$S(A) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

nazýváme obsahem množiny

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}\,, \tag{2}$$

tj. množiny omezené přímkami $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $f(x)$.

Poznámka. Nechť funkce $f(x)$ spojitá a nekladná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak definujeme obsah množiny

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le 0\}\,,$$

jako číslo

$$S(A) = \Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big|\,.$$

Poznámka. Při výpočtu obsahu množin v $\mathbb{R}^2$ vycházíme z principu, že

$$S(A \cup B) = S(A) + S(B)\,,$$

kde $A \subset \mathbb{R}^2$, $B \subset \mathbb{R}^2$ jsou množiny, pro které platí $A \cap B = \emptyset$ nebo $A \cap B$ má nulový obsah, tzn. $A \cap B$ je jednorozměrná množina v $\mathbb{R}^2$.

Věta. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $g(x) \le f(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Pak pro obsah $S(A)$ množiny*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$$

platí

$$S(A) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\,. \tag{3}$$

Věta. *Nechť funkce $y = f(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ zadána parametricky rovnicemi*

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle\,, \tag{4}$$

kde funkce $\varphi_1'(t)$ a $\varphi_2'(t)$ jsou spojité na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, $\varphi_2(t) \geq 0$ a $\varphi_1'(t) \neq 0$ pro $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, $\varphi_1(\langle \alpha, \beta\rangle) = \langle a, b\rangle$. Pak pro obsah množiny A ze vztahu (2) platí

$$S(A) = \int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\,|\varphi_1'(t)|\,dt\,. \tag{5}$$

Poznámka. Je-li v parametrickém zadání (4) $\varphi_2(t) \leq 0$ pro $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, je ve vzorci (5) absolutní hodnota integrálu.

Pro funkci $x = f(y)$ na intervalu $\langle c, d\rangle$ platí analogicky:

Věta. *Nechť $f(y)$ je spojitá a nezáporná funkce na intervalu $\langle c, d\rangle$, pak pro obsah $S(A)$ množiny*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ c \leq y \leq d,\ 0 \leq x \leq f(y)\} \tag{6}$$

platí

$$S(A) = \int_c^d f(y)\,dy\,. \tag{7}$$

Věta. *Nechť funkce $f(y)$ a $g(y)$ jsou spojité na intervalu $\langle c, d\rangle$ a nechť $g(y) \leq f(y)$ pro $y \in \langle c, d\rangle$. Pak pro obsah $S(A)$ množiny*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ c \leq y \leq d,\ g(y) \leq x \leq f(y)\}$$

platí

$$S(A) = \int_c^d (f(y) - g(y))\,dy\,. \tag{8}$$

Věta. *Nechť funkce $x = f(y)$ je na intervalu $\langle c, d\rangle$ zadána parametricky rovnicemi*

$$y = \psi_1(t), \quad x = \psi_2(t), \quad t \in \langle \gamma, \delta \rangle\,,$$

kde funkce $\psi_1'(t)$ a $\psi_2'(t)$ jsou spojité na intervalu $\langle \gamma, \delta\rangle$, $\psi_2(t) \geq 0$, $\psi_1'(t) \neq 0$ pro $t \in \langle \gamma, \delta\rangle$, $\psi_1(\langle \gamma, \delta\rangle) = \langle c, d\rangle$. Pak pro obsah množiny A ze vztahu (6) platí

$$S(A) = \int_\gamma^\delta \psi_2(t)\,|\psi_1'(t)|\,dt\,. \tag{9}$$

Věta. *Nechť funkce $r(\varphi)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$. Pak pro obsah množiny $A \subset \mathbb{R}^2$, která je omezená křivkou $r = r(\varphi)$, kde r a φ jsou polární souřadnice v $\mathbb{R}^2$, a „polopřímkami $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$“ platí*

$$S(A) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi\,. \tag{10}$$

IV.1.2. Obsah neomezené množiny

Definice. Nechť $\mathcal{J}$ je jeden z intervalů $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$ nebo (a,b) (interval nemusí být omezený). Nechť funkce $f(x)$ je definovaná a nezáporná na intervalu $\mathcal{J}$ a nechť nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje nebo $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$. Pak číslo

$$S(A) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{11}$$

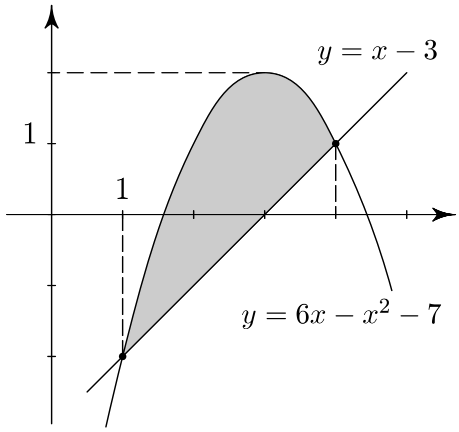
(z $\mathbb{R}^*$) nazýváme obsahem neomezené množiny

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathcal{J},\ 0 \le y \le f(x)\}\,.$$

Poznámka. Je-li $f(x) \le 0$ na intervalu $\mathcal{J}$, pak ve vztahu (11) je absolutní hodnota integrálu.

IV.1.3. Řešené příklady

1. Vypočítejte obsah množiny v $\mathbb{R}^2$, která je omezená parabolou $y = 6x - x^2 - 7$ a přímkou $y = x - 3$.

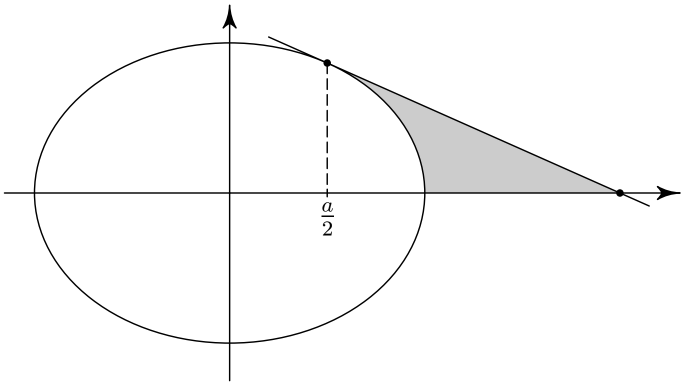


Obr. 1

Meze integrace budou x-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí $y = 6x - x^2 - 7$ a $y = x - 3$. Platí $6x - x^2 - 7 = x - 3$, a tedy $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Na intervalu $\langle 1,4\rangle$ platí $x - 3 \le 6x - x^2 - 7$ (viz obr. 1). Podle vzorce (3)

$$S = \int_1^4 \Big((6x - x^2 - 7) - (x - 3)\Big)\,dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)\,dx = \frac{9}{2}\,.$$

2. Vypočítejte obsah množiny v $\mathbb{R}^2$, která je omezená elipsou $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, tečnou k této elipse v bodě $(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}b)$ a přímkou $y=0$ (viz obr. 2).



Obr. 2

Oblouk elipsy a tečnu k elipse vyjádříme jako funkce proměnné y

$$x_1(y)=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,,\quad x_2(y)=\frac{a}{b}\,(2b-\sqrt{3}y)\,,\quad 0\le y\le\frac{\sqrt{3}}{2}\,b\,.$$

Na intervalu $\langle 0,\frac{\sqrt{3}}{2}b\rangle$ platí $x_1(y)\le x_2(y)$. Podle vzorce (8)

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}(x_2(y)-x_1(y))\,dy=\frac{a}{b}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}(2b-\sqrt{3}y)\,dy-\frac{a}{b}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy\,.$$

Substitucí $y=b\sin t$ vypočítáme integrál

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{3}}b^2\cos^2 t\,dt=b^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

Pro obsah S tedy platí

$$S=ab\left(\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)-ab\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=ab\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

3. Vypočítejte obsah množiny v $\mathbb{R}^2$, která je omezená křivkou $x=a\sin t\cos^2 t$, $y=a\cos t\sin^2 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

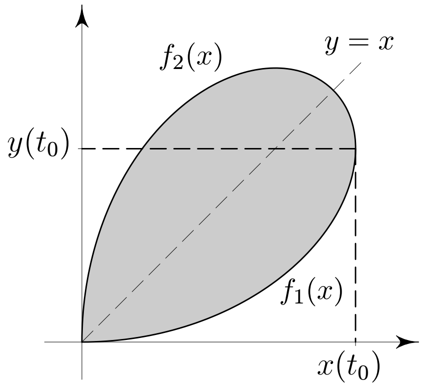
Platí $x(0)=y(0)=0$ a $x(\frac{\pi}{2})=y(\frac{\pi}{2})=0$; pro $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ je $x(t)>0$ a $y(t)>0$, křivka je tedy uzavřená. Zjistíme, kolik funkcí je uvedenými parametrickými rovnicemi definováno pro $t\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$:

$$x'(t)=a\cos t\,(\cos^2 t-2\sin^2 t)$$
$$x'(t)=0\Leftrightarrow\cos t=0\vee\operatorname{cotg} t=\sqrt{2}\,,$$

$\cos t=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$ je krajní bod intervalu, proto tento parametr neuvažujeme. Označme t_0 hodnotu parametru, pro kterou $\operatorname{cotg} t_0=\sqrt{2}$. Pak parametrické rovnice definují pro $t \in \langle 0, t_0\rangle$ funkci $f_1(x)$ a pro $t \in \langle t_0, \frac{\pi}{2}\rangle$ funkci $f_2(x)$ s vlastnostmi

$$f_1(x): \ t \in \langle 0, t_0\rangle, \ x'(t) \geq 0, \ x(\langle 0, t_0\rangle) = \langle 0, x(t_0)\rangle,$$
$$f_2(x): \ t \in \langle t_0, \frac{\pi}{2}\rangle, \ x'(t) \leq 0, \ x(\langle 0, t_0\rangle) = \langle 0, x(t_0)\rangle,$$

a na intervalu $\langle 0, x(t_0)\rangle$ platí $f_1(x) \leq f_2(x)$ (viz obr. 3).



Obr. 3

Podle vzorce (3)

$$S = \int_0^{x(t_0)} (f_2(x) - f_1(x))\, dx = \int_0^{x(t_0)} f_2(x)\, dx - \int_0^{x(t_0)} f_1(x)\, dx\,,$$

a podle vzorce (5) v parametrickém vyjádření

$$S = \int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}} y(t)|x'(t)|\, dt - \int_0^{t_0} y(t)|x'(t)|\, dt =$$
$$= -\int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}} y(t)\, x'(t)\, dt - \int_0^{t_0} y(t)\, x'(t)\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)x'(t)\, dt\,.$$

Pro výpočet obsahu S využijeme metodu per partes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y'(t)\, x(t)\, dt = [y(t)x(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)x'(t)\, dt\,,$$

a protože $[y(t)x(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$, platí $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y'(t)x(t)\, dt$, a tedy

$$2S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y'(t)x(t)\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)x'(t)\, dt\,.$$

Pak

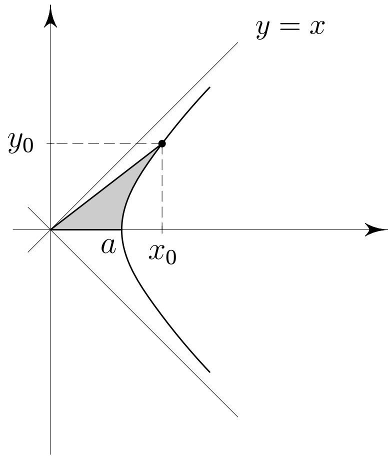
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'(t)x(t) - y(t)x'(t))\, dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, dt = \frac{\pi a^2}{32}\,.$$

4. Vypočítejte obsah množiny v $\mathbb{R}^2$ omezené hyperbolou $x^2 - y^2 = a^2$ a přímkami $y = 0$ a $y = \frac{y_0}{x_0}x$, kde bod (x_0, y_0) leží na dané hyperbole ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$).

Přejdeme k polárním souřadnicím $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, pak rovnice hyperboly $x^2 - y^2 = a^2$ je tvaru

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}\,, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right).$$

Protože množina je omezená přímkami se směrnicemi $k_1 = 0$ a $k_2 = \frac{y_0}{x_0} > 0$, je $\varphi \in \langle 0, \alpha\rangle$, kde $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_0}{x_0} < 1$ (viz obr. 4).



Obr. 4

Podle vzorce (10)

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\alpha r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{4}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a^2}{4}\ln\frac{x_0+y_0}{x_0-y_0}\,,$$

a protože $x_0^2 - y_0^2 = a^2$, dostáváme

$$S = \frac{a^2}{4}\ln\frac{(x_0+y_0)^2}{a^2} = \frac{a^2}{2}\ln\frac{x_0+y_0}{a}\,.$$

5. Vypočítejte obsah neomezené množiny v $\mathbb{R}^2$, která je omezená grafem funkce $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a přímkami $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

Funkce $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je kladná na intervalu $(-1, 1)$, přímky $x = -1$ a $x = 1$ jsou její vertikální asymptoty. Podle vzorce (11)

$$S = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-1}^1 = \pi\,.$$

6. Vypočítejte obsah neomezené množiny v $\mathbb{R}^2$, která je omezená grafem funkce $y = \operatorname{arctg} x$ a osou x, $x \geq 0$.

Funkce $\operatorname{arctg} x$ je nezáporná na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Podle vzorce (11)

$$S = \int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x \, dx = \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2x} \right) = +\infty \,,$$

protože

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \,.$$

IV.1.4. Příklady

Vypočítejte obsah množiny omezené křivkami:

7. $y = \sin x \,, \quad y = 0 \,, \quad 0 \leq x \leq \pi$

8. $y = \dfrac{1}{x} \,, \quad y = 0 \,, \quad x = a \,, \quad x = b \,, \quad a > b > 0$

9. $y = e^{-x}, \quad x = 0 \,, \quad y = 0 \,, \quad x = a$

10. $y = a \cosh \dfrac{x}{a} \,, \quad y = 0 \,, \quad x = 0 \,, \quad x = x_0$

11. $y = \dfrac{x^2}{2} \,, \quad y = 2 - \dfrac{3}{2} x$

12. $y = 2\,x - x^2 \,, \quad y = x$

13. $y = \sqrt{x} \,, \quad y = x - 2 \,, \quad x = 0$

14. $y = x - \dfrac{\pi}{2} \,, \quad y = \cos x \,, \quad x = 0$

15. $y = x \,, \quad y = \dfrac{\pi}{2} \sin x$

16. $y = \sin x \,, \quad y = \cos x \,, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$

17. $y = a^x \,, \quad y = a \,, \quad x = 0 \,, \quad a > 1$

18. $y = |\ln x| \,, \quad y = 0 \,, \quad x = \dfrac{1}{2} \,, \quad x = 2$

19. $y = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,, \quad y = 2a\,, \quad a > 0$

20. $y = \sin^2 x\,, \quad y = x \sin x\,, \quad 0 \le x \le \pi$

21. $y = x\,, \quad y = x + \sin^2 x\,, \quad 0 \le x \le \pi$

22. $y = \operatorname{tg} x\,, \quad y = \dfrac{2}{3} \cos x\,, \quad x = 0$

23. $y = -x^2\,, \quad y = x^2 - 2x - 4$

24. $y = \ln(1 + x)\,, \quad y = -xe^{-x}\,, \quad x = 1$

25. $y = \dfrac{6}{x + 5}\,, \quad y = |x|\,, \quad x \ge -2$

26. $y = x - x^2, \quad y = x\sqrt{1 - x}$

27. $y = \dfrac{x^2}{2}\,, \quad y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

28. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,, \quad y + x^2 = 0\,, \quad x = 1$

29. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}\,, \quad 2ay = x^2$

30. $y = \dfrac{10}{x^2 + 4}\,, \quad y = \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}$

31. $y = (x^2 - 2x)\, e^x, \quad y = 0$

32. $y = |x|^3 e^{-x^2}, \quad |x| = a\,, \quad a > 0$

33. $y = 2x^2 e^x, \quad y = -x^3 e^x$

34. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + x^3}\,, \quad y = 0\,, \quad x = 1$

35. $y = x^\alpha, \quad y = x^{-\alpha}, \quad x = a\,, \quad \alpha > 0\,, \quad 0 < a < 1$

36. $y = x^\alpha, \quad y = x^{\frac{1}{\alpha}}\,, \quad x \ge 0\,, \quad \alpha > 1$

37. $y = 2^{x-3} + 1\,, \quad y = 2^{3-x} + 1\,, \quad y = \dfrac{3}{2}$

38. $y = 3^x, \quad y = \dfrac{9}{4}(3^{-x} + 1)\,, \quad y = 9$

39. $y = \arcsin x\,, \quad y = \arccos x\,, \quad y = 0$

40. $y = x + 1\,,\quad x = \sin \pi y\,,\quad y = 0\,,\quad 0 \le y \le 1$

41. $y = (x+1)^2\,,\quad x = \sin \pi y\,,\quad y = 0\,,\quad 0 \le y \le 1$

42. $y = \ln(x+6)\,,\quad y = 3\,\ln x\,,\quad x = 0\,,\quad y = 0$

43. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

44. $y^2 = 2px\,,\quad 27py^2 = 8(x-p)^3$

45. $y^2 = 2px\,,\quad x^2 = 2py$

46. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}\,,\quad x = 2a$

47. $(y-x)^2 = x^\alpha,\quad x = a^2,\quad a > 0\,,\quad \alpha > 0$

48. $(y - x + 2)^2 = 9y\,,\quad x = 0\,,\quad y = 0$

49. $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$

50. $a^4y^2 = (a^2 - x^2)^3$

51. $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$

52. $x^4y^2 = a^5(x - a)\,,\quad x = 2a$

53. $y^2 = \sin^2 x \cos x\,,\quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

54. $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2$

---

55. V jakém poměru dělí parabola $x^2 = 2y$ obsah kruhu $x^2 + y^2 = 8$?

56. Vypočítejte obsah množiny omezené osou x, křivkou $y = (x-1)^5 + 1$ a tečnou k ní, která je rovnoběžná s přímkou $10x - 2y - 5 = 0$.

57. Vypočítejte obsah množiny omezené parabolou $y = x^2 - 2x + 3$, tečnou k ní v bodě $(3, 6)$ a osami souřadnic.

58. Nechť $y(x) = ax^2 + bx + c$ je větší než nula pro $x_1 \le x \le x_2$. Dokažte, že obsah množiny omezené křivkami $y = y(x)$, $x = x_1$, $x = x_2$, $y = 0$ je roven

$$\tfrac{1}{6}(x_2 - x_1)\,\big(y(x_1) + y(x_2) + 4y(x_0)\big)\,,$$

kde $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (Simpsonův vzorec).

Vypočítejte obsah množiny omezené křivkami:

59. $x = 2t - t^2, \quad y = 2t^2 - t^3$

60. $x = a(t - \sin t)\,, \quad y = a(1 - \cos t)\,, \quad 0 \le t \le 2\pi\,, \quad y = 0$

61. $x = a(\cos t + t\sin t)\,, \quad y = a(\sin t - t\cos t)\,, \quad 0 \le t \le 2\pi\,, \quad x = a\,, \quad y \le 0$

62. $x = a(2\cos t - \cos 2t)\,, \quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$

63. $x = \dfrac{a}{4}(3\cos t + \cos 3t)\,, \quad y = \dfrac{a}{4}(3\sin t - \sin 3t)$

64. $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t\,, \quad y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t\,, \quad c^2 = a^2 - b^2$

65. $x = a\cos t\,, \quad y = \dfrac{a\sin^2 t}{2 + \sin t}$

66. $x^4 + y^4 = ax^2y$

Návod: Vyjádřete křivku v parametrickém tvaru, položte $y = tx$.

---

67. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

68. $r = a(1 + \cos\varphi)$

69. a) $r = a\sin 3\varphi$

b) $r = a\sin n\varphi\,, \quad n \in \mathbb{N}$

70. $r = 3 + 2\cos\varphi$

71. $r = \dfrac{a}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{3})}\,, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

72. $r = a\cos\varphi\,, \quad r = a(\cos\varphi + \sin\varphi)\,, \quad$ (množina obsahuje bod $(\frac{a}{2}, 0)$)

V následujících příkladech vyjádřete křivky v polárních souřadnicích:

73. $x^3 + y^3 = 3axy$

74. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$

75. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$

76. $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$

77. $x^4 + y^4 = ax^2y$

78. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

79. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\,, \quad x^2 + y^2 = a^2\,, \quad x^2 + y^2 \geq a^2$

Vypočítejte obsah neomezené množiny omezené křivkami:

80. $y = e^{-x}|\sin x|\,, \quad y = 0\,, \quad x \geq 0$

81. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}\,, \quad y = 0$

82. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}\,, \quad y = 0\,, \quad x \geq 0$

83. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,, \quad y = 0\,, \quad x \geq 1$

84. $y = e^{-x} \operatorname{tgh} x\,, \quad y = 0\,, \quad x \geq 0$

85. $y = \dfrac{x+1}{(x^2 + 4x + 5)^2}\,, \quad y = 0\,, \quad x \geq -1$

86. $y^2 = \dfrac{x^n}{(1 + x^{n+2})^2}\,, \quad x > 0\,, \quad n > -2$

---

87. $r = \operatorname{tg} \varphi\,, \quad r = \dfrac{1}{\cos \varphi}\,, \quad 0 \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2}$

88. $r = \dfrac{1}{\varphi}\,, \quad r = \dfrac{1}{\sin \varphi}\,, \quad 0 < \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$

Vypočítejte obsah neomezené množiny omezené křivkou a její asymptotou:

89. $y = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}\,, \quad y = 0$

90. $xy^2 = 8 - 4x$

91. $(x+1)\, y^2 = x^2\,, \quad x < 0$

92. $(4 - x)\, y^2 = x^3$

93. $(1 - x^2)\, y^2 = x^2, \quad x > 0$

94. $x = \cos 2t\,, \quad y = (\cos 2t) \operatorname{tg} t\,, \quad \dfrac{\pi}{4} \leq t \leq \dfrac{3}{4}\pi$

IV.2. Délka křivky v $\mathbb{R}^2$

IV.2.1. Definice křivky

Definice. Nechť $\boldsymbol{\varphi}$ je spojité zobrazení intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ do $\mathbb{R}^2$, tj.

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle ,$$

kde $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pak množinu

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ t \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$$

nazýváme *křivkou v rovině* a rovnice

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle ,$$

parametrickými rovnicemi křivky K.

IV.2.2. Délka křivky

Věta. *Nechť K je křivka definovaná parametrickými rovnicemi*

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle .$$

Nechť funkce $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ mají spojitou derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, pak křivka K má konečnou délku a platí

$$d(K) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t)}\, dt . \tag{12}$$

Věta. *Nechť funkce $f(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak křivka K, která je grafem funkce $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ má konečnou délku a platí*

$$d(K) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx . \tag{13}$$

Analogicky platí:

Věta. *Je-li křivka K grafem funkce $x = f(y)$ na intervalu $\langle c, d \rangle$, kde funkce $f(y)$ má spojitou derivaci na intervalu $\langle c, d \rangle$, pak pro délku křivky K platí*

$$d(K) = \int_c^d \sqrt{1 + f'^2(y)}\, dy . \tag{14}$$

Věta. *Nechť funkce* $r(\varphi)$ *má spojitou derivaci na intervalu* $\langle\alpha,\beta\rangle$, $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$. *Nechť křivka* K *je definována rovnicí*

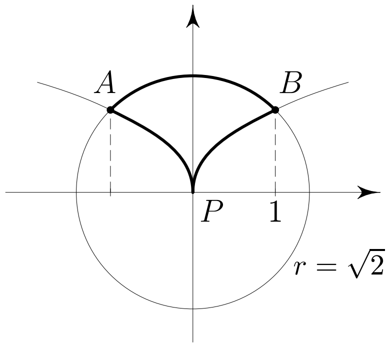
$$r=r(\varphi)\,,\quad \varphi\in\langle\alpha,\beta\rangle\,,$$

kde r *a* φ *jsou polární souřadnice v* $\mathbb{R}^2$. *Pak pro délku křivky* K *platí*

$$d(K)=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi\,. \tag{15}$$

IV.2.3. Řešené příklady

95. Vypočítejte obvod křivočarého trojúhelníka vymezeného kružnicí $x^2+y^2=2$ a grafem funkce $y=\sqrt{|x|}$ (viz obr. 5).



Obr. 5

Dané křivky se protínají v bodech $(-1,1)$ a $(1,1)$, vrcholy křivočarého trojúhelníka jsou tedy $A=(-1,1)$, $B=(1,1)$ a $P=(0,0)$. Délky stran PA a PB jsou stejné (viz obr. 5). Délka strany PB je délka křivky, která je grafem funkce $y=\sqrt{x}$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$. Protože $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, je derivace y' neomezená na pravém redukovaném okolí bodu 0, není tedy spojitá na $\langle 0,1\rangle$ a nemůžeme pro výpočet použít vzorec (13). Vyměníme proměnné a délka strany PB je délka křivky, která je grafem funkce $x=y^2$, $y\in\langle 0,1\rangle$. Pro výpočet použijeme vzorec (14)

$$d(PB)=\int_0^1\sqrt{1+4y^2}\,dy\,,$$

integrál řešíme substitucí $y=\frac{1}{2}\sinh t$, pak

$$\int_0^1\sqrt{1+4y^2}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{argsinh}2}\cosh^2 t\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sinh 2t+t\right]_0^{\operatorname{argsinh}2}=\frac{1}{4}\left[\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t}+t\right]_0^{\operatorname{argsinh}2}=$$

$$=\frac{1}{4}\,(2\sqrt{5}+\operatorname{argsinh}2)=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}\,)\right).$$

Délka strany AB je délka části kružnice $x^2 + y^2 = 2$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ a $y > 0$. Kružnice je tedy grafem funkce $y = \sqrt{2 - x^2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Protože $y' = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$, je derivace y' spojitá na $\langle -1, 1 \rangle$, a pro výpočet použijeme vzorec (13)

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{x^2}{2 - x^2} = \frac{2}{2 - x^2}\,,$$

$$d(AB) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2}{2 - x^2}}\, dx = [\sqrt{2}\arcsin x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Závěr: Obvod křivočarého trojúhelníka PAB je roven

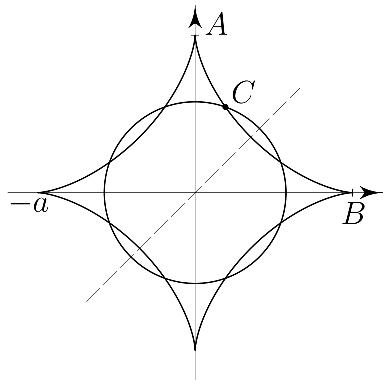
$$d(AB) + 2d(PB) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5}\,)\,.$$

96. Vypočítejte poloměr kružnice se středem v bodě $(0, 0)$, která dělí oblouk asteroidy $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, na tři části stejné délky.

Oblouk asteroidy vyjádříme parametrickými rovnicemi

$$x = a\sin^3 t\,, \quad y = a\cos^3 t\,, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

a délku oblouku vyjádříme v závislosti na parametru t. Označme $A = (0, a)$, $B = (a, 0)$ a $C = (x(t_0), y(t_0))$ (viz obr. 6).



Obr. 6

Protože $x' = 3a\sin^2 t\cos t$, $y' = -3a\cos^2 t\sin t$, jsou derivace x', y' spojité na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pro výpočet délky oblouku asteroidy od bodu $A\,(t = 0)$ do bodu $C\,(t = t_0)$ použijeme vzorec (12)

$$d(t_0) = 3a \int_0^{t_0} \sin t\cos t\, dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t_0\,.$$

Délka celého oblouku $AB\,(t_0 = \frac{\pi}{2})$ je rovna $d = \frac{3a}{2}$.

Z podmínky, že délka AC je rovna $\frac{d}{3}$ dostáváme

$$\sin^2 t_0 = \frac{1}{3} \implies \sin t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \cos t_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Souřadnice bodu C jsou $x_0 = \frac{a}{3\sqrt{3}}$ a $y_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}a$, a protože bod C leží na hledané kružnici, platí pro poloměr r

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

97. Vypočítejte délku kardioidy, která je zadána v polárních souřadnicích rovnicí $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Protože $r' = -a\sin\varphi$, je funkce r' spojitá na $\langle 0, 2\pi\rangle$, použijeme pro výpočet délky vzorec (15)

$$d = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$
$$= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\, d\varphi = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi =$$
$$= 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi - 2a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a.$$

IV.2.4. Příklady

Vypočítejte délku křivky:

98. $y = \sqrt{x^3}, \quad 0 \le x \le 4$

99. $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}, \quad 0 \le x \le 2\sqrt{3}$

100. $y = \sqrt{2x - x^2} - 1, \quad \frac{1}{4} \le x \le 1$

101. $x^2 = 5y^3, \quad x^2 + y^2 \le 6$

102. $y = \frac{x}{6}\sqrt{x+12}, \quad -11 \le x \le -3$

103. $y = \sqrt{\frac{x}{3}}\,(1-x), \quad 0 \le x_0 \le x \le 1$

104. $y = \dfrac{x^\alpha + x^{2-\alpha}}{2\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}, \quad 1 \le x \le x_0$

105. $y = \dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{x^5}\right), \quad 1 \le x \le 8$

106. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 0$, je délka křivky $y = ax^{\alpha}$, $0 < x_0 \le x \le t$, elementární funkce proměnné t?

Vypočítejte délku křivky:

107. $y = \cosh x\,, \quad 0 \le x \le a$

108. $y = \sinh^2 x\,, \quad |x| \le a$

109. $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}\,)\,, \quad 1 < a \le x \le b$

110. $y = \ln \operatorname{tgh} \dfrac{x}{2}\,, \quad 0 < a \le x \le b$

---

111. Nechť $M = (x, y)$, $x \neq 0$, je bod křivky $y = a \cosh \frac{x}{a}$, nechť t je tečna k této křivce v bodě M a M_1 je průmět bodu M na osu x, N je průmět bodu M_1 na tečnu t. Dokažte, že délka oblouku AM, kde $A = (0, a)$, je rovna délce úsečky MN.

Vypočítejte délku křivky:

112. $y = \dfrac{1}{4}x^2, \quad 0 \le x \le 2$

113. $y = 4 - \dfrac{1}{2}x^2, \quad y \ge 0$

114. $y^2 = 8x\,, \quad -4 \le y \le 4$

115. $y = 4\sqrt{x-2}\,, \quad 2 \le x \le 3$

116. $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}\ln x\,, \quad 1 \le x \le 3$

117. $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y\,, \quad 1 \le y \le e$

118. $y = \ln x\,, \quad 2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6}$

119. $y = e^x, \quad 0 \le x \le x_0$

120. $y = \ln(x^2 - 1)\,, \quad 2 \le x \le 5$

121. $y = a \ln \dfrac{a^2}{a^2 - x^2}\,, \quad 0 \le x \le b < a$

122. $y = 2\sqrt{1 + e^{\frac{x}{2}}}\,, \quad \ln 9 \le x \le \ln 64$

123. $y = \ln \sin x\,, \quad \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{2}{3}\pi$

124. $x = \ln \cos y\,, \quad 0 \le y \le \dfrac{\pi}{3}$

125. $y = \arcsin e^x, \quad -\ln 7 \le x \le -\ln 2$

---

126. $y = \dfrac{x}{4}\sqrt{2 - x^2}\,, \quad 0 \le x \le 1$

127. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\,, \quad 0 \le x \le \dfrac{5}{6}$

128. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\,, \quad 0 \le x \le \dfrac{9}{16}$

129. $x = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}} - \sqrt{1 - y^2}\,, \quad |y| \le a < 1$

130. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{1 - x}\,, \quad \dfrac{11}{36} \le x \le \dfrac{15}{16}$

131. $y = 2\Big(\sqrt{e^x - 1} - \mathrm{arctg}\sqrt{e^x - 1}\Big), \quad 0 \le x \le x_0$

132. $y = 2a \ln \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} - 4\sqrt{ax}\,, \quad 0 \le x \le x_0 < a$

133. $y = a \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}\,, \quad 0 < x_0 \le x \le a$

134. $y = \sqrt{x^2 - 32} + 8\ln\Big(x + \sqrt{x^2 - 32}\Big)\,, \quad 6 \le x \le 9$

---

135. $x = a\cos^3 t\,, \quad y = a\sin^3 t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$

136. $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t\,, \quad y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t\,, \quad 0 \le x \le 2\pi\,, \quad c^2 = a^2 - b^2$

137. $x = a(t - \sin t)\,, \quad y = a(1 - \cos t)\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$

138. $x = a(\cos t + t\sin t)\,, \quad y = a(\sin t - t\cos t)\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$

139. $x = \cosh^3 t\,, \quad y = \sinh^3 t\,, \quad 0 \le t \le t_0$

140. $x = a(\sinh t - t)\,, \quad y = a(\cosh t - 1)\,, \quad 0 \le t \le t_0$

141. $x = ae^{\alpha t}\cos t\,, \quad y = ae^{\alpha t}\sin t\,, \quad 0 \le t \le t_0$

142. $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right)\,, \quad y = a\sin t\,, \quad 0 < t_0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

143. $x = \sin^4 t\,, \quad y = \cos^2 t\,, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

144. $x = \cos^4 t\,, \quad y = \sin^4 t\,, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

145. $x = a\cos^5 t\,, \quad y = a\sin^5 t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$

146. $x = a\cos^3 t\,, \quad y = b\sin^3 t\,, \quad 0 \le t \le t_0 \le \dfrac{\pi}{2}\,, \quad a \ne b$

147. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t\,, \quad y = (t^2 - 2)\cos t - 2t\sin t\,, \quad 0 \le t \le \pi$

148. $x = 8at^3\,, \quad y = 3a(2t^2 - t^4)\,, \quad y \ge 0$

149. $x = 6 - 3t^2\,, \quad y = 4t^3\,, \quad x \ge 0$

---

150. Najděte přímku $y =$ *konstanta*, která dělí oblouk cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, na tři části stejné délky.

151. Dokažte, že délka elipsy $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ je rovna délce jedné vlny sinusovky $y = c\sin\frac{x}{b}$, kde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

152. Dokažte, že délka oblouku křivky $x = at - b\sin t$, $y = a - b\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$, je rovna délce elipsy s poloosami $a + b$ a $|a - b|$.

153. Dokažte, že délka $d(e)$ elipsy s poloosami a a b vyhovuje nerovnosti

$$\pi(a + b) < d(e) < \pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}\,.$$

Vypočítejte délku smyčky křivky:

154. $x = t^2\,, \quad y = t\left(\dfrac{1}{3} - t^2\right)$

155. $x = 2t^3(1 - t^2)\,, \quad y = \sqrt{15}\,t^4$

156. $x = a(t^2 - 1)\,, \quad y = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}\left(t^3 - \dfrac{t}{4}\right)$

Vypočítejte délku křivky:

157. $r = a\varphi\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

158. $r = ae^{\alpha\varphi}, \quad \alpha > 0\,, \quad 0 < r < a$

159. $r = a\sin\varphi$

160. a) $r = a\cos^3\dfrac{\varphi}{3}\,;$ b) $r = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$

161. $r = a\sin^n\dfrac{\varphi}{n}\,, \quad n \in \mathbb{N},$ je-li: *a)* n sudé; *b)* n liché

162. $r = a(1 - \cos\varphi)$

163. $r = a(1 - \sin\varphi)\,, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le -\dfrac{\pi}{6}$

164. $r = a\,\mathrm{tgh}\,\dfrac{\varphi}{2}\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

165. $r = \dfrac{p}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,, \quad \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3}{2}\varphi$

166. $r = \dfrac{p}{1 + \cos\varphi}\,, \quad |\varphi| \le \dfrac{\pi}{2}$

167. Vypočítejte délku smyčky křivky: a) $r = \dfrac{a}{\sin^3\frac{\varphi}{3}};$ b) $r = \dfrac{a}{\cos^4\frac{\varphi}{4}}$

168. Nechť funkce $r(t)$ a $\varphi(t)$ mají spojité derivace na intervalu (α, β). Dokažte, že pro délku křivky zadanou rovnicemi $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, kde r, φ jsou polární souřadnice v rovině, platí

$$d = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(t)\varphi'^2(t) + r'^2(t)}\,dt\,.$$

Vypočítejte délku křivky:

169. $r = 1 + \cos t\,, \quad \varphi = t - \mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}\,, \quad 0 \le t \le t_0 < \pi$

170. $\varphi = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right), \quad 1 \le r \le 3$

171. $\varphi = \dfrac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \arccos\dfrac{a}{r}\,, \quad a < r_1 \le r \le r_2$

172. $\varphi = \arccos\dfrac{r^2 + ab}{(a + b)r}\,, \quad a \le r \le b$

IV.3. Objem rotačního tělesa

IV.3.1. Pojem rotačního tělesa

V části IV.1 jsme viděli, že pomocí Riemannova integrálu lze určit obsah jednoduchých rovinných oborů. V této části uvedeme, jak lze vypočítat Riemannovým integrálem objem jistých těles v $\mathbb{R}^3$ a sice rotačních a v části IV.4 uvedeme, jak lze vypočítat obsah pláště takových těles. Pracujeme zde s pojmy intuitivně sice zřejmými, ale jejich přesné definice lze zavést až po vybudování příslušného matematického aparátu (teorie míry).

Předpokládejme, že $A \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná omezená souvislá množina, která má kladný obsah. Pak rotací množiny A kolem nějaké přímky, která leží také v $\mathbb{R}^2$, vznikne v $\mathbb{R}^3$ rotační těleso, např. je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak rotací množiny $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ kolem osy x vznikne rotační těleso v $\mathbb{R}^3$.

IV.3.2. Objem rotačního tělesa

Věta. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak pro objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\} \tag{16}$$

a) kolem osy x, platí

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx\,, \tag{17}$$

b) kolem osy y (je-li $0 \le a < b$), platí

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx\,. \tag{18}$$

Poznámka. Je-li funkce $f(x)$ spojitá a nekladná na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak rotací množiny $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le 0\}$ kolem osy x, vznikne stejné rotační těleso, jako rotací množiny $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le -f(x)\}$ kolem osy x. Je tedy zřejmé, že takové těleso má objem daný vzorcem (17).

Věta. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité na $\langle a, b\rangle$ a nechť $0 \le g(x) \le f(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Pak pro objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$$

a) kolem osy x, platí

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,dx\,, \tag{19}$$

b) kolem osy y (je-li $0 \le a < b$), platí

$$V = 2\pi \int_a^b x\,(f(x) - g(x))\,dx\,. \tag{20}$$

Věta. *Nechť funkce $y = f(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ zadána parametricky rovnicemi $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, kde funkce $\varphi_1'(t)$ a $\varphi_2'(t)$ jsou spojité na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, $\varphi_2(t) \ge 0$ a $\varphi_1'(t) \ne 0$ pro $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, $\varphi_1(\langle \alpha, \beta\rangle) = \langle a, b\rangle$. Pak pro objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny A ze vztahu (16) kolem osy x, platí*

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \varphi_2^2(t)\,|\varphi_1'(t)|\,dt\,. \tag{21}$$

Pro funkci $x = f(y)$ na intervalu $\langle c, d\rangle$ platí analogicky:

Věta. *Nechť $f(y)$ je spojitá a nezáporná funkce na intervalu $\langle c, d\rangle$. Pak pro objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ c \le y \le d,\ 0 \le x \le f(y)\} \tag{22}$$

a) kolem osy y, platí

$$V = \pi \int_c^d f^2(y)\,dy\,, \tag{23}$$

b) kolem osy x (je-li $0 \le c < d$), platí

$$V = 2\pi \int_c^d y\,f(y)\,dy\,. \tag{24}$$

Věta. *Nechť funkce $f(y)$ a $g(y)$ jsou spojité na $\langle c, d\rangle$ a nechť $0 \le g(y) \le f(y)$ pro $y \in \langle c, d\rangle$. Pak pro objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ c \le y \le d,\ g(y) \le x \le f(y)\}$$

a) kolem osy y, platí

$$V = \pi \int_c^d (f^2(y) - g^2(y))\,dy\,, \tag{25}$$

b) kolem osy x (je-li $0 \le c < d$), platí

$$V = 2\pi \int_c^d y\,(f(y) - g(y))\,dy\,. \tag{26}$$

Věta. *Nechť funkce $x = f(y)$ je na intervalu $\langle c, d\rangle$ zadána parametricky rovnicemi $y = \psi_1(t)$, $x = \psi_2(t)$, $t \in \langle \gamma, \delta\rangle$, kde funkce $\psi_1'(t)$ a $\psi_2'(t)$ jsou spojité na intervalu*

$\langle\gamma,\delta\rangle$, $\psi_2(t) \geq 0$ *a* $\psi_1'(t) \neq 0$ *pro* $t \in \langle\gamma,\delta\rangle$, $\psi_1(\langle\gamma,\delta\rangle) = \langle c,d\rangle$. *Pak pro objem* V *rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny* A *ze vztahu (22) kolem osy* y, *platí*

$$V = \pi \int_\gamma^\delta \psi_2^2(t)|\psi_1'(t)|\, dt\,. \tag{27}$$

Věta. *Nechť funkce* $r = r(\varphi)$ *má spojitou derivaci na intervalu* $\langle\alpha,\beta\rangle$, *kde je (a)* $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$, *(b)* $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$. *Pak pro objem* V *rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny zadané nerovnostmi* $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $0 \leq r \leq r(\varphi)$, *kde* r *a* φ *jsou polární souřadnice v rovině, kolem*
a) polární osy, platí

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3(\varphi) \sin\varphi\, d\varphi\,, \tag{28}$$

b) „přímky $\varphi = \frac{\pi}{2}$*“, platí*

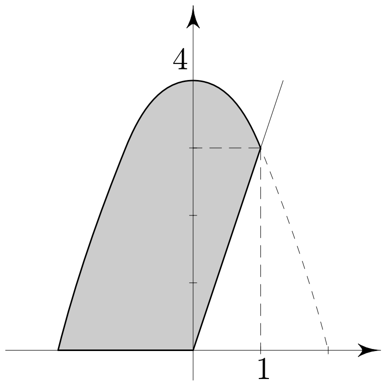
$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3(\varphi) \cos\varphi\, d\varphi\,. \tag{29}$$

Poznámka. Pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny $A \subset \mathbb{R}^2$ kolem přímky $ax + by + c = 0$, která není osou x ani osou y, neexistuje obecný předpis. Od kartézské soustavy souřadnic (P, x, y) přejdeme k soustavě souřadnic (P', u, v), kde osa u je přímka $ax + by + c = 0$, a dále postupujeme podle konkrétního zadání příkladu (viz př. 176).

IV.3.3. Řešené příklady

173. Nechť množina A je omezená parabolou $y = 4-x^2$, polopřímkou $y = 0$, $x \leq 0$ a polopřímkou $y = 3x$, $x \geq 0$. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny A kolem osy x.

Nejprve najdeme x-ovou souřadnici průsečíku paraboly $y = 4-x^2$ a polopřímky $y = 3x$, $x \geq 0$. Platí $4 - x^2 = 3x$, odkud $x_1 = 1$, $x_2 = -4$, vyhovuje pouze $x = 1$ (viz obr. 7).



Obr. 7

Hledaný objem pak bude rozdílem objemů V_1 a V_2, kde V_1 je objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -2 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 4 - x^2\}$$

kolem osy x, a V_2 je objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny

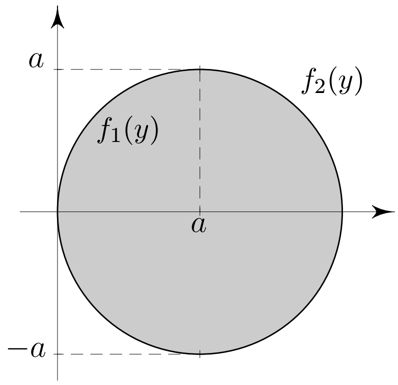
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3x\}$$

kolem osy x. Pro výpočet použijeme vzorec (17)

$$V_1 = \pi \int_{-2}^{1} (4 - x^2)^2\, dx = \frac{153}{5}\pi\,, \qquad V_2 = \pi \int_0^1 (3x)^2\, dx = 3\pi\,,$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{138}{5}\pi\,.$$

174. Vypočítejte objem rotačního tělesa, vzniklého rotací kruhu $(x-a)^2 + y^2 \le a^2$ kolem osy y (viz obr. 8).



Obr. 8

Kruh je omezený funkcemi

$$f_1(y) = a - \sqrt{a^2 - y^2}\,, \quad f_2(y) = a + \sqrt{a^2 - y^2}\,, \quad -a \le y \le a\,,$$

a pro $y \in \langle -a, a\rangle$ platí $f_1(y) \le f_2(y)$. Pro výpočet použijeme vzorec (25)

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \Big((a + \sqrt{a^2 - y^2}\,)^2 - (a - \sqrt{a^2 - y^2}\,)^2 \Big)\, dy = 4\pi a \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy$$

a dále řešíme substitucí $y = a \sin t$

$$V = 4\pi a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 2\pi^2 a^3.$$

175. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené asteroidou $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$, kolem osy x.

Asteroida je symetrická kolem osy x i kolem osy y, proto hledaný objem je $2V$, kde V je objem tělesa, které vznikne rotací množiny omezené asteroidou a souřadnými osami, tj. $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Pro výpočet použijeme vzorec (21)

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t\, |3a\cos^2 t(-\sin t)|\, dt = 3\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)^3 \cos^2 t \sin t\, dt$$

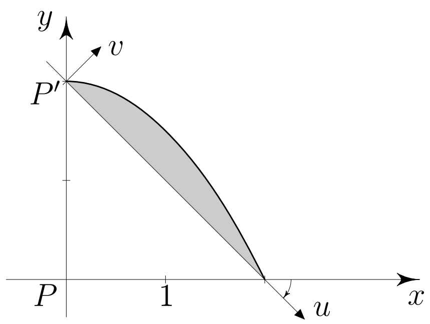
a dále řešíme substitucí $x = \cos t$

$$V = 3\pi a^3 \int_0^1 (1-x^2)^3 x^2\, dx = \frac{16}{105}\pi a^3,$$

hledaný objem je tedy $\frac{32}{105}\pi a^3$.

176. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené parabolou $2y = 4 - x^2$ a přímkou $x + y - 2 = 0$ kolem přímky $x + y - 2 = 0$.

Posunutím počátku $P = (0, 0)$ do bodu $P' = (0, 2)$ a otočením souřadných os o úhel $-\frac{\pi}{4}$ přejdeme k souřadné soustavě (P', u, v), kde $u = (x - y + 2)\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $v = (x + y - 2)\frac{\sqrt{2}}{2}$ (viz obr. 9).



Obr. 9

V této souřadné soustavě bude parabola $2y = 4 - x^2$ zadána parametrickými rovnicemi

$$u(x) = (x - y(x) + 2)\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad v(x) = (x + y(x) - 2)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

kde $y(x) = \frac{1}{2}(4 - x^2)$, $x \in \langle 0, 2\rangle$. Pro výpočet použijeme vzorec (21)

$$V = \pi \int_0^2 v^2(x)|u'(x)|\, dx = \pi \int_0^2 \frac{1}{8}(2x - x^2)\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + x)\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\pi \int_0^2 (4x^2 - 3x^4 + x^5)\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{15}\pi\,.$$

IV.3.4. Příklady

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny v $\mathbb{R}^2$ omezené danými křivkami kolem osy x:

177. $y^2 = 2px\,, \quad y = 0\,, \quad x = a$

178. $xy = a^2\,, \quad y = 0\,, \quad x = a\,, \quad x = 2a$

179. $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\,, \quad y = 0\,, \quad x = \dfrac{1}{4}\,, \quad x = 1$

180. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\,, \quad y = 0\,, \quad x = a \quad (x \geq 0)$

181. $y = \sin 2x\,, \quad y = 0\,, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

182. $y = a\cosh\dfrac{x}{a}\,, \quad y = 0\,, \quad x = 0\,, \quad x = b$

183. $y = \sqrt{x}\,e^{-x}\,, \quad y = 0\,, \quad x = a$

184. $y = \dfrac{\ln x}{x}\,, \quad y = 0\,, \quad x = e$

185. $y = \sin\sqrt{x}\,, \quad y = 0\,, \quad 0 \leq x \leq \pi^2$

186. $y = e^{\alpha x}\sin \pi x\,, \quad y = 0\,, \quad n - 1 \leq x \leq n \quad (n \in \mathbb{N})$

187. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}\,, \quad y = 0\,, \quad x = 0\,, \quad x = \dfrac{\pi}{6}$

188. $y = \dfrac{1}{a^2 + x^2}\,, \quad y = 0\,, \quad x = 0\,, \quad x = a$

189. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x - 3}}\,, \quad y = 0$

190. $y = x\,, \quad y = \dfrac{1}{x}\,, \quad y = 0\,, \quad x = 2$

191. $y = \sin x\,, \quad y = \cos x\,, \quad y = 0\,, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

192. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1\,, \quad x^2 - \dfrac{y^2}{15} = 1\,, \quad x \geq 0$

193. $2py = x^2\,, \quad 2qy = (x - a)^2\,, \quad y = 0$

194. $y = 2^x\,,\quad y = 2 - \log_2 x\,,\quad x = 0\,,\quad y = 0$

195. $y = \dfrac{1}{1+x^2}\,,\quad y = 0$

196. $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}\,,\quad y = 0\quad (0 \le x < +\infty)$

197. $y = e^{-x}\sin \pi x\,,\quad y = 0\quad (0 \le x < +\infty)$

198. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

199. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,,\quad x = a + h$

200. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1\,,\quad |x| = h$

201. $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2\,,\quad x = 0\,,\quad y = 0\quad (x \le a\,,\, y \le a)$

202. $y^2(2a - x) = x^3\,,\quad x = a\,,\quad 0 \le x \le a$

203. $y^2(x-a) + x^2(x+a) = 0\,,\quad x = \dfrac{a}{2}\,,\quad 0 \le x \le \dfrac{a}{2}$

204. $y^2(x-a)^2 = x^3(2a - x)\,,\quad x = \dfrac{a}{2}\,,\quad 0 \le x \le \dfrac{a}{2}$

205. $y^2 = 2x\,,\quad y = 2\,,\quad x = 0$

206. $y = x\,,\quad y = \dfrac{1}{x}\,,\quad x = 3$

207. $y = \sin x\,,\quad y = \dfrac{2}{\pi}x\,,\quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

208. $y = \sin^2 x\,,\quad y = x \sin x\,,\quad 0 \le x \le \pi$

209. $2py = x^2\,,\quad 2qx = y^2$

210. $2px = y^2\,,\quad 2q(a - x) = y^2$

211. $2px = y^2\,,\quad 2q(x - a) = y^2\,,\quad q > p > 0$

212. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{2a - x}}\,,\quad y = \sqrt{x(2a - x)}$

213. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,,\quad x = 0\,,\quad y = 0\,,\quad y = h$

214. $2py = x^2\,, \quad 2py = x(2x-a)\,, \quad y = 0$

215. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1\,, \quad \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = -1$

216. $x^2 + (y-a)^2 = r^2\,, \quad a > r > 0$

217. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$

218. $x^2 - xy + y^2 = a^2$

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny v $\mathbb{R}^2$ omezené smyčkou dané křivky kolem osy x:

219. $(x-4)\,y^2 = x(x-3)$

220. $y^2(x-a) + x^2(x+a) = 0$

221. $y^2(a-3x) = x^2(a+x)$

222. $x^2y^2 = (x+a)^2(4a^2 - x^2)$

223. Nechť funkce $y = f(x)$ má spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$, $0 \le a \le b$, a nechť $f(b) = \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ nebo $f(b) = \min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Nechť množina $A \subset \mathbb{R}^2$ je omezená grafem funkce $y = f(x)$, $a \le x \le b$, částí přímky $y = f(a)$, $0 \le x \le a$, přímky $y = f(b)$, $0 \le x \le b$, a příslušnou úsečkou na ose y. Dokažte, že pro objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny A kolem osy y platí

$$V = \left|\pi \int_a^b x^2 f'(x)\,dx\right|.$$

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené danými křivkami kolem osy y:

224. $xy = k^2\,, \quad y = 0\,, \quad x = a\,, \quad x = b\,, \quad 0 < a < b$

225. $y = e^{x^2}, \quad y = 0\,, \quad x = 0\,, \quad x = 1$

226. $y = \operatorname{tg} x^2, \quad y = 0\,, \quad x = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$

227. $y = \sin x\,, \quad y = 0\,, \quad 2\pi n \le x \le \pi(2n+1) \quad (n \in \mathbb{N})$

228. $2py = a^2 - (x-b)^2, \quad y = 0\,, \quad 0 < a < b$

229. $y = |x-b| - a\,, \quad y = 0\,, \quad 0 < a < b$

230. $y = \cos x^2, \quad y = 1\,, \quad x = 1$

231. $y = \sin x\,, \quad y = 1\,, \quad x = 0$

232. $y = \cos x\,, \quad y = 1\,, \quad 0 \le x \le 2\pi$

233. $y = \begin{cases} 0 & \text{je-li} \quad 0 \le x \le \pi \\ \sin x & \text{je-li} \quad \pi \le x \le \frac{5}{2}\pi \end{cases}, \quad x = 0\,, \quad y = 1$

234. $y^2(2a - x) = x^3, \quad |y| = a\,, \quad x = 0$

235. $y^2 = 4x\,, \quad y = x$

236. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0\,, \quad x = 0$

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené danými křivkami (a) kolem osy x, (b) kolem osy y:

237. $y = 2x - x^2, \quad y = 0$

238. $y = (x - a)(x - b)\,, \quad y = 0\,, \quad 0 \le a < b$

239. $y = \sin x\,, \quad y = 0\,, \quad 0 \le x \le \pi$

240. $y = \arcsin x\,, \quad y = 0\,, \quad x = 1$

241. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}\,, \quad y = 0\,, \quad x = 0\,, \quad x = a$

242. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}\,, \quad y = \dfrac{a}{2}$

243. $y = x\sqrt{\dfrac{3 + 3x}{3 - x}}\,, \quad y = 6\,, \quad x = 0 \quad (0 \le x \le 2)$

244. $2py = (x - a)^2, \quad 2py = a^2$

245. $2py = x^2, \quad y = |x|$

246. $y = e^x + 6\,, \quad y = e^{2x}, \quad x = 0$

247. $y = x\,, \quad y = x + \sin^2 x\,, \quad 0 \le x \le \pi$

248. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

249. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené danými křivkami kolem přímky $y = 1$:

250. $y = \sqrt[3]{x}\,, \quad y = \dfrac{1}{x}\,, \quad y = 0\,, \quad x = 2$

251. $y = \sqrt[3]{x}\,, \quad y = x^2$

252. $y = 2x^2 - 1\,, \quad y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\,, \quad y = -1\,, \quad x = 8$

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené danými křivkami kolem přímky l:

253. $y = \arcsin x\,, \quad x = 1\,, \quad y = -\dfrac{\pi}{2}$ a) $l : y = \dfrac{\pi}{2}\,;$ b) $l : x = 1$

254. $y = x\,, \quad y = x + \sin^2 x\,, \quad 0 \le x \le \pi\,, \quad l : y = x$

255. $2py = x^2\,, \quad y - x = \dfrac{3}{2}p$ a) $l : y = 0\,;$ b) $l : x = 0\,;$ c) $l : y - x = \dfrac{3}{2}p$

256. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené smyčkou konchoidy $(x-a)^2(x^2+y^2) = 4a^2x^2$ kolem přímky $x = a$.

257. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené danými křivkami kolem přímky $x = a$:

1) $y^2(x-a) + x^2(x+a) = 0\,, \quad |y| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,a\,, \quad x = a \quad (x \ge 0)$

2) $(x-a)^2y^2 = x^3(2a-x)\,, \quad x = \dfrac{a}{2} \quad (0 \le x \le a)$

258. Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le a\,,\ 0 \le y \le x^\alpha\,,\ \alpha > 0\}$$

kolem osy x je roven $\frac{a}{4}\,S$; S je obsah podstavy tělesa pro $x = a$. Vypočítejte α.

259. Rovina kolmá na osu rotačního paraboloidu vytíná z něho úseč o poloměru základny r a výšce h. Vypočítejte objem této úseče.

260. Dvojvypuklá čočka je omezená souosými rotačními paraboloidy. Průměr čočky je D (průměr kružnice, ve které se paraboloidy protínají) a tloušťka čočky na ose je h. Vypočítejte objem čočky.

261. Dutovypuklá čočka je omezená souosými rotačními paraboloidy. Průměr čočky je D (průměr kružnice, ve které se paraboloidy protínají) a tloušťka čočky na ose je h. Vypočítejte objem čočky.

262. Dvojdutá čočka je omezená souosými rotačními paraboloidy a válcem o poloměru r. Tloušťka čočky na ose je h, na kraji je H. Vypočítejte objem čočky.

263. Oblouk AB kružnice o poloměru r má úhlovou délku 2α. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené obloukem AB a tětivou AB kolem přímky obsahující tětivu AB.

264. Parabolická úseč je omezená obloukem paraboly a její tětivou délky $2a$ kolmou k ose paraboly. Vzdálenost tětivy od vrcholu paraboly je h. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací této úseče kolem přímky obsahující tětivu.

265. Vypočítejte objem sudu parabolického tvaru, tzn. rovina procházející osou sudu protíná boční povrch v obloucích parabol s vrcholy na střední obvodové kružnici. Výška sudu je h, dna mají průměr d a střední řez má průměr D.

266. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené asteroidou $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ kolem přímky $y = x$.

267. Úseč paraboly je omezená obloukem paraboly $y^2 = 4ax$ a její tětivou, která leží na přímce $y = 2x$. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací této úseče kolem přímky $y = 2x$.

268. Dokažte, že objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené obloukem paraboly $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ a přímkou $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ kolem této přímky, je roven $\frac{8}{15}\pi r^2 H$, kde r je největší poloměr příčného kruhového řezu a H je délka tohoto tělesa na ose rotace.

269. 1) Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací úseče paraboly $2py = x^2$, kterou vytíná přímka $y = kx$, $(k > 0)$, kolem této přímky.

2) Dokažte, že objem rotačního tělesa z bodu 1) je roven $\frac{8}{15}\pi r^2 H$, kde r je největší poloměr příčného kruhového řezu a H je délka tohoto tělesa na ose rotace.

270. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené křivkou $(4 - x)y^2 - x^3 = 0$ a její asymptotou kolem této asymptoty.

271. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené parabolou $y = ax^2$ a její evolutou

$$x = 4a^2t^3, \quad y = 3at^2 + \frac{1}{2a}$$

a) kolem osy x; b) kolem osy y.

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené danými křivkami kolem přímky l:

272. $x = t^3, \quad y = t^2, \quad y = 0\,, \quad |x| = 1 \qquad$ a) $l : y = 0$; b) $l : x = 0$

273. $x = a\sin t\,, \quad y = a\sin 2t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad$ a) $l : y = 0$; b) $l : x = 0$

274. $x = a(t - \sin t)\,, \quad y = a(1 - \cos t)\,, \quad y = 0 \quad (0 \le t \le 2\pi)$
a) $l : y = 0$; b) $l : x = 0$; c) $l : x = \pi a$; d) $l : y = 2a$

275. $x = a\sin^3 t\,, \quad y = b\cos^3 t \quad (0 \le t \le 2\pi)$
a) $l : y = 0$; b) $l : x = 0$; c) $l : x = a$

276. $x = a\cosh^3 t\,, \quad y = a\sinh^3 t\,, \quad x = 2\sqrt{2}a \qquad l : y = 0$

277. $x = \dfrac{1}{2}\cosh^3 t\,, \quad y = \dfrac{1}{2}\sinh^3 t\,, \quad x = 0\,, \quad |y| = \dfrac{1}{2} \qquad l : x = 0$

278. $x = \dfrac{2at^2}{1+t^2}\,, \quad y = \dfrac{2at^3}{1+t^2}\,, \quad x = a \qquad$ a) $l : y = 0$; b) $l : x = a$

279. $x = a(1 + \cos t)\,, \quad y = a(\operatorname{tg} t + \sin t)\,, \quad x = \dfrac{3}{2}a \qquad$ a) $l : y = 0$; b) $l : x = a$

280. Přímka $y = \frac{3}{2}a$ dělí množinu omezenou obloukem cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, a přímkou $y = 0$ na dvě části. Vypočítejte poměr objemů rotačních těles, které vzniknou rotací každé ze dvou získaných množin kolem přímky $y = \frac{3}{2}a$.

281. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené smyčkou dané křivky (a) kolem osy x; (b) kolem osy y:

1) $x = 2t - t^2\,, \quad y = 4t - t^3 \qquad$ 2) $x = \dfrac{2a}{t^2+1}\,, \quad y = a\dfrac{t^3 - t}{t^2+1}$

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny zadané nerovnostmi v polárních souřadnicích kolem polární osy:

282. $0 \le r \le a\varphi\,, \quad 0 \le \varphi \le \pi$

283. $\pi r^3 \le \varphi \le \pi$

284. $0 \le r \le a\cos^2\varphi$

285. $0 \le r \le 2a\sin\varphi$

286. $0 \le r \le a\cos^3\varphi$

287. $0 \le r \le a\sin^2\varphi$

288. $0 \le r \le ae^{k\varphi}, \quad 2\pi n \le \varphi \le (2n+1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

289. $0 \le r \le a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}\,, \quad |\varphi| \le \dfrac{\pi}{6}$

290. $0 \le r \le a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}\,, \quad \dfrac{7}{6}\pi \le \varphi \le \dfrac{3}{2}\pi$

291. $0 \le r \le a\,(1 + \cos\varphi)$

292. $0 \le r \le 2a\,\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$

293. $0 \le r \le \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

294. $0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi}$

295. $0 \le r \le a\sqrt{\sin 2\varphi}$

296. $0 \le r \le -\dfrac{3a\cos 2\varphi}{(2 + \cos 2\varphi)\sin\varphi}\,, \quad \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{3}{4}\pi$

297. $0 \le r \le \dfrac{a}{\cos\varphi\cos 2\varphi}\,, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$

298. $0 \le r \le a\sqrt{2\sin 2\varphi}$

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené Pascalovou závitnicí kolem polární osy:

299. $r = a\cos\varphi + l\,, \quad l < a$

300. $r = a\cos\varphi - l\,, \quad l < a$

301. $r = a\cos\varphi + l\,, \quad l \ge a$

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny zadané nerovnostmi v polárních souřadnicích kolem „přímky $\varphi = \frac{\pi}{2}$“:

302. $0 \le r \le a\sqrt{\sin\varphi}$

303. $0 \le r \le a\cos 2\varphi$

304. $0 \le r \le a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}\,, \quad |\varphi| \le \dfrac{\pi}{6}$

305. $0 \le r \le a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}\,, \quad \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{5}{6}\pi$

306. $0 \le r \le a\,(1+\cos\varphi)\,, \quad |\varphi| \le \dfrac{\pi}{2}$

307. $0 \le r \le a\,\dfrac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\,, \quad |\varphi| \le \dfrac{\pi}{4}$

308. $0 \le r \le \dfrac{p}{1+\cos\varphi}\,, \quad |\varphi| \le \dfrac{\pi}{2}$

309. $0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi}$

310. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené smyčkou konchoidy:

1) $r = 4a + \frac{a}{\cos\varphi}$ kolem polární osy

2) $r = 2a + \frac{a}{\cos\varphi}$ kolem „přímky $\varphi = \frac{\pi}{2}$“

311. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené kardioidou $r = a(1+\cos\varphi)$ kolem „přímky $r\cos\varphi = -\frac{a}{4}$“.

312. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené jednou smyčkou lemniskáty $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$

a) kolem „přímky $\varphi = \frac{\pi}{4}$“, b) kolem „přímky $\varphi = -\frac{\pi}{4}$“.

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené danou křivkou kolem osy x:

313. $x^4 + y^4 = a^2x^2$

314. $x^4 + y^4 = 2axy^2$

315. $(x^2+y^2)^3 = a^2x^4$

316. $x(x^2-y^2) = a(x^2+y^2)\,, \quad x = 3a$

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené danou křivkou kolem osy y:

317. $x^4 + y^4 = ay^3$

318. $x^4 + y^4 = 2axy^2$

319. $(x^2+y^2)^3 = a^4y^2$

320. $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2$

321. $(x^2+y^2)^3 = a^2x^2y^2$

322. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny omezené lemniskátou

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

a) kolem osy x, b) kolem osy y, c) kolem přímky $y = x$.
(Návod: Křivku vyjádřete v polárních souřadnicích.)

IV.4. Obsah rotační plochy

IV.4.1. Pojem rotační plochy

Rotační plochou v $\mathbb{R}^3$ rozumíme plášť rotačního tělesa, které jsme definovali v části IV.3. Předpokládejme, že K je křivka v $\mathbb{R}^2$, pak rotací křivky K kolem nějaké přímky, která také leží v $\mathbb{R}^2$, vznikne v $\mathbb{R}^3$ rotační plocha, např. je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak rotací křivky

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ y = f(x)\}$$

kolem osy x vznikne rotační plocha, která je vlastně pláštěm rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ kolem osy x.

IV.4.2. Obsah rotační plochy

Věta. *Nechť funkce $f(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak pro obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky*

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ y = f(x)\}$$

a) kolem osy x, platí

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx\,, \tag{30}$$

b) kolem osy y (je-li $0 \le a < b$), platí

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx\,. \tag{31}$$

Věta. *Nechť funkce $x = \varphi_1(t)$ a $y = \varphi_2(t)$ mají spojitou derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$. Pak pro obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky*

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ t \in \langle \alpha, \beta\rangle\}$$

a) kolem osy x, platí

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t)}\, dt\,. \tag{32}$$

je-li $\varphi_2(t) \ge 0$ na $\langle \alpha, \beta\rangle$,

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\varphi_2(t)|\sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t)}\, dt\,, \tag{33}$$

je-li $\varphi_2(t) \le 0$ na $\langle \alpha, \beta\rangle$;

b) kolem osy y, platí

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1(t)\sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t)}\, dt\,, \tag{34}$$

je-li $\varphi_1(t) \geq 0$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$,

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi_1(t)|\sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t)}\, dx\,, \tag{35}$$

je-li $\varphi_1(t) \leq 0$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Pro funkci $x = f(y)$ na intervalu $\langle c, d \rangle$ platí analogicky:

Věta. *Nechť funkce $f(y)$ má spojitou derivaci na intervalu $\langle c, d \rangle$. Pak pro obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky*

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ c \leq x \leq d,\ x = f(y)\}$$

a) kolem osy y, platí

$$S = 2\pi \int_{c}^{d} |f(y)|\sqrt{1 + f'^2(y)}\, dy\,, \tag{36}$$

b) kolem osy x (je-li $0 \leq c < d$), platí

$$S = 2\pi \int_{c}^{d} y\sqrt{1 + f'^2(y)}\, dy\,. \tag{37}$$

Věta. *Nechť funkce $r(\varphi)$ má spojitou derivaci na $\langle \alpha, \beta \rangle$, kde (a) $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$, (b) $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Pak pro obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky definované rovnicí $r = r(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kde r a φ jsou polární souřadnice v $\mathbb{R}^2$,*
a) kolem polární osy, platí

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, \sin\varphi\, d\varphi\,, \tag{38}$$

b) kolem „přímky $\varphi = \frac{\pi}{2}$“, platí

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, \cos\varphi\, d\varphi\,. \tag{39}$$

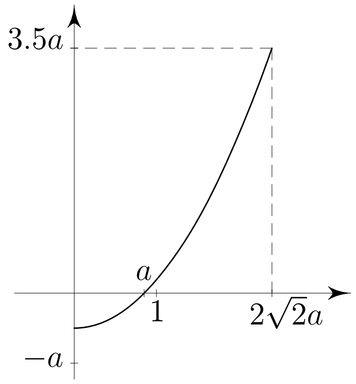
Poznámka. Nechť rovinná rektifikovatelná křivka K, jejíž délka je s_0, leží celá v jedné polorovině, která vznikne rozdělením roviny přímkou l, tj. „na jedné straně od přímky l“. Nechť $r(s)$ je vzdálenost konce oblouku křivky délky s od přímky l a nechť $r(s)$ je spojitá funkce na intervalu $\langle 0, s_0 \rangle$. Pak pro obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky K kolem přímky l platí

$$S = 2\pi \int_{0}^{s_0} r(s)\, ds\,. \tag{40}$$

(viz př. 327)

IV.4.3. Řešené příklady

323. Vypočítejte obsah rotační plochy, vzniklé rotací paraboly $2ay = x^2 - a^2$, $0 \le x \le 2\sqrt{2}a$, (a) kolem osy x; (b) kolem osy y. (viz obr. 10)



Obr. 10

a) Pro výpočet použijeme vzorec (30)

$$S = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}a} \left| \frac{x^2 - a^2}{2a} \right| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi \left(\int_0^a \frac{a^2 - x^2}{2a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\, dx + \int_a^{2\sqrt{2}a} \frac{x^2 - a^2}{2a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\, dx \right),$$

substitucí $x = at$ dostáváme

$$S = \pi a^2 \Big(- \int_0^1 (t^2 - 1)\sqrt{1 + t^2}\, dt + \int_1^{2\sqrt{2}} (t^2 - 1)\sqrt{1 + t^2}\, dt \Big).$$

Primitivní funkci $F(t)$ k funkci $f(t) = (t^2 - 1)\sqrt{1 + t^2}$ nalezneme např. substitucí $t = \sinh u$ nebo 1. Eulerovou substitucí. Dostáváme

$$F(t) = \frac{1}{8}\, t\, (2t^2 - 3)\sqrt{1 + t^2} - \frac{5}{8} \ln(t + \sqrt{1 + t^2}\,),$$

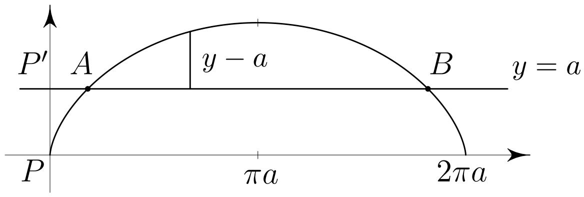
a potom

$$S = \pi a^2 \Big(-F(1) + F(0) + F(2\sqrt{2}) - F(1) \Big) = 10\pi a^2 \sqrt{2}\,.$$

b) Pro výpočet použijeme vzorec (31)

$$S = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}a} x \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\, dx = \frac{2}{3}\pi a^2 \left[\left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{52}{3}\pi a^2.$$

324. Přímka $y = a$ protíná oblouk cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, v bodech A a B. Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací oblouku cykloidy AB kolem přímky $y = a$ (viz obr. 11).



Obr. 11

Body A a B odpovídají hodnotám parametru $t = \frac{\pi}{2}$ a $t = \frac{3}{2}\pi$. Posunutím počátku do bodu $(0, a)$ a souřadných os na přímky $u = x$, $v = y - a$, přejdeme k souřadné soustavě (P', u, v). V této souřadné soustavě má oblouk cykloidy AB parametrické rovnice $u = a(t - \sin t)$, $v = -a\cos t$, $t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \rangle$. Pro výpočet použijeme vzorec (32)

$$S = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} -a\cos t\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt =$$

$$= -4\pi a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos t \sin\frac{t}{2}\, dt = -2\pi a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\sin\left(-\frac{t}{2}\right) + \sin\frac{3}{2}t\right) dt = \frac{16}{3}\sqrt{2}\pi a^2.$$

325. Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací elipsy $x^2 + 4y^2 = 36$ (a) kolem osy x; (b) kolem osy y.

a) Oblouk elipsy lze pro $y \ge 0$ vyjádřit jako graf funkce $y = \frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}$, $-6 \le x \le 6$. Tato funkce nemá na intervalu $\langle -6, 6 \rangle$ spojitou derivaci (tato derivace je na $(-6, 6)$ neomezená), nelze tedy použít vzorec (30). Do stejné situace se dostaneme, vyjádříme-li oblouk elipsy pro $x \ge 0$, $y \ge 0$ jako graf funkce $x = 2\sqrt{9 - y^2}$, $0 \le y \le 3$, takže nelze pro výpočet použít ani vzorec (37). V takových případech si pomůžeme tak, že zvolíme nějakou vhodnou spojitě derivovatelnou parametrizaci dané křivky, například parametrické rovnice elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jsou $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Oblouk elipsy $x^2 + 4y^2 = 36$ pro $y \ge 0$ vyjádříme parametricky, tedy $x = 6\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, a pro výpočet použijeme vzorec (32)

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} 3\sin t\sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}\, dt = 36\pi \int_0^{\pi} \sin t\sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2 t}\, dt\,.$$

Hledaný integrál řešíme substitucí $\cos t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi$ a dostáváme

$$S = 24\sqrt{3}\pi \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 2\sqrt{3}\pi(4\pi + 3\sqrt{3})\,.$$

b) Oblouk elipsy $x^2 + 4y^2 = 36$ pro $x \geq 0$ opět vyjádříme parametricky $x = 6\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, a pro výpočet použijeme vzorec (34)

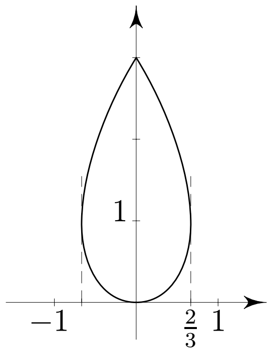
$$S = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos t\sqrt{36\sin^2 t + 9\cos^2 t}\, dt = 36\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{1 + 3\sin^2 t}\, dt\,.$$

Hledaný integrál řešíme substitucí $\sin t = \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh\varphi$ a dostáváme

$$S = 12\sqrt{3}\pi \int_{-\operatorname{argsinh}\sqrt{3}}^{\operatorname{argsinh}\sqrt{3}} \cosh^2\varphi\, d\varphi = 12\sqrt{3}\pi\Big(2\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}\,)\Big)\,.$$

326. Vypočítejte obsah rotační plochy vzniklé rotací smyčky křivky $9x^2 = y(3-y)^2$ (a) kolem osy x; (b) kolem osy y.

Smyčka křivky odpovídá hodnotám $y \in \langle 0, 3\rangle$ a $x \in \langle -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\rangle$ (viz obr. 12).



Obr. 12

Pro $x \geq 0$, resp. $x \leq 0$, lze křivku vyjádřit jako graf funkce $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(3-y)$, $y \in \langle 0, 3\rangle$, resp. $x = -\frac{1}{3}\sqrt{y}(3-y)$, $y \in \langle 0, 3\rangle$. Tato funkce nemá na intervalu $\langle 0, 3\rangle$ spojitou derivaci, takže budeme postupovat stejně jako v příkladu 325. Zvolíme vhodnou spojitě derivovatelnou parametrizaci křivky $9x^2 = y(3-y)^2$, např. $y = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, pak parametrické rovnice křivky jsou $x = \frac{1}{3}t(3-t^2)$, $y = t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Oblouk smyčky křivky odpovídá hodnotám parametru $t \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\,\rangle$.

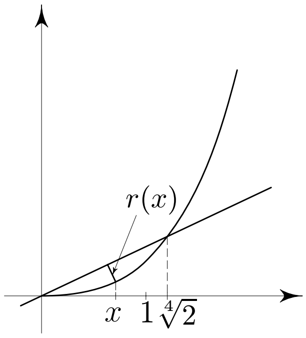
a) Pro výpočet použijeme vzorec (32)

$$S = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2\sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2}\, dt = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} t^2(1+t^2)\, dt = \frac{56\sqrt{3}}{5}\pi\,.$$

b) Při rotaci smyčky křivky kolem osy y uvažujeme pouze část křivky pro $x \geq 0$, tj. $t \in \langle 0, \sqrt{3}\,\rangle$. Pro výpočet použijeme vzorec (34)

$$S = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3}\, t\,(3-t^2)\sqrt{(1-t^2)^2 + 4t^2}\, dt = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\sqrt{3}} (3t - t^3)(1+t^2)\, dt = 3\pi\,.$$

327. Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací grafu funkce $y = \frac{x^3}{3}$, $0 \le x \le \sqrt[4]{2}$, kolem přímky $3y - \sqrt{2}x = 0$.



Obr. 13

Vzdálenost $r(x)$ (viz obr. 13) bodu $(x, \frac{x^3}{3})$ od přímky $3y - \sqrt{2}x = 0$ je rovna

$$r(x) = \frac{|-\sqrt{2}x + x^3|}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}(\sqrt{2}x - x^3)\,, \quad 0 \le x \le \sqrt[4]{2}\,.$$

Pro výpočet použijeme vzorec (40). Nejprve vyjádříme

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx = \sqrt{1 + x^4}\,dx$$

a dosadíme

$$S = 2\pi \int_0^{\sqrt[4]{2}} r(x)\sqrt{1+x^4}\,dx = \frac{2}{\sqrt{11}}\pi \int_0^{\sqrt[4]{2}} (\sqrt{2}x - x^3)\sqrt{1+x^4}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\pi \int_0^{\sqrt[4]{2}} 2x\sqrt{1+x^4}\,dx - \frac{2}{\sqrt{11}}\pi \int_0^{\sqrt[4]{2}} x^3\sqrt{1+x^4}\,dx\,.$$

Integrál

$$\int_0^{\sqrt[4]{2}} 2x\sqrt{1+x^4}\,dx$$

řešíme substitucí $t = x^2$ a pak například substitucí $t = \sinh u$ nebo 1. Eulerovou substitucí a dostáváme

$$\int_0^{\sqrt[4]{2}} 2x\sqrt{1+x^4}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+t^2}\,dt = \left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1+t^2}\,)\right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}\,)\,.$$

Integrál $\int_0^{\sqrt[4]{2}} x^3\sqrt{1+x^4}\,dx$ řešíme substitucí $t = 1 + x^4$ a dostáváme

$$\int_0^{\sqrt[4]{2}} x^3\sqrt{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^3 \sqrt{t}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\,.$$

Pro hledaný obsah S tedy dostáváme

$$S = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,) - \frac{2\pi}{\sqrt{11}}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\Big)\right) =$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{22}}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,) + \frac{\pi}{3\sqrt{11}}\,.$$

IV.4.4. Příklady

Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy x:

328. $y = 2\sqrt{x}\,,\quad \frac{5}{4} \le x \le \frac{21}{4}$

329. $y = x^3\,,\quad 0 \le x \le 1$

330. $y = e^{-x},\quad 0 \le x \le a$

331. $y = a\cosh\frac{x}{a}\,,\quad |x| \le b$

332. $y = \sin x\,,\quad 0 \le x \le \pi$

333. $y = a\cos\frac{\pi x}{2b}\,,\quad |x| \le b$

334. $2ay = a^2 + x^2\,,\quad 0 \le x \le a$

335. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}\,,\quad 0 \le x \le a$

336. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,,\quad 0 \le x \le 1$

337. $y = \frac{1}{x}\,,\quad 1 \le x \le a$

338. $y = \operatorname{tg} x\,,\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy y:

339. $x = \ln\Big(y - \sqrt{y^2-1}\Big),\quad \frac{5}{4} \le y \le \frac{5}{3}$

340. $4x + 2\ln y = y^2,\quad e^{-1} \le y \le e$

341. $x = \cosh y\,,\quad \ln 2 \le y \le \ln 3$

342. $3x = 4\cos y\,,\quad -\frac{\pi}{2} \le y \le 0$

343. $y^2 = 2(x-1)\,,\quad 0 \le y \le 1$

344. $x = a\arcsin\sqrt{\frac{y}{a}} + \sqrt{y(a-y)}\,,\quad \frac{a}{4} \le y \le \frac{3}{4}a$

Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy x:

345. $y^2 = 4x\,,\quad 0 \le x \le 3$

346. $y^2 = 4 + x\,,\quad -4 \le x \le 2$

347. $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y\,, \quad 1 \le y \le e$

348. $x = a\ln\dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}\,, \quad 0 < b \le y \le a$

349. Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací grafu funkce $y = e^{-x}$, $x \ge 0$, kolem její asymptoty.

Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy y:

350. $y = \dfrac{x^2}{2p}\,, \quad 0 \le x \le b$

351. $y = a\cosh\dfrac{x}{a}\,, \quad 0 \le x \le b$

352. $y = \dfrac{1}{2}\,(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}\,), \quad 0 \le x \le 1$

353. $y = \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$

354. Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací grafu funkce

$$y = a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}\,, \quad x \ge 0\,,$$

kolem její asymptoty.

355. Dokažte, že pro objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací množiny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a\cosh\frac{x}{a}\}$ kolem osy x, a pro obsah S rotační plochy, která vznikne rotací křivky $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le a,\ y = a\cosh\frac{x}{a}\}$ kolem osy x, platí $2V = aS$.

356. Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací oblouku křivky, který vytíná přímka $y = \frac{5}{3}a$ na grafu funkce $y = a\cosh\frac{x}{a}$, kolem přímky $y = \frac{5}{3}a$.

357. Vypočítejte obsah rotační plochy vzniklé rotací oblouku paraboly $y^2 = 2px$, který na této parabole vytíná přímka $x = \frac{p}{2}$, kolem přímky $y = p$.

358. Povrch konvexního zrcadla je úsečí rotačního paraboloidu. Výška úseče je rovna h a poloměr úseče je roven R. Vypočítejte obsah povrchu zrcadla.

359. Nechť T je rotační těleso, které vznikne rotací množiny omezené parabolou $ay = a^2 - x^2$ a osou x kolem osy x. Vypočítejte poměr obsahu povrchu tělesa T k obsahu povrchu koule, která má stejný objem jako těleso T.

Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy x:

360. $x = e^t \cos t\,, \quad y = e^t \sin t\,, \quad 2k\pi \le t \le (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{N})$

361. $x = a(2\cos t - \cos 2t)\,, \quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$

362. $x = a\cos t + a \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}\,, \quad y = a\sin t\,, \quad 0 < y_0 \le y \le a$

363. $x = \dfrac{1}{3}\,t^3, \quad y = 4 - \dfrac{1}{2}\,t^2, \quad |t| \le 2\sqrt{2}$

364. $x = 2\sqrt{3}\cos t\,, \quad y = \sin 2t$

365. $x = \cos t + \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}\,, \quad y = \sin t$

Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem přímky l:

366. $x = \sqrt{2}\sin t\,, \quad y = \dfrac{1}{4}\sin 2t\,, \quad 0 \le t \le \pi$

a) $l : y = 0$; b) $l : x = 0$

367. $x = a(t + \sin t \cos t)\,, \quad y = a\sin^2 t\,, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

a) $l : y = 0$; b) $l : x = 0$

368. $x = a(3\cos t - \cos 3t)\,, \quad y = a(3\sin t - \sin 3t)\,, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

a) $l : y = 0$; b) $l : x = 0$

369. $x = a(t\sin t + \cos t)\,, \quad y = a(\sin t - t\cos t)\,, \quad 0 \le t \le \pi$

a) $l : y = 0$; b) $l : x = -a$

370. $x = a(t - \sin t)\,, \quad y = a(1 - \cos t)\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$

a) $l : y = 0$; b) $l : x = 0$; c) $l : y = 2a$; d) $l : x = \pi a$; e) $l : y = a$

371. $x = a\cos^3 t\,, \quad y = a\sin^3 t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$

a) $l : y = 0$; b) $l : x = a$

372. $x = t^2, \quad y = \dfrac{t}{3}\,(t^2 - 3)\,, \quad |t| \le \sqrt{6}$

a) $l : y = 0$; b) $l : x = 0$; c) $l : x = 3$

373. $x = a(t^2 + 1)\,, \quad y = \dfrac{at}{3}\,(3 - t^2)\,, \quad |t| \le \sqrt{3}$

a) $l : y = 0$; b) $l : x = 0$

Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky K kolem přímky l (návod: zvolte spojitě derivovatelnou parametrizaci křivky K):

374. $K: \; x^2 + (y-b)^2 = a^2, \quad b \ge a > 0; \quad l: y = 0$

375. $K: \; 4x^2 + y^2 = 4\,; \quad a)\; l: y = 0; \quad b)\; l: x = 0$

376. $K: \; 16y^2 = 2x^2 - x^4; \quad a)\; l: y = 0; \quad b)\; l: x = 0$

377. $K: \; 3x^2 + y^4 = y^2; \quad l: x = 0$

378. $K: \; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad 0 < b \le a; \quad a)\; l: y = 0; \quad b)\; l: x = 0$

379. $K: \; \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad a \le x \le \lambda a,\; \lambda > 1; \quad a)\; l: y = 0; \quad b)\; l: x = 0$

380. $K: \; x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\,; \quad a)\; l: y = x; \quad b)\; l: x + y = a$

381. $K: \; y = \dfrac{1}{6}\sqrt{x}\,(x-12)\,, \quad 0 \le x \le 12; \quad l: y = 0$

382. $K: \; y = \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}\,; \quad l: y = 0$

383. Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací smyčky křivky $9ay^2 = x(3a-x)^2$ kolem (a) osy x; (b) osy y.

384. Nechť $S(a)$ je obsah rotační plochy, která vznikne rotací grafu funkce $y = \cos x$, $-\pi \le x \le \pi$, kolem přímky $y = a$. Pro jaké a bude číslo $S(a)$ nejmenší? Vypočítejte tento nejmenší obsah.

385. Nechť $S(k)$ je obsah rotační plochy vzniklé rotací cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, kolem přímky $y = ka$, $0 \le k \le 2$.
1) Vypočítejte $S(k)$.
2) Pro jaké k bude číslo $S(k)$ nejmenší? Vypočítejte tento nejmenší obsah.

386. Na kružnici o poloměru R je vyznačen oblouk AB úhlové délky 2α. Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací oblouku AB kolem přímky obsahující tětivu AB.

387. Na kružnici o poloměru R je vyznačen oblouk AB úhlové délky 2α. Přímka, která je rovnoběžná s tětivou AB, vytíná na oblouku AB menší oblouk CD úhlové délky 2β ($\beta < \alpha$). Rotací oblouku AB kolem přímky CD vznikne rotační plocha.
1) Vypočítejte obsah této rotační plochy.
2) Pro jaké β bude obsah této rotační plochy nejmenší? Vypočítejte tento nejmenší obsah.

388. Vypočítejte obsah rotační plochy vzniklé rotací oblouku paraboly $y^2 = 2px$, který na této parabole vytíná přímka $y = 2x$, kolem přímky $y = 2x$.

Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky zadané v polárních souřadnicích, kolem polární osy:

389. $r = 2a \sin \varphi$

390. $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$

391. $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$

392. $r = a + b \cos \varphi\,,\quad$ 1) $a > b$; 2) $a < b$

Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky zadané v polárních souřadnicích, kolem přímky l:

393. $r = a(1 + \cos \varphi)$

a) l : polární osa; b) $l : r \cos \varphi = 2a$; c) $l : 4r \cos \varphi = -a$

394. $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$

a) l : polární osa; b) $l : \varphi = \frac{\pi}{2}$; c) $l : \varphi = \frac{\pi}{4}$

Dodatky

D.1 Vybrané vztahy mezi funkcemi

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x \qquad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x \qquad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \qquad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\,(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\,(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\,(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} \qquad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \qquad \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\sin x = \operatorname{sgn} \cos x \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \qquad \cos x = \operatorname{sgn} \cos x \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

Vztahy mezi cyklometrickými funkcemi:

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}\,, \quad (0 \le x \le 1)$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\,, \quad |x| \le 1$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x\,, \quad x \neq 0$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^{\varepsilon} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) + \varepsilon\pi\,,$$

kde $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow xy \le 0 \vee x^2 + y^2 \le 1$; $\varepsilon = \operatorname{sgn} x \Leftrightarrow xy > 0 \wedge x^2 + y^2 > 1$.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi\,,$$

kde $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow xy < 1$; $\varepsilon = \operatorname{sgn} x \Leftrightarrow xy > 1$.

Vztahy mezi hyperbolickými funkcemi:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2} (\cosh 2x - 1)$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2} (\cosh 2x + 1)$$

Vyjádření inverzních funkcí k hyperbolickým funkcím logaritmy:

$$\operatorname{argsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\operatorname{argcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\,, \quad x \ge 1$$

$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\,, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}\,, \quad |x| > 1$$

D.2 Shodné transformace kartézských souřadnic v rovině

Věta. *Jakýkoli přechod od jedné soustavy kartézských souřadnic v rovině k jiné stejně orientované soustavě kartézských souřadnic lze provést jedním posunutím a jedním otočením.*

Věta (posunutí). *Transformace souřadnic bodu X při přechodu od kartézské soustavy $(O; x, y)$ ke kartézské soustavě $(O'; x', y')$, přičemž osy x', y' jsou rovnoběžné po řadě s osami x, y a mají stejnou orientaci a počátek O' má v soustavě $(O; x, y)$ souřadnice m, n, je dána vzorci*

$$x' = x - m\,,$$

$$y' = y - n\,;$$

a naopak

$$x = x' + m\,,$$

$$y = y' + n\,.$$

Věta (otočení). *Transformace souřadnic bodu X při přechodu od kartézské soustavy $(O; x, y)$ ke kartézské soustavě $(O; x', y')$, které vznikne pootočením kolem společného počátku o úhel α je dána vzorci*

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha\,,$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha\,;$$

a naopak

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\,,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\,.$$

Věta. *Při jakémkoli přechodu od kartézské souřadné soustavy $(O; x, y)$ ke kartézské soustavě $(O'; x', y')$ se transformuje podle vztahů*

$$x' = (x - m)\cos\alpha + (y - n)\sin\alpha\,,$$

$$y' = -(x - m)\sin\alpha + (y - n)\cos\alpha\,,$$

kde čísla m, n jsou souřadnice nového počátku O' v soustavě $(O; x, y)$ a α je úhel otočení os souřadnic, a naopak

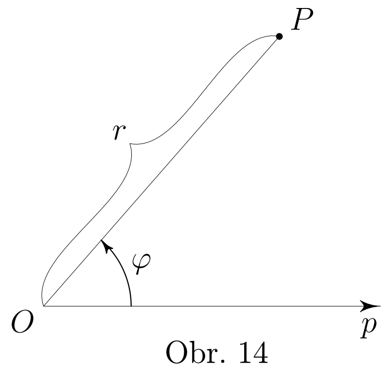
$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + m\,,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + n\,.$$

D.3 Polární souřadnice

Poloha bodu P určená polárními souřadnicemi r, φ (viz obr. 14):

- souřadnice r je vzdálenost bodu P od pevně zvoleného počátku souřadnic O (pól),
- souřadnice φ je orientovaný úhel, který svírá úsečka $\overline{OP}$ s pevně zvolenou polopřímkou p s počátečním bodem O (polární osou)



Obr. 14

Pro polární sořadnice r, φ platí

$$r \geq 0\,, \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi\,.$$

Přechod mezi kartézskými a polárními souřadnicemi, je-li pól v počátku kartézské soustavy a polární osa je kladná část osy x, je dán vztahy

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,;$$

a naopak

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad \text{pro } x > 0,\ y > 0,\\
\varphi &= \frac{\pi}{2} \quad \text{pro } x = 0,\ y > 0,\\
\varphi &= \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad \text{pro } x < 0,\\
\varphi &= \frac{3}{2}\pi \quad \text{pro } x = 0,\ y < 0,\\
\varphi &= 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad \text{pro } x > 0,\ y < 0.
\end{aligned}$$

Výsledky

I.1*)

6. $27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{x^7}{7}$ **7.** $\frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^3 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{x^7}{7}$ **8.** $x - \frac{1}{x} - 2\ln|x|$ **9.** $a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2}$ **10.** $2\sqrt{x}(\frac{x}{3} + 1)$ **11.** $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$ **12.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3)$ **13.** $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}$ **14.** $\ln|x| - \frac{1}{4x^4}$ **15.** $x - \operatorname{arctg} x$ **16.** $-x + \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}|$ **17.** $x + 2\ln|\frac{x-1}{x+1}|$ **18.** $\arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}\,)$ **19.** $\frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9}$ **20.** $-\frac{2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5\cdot 2^x \ln 2}$ **21.** $x - \cos x + \sin x$ **22.** $(\sin x + \cos x)\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)$ **23.** $-x - \operatorname{cotg} x$ **24.** $a\cosh x + b\sinh x$ **25.** $x - \operatorname{tgh} x$ **26.** $x - \operatorname{cotgh} x$ **28.** $\ln|x+a|$ **29.** $\frac{(2x-3)^{11}}{22}$ **30.** $-\frac{1}{4}(1 - 3x)\sqrt[3]{1-3x}$ **31.** $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$ **32.** $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}$ **33.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x$ **34.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right|$ **35.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x$ **36.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2-2}\,|$ **37.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$ **38.** $\frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{3x+1}|$ **39.** $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$ **40.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(4x-1+2\sqrt{2(2x^2-x+2)}\right)$ **41.** $\frac{e^{2x}}{2} - e^x + x$ **42.** $-e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$ **43.** $-\frac{1}{5}\cos 5x - x\sin 5\alpha$ **44.** $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}(2x + \frac{\pi}{4})$ **45.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **46.** $-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ **47.** $-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$ **48.** $\frac{\cosh(2x+1)+\sinh(2x-1)}{2}$ **49.** $2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}$ **50.** $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$ **51.** $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$ **52.** $-\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x$ **53.** $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x$ **54.** $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$ **55.** $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$ **56.** $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ **57.** $-\operatorname{cotgh} x - \operatorname{tgh} x$ **58.** $\frac{x}{2}\cos\alpha - \frac{1}{4}\sin(2x+\alpha)$ **59.** $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x$ **60.** $3\sin\frac{x}{6} + \frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x$ **61.** $\frac{1}{2}\cos(x + \frac{5}{12}\pi) - \frac{1}{10}\cos(5x + \frac{\pi}{12})$ **62.** $\frac{2}{3}\sinh^3 x$ **63.** $\frac{1}{8}\sinh 4x + \frac{1}{4}\sinh 2x$ **64.** $-\frac{3}{16}\cos 2x - \frac{3}{64}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{3}{128}\cos 8x - \frac{1}{192}\cos 12x$ **65.** $\frac{x|x|}{2}$ **66.** $\frac{x^2|x|}{3}$ **67.** $\frac{2x^2(x+|x|)}{3}$ **68.** $e^x - 1$, je-li $x < 0$; $1 - e^{-x}$, je-li $x \geq 0$ **69.** x, je-li $|x| \leq 1$; $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sgn} x$, je-li $|x| > 1$ **70.** $\frac{[x]^2}{\pi} - (-1)^{[x]}\frac{[x]}{\pi}\cos\pi x$ **71.** $x - \frac{x^3}{3}$, je-li $|x| \leq 1$; $x - \frac{x}{2}|x| + \frac{1}{6}\operatorname{sgn} x$, je-li $|x| > 1$ **72.** x, je-li $-\infty < x \leq 0$; $\frac{x^2}{2} + x$, je-li $0 \leq x \leq 1$; $x^2 + \frac{1}{2}$, je-li $x > 1$ **73.** $\frac{1}{2}f(2x)$ **74.** $2\sqrt{x}$ **75.** $x - \frac{x^2}{2}$ **76.** x, je-li $-\infty < x \leq 0$; $e^x - 1$, je-li $0 < x < +\infty$

I.2

85. $-\sqrt{1-x^2}$ **86.** $-\frac{1}{4}\ln|3 - 2x^2|$ **87.** $-\frac{1}{2(1+x^2)}$ **88.** $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ **89.** $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}$ **90.** $-\frac{1}{15(x^5+1)^3}$ **91.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$ **92.** $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$ **93.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ **94.** $\cos\frac{1}{x}$ **95.** $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$ **96.** $2\arcsin\sqrt{x}$ **97.** $(2\operatorname{sgn} x)\ln\left(\sqrt{|1+x|} + \sqrt{|x|}\right)$ **98.** $2e^{\sqrt{x}}$ **99.** $-2\cos\sqrt{x}$ **100.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$ **101.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ **102.** $\frac{2}{\alpha+2}\ln\left(\sqrt{x^{\alpha+2}} + \sqrt{1+x^{\alpha+2}}\right)$ pro $\alpha \neq -2$; $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|$ pro $\alpha = -2$ **103.** $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ **104.** $\frac{1}{12}(1-x)^{12} - \frac{1}{11}(1-x)^{11}$ **105.** $-x - 2\ln|x-1|$ **106.** $\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$ **107.** $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|3+x|$

*) V kapitole I nejsou ve výsledcích uváděny přímo primitivní funkce, ale pouze funkce, které jsou nalezeny integrací bez ohledu na spojitost.

108. $x+\ln(1+x^2)$ **109.** $-x+2\ln|2-x^2|+\frac{3}{\sqrt2}\ln\left|\frac{x+\sqrt2}{x-\sqrt2}\right|$ **110.** $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-$
$-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|$ **111.** $\frac13\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right)$ **112.** $-\frac{8+30x}{375}\sqrt{(2-5x)^3}$
113. $-\frac{1+2x}{10}\sqrt[3]{(1-3x)^2}$ **114.** $\frac32\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|$ **115.** $2\sqrt x-4\sqrt[4]{x}+$
$+4\ln(1+\sqrt[4]{x})$ **116.** $\frac{3}{14}\sqrt[3]{(1+x^2)^7}-\frac38\sqrt[3]{(1+x^2)^4}$ **117.** $-\frac{3}{140}\sqrt[3]{(1-x)^4}(14x^2+12x+9)$
118. $-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}$ **119.** $-\frac{2}{15}\sqrt{2-x}(3x^2+8x+32)$ **120.** $-\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\,(3x^4+4x^2+8)$
121. $-\frac{6+25x^3}{1000}\sqrt[3]{(2-5x^3)^5}$ **122.** $\operatorname{arctg} e^x$ **123.** $\arcsin\frac{e^x}{2}$ **124.** $\frac47\sqrt[4]{(1+e^x)^7}-\frac43\sqrt[4]{(1+e^x)^3}$
125. $\frac{1}{2(\ln3-\ln2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|$ **126.** $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x$ **127.** $\ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1)-x$ **128.** $\ln|\ln(\ln x)|$
129. $\frac23(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}$ **130.** $-\frac14\ln^2\frac{1+x}{1-x}$ **131.** $\frac23\sqrt{(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))^3}$ **132.** $\frac16\sin^6 x$
133. $-\ln(1+\cos x)$ **134.** $-\ln|\cos x|$ **135.** $\ln|\sin x|$ **136.** $(\frac23-\frac47\sin^2x+\frac2{11}\sin^4x)\sqrt{\sin^3x}$
137. $2\sqrt{\cos x}(\frac15\cos^2x-1)$ **138.** $-\sqrt{1+2\cos x}$ **139.** $\frac32\sqrt[3]{1-\sin 2x}$ **140.** $-\frac1{\sqrt2}\ln|\sqrt2\cos x+$
$+\sqrt{\cos 2x}|$ **141.** $\frac1{\sqrt2}\arcsin(\sqrt2\sin x)$ **142.** $\frac1{\sqrt2}\arcsin(\sqrt{\frac23}\sin x)$ **143.** $\frac1{\sqrt2}\ln(\sqrt2\cosh x+$
$+\sqrt{\cosh 2x})$ **144.** $\frac{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}{a^2-b^2},\quad a^2\ne b^2$ **145.** $\sqrt{2\sin^2x-1}$ **146.** $-\frac43\sqrt[4]{\operatorname{cotg}^3x}$
147. $3\sqrt[3]{\operatorname{tgh}x}$ **148.** $\frac1{\sqrt2}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt2})$ **149.** $\frac1{\sqrt6}\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac23}\operatorname{tg}x)$ **150.** $-\cos x+\frac13\cos^3x$
151. $\sin x-\frac13\sin^3x$ **152.** $\frac12\operatorname{tg}^2x+\ln|\cos x|$ **153.** $-\frac12\operatorname{cotg}^2x-\ln|\sin x|$ **154.** $\frac12\ln|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}|$
155. $\frac12\ln|\frac{\cosh x-1}{\cosh x+1}|$ **156.** $\operatorname{arctg}\sinh x$ **157.** $\frac12\ln|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}|-\frac1{\sin x}$ **158.** $\frac1{2\cos^2x}+\ln|\operatorname{tg}x|$
159. $\ln|\sin x|-\frac12\sin^2x$ **160.** $-\frac12\cos^2x+\frac12\ln(\cos^2x+1)$ **161.** $\operatorname{tg}x+\frac13\operatorname{tg}^3x$ **162.** $\frac13\operatorname{tg}^3x+$
$+\frac15\operatorname{tg}^5x$ **163.** $\sin\ln x$ **164.** $\frac14\ln^2\operatorname{tg}x$ **165.** $e^{\operatorname{tg}x}+\ln|\operatorname{tg}x|$ **166.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^{\sin x}-1}$
167. $-\frac1{\arcsin x}$ **168.** $-\frac16\arccos^3 2x$ **169.** $-\frac12\ln^2\arccos x$ **170.** $\frac12\operatorname{arctg}^2x$ **171.** $\operatorname{arctg}^2\sqrt x$
172. $\operatorname{arctg}^2e^x$ **173.** $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln x-\frac1{\alpha+1})$ **174.** $-\frac1x(\ln^2x+2\ln x+2)$ **175.** $-\frac1{2x^2}(\ln^3x+\frac32\ln^2x+$
$+\frac32\ln x+\frac34)$ **176.** $x(\ln^2x-2\ln x+2)$ **177.** $\frac23\sqrt{x^3}(\ln^2x-\frac43\ln x+\frac89)$ **178.** $-\frac{8}{27\sqrt{x^3}}(\frac94\ln^2x+$
$+3\ln x+2)$ **179.** $(\ln\ln x-1)\ln x$ **180.** $-(x+1)e^{-x}$ **181.** $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$ **182.** $\frac{x^2}{4}-\frac x4\sin2x-$
$-\frac18\cos2x$ **183.** $-\frac{x^2}{2}\cos2x+\frac x2\sin2x+\frac14\cos2x$ **184.** $-x\operatorname{cotg}\frac x2$ **185.** $x\cosh x-\sinh x$
186. $(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9})\sinh3x-(\frac{x^2}{3}+\frac2{27})\cosh3x$ **187.** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|$ **188.** $-(x+(\ln\sin x+$
$+1)\operatorname{cotg}x)$ **189.** $x\operatorname{arctg}x-\frac12\ln(1+x^2)$ **190.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ **191.** $-\frac x2+\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x$
192. $\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$ **193.** $\frac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{x^3}{12}+\frac x4$ **194.** $-\frac1x\arcsin x+$
$+\ln|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}|$ **195.** $-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x$ **196.** $-\frac13\sqrt{(1-x^2)^3}\arcsin x+\frac x9(3-x^2)$
197. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ **198.** $x+\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ **199.** $\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}-\frac13\ln|x^2-$
$-1|-\frac13x^2$ **200.** $\sqrt{1+x^2}(\ln x-1)+\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$ **201.** $2\sqrt{x+1}\,(\ln(x^2-1)-4)+$
$+2\sqrt2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt2}{\sqrt{x+1}-\sqrt2}\right|$ **202.** $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x$ **203.** $\frac{x^2}{2}\ln|1+\frac1x|+\frac x2-$
$-\frac12\ln|x+1|$ **204.** $-\cos x\ \ln\operatorname{tg}x+\frac12\ln|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}|$ **205.** $\frac13(x^3-1)e^{x^3}$ **206.** $x\arcsin^2x+$
$+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$ **207.** $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}^2x-x\operatorname{arctg}x+\frac12\ln(1+x^2)$ **208.** $x\ln^2(x+$
$+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$ **209.** $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac12\operatorname{arctg}x$ **210.** $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+$
$+\frac1{2a^3}\operatorname{arctg}\frac xa$ **211.** $2(\sqrt x-1)e^{\sqrt x}$ **212.** $2e^{\sqrt x}(x^2\sqrt x-5x^2+20x\sqrt x-60x+120\sqrt x-$
$-120)$ **213.** $2\sqrt x(6-x)\cos\sqrt x+6(x-2)\sin\sqrt x$ **214.** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt x-\sqrt x$
215. $-\frac{\operatorname{arccotg}e^x}{e^x}-x+\frac12\ln(e^{2x}+1)$ **216.** $\frac x2\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac xa$ **217.** $\frac x8(2x^2+$

$+a^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$ **218.** $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)$ **219.** $\frac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x)$
220. $\frac{x^3}{10}(3\sin\ln x-\cos\ln x)$ **221.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$ **222.** $\frac12(x-\sqrt{1-x^2})e^{\arccos x}$
223. $\frac18 e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)$ **224.** $-\frac18 e^{-2x}(2+\cos 2x-\sin 2x)$ **225.** $\frac{x}{2}+\frac14\sin 2x+$
$+\frac12 e^{2x}-e^x(\cos x+\sin x)$ **226.** $\frac12 e^x(x\sin x-x\cos x+\cos x)$ **227.** $e^x(\frac{x-1}{2}-\frac{x}{10}(\cos 2x+$
$+2\sin 2x)+\frac{1}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x))$ **228.** $\frac{e^x}{x+1}$ **229.** $\frac{x-2}{x+2}e^x$ **230.** $\ln(x+a)\ln(x+b)$
231. $e^x(1-\frac4x)$ **232.** $xf'(x)-f(x)$ **234.** $I_n=\frac1a x^n e^{ax}-\frac na I_{n-1}$ **235.** $I_n=x\ln^n x-$
$-nI_{n-1}$ **236.** $I_n=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}$ **237.** $I_n=\frac1n x^{n-1}\sqrt{x^2+a}-\frac{n-1}{n}aI_{n-2}$
238. $I_n=-\frac1n(\cos x)\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ **239.** $I_n=\frac1n(\sin x)\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$
240. $I_n=\frac1n(\cosh x)\sinh^{n-1}x-\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ **241.** $I_n=\frac1n(\sinh x)\cosh^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$
242. $I_n=-\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$ **243.** $I_n=\frac{1}{n-1}\frac{\sinh x}{\cosh^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$ **244.** $-e^{-x}(x^8+$
$+8x^7+8.7x^6+8.7.6x^5+\dots+8!x+8!)$ **245.** $x(\ln^4 x-4\ln^3 x+12\ln^2 x-24\ln x+$
$+24)$ **246.** $\frac{x^4}{4}(\ln^3 x-\frac34\ln^2 x+\frac38\ln x-\frac{3}{32})$ **247.** $\frac{1}{16}\sqrt{x^2+9}(\frac83x^5-30x^3+405x)-$
$-\frac{3645}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+9})$ **248.** $\frac1{15}\sin x\,(3\cos^4x+4\cos^2x+8)$ **249.** $-\frac1{96}\sin 2x\,(8\sin^4x+$
$+10\sin^2x+15)+\frac{5}{16}x$ **250.** $-\frac14\frac{\cos x}{\sin^4 x}-\frac38\frac{\cos x}{\sin^2x}+\frac3{16}\ln|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}|$ **251.** $\frac16\frac{\sinh x}{\cosh^6x}+\frac5{24}\frac{\sinh x}{\cosh^4x}+$
$+\frac5{16}\frac{\sinh x}{\cosh^2x}+\frac58\operatorname{arctg}e^x$ **253.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac ba}x$ **254.** $\frac1{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac75}x$ **255.** $\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}$
256. $\frac16\ln|\frac{3x+5}{1-3x}|$ **257.** $\frac1{16}\ln|\frac{3x-5}{5x-3}|$ **258.** $\frac{1}{4\sqrt2}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt2+1)}{x^2+(\sqrt2-1)}\right|$ **259.** $\frac12\ln(x^2+x+1)+$
$+\frac{\sqrt3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}$ **260.** $\frac12\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)+(\operatorname{cotg}\alpha)\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ **261.** $\frac14\ln(x^4-x^2+$
$+2)+\frac{1}{2\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt7}$ **262.** $\frac19\ln|x^3+1|(x^3-2)^2$ **263.** $\frac12\ln|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}|$ **264.** $\frac12\operatorname{arctg}\operatorname{tg}^2x$
266. $\frac{1}{\sqrt b}\ln\left(\sqrt b x+\sqrt{a+bx^2}\right)$, je-li $b>0$; $\frac{1}{\sqrt{|b|}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{|b|}{a}}x\right)$, je-li $a>0,\ b<0$
267. $\ln|x+\frac12+\sqrt{x^2+x}|$ **268.** $\frac{\sqrt2}{2}\arcsin\frac{4x-3}{5}$ **269.** $\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})$ **270.** $\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{21}}$
271. $\frac{\sqrt2}{4}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}$ **272.** $\arcsin\frac{2\sin x-1}{3}$ **273.** $\frac{\sqrt2}{4}\ln\left(\cosh 2x+\sqrt{2(\sinh^4x+\cosh^4x)}\right)$
274. $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac12\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}$ **275.** $\sqrt{x^2+x+1}+\frac12\ln(x+\frac12+\sqrt{x^2+x+1})$
276. $\frac12\sqrt{x^4-2x^2-1}+\frac12\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right|$ **277.** $-\frac12\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac34\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt5}$
278. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac98\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt3}$ **279.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac78\ln(x+\frac12+\sqrt{2+x+x^2})$
280. $\frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1}-\frac12\ln\left|x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}\right|$

I.3

288. $\frac14\ln|\frac{x-1}{x+3}|$ **289.** $\frac13\ln|\frac{x-1}{x+2}|$ **290.** $\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$ **291.** $\ln|(x-2)(x+5)|$ **292.** $\frac25\ln|x-$
$-2|+\frac1{10}\ln|2x+1|$ **293.** $\frac29\ln|\frac{x-1}{x+2}|-\frac{1}{3(x-1)}$ **294.** $x+3\ln|\frac{x-3}{x-2}|$ **295.** $x+\frac16\ln|x|-$
$-\frac92\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|$ **296.** $\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+$
$+171x+\frac13\ln|\frac{x-1}{(x+1)^{1024}}|$ **297.** $\frac32x^2+\frac{11}{2}\ln|x-2|+\frac32\ln|x+2|$ **298.** $\ln(x^2+6x+13)+$
$+\frac52\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}$ **299.** $x+3\ln(x^2-6x+10)+8\operatorname{arctg}(x-3)$ **300.** $x+\frac13\operatorname{arctg}x-\frac83\operatorname{arctg}\frac x2$
301. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|$ **302.** $\frac18\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|$ **303.** $\frac1{15}\ln\left|\frac{(x-2)^7(3x-1)^3}{(x+1)^{10}}\right|$ **304.** $\frac{1}{x+1}+$
$+\frac12\ln|x^2-1|$ **305.** $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln|\frac{x-1}{x-2}|$ **306.** $\frac1{33}\ln\left|\frac{(3x+1)^9(2x-3)^2}{x^{11}}\right|$ **307.** $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x-2)(x+2)^2}\right|$
308. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|$ **309.** $\frac1{12}\ln(\frac{x+1}{x-1})^4|\frac{x-2}{x+2}|^5$ **310.** $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac18\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|$
311. $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac3{16}\ln|\frac{x+1}{x-1}|$ **312.** $\frac1{60}\ln(\frac{x-3}{x+3})^2|\frac{x+2}{x-2}|^3$ **313.** $\operatorname{arctg}x+\frac56\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$ **314.** $\frac{x^2}{2}+$

$+\ln\left|\frac{x(x-2)(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}{x+2}\right|$ **315.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ **316.** $\frac{\sqrt{2}}{20}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{\sqrt{3}}{15}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$ **317.** $-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arctg}(x-2)$ **318.** $-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{8}{25}\operatorname{arctg}(x+1)$ **319.** $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ **320.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ **321.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ **322.** $\frac{1}{6}(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}-\sqrt{3}(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}))$ **323.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ **324.** $\operatorname{arctg} x-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$ **325.** $\frac{\sqrt{2}}{8}(\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+2(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)))$ **326.** $\frac{1}{8}\Big(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-2\operatorname{arctg} x+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\sqrt{2}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1))\Big)$ **327.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{6}(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$ **328.** $\frac{1}{6}(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+2\operatorname{arctg} x+$ $+\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})+\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}))$ **329.** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{16}\ln\frac{x^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}x+1}{x^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}x+1}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{16}\ln\frac{x^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}x+1}{x^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}x+1}+$ $+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8}\Big(\operatorname{arctg}\frac{2x+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\Big)+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8}\Big(\operatorname{arctg}\frac{2x+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\Big)$ **330.** $-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ **331.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ **332.** $\frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(2x+1)$ **333.** $a+2b+3c=0$ **334.** $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+$ $+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ **335.** $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{(x+1)^2}{9(x^2-x+1)}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ **336.** $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x$ **337.** $\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ **338.** $\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)$ **339.** $\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3\sqrt{2}}{32}(\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+$ $+2(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)))$ **340.** $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{(x-1)^2}{9(x^2+x+1)}+\frac{8\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ **341.** $\frac{1}{32}(\frac{7x^5-11x}{(x^4-1)^2}+\frac{21}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{2}\operatorname{arctg} x)$ **342.** $\frac{57x^4+103x^2+32}{-8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg} x$ **343.** $\frac{x+1}{2(x^2+x+1)^2(1-x)}$ **344.** $-\frac{(x^2+1)^2}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$ **345.** $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}$ **346.** $-\frac{486x^5-357x^4+810x^3+315x^2-312x+448}{1922(x^3+x+1)^2}$ **347.** $-\frac{x}{x^5+x+1}$ **348.** $a\gamma+c\alpha=2b\beta$ **349.** $-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}$ **350.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-$ $-\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^2$ **351.** $\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{3}}$ **352.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}$ **353.** $\frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2}-\ln\frac{x^4}{x^4+1}$ **354.** $-\frac{1}{100}(\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{\sqrt{10}}{20}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|)$ **355.** $\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$ **356.** $-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x^5+1)$ **357.** $\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)$ **358.** $\frac{1}{2n}(\operatorname{arctg} x^n-$ $-\frac{x^n}{x^{2n}+1})$ **359.** $\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}$ **360.** $\frac{1}{10}(\frac{1}{x^{10}+1}+\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1})$ **361.** $\frac{1}{7}\ln\frac{|x^7|}{(1+x^7)^2}$ **362.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right|$ **363.** $\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}$ **364.** $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}$ **365.** $\frac{\sqrt{3}}{3}(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$ **366.** $\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})+\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}))$ **367.** $\operatorname{arctg} x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3$ **368.** $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x$ **369.** $\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{\sqrt{3}}{6}(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$

I.4.1

373. $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})$ **374.** $x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})$ **375.** $2\sqrt{x}-x-\ln(1+2\sqrt{x})$ **376.** $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}$ **377.** $\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3}-\frac{3\sqrt{7}}{14}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$ **378.** $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$ **379.** $x+4(\sqrt{x+1}+\ln|\sqrt{x+1}-1|)$ **380.** $\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-$ $-\frac{27\sqrt{7}}{56}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}$, kde $t=\sqrt[3]{2+x}$ **381.** $6t-3t^2-2t^3+\frac{3}{2}t^4+\frac{6}{5}t^5-\frac{6}{7}t^7+3\ln(t^2+1)-$ $-6\operatorname{arctg} t$, kde $t=\sqrt[6]{x+1}$ **382.** $\frac{1}{2}(x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|)$ **383.** $\frac{1}{3}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}+$ $+\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2t}{t^3-1}$, kde $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ **384.** $3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}$ **385.** $2(\sqrt{x+4}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|)$ **386.** $\frac{5}{4}(\frac{x+1}{x})^{\frac{4}{5}}-\frac{5}{9}(\frac{x+1}{x})^{\frac{9}{5}}$ **387.** $-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{\sqrt{2}a}{8}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}-$

$-\frac{\sqrt{2}a}{4}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1)-\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1))$, kde $t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$ **388.** $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ **389.** $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$
390. $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$, $x+a>0$, $x+b>0$
391. $\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$ **392.** $\frac{1}{2}\Big(x+2\sqrt{x}-\sqrt{x(1+x)}-\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})\Big)$

I.4.2

404. $\frac{2\sqrt{5}}{25}\ln\left|\frac{2t+\sqrt{5}+1}{2t-\sqrt{5}+1}\right|+\frac{2(4t-3)}{5(t^2+t-1)}$, kde $t=-x+\sqrt{x(1+x)}$ **405.** $\frac{1}{8}\Big(\frac{1}{3}(t-1)^3+\frac{1}{3}(t-1)^{-3}+(t-1)^2-(t-1)^{-2}+(t-1)+(t-1)^{-1}\Big)+\frac{1}{2}\ln|t-1|$, kde $t=x+\sqrt{x^2-2x+2}$ **406.** $2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}$ **407.** $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{1+x}$ **408.** $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}}{(2+x+2\sqrt{x^2+x+1})^2}$ **409.** $\frac{2(1-\sqrt{x^2+x+1})}{x}+\ln|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}|$ **410.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}$ **411.** $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|-\sqrt{2}\ln\left|\frac{2+x+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|$
412. $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$ **413.** $3\ln(x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3})+\ln(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1})$ **414.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{2}x}{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{2}x}\right|$ **415.** $\frac{\sqrt{14}}{14}\ln\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{6x^2+10}+\sqrt{7}}$
416. $\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2(x^2+1)}-x}{\sqrt{x^2+2}}$ **417.** $\ln(x+\sqrt{x^2+2})+\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$
418. $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **419.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2}x}\right|$ **420.** $\frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{8}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})$ **421.** $\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}+\frac{11}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$ **422.** $-\frac{1}{6}\sqrt{1+2x-x^2}(2x^2+5x+19)+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}$ **423.** $(\frac{x^9}{10}-\frac{9}{80}x^7+\frac{21}{160}x^5-\frac{21}{128}x^3+\frac{63}{256}x)\sqrt{x^2+1}-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
424. $(\frac{x^5}{6}-\frac{a^2x^3}{24}-\frac{a^4x}{16})\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}$ **425.** $(\frac{x^2}{3}-\frac{14}{3}x+37)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|$ **426.** $\frac{1}{6}(2x^2+x+7)\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}|$ **427.** $\frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3})$ **428.** $\frac{1}{6}(2x^2+x+1)\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$ **429.** $\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln(x+\sqrt{x^2+4})$ **430.** $-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|$ **431.** $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}|x|}$ **432.** $\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|$
433. $-\sqrt{1+x-x^2}-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$ **434.** $-\ln\left|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$
435. $\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$ **436.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right|$ **437.** $\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{2}|x-1|}$
438. $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$ **439.** $\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)}+\frac{\sqrt{5}}{25}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}|x+2|}$ **440.** $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\right)$
441. $\frac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}$ **442.** $\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{11\sqrt{5}}{200}\ln\left|\frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|$
443. $\frac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}$ **444.** $\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|$
445. $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{3x+1+2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|+\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{5}|x-1|}\right)$ **446.** $-\frac{x+1}{2}\sqrt{1+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{x+1}$ **447.** $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{x-2}$ **448.** $\frac{\sqrt{3}}{9}\ln\frac{1-x+\sqrt{3(x^2+2x+3)}}{x+2}-\frac{\sqrt{6}}{18}\ln\frac{\sqrt{2}(x+2)+\sqrt{3(x^2+2x+3)}}{x-1}$ **449.** $\frac{1}{2}\ln\frac{8+x+4\sqrt{x^2+x+4}}{x}-\frac{\sqrt{6}}{12}\ln\frac{3+x+\sqrt{6(x^2+x+4)}}{x-1}-\frac{1}{4}\ln\frac{7-x+4\sqrt{x^2+x+4}}{x+1}$ **450.** $\frac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}}$ **451.** $\frac{8}{9}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2}{27}(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}})^3$ **452.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{2}{3}(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})^3+\frac{1}{5}(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})^5$ **453.** $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$ **454.** $\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}$

455. $\frac{\sqrt2}{2}\ln\left|\frac{1+x+\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1+x-\sqrt{2(x^2+x+1)}}\right|+2\sqrt2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1-x}$ **456.** $\frac{\sqrt6}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}-\sqrt2(x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|+$ $+\frac{\sqrt2}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt2(1-x)}$ **457.** $\frac{\sqrt6}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+\sqrt2(2x+1)}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-\sqrt2(2x+1)}\right|$ **458.** $\frac{\sqrt{14}}{64}\ln\left|\frac{2\sqrt{2(2x^2-x+2)}-\sqrt7(1-x)}{2\sqrt{2(2x^2-x+2)}+\sqrt7(1-x)}\right|+$ $+\frac{\sqrt7}{14}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{2x^2-x+2}}{\sqrt7(x+1)}$ **459.** $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt3}-\frac{\sqrt6}{6}\ln\frac{\sqrt6+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt6-\sqrt{2+2x-x^2}}+\frac{\sqrt2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt2(1-x)}{\sqrt{2+2x-x^2}}$ **460.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}$ **461.** $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$ **462.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$ **463.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$ **464.** $a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$ **465.** $\sqrt{x^2-a^2}-$ $-a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$ **466.** $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$ **467.** $\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}$ **468.** $2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$, je-li $x+a>0$, $x+b>0$; $-2\ln(\sqrt{-(x+a)}+\sqrt{-(x+b)})$, je-li $x+a<0$, $x+b<0$ **469.** $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$, kde $x+a>0$, $x+b>0$ **470.** $\frac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac14\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|$ **471.** $\frac{t}{3}-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\left(\ln\frac{\sqrt3t^2+\sqrt[4]{12}t+1}{\sqrt3t^2-\sqrt[4]{12}t+1}+2\,\mathrm{arctg}(\sqrt[4]{12}t+1)+2\,\mathrm{arctg}(\sqrt[4]{12}t-1)\right)$, kde $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ **472.** $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{\sqrt2}{2}\arcsin x$ **473.** $\frac23(x^{\frac32}+(1+x)^{\frac32})+\frac25(x^{\frac52}-(1+x)^{\frac52})$ **474.** $-\frac{\sqrt2}{2}\arcsin\frac{\sqrt2x}{x^2+1}$ **475.** $-\frac{\sqrt2}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^4+1}+\sqrt2x}{x^2-1}\right|$ **476.** $\frac12\arcsin\frac{x^2-1}{\sqrt2x^2}$ **477.** $\frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{2(x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1})}$

I.4.3

481. $-(6\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|)$ **482.** $-\frac32(1+\sqrt[3]{x})^{-2}$ **483.** $\frac49(1+\sqrt[4]{x})^{-9}-$ $-\frac12(1+\sqrt[4]{x})^{-8}$ **484.** $\frac35t^5-2t^3+3t$, kde $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$ **485.** $\frac16\ln\frac{t-1}{t+1}+\frac1{12}\ln\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}+$ $+\frac{\sqrt3}{6}(\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt3}+\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt3})$, kde $t=\sqrt[6]{1+x^6}$ **486.** $-\frac59t^9+\frac54t^4$, kde $t=\sqrt[5]{1+\frac1x}$ **487.** $\frac3{11}(x+1)^{\frac{11}{3}}-\frac34(x+1)^{\frac83}+\frac35(x+1)^{\frac53}$ **488.** $\frac{12}{3}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{13}{3}}-\frac{18}{5}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{10}{3}}+\frac{36}{7}(1+$ $+\sqrt[4]{x})^{\frac73}-3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac43}$ **489.** $\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac73}-3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac43}$ **490.** $\frac67(1+\sqrt[3]{x})^{\frac72}-\frac{18}{5}(1+$ $+\sqrt[3]{x})^{\frac52}+6(1+\sqrt[3]{x})^{\frac32}-6(1+\sqrt[3]{x})^{\frac12}$ **491.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **492.** $-\frac{3x^3+4}{8x\sqrt[3]{(x^3+2)^2}}$ **493.** $-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}$ **494.** $\frac14\ln|\frac{t+1}{t-1}|-\frac12\,\mathrm{arctg}\,t$, kde $t=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$ **495.** $\frac{t}{2(t^3+1)}-\frac1{12}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}-\frac{\sqrt3}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt3}$, kde $t=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$ **496.** $\frac{3t}{2(t^3+1)}-\frac14\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}-\frac{\sqrt3}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt3}$, kde $t=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$ **497.** $\frac{x}{24}\sqrt{\frac{1+x}{x}}(8x^2+$ $+2x-3)+\frac18\ln\left|x(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1)\right|$ **498.** $m=\frac2k$, kde $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

I.5.1

503. $\frac{1}{6(3\cos x-1)^2}$ **504.** $\frac12\cos x-\frac{3\sqrt2}{4}\ln|\frac{1-\sqrt2\cos x}{1+\sqrt2\cos x}|$ **505.** $\frac{\sqrt3}{3}(\mathrm{arctg}\,\frac{2\cos x-1}{\sqrt3}-\mathrm{arctg}\,\frac{2\cos x+1}{\sqrt3})+$ $+\frac12\ln\frac{\cos^2x-\cos x+1}{(\cos^2x+\cos x+1)^3}$ **506.** $\frac18\ln\frac{\sin^2x}{\cos2x}$ **507.** $\frac14\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}$ **508.** $\frac14\ln(3+4\sin^2x)$ **509.** $\sin x-$ $-\frac{2}{\sin x}-6\,\mathrm{arctg}\sin x$ **510.** $\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-2\,\mathrm{arctg}\sin x$ **511.** $\frac1{10}(x+3\ln|\sin x-3\cos x|)$ **512.** $\ln|\sin x+\cos x|$ **513.** $x\cos a-2\sin a\ln|\sin\frac{x+a}{2}|$ **514.** $\frac{1}{ab}\,\mathrm{arctg}(\frac ab\,\mathrm{tg}\,x)$ **515.** $\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}$ **516.** $\frac{\sqrt7}{14}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,x+1}{\sqrt7}$ **517.** $\frac{\sqrt2}{4}\ln|\frac{\mathrm{tg}\,x+1+\sqrt2}{\mathrm{tg}\,x+1-\sqrt2}|$ **518.** $\frac{1}{2-\mathrm{tg}\,x}$ **519.** $\frac{\sqrt{30}}{30}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{\frac56}\,\mathrm{tg}\,x)$ **520.** $\frac{\sqrt{13}}{26}\ln|\frac{2\,\mathrm{tg}\,x+3-\sqrt{13}}{2\,\mathrm{tg}\,x+3+\sqrt{13}}|$ **521.** $\frac{1}{c\sqrt{ac-b^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{c\,\mathrm{tg}\,x+b}{\sqrt{ac-b^2}}$, je-li $ac>b^2$ **522.** $\frac{17\ln|\sin x|-\ln|\sin x+4\cos x|-4x}{68}$ **523.** $\frac{\mathrm{tg}\,x+\ln|\mathrm{tg}\,x|}{2}$ **524.** $\frac16\ln\frac{1-\sin x\cos x}{1+2\sin x\cos x}+\frac{\sqrt3}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,x-1}{\sqrt3}$ **525.** $\mathrm{arctg}(2\sin^2x-1)$ **526.** $\frac{\sqrt2}{4}\ln\frac{1-\sqrt2\sin x\cos x}{1+\sqrt2\sin x\cos x}$ **527.** $\frac{\sqrt2}{2}\Big(\mathrm{arctg}(\sqrt2\,\mathrm{tg}\,x+1)+$ $+\mathrm{arctg}(\sqrt2\,\mathrm{tg}\,x-1)\Big)$ **528.** $\frac12\,\mathrm{arctg}\sin^2x$ **529.** $\frac{3\sqrt2}{8}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt2}-\frac{\sin x\cos x}{4(\sin^2x+2\cos^2x)}$

530. $\frac{\mathrm{arctg}(\frac{a}{b}\,\mathrm{tg}\,x)}{2ab^3}+\frac{\sin x\cos x}{2b^2(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)}$ **531.** $\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{4}\Big(\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,x+\sqrt{2+\sqrt2}}{\sqrt{2-\sqrt2}}+\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,x-\sqrt{2+\sqrt2}}{\sqrt{2-\sqrt2}}\Big)-\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{4}\Big(\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,x+\sqrt{2-\sqrt2}}{\sqrt{2+\sqrt2}}+\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,x-\sqrt{2-\sqrt2}}{\sqrt{2+\sqrt2}}\Big)$ **532.** $\mathrm{arctg}(2\,\mathrm{tg}\,x+\sqrt3)+\mathrm{arctg}(2\,\mathrm{tg}\,x-\sqrt3)$ **533.** $\frac{\sqrt2}{2}\ln\left|\frac{\cos x-\sin x-\sqrt2}{\sin x+\cos x}\right|$ **534.** $\frac12\ln\left|\frac{\cos x-\sqrt3\sin x-2}{\sqrt3\cos x+\sin x}\right|$ **535.** $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{b\cos x-a\sin x-\sqrt{a^2+b^2}}{a\cos x+b\sin x}\right|$ **536.** $-\frac{2\sin x+\cos x}{5}+\frac{4\sqrt5}{25}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-(1-\sqrt5)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-(1+\sqrt5)}\right|$ **537.** $\frac18\,\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}+\frac12\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\frac14\ln|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}|$ **538.** $\frac{\sin x-\cos x}{2}+\frac{\sqrt2}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-(1+\sqrt2)}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-(1-\sqrt2)}\right|$ **539.** a) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2})$ b) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\sqrt{\varepsilon+1}}{\sqrt{\varepsilon-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-\sqrt{\varepsilon+1}}\right|$ **540.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt3\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\sqrt5}{\sqrt3\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-\sqrt5}\right|$ **541.** $\frac{2}{\sqrt{15}}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{\frac35}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2})$ **542.** $\frac{2}{\sqrt{15}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1}{\sqrt{15}}$ **543.** $\frac16\ln|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}|+\frac56\ln|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-3|-\frac12\ln|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1|$ **544.** $\frac{1}{1+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}+\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}\right|$ **545.** $\frac13\ln\frac{(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1)^2}{\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}-\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}+\frac{2\sqrt3}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1}{\sqrt3}$ **546.** $\frac{2\sqrt3}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1}{\sqrt3}-\frac{\sqrt2}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1}{2\sqrt2}$ **547.** $\ln|1+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}|$ **548.** $\frac{2}{3+9\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$ **549.** $\frac{2}{\sqrt{15}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}$ **550.** $\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-5}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-3}\right|$ **551.** $\frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{(c-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}$ **552.** $A=\frac{a_1a+b_1b}{a^2+b^2}$, $B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}$, $C\in\mathbb{R}$ **553.** $-\frac{x}{5}-\frac35\ln|\sin x+2\cos x|$ **554.** $\frac{x}{10}+\frac{3}{10}\ln|\sin x-3\cos x|$ **555.** $\frac{3x}{34}+\frac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|$ **556.** $\frac{a_1b-ab_1}{a^2+b^2}\frac{1}{a\sin x+b\cos x}+\frac{a_1a+b_1b}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\ln\left|\frac{b\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-a-\sqrt{a^2+b^2}}{b\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-a+\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ **557.** $A=\frac{a_1a+b_1b}{a^2+b^2}$, $B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}$, $C=c_1-cA$ **558.** $-\frac{3x}{5}+\frac45\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac65\,\mathrm{arctg}\,\frac{5\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{2}$ **559.** $-x+2\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}\right|$ **560.** $\frac{x}{2}-\frac12\ln(\sqrt2+\sin x+\cos x)+\frac{\sqrt2}{(\sqrt2-1)\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}$ **561.** $\frac{2x}{5}-\frac15\ln|3\sin x+4\cos x-2|+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt7+\sqrt3(2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1)}{\sqrt7-\sqrt3(2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1)}\right|$ **562.** $(\cos 2a)x-(\sin 2a)\ln|1-\cos(x+a)|-2(\sin^2 a)\,\mathrm{cotg}\,\frac{x+a}{2}$ **563.** $A=\frac{2b_1-(a_1-c_1)b}{a^2+b^2}$, $B=-\frac{(a_1-c_1)a+2b_1b}{a^2+b^2}$, $C=c_1-bA$ **564.** $-\frac25\sin x-\frac15\cos x+\frac{4\sqrt5}{25}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-(1-\sqrt5)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-(1+\sqrt5)}\right|$ **565.** $-\sin x+3\cos x+2\sqrt2\ln\left|\frac{\cos x-\sin x-\sqrt2}{\sin x+\cos x}\right|$ **566.** $\frac12\sin x+\frac32\cos x+\frac{5\sqrt2}{4}\ln\left|\frac{\cos x-\sin x-\sqrt2}{\sin x+\cos x}\right|$ **567.** $\frac15\sin x+\frac35\cos x+\frac{8\sqrt5}{25}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-(1-\sqrt5)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-(1+\sqrt5)}\right|$ **568.** $A=\frac{a_1(a-\lambda_2)+b_1b}{b(\lambda_2-\lambda_1)}$, $B=\frac{a_1(a-\lambda_1)+b_1b}{b(\lambda_1-\lambda_2)}$ **569.** $\frac14\ln\frac{2-\sin x}{2+\sin x}-\frac{2\sqrt3}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos x}{\sqrt3}$ **570.** $\frac{\sqrt6}{60}\ln\frac{\sqrt6+2\sin x+\cos x}{\sqrt6-2\sin x-\cos x}+\frac{3\,\mathrm{arctg}(\sin x-2\cos x)}{5}$ **571.** $-\frac{\sqrt6}{24}\ln\left|\frac{\sqrt6+2(\sin x-\cos x)}{\sqrt6-2(\sin x-\cos x)}\right|+\frac{3\sqrt2}{8}\ln\left|\frac{2(\sin x+\cos x)+\sqrt2}{2(\sin x+\cos x)-\sqrt2}\right|$ **572.** $\frac{1}{10}\Big(\frac{2\sin x-\cos x}{(\sin x+2\cos x)^2}+\frac{\sqrt5}{5}\ln\left|\frac{\cos x-2\sin x-\sqrt5}{\sin x+2\cos x}\right|\Big)$ **573.** a) $\frac{1}{1-\varepsilon^2}\Big(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2})-\frac{\varepsilon\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\Big)$ b) $\frac{1}{2(\varepsilon^2-1)^2}\left(\frac{\varepsilon^2-3\varepsilon\cos x-4}{(1+\varepsilon\cos x)^2}+\frac{\varepsilon^2+2}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\sqrt{\varepsilon+1}}{\sqrt{\varepsilon-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-\sqrt{\varepsilon+1}}\right|\right)$

I.5.2

578. $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}$ **579.** $\frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}$ **580.** $\frac{\sin^9 x}{9}-\frac{\sin^{11} x}{11}$ **581.** $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}$ **582.** $\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{4}+\frac{\sin^{10} x}{10}$ **583.** $\frac{\sin^8 2x}{16}-\frac{\sin^{10} 2x}{10}+\frac{\sin^{12} 2x}{24}$ **584.** $\sin x\cos^2 x+\frac{2\sin^5 x}{5}$ **585.** $-\frac{16\cos^7 x}{7}+\frac{24\cos^5 x}{5}-3\cos^3 x$ **586.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}$ **587.** $\frac{5x}{16}-\frac{11}{16}\sin^5 x\cos x-\frac56\sin^3 x\cos^3 x-\frac{5}{16}\sin x\cos^5 x$ **588.** $\frac{5x}{16}+\frac{5}{16}\sin^5 x\cos x+\frac56\sin^3 x\cos^3 x+\frac{11}{16}\sin x\cos^5 x$ **589.** $\frac{x}{16}-\frac16\cos^5 x\sin x+\frac{1}{24}\cos^3 x\sin x+\frac{1}{16}\sin x\cos x$ **590.** $\frac{24x-8\sin 4x+\sin 8x}{2048}+\frac{\sin^5 2x}{320}$ **591.** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac12\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$ **592.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac12\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|$ **593.** $\frac12\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{\sin^3 x}{3}-\sin x$ **594.** $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}$ **595.** $-\cos x-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac32\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|$ **596.** $-\frac{\mathrm{cotg}^4 x}{4}$ **597.** $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|$ **598.** $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\ln|\,\mathrm{tg}\,x|$ **599.** $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|$ **600.** $\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}+\frac{3\,\mathrm{tg}^2 x}{2}-\frac{\mathrm{cotg}^2 x}{2}+3\ln|\,\mathrm{tg}\,x|$ **601.** $\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+2\,\mathrm{tg}\,x-\mathrm{cotg}\,x$ **602.** $-\frac{\mathrm{cotg}^3 x}{3}-\mathrm{cotg}\,x$ **603.** $\frac{\mathrm{tg}^5 x}{5}$ **604.** $\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}-\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}-$

$-\ln|\cos x|$ **605.** $\frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} - \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \mathrm{tg}\, x - x$ **606.** $x - \frac{\mathrm{cotg}^5 x}{5} + \frac{\mathrm{cotg}^3 x}{3} - \mathrm{cotg}\, x$ **607.** $\frac{2}{\cos x}$
608. $\ln|\cos x| - \cos 2x$ **609.** $\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{4\sin^4 x}$ **610.** a) $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ b) $K_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}$, $I_6 = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{5}{16}\sin x\cos x + \frac{5x}{16}$, $K_8 = \frac{1}{8}\cos^7 x\sin x + \frac{7}{48}\cos^5 x\sin x + \frac{35}{192}\cos^3 x\sin x + \frac{35}{128}\cos x\sin x + \frac{35x}{128}$ **611.** a) $I_n = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$ b) $K_n = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2}$, $I_5 = -\frac{1}{4}\frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|$, $K_7 = \frac{1}{6}\frac{\sin x}{\cos^6 x} + \frac{5}{24}\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{5}{16}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{5}{16}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$ **612.** $-\frac{3}{80}\sqrt[3]{\cos^4 x}(5\cos^4 x - 16\cos^2 x + 20)$ **613.** $\frac{5}{28}\sqrt[5]{\sin^4 x}\left(7 - 2\sin^2 x\right)$ **614.** $\frac{3}{5}\frac{\cos^2 x + 5}{\sqrt[3]{\cos x}}$ **615.** $\frac{\sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x}}{5}(\mathrm{tg}^2 x + 5)$ **616.** $\frac{\mathrm{tg}^2 x - 3}{3\sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x}}$ **617.** $-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2 x}}$ **618.** $-2\sqrt{\mathrm{cotg}\, x} + \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{tg}^3 x}$ **619.** $2\sqrt{\mathrm{tg}\, x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\mathrm{tg}\, x + \sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1}{\mathrm{tg}\, x - \sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{arctg}(\sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} - 1) + \mathrm{arctg}(\sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1))$ **620.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\mathrm{tg}\, x - \sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1}{\mathrm{tg}\, x + \sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{arctg}(\sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} - 1) + \mathrm{arctg}(\sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1))$ **621.** $2\sqrt{\mathrm{tg}\, x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\mathrm{tg}\, x + \sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1}{\mathrm{tg}\, x - \sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{arctg}(\sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} - 1) + \mathrm{arctg}(\sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1))$ **622.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\mathrm{tg}\, x + \sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1}{\mathrm{tg}\, x - \sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{arctg}(\sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} - 1) + \mathrm{arctg}(\sqrt{2\,\mathrm{tg}\, x} + 1))$ **623.** $-\frac{8}{3}\cos^6 x + 3\cos^4 x - \frac{1}{2}\cos^2 x$ **624.** $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24}$ **625.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6} + \frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}$ **626.** $-\frac{1}{2}\cos(a-b)\cos x - \frac{1}{4}\cos(x+a+b) + \frac{1}{12}\cos(3x+a+b)$ **627.** $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2ax}{8a} + \frac{\sin 2bx}{8b} + \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}$
628. $\frac{1}{4}(-\frac{3}{4}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{12}\cos 6x - \frac{3}{32}\cos 8x + \frac{1}{48}\cos 12x)$ **629.** $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|$
630. $\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|$ **631.** $\frac{2}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|$ **632.** $\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ **633.** $\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$
634. $-x + (\mathrm{cotg}\, a)\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|$

I.6

638. $\frac{1}{3}\ln\frac{(3-\cosh x)^{10}}{\cosh^4 x}$ **639.** $\frac{1}{3}\ln\frac{\sinh^2 x - \sinh x + 1}{(\sinh x + 1)^2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{2\sinh x - 1}{\sqrt{3}}$ **640.** $\frac{5x}{3} - \frac{2\ln(2\cosh x - \sinh x)}{3}$
641. $\frac{x}{2} + \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{\sinh^2 x}{2}$ **642.** $\frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tgh}\, x - 2}{\sqrt{5}}$ **643.** $\frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tgh}\, x - 2}{\sqrt{5}}$ **644.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tgh}\, x - 2}{\mathrm{tgh}\, x + 2}\right|$
645. $\frac{1}{\mathrm{tgh}\, x + 6}$ **646.** $\frac{5}{9}\ln(2 + \mathrm{tgh}\, x) - \frac{1}{18}\ln(1 - \mathrm{tgh}\, x) - \frac{1}{2}(1 + \mathrm{tgh}\, x) - \frac{2}{3(2 + \mathrm{tgh}\, x)}$ **647.** $-x + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{tgh}\, x + 1}{\sqrt{2}\,\mathrm{tgh}\, x - 1}\right|$ **648.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}}{\sinh 2x}$ **649.** $\mathrm{arctg}(2\,\mathrm{tgh}^2 x - 1)$ **650.** $\frac{3\,\mathrm{tgh}\, x}{4(\mathrm{tgh}^2 x + 2)} - \frac{\sqrt{2}}{8}\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tgh}\, x}{\sqrt{2}}$ **651.** $-\frac{4x}{7} - \frac{3}{7}\ln|3\sinh x - 4\cosh x|$ **652.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\,\sqrt{3}e^x$ **653.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{e^x - \sqrt{3}}{e^x + \sqrt{3}}\right|$
654. $\frac{2\sqrt{11}}{33}\mathrm{arctg}\,\frac{3\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{11}}$ **655.** $\frac{1}{2}\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\mathrm{tgh}^3\frac{x}{2}$ **656.** $\frac{\sqrt{5}}{15}\ln\frac{(\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} - 2 + \sqrt{5})^2|2\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{5}|}{(\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} - 2 - \sqrt{5})^2|2\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{5}|}$
657. $-\frac{1}{2}\ln(1 + 2e^{-x})$ **658.** $\frac{1}{5}\ln|5\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} + 3|$ **659.** $\frac{4x}{3} + \frac{5}{3}\ln|2\sinh x - \cosh x - 1| + \frac{2}{3}\ln|2\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} - 1|$ **660.** $\frac{2x}{3} - \frac{1}{3}\ln|4\cosh x + 5\sinh x + 6| - \frac{\sqrt{5}}{15}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} - 5 + 3\sqrt{5}}{2\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} - 5 - 3\sqrt{5}}\right|$
661. $\frac{1}{8}(5\sinh x - 3\cosh x - \frac{15}{4}\ln\left|\frac{3\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} + 1}{\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} + 3}\right|)$ **662.** $\frac{1}{8}(5\sinh x - 3\cosh x - \frac{17}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{5\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} + 3}{4})$
663. $\frac{\sqrt{21}}{21}\ln\frac{\sqrt{7}\cosh x - \sqrt{3}}{\sqrt{7}\cosh x + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{7}}{14}\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{7}\sinh x}{2}$ **664.** $-\frac{1}{7}(\frac{5}{4\cosh x + 3\sinh x} + \frac{4\sqrt{7}}{7}\mathrm{arctg}\,\frac{4\,\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2} + 3}{\sqrt{7}})$
665. $-\frac{x}{8} + \frac{\sinh 4x}{32}$ **666.** $\frac{3x}{8} + \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{\sinh 4x}{32}$ **667.** $\frac{\cosh^3 x}{3} - \cosh x$ **668.** $\ln\cosh x$ **669.** $x - \mathrm{cotgh}\, x$ **670.** $\ln|\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2}| + \frac{1}{\cosh x}$ **671.** $-\frac{3}{2}\ln|\mathrm{tgh}\,\frac{x}{2}| - \frac{1}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{2\sinh^2 x}$ **672.** $\frac{\sinh x}{4\cosh^4 x} + \frac{3\sinh x}{8\cosh^2 x} + \frac{3}{4}\mathrm{arctg}\, e^x$ **673.** $\frac{3}{2}\sinh x - \frac{\sinh^3 x}{2\cosh^2 x} - \frac{3}{2}\mathrm{arctg}\sinh x$ **674.** $\frac{\mathrm{tgh}^5 x}{5}$ **675.** $\frac{\sinh^4 x}{4} + \sinh^2 x + \ln|\sinh x|$ **676.** $\mathrm{tgh}\, x + 2\,\mathrm{cotgh}\, x - \frac{1}{3}\mathrm{cotgh}^3 x$ **677.** $\ln\cosh x - \frac{\mathrm{tgh}^2 x}{2}$
678. $x - \mathrm{tgh}\, x - \frac{\mathrm{tgh}^3 x}{3}$ **679.** $\frac{3}{55}\sqrt[3]{\sinh^5 x}\,(11 + 5\sinh^2 x)$ **680.** $\frac{3}{55}\sqrt[3]{\mathrm{tgh}^5 x}\,(11 - 5\,\mathrm{tgh}^2 x)$
681. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sqrt{\mathrm{tgh}\, x}}{1 - \sqrt{\mathrm{tgh}\, x}}\right| - \mathrm{arctg}\,\sqrt{\mathrm{tgh}\, x}$ **682.** $\frac{\sinh 8x}{16} - \frac{\sinh 6x}{12}$ **683.** $\frac{\cosh 6x}{24} - \frac{\cosh 4x}{16} - \frac{\cosh 2x}{8}$

684. $\frac{x}{4} + \frac{\sinh 2x}{8} + \frac{\sinh 4x}{16} + \frac{\sinh 6x}{24}$ **685.** $\frac{\cosh^4 x}{4}$ **686.** $\frac{\sinh^5 x}{5} + \frac{\sinh^3 x}{3}$ **687.** $\frac{32}{5} \sinh^5 \frac{x}{2} + \frac{64}{7} \sinh^7 \frac{x}{2} + \frac{32}{9} \sinh^9 \frac{x}{2}$ **688.** $\frac{2}{5} \cosh^5 x - \cosh^3 x + \cosh x$ **689.** $\frac{\sinh 8x}{64} - \frac{x}{8}$ **690.** $\frac{\sinh^3 2x}{48} + \frac{\sinh 4x}{64} - \frac{x}{16}$ **691.** $\frac{\sinh^3 x}{24} - \frac{\sinh 2x}{32} + \frac{x}{16}$ **692.** $\frac{1}{a^2+b^2}(a \cosh ax \, \sin bx - b \sinh ax \, \cos bx)$ **693.** $\frac{1}{a^2+b^2}(a \cosh ax \, \cos bx + b \sinh ax \, \sin bx)$

I.7

696. $x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$ **697.** $e^x - \ln(1+e^x)$ **698.** $x + 2 \operatorname{arctg} e^x$ **699.** $-\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \ln|e^x - 1| + \frac{1}{6} \ln(e^x+2)$ **700.** $\operatorname{arctg}(2 \sinh x)$ **701.** $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} \ln|e^x - 1| - \frac{1}{6} \ln(e^x+2)$ **702.** $x - \frac{1}{2} \ln((1+e^x)\sqrt{1+e^{2x}}) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^x$ **703.** $x - \ln|1-e^x| + \frac{1}{1-e^x} + \frac{1}{2(1-e^x)^2} + \frac{1}{3(1-e^x)^3}$ **704.** $\frac{1}{4 \sinh 1}(e^{-x} + \cosh 1 (x - \ln(1+e^x \cosh 1)))$ **705.** $-x - 2e^{-\frac{x}{2}} + 2 \ln(1+e^{\frac{x}{2}})$ **706.** $x - 3 \ln((1+e^{\frac{x}{6}})\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}) - 3 \operatorname{arccotg} e^{\frac{x}{6}}$ **707.** $x + \frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}$ **708.** $2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}$ **709.** $-\ln(\frac{1}{2} + e^{-x} + \sqrt{1 + e^{-x} + e^{-2x}})$ **710.** $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}$ **711.** $\frac{\sqrt{1-e^x} - \sqrt{1+e^x}}{2e^x} + \frac{1}{4} \ln \frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}$ **713.** $e^{3x}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27})$ **714.** $-e^{-x}(x^2+2)$ **715.** $-e^{-x^2}(1+\frac{x^2}{2})$ **716.** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6)$ **717.** $2e^t(t^5 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120)$, kde $t = \sqrt{x}$ **719.** $-e^{-x} - \operatorname{li}(e^{-x})$ **720.** $e^4 \operatorname{li}(e^{2x-4}) - e^2 \operatorname{li}(e^{2x-2})$ **721.** $\frac{e^{2x}}{2}(x^2 + 3x + \frac{21}{2} - \frac{32}{x-2}) + 64e^4 \operatorname{li}(e^{2x-4})$ **722.** $a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0$

I.8

723. $\frac{1}{12} \ln \frac{x^2-2x+4}{(x+2)^2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}}$ **724.** $\frac{x^3}{3} - 4x + 8 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ **725.** $-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x$ **726.** $\frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2} - \frac{1}{16} \ln|\frac{1+x}{1-x}|$ **727.** $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{6}(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}})$ **728.** $\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{3}x}$ **729.** $\frac{\sqrt{3}}{12} \ln \frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{\sqrt{3}}{6}(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}})$ **730.** $\frac{1}{8}(\frac{x^4}{x^8+1} + \operatorname{arctg} x^4)$ **731.** $6\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 6 \ln(1 + \sqrt[6]{x})$ **732.** $\ln \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}$ **733.** $(\sqrt{x} - 2)\sqrt{1-x} - \arcsin \sqrt{x}$ **734.** $-\frac{1}{24}(8x^2 + 10x + 15)\sqrt{x(1-x)} + \frac{5}{8} \arcsin \sqrt{x}$ **735.** $-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}$ **736.** $\frac{1}{15}(3x^4 - 4x^2 + 8)\sqrt{1+x^2}$ **737.** $-\frac{4}{3}\sqrt{1 - x\sqrt{x}}$ **738.** $\frac{1}{2} \ln \frac{(1+t)^2}{1-t+t^2} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, kde $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$ **739.** $-\frac{1}{3} \ln|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3}|$ **740.** $\frac{1}{2} \arccos \frac{x^2+1}{\sqrt{2}x^2}$ **741.** $-\frac{2+x^2}{x} - \frac{2}{x}\sqrt{1-x^2} - 2 \arcsin x$ **742.** $-\frac{x^2+2x}{2} + \frac{5+2x}{4}\sqrt{x^2+x} + \frac{3 \ln|1+2x+2\sqrt{x^2+x}|}{8}$ **743.** $\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{\ln(x^2+x+1)}{x} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ **744.** $-\frac{\ln(x^2+x+1)}{x+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+x+1} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ **745.** $\frac{x^2}{2} \ln(4 + x^4) - x^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}$ **746.** $\frac{2x^2\sqrt{x}}{125}(25 \ln^2 x - 20 \ln x + 8)$ **747.** $-\frac{x}{2} + x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} \arcsin x$ **748.** $\frac{x}{\ln x}$ **749.** $\frac{x}{1+\ln x}$ **750.** $(1+\sqrt{1+x^2}) \ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ **751.** $-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3 \ln \sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln|\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}|$ **752.** $\frac{\sqrt{1-x^2}}{2} - \sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ **753.** $\frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ **754.** $-\ln \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ **755.** $a(x \ln|\frac{x-1}{x+1}| - \ln|x^2-1|) + \frac{a+b}{4} \ln^2|\frac{x-1}{x+1}|$ **756.** $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2}$ **757.** $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln|\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}x}|$ **758.** $(1+e^x) \ln(1+e^{-x}) + x$ **759.** x^x **760.** $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$ **761.** $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\cos 4x+7+4\sqrt{2}}{\cos 4x+7-4\sqrt{2}}$ **762.** $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}$ **763.** $-\ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$

764. $\frac{\sqrt2}{2}\ln\frac{\sqrt2+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}$ **765.** $\frac12\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt3}-\frac12\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$ **766.** $-\frac15(x^5-\frac45x^3+\frac{24}{125}x)\cos 5x+\frac15(x^4-\frac{12}{25}x^2+\frac{24}{625})\sin 5x$ **767.** $(21-10x^2+$ $+x^4)\sin x-(20x-4x^3)\cos x$ **768.** $\frac{e^{ax}}{2}(\frac1a+\frac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{a^2+4b^2})$ **769.** $\frac{e^{ax}}{4}(\frac{3(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}-$ $-\frac{a\sin 3bx-3b\cos 3bx}{a^2+9b^2})$ **770.** $\frac{e^{-2x}}{8}(\cos 2x-\sin 2x-2)$ **771.** $\frac{e^x}{2}(x\sin x-x\cos x+\cos x)$ **772.** $\frac{e^x}{2}(x^2\sin x+x^2\cos x-2x\sin x+\sin x-\cos x)$ **773.** $\frac{e^x}{2}(x-1-\frac x5(\cos 2x+2\sin 2x)+$ $+\frac{1}{25}(4\sin 2x-3\cos 2x))$ **774.** $\frac12(\sin x^2-x^2\cos x^2)$ **775.** $\ln|\sin x|-x\operatorname{cotg} x-\frac{x^2}{2}$ **776.** $x\operatorname{tg}\frac x2+\ln(1+\cos x)$ **777.** $\frac{x}{1+\cos x}-\operatorname{tg}\frac x2$ **778.** $\frac{\sin x}{x}$ **779.** $\frac{e^x}{\sin x}$ **780.** $e^x\frac{\sin x}{1+\cos x}$ **781.** $\ln x\,\sin\ln x+\cos\ln x$ **782.** $\sqrt{1+\cos^2 x}-\cos x\,\ln(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x})$

783. $x+\frac{2}{1+e^x}$ **784.** $-\frac{\operatorname{cotgh} 1}{4}(x-\ln(1+e^x\operatorname{cotgh} 1))-\frac{e^{-x}}{4\sinh 1}$ **785.** $-2^{-x}(\frac{x+1}{\ln 2}+$ $+\frac{1}{\ln^2 2})$ **786.** $2e^{\sqrt x}(x\sqrt x-3x+6\sqrt x-6)$ **787.** $\frac13(\sqrt{e^x+e^{2x}})^3-\frac18(1+e^{2x})\sqrt{e^x+e^{2x}}+$ $+\frac18\ln(\sqrt{1+e^x}+\sqrt{e^x})$ **788.** e^{e^x} **789.** $\frac{xe^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$ **790.** $\frac{e^x}{x+1}$ **791.** $(1-$ $-\frac4x)e^x$ **792.** $\frac{e^x}{1+x^2}$ **793.** $-\frac x2+\frac12\ln(x^2+2x+2)+\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)$ **794.** $\frac x4+\frac{x^3}{12}+$ $+\frac{(x^2+1)^2}{4}\operatorname{arccotg} x$ **795.** $-\frac x3+\frac13\ln(1+x)+\frac{2x\sqrt x}{3}\operatorname{arctg}\sqrt x$ **796.** $-\frac{3+x}{4}\sqrt{2x-x^2}+$ $+\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)$ **797.** $-\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+(x^2+3x-\frac{55}{8})\arccos(2x-$ $-3)$ **798.** $\frac12\sqrt{x-x^2}+(x-\frac12)\arcsin\sqrt x$ **799.** $(x-1)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}+\frac12\ln(x^2-2x+2)$ **800.** $-\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{2}\arccos\frac1x$ **801.** $2|1-\sqrt x|+(1+x)\arcsin\frac{2\sqrt x}{1+x}$ **802.** $\frac19(x^3-$ $-3x-3(\sqrt{1-x^2})^3\arccos x)$ **803.** $-\frac{x^2}{4}+\frac x2\sqrt{1-x^2}+\frac14\arcsin^2 x$ **804.** $ax\operatorname{arctg} x-$ $-\frac12 a\ln(x^2+1)-\frac{a-b}{2}\operatorname{arctg}^2 x$ **805.** $-\frac{x^2}{6}-(x-\frac{x^3}{3})\operatorname{arctg} x+\frac12\operatorname{arctg}^2 x+\frac23\ln(1+x^2)$ **806.** $-\frac{x}{4(1+x^2)}-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\operatorname{arctg} x$ **807.** $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ **808.** $-\frac{6x+x^3}{9}-$ $-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}\arccos x$ **809.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\frac12\arcsin^2 x+\ln|x|$ **810.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x-$ $-\ln\sqrt{1-x^2}$ **811.** $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac12\ln\frac{1+x}{1-x}$ **812.** $x-\operatorname{arctg} x+(\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac x2)(\ln(1+x^2)-1)$ **813.** $x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})$ **814.** $\frac12(x+\sqrt{1-x^2})e^{\arcsin x}$ **815.** $(x^2+$ $+1)e^{\operatorname{arctg} x}$ **816.** $\frac{(x+1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$ **817.** $\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$ **818.** $x-\ln(1+e^x)-2\sqrt{e^{-x}}-\operatorname{arctg}^2\sqrt{e^x}$ **819.** $-2\ln(\operatorname{tgh} x+\sqrt{1+\operatorname{tgh}^2 x})+\frac{\sqrt2}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\operatorname{tgh}^2 x}+\sqrt2\operatorname{tgh} x}{\sqrt{1+\operatorname{tgh}^2 x}-\sqrt2\operatorname{tgh} x}$ **820.** $-x+(\cosh x)\operatorname{arctg}\sinh x$

II.1

1. a) $s=\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$; $S=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$ b) $s=\frac1n\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac in}$; $S=\frac1n\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\frac in}$ c) $s=\frac{10}{n}\frac{2^{10}-1}{2^{\frac{10}{n}}-1}$; $S=\frac{10}{n}2^{\frac{10}{n}}\frac{2^{10}-1}{2^{\frac{10}{n}}-1}$ **2.** $\frac{25}{2}$ **3.** $s=(2^5-1)\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}$; $\frac{31}{5}$ **4.** $v_0T+g\frac{T^2}{2}$ **5.** 3 **6.** $\frac{a-1}{\ln a}$ **7.** 1 **8.** $\sin x$ **9.** $\frac1a-\frac1b$ **10.** $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$ **11.** $\ln\frac ba$ **25.** druhý **26.** první **27.** druhý **28.** druhý **29.** první

II.2

30. a) 0; b) $-\sin a^2$; c) $\sin b^2$ **31.** a) $2x\sqrt{1+x^4}$; b) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; c) $-\Big((\cos\pi\cos^3 x)\cdot$ $\cdot\sin x+(\cos\pi\sin^3 x)\cos x\Big)$ **32.** $f(x+b)-f(x+a)$ **34.** 1 **35.** $\frac{\pi^2}{4}$ **36.** 0 **37.** 1

II.3

43. $\frac{45}{4}$ **44.** 2 **45.** $\frac{\pi}{6}$ **46.** $\frac{\pi}{3}$ **47.** 1 **48.** 1 **49.** $\frac{1}{\sin\alpha}\Big(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big)$ **50.** $200\sqrt2$ **61.** $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ **62.** $\ln 2$ **63.** $\frac{\pi}{4}$ **64.** $\frac{2}{\pi}$ **65.** $\frac23(\sqrt{2^3}-1)$ **66.** $\frac1e$ **67.** 2

68. 4^3 **69.** $\frac{5}{6}\pi$ **70.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ **71.** $x+\frac{1}{2}$ **72.** $\frac{1}{\ln 2}$ **73.** a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{t}{2}$ **74.** a) $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}$, je-li $\alpha<0$; $\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}$, je-li $\alpha>1$; $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^3}{3}$, je-li $0\le\alpha\le 1$; b) $\frac{\pi}{2}$ je-li $|\alpha|\le 1$; $\frac{\pi}{2\alpha^2}$, je-li $|\alpha|>1$; c) 2, je-li $|\alpha|\le 1$; $\frac{2}{|\alpha|}$, je-li $|\alpha|>1$ **75.** $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$ **76.** π **77.** 4π **78.** $2(1-\frac{1}{e})$ **79.** 1 **80.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **87.** $\frac{1}{6}$ **88.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$ **89.** $\frac{\pi a^4}{16}$ **90.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$ **91.** $2-\frac{\pi}{2}$ **92.** $\frac{\pi^2}{4}$ **96.** $\int_0^1\Big(f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)\Big)\,dt+\int_{-1}^0\Big(f(2\pi+\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)\Big)\,dt$ **98.** $\frac{\pi}{8}\ln 2$ **100.** $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{3}}$ **101.** $\frac{1}{2}+e^{-\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{-2\pi n}}{1-e^{-\pi}}-\frac{1}{2}e^{-2\pi n}$ **102.** $\operatorname{arctg}\frac{32}{27}-2\pi$ **105.** 0 **106.** 0 **107.** $\frac{\pi}{2}$ **108.** 0 **109.** $\frac{\pi^2}{4}$ **110.** $6\sin\frac{\pi}{9}$ **111.** $2\sqrt{3}$ **112.** $\frac{1}{2}(e^4-1)$ **113.** $\frac{\pi}{16}$ **114.** $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$ **115.** $\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}+1$ **116.** $2(\sqrt{2}-1)$ **117.** $\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}+2\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{2}$ **118.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ **119.** $-\frac{468}{7}$ **120.** $\frac{\pi}{3}-\operatorname{arctg}\sqrt{8}$ **121.** $\frac{29}{270}$ **122.** $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$ **123.** $\frac{n^{n+1}}{n+1}\ln n-$ $-\frac{n^{n+1}-1}{(n+1)^2}$ **124.** $\frac{8191}{26}$ **125.** $\frac{\pi}{4}$ **126.** $\frac{3}{5}(e^{\pi}-1)$ **127.** $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ **128.** 0 pro n sudé, π pro n liché **129.** $(-1)^n\pi$ **130.** $I_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$ pro $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$; $I_{2k+1}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$ pro $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$ **131.** viz 130 **132.** $(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right)$ **133.** $(-1)^n\left(-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\right)$ **134.** $2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ **135.** $\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$ **136.** $\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}\right)$ **137.** $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ **138.** $\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$ **139.** $\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$ **140.** -1 **141.** $14-\ln 7!$ **142.** $\frac{30}{\pi}$ **143.** $-\frac{\pi^2}{4}$ **144.** $\ln n!$ **145.** $\frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}+1}$ **146.** $\frac{8}{3}$

III.1.1

4. $\frac{1}{2}$ **5.** $\frac{\pi}{4}$ **6.** diverguje **7.** $\frac{1}{3e^3}$ **8.** diverguje **9.** diverguje **10.** $\frac{2\pi}{\sqrt{31}}$ **11.** diverguje **12.** diverguje **13.** 1 **14.** $\frac{1}{\ln^2 2}$ **15.** diverguje **16.** π **17.** $\frac{\pi}{2}$ **18.** $\frac{1}{120}$ **19.** $-\frac{\pi}{6}$ **20.** $\frac{1}{5}\ln(1+\frac{2\sqrt{3}}{3})$ **21.** $\frac{\pi}{4}$ **22.** $2(1-\ln 2)$ **23.** $\frac{\ln 7}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{3})$ **24.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ **25.** $\frac{13\pi}{4}$ **26.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ **27.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$ **28.** $\frac{2}{3}$ **29.** 6 **30.** $\operatorname{arctg}2+\ln\frac{5}{4}$ **31.** $\frac{\pi}{2}-1$ **32.** $\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$ **33.** $\frac{b}{a^2+b^2}$ **34.** $\frac{a}{a^2+b^2}$ **35.** $\frac{2b^2}{a(a^2+4b^2)}$ **36.** $2\sqrt[4]{8}\,e^{-\frac{\pi}{8}}\frac{1}{1-e^{-\pi}}$ **37.** $n!$ **38.** $\frac{(2n-3)!!\pi a^{n-1}}{(2n-2)!!(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$ **40.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ **41.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ **42.** $\frac{\pi}{2|ab|}$ **43.** $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ **44.** $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

III.1.2

47. konverguje **48.** konverguje **49.** diverguje **50.** konverguje **51.** konverguje **52.** konverguje **53.** diverguje **54.** konverguje **55.** konverguje **56.** konverguje **57.** konverguje **58.** konverguje **59.** konverguje **60.** diverguje **61.** konverguje **62.** konverguje **63.** diverguje **64.** diverguje **65.** $\alpha>0$ **66.** $\alpha>1$ **67.** $\alpha>1$ **68.** $\alpha>1$ **69.** diverguje pro každé α **70.** $\alpha<0$ **71.** $\alpha<-2$ **72.** $\alpha>2$ **73.** $\alpha\ge 0$ **74.** $\alpha>0$ **75.** $\beta<-\frac{1}{2}$, α libovolné; $\beta=-\frac{1}{2}$, $\alpha<-1$ **76.** $\beta<-\frac{1}{3}$, α libovolné; $\beta=-\frac{1}{3}$, $\alpha<-1$ **77.** $\alpha>\max\{1,\beta\}$

III.1.3–4

82. konverguje relativně **83.** konverguje relativně **84.** konverguje relativně **85.** konverguje relativně **86.** konverguje relativně **87.** diverguje **88.** konverguje relativně **89.** konverguje relativně **90.** konverguje relativně **91.** konverguje relativně **92.** konverguje relativně **93.** konverguje relativně **94.** konverguje absolutně pro $\alpha<2$, konverguje relativně pro $2\le\alpha<3$ **95.** konverguje absolutně pro $\alpha<-1$, konverguje relativně pro $-1\le\alpha\le 0$ **96.** konverguje absolutně pro $\alpha>1$, konverguje relativně pro $\alpha \leq 1$ **97.** konverguje absolutně pro $\alpha < -1$, konverguje relativně pro $-1 \leq \alpha < 0$ **98.** konverguje absolutně pro $\alpha < -1$, konverguje relativně pro $-1 \leq \alpha < 0$ **99.** konverguje absolutně pro $\alpha < -1$, konverguje relativně pro $-1 \leq \leq \alpha < 0$ **100.** konverguje absolutně pro $\alpha > 1$, konverguje relativně pro $0 < \alpha \leq 1$ **101.** konverguje absolutně pro $\alpha > 2$, konverguje relativně pro $0 < \alpha \leq 2$ **102.** konverguje absolutně pro $\alpha > 2$, konverguje relativně pro $-1 < \alpha \leq 2$ **103.** konverguje absolutně pro $\alpha > 1$, konverguje relativně pro $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ **104.** konverguje absolutně pro $\alpha > 3$, konverguje relativně pro $0 < \alpha \leq 3$ **105.** konverguje absolutně pro $\alpha > 1$, konverguje relativně pro $-1 < \alpha \leq 1$ **106.** konverguje absolutně pro $\alpha > 1$, konverguje relativně pro $0 < \alpha \leq 1$ **107.** konverguje absolutně pro $\alpha < 0$, konverguje relativně pro $0 \leq \alpha < 1$

III.2.1

112. 2 **113.** diverguje **114.** diverguje **115.** $2\ln 3$ **116.** diverguje **117.** $\frac{\pi}{2}$ **118.** $\frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})$ **119.** $\frac{9\pi}{4}$ **120.** $\frac{\pi}{2}$ **121.** $\frac{\pi}{8}(b-a)(3b+a)$ **122.** -1 **123.** $\frac{1}{\ln 2}$ **124.** diverguje **125.** diverguje **126.** $-\frac{3}{2}$ **127.** 4 **128.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\pi + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$ **129.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ **130.** $\sqrt{2}$ **131.** diverguje **132.** $-\frac{2}{e}$ **133.** diverguje **134.** $\frac{1}{2}\pi^2$ **135.** $\frac{1}{8}\pi^2$ **136.** $\sqrt{2\pi}$ **137.** $2\sqrt{\pi}$ **138.** $\frac{7}{9}$ **139.** $\frac{5\pi}{3}$ **140.** $-\frac{\pi}{2}\ln 2$ **141.** $-\frac{1}{2}\pi^2\ln 2$ **142.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4n}$ **143.** $\frac{(n-1)!!}{n!!}$ pro n liché; $\frac{(n-1)!!}{n!!}\,\frac{\pi}{2}$ pro n sudé **144.** $\frac{(-1)^n n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$

III.2.2

147. konverguje **148.** konverguje **149.** konverguje **150.** diverguje **151.** diverguje **152.** konverguje **153.** konverguje **154.** konverguje **155.** diverguje **156.** diverguje **157.** konverguje **158.** konverguje **159.** diverguje **160.** konverguje **161.** konverguje **162.** konverguje **163.** konverguje **164.** diverguje **165.** konverguje **166.** diverguje **167.** konverguje **168.** $\alpha < 3$ **169.** $\alpha < 7$ **170.** $\alpha \leq \frac{1}{2}$ **171.** $\alpha = \frac{1}{2}$ **172.** $\alpha < 3$ **173.** $\alpha < 4$ **174.** $\alpha = 1$ **175.** $\alpha^2 = 2$ **176.** $\alpha > 0$ **177.** $\alpha < 1$ **178.** $\alpha < -2$ **179.** $\alpha \neq 0$ **180.** $-2 < \alpha < 1$ **181.** $\alpha < 2$ **182.** $\alpha < 4$ **183.** $\alpha < -\frac{2}{3}$ **184.** $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 2$ **185.** $\alpha < -1$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha > 2$ **186.** $\alpha > -1$, $\beta > -1$ **187.** $\alpha > -1$, $\beta > -1$ **188.** $\alpha > -1$, $\beta > -1$ **189.** $\alpha > -1$, $\beta > -2$ **190.** $\beta < 1$, α libovolné; $\beta = 1$, $\alpha < -1$ **191.** $\beta < 1$, $\alpha > 0$; $\beta > 1$, $0 < \alpha < 1$

III.2.3–4

195. konverguje relativně **196.** diverguje **197.** konverguje relativně **198.** konverguje relativně **199.** konverguje absolutně pro $\alpha > -1$, konverguje relativně pro $-2 < \alpha \leq \leq -1$ **200.** konverguje absolutně pro $\alpha > -1$, konverguje relativně pro $-2 < \alpha \leq -1$ **201.** konverguje absolutně pro $\alpha < 1$, konverguje relativně pro $1 \leq \alpha < \frac{3}{2}$ **202.** konverguje absolutně pro $\alpha > -1$, konverguje relativně pro $-3 < \alpha \leq -1$ **203.** konverguje absolutně pro $\alpha > 1$, konverguje relativně pro $0 < \alpha \leq 1$ **204.** konverguje absolutně pro $\alpha < 1$, konverguje relativně pro $1 \leq \alpha < 2$ **205.** konverguje absolutně pro $\alpha > > -1$, konverguje relativně pro $-2 < \alpha \leq -1$ **206.** konverguje absolutně pro $\alpha < 1$, konverguje relativně pro $1 \leq \alpha < 2$ **207.** konverguje absolutně pro $\alpha > 0$, konverguje relativně pro $-1 < \alpha \leq 0$ **208.** konverguje absolutně pro $\alpha > -2$, konverguje relativně pro $-3 < \alpha \le -2$ **209.** konverguje absolutně pro $\alpha > 1$, konverguje relativně pro $\alpha < -1$ **210.** konverguje absolutně pro $\alpha < 1$, diverguje pro $\alpha \ge 1$ **211.** konverguje relativně pro $\alpha > -1$, diverguje pro $\alpha \le -1$ **212.** konverguje absolutně pro $\alpha < 1$, $\beta < 1$, konverguje relativně pro $1 \le \alpha < 2$, $\beta < 1$

III.3

215. $\frac{3\pi}{4}$ **216.** $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$ **217.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$ **218.** $\frac{3\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}(3 + 2\sqrt{3})$ **219.** 0 **220.** 0 **221.** 0 **222.** $\frac{\pi}{4}$ **223.** $\alpha > 0$ **224.** $1 < \alpha < 2$ **225.** $1 < \alpha < 2$ **226.** $-\frac{9}{2} < \alpha < -\frac{3}{4}$ **227.** $\alpha > -1$ **228.** $2 < \alpha < 4$ **229.** $0 < \alpha < 2$ **230.** $\alpha > \frac{1}{2}$ **231.** $\alpha > \frac{1}{2}$ **232.** $\alpha > 1$, $\beta < 1$ **233.** $\alpha > -1$, $\beta - \alpha > 1$ **234.** $\min\{\alpha, \beta\} < 1$, $\max\{\alpha, \beta\} > 1$ **235.** $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta < -1$ **236.** $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta < -1$ **237.** $\alpha > -2$, $\beta - \alpha > 1$ **238.** $\beta - \alpha < 1$, $\beta \ge 0$ **239.** $\alpha < 0$, $\beta < \frac{1}{2}$ **240.** $\beta - \alpha > 1$, $\beta - 4\alpha < 0$ **241.** $\alpha + \beta < 1$, $\alpha > -4$ **242.** konverguje absolutně pro $-2 < \alpha < -1$, konverguje relativně pro $-1 \le \alpha < 0$ **243.** konverguje absolutně pro $0 < \alpha < 1$, konverguje relativně pro $1 \le \alpha < 2$ **244.** konverguje absolutně pro $-1 < \alpha < 0$, konverguje relativně pro $-2 < \alpha \le -1$ **245.** konverguje relativně pro $0 < \alpha < 2$ **246.** konverguje absolutně pro $-1 < \frac{\alpha+1}{\beta} < 0$, konverguje relativně pro $0 \le \frac{\alpha+1}{\beta} < 1$ **247.** konverguje absolutně pro $\alpha > -2$, $\alpha + 1 < \beta$, konverguje relativně pro $\alpha > -2$, $\alpha < \beta \le \alpha + 1$

IV.1

7. 2 **8.** $\ln \frac{a}{b}$ **9.** $1 - e^{-a}$ **10.** $a^2 \sinh \frac{x_0}{a}$ **11.** $\frac{125}{12}$ **12.** $\frac{1}{6}$ **13.** $\frac{16}{3}$ **14.** $1 + \frac{\pi^2}{8}$ **15.** $\pi - \frac{\pi^2}{4}$ **16.** $\sqrt{2} - 1$ **17.** $a + \frac{1-a}{\ln a}$ **18.** $\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$ **19.** $2a^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ **20.** $\frac{\pi}{2}$ **21.** $\frac{\pi}{2}$ **22.** $\frac{1}{3} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2}$ **23.** 9 **24.** $2\ln 2 - \frac{2}{e}$ **25.** $6\ln 2 - \frac{5}{2}$ **26.** $\frac{1}{10}$ **27.** $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ **28.** $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$ **29.** $a^2(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3})$ **30.** $5(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg} 3) + \frac{15}{2}\ln 2 - 7$ **31.** 4 **32.** $1 - e^{a^2}(1 + a^2)$ **33.** $18e^{-2} - 2$ **34.** $\frac{\pi}{6}$ **35.** $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{a^{1+\alpha}}{\alpha+1} + \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ **36.** $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ **37.** $\frac{1-\ln 2}{\ln 2}$ **38.** $\frac{45\ln 3-24}{\ln 9}$ **39.** $\sqrt{2} - 1$ **40.** $\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}$ **41.** $\frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}$ **42.** $12\ln 2 - 6\ln 3 + 1$ **43.** πab **44.** $\frac{88\sqrt{2}}{15}p^2$ **45.** $\frac{4p^3}{3}$ **46.** $3\pi a^2$ **47.** $\frac{4a^{\alpha+2}}{\alpha+2}$ **48.** $\frac{1}{2}$ **49.** $\frac{4a^2}{3}$ **50.** $\frac{3\pi a^2}{4}$ **51.** $\frac{\pi a^2}{8}$ **52.** $\frac{(\pi-2)a^2}{2}$ **53.** $\frac{8}{3}$ **54.** $\frac{\pi}{4}$ **55.** $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$ **56.** $\frac{8}{5}$ **57.** $\frac{9}{2}$ **59.** $\frac{8}{15}$ **60.** $3\pi a^2$ **61.** $a^2(\pi + \frac{4}{3}\pi^3)$ **62.** $6\pi a^2$ **63.** $\frac{3\pi a^2}{8}$ **64.** $\frac{3\pi c^4}{8ab}$ **65.** $\pi a^2(\frac{16}{\sqrt{3}} - 9)$ **66.** $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$ **67.** a^2 **68.** $\frac{3\pi a^2}{2}$ **69.** a) $\frac{\pi a^2}{4}$; b) $\frac{\pi a^2}{4}$ **70.** 11π **71.** $\frac{2\sqrt{3}a^2}{3}$ **72.** $\frac{a^2}{4}(\pi - 1)$ **73.** $\frac{3a^2}{2}$ **74.** $\sqrt{2}a^2\pi$ **75.** a^2 **76.** $\frac{\pi(a^2+b^2)}{2}$ **77.** $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$ **78.** a^2 **79.** $a^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ **80.** $\frac{1}{2}\,\frac{e^\pi+1}{e^\pi-1}$ **81.** πa^2 **82.** 1 **83.** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ **84.** $\frac{\pi}{2} - 1$ **85.** $\frac{4-\pi}{8}$ **86.** $\frac{2\pi}{n+2}$ **87.** $\frac{\pi}{4}$ **88.** $\frac{1}{\pi}$ **89.** $\frac{\pi a^2}{4}$ **90.** 4π **91.** $\frac{8}{3}$ **92.** 12π **93.** 2 **94.** $\frac{4+\pi}{2}$

IV.2

98. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$ **99.** $\frac{14}{3}$ **100.** $\arcsin\frac{3}{4}$ **101.** $\frac{134}{27}$ **102.** $\frac{25}{3}$ **103.** $\frac{1}{\sqrt{3}}(2 - \sqrt{x_0} - \sqrt{{x_0}^3})$ **104.** $\frac{\operatorname{sgn}\alpha}{2\sqrt{\alpha(\alpha-2)}}({x_0}^\alpha - {x_0}^{2-\alpha})$ **105.** $\frac{54}{5}$ **106.** $\alpha = \frac{k+1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \ne 0$, $k \ne -1$ **107.** $\sinh a$ **108.** $\sinh 2a$ **109.** $\sqrt{b^2 - 1} - \sqrt{a^2 - 1}$ **110.** $\ln\frac{\sinh b}{\sinh a}$ **112.** $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$ **113.** $6\sqrt{2} + {}$ ${} + \ln(3+2\sqrt{2})$ **114.** $4\Big(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\Big)$ **115.** $\sqrt{5}+4\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **116.** $4+\frac{1}{4}\ln 3$ **117.** $\frac{1}{4}(e^2+1)$ **118.** $2 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$ **119.** $x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{e^{2x_0} + 1} - \ln\frac{\sqrt{e^{2x_0}+1}+1}{\sqrt{2}+1}$ **120.** $3 + \ln 2$ **121.** $a\ln\frac{a+b}{a-b} - b$ **122.** $2(1+\ln\frac{3}{2})$ **123.** $\ln 3$ **124.** $\ln(2+\sqrt{3})$ **125.** $\ln(2+\sqrt{3})$ **126.** $\frac{\pi+1}{4}$ **127.** $1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(2+\sqrt{3})$ **128.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **129.** $2\sqrt{2}(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a})$ **130.** $\frac{7}{6}$ **131.** $2(e^{\frac{x_0}{2}} - 1)$ **132.** $2a\ln\frac{a}{a-x_0} - x_0$

133. $a\ln\frac{a}{x_0}$ **134.** $\sqrt{2}(5+4\ln 2)$ **135.** $6a$ **136.** $\frac{4}{ab}(a^3-b^3)$ **137.** $8a$ **138.** $2\pi^2 a$ **139.** $\frac{1}{2}\Big((\cosh 2t_0)^{\frac{3}{2}}-1\Big)$ **140.** $2a\Big(\cosh\frac{t_0}{2}\sqrt{\cosh t_0}-1\Big)-\sqrt{2}a\ln\frac{\sqrt{2}\cosh\frac{t_0}{2}+\sqrt{\cosh t_0}}{1+\sqrt{2}}$ **141.** $\frac{a\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}(e^{at_0}-1)$ **142.** $-a\ln\sin t_0$ **143.** $\frac{1}{4}\left(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})\right)$ **144.** $1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+$ $+\sqrt{2})$ **145.** $5a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\ln(2+\sqrt{3})\right)$ **146.** $\frac{(a^2\cos^2 t_0+b^2\sin^2 t_0)^{\frac{3}{2}}-a^3}{b^2-a^2}$ **147.** $\frac{\pi^3}{3}$ **148.** $48a$ **149.** 26 **150.** $y=\frac{16a}{9}$ **154.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ **155.** 8 **156.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **157.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$ **158.** $\frac{a\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}$ **159.** πa **160.** a) $\frac{3\pi a}{2}$; b) $\frac{16a}{3}$ **161.** a) $2a\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$; b) $\pi a\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}$, $k\in\mathbb{N}$ **162.** $8a$ **163.** $2a$ **164.** $a(2\pi-\operatorname{tgh}\pi)$ **165.** $2p(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$ **166.** $p(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$ **167.** a) $12\sqrt{3}a$; b) $a(7\sqrt{2}+3\ln(1+\sqrt{2}))$ **169.** t_0 **170.** $\frac{4+\ln 3}{2}$ **171.** $\frac{1}{2a}(r_2^2-r_1^2)$ **172.** $\frac{\pi}{2}(b-a)$

IV.3

177. πpa^2 **178.** $\frac{\pi a^3}{2}$ **179.** π **180.** $\frac{3\pi ab^2}{7}$ **181.** $\frac{\pi^2}{4}$ **182.** $\frac{\pi a^2}{2}\left(b+\frac{a}{2}\sinh\frac{2b}{a}\right)$ **183.** $\frac{\pi(1-e^{-2a}(1+2a))}{4}$ **184.** $\pi(2-\frac{5}{e})$ **185.** $\frac{\pi^3}{2}$ **186.** $\frac{\pi^3\sinh\alpha}{2\alpha(\pi^2+\alpha^2)}e^{(2n-1)\alpha}$ **187.** $\frac{\pi}{2}\ln 3$ **188.** $\frac{\pi(\pi+2)}{8a^3}$ **189.** $\pi(6-$ $-8\ln 2)$ **190.** $\frac{5\pi}{6}$ **191.** $\frac{\pi(\pi-2)}{4}$ **192.** 20π **193.** $\frac{\pi a^5}{20(\sqrt{p}+\sqrt{q})^4}$ **194.** $\pi\left(\frac{6}{\ln^2 2}-\frac{5}{2\ln 2}-4\right)$ **195.** $\frac{\pi^2}{2}$ **196.** $\frac{\pi e^{2\pi}}{5(e^{2\pi}-1)}$ **197.** $\frac{\pi^3}{4(1+\pi^2)}$ **198.** $\frac{4\pi ab^2}{3}$ **199.** $\frac{\pi b^2}{3a^2}h^2(h+3a)$ **200.** $\frac{2\pi b^2}{3a^2}h(h^2+3a^2)$ **201.** $\frac{\pi a^3}{6}(10-3\pi)$ **202.** $\frac{\pi a^3}{3}(24\ln 2-16)$ **203.** $\frac{\pi a^3}{24}(24\ln 4-31)$ **204.** $\frac{\pi a^3}{24}(35-24\ln 4)$ **205.** 4π **206.** 8π **207.** $\frac{\pi^2}{12}$ **208.** $\frac{\pi^2}{24}(4\pi^2-15)$ **209.** $\frac{12\pi pq}{5}\sqrt[3]{pq^2}$ **210.** $\frac{\pi pqa^2}{p+q}$ **211.** $\frac{\pi pqa^2}{q-p}$ **212.** $\pi a^3(6-8\ln 2)$ **213.** $\frac{2\pi ab^2}{3}\left((1+\frac{h^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}-1\right)$ **214.** $\frac{17}{240}\frac{\pi a^5}{4p^2}$ **215.** 70π **216.** $2\pi^2 r^2 a$ **217.** $36\pi^2$ **218.** $\frac{8\pi a^3}{3}$ **219.** $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$ **220.** $\frac{\pi a^3}{3}(6\ln 2-4)$ **221.** $\frac{\pi a^3}{81}(4\ln 4-3)$ **222.** $\frac{\pi a^3}{3}(17-24\ln 2)$ **224.** $2\pi k^2(b-a)$ **225.** $\pi(e-1)$ **226.** $\pi\ln 2$ **227.** $\pi^2(8n+2)$ **228.** $\frac{4}{3}\frac{\pi a^3 b}{p}$ **229.** $2\pi a^2 b$ **230.** $\pi(1-\sin 1)$ **231.** $\frac{\pi}{4}(\pi^2-8)$ **232.** $4\pi^3$ **233.** $\frac{25\pi^3+8\pi^2-8\pi}{4}$ **234.** $\frac{\pi a^3(50-15\pi)}{3}$ **235.** $\frac{128\pi}{15}$ **236.** π **237.** a) $\frac{16\pi}{15}$; b) $\frac{8\pi}{3}$ **238.** a) $\frac{\pi}{30}(b-a)^5$; b) $\frac{\pi}{6}(b+$ $+a)(b-a)^3$ **239.** a) $\frac{\pi^2}{2}$; b) $2\pi^2$ **240.** a) $\frac{\pi}{4}(\pi^2-8)$; b) $\frac{\pi^2}{4}$ **241.** a) $\frac{\pi a^3}{8}(\pi+2)$; b) $\pi a^3\ln 2$ **242.** a) $\frac{\pi^2 a^3}{4}$; b) $\pi a^3(\ln 2-\frac{1}{2})$ **243.** a) $4\pi(44-27\ln 3)$; b) $\frac{4\pi}{3}(27-$ $-5\sqrt{3}\pi)$ **244.** a) $\frac{2\pi a^5}{5p^2}$; b) $\frac{4\pi a^4}{3p}$ **245.** a) $\frac{32}{15}\pi p^3$; b) $\frac{4}{3}\pi p^3$ **246.** a) $4\pi(2+9\ln 3)$; b) $3\pi(2\ln 3-1)\ln 3$ **247.** a) $\frac{\pi^3}{2}+\frac{3\pi^2}{8}$; b) $\frac{\pi^3}{2}$ **248.** a) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; b) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ **249.** a) $\frac{32}{105}\pi ab^2$; b) $\frac{32}{105}\pi a^2 b$ **250.** $\frac{2\pi}{5}(1+5\ln 2)$ **251.** $\frac{13}{30}\pi$ **252.** $\frac{433}{15}\pi$ **253.** a) $\pi^3-4\pi$; b) π^2 **254.** $\frac{3\pi^2}{8\sqrt{2}}$ **255.** a) $\frac{272}{15}\pi p^3$; b) $\frac{45}{4}\pi p^3$; c) $\frac{64\sqrt{2}}{15}\pi p^3$ **256.** $\frac{2\pi a^3}{3}(9\sqrt{3}-4\pi)$ **257.** 1) $\frac{\pi a^3}{12}(16-3\sqrt{3})$; 2) $\frac{\pi a^3}{3}(2\pi-3\sqrt{3})$ **258.** $\alpha=\frac{3}{2}$ **259.** $\frac{\pi r^2 h}{2}$ **260.** $\frac{\pi hD^2}{8}$ **261.** $\frac{\pi hD^2}{8}$ **262.** $\frac{\pi r^2(H+h)}{2}$ **263.** $2\pi r^3(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha-\frac{1}{3}\sin^3\alpha)$ **264.** $\frac{16}{15}\pi ah^2$ **265.** $\frac{\pi h(8D^2+4Dd+3d^2)}{60}$ **266.** $\frac{71}{210}\pi a^3$ **267.** $\frac{2\sqrt{5}}{75}\pi a^3$ **269.** 1) $\frac{4\pi}{15}\frac{p^3k^5}{\sqrt{1+k^2}}$ **270.** $16\pi^2$ **271.** a) $\frac{92\sqrt{2}\pi}{35a^3}$; b) $\frac{5\pi}{4a^3}$ **272.** a) $\frac{6\pi}{7}$; b) $\frac{3\pi}{4}$ **273.** a) $\frac{16\pi a^3}{15}$; b) $\frac{\pi^2 a^3}{2}$ **274.** a) $5\pi^2 a^3$; b) $6\pi^3 a^3$; c) $\frac{\pi a^3(9\pi^2-16)}{6}$; d) $7\pi^2 a^3$ **275.** a) $\frac{32}{105}\pi ab^2$; b) $\frac{32}{105}\pi a^2 b$; c) $\frac{3}{4}\pi^2 a^2 b$ **276.** $\frac{26\sqrt{2}+16}{105}\pi a^3$ **277.** $\frac{116}{105}\pi$ **278.** a) $\frac{8\pi a^3(3\ln 2-2)}{3}$; b) $\frac{2\pi a^3(10-3\pi)}{3}$ **279.** a) $\frac{\pi a^3(24\ln 4-1)}{24}$; b) $\frac{2}{3}\pi^2 a^3$ **280.** $\frac{1}{25}$ **281.** 1a) $\frac{64\pi}{35}$; 1b) $\frac{64\pi}{105}$; 2a) $\frac{\pi a^3(6\ln 2-4)}{3}$; 2b) $\frac{4\pi a^3}{3}$ **282.** $\frac{2\pi^2 a^3}{3}(\pi^2-6)$ **283.** $\frac{2\pi}{3}$ **284.** $\frac{4\pi a^3}{21}$ **285.** $2\pi^2 a^3$ **286.** $\frac{\pi a^3}{15}$ **287.** $\frac{64}{105}\pi a^3$ **288.** $\frac{2\pi a^3}{3(9k^2+1)}(e^{3k\pi}+1)e^{6k\pi n}$ **289.** $\frac{\pi a^3}{24}$ **290.** $\frac{3\pi a^3}{8}$ **291.** $\frac{8\pi a^3}{3}$ **292.** $\pi a^3\Big(\frac{51}{4}-16\ln 2\Big)$

293. $\frac{\pi p^3}{3}\frac{2+\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$ **294.** $\frac{\pi a^3(3\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2)}{12}$ **295.** $\frac{\pi^2 a^3}{4}$ **296.** $\frac{16\sqrt{3}}{9}\pi^2 a^3$ **297.** $\frac{2\pi a^3}{9}\left(9\ln\frac{3}{2}-2\right)$ **298.** $\frac{\pi^2 a^3}{\sqrt{2}}$ **299.** $\frac{\pi(a+l)^4}{6a}$ **300.** $\frac{\pi(a-l)^4}{6a}$ **301.** $\frac{4\pi l(l^2+a^2)}{3}$ **302.** $\frac{4\pi a^3}{15}$ **303.** $\frac{32\sqrt{2}}{105}\pi a^3$ **304.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$ **305.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$ **306.** $\frac{\pi a^3(16+5\pi)}{4}$ **307.** $\frac{\pi a^3(3\pi-8)}{3}$ **308.** $\frac{4\pi p^3}{15}$ **309.** $\frac{\sqrt{2}\pi^2 a^3}{8}$ **310.** 1) $\pi a^3(51-$ $-32\ln 4)$; 2) $\frac{4\pi a^3(6\ln(2+\sqrt{3})+3\sqrt{3}-4\pi)}{3}$ **311.** $\frac{13\pi^2 a^3}{4}$ **312.** a) $\frac{\sqrt{2}\pi a^3(3\ln(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2})}{24}$; b) $\frac{\sqrt{2}\pi^2 a^3}{8}$ **313.** $\frac{2\pi a^3}{3}$ **314.** $\frac{2\pi a^3}{3}$ **315.** $\frac{4\pi a^3}{21}$ **316.** $2\pi a^3(\frac{7}{3}-\ln 2)$ **317.** $\frac{\pi^2 a^3}{16}$ **318.** $\frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}$ **319.** $\frac{8\pi a^3}{15}$ **320.** $\frac{4\pi a^3}{105}(16\sqrt{2}-9)$ **321.** $\frac{8\pi a^3}{105}$ **322.** a) $\frac{\pi a^3}{4}\left(\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right)$; b) $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$; c) $\frac{\pi^2 a^3}{4}$

IV.4

328. $\frac{98\pi}{3}$ **329.** $\frac{\pi(10^{\frac{3}{2}}-1)}{27}$ **330.** $\pi\left(\sqrt{2}-e^{-a}\sqrt{1+e^{-2a}}-\ln\frac{e^{-a}+\sqrt{1+e^{-2a}}}{1+\sqrt{2}}\right)$ **331.** $2\pi a\left(b+\frac{a}{2}\sinh\frac{2b}{a}\right)$ **332.** $2\pi\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$ **333.** $2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}}{2b}$ **334.** $\frac{\pi a^2}{8}\Big(3\ln(1+\sqrt{2})+$ $+7\sqrt{2}\Big)$ **335.** $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ **336.** $\frac{\pi}{18}\left(7\sqrt{2}+3\ln(1+\sqrt{2})\right)$ **337.** $\pi\Big(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{a^4+1}}{a^2}+$ $+\ln\frac{\sqrt{a^4+1}+a^2}{\sqrt{2}+1}\Big)$ **338.** $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}-2}\right)$ **339.** $\frac{\pi(16\ln 3-9\ln 2-5)}{6}$ **340.** $\frac{\pi}{8}(\sinh 4-4e^{-2})$ **341.** $\frac{\pi}{144}\left(185+144\ln\frac{3}{2}\right)$ **342.** $\frac{\pi(20+9\ln 3)}{9}$ **343.** $\frac{\pi(11\sqrt{2}+7\ln(1+\sqrt{2}))}{8}$ **344.** $\frac{\pi a^2(11-9\sqrt{3}+2\pi(2\sqrt{3}-1))}{6}$ **345.** $\frac{56\pi}{3}$ **346.** $\frac{62\pi}{3}$ **347.** $\frac{\pi}{3}(e^3+3e-4)$ **348.** $2\pi a(a-b)$ **349.** $\pi\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$ **350.** $\frac{2\pi}{3p}\left(\left(p^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}-p^3\right)$ **351.** $2\pi a\left(a+b\sinh\frac{b}{a}-a\cosh\frac{b}{a}\right)$ **352.** $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$ **353.** $\frac{4\pi}{3}$ **354.** $2\pi a^2$ **356.** $2\pi a^2(\frac{20}{9}-\ln 3)$ **357.** $2\pi p^2\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$ **358.** $\frac{\pi R}{6h^2}\left(\left(4h^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}-R^3\right)$ **359.** $\frac{5}{128\sqrt[3]{10}}\left(14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})\right)$ **360.** $\frac{4\sqrt{2}\pi}{5}e^{(4k+1)\pi}\cosh\pi$ **361.** $\frac{128}{5}\pi a^2$ **362.** $4\pi a(a-y_0)$ **363.** $59{,}2\pi$ **364.** $\frac{15\pi}{8}(4+\ln 5)$ **365.** 4π **366.** a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{10\sqrt{2}\pi}{3}$ **367.** a) $\frac{4\pi a^2}{3}$; b) $\frac{2\pi a^2}{3}(3\pi-$ $-4)$ **368.** a) $9\pi^2a^2$; b) $24\pi a^2$ **369.** a) $6\pi^2a^2$; b) $3\pi a^2(\pi^2-4)$ **370.** a) $\frac{64\pi a^2}{3}$; b) $16\pi^2a^2$; c) $\frac{32\pi a^2}{3}$; d) $\frac{8\pi a^2(3\pi-4)}{3}$; e) $\frac{16\pi a^2(2\sqrt{2}-1)}{3}$ **371.** a) $\frac{12\pi a^2}{5}$; b) $12\pi a^2$ **372.** a) 12π; b) $\frac{184\sqrt{6}\pi}{5}$; c) $\frac{4\pi}{5}(32\sqrt{3}+\sqrt{6})$ **373.** a) $3\pi a^2$; b) $\frac{96\sqrt{3}}{5}\pi a^2$ **374.** $4\pi^2 ab$ **375.** a) $8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+$ $+\sqrt{3})$; b) $2\pi+\frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}}$ **376.** a) π; b) $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$ **377.** $\frac{5\pi}{32}(4+\ln 5)$ **378.** a) $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$; b) $2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left(\frac{a(1+\varepsilon)}{b}\right)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ **379.** a) $\pi ab\left(\lambda\sqrt{\lambda^2\varepsilon^2-1}-\frac{b}{a}-\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\lambda\varepsilon+\sqrt{\lambda^2\varepsilon^2-1}}{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)$; b) $\frac{2\pi a^2}{\varepsilon}\left(\varepsilon\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{\lambda^2\varepsilon^2-1}+(\varepsilon^2-1)\ln\frac{\varepsilon\sqrt{\lambda^2-1}+\sqrt{\lambda^2\varepsilon^2-1}}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ **380.** a) $\frac{3\pi a^2}{5}(4\sqrt{2}-$ $-1)$; b) $6\pi a^2\sqrt{2}$ **381.** 48π **382.** $\frac{2\pi}{3}(3\pi-4)$ **383.** a) $3\pi a^2$; b) $\frac{56\sqrt{3}}{5}\pi a^2$ **384.** $a=0$; $S_{min}=4\pi\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$ **385.** 1) $\frac{16\pi a^2}{3}\left(3k-4+(4-2k)^{\frac{3}{2}}\right)$; 2) $k=\frac{3}{2}$, $S_{min}=8\pi a^2$ **386.** $4\pi R^2(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)$ **387.** 1) $4\pi R^2(2\sin\beta-\sin\alpha-(2\beta-\alpha)\cos\beta)$; 2) $\beta=\frac{\alpha}{2}$, $S_{min}=16\pi R^2(\sin\frac{\alpha}{2})\sin^2\frac{\alpha}{4}$ **388.** $\frac{\pi p^2}{12\sqrt{5}}\left(7\sqrt{2}-8+3\ln(1+\sqrt{2})\right)$ **389.** $4\pi^2a^2$ **390.** $2\pi(2-$ $-\sqrt{2})$ **391.** $4\pi a^2$ **392.** 1) $4\pi a^2\left(1+\frac{2b^2}{3a^2}-\frac{b^4}{15a^4}\right)$; 2) $\frac{4\pi b^2}{15}$ **393.** a) $\frac{32\pi a^2}{5}$; b) $\frac{96\pi a^2}{5}$; c) $\frac{84\pi a^2}{5}$ **394.** a) $4\pi a^2(2-\sqrt{2})$; b) $4\sqrt{2}\pi a^2$; c) $8\pi a^2$

Literatura

[1] Fichtengol'c, G. M.: *Kurs diferenciálního a integrálního počtu II.* Fizmatgiz, Moskva, 1962 (rusky).

[2] Děmidovič, B. P.: *Sbírka úloh a příkladů z matematické analýzy.* Moskva, 1961 (rusky).

[3] Kudravcev, L. D. a kol.: *Sbírka příkladů z matematické analýzy II.* Moskva, 1986 (rusky).

[4] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užité matematiky.* Prometheus, Praha, 1995.

[5] Kojecká, J.: *Řešené příklady z MA II.* PřF UP, Olomouc, 1989, skripta.

[6] Novák, V.: *Integrální počet v* $\mathbb{R}$. Brno, 1986, skripta.

[7] Brabec, J., Martan, F., Rozenský, Z.: *Matematická analýza I.* SNTL, Praha, 1989.

[8] Nagy, J., Nováková, E., Vacek, M.: *Integrální počet.* SNTL, Praha, 1984.

[9] Jarník, V.: *Integrální počet I.* Academia, Praha, 1974.

[10] Vanžura, J.: *Primitivní funkce, Riemannův integrál a jeho aplikace.* UP, Olomouc, 1990, skripta.

[11] Kopáček, J.: *Matematika pro fyziky I.* MFF UK, Praha, 1977, skripta.