Signály a informace

Přednáška č.11

Praktický návrh filtrů FIR

Připomenutí předchozí přednášky

- Frekvenční charakteristiky jsou důležité pro popis činnosti mnoha číslicových systémů.
- Udávají závislost modulu a fáze přenosové funkce na frekvenci.
- Lze je zjistit buď postupným měřením na jednotlivých frekvencích nebo odvodit z popisu systému.
- Výpočet spočívá v dosazení konkrétních hodnot frekvencí do vztahu odvozeného z přenosové funkce zvlášť pro modul a fázi.
- V MATLABU lze tento výpočet získat spolu s grafem prostřednictvím funkce freqz.

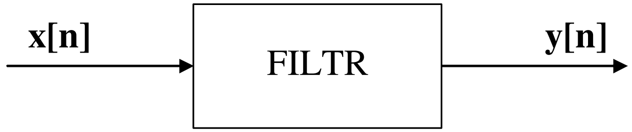
Filtry

Systémy upravující signál požadovaným způsobem

- Např. typ DP, HP, PP, PZ, zpožďovač, atd.
- Zasahují vždy do časového i frekvenčního průběhu signálu (zásah pouze do časové nebo pouze do frekvenční charakteristiky není možný).
- U spojitých signálů je lze realizovat obvodově (s pas. součástkami RLC nebo s operačními zesilovači).
- U číslicových signálů pomocí speciálních číslicových obvodů a signálových procesorů (DSP – digital signal processor) či čistě programově na běžné výp. technice.
- Návrh číslicového filtru spočívá v navržení jeho impulzní odezvy, případně přenosové funkce (mezi nimi existuje jednoznačný vztah).

Lineární filtry

Číslicové LTI systémy



4 základní popisy činnosti filtru:

Časový popis pomocí diferenční rovnice:

$$y[n]+A_1 y[n-1]\cdots A_N y[n-N]=B_0 x[n]+B_1 x[n-1]\cdots B_M x[n-M]$$

Časový popis pomocí impulzní odezvy:

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Systémový popis pomocí přenosové funkce:

$$H(z)=\frac{B_0+B_1 z^{-1}\cdots B_M z^{-M}}{1+A_1 z^{-1}\cdots A_N z^{-N}}$$

Frekvenční přenosová charakteristika (za z dosazeno $e^{j2\pi F}$)

$$H(F)=\frac{B_0+B_1 e^{-j2\pi F}\cdots B_M e^{-j2\pi FM}}{1+A_1 e^{-j2\pi F}\cdots A_N e^{-j2\pi FN}}$$

Vztahy mezi jednotlivými popisy

V časové doméně je klíčový popis pomocí impulzní odezvy:

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

Ve frekvenční doméně pak popis pomocí Fourier. transf.

$$Y(F) = H(F)X(F)$$

kde *Y(F)* je DFT výstupního signálu

X(F) je DFT vstupního signálu

H(F) je DFT impulzní odezvy sytému a zároveň

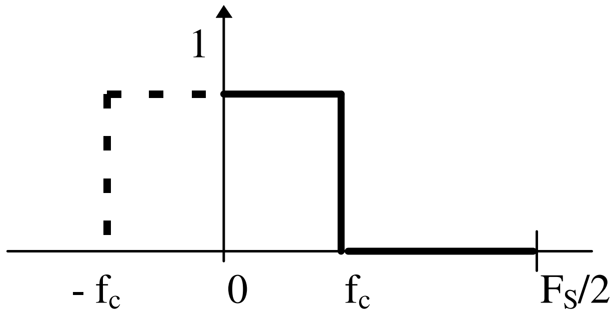
$$H(F) = \frac{B_0 + B_1 e^{-j2\pi F} \cdots B_M e^{-j2\pi FM}}{1 + A_1 e^{-j2\pi F} \cdots A_N e^{-j2\pi FN}}$$

Platí:

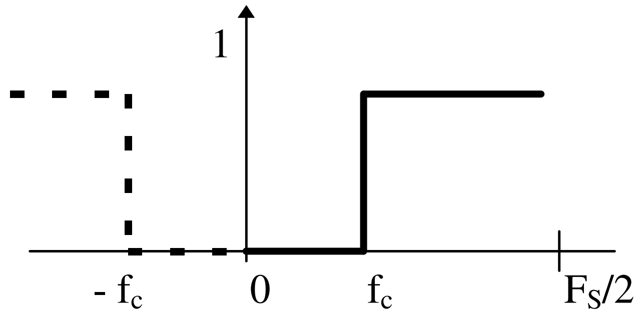
1. Frekv. charakteristika je Fourier. transf. impulzní odezvy
2. <u>Konvoluce</u> v čase se transformuje na <u>součin</u> ve frekvencích

Ideální filtry

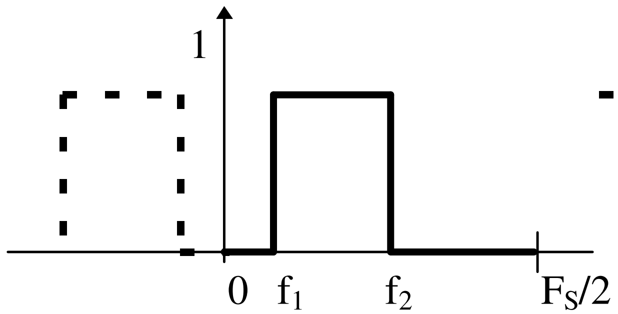
Základní typy podle frekvenční charakteristiky



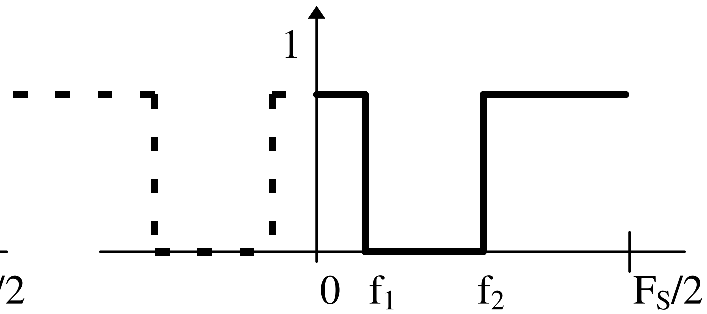
Dolní propust (DP)
Lowpass (LP)



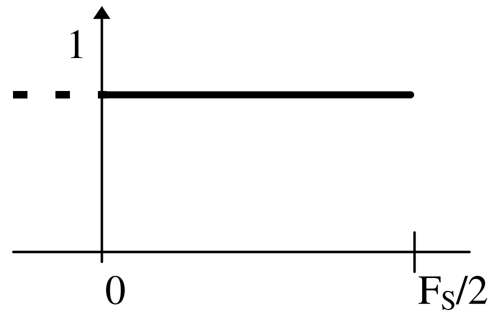
Horní propust (DP)
Highpass (HP)



Pásmová propust (PP)
Bandpass (BP)



Pásmová zádrž(PZ)
Bandstop (BS)



Fázový posouvač (FP)
Allpass (AP)

Filtry typu FIR

FIR (Finite Impulse Reponse) – f. s konečnou imp. odezvou

Časový popis pomocí diferenční rovnice:

$$y[n] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M]$$

Časový popis pomocí impulzní odezvy:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k] x[n-k]$$

Popis pomocí přenosové funkce a frekvenční charakteristiky

$$H(z) = B_0 + B_1 z^{-1} \cdots B_M z^{-M} \qquad H(F) = B_0 + B_1 e^{-j2\pi F} \cdots B_M e^{-j2\pi FM}$$

$$\text{platí že} \qquad B_k = h[k]$$

IIR (Infinite Impulse Reponse) – s nekonečnou imp. odezvou

platí pro ně obecné vztahy uvedené na předchozí stránce

Příklady metod návrhu filtru FIR (1)

Metoda vzorkování frekvenční charakteristiky

Princip: Frekvenční charakteristika je Fourierovým obrazem impulzní odezvy a tedy naopak **impulzní odezva je inverzním obrazem frekvenční charakteristiky.**

Princip použití:

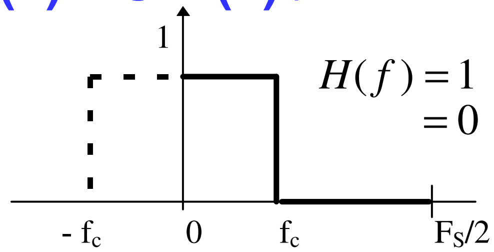
1. V obrazu dvoustranného spektra si stanovíme průběh frekvenční charakteristiky (modulové i fázové).
2. Charakteristiku navzorkujeme ve frekv. pásmu –Fs/2 až Fs/2 vhodným počtem bodů N (nejlépe mocnina 2).
3. Provedeme inverzní DFT, kterou získáme impulzní odezvu o N koeficientech. (Koeficienty jsou obecně komplexní).

Příklady metod návrhu filtru FIR (2)

Metoda váhových oken

Princip: Frekvenční charakteristiky ideálních filtrů jsou tvořeny obdélníkovými funkcemi a tedy **impulzní odezva je inverzním obrazem obdélníkové funkce, která je založena na funkci sinc (x) = sin (x) / x**

Postup při použití (příklad DP):



$$H(f) = 1 \quad \text{pro} \quad f_c > f$$
$$= 0 \quad \text{pro} \quad f_c < f < F_S/2$$

1. vymezení frekvenčního pásma
2. převedení na normalizovanou (číslicovou) frekvenci $F_c = f_c / F_S$
3. získání imp. odezvy pomocí IDFT $h(n) = IDFT(H(F)) = 2F_c \,\mathrm{sinc}(2nF_c)$
4. vybrání konečného počtu N vzorků symetricky rozložených kolem 0
$$-\tfrac{1}{2}(N-1) \leq n \leq \tfrac{1}{2}(N-1)$$
5. násobení vhodnou okénkovací funkcí kvůli potlačení zvlnění
$$h(n) = h(n).w(n)$$
6. posunutí impulzní odezvy o (N-1)/2 vzorků doprava, abychom dostali kauzální filtr $h(n) = h(n-(N-1)/2))$

Příklady metod návrhu filtru FIR (3)

Metoda váhových oken - příklad

Zadání: Navrhnout DP s pásmem 0 až 5 kHz a vzorkovací frekvencí 20 kHz.

1. **vymezení frekvenčního pásma** $f_c = 5kHz$

2. **převedení na normalizovanou frekvenci** $F_c = 5/20 = 0{,}25$

3.+ 4. **získání imp. odezvy pomocí IDFT** h(n) = 0,5 sinc (0,5 n),
zvolíme např. N = 9, tj, -4 < n < 4
dosazením h(n) = (0, -0.11, 0, 0.32, 0.5, 0.32, 0, -0.11, 0)

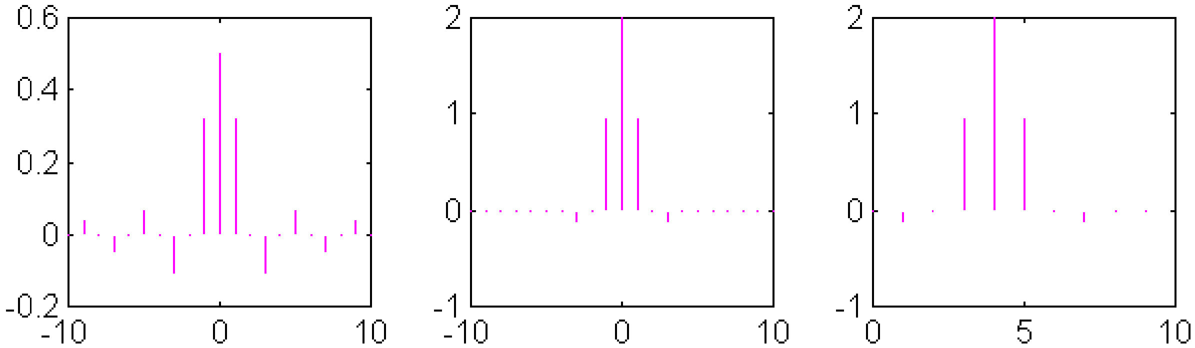
5. **vážení okénkovací funkcí – zvolíme např. trojúhelníkovou**
w(n) = (0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0)/4
h(n) = h(n).w(n) = (0, -0.03, 0, 0.24, 0.5, 0.24, 0, -0.03, 0)

6. **posunutí impulzní odezvy o (N-1)/2 vzorků doprava**
$H(z) = -0.03\,z^{-1} + 0.24\,z^{-3} + 0.5\,z^{-4} + 0.24\,z^{-5} - 0.03\,z^{-7}$
vektor koeficientů B [0 -0.03 0 0.24 0.5 0.24 0 -0.03 0]

7. **Použití v Matlabu** y = filter (B, 1, x)

Příklady metod návrhu filtru FIR (4)

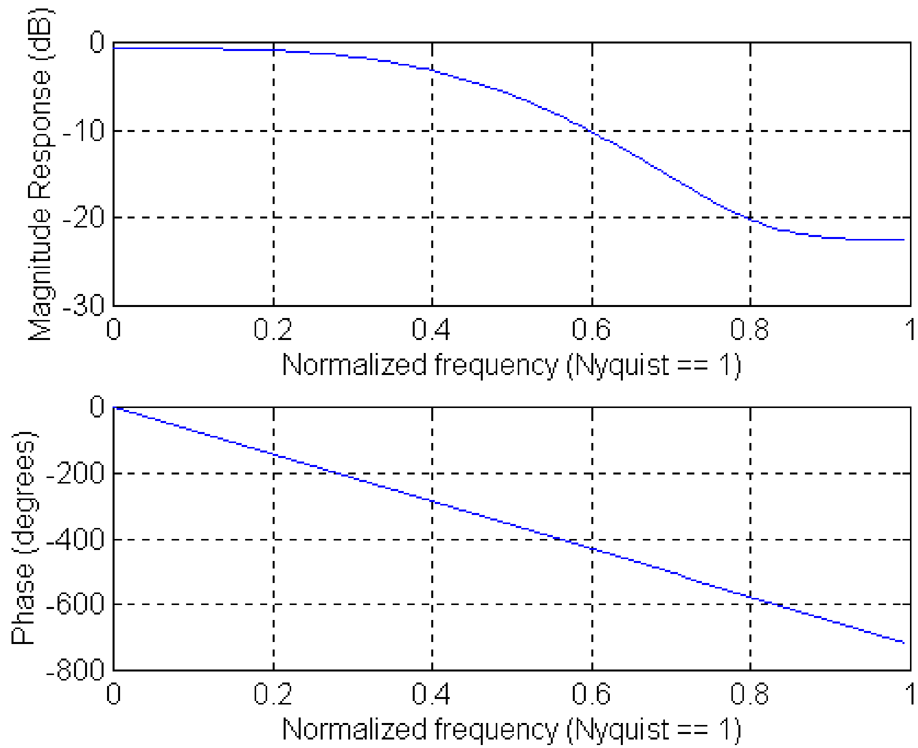
Metoda váhových oken – ilustrace k příkladu



a) impulzní odezva z funkce h(n) = 0.5 sinc (0.5n),

b) po vynásobení trojúhelníkovým oknem,

c) posunutí kvůli splnění podmínky kauzality.



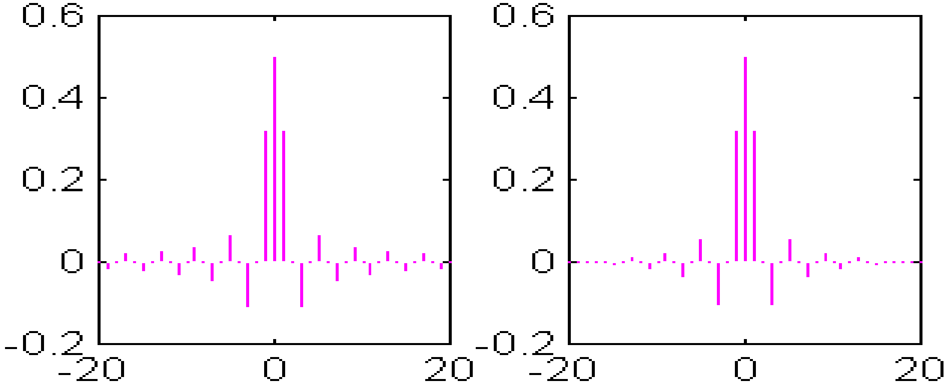
vykreslení přenosové funkce navrženého filtru

freqz (b,a,M) M je počet bodů pro vykreslení charakteristiky

Pozn. Na ose x odpovídá Fs/2 = 1, tedy požadované frekvenci 5 kHz odpovídá x = 0,5

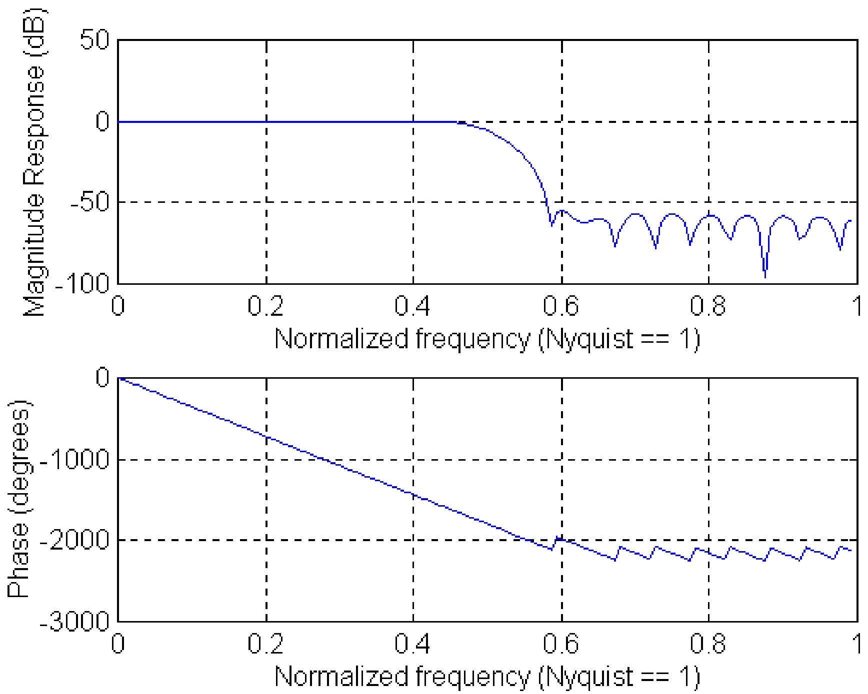
Příklady metod návrhu filtru FIR (5)

Metoda váhových oken – stejné zadání, N=41, hamming



impulzní odezva z funkce
h(n) = 0.5 sinc (0.5n),
spočítána pro 41 bodů

po vynásobení hammingovým oknem,



Můžeme si všimnout, že

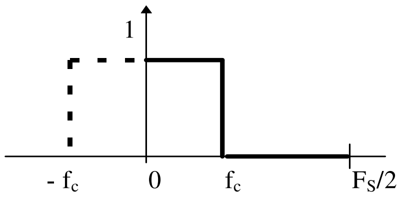
a) zvýšením délky filtru se zvýšila strmost filtru a odstup mezi propustným a nepropustným pásmem (cca -50dB)

b) v nepropustném pásmu dochází ke zvlnění v amplitudovém spektru,

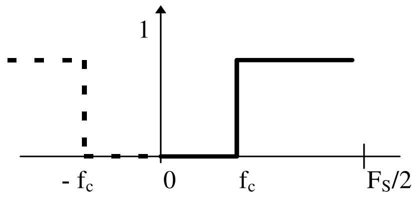
c) protože N je velké, filtr bude mít též velké zpoždění.

Příklady metod návrhu filtru FIR (6)

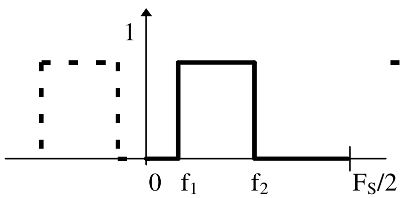
Metoda váhových oken – ostatní typy filtrů



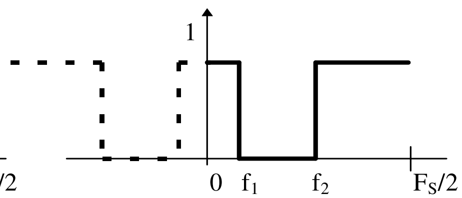
Dolní propust (DP)
Lowpass (LP)



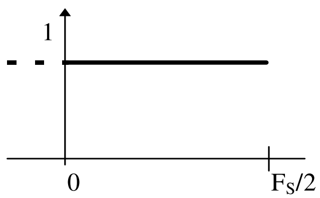
Horní propust (DP)
Highpass (HP)



Pásmová propust (PP)
Bandpass (BP)



Pásmová zádrž(PZ)
Bandstop (BS)



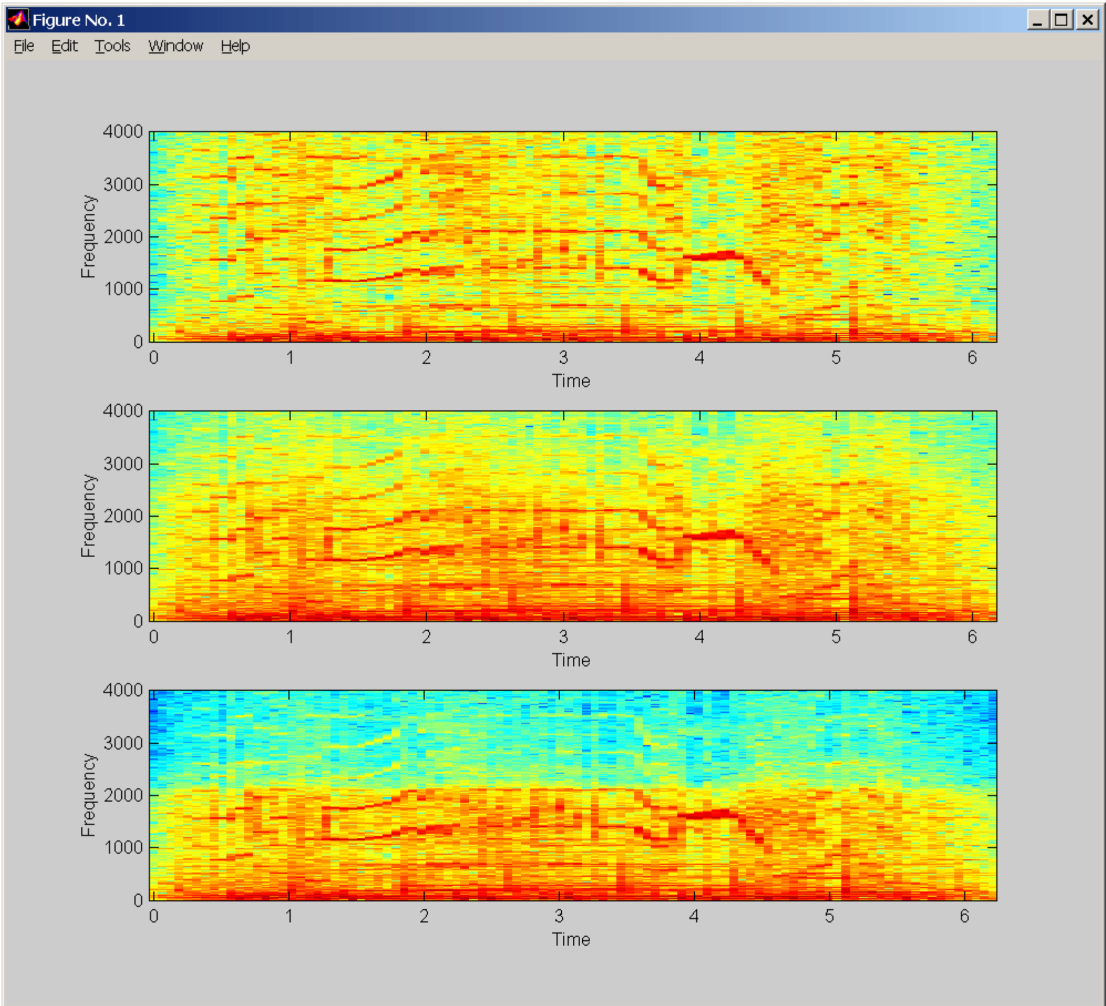
Fázový posouvač (FP)
Allpass (AP)

Všechny uvedené typy filtrů lze vyjádřit pomocí **funkce obdélníku** (jednoho nebo dvou) a na základě toho provést příslušnou transformaci

typ	přenosová funkce	impulsní odezva
DP	$H_{DP}(F) = rect(F/2F_c)$	$h_{DP}(n) = 2F_c \operatorname{sinc}(2nF_c)$
HP	$H_{HP}(F) = 1 - H_{DP}$	$h_{HP} = \delta(n) - h_{DP}(n)$
PP	$H_{PP}(F) = rect((F + F_0)/2F_c) + rect((F - F_0)/2F_c)$	
		$h_{PP}(n) = 2\cos(2nF_0)h_{DP}(n)$
PZ	$H_{PZ}(F) = 1 - H_{PP}$	$h_{PZ} = \delta(n) - h_{PP}(n)$

Příklady metod návrhu filtru FIR (7)

Metoda váhových oken – ilustrace



Originál

Filtr o délce 9

Filtr o délce 41

Nástroje pro návrh filtrů FIR v MATLABu

1. Metoda váhových oken
   funkce FIR1 – umožňuje návrh DP, HP, PP, PZ
2. Metoda vzorkování
   funkce FIR2 – umožňuje návrh DP, HP, PP, PZ
3. Remezův algoritmus
   (výpočet filtrů se zvlněnou frekvenční charakteristikou)
   funkce REMEZORD určí pomocné parametry
   funkce REMEZ vypočte koeficienty filtru
4. Výpočet a vykreslení charakteristiky filtru
   funkce FREQZ

Výhody a nevýhody filtrů FIR

1. Poměrně **jednoduchý** a **intuitivní** návrh
2. Filtr je **nerekursivní** (bez zpětných vazeb), je tudíž vždy **stabilní** (nemůže způsobit kmitání)
3. Filtry FIR mohou zajistit **lineární** průběh **fázové charakteristiky**
4. S filtry FIR se **hůře dosahuje velká strmost** přechodu mezi propustným a nepropustným pásmem
5. Pro dosažení velké strmosti jsou třeba **filtry s mnoha koeficienty**, takové filtry mají dlouhé zpoždění

Dvourozměrné filtry FIR pro zprac. obrazu (1)

Ve statickém obraze nehraje při filtrování roli čas, ale prostor - **okolí jednotlivých bodů**.

Obrazové filtry rovněž pracují **na principu konvoluce**, tj. novou hodnotu v daném bodě určí z lineární kombinace hodnot v okolních bodech.

$$I_k(x, y) = \sum_{i,j \in okolí} h(i, j).I_{k-1}(x+i, y+j)$$

Nová *hodnota v bodu* ***konvoluční jádro*** ***předchozí*** *hodnoty v okolí*

Poznámka:

Operace s obrazy se dělají v iteračních krocích. Při výpočtu nové iterace je třeba nové hodnoty ukládat do jiné matice než té, v níž byly uloženy původní hodnoty.

Dvourozměrné filtry FIR pro zprac. obrazu (2)

Příklady konvolučního jádra pro **DP (dolní propust)**
(provádí potlačení šumu a detailů)

$$h_{DP1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad h_{DP2} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad h_{DP3} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Příklady konvolučního jádra pro **HP (horní propust)**
(zvýrazňuje rychlé změny, zejména hrany)

$$h_{HP1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad h_{HP2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad h_{HP3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dvourozměrné filtry FIR – příklady (1)

Originál, DP1, DP2, DP3

Dvourozměrné filtry FIR – příklady (2)

Originál, HP1, HP2, HP3




Shrnutí

- Ideální filtry DP, HP, PP a PZ mají jednotkový přenos v propustném pásmu a nulový přenos v nepropustném pásmu. Přechod mezi pásmy je dokonale strmý.
- Reálné filtry toto neumožňují – charakteristiky jsou více či méně zvlněné, přechody jsou pozvolné.
- Filtry FIR jsou jednodušší pro návrh a realizaci, jejich průběhy jsou však vzdálené ideálním filtrům.
- V Matlabu je k dispozici několik funkcí pro návrh a analýzu filtrů.

Konec přednášky

Děkuji za pozornost.