Signály a informace

Přednáška č.6

Diskrétní Fourierova transformace (DFT a FFT)

Připomenutí předchozích přednášek

- Frekvenční analýza je důležitá pro získání informací obsažených v signálu
- Zahrnuje určení amplitudového a fázového spektra
- U spojitých periodických signálů je spektrum čárové (nenulové hodnoty amplitud a fáze jsou pouze harmonických složek – zákl. a vyšší harmonické)
- U číslicových signálů je rozsah frekvencí omezen pouze na 0 až Fs/2,
- Při vzorkování nebo generování signálu jsou vyšší frekvence přeloženy do pásma 0 až Fs/2.

Fourierovy řady - připomenutí

Umožňují rozklad libovolného **spojitého periodického** signálu na harm. složky, z nichž lze signál opět beze ztráty složit.

Polární a exponenciální tvar Fourierových řad:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \qquad\qquad x(t) = \sum_{k=-\omega}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

Vztah mezi nimi

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)}\right)/2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{c_k}{2}.e^{j\varphi_k} e^{jk\omega_0 t} + \tfrac{c_k}{2}.e^{-j\varphi_k} e^{-jk\omega_0 t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

Exponenciální tvar je vhodnější pro praktický výpočet. Popisuje signál jako součet exponenciál s kladnými a zápornými frekvencemi. Modul koeficientů u kladných a záporných frekvencí je stejný a je poloviční v porovnání s koeficienty v polárním tvaru, fáze u záporných frekvencí jsou opačné vzhledem k fázím u kladných koeficientů.

Platí tedy $\quad X_k = \dfrac{c_k}{2}.e^{j\varphi_k t} \qquad c_k = 2|X_k| \qquad X_{-k} = X_k^*$

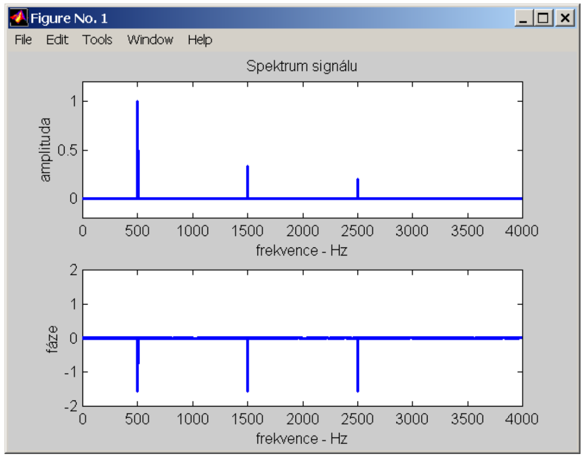
Jednostranné a dvoustranné spektrum

Jednostranné spektrum vychází z polárního tvaru a zobrazuje pouze kladné frekvence.

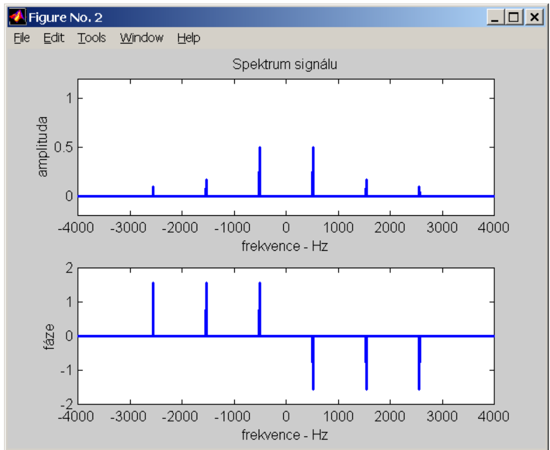
Dvoustranné spektrum vychází z exponenciálního tvaru a zobrazuje kladné a záporné frekvence.

Příklad $$x(t) = \cos(2\pi ft - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{3}\cos(2\pi 3 ft - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{5}\cos(2\pi 5 ft - \frac{\pi}{2})$$

jednostranné spektrum



dvoustranné spektrum



Oba typy spekter jsou samozřejmě **ekvivalentní** co do obsahu informace.

Spektrum používané **v praxi je jednostranné**, většina výpočetních postupů však počítá dvoustranné spektrum, z něhož snadno odvodíme jednostranné.

Spektrum u číslicových signálů

Problémy s jeho určením:

1. Na číslicové signály nelze přímo aplikovat FŘ, protože tyto nejsou popsány analytickou funkcí.
2. Signály analyzované v praxi jsou konečné a více či méně náhodné.

Proč potřebujeme nástroje na jeho určení:

1. Číslicové signály jsou dnes v praxi mnohem častější než analogové.
2. K dispozici je HW (AD a DA převodníky, speciální procesory DSP), které umožňují provádět velmi složité procedury s prakticky libovolným signálem.

Diskrétní Fourierovy řady (1)

Jsou aplikovatelné na **periodické číslicové signály**.

Požadavek: pro vzorkovaný periodický signál musí dávat **stejný výsledek** (stejné spektrum) jako pro pův. nevzorkovaný signál.

Vztah: $$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi nk/N}$$

určuje jak vypočítat komplexní spektrální koeficient *X[k]* z *N* vzorků vstupního číslicového signálu.

Např. pro N = 4

$$X[0] = \tfrac{1}{4}(x[0] \cdot e^{-j2\pi 0.0/4} + x[1] \cdot e^{-j2\pi 1.0/4} + x[2] \cdot e^{-j2\pi 2.0/4} + x[3] \cdot e^{-j2\pi 3.0/4})$$

$$X[1] = \tfrac{1}{4}(x[0] \cdot e^{-j2\pi 0.1/4} + x[1] \cdot e^{-j2\pi 1.1/4} + x[2] \cdot e^{-j2\pi 2.1/4} + x[3] \cdot e^{-j2\pi 3.1/4})$$

$$X[2] = \tfrac{1}{4}(x[0] \cdot e^{-j2\pi 0.2/4} + x[1] \cdot e^{-j2\pi 1.2/4} + x[2] \cdot e^{-j2\pi 2.2/4} + x[3] \cdot e^{-j2\pi 3.2/4})$$

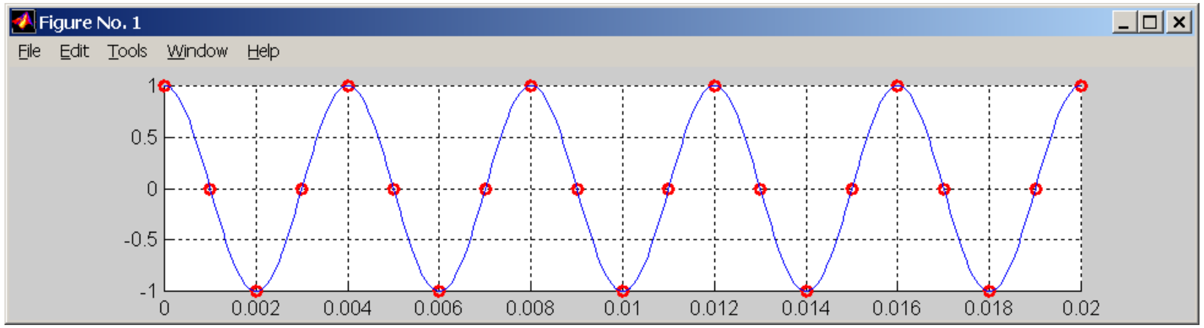
$$X[3] = \tfrac{1}{4}(x[0] \cdot e^{-j2\pi 0.3/4} + x[1] \cdot e^{-j2\pi 1.3/4} + x[2] \cdot e^{-j2\pi 2.3/4} + x[3] \cdot e^{-j2\pi 3.3/4})$$

Pro $k \geq N$ bychom dostali tytéž hodnoty, protože členy $e^{-j\pi nk/N}$ generují periodickou posloupnost s periodou *N*, tudíž i spektrum je periodické

Diskrétní Fourierovy řady – příklad (1)

Příklad: Mějme signál $x(t) = \cos 2\pi 250t$ vzorkovaný na 1 kHz

Určeme jeho spektrum.



Periodu tvoří 4 vzorky, tj N = 4, x[0]=1, x[1]=0, x[2]= -1, x[3]=0

pro výpočet spektra můžeme použít rovnice na předchozí stránce

$$X[0] = \tfrac{1}{4}(x[0]\cdot e^{-j2\pi 0.0/4} + x[1]\cdot e^{-j2\pi 1.0/4} + x[2]\cdot e^{-j2\pi 2.0/4} + x[3]\cdot e^{-j2\pi 3.0/4} = \tfrac{1}{4}(1.1 + 0.1 - 1.1 + 0.1) = 0$$

$$X[1] = \tfrac{1}{4}(x[0]\cdot e^{-j2\pi 0.1/4} + x[1]\cdot e^{-j2\pi 1.1/4} + x[2]\cdot e^{-j2\pi 2.1/4} + x[3]\cdot e^{-j2\pi 3.1/4}) = \tfrac{1}{4}(1 + 0 + (-1).(-1) + 0) = 0{,}5$$

$$X[2] = \tfrac{1}{4}(x[0]\cdot e^{-j2\pi 0.2/4} + x[1]\cdot e^{-j2\pi 1.2/4} + x[2]\cdot e^{-j2\pi 2.2/4} + x[3]\cdot e^{-j2\pi 3.2/4}) = \tfrac{1}{4}(1.1 + 0.1 - 1.1 + 0.1) = 0$$

$$X[3] = \tfrac{1}{4}(x[0]\cdot e^{-j2\pi 0.3/4} + x[1]\cdot e^{-j2\pi 1.3/4} + x[2]\cdot e^{-j2\pi 2.3/4} + x[3]\cdot e^{-j2\pi 3.3/4}) = \tfrac{1}{4}(1 + 0 + (-1).(-1) + 0) = 0{,}5$$

Koeficienty *X[k]* patří k harmonickým složkám na frekvencích *k.(Fs/N)*, tedy na frekvencích 0 Hz, 250 Hz, 500 Hz, 750 Hz

Diskrétní Fourierovy řady – příklad (2)

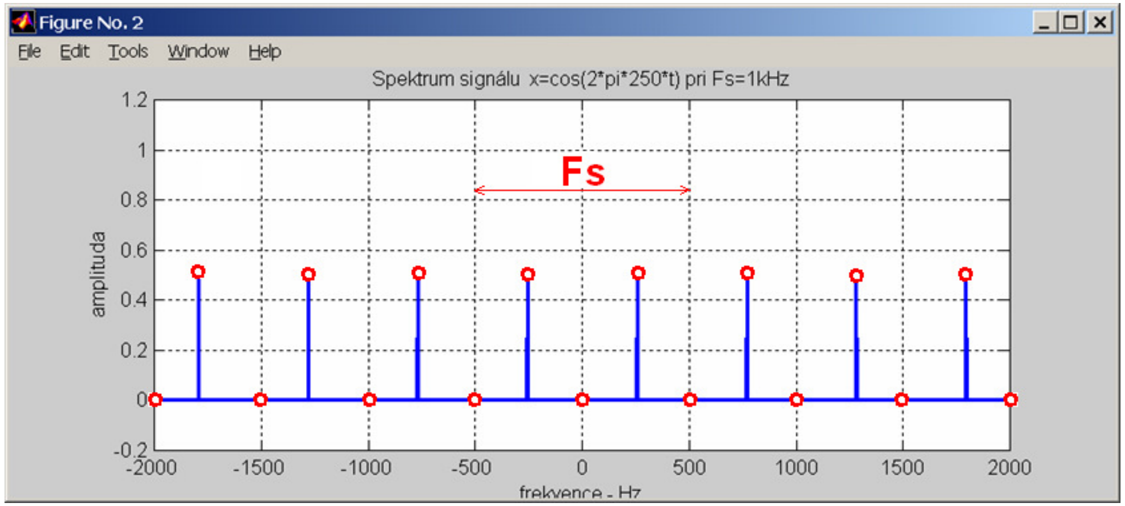
Složka na frekvenci 0 Hz má (komplexní) koeficient …. 0

250 Hz 0,5

500 Hz 0

750 Hz 0,5

U číslic.signálů však **neexistují frekvence nad *Fs/2***, dojde tedy k přesunutí z 500 Hz na 0 Hz a ze 750 Hz na - 250 Hz



V jednostranném spektru neuvažujeme záporné frekvence, takže budeme mít složky pouze na frekvencích:

0 Hz s koeficientem 0, a 250 Hz s koeficientem 0,5 + 0,5 = 1

Diskrétní Fourierovy řady - shrnutí

K výpočtu spektra u **periodických** číslicových signálů lze použít vztah:

$$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot e^{-j2\pi nk/N}$$

Výsledné spektrum je **stejné** jako u nevzorkovaného signálu

Poznámky:

1. Je-li signál popsán *N* vzorky, stačí spočítat pouze prvních *N/2* hodnot spektra. Dalších *N/2* hodnot jsou čísla komplexně sdružená a není třeba je počítat. Při praktické interpretaci je třeba amplitudu násobit číslem 2.
2. Výpočtem podle výše uvedeného vztahu dostaneme *diskrétní spektrum*, nebo také *vzorkované spektrum* s hodnotami komplexních koeficientů na frekvencích *k.Fs/N*.
3. Spektrum můžeme počítat i pro k > N, dostaneme však stejné hodnoty jako pro základní interval -N/2 < k < N/2. Spektrum číslicových signálů je totiž ***periodické*** s periodou Fs.

Od periodických signálů k obecným

Spojité signály (popsané analytickou funkcí)

Na neperiodický signál se nahlíží jako na signál, jehož T → ∞.

Místo Fourier.řad se používá **Fourierova transformace (FT)**:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

Důsledek: Protože T → ∞, Δ f → 0 …. spektrum je *spojité*

Číslicové signály (popsané konečnou sekvencí hodnot)

Na danou sekvenci hodnot pohlížíme, jakoby by byla *jednou periodou* periodického signálu.

Pak můžeme použít **Diskrétní Fourierovu transformaci (DFT),** která je popsána **úplně stejným** vztahem jako DFŘ.

$$X[k] = \tfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi nk/N)$$

Důsledek: Spektrum číslicového signálu je *diskrétní a periodické*

Diskrétní Fourier. Transformace (1)

Definiční vztah

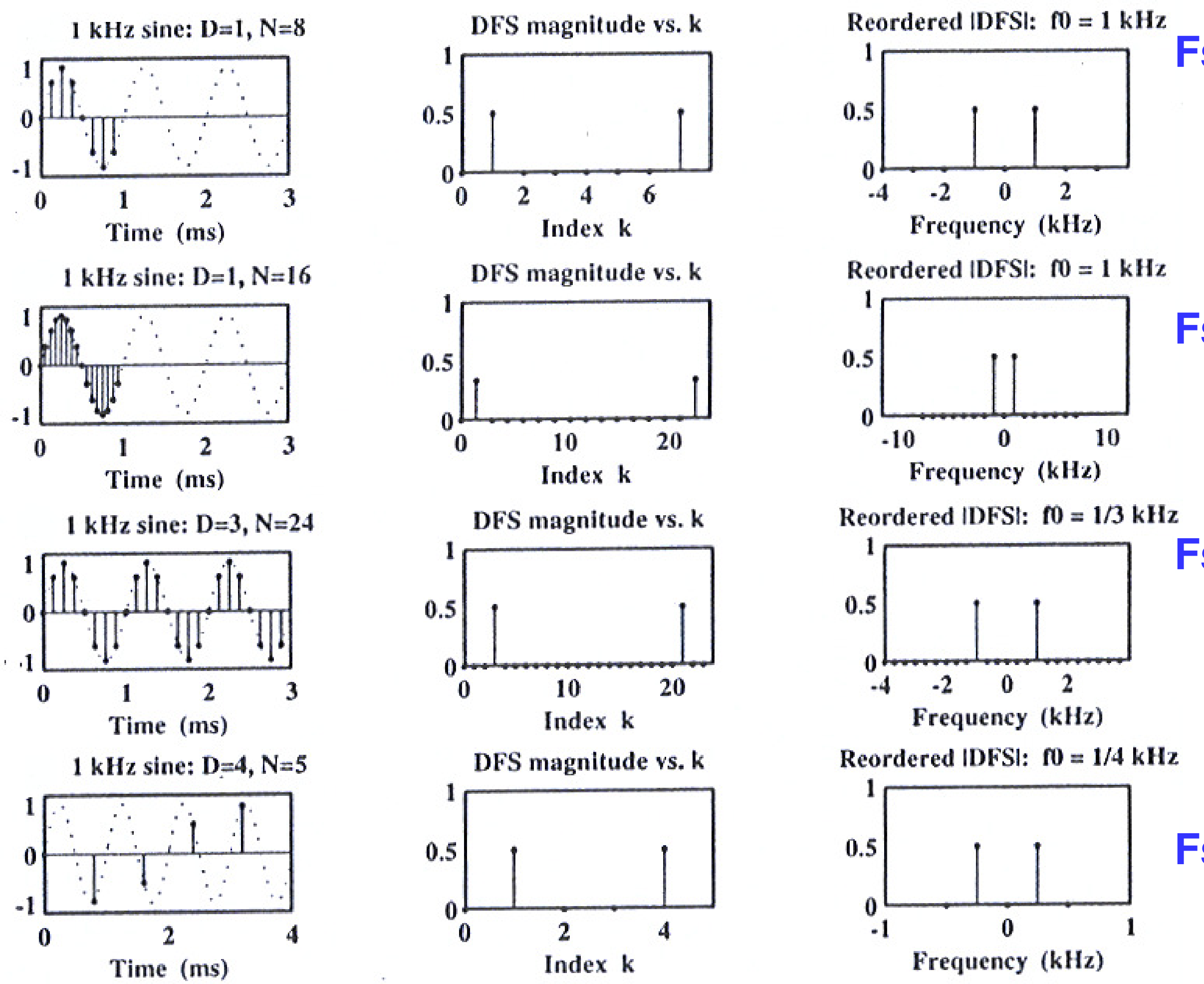
$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi nk / N)$$

Použití:

1. **Vstupem** je *N* hodnot číslic. signálu (podle předpokladu jde o 1 periodu)
2. **Výstupem** je *N* hodnot komplexních koeficientů spektra na normovaných frekvencích *k/N*, tj. na reálných frekvencích *k.Fs/N*.
3. Spektrum je **periodické** s periodou *Fs*, tj. pro *k > N* dostaneme tytéž hodnoty
4. Hodnoty koeficientů pro *N/2 < k < N* jsou **komplexně sdružené** s prvními *N/2* hodnotami, netřeba je počítat. Při určování modulu klasického jednostranného spektra je nutné **násobit dvěma**.
5. Pokud vybraných *N* vzorků signálu **netvoří jednu periodu** (v praxi se to stává téměř vždy), jsou výsledné hodnoty pouze **aproximací** spektra, zatíženou různými systémovými chybami, např. tzv. *rozmazání spektra*.

Diskrétní Fourier. Transformace (2)

Ilustrace – závislost na počtu vzorků N (harm. signál 1 kHz)



Fs = 8 KHz, 8 vzorků na periodu, rozlišení ve spektru 1 kHz

Fs = 16 KHz, 16 vzorků na periodu, rozlišení ve spektru 1 kHz

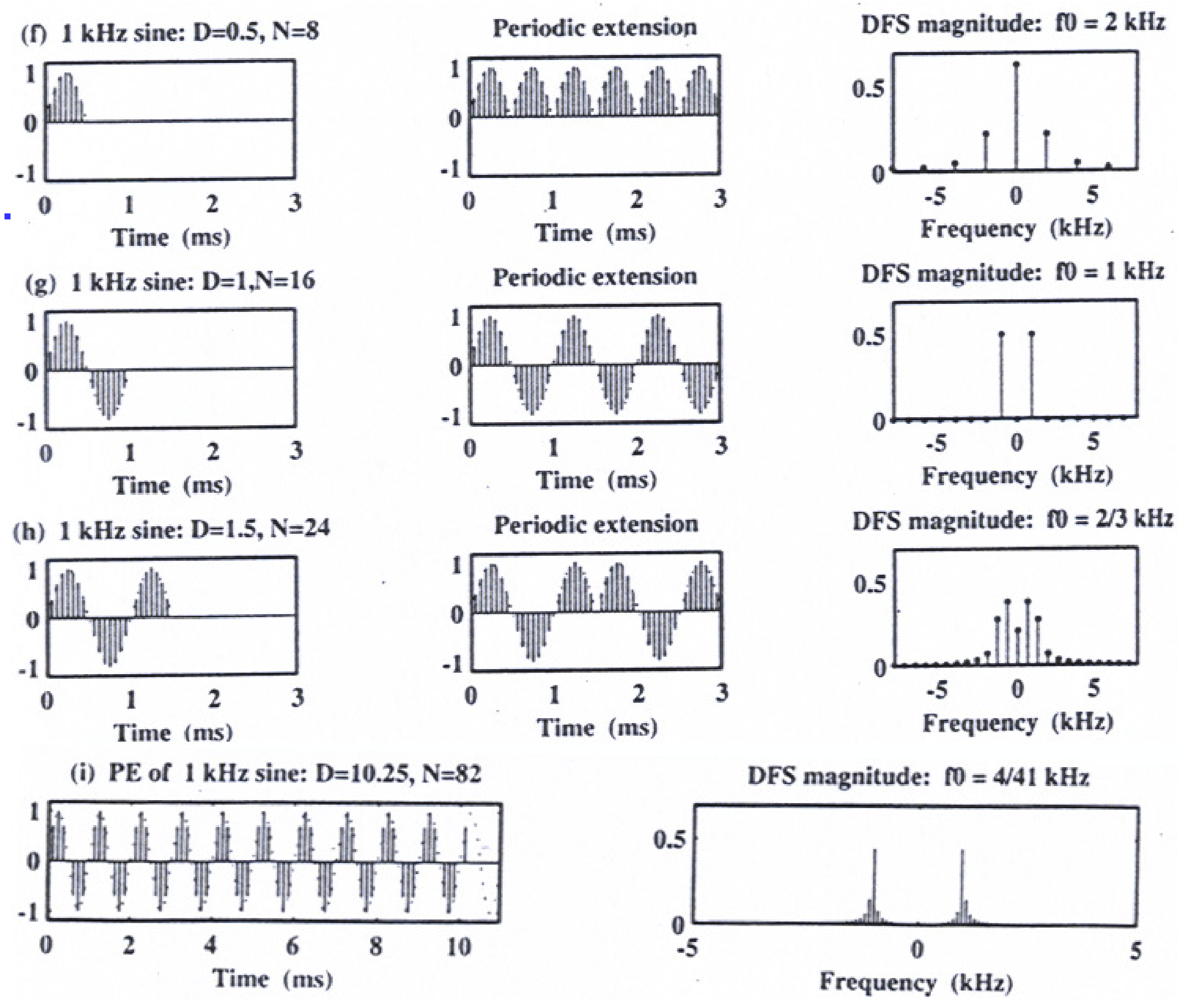
Fs = 8 KHz, 8 vzorků na periodu, celkem 24 vzorků, rozlišení ve spektru 0,33 kHz

Fs < 2 KHz, méně než 2 vzorky na periodu,, dochází k aliasingu

<u>Závěr: N určuje velikost rozlišení frekvencí ve spektru</u>

Diskrétní Fourier. Transformace (3)

Ilustrace – závislost na výřezu (harm. signál 1 kHz)



N vzorků zde reprezentuje jen půlperiodu, spektrum odpovídá právě takto opakované půlperiodě

N vzorků reprezentuje celou periodu, spektrum je správné

N vzorků zde reprezentuje 1,5 periody, tomu odpovídá vypočtené spektrum

N vzorků reprezentuje necelý násobek periody, „rozmazané“ spektrum

Závěr: pokud N nereprezentuje periodu, spektrum je „rozmazané“

Diskrétní Fourier. Transformace (4)

Při analýze neznámých signálů neznáme jejich periodu, signály navíc nemusí být ani periodické, prakticky **vždy tedy dojde k rozmazaní spektra (objeví se neexistující složky)**

Okénkovací funkce (window function) – řeší otázku, jak nejlépe provést výřez, a alespoň částečně eliminovat rozmazání

Obdélníkové okno

(prostý výřez signálu)

boxcar(N)

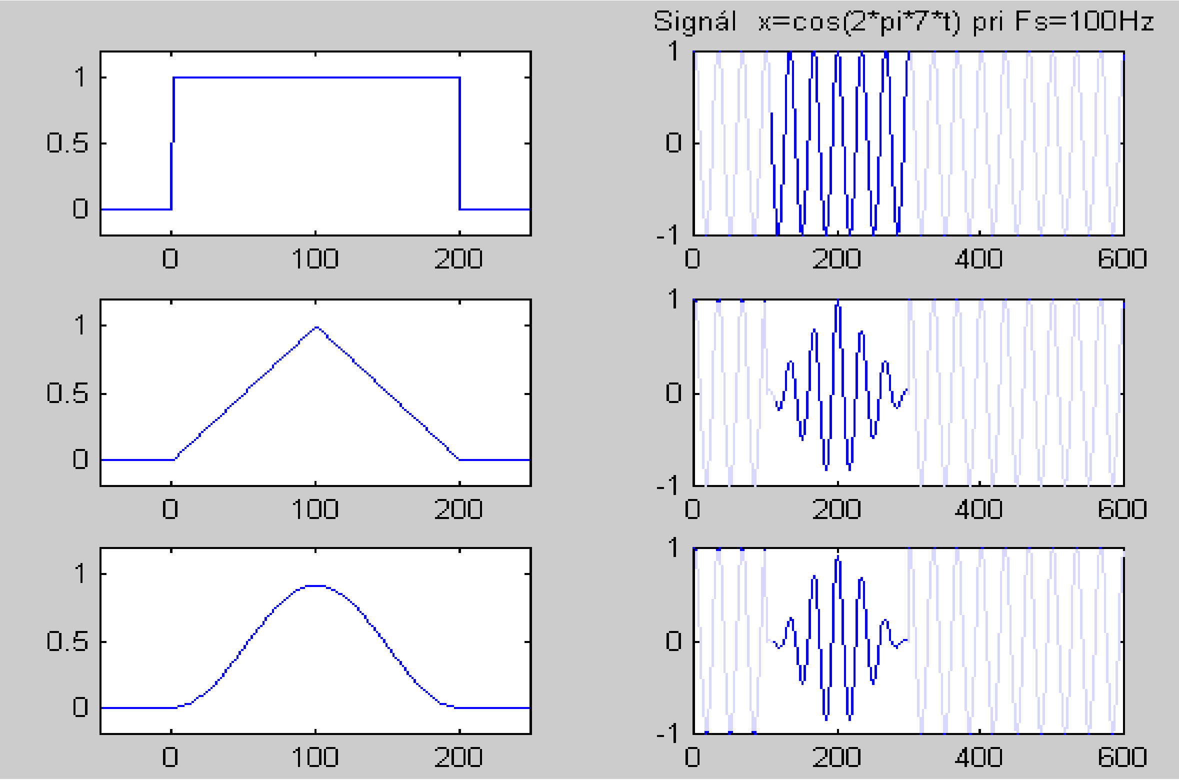
Trojúhelníkové okno

(násobení trojúhel. funkcí)

bartlett(N)

Hammingovo okno

hamming(N)



Diskrétní Fourier. Transformace (5)

Vliv okénkovacích funkcí

Provést **výřez** části signálu znamená **násobit** signál obdélníkovou funkcí.

Násobení v čase se převádí na konvoluci ve spektru (konvoluce spektra signálu se spektrem okna). Obdélníkové okno má z tohoto pohledu nejnepříznivější spektrum.

Obdélníkové okno

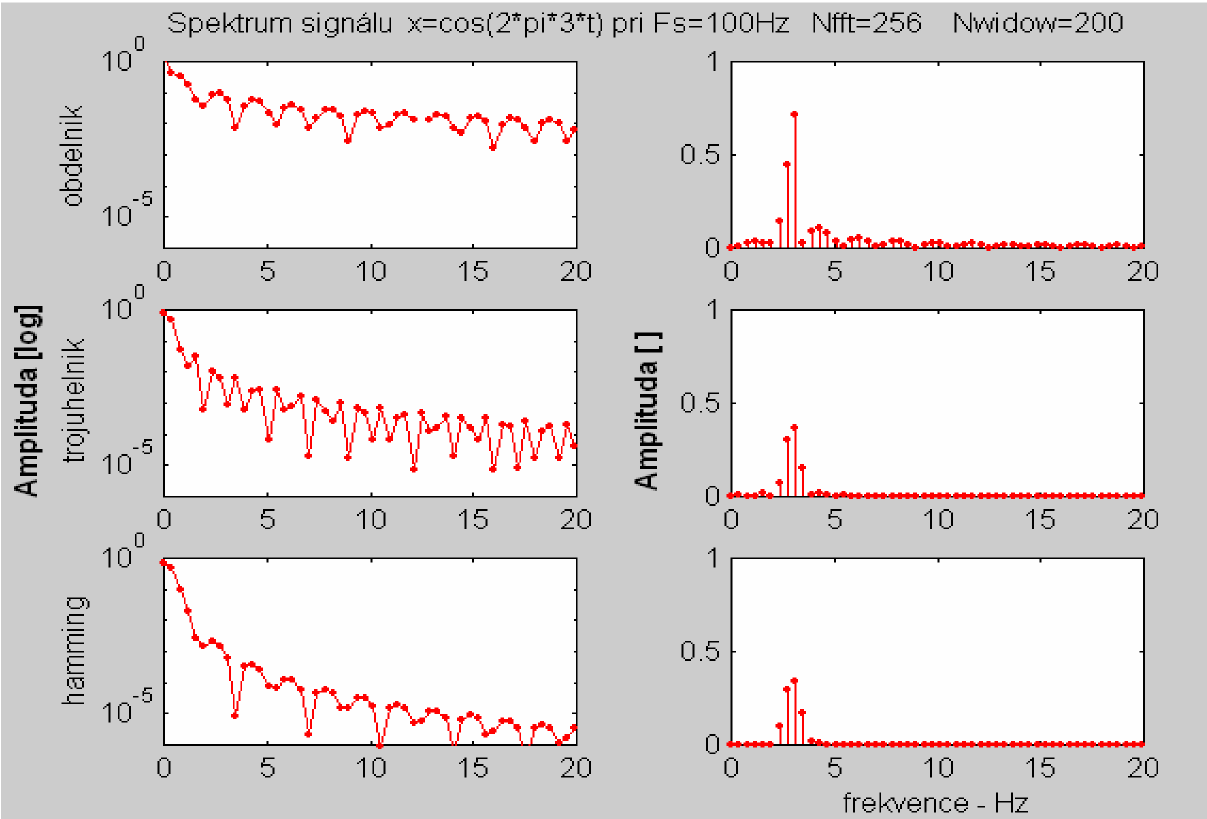
boxcar(N)

Trojúhelníkové okno

bartlett(N)

Hammingovo okno

hamming(N)



Zpětná (inverzní) DFT

Převádí signál popsaný spektrem zpět do časové oblasti.

Vztahy pro DFT a IDFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi nk / N) \qquad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] \exp(j2\pi nk / N)$$

1. Vztah pro IDFT se liší od DFT pouze ve **znaménku** exponenciální funkce. Normalizační koeficient *1/N* se někdy uvádí u DFT, jindy u FFT. Zde uvádíme vztah používaný v Matlabu.
2. Do IDFT **vstupuje vždy *N* hodnot dvoustranného spektra**, tj. nejenom *N/2* hodnot jednostranného spektra.
3. Pokud na signál aplikujeme nejprve DFT a následně IDFT, dostaneme tentýž signál. Vyplývá z toho, že popis signálu v časové oblasti i ve frekvenční oblasti je **ekvivalentní** co do úplnosti informace. (Ve spektrální oblasti však musíme vždy uvažovat jak modul, tak i fázi.)

FFT – optimalizovaný výpočet DFT

FFT (Fast Fourier Transform) – rychlý algoritmus výpočtu DFT

- poskytuje úplně **stejné hodnoty jako DFT**, ale mnohem rychlejším způsobem
- vysoké rychlosti je dosaženo **optimalizovaným výpočtem**,
- ten bere v úvahu např. symetričnost exponenciálních členů *exp (-j2πnk/N)*
- dále podobnost mezi lichými a sudými koeficienty, atd.
- nejrychleji funguje v případech, že ***N* je mocninou 2**
- např. pro $N = 1024$ je FFT cca 200 rychlejší než DFT

V MATLABU

fft(x) … spočítá DFT pro signál x

ifft(x) … spočítá IDFT pro spektrum x

Praktická aplikace DFT a FFT

1. Analyzovaný signál **rozdělíme do kratších úseků**, v nichž se charakter signálu příliš nemění.
2. Délku úseků dále volíme tak, aby se počet vzorků v úseku **N rovnal druhé mocnině 2**.
3. Pokud není možné zvolit N jako mocninu 2, **doplníme signál nulovými vzorky** až do nejbližší mocniny 2.
4. Vzorky v daném úseku vynásobíme vhodnou **okénkovací funkcí** (nejčastěji Hammingovým okénkem).
5. Pomocí FFT vypočítáme **komplexní koeficienty spektra**.
6. Pro prvních N/2 hodnot **určíme modul a fázi** a ty pak vykreslíme nebo použijeme pro další zpracování.
7. Potřebujeme-li převod zpět do časové oblasti, **použijeme IFFT** a přesně opačný postup.
8. Není-li k dispozici program pro IFFT, lze použít FFT podle vztahu $IFFT(x) = 1/N.\ (FFT(x^*))^*$

Shrnutí

- Výpočet spektra u číslicových signálů je možný díky diskrétní Fourierově transformaci - DFT
- U periodických číslicových signálů DFT poskytne stejný výsledek, jako bychom dostali pomocí FŘ aplikovaných na nevzorkovanou funkci. Podmínkou je celistvý násobek periody.
- Pokud není podmínka splněna nebo jde-li o obecný signál, bude spektrum obsahovat ještě další složky soustředěné kolem hlavních frekvenčních složek („rozmazání spektra“).
- FFT je algoritmus, který umožňuje velmi rychlý výpočet DFT (speciálně pro $N = 2^B$).

Konec přednášky

Děkuji za pozornost.