Signály a informace

Přednáška č.7 a 8

Signály a systémy,
LTI systémy, konvoluce

Připomenutí předchozí látky

- Dosud získané znalosti nám umožňují analyzovat signály, jak v časové oblasti, tak i ve frekvenční oblasti
- Pomocí DFT (a jejího rychlého výpočetního algoritmu) jsme schopni zjistit frekvenční složení (spektrum) libovolného číslicového signálu.

Nyní se zaměříme na to, jak signály upravovat, např.

- jak potlačit šum v signálu,
- jak zvýraznit nebo potlačit určité frekvence, atd.

Budeme se tedy věnovat návrhu systémů, které signály modifikují požadovaným způsobem

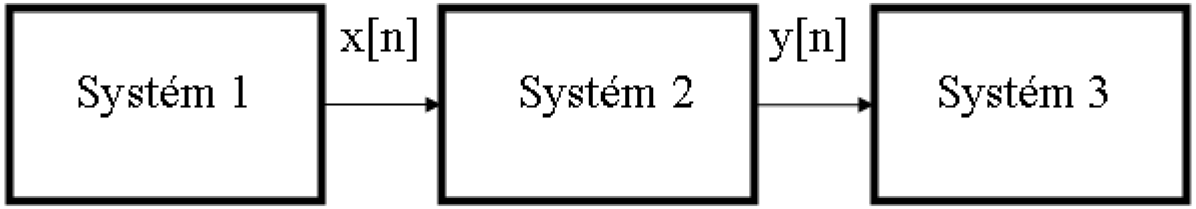
Signály a systémy (1)

Oba termíny spolu úzce souvisí, teorie (i terminologie) signálů a systémů jsou úzce propojeny.

Systém dokáže generovat, zpracovávat, modifikovat a přijímat **signály. Signál** je projevem činnosti **systému.**

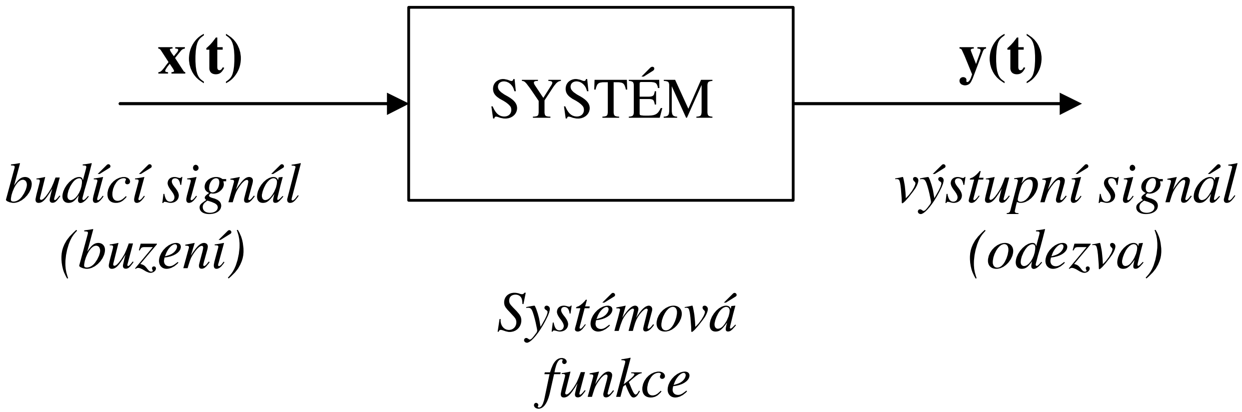
Příklady:

- Hudební nástroj – lze považovat za systém generující zvuk
- Zesilovač, ekvalizér – systém, který modifikuje zvukový signál
- A/D a D/A převodník – transformují jeden typ signálu na jiný
- Reproduktor – převádí elektrický signál na akustický, atd.



Signály a systémy (2)

Popis systému prostřednictvím vstupního a výstupního signálu a systémové funkce



Příklady:

- **zesilovač ….** ***y(t) = k . x (t)***
- **usměrňovač ….** ***y(t) = | x (t) |***
- **obecný systém ….** ***y(t) = F [x (t)]***

  systémový operátor

Klasifikace systémů (1)

Podle charakteru signálu

Spojité – pracují se spoj. vstup.a výstupními signály

Číslicové – pracují s diskrétními signály

Hybridní – fungují jako převodníky mezi analogovými a číslicovými signály

Podle kauzality:

princip kauzality: odezva nemůže nastat dříve než buzení

Kauzální – odezva závisí pouze na současných a minulých hodnotách

Nekauzální – závislost i na budoucích hodnotách

nerealizovatelné v klasických (on-line) systémech,

realizovatelné v off-line režimu – celý signál je v paměti

příklad nekauzálního systému $y(t) = (x(t) + x(t-1) + x(t+1))/3$

Klasifikace systémů (2)

Podle linearity

Lineární – platí podmínka $F(ax_1 + bx_2) = aF(x_1) + bF(x_2)$

odezva na lineární kombinaci budících signálů je rovna lineární kombinaci odezev na jednotlivé budící signály

z linearity vyplývá princip superpozice (odezvu systému lze složit z odezev na dílčí buzení)

Příklady

lineárních systémů $y(t) = k.x(t)$ $y = dx(t)/dt$

nelineárních systémů $y(t) = x^2(t)$ $y(t) = |x(t)|$

Klasifikace systémů (3)

Podle stacionarity (časové nezávislosti)

Pro časově **nezávislý systém** platí podmínka:

$$F(x(t-t_0)) = y(t-t_0)$$

Je-li vstupní signál zpožděn o čas $\Delta t = t - t_0$,

musí i výstup být zpožděn o Δt

Chování systému se nemění v čase.

Příklady

časově nezávislých systémů $y(t) = k.x(t)$

časově závislých systémů $y(t) = t.x(t)$

Klasifikace systémů (4)

LTI systémy (Linear time-invariant)

- ***lineární časově nezávislé*** systémy

Systémy relativně *jednoduché* pro popis, analýzu a syntézu

– jejich chování (u spojitých systémů) popisují ***diferenciální rovnice s konst. koeficienty***:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

– u číslicových systémů jsou jejich ekvivalentem ***diferenční rovnice***

Odvození diferenční rovnice

Diferenciální rovnice:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

1. derivaci aproximujeme jako $dx(t)/dt \approx [x(t) - x(t - t_s)]/t_s$

   v číslicové oblasti tedy $x'[n] = x[n] - x[n-1]$

2. derivace $x''[n] = [x'[n]]' = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$

   atd.

Dosazením do diferenciální rovnice dostaneme diferenční

$$A_0 y[n] + A_1 y[n-1] \cdots A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M]$$

Pozor: koeficienty a_i,b_i jsou různé od A_i a B_i.

Popis číslicových LTI systémů (1)

Dif. rovnice popisuje **vztah mezi vstupem a výstupem**

Základní vztah

$$A_0 y[n] + A_1 y[n-1] \cdots A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M]$$

lze přepsat do podoby

$$y[n] = B_0' x[n] + B_1' x[n-1] \cdots B_M' x[n-M] - A_1' y[n-1] \cdots - A_N' y[n-N]$$

Je vidět, že hodnota výstupního signálu závisí na

- předchozích M hodnotách vstupu a
- předchozích N hodnotách výstupu.

Je-li N = 0, je systém **nerekurzivní**, v opačném případě je **rekurzivní** (závislý na předchozích výstupech, zpětnovazební)

Chování číslicových LTI systémů (1)

Příklad 1: **nerekurzivní systém**

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

Určeme odezvu na jednotkový impulz na vstupu

y[0] = x[0] - 2x[-1] + x[-2] = 1 + 0 + 0 = 1

y[1] = x[1] - 2x[0] + x[-1] = 0 – 2*1 + 0 = -2

y[2] = x[2] - 2x[1] + x[0] = 0 - 0 + 1 = 1

y[3] = x[3] - 2x[2] + x[1] = 0 + 0 + 0 = 0, y[4] = 0, atd

Závěr: nerekurzivní systém reaguje na jednotkový impulz **konečnou odezvou** (o délce M), konečnou odezvou reaguje na **jakýkoliv konečný signál**

Nerekurzivní systém se označuje zkratkou FIR (Finite Impulse Response) – systém s konečnou odezvou

Chování číslicových LTI systémů (2)

Příklad 2: **rekurzivní systém**

$$y[n] = -0.8\,y[n-1] + 5x[n]$$

Určeme odezvu na jednotkový impulz na vstupu

(předpokládáme *nulové poč. podmínky*)

y[0] = - 0.8 y[-1] + 5 x[0] = -0.8 * 0 + 5 * 1 = 5

y[1] = - 0.8 y[0] + 5 x[1] = -0.8 * 5 + 5 * 0 = -4

y[2] = - 0.8 y[1] + 5 x[2] = -0.8 * -4 + 5 * 0 = 3.2

y[3] = - 0.8 y[2] + 5 x[3] = -0.8 * 3.2 + 0 = -2.56

y[4] = - 0.8 y[3] + 5 x[4] = -0.8 * -2,56 + 0 = 2.048 atd

Závěr: rekurzivní systém reaguje na jednotkový impulz **nekonečnou odezvou**, nekonečnou odezvou reaguje také na jakýkoliv konečný signál

Rekurzivní systém se označuje zkratkou IIR

(Infinite Impulse Response) – systém s nekonečnou imp. odezvou

Chování číslicových LTI systémů (3)

Chování libovolného LTI systému lze jednoznačně popsat tím, jak reaguje na **jednotkový impulz.**

jinými slovy

Odezva na jednotkový impulz jednoznačně charakterizuje libovolný LTI systém.

Označuje se h[n].

Konvoluce (1)

Matematická funkce postihující **<u>interakci signálu a systému</u>** popsaného impulzní odezvou. (MMX instrukce na CPU)

Pokusíme se ji odvodit:

Libovolný vzorkovaný signál x[-n], .. x[-1], x[0], x[1], .. x[n] lze vyjádřit jako sled posunutých jednotkových pulzů násobených vždy příslušnou funkční hodnotou:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

dále

odezva na	$\delta(t)$	......	$h(t)$	(definice)
odezva na	$a\delta(t)$	......	$ah(t)$	(linearita)
odezva na	$\delta(t-t_0)$	.....	$h(t-t_0)$	(invariantnost)

potom odezva systému na signál x[n] musí být

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SYSTÉM}\\ h[n]\end{matrix}} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Konvoluce (2)

Vztah pro konvoluci

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- jde součet posunutých odezev na jednotlivé vzorky signálu

Ukažme si na příkladu

vstupní signál: x[0], x[1], x[2], x[3] ....

impulsní odezva: h[0], h[1], h[2], h[3] ....

odezva na x[0]: x[0].h[0], x[0].h[1], x[0].h[2], x[0].h[3] ....

odezva na x[1]: x[1].h[0], x[1].h[1], x[1].h[2], x[1].h[3] ....

…

odezva na x[k]: x[k].h[0], x[k].h[1], x[k].h[2], x[k].h[3] ....

tyto dílčí odezvy se musí vzájemně sečíst ve správných okamžicích

Konvoluce (3)

Nejlépe ji můžeme ilustrovat na konečném signálu a konečné impulzní odezvě:

např. $x[0] = 2, x[1] = 2, x[2] = 3, x[3] = 2, x[4] = 1$

$h[0] = 3, h[1] = 2, h[2] = -3, h[3] = 1$

					n				
	hodnota v časech	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
	odezva na x(0)	x(0).h(0)	x(0).h(1)	x(0).h(2)	x(0).h(3)				
	odezva na x(1)		x(1).h(0)	x(1).h(1)	x(1).h(2)	x(1).h(3)			
k	odezva na x(2)			x(2).h(0)	x(2).h(1)	x(2).h(2)	x(2).h(3)		
	odezva na x(3)				x(3).h(0)	x(3).h(1)	x(3).h(2)	x(3).h(3)	
	odezva na x(4)					x(4).h(0)	x(4).h(1)	x(4).h(2)	x(4).h(3)
	součet odezev				Σ x(k).h(n-k)				

obecný vztah $$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

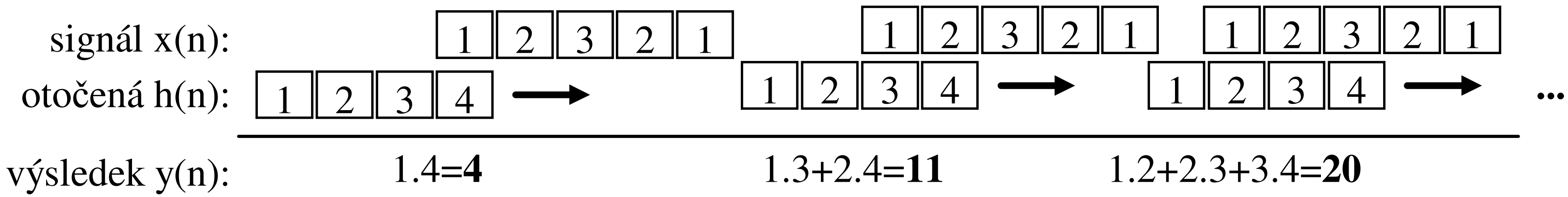
*jde o součet dílčích součinů signálu **x** a funkce **h** <u>otočené</u> kolem bodu n*

Konvoluce (4)

Pro číslicové signály lze poměrně snadno spočítat

příklad: x[n] = 1 2 3 2 1, délka Nx = 5, h[n] = 4 3 2 1, Nh = 4

1) Metodou posuvného proužku



2) Pomocí polynomiálního násobení (žádný signál se neotáčí!)

$$(1s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1).(4s^3 + 3s^2 + 2s + 1) = 4s^7 + 11s^6 + 20s^5 \ldots$$

3) V Matlabu

y = conv (x, h)

Musíme však správně určit počátek a trvání výstupního signálu

počátek výsledného signálu: Sy = Sx + Sh

délka výsledného signálu: Ny = Nx + Nh - 1

Konvoluce (6)

Konvoluce u periodických signálů

Je-li signál periodický, výsledkem konvoluce je opět periodický signál se **stejnou periodou**.

Příklad:

signál x = 2 1 3 2 1 3 2 1 3 perioda Tx = 3

funkce h = 5 6 3 4 1 2

1. **Určíme konvoluci pro jednu periodu:**

   (2 1 3) * (5 6 3 4 1 2) = (10 17 27 29 15 17 5 6) ta má délku 8 vzorků

2. **Konvoluci kompletního periodického signálu určíme „přeložením“ výše uvedené sekvence do bloků o délce Tx, tj. 3**

   10 17 27 ↵

   29 15 17 ↵

   <u>5 6 .</u>

   44 38 44

Výsledný periodický signál je 44, 38, 44, 44, 38, 44, …..

Vlastnosti konvoluce (1)

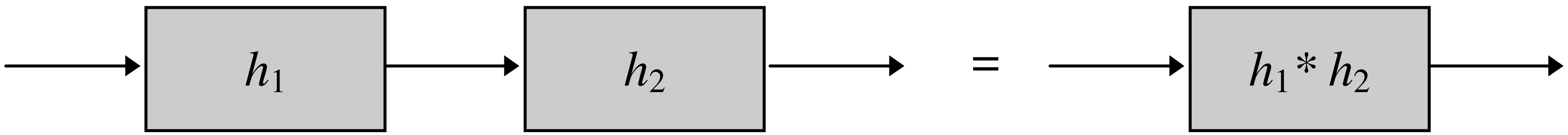
Komutativnost: $$x * h = h * x$$

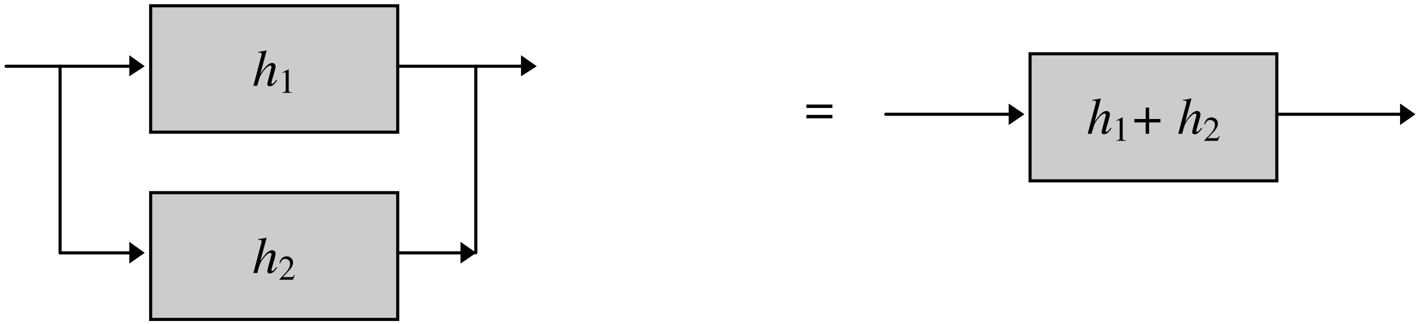
praktický důsledek: oba signály (vstupní i impulzní odezva) jsou vzájemně rovnocenné a zaměnitelné

Asociativnost: $$(x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2)$$

důsledek: více systémů lze libovolně sdružovat

Sériové a paralelní řazení systémů





Jednoduché číslicové LTI systémy

Systémy typu FIR (Final Impulse Response)

- systémy s konečnou impulzní odezvou (na jednotkový impulz reagují signálem s konečným počtem vzorků)
- popis v časové oblasti $y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

impulzní odezva trvá M vzorků

Příklady jednoduchých systémů FIR (1)

1. Zesilovač: $y[n] = k.x[n]$

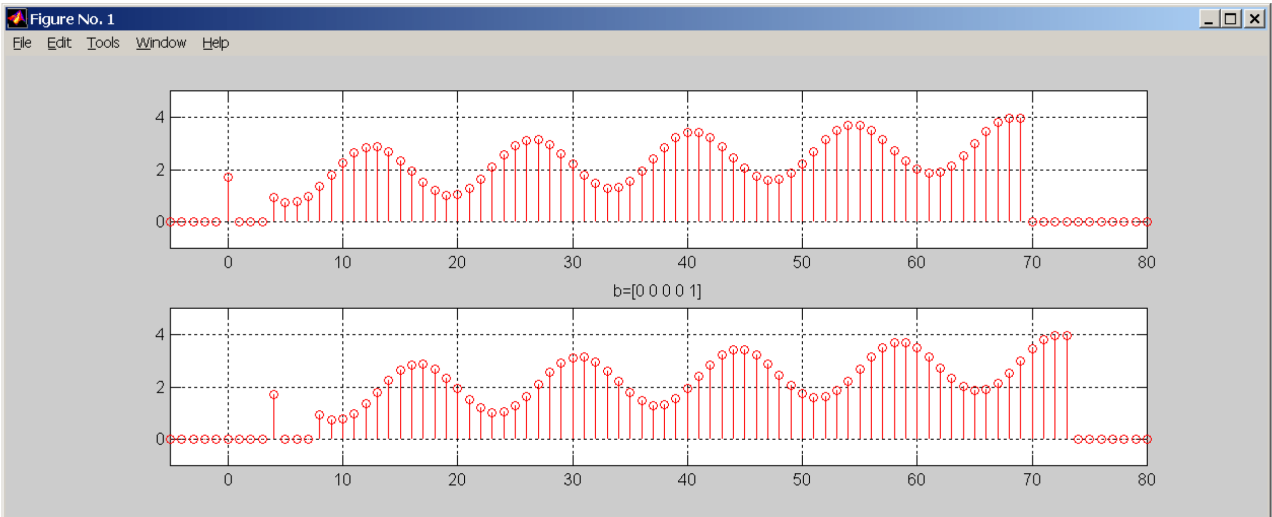
impulsní odezva $h[n] = k\delta[n]$

vektor koeficientů *b = [k]* *jediný nenulový koeficient*

2. Zpožďovač $y[n] = x[n-k]$

impulsní odezva $h[n] = \delta[n-k]$

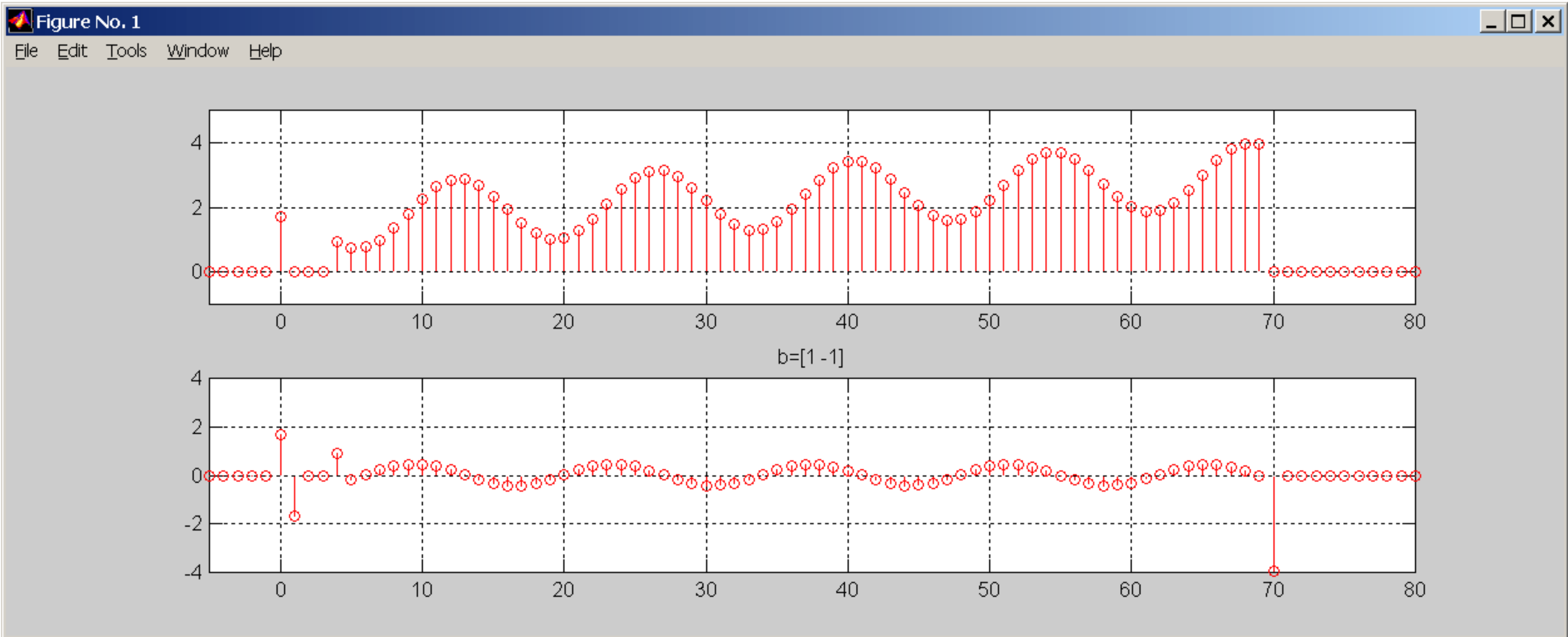
vektor koeficientů *b = [0, 0, .. 1]* *též jediný koeficient*



Příklady jednoduchých systémů FIR (2)

3. Derivátor (diferenciátor) $y[n] = x[n] - x[n-1]$

impulsní odezva $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$
vektor koeficientů *b = [1, -1]*



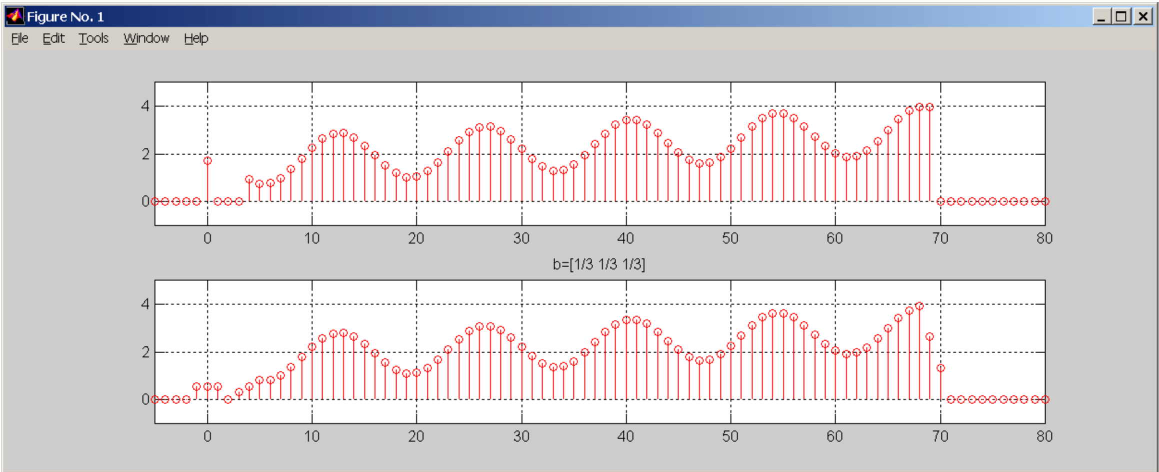
Derivátor zvýrazňuje všechny rychlé změny,
potlačuje ss složku a nízké frekvence

Příklady jednoduchých systémů FIR (3)

4. Průměrovací filtr (3.řádu) nekauzální:

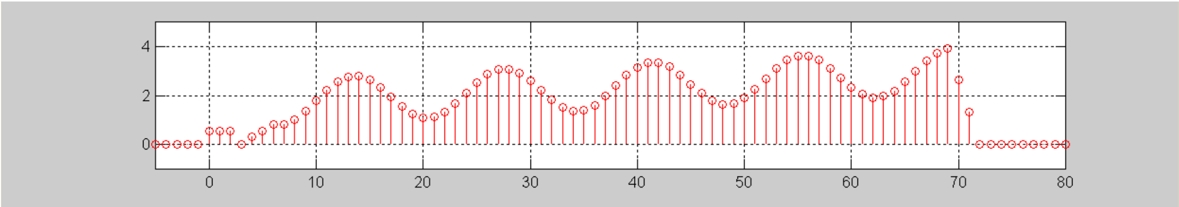
$$y[n] = (x[n-1] + x[n] + x[n+1])/3$$

vektor koeficientů imp. odezvy *b = [1/3, 1/3, 1/3]*



5. Prům. filtr kauzální: $y[n] = (x[n] + x[n-1] + x[n-2])/3$

tytéž koeficienty *b = [1/3, 1/3, 1/3], rozdíl ve fázovém zpoždění*

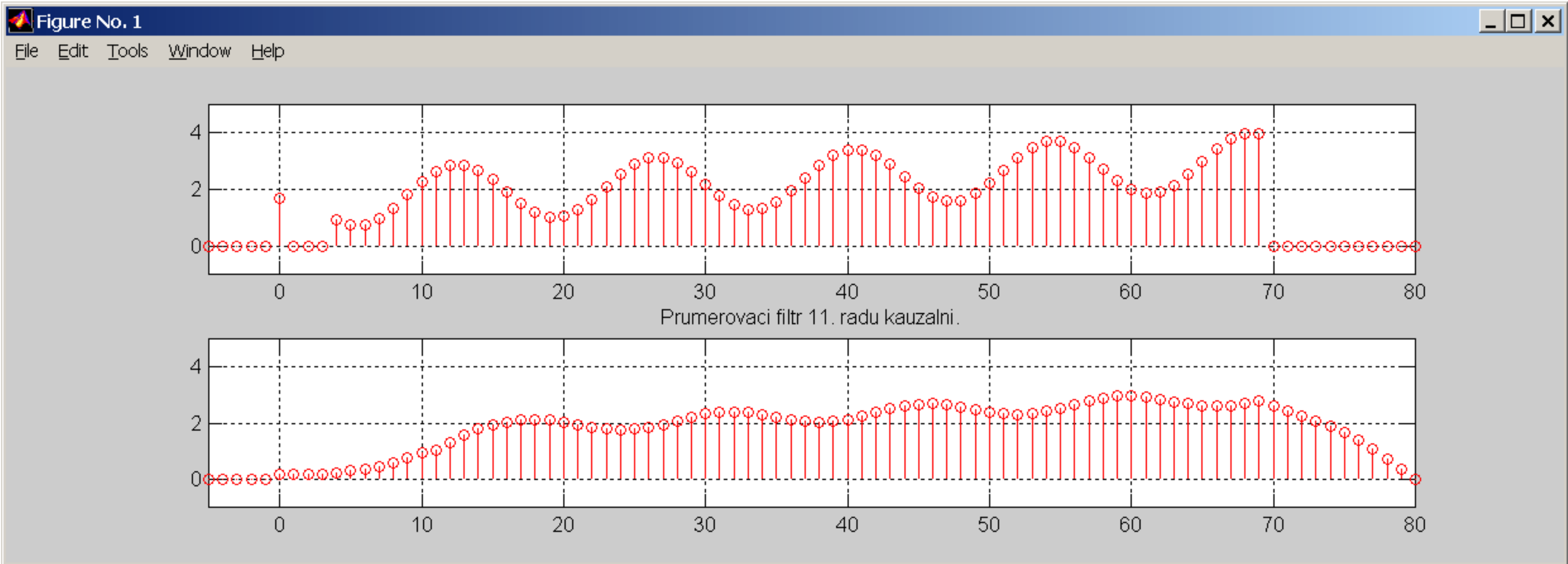


Příklady jednoduchých systémů FIR (4)

6. Průměrovací filtr (11. řádu) nekauzální:

$$y[n] = \frac{1}{11}\sum_{k=0}^{10} x[n-k]$$

vektor koeficientů imp. odezvy *b = 1/11[1 1 … 1]*



Potlačí všechny detaily (vyšší frekvence), pracuje jako dolní propust

Konvoluce v prostředí MATLAB

1. Vstupuje-li signál **x** do systému popsaného impulzní odezvou **h**, určíme odezvu systému příkazem **conv**

   y = conv (x, h)

2. Je-li systém popsaný diferenční rovnicí

$$y(n) = a_1 y(n-1) + \cdots a_N y(n-N) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \cdots b_M x(n-M)$$

   případně přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} \cdots b_M z^{-M}}{1 - a_1 z^{-1} \cdots a_N z^{-N}}$$

   určíme odezvu systému na signál **x** příkazem filter

   y = filter (B, A, x)

   kde B = [b_0 b_1 .. b_M], A= [1 -a_1 ..-a_N]

Konec přednášky

Děkuji za pozornost.