

Signály a informace

11. cvičení

LTI systém

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] \xrightarrow{\text{FIR}} h[n] = [b_0, b_1]$$

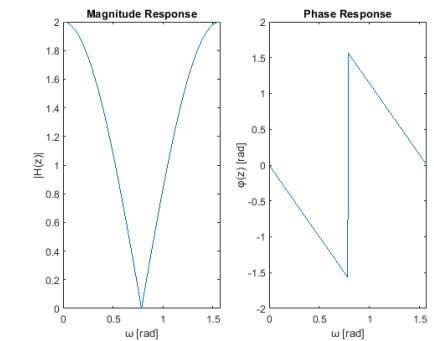
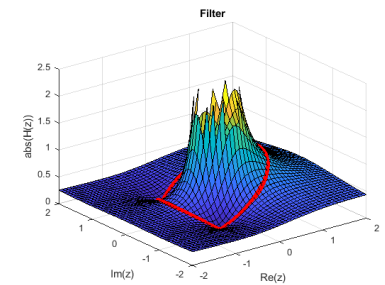
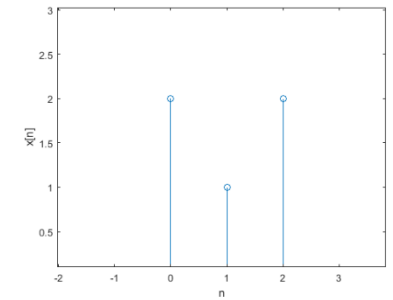
$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + a_1y[n-1] \xrightarrow{\text{IIR}} h[n] \rightarrow \infty$$



$$Y(z) = B_0X(z) + B_1X(z)z^{-1} + A_1Y(z)z^{-1} \longrightarrow H(z) = \frac{B_0 + B_1z^{-1}}{1 - A_1z^{-1}}$$

$$e^{i\omega} \Rightarrow z$$

$$H(e^{i\omega}) = \frac{B_0 + B_1e^{-i\omega}}{1 - A_1e^{-i\omega}}$$



Frekvenční charakteristika - příklad

$$y[n] = 3x[n] - 3x[n-1] + 3x[n-2] - 4y[n-1]$$

Jaké bude zesílení a fázový posun frekvence $F=0.5$?

$$\omega = \pi$$

$$H(z) = \frac{3 - 3z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 4z^{-1}}$$

$$|H(e^{i\omega})| = 3$$

$$H(e^{i\omega}) = \frac{3 - 3e^{-i\omega} + 3e^{-i2\omega}}{1 + 4e^{-i\omega}}$$

$$\varphi(H(e^{i\omega})) = \pi$$

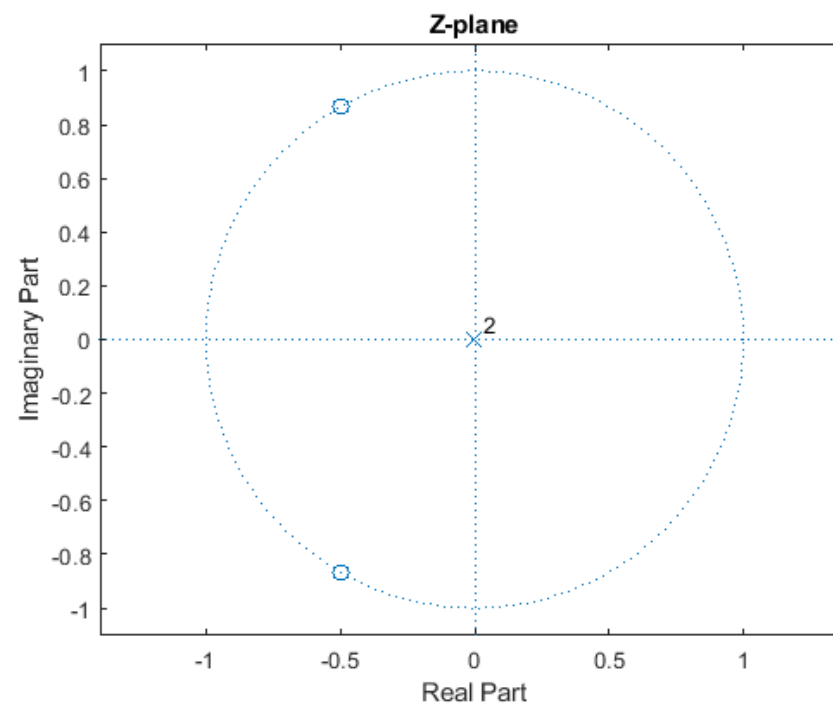
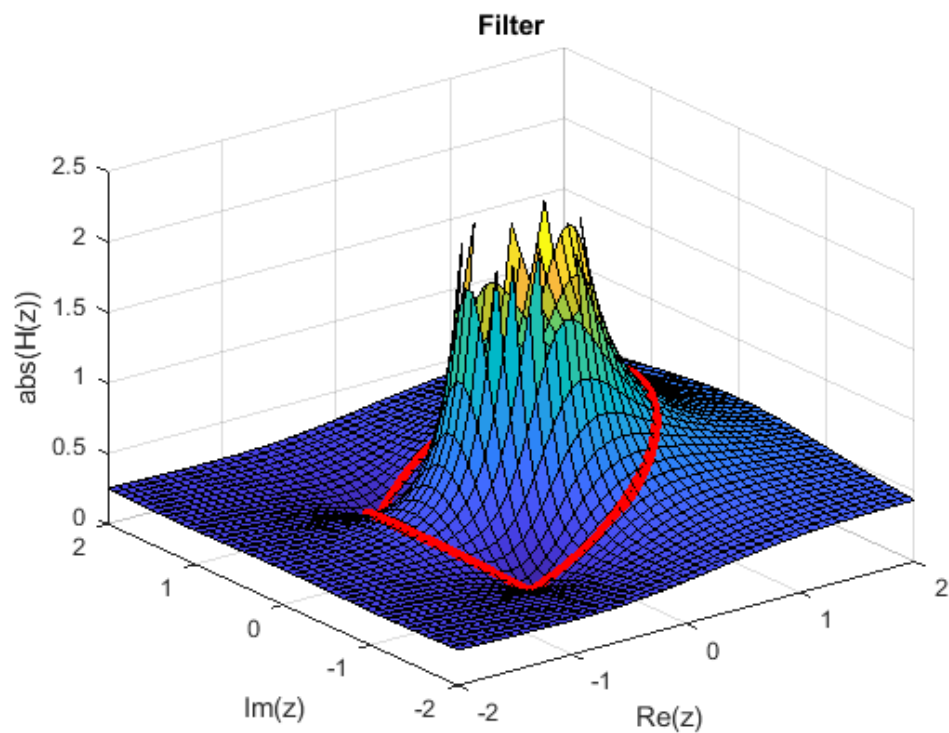
$$H(e^{i\pi}) = \frac{3 - 3e^{-i\pi} + 3e^{-i2\pi}}{1 + 4e^{-i\pi}} = \frac{3 + 3 + 3}{1 - 4} = -3$$

Nuly a póly

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}{1 - A_1 z^{-1} - A_2 z^{-2}}$$

O - nuly
X - póly

$$z \in \mathbb{C}$$

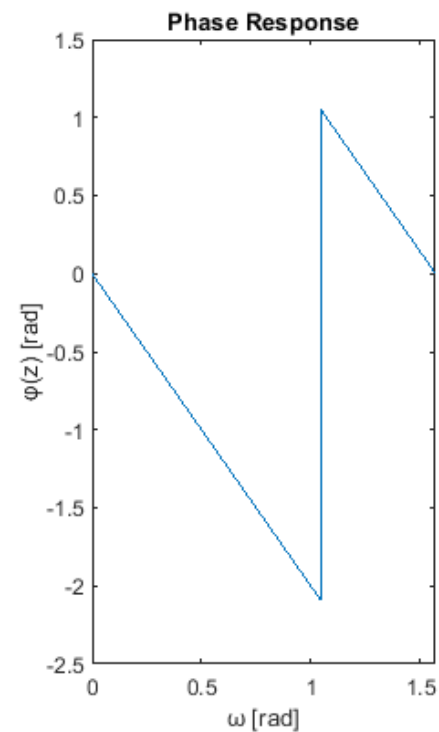
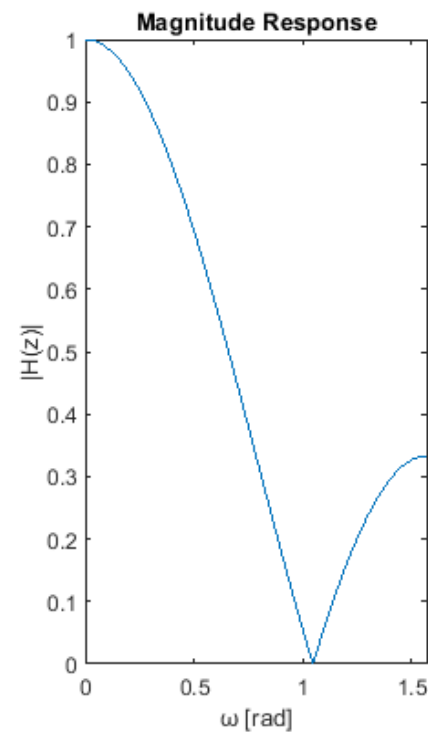
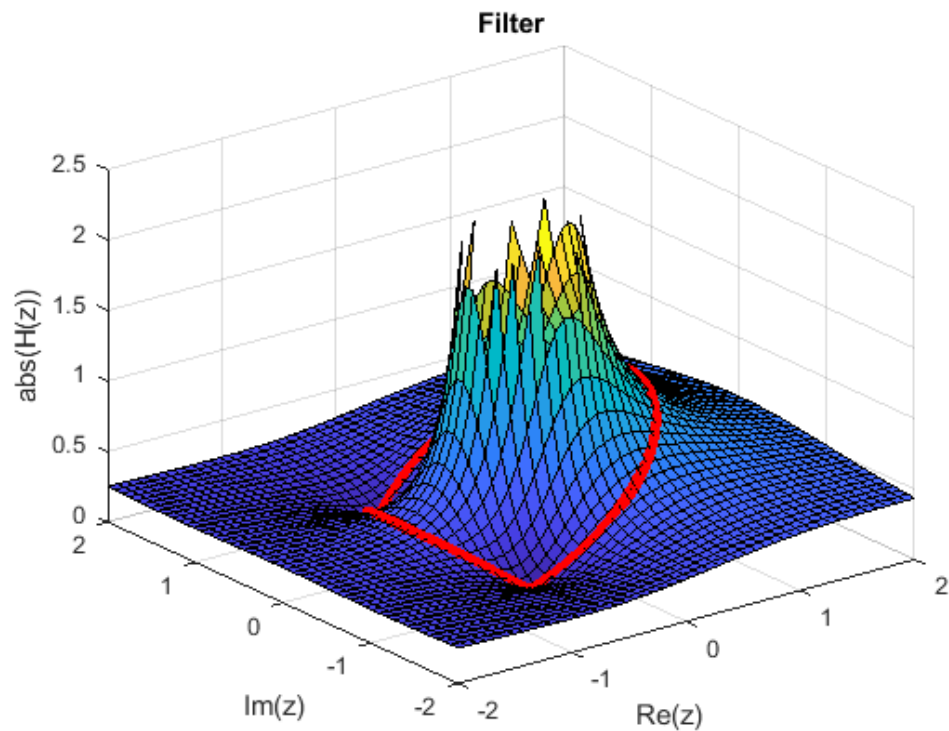


Nuly a póly

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}{1 - A_1 z^{-1} - A_2 z^{-2}}$$

O - nuly
X - póly

$$z \in \mathbb{C}$$



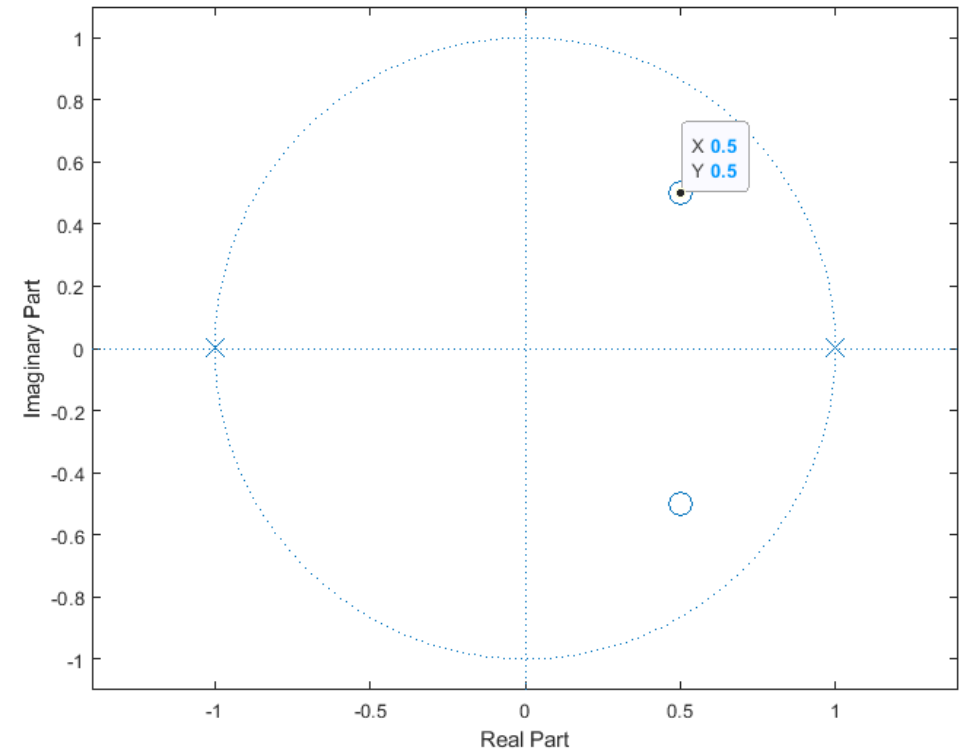
Návrh filtru pomocí nul a pólů - příklad

Jsou zadány nuly a póly systému. Zjistěte jeho diferenční rovnici.

$$O = [0.5 + 0.5i, 0.5 - 0.5i]$$

$$X = [1, -1]$$

$$H(z) =$$



Návrh filtru pomocí nul a pólů - příklad

Jsou zadány nuly a póly systému. Zjistěte jeho diferenční rovnici.

$$O = [0.5 + 0.5i, 0.5 - 0.5i]$$

$$X = [1, -1]$$

$$H(z) = \frac{(z - (0.5 + 0.5i))(z - (0.5 - 0.5i))}{(z - 1)(z + 1)} = \frac{(z - 0.5 - 0.5i)(z - 0.5 + 0.5i)}{(z - 1)(z + 1)}$$

$$H(z) = \frac{z^2 - 0.5z + 0.5iz - 0.5z + 0.25 - 0.25i - 0.5iz + 0.25i - 0.25i^2}{z^2 - 1} = \frac{z^2 - z + 0.5}{z^2 - 1}$$

Návrh filtru pomocí nul a pólů - příklad

Jsou zadány nuly a póly systému. Zjistěte jeho diferenční rovnici.

$$O = [0.5 + 0.5i, 0.5 - 0.5i]$$

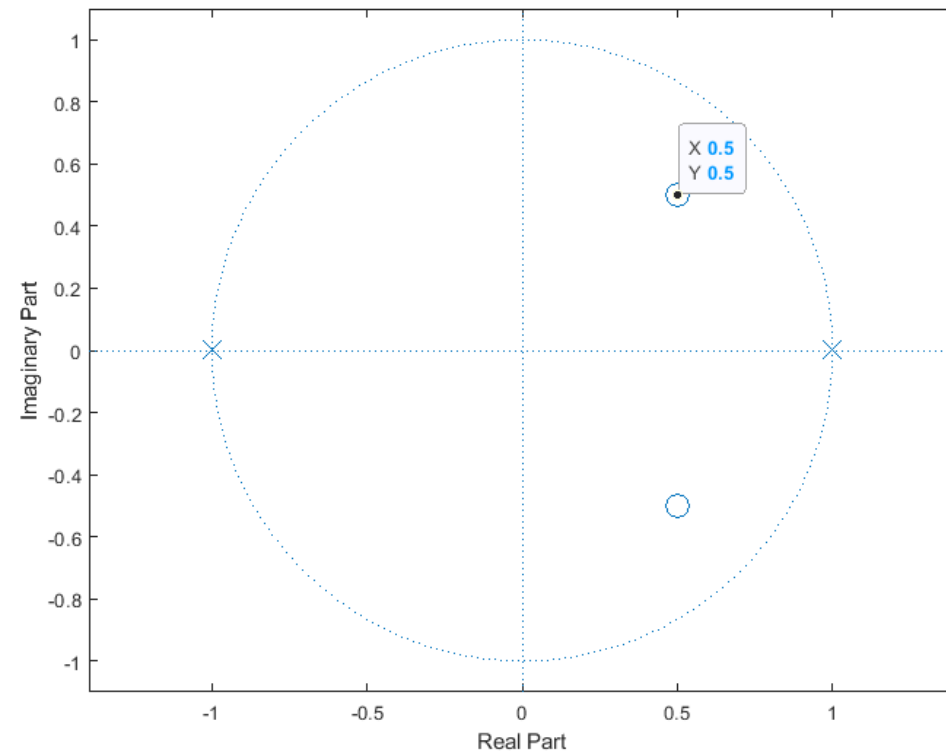
$$X = [1, -1]$$

$$H(z) = \frac{z^2 - z + 0.5}{z^2 - 1} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

$$y[n] = x[n] - x[n - 1] + 0.5x[n - 2] + y[n - 2]$$

$$B = [1, -1, 0.5]$$

$$A = [1, 0, -1]$$



Návrh nulovacího filtru - příklad

Navrhněte nulovací FIR filtr, který nuluje frekvenci $F=0.125$.

$$\omega = \frac{\pi}{4}$$

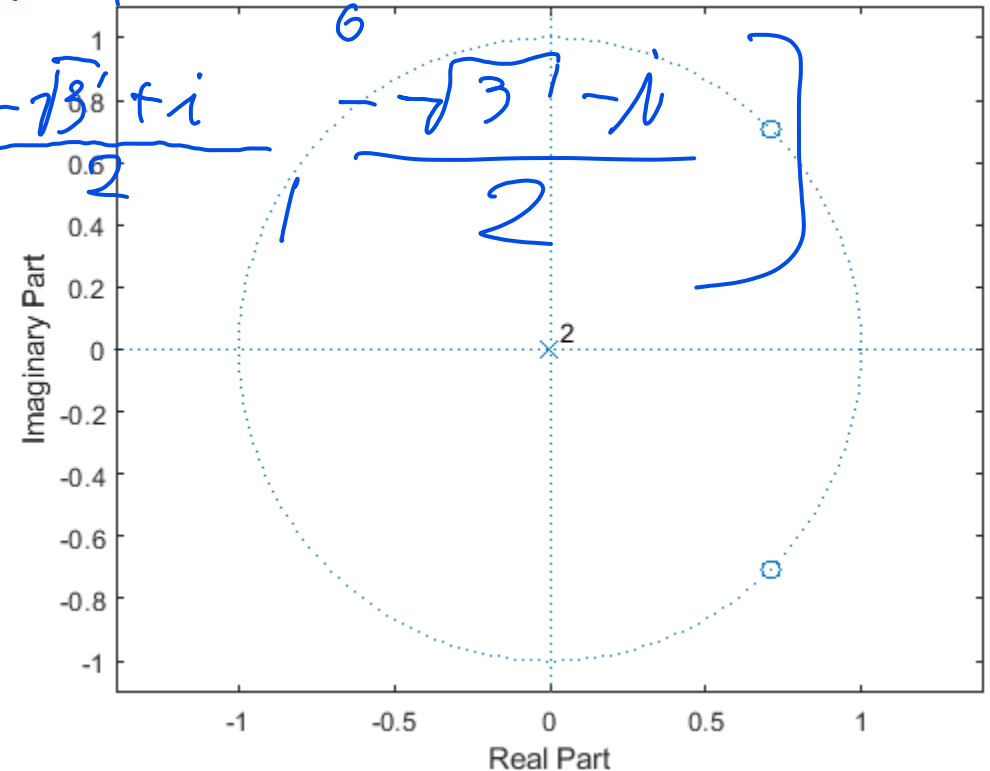
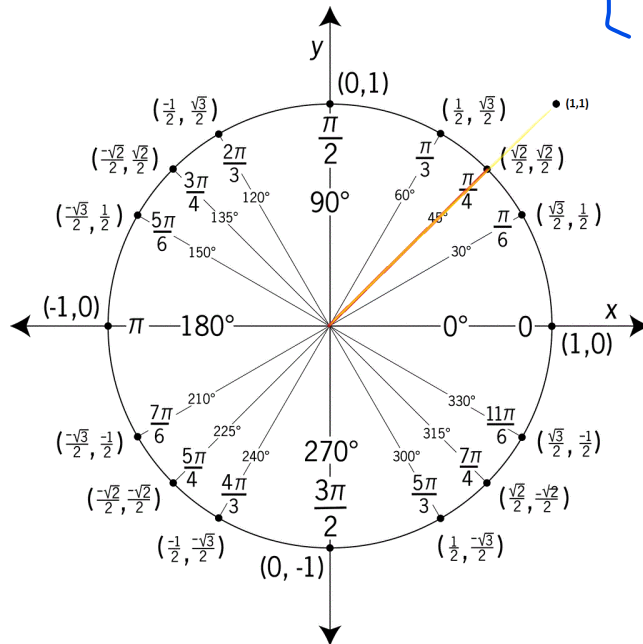
$$\text{nuly} = [e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{-\frac{i\pi}{4}}] \quad \text{póly} = [0, 0]$$

$$\text{nuly} = \left[\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$[1+i, 1-i]$$

$$F_1 = 0.48 \div \frac{\pi}{2}$$

$$F_2 = 0.82 \div \frac{5\pi}{6}$$



Návrh nulovacího filtru - příklad

Navrhněte nulovací FIR filtr, který nuluje frekvenci $F=0.125$.

$$\omega = \frac{\pi}{4} \quad \begin{array}{l} \text{nuly} = [e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{-i\pi}{4}}] \quad \text{póly} = [0, 0] \\ \text{nuly} = [\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}] \end{array}$$

$$H(z) = \frac{\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)}{z^2} = \frac{\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{z^2}$$

$$H(z) = \frac{\textcolor{red}{z}^2 - \frac{\textcolor{red}{\sqrt{2}}}{2}\textcolor{red}{z} + \frac{\textcolor{red}{\sqrt{2}}}{2}i\textcolor{red}{z} - \frac{\textcolor{green}{\sqrt{2}}}{2}\textcolor{green}{z} + \frac{\textcolor{green}{2}}{4} - \frac{\textcolor{green}{2}}{4}i - \frac{\textcolor{blue}{\sqrt{2}}}{2}i\textcolor{blue}{z} + \frac{\textcolor{blue}{2}}{4}i - \frac{\textcolor{blue}{2}}{4}i^2}{z^2} = \frac{z^2 - \sqrt{2}z + 1}{z^2} = \frac{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}{1}$$

Návrh nulovacího filtru - příklad

Navrhněte nulovací FIR filtr, který nuluje frekvenci $F=0.125$.

$$H(z) = 1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}$$

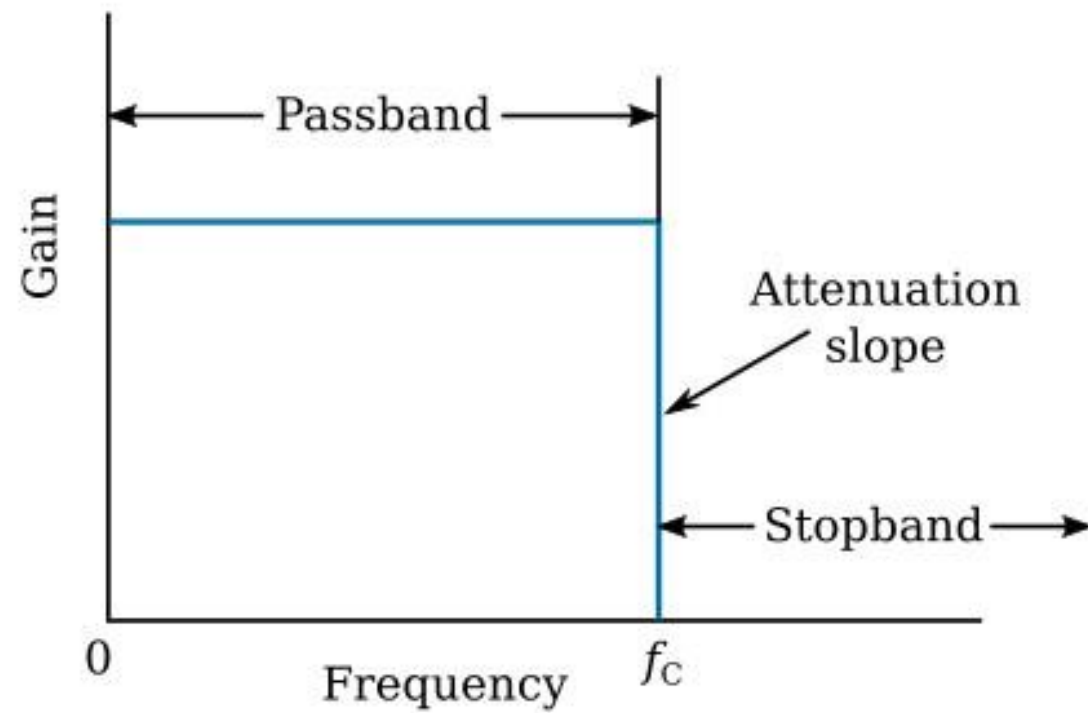
$$y[n] = x[n] - \sqrt{2}x[n-1] + x[n-2]$$

$$B = [1, -\sqrt{2}, 1]$$

$$A = [1]$$

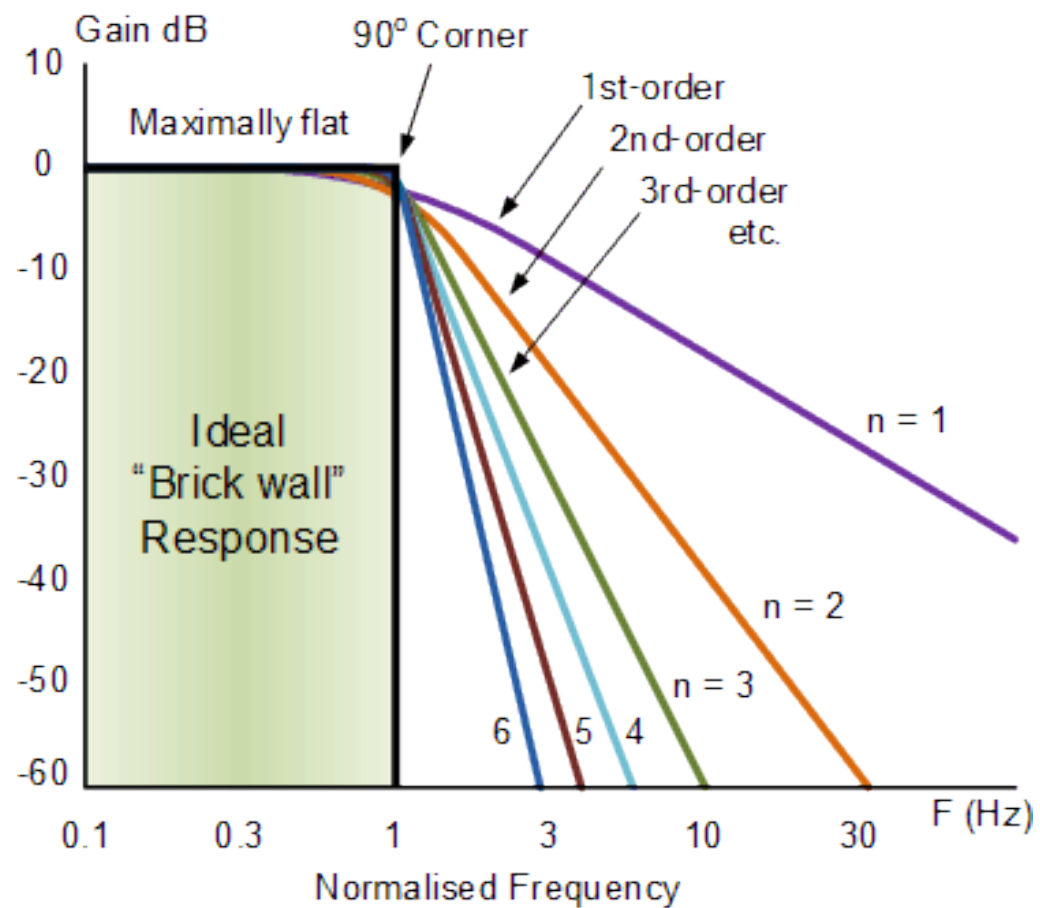
Filtry

Ideální filtr



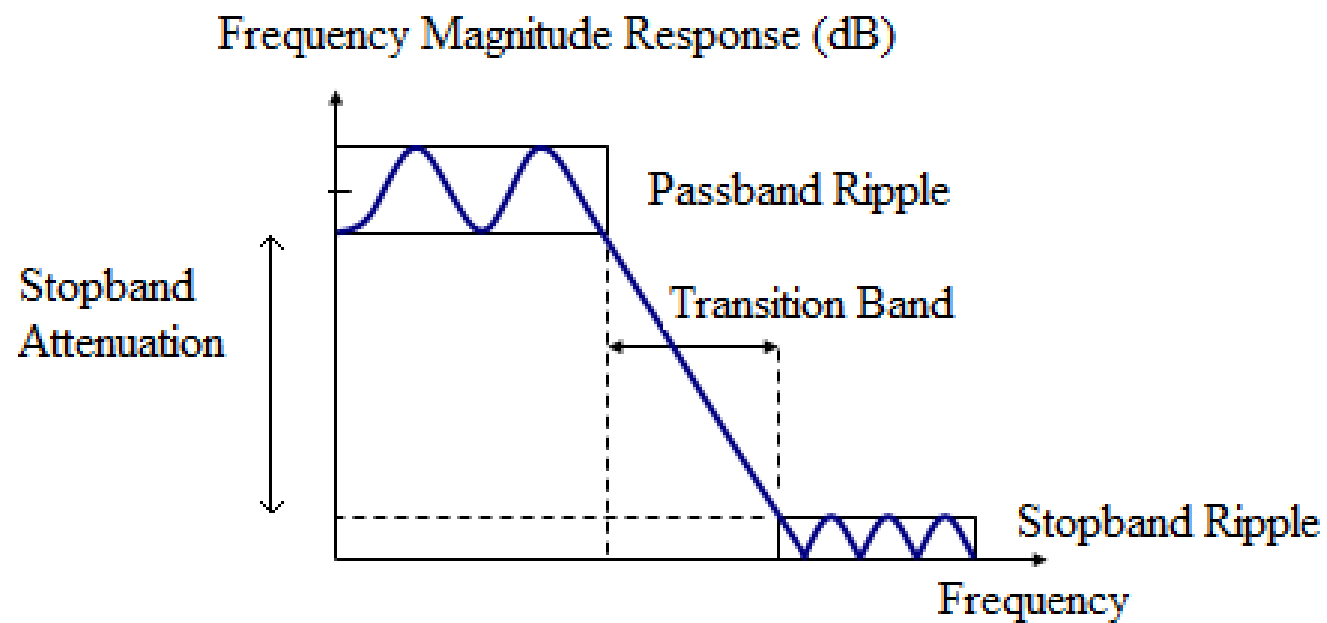
Filtry

Řád filtru



Filtry

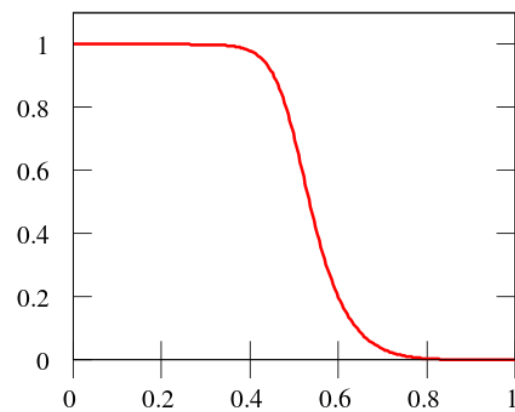
Zvlňění pásma



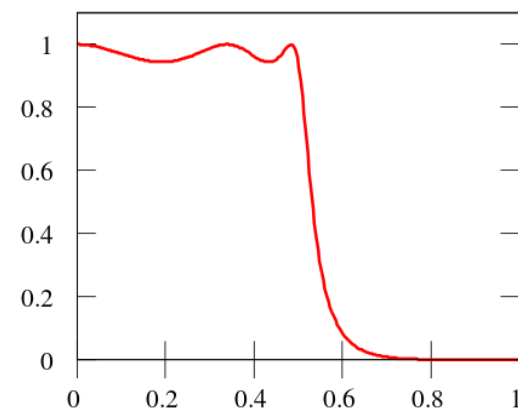
Filtry

Různé typy filtrů

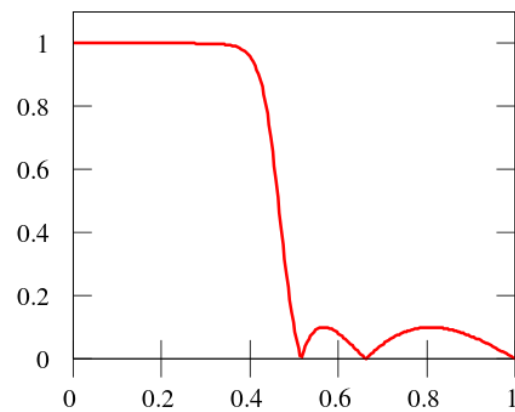
Butterworth



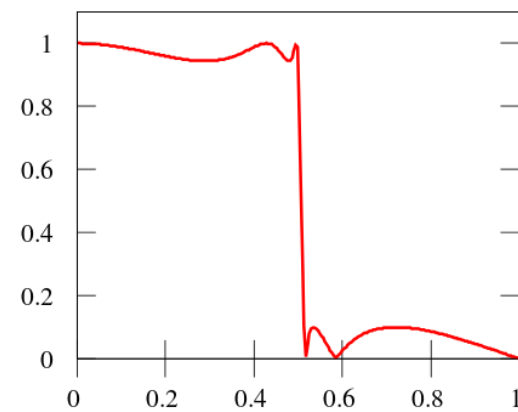
Chebyshev type 1



Chebyshev type 2



Elliptic



Návrh filtru v Matlabu

FIR

$b = \text{fir1}(n, F)$

$b = \text{fir2}(n, F, Am)$

IIR

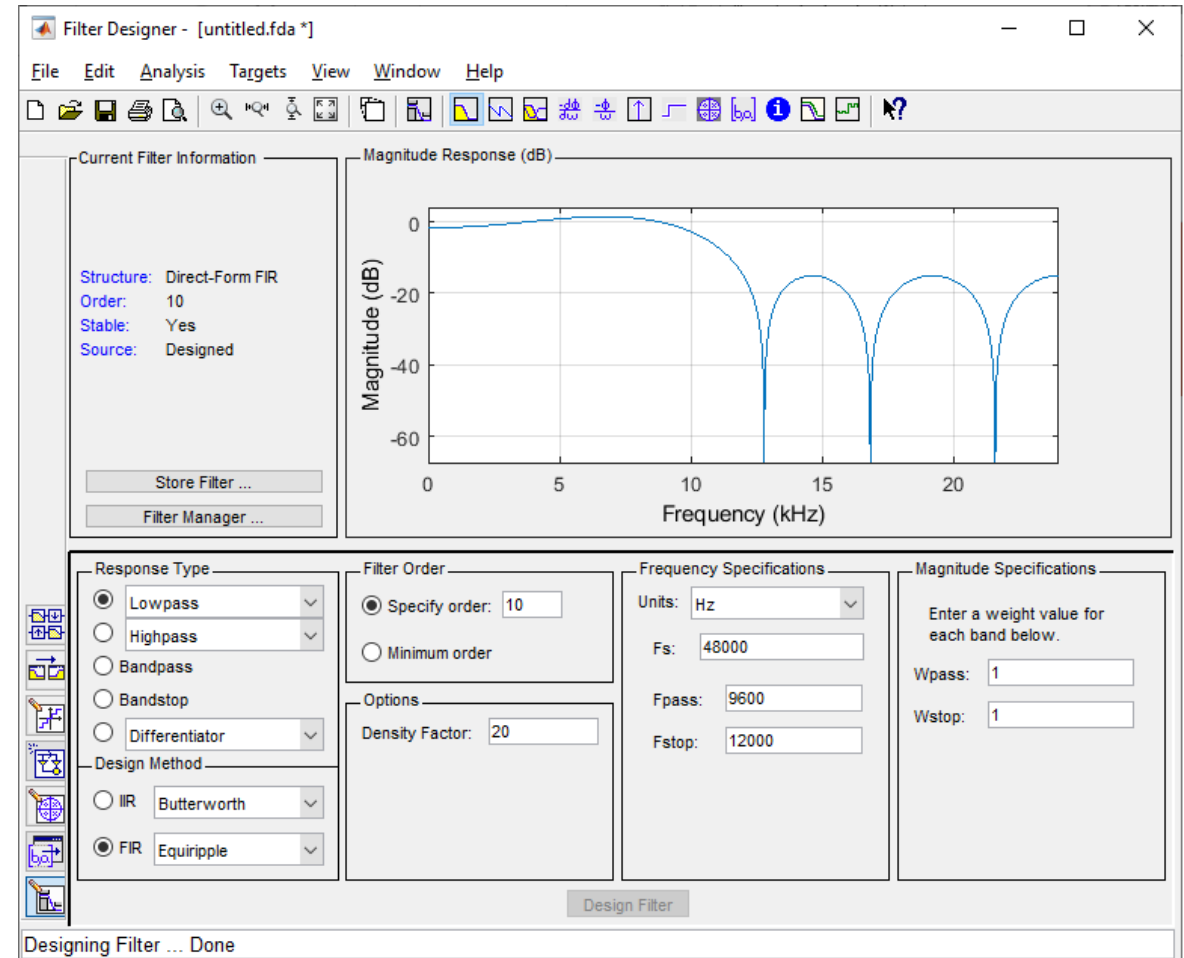
$[n, Wn] = \text{buttord}(Wp, Ws, Rp, Rs)$

$[b, a] = \text{butter}(n, Wn)$

$[n, Wp] = \text{cheb1ord}(Wp, Ws, Rp, Rs)$

$[b, a] = \text{cheby1}(n, Rp, Wp);$

fdatool



Úloha k odevzdání

Zvolte si dvě frekvence z rozsahu 100, 200 až 2600 Hz dle vašich iniciálů. ($A = 100$, $B = 200$, $Z = 2600$)

Vygenerujte signál obsahující frekvence 100, 200 až 2600 Hz, $F_s = 5400$, $T = 1$.

Navrhněte nulovací FIR filtr správným dosazením nul a pólů, který odstraní obě vámi zvolené frekvence.

Vygenerovaný signál poté přefiltrujte a zobrazte magnitudové spektrum původního i zfiltrovaného signálu.

Zobrazte frekvenční charakteristiku filtru pomocí příkazu **freqz** a rozložení nul a pólů pomocí **zplane**.

