# Signály a informace

## Přednáška č.4

## Signály ve frekvenční oblasti

# Připomenutí předchozí přednášky

1. Přednáška byla zaměřena na popis číslicových signálů v čase (v časové oblasti).
2. Číslicové signály lze klasifikovat podle různých kritérií.
3. Složitější signály lze složit z jednodušších (jednotkový pulz, jednotkový skok, obdélníkový pulz, atd.)
4. Základní operace s číslicovými signály lze realizovat jednoduchými algebraickými operátory (součet, rozdíl, součin).
5. Seznámení se základními parametry signálů (stř. hodnota, energie, výkon, atd.)
6. Tato přednáška je úvodem do popisu signálů ve frekvenční oblasti.

# Periodické signály

## Podmínka periodicity

u spojitých signálů: $x(t) = x(t + T)$

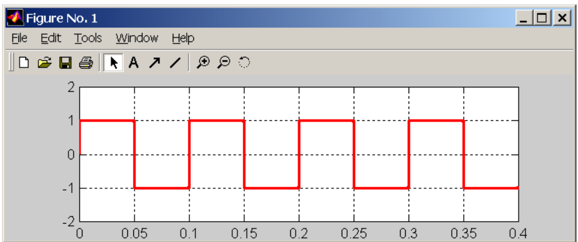
T … **perioda** [s] $f = 1/T$ … **frekvence** [Hz]

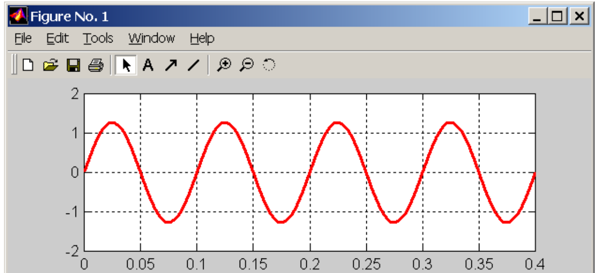
Příklady

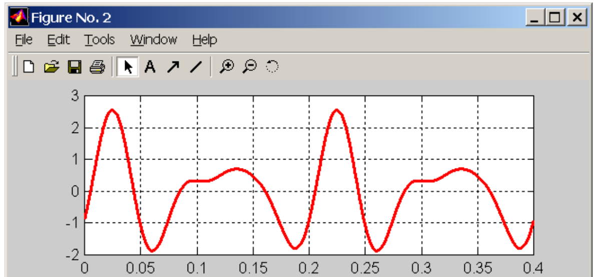
sinusovka,

obdélník

obecný




u číslicových signálů $x[n] = x[n + N]$

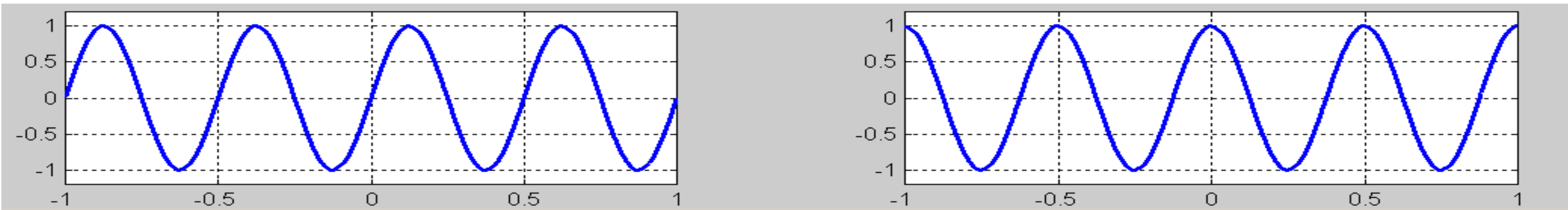
# Harmonické signály – spojité (1)

Periodické signály založené na funkcích
**sinus** a **kosinus**

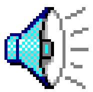
Sinusovka $$x(t) = A\sin(2\pi f t + \Phi)$$

Kosinusovka $$x(t) = A\cos(2\pi f t + \Phi)$$

*A* ... amplituda, *f* … frekvence, $\omega = 2\pi f$ … kruhová frekvence, Φ … fáze




čistý sinusový zvuk generuje např. ladička

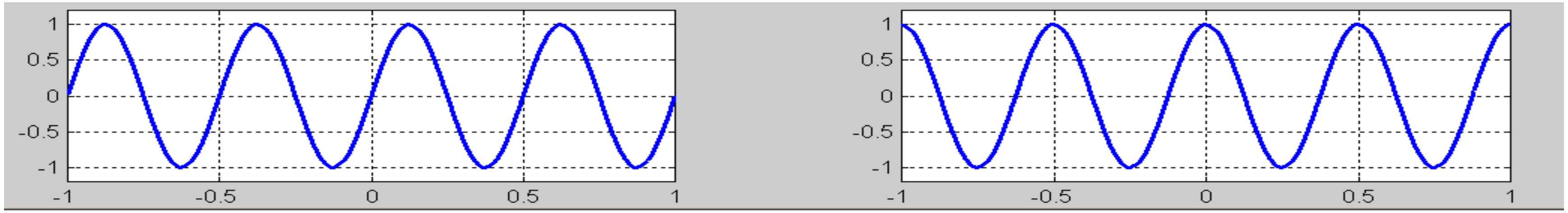
 $x(t) = A\sin(2\pi 440 t)$ „komorní A“ 440 Hz

# Harmonické signály – spojité (2)

Vztah funkcí **sinus** a **kosinus**

$$\cos(2\pi f t) = \sin(2\pi f t + \pi / 2)$$

Kosinusovka je posunutá o *π*/2 vůči sinusovce




Funkce **cos** je **sudá** (symetrická kolem osy y)

platí: *f(x) = f(-x)*

Funkce **sin** je **lichá** *f(x) = -f(-x)*

***Při popisu signálů kvůli sudosti <u>preferujeme funkci cos</u>.***

# Harmonické signály – spojité (3)

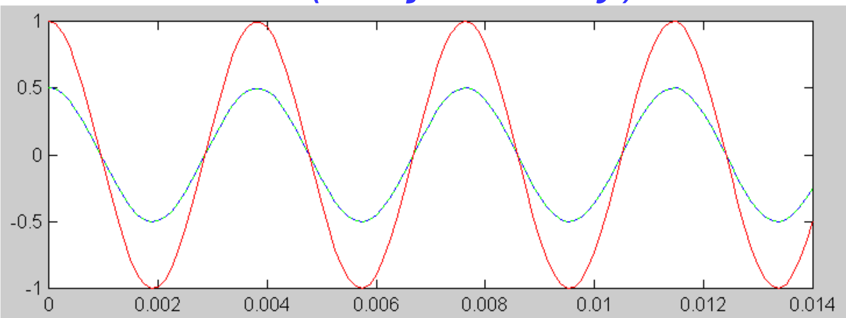
Význam parametrů u zvukového signálu $A\cos(2\pi ft + \Phi)$

*A* … vliv na hlasitost, *f* … vliv na výšku tónu,

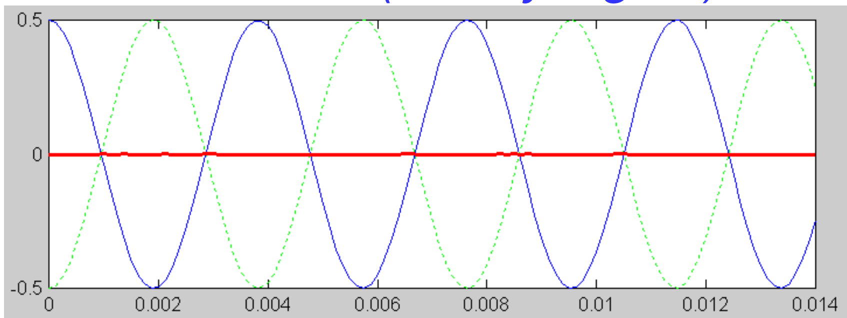
ukázka vlivu fáze:

$x(t) = \cos(2\pi ft) + \cos(2\pi ft + \Phi)$

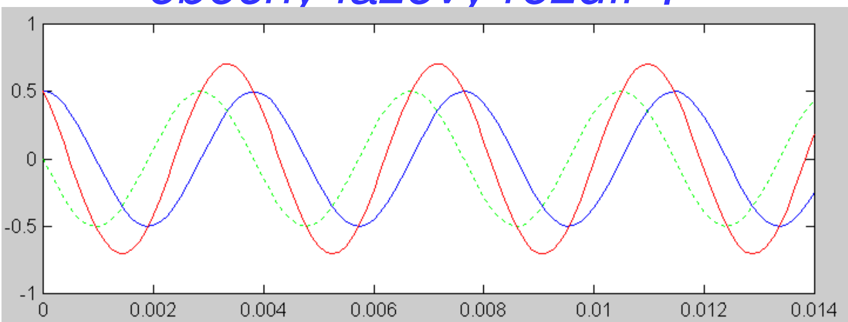
*Φ = 0 (dvojnásobný)*

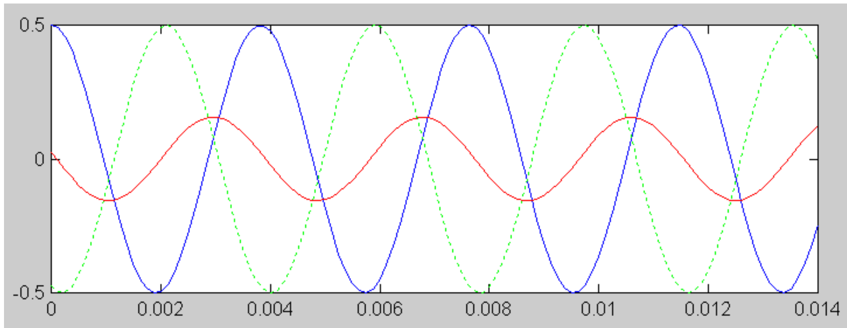



*Φ = π (nulový signál)*




*obecný fázový rozdíl Φ*

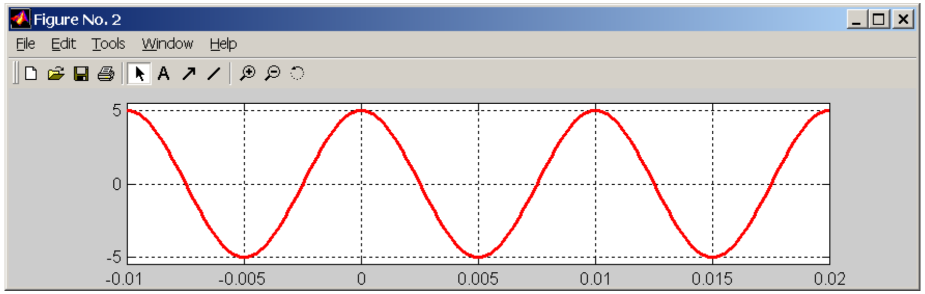


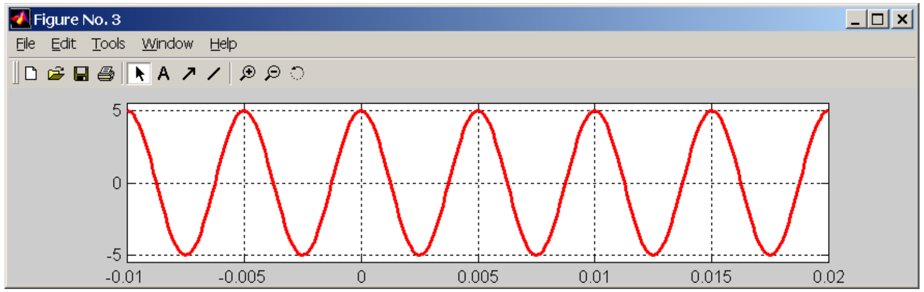



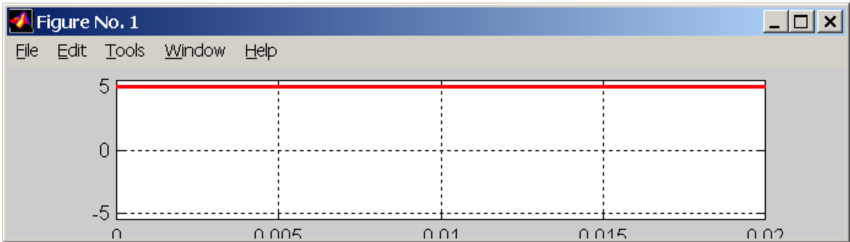
# Harmonické signály – spojité (4)

Kosinusovky o různých frekvencích - př. $5 \cos (2\pi f t)$

a) 100 Hz, b) 200 Hz, c) 0 Hz (konstanta)




**Konstantní signál lze vyjádřit kosinusovkou o nulové frekvenci a dané amplitudě**

# Exponenciální tvar harmonických signálů

## Eulerovy vztahy

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \qquad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Sinusovka $\quad x(t) = A \sin(2\pi f t + \Phi) = \mathrm{Im}(A e^{j2\pi f t + \Phi})$

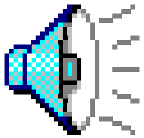
Kosinusovka $\quad x(t) = A \cos(2\pi f t + \Phi) = \mathrm{Re}(A e^{j2\pi f t + \Phi})$

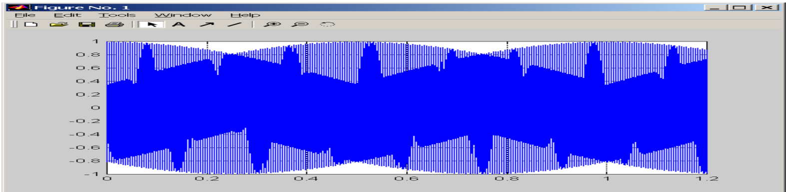
**Exponenciální tvar je výhodnější** pro některé výpočty (zejména násobení a dělení)

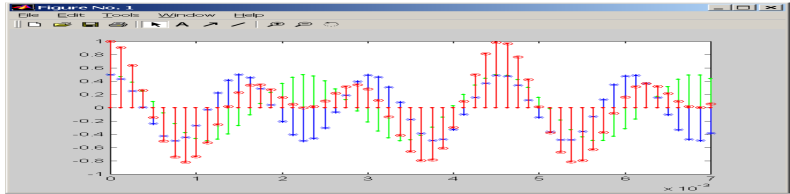
# Součet dvou sinusových signálů (1)

Součet dvou kosinusovek o různých frekvencí

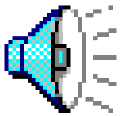
a) vzdálené frekvence:  440Hz (A1) a 659 Hz (E2)

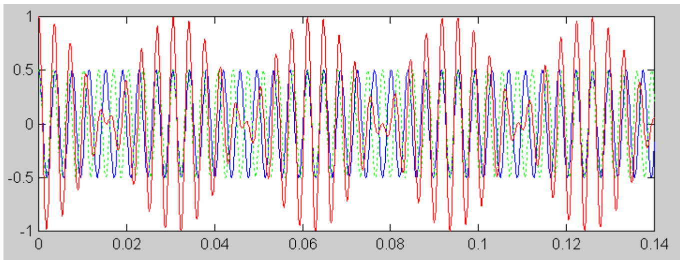




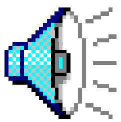


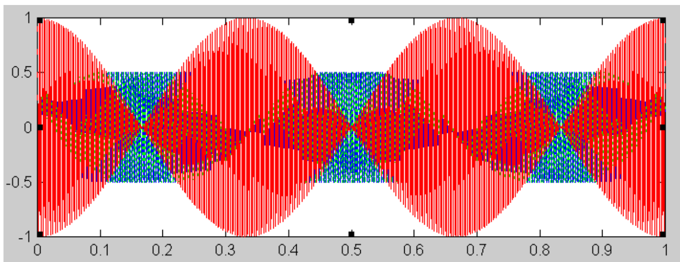
b) bližší frekvence:  262Hz(C1) a 294Hz(D1)






b) blízké frekvence 262Hz(C1) a 265Hz  - vznik záznějů





# Součet dvou sinusových signálů (2)

**Vznik záznějů** - matematické odvození

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$$ v trigon. tvaru těžko vyčíslitelné

Převedeme do exp. tvaru a nahradíme $f_c = (f_1 + f_2)/2 \quad f_\Delta = (f_1 - f_2)/2$

$$x(t) = \mathrm{Re}\{e^{j2\pi f_1 t} + e^{j2\pi f_2 t}\} = \mathrm{Re}\{e^{j2\pi(f_c - f_\Delta)t} + e^{j2\pi(f_c + f_\Delta)t}\}$$

$$= \mathrm{Re}\{e^{j2\pi f_c t}(e^{-j2\pi f_\Delta t} + e^{j2\pi f_\Delta t}\} = \mathrm{Re}\{e^{j2\pi f_c t}.2\cos(2\pi f_\Delta t)\}$$

$$= 2\cos(2\pi f_\Delta t).\cos(2\pi f_c t)$$

Výsledek: součin 2 kosinusovek

„pomalá“ kosinusovka „moduluje“ průběh „rychlé“ kosinusovky ($f_c$)

čím jsou frekvence bližší, tím je modulace pomalejší a slyšitelnější

**Praktické využití – 1)** laďení nástrojů podle referenčního zdroje

2) klavír: více strun - vibrující tón

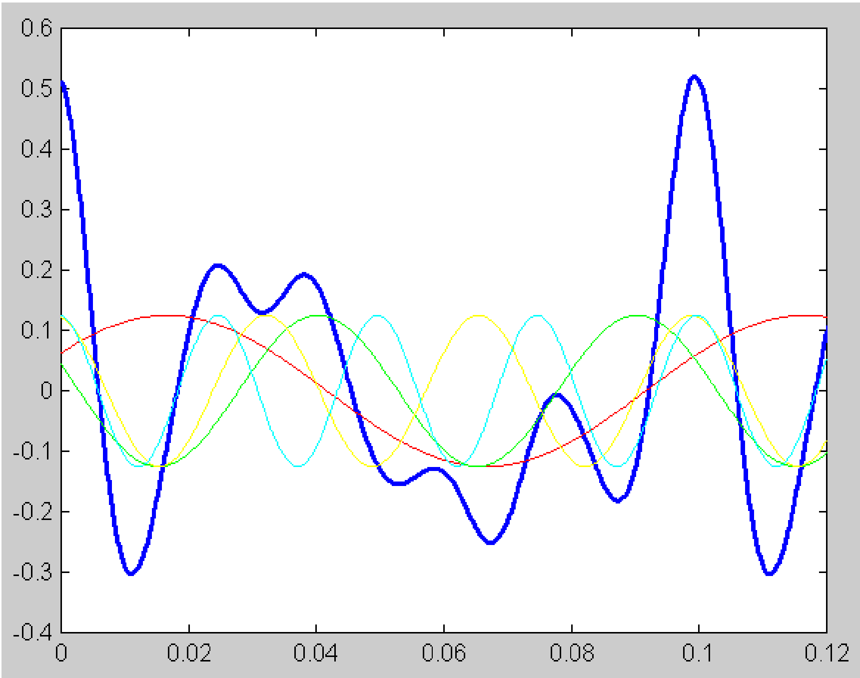
# Součet více sinusových signálů (1)

Pro praxi nejvýznamnější je případ takzvaných **harmonicky vázaných signálů** – kosinusovky s frekvencemi, které jsou násobky základní frekvence

$$x = \sum_{k=0}^{N} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$$

**Výsledkem je vždy <u>periodický signál</u>**
o frekvenci $f_0$

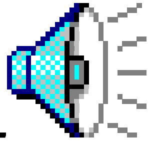
*„Základní harmonická“,*
*„vyšší harmonické“*



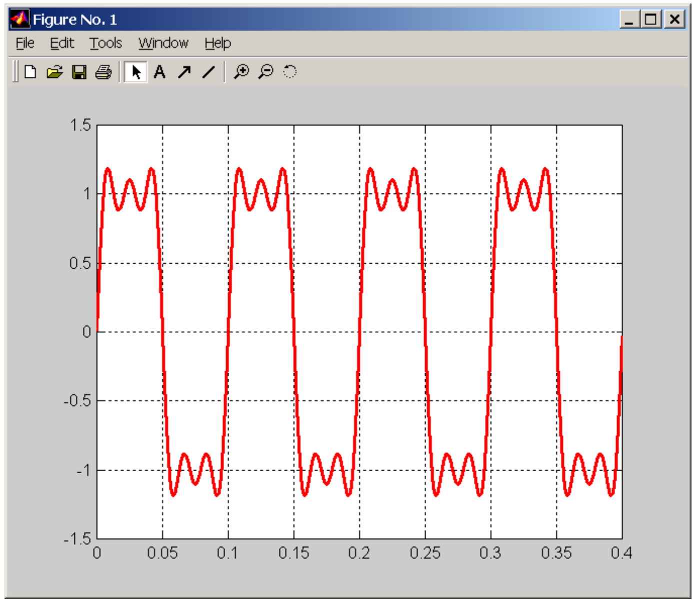
# Součet více sinusových signálů (2)

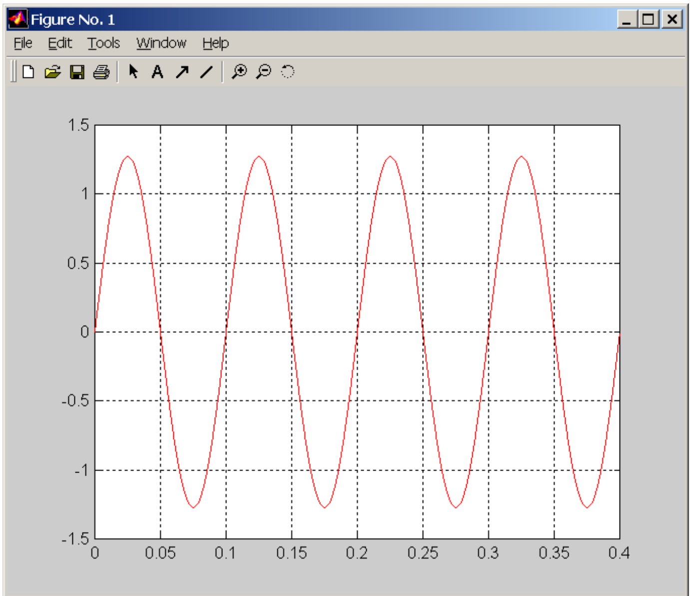
Příklady tzv. **harmonické syntézy** - tvorba obecných periodických signálů součtem harmonických složek

*Obdélníkový signál (z prvních 3 složek)*



$$x(t) = \cos(2\pi f t - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{3}\cos(2\pi 3 f t - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{5}\cos(2\pi 5 f t - \frac{\pi}{2})$$

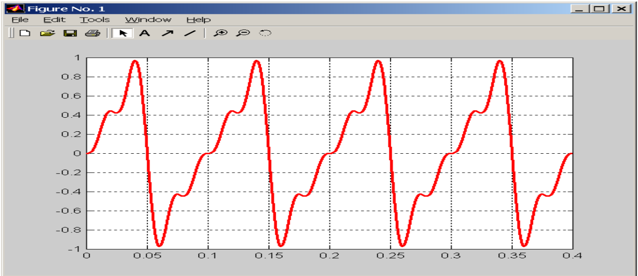


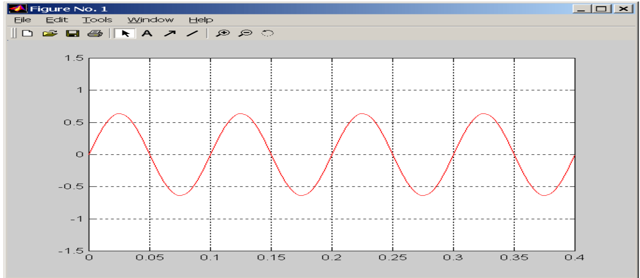



# Součet více sinusových signálů (3)

*Pilovitý signál (z prvních 4 složek)*

$$x(t) = \cos(2\pi ft - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{2}\cos(2\pi 2ft - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{3}\cos(2\pi 3ft - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{4}\cos(2\pi 4ft - \frac{\pi}{2})$$

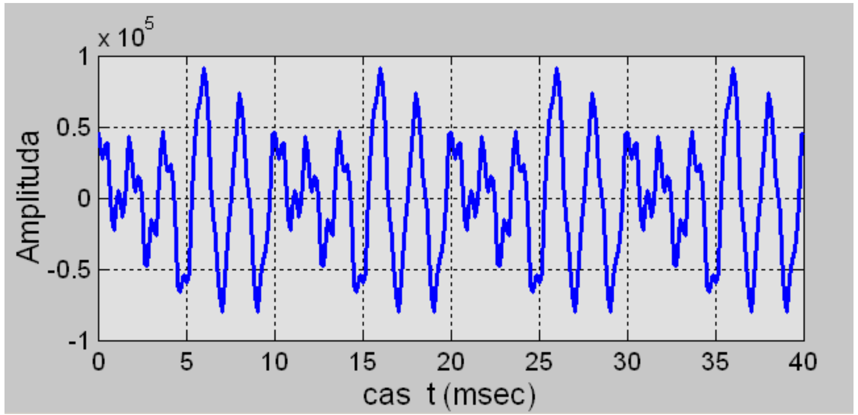



*Obecný signál*

$$x(t) = 12.2\cos(2\pi 2ft + 1.5) + 29.4\cos(2\pi 4ft + 1.8) +$$
$$+ 48.8\cos(2\pi 5ft - 0.18) + 13.6\cos(2\pi 16ft - 1.4)$$

*(hláska a)*



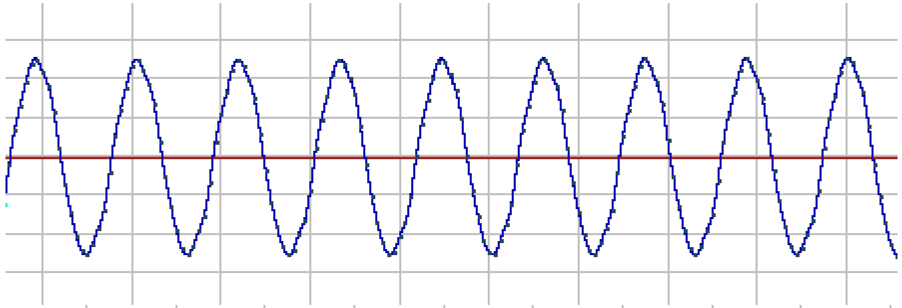

**Praktické využití: syntéza hudebních a řečových zvuků**

# Ukázky hudebních signálů (1)

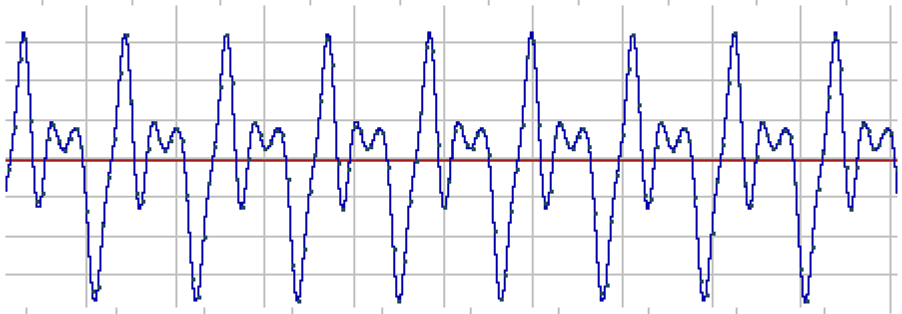
***Tón je periodický signál*** *(ve zjednodušeném případě),*

*Nástroje se liší zastoupením vyšších harmonických ($f_0$=440Hz)*

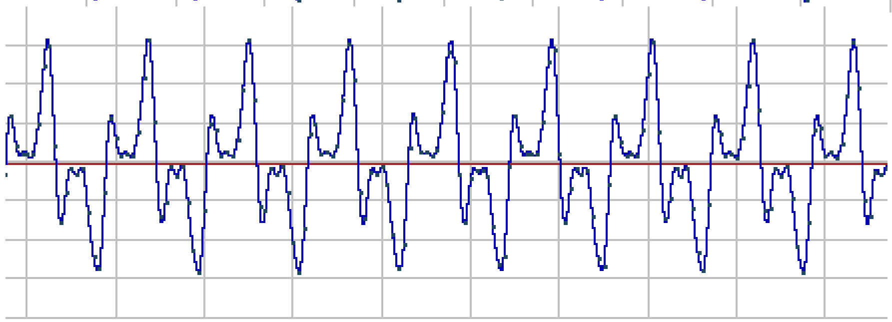
***Zobc. flétna***



***Příčná flétna***



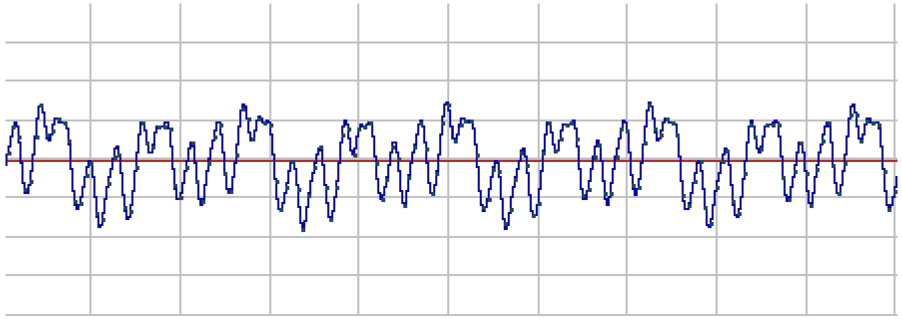
***Klarinet***



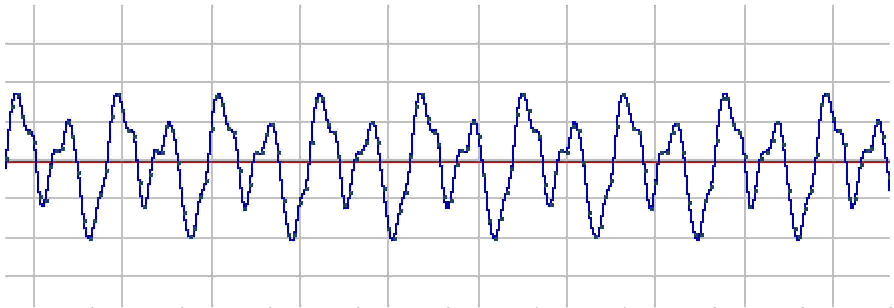
# Ukázky hudebních signálů (2)

*($f_0$=440Hz)*

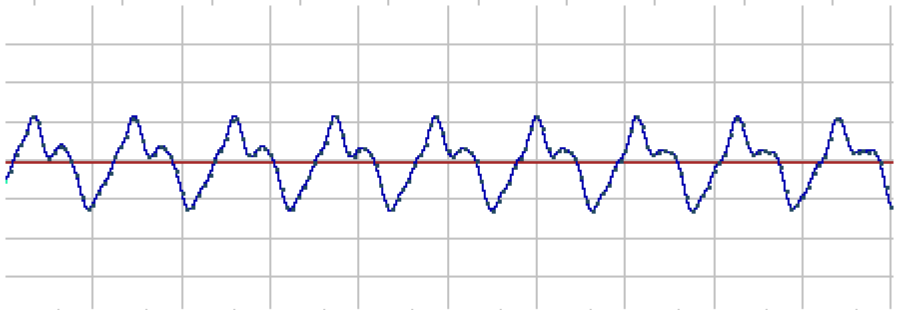
***Varhany***



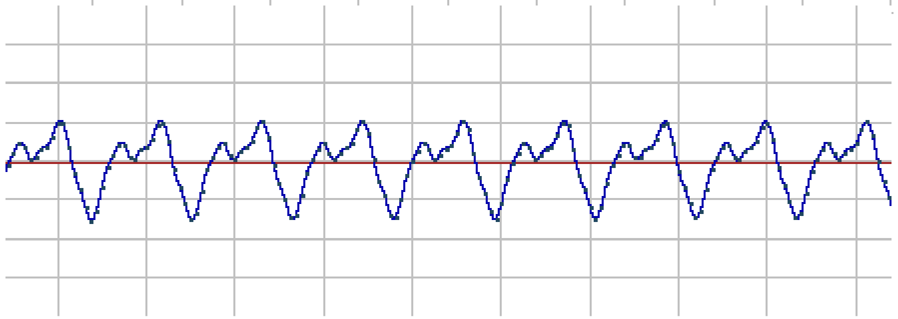
***Housle***



***Klavír***



***Kytara***



# Spektrum (1)

**Závislost amplitud a fází harmonických složek na frekvenci**

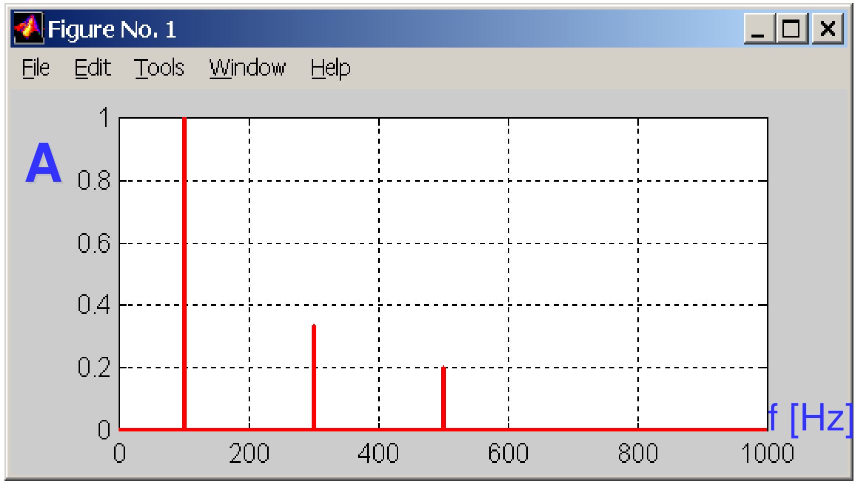
**Amplitudové spektrum** *A jako funkce f*

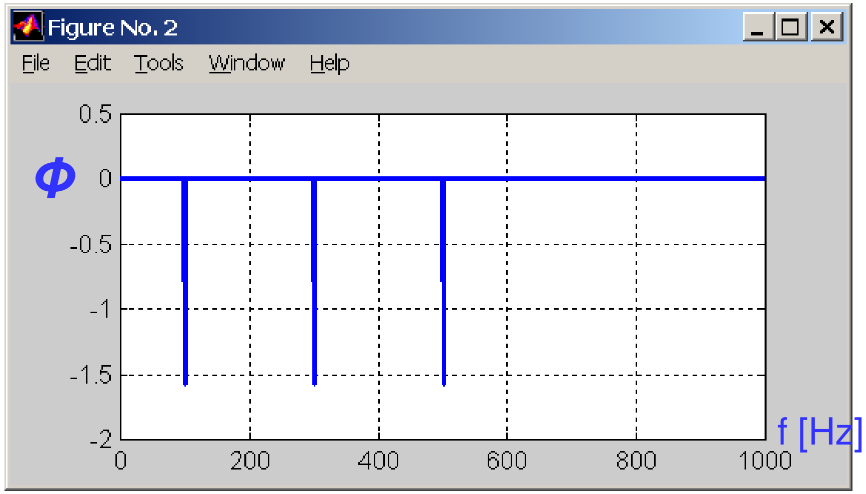
**Fázové spektrum** *Φ jako funkce f*

*poznámka - fáze je vztažena vůči kosinové funkci!!*

Příklady: $$x(t) = \cos(2\pi ft - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{3}\cos(2\pi 3ft - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{5}\cos(2\pi 5ft - \frac{\pi}{2})$$

*Obdélníkový signál (100Hz)*



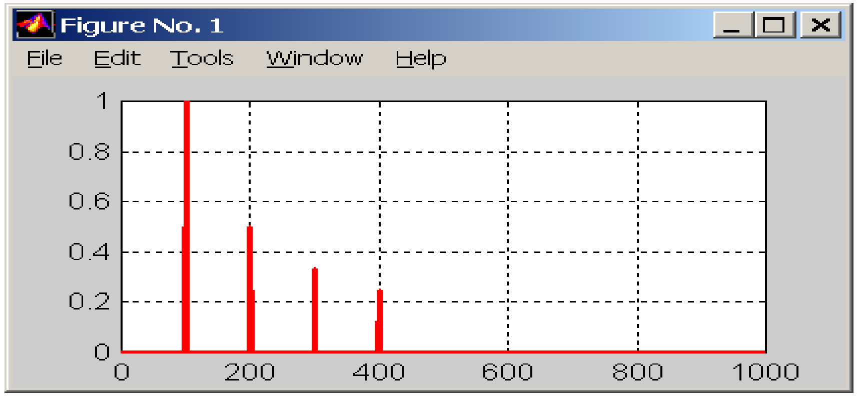



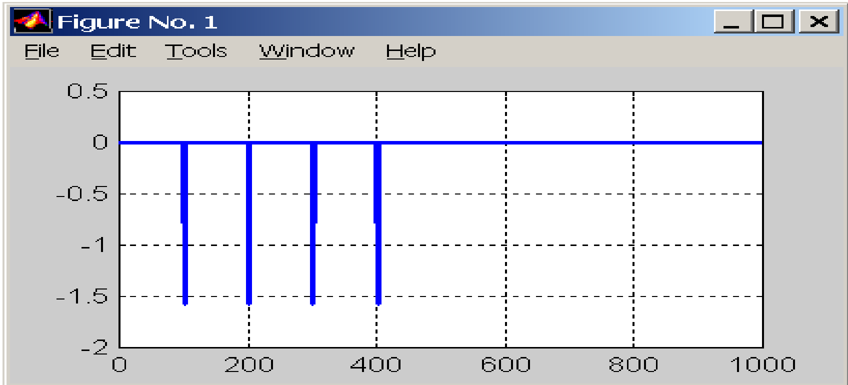
# Spektrum (2)

Příklady:

*Pilovitý signál (100Hz)*

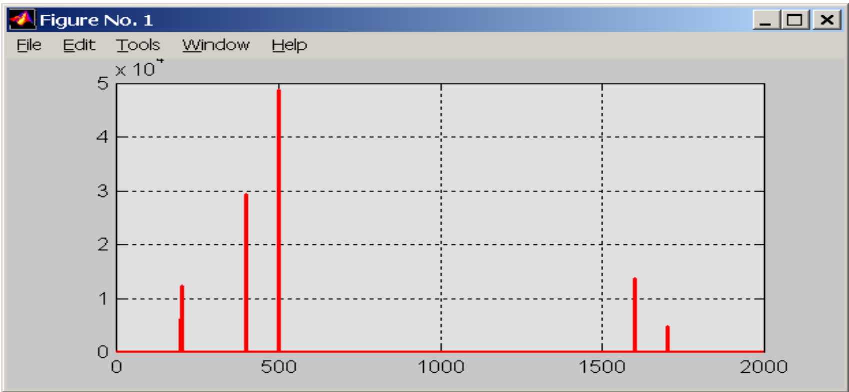
$$x(t) = \cos(2\pi ft - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{2}\cos(2\pi 2 ft - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{3}\cos(2\pi 3 ft - \frac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{4}\cos(2\pi 4 ft - \frac{\pi}{2})$$

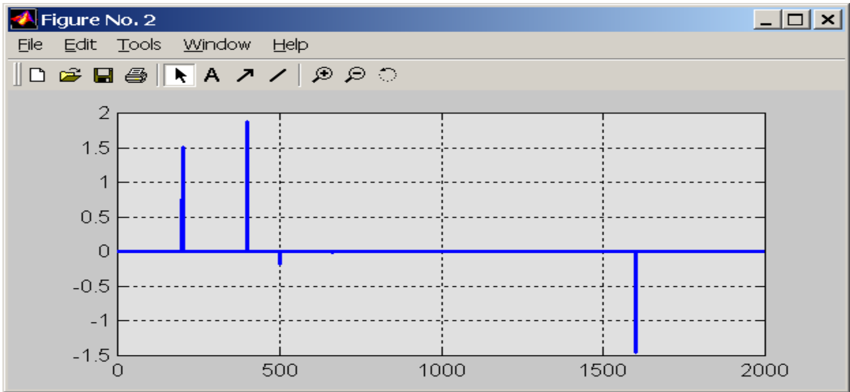



*Syntetická hláska „a“*

$$x(t) = 12.2\cos(2\pi 2 ft + 1.5) + 29.4\cos(2\pi 4 ft + 1.8) +$$
$$+ 48.8\cos(2\pi 5 ft - 0.18) + 13.6\cos(2\pi 16 ft - 1.4)$$



# Fourierovy řady (1)

Východiska:

- Viděli jsme, že kombinací zastoupení vyšších harmonických lze vytvořit prakticky libovolný periodický signál – **harmonická syntéza**.
- Platí i obrácené tvrzení: Libovolný periodický signál lze rozložit na jednotlivé harmonické složky - **harmonická analýza.**
- Metoda rozkladu **– Fourierovy řady**
- **Jean Baptiste Fourier** (francouzský matematik 1768 -1830)

# Fourierovy řady (2)

**Fourierovy řady (Fourierův rozvoj):**

- umožňují **rozložit** a **složit** jakýkoliv
  **periodický**
  **spojitý**
  signál na harmonické složky.
- Existují i jiné možné rozvoje (řady) – FŘ představují **nejlepší** aproximaci signálu při daném počtu složek.
- Pro výpočet rozkladu je nutné, aby byl signál popsán **analytickou funkcí**.

# Fourierovy řady (3)

## Trigonometrický tvar Fourierových řad:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \right]$$

- $a_0$ představuje stejnosměrnou složku signálu
- každá složka je popsána kombinací funkcí *sin* a *cos*
- počet složek je v obecném případě nekonečný
- pro daný signál je nutné spočítat koeficienty $a_k$ a $b_k$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt \qquad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

***Nevýhodou jsou tři typy koeficientů.***

# Fourierovy řady (4)

## Polární tvar Fourierových řad:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

- součet sinusovky a kosinusovky o stejné frekvenci je zde nahrazen pouze kosinusovkou rozšířenou o obecný fázový úhel
- pro daný signál je nutné spočítat koeficienty $c_k$ a $\varphi_k$
- umožňuje výpočet spektra (jednostranného) – závislost $c_k$ a $\varphi_k$ na $k$
- výpočet se provádí přes $a_k$ a $b_k$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \varphi_k = \arctan(b_k / a_k)$$

# Fourierovy řady (5)

## Exponenciální tvar Fourierových řad:

$$x(t) = \sum_{k=-\omega}^{\infty} X_k \exp(jk\omega_0 t)$$

- $X_k$ je komplexní koef., definován i pro záporná čísla k
- vede na koncept dvoustranného spektra – pro kladné i záporné frekvence
- složky se zápornou frekvencí mají význam kosinusovek s opačnou fází
- vztahy mezi koeficienty FŘ v různých tvarech

$$X_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \qquad c_k = 2|X_k|$$

***výhoda exponenciálního tvaru – snazší výpočet***

# Číslicové harmonické signály

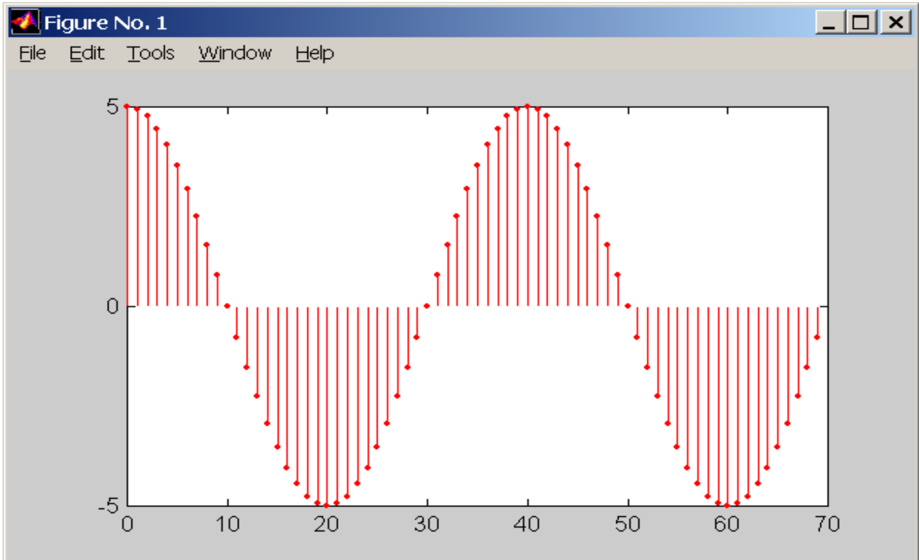
Získáme je vzorkováním spojitých funkcí

$$x[n] = A\cos(2\pi \cdot fnt_s) = A\cos(2\pi n \cdot f / f_s)$$

MATLAB

např. kosinusovka s frekvencí 200 Hz

```
fs = 8000;   n = 0:8000; f = 200; A = 5;
x = A * cos (2*pi*n*f / fs);
dtplot (n(1:70), x(1:70));
```



# Číslicové Fourierovy řady

**Pouze exponenciální tvar**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi nk / N)$$

- DFŘ - **číslicové (diskrétní) Fourierovy řady**
- aplikovatelné na **konečný** signál daný výčtem vzorků (*N*)
- pokud těchto *N* vzorků tvoří právě jednu periodu, pak pro číslicový signál dostaneme stejný výsledek, jako bychom dostali aplikací FŘ na původní spojitý signál
- **DFT** – diskrétní Fourierova transformace – používá se pro výpočet spektra libovolného signálu
- **FFT** – rychlá metoda výpočtu DFT

# Shrnutí přednášky

- **Harmonické signály:** popsány funkcemi sin(x) a cos(x) a jejich lineárními kombinacemi,
- **Harmonicky vázané funkce:** funkce sin a cos s frekvencemi, které jsou násobkem základní frekvence
- Operace s harmonickými funkcemi je vhodné provádět v exp. tvaru (Eulerovy vztahy)
- Libovolný periodický signál lze **syntetizovat** – součtem harmonicky vázaných kosinusovek
- Libovolný periodický signál lze **analyzovat** - rozložit na základní harmonické složky pomocí Fourierových řad
- Frekvenční analýzu (spektrum) u číslicových signálů lze provést pomocí číslicové Fourierovy transformace (FFT)

# Ukázky příkladů v testu

1. Je dán signál

$$y(t) = 10\cos(100t) + 5\cos(200t+\pi/2) + 2$$

a) Určete základní frekvenci signálu

$2\pi f = 100$ $\quad f = 100/2\pi = 15{,}9$ Hz

b) Nakreslete amplitudové a fázové spektrum

1. ss složka o amplitudě 2 ($f = 0$)
2. zákl. složka $f = 15{,}9$ Hz, amp. 10, fáze 0
3. další složka $f = 31{,}8$ Hz, amp. 5, fáze $\pi/2$

# Konec přednášky

Děkuji za pozornost.