Signály a informace

9. cvičení

Z-transformace

Z-transformace převádí popis signálů a systémů do komplexní roviny podle vztahu

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Účelem je snazší a efektivnější **analýza** chování systémů, jejich **návrh** a také výpočet **odezev**

Z-transformace

Z-transformace převádí popis signálů a systémů do komplexní roviny podle vztahu

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Účelem je snazší a efektivnější **analýza** chování systémů, jejich **návrh** a také výpočet **odezev**

Výše uvedený vztah převede signál **x** na polynom s komplexní proměnnou **z**.

Příklad:

signál $x[0]= 2$, $x[1]= 5$, $x[2]= 3$, $x[3]= 4$ ~ $x[n] = [2, 5, 3, 4]$

je transformován na

$X[z] = 2z^{0} + 5z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$

Z-transformace

Proveďte Z-transformaci signálu **x**
tvořeného vzorky x[n] = [3, 2 ,-1 ,0 ,5] a začínajícího v čase (indexu) 0
n = [0, 1, 2, 3, 4]

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Z-transformace

Proveďte Z-transformaci signálu **x**
tvořeného vzorky x[n] = [3, 2 ,-1 ,0 ,5] a začínajícího v čase (indexu) 0
n = [0, 1, 2, 3, 4]

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Řešení:

$X[z] = 3 + 2z^{-1} - z^{-2} + 5z^{-4}$

Z-transformace

Proveďte Z-transformaci signálu **x**
tvořeného vzorky x[n] = [3, 2 ,-1 ,0 ,5] a začínajícího v čase (indexu) 0
n = [0, 1, 2, 3, 4]

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Řešení:

$X[z] = 3 + 2z^{-1} - z^{-2} + 5z^{-4}$

Jak se změní výsledek transformace, pokud má první vzorek index 2?

Z-transformace

Proveďte Z-transformaci signálu **x**
tvořeného vzorky x[n] = [3, 2 ,-1 ,0 ,5] a začínajícího v čase (indexu) 0
n = [0, 1, 2, 3, 4]

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Řešení:

$X[z] = 3 + 2z^{-1} - z^{-2} + 5z^{-4}$

Jak se změní výsledek transformace, pokud má první vzorek index 2?

Řešení:

$X[z] = 3z^{-2} + 2z^{-3} - z^{-4} + 5z^{-6}$

Z-transformace

Význam proměnné $\mathbf{z^{-1}}$ vyplývá ze Z-transformace jednotkového pulzu

jednotkový impulz: $x[n] = \delta[n]$ $\rightarrow$ $X[z] = 1 \cdot z^0 = 1$ (a)

posunutý j. impulz: $x[n] = \delta[n-1]$ $\rightarrow$ $X[z] = z^{-1}$ (b)

Z-transformace

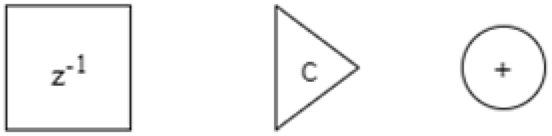
Význam proměnné $\mathbf{z^{-1}}$ vyplývá ze Z-transformace jednotkového pulzu

jednotkový impulz:	$x[n] = \delta[n]$	$\rightarrow$	$X[z] = 1 \cdot z^0 = 1$	(a)
posunutý j. impulz:	$x[n] = \delta[n-1]$	$\rightarrow$	$X[z] = z^{-1}$	(b)
libovolný signál:	$x[n] = [a, b, c, d \ldots]$	$\rightarrow$	$X[z] = a + bz^{-1} + cz^{-2} + dz^{-3} \ldots$	(c)
posunutý libov. sig:	$y[n] = x[n-1] = [0, a, b, c, d, \ldots]$	$\rightarrow$	$Y[z] = az^{-1} + bz^{-2} + cz^{-3} + dz^{-4} = z^{-1} X[z]$	(d)

Ze vztahů (b) i (d) je vidět, že člen $\mathbf{z^{-1}}$ má význam jednotkového zpoždění (zpoždění o 1 vzorek), a tedy např. $\mathbf{z^{-2}}$ znamená zpoždění o 2 vzorky, $\mathbf{z^{-k}}$ znamená zpoždění o k vzorků

Z-transformace a schémata systémů

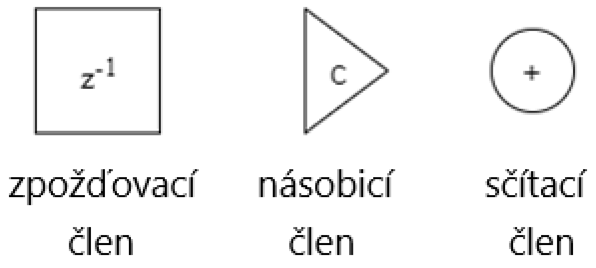
Symbol **z^{-1}** se proto používá i ve schématech systémů, které lze vytvořit pomocí 3 prvků a propojovacích šipek



zpožďovací člen | násobicí člen | sčítací člen

Z-transformace a schémata systémů

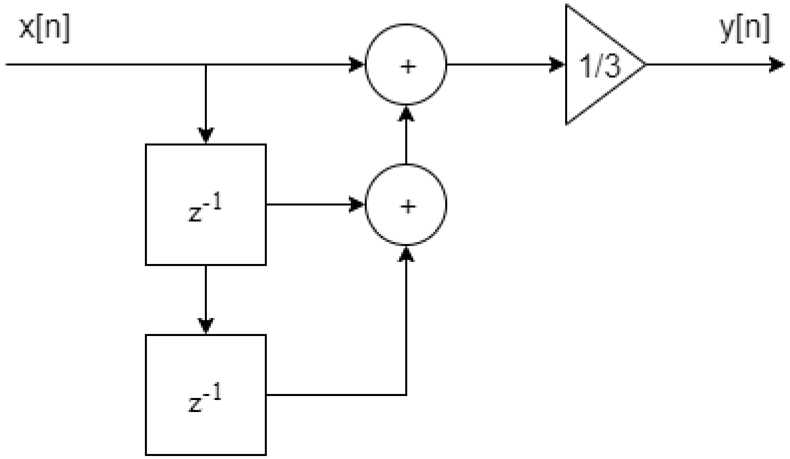
Symbol $\mathbf{z^{-1}}$ se proto používá i ve schématech systémů, které lze vytvořit pomocí 3 prvků a propojovacích šipek



Příklad: schéma systému (filtru) průměrujícího vždy 3 vzorky za sebou (klouzavý průměr délky 3)

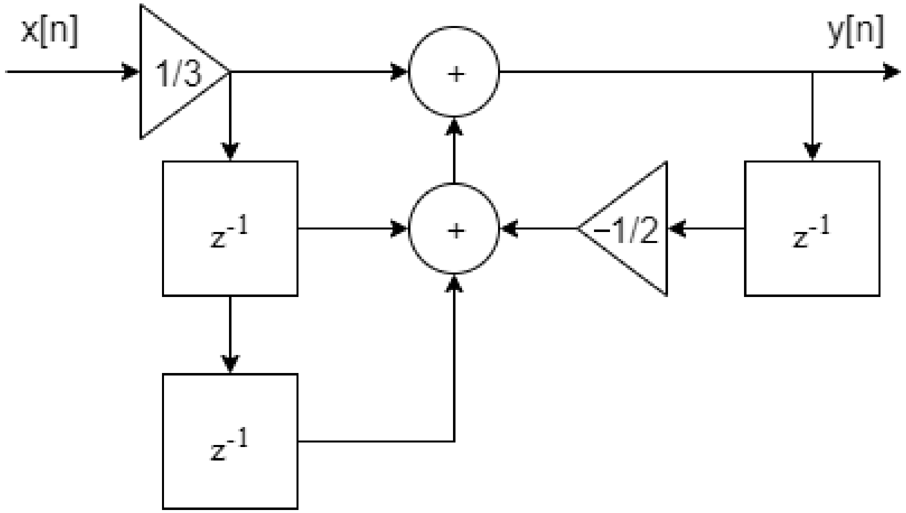
časový popis: $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$

z-obraz: $Y[z] = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2})$



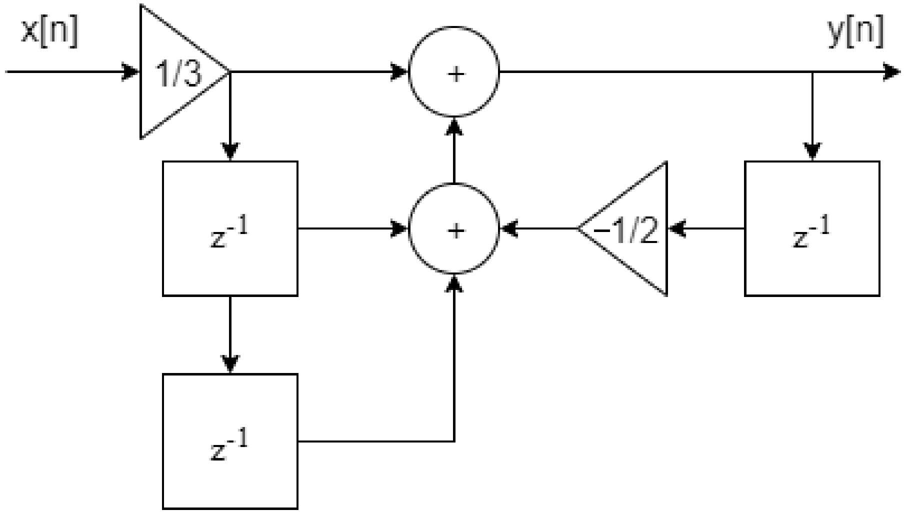
Z-transformace a schémata systémů

Vytvořte diferenční rovnici pro systém s následujícím schématem a určete zda jde o FIR nebo IIR



Z-transformace a schémata systémů

Vytvořte diferenční rovnici pro systém s následujícím schématem a určete zda jde o FIR nebo IIR



Řešení:

Diferenční rovnice: $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2]) - \frac{1}{2}y[n-1]$ IIR

Přenosová funkce LTI systému

Aplikujeme-li Z-transformaci na diferenční rovnici LTI systému,

$$y[n] + A_1 y[n-1] \ \cdots \ A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \ \cdots \ B_M x[n-M]$$

dostaneme:

$$Y[z] + A_1 z^{-1} Y[z] \ \cdots \ A_N z^{-N} Y[z] = B_0 X[z] + B_1 z^{-1} X[z] \ \cdots \ B_M z^{-M} X[z]$$

Přenosová funkce LTI systému

Aplikujeme-li Z-transformaci na diferenční rovnici LTI systému,

$$y[n] + A_1 y[n-1] \;\cdots\; A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \;\cdots\; B_M x[n-M]$$

dostaneme:

$$Y[z] + A_1 z^{-1} Y[z] \;\cdots\; A_N z^{-N} Y[z] = B_0 X[z] + B_1 z^{-1} X[z] \;\cdots\; B_M z^{-M} X[z]$$

po úpravě (vytknutí):

$$Y[z](1 + A_1 z^{-1} \ldots + A_N z^{-N}) = X[z](B_0 + B_1 z^{-1} \cdots + B_M z^{-M})$$

a po vydělení a substituci :

$$Y[z] = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} \;\cdots\; B_M z^{-M}}{1 + A_1 z^{-1} \;\cdots\; A_N z^{-N}} \cdot X[z] = H[z] \cdot X[z] \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

kde *H[z]* je tzv. **přenosová funkce** – matematicky popisuje „přenos“ (transfer) vstupního signálu na výstupní

Přenosová funkce LTI systému

Přenosová funkce:

$$H[z] = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} \ \cdots \ B_M z^{-M}}{1 + A_1 z^{-1} \ \cdots \ A_N z^{-N}} \qquad\qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

je klíčovou funkcí pro popis, analýzu a návrh systémů (filtrů) – je potřeba pro většinu funkcí/operací v Matlabu

Přenosová funkce LTI systému

Přenosová funkce:

$$H[z] = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} \ \cdots \ B_M z^{-M}}{1 + A_1 z^{-1} \ \cdots \ A_N z^{-N}} \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

je klíčovou funkcí pro popis, analýzu a návrh systémů (filtrů) – je potřeba pro většinu funkcí/operací v Matlabu

Jak ji jednoduše sestavit?

Převezme koeficienty ***A*** a ***B*** (s příslušným zpožděním) ze **základního tvaru** diferenční rovnice

$$y[n] + A_1 y[n-1] \ \cdots \ A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \ \cdots \ B_M x[n-M]$$

Přenosová funkce LTI systému

Příklad1: sestavte přenosovou funkci pro systém s následující dif. rovnicí a určete vektory koeficientů **A** a **B**

$$y[n] = x[n] + 0.5x[n-10]$$

Jedná se o rekurzivní nebo nerekurzivní systém? Co tento systém dělá se vstupním signálem?

Přenosová funkce LTI systému

Příklad1: sestavte přenosovou funkci pro systém s následující dif. rovnicí a určete vektory koeficientů **A** a **B**

$$y[n] = x[n] + 0.5x[n-10]$$

Jedná se o rekurzivní nebo nerekurzivní systém? Co tento systém dělá se vstupním signálem?

Řešení:

Přenosová funkce:

$$H[z] = \frac{1 + 0.5z^{-10}}{1} = 1 + 0.5z^{-10}$$

Vektory koeficientů jsou A=[1] a B=[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5], je to nerekurzivní systém, tj. FIR systém.

Systém přidává ozvěnu (s polovičním zeslabením) k původnímu vstupnímu signálu.

Jak velké bude zpoždění ozvěny (v milisekundách) při vzorkovací frekvenci 100 Hz?

Přenosová funkce LTI systému

Příklad2: sestavte přenosovou funkci pro systém s následující dif. rovnicí a určete vektory koeficientů **A** a **B**

$$2y[n] = 2x[n] - 2x[n-1] + 4x[n-3] + y[n-1]$$

Jedná se o rekurzivní nebo nerekurzivní systém?

Přenosová funkce LTI systému

Příklad2: sestavte přenosovou funkci pro systém s následující dif. rovnicí a určete vektory koeficientů **A** a **B**

$$2y[n] = 2x[n] - 2x[n-1] \ + 4x[n-3] + y[n-1]$$

Jedná se o rekurzivní nebo nerekurzivní systém?

Řešení:

Základní tvar rovnice:

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] - x[n-1] \ + 2x[n-3]$$

Přenosová funkce:

$$H[z] = \frac{1 - z^{-1} + 2z^{-3}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Vektory koeficientů jsou A=[1, -0.5] a B=[1, -1, 0, 2], je to rekurzivní systém, tj. IIR systém.

Vztah mezi přenosovou funkcí a impulzní odezvou

Pro libovolný LTI systém platí (odvozeno na přednáškách)

- v časové oblasti $y[n] = h[n] * x[n]$

- v obrazové oblasti $Y[z] = H[z].X[z]$

kde *h[n]* je **impulzní odezva** systému a
H[z] je **přenosová funkce** systému

Vztah mezi přenosovou funkcí a impulzní odezvou

Pro libovolný LTI systém platí (odvozeno na přednáškách)

- v časové oblasti $y[n] = h[n] * x[n]$
- v obrazové oblasti $Y[z] = H[z].X[z]$

kde *h[n]* je **impulzní odezva** systému a
H[z] je **přenosová funkce** systému

Platí, že:

- **přenosová funkce je obrazem (tj. Z-transformací) impulzní odezvy**
- **konvoluce** v časové oblasti se **transformuje na součin** v obrazové oblasti

Frekvenční charakteristika

Z přenosové funkce lze získat pro praxi velmi důležitou **frekvenční charakteristiku**,

- ta popisuje, jak se systém chová na různých frekvencích
- neboli na jakých frekvencích systém zesiluje/zeslabuje (případně nuluje) vstupní signál.

Frekvenční charakteristika

Z přenosové funkce lze získat pro praxi velmi důležitou **frekvenční charakteristiku**,

- ta popisuje, jak se systém chová na různých frekvencích
- neboli na jakých frekvencích systém zesiluje/zeslabuje (případně nuluje) vstupní signál.

Jak snadno získáme frekvenční charakteristiku?

Frekvenční charakteristika

Z přenosové funkce lze získat pro praxi velmi důležitou **frekvenční charakteristiku**,

- ta popisuje, jak se systém chová na různých frekvencích
- neboli na jakých frekvencích systém zesiluje/zeslabuje (případně nuluje) vstupní signál.

Jak snadno získáme frekvenční charakteristiku?

Do přenosové funkce dosadíme za proměnnou z $z = e^{j2\pi F}$ (komplexní zápis kosinusovky s freq. F)

Frekvenční charakteristika systému: $$H(F) = \frac{B_0 + B_1 e^{-j2\pi F} \ \dots \ B_M e^{-j2\pi FM}}{1 + A_1 e^{-j2\pi F} \dots \ A_N e^{-j2\pi FN}}$$

Význam *F* – normovaná (digitální) frekvence: $$F = \frac{f}{Fs}$$

Frekvenční charakteristika - výpočet

Do vztahu $$H(F) = \frac{B_0 + B_1 e^{-j2\pi F} \ \cdots \ B_M e^{-j2\pi FM}}{1 + A_1 e^{-j2\pi F} \cdots \ A_N e^{-j2\pi FN}}$$

dosadíme konkrétní frekvenci *f* (v Hz), z ní určíme *F*, spočítáme *H(F) a* následně určíme modul |*H(F)*| *a* fázi.

Potřebujeme-li grafické znázornění frekvenční charakteristiky, provedeme výpočty pro vybraný rozsah frekvencí a následně vyneseme grafy zvlášť pro modulovou (amplitudovou) a fázovou charakteristiku.

Frekvenční charakteristika - výpočet

Do vztahu $$H(F) = \frac{B_0 + B_1 e^{-j2\pi F} \ \cdots \ B_M e^{-j2\pi FM}}{1 + A_1 e^{-j2\pi F} \cdots \ A_N e^{-j2\pi FN}}$$

dosadíme konkrétní frekvenci *f* (v Hz), z ní určíme *F*, spočítáme *H(F) a* následně určíme modul |*H(F)*| *a* fázi.

Potřebujeme-li grafické znázornění frekvenční charakteristiky, provedeme výpočty pro vybraný rozsah frekvencí a následně vyneseme grafy zvlášť pro modulovou (amplitudovou) a fázovou charakteristiku.

Decibelová stupnice

Amplitudová charakteristika se obvykle zobrazuje v decibelové stupnici, tj. spočítáme a zobrazíme hodnoty

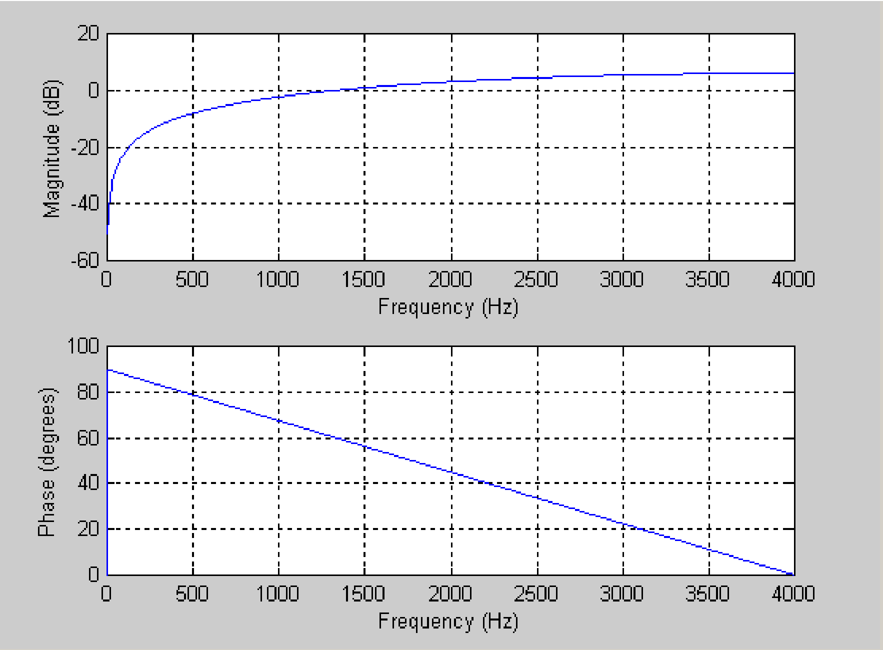
$$10 \log |H(F)|$$

Frekvenční charakteristika v Matlabu – funkce freqz

Vyjdeme ze vztahu pro přenosovou funkci

$$H[z] = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} \ \cdots \ B_M z^{-M}}{1 + A_1 z^{-1} \ \cdots \ A_N z^{-N}}$$

z níž dosadíme do matlabovské funkce **freqz** příslušné parametry



Volání v Matlabu: [H, f] = **freqz (B, A, N, Fs)**

B …. vektor koeficientů v čitateli
A …. vektor koeficientů ve jmenovateli
N …. počet bodů, v nichž se spočítají hodnoty
Fs … vzorkovací frekvence

Výstupem je vektor komplexních hodnot H a vektor frekvencí f a grafy amplitudové (v dB) a fázové charakteristiky (v úhlech)

.

Příklad vlastního výpočtu frekvenční charakteristiky

Příklad: systém má diferenční rovnici $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$

Jaké budou hodnoty frekv. char na frekvencích 0, 1, 2 kHz, atd., a to při vzorkovací frekvenci Fs = 8 kHz?

Příklad vlastního výpočtu frekvenční charakteristiky

Příklad: systém má diferenční rovnici $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$

Jaké budou hodnoty frekv. char na frekvencích 0, 1, 2 kHz, atd., a to při vzorkovací frekvenci Fs = 8 kHz?

Řešení:

Přenosová funkce systému: $H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$

Frekvenční charakteristika: $H(F) = 1 + 2e^{-j2\pi F} + e^{-j4\pi F}$

Příklad vlastního výpočtu frekvenční charakteristiky

Příklad: systém má diferenční rovnici $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$

Jaké budou hodnoty frekv. char na frekvencích 0, 1, 2 kHz, atd., a to při vzorkovací frekvenci Fs = 8 kHz?

Řešení:

Přenosová funkce systému: $H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$

Frekvenční charakteristika: $H(F) = 1 + 2e^{-j2\pi F} + e^{-j4\pi F}$

Pro 0 kHz dosadíme za F = 0

$$H(0) = 1 + 2e^{-j2\pi.0} + e^{-j4\pi.0} = 4$$

$\text{modul} = 4$ $\qquad$ $\text{modul\_dB} = 6.0206\ \text{dB},\ \text{fáze} = 0$

Příklad vlastního výpočtu frekvenční charakteristiky

Příklad: systém má diferenční rovnici $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$

Jaké budou hodnoty frekv. char na frekvencích 0, 1, 2 kHz, atd., a to při vzorkovací frekvenci Fs = 8 kHz?

Řešení:

Přenosová funkce systému: $H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$

Frekvenční charakteristika: $H(F) = 1 + 2e^{-j2\pi F} + e^{-j4\pi F}$

Pro 0 kHz dosadíme za F = 0

$$H(0) = 1 + 2e^{-j2\pi .0} + e^{-j4\pi .0} = 4$$

$\mathrm{modul} = 4 \qquad \mathrm{modul\_dB} = 6.0206\ \mathrm{dB},\ \mathrm{fáze} = 0$

Pro 1 kHz dosadíme za F = 1/8 = 0.125

$$H(0.125) = 1 + 2e^{-j2\pi\cdot 0.125} + e^{-j4\pi\cdot 0.125} = 1 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) - j =$$

$$= 2.4142 - 2.4142\mathrm{j}$$

$\mathrm{modul} = 3.4142 \quad \mathrm{modul\_dB} = 5.3329\ \mathrm{dB},\ \mathrm{faze} = -0.7854\ \mathrm{rad}$

atd.

Úloha k odevzdání

1. Úkolem je naprogramovat výpočet amplitudové a fázové charakteristiky pro systém (pracující s Fs = 8000 Hz) popsaný diferenční rovnicí

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

   (Tento systém jste řešili na předchozích slajdech)

2. Začněte tím, že si spočítáte frekvenční charakteristiku (modul a fázi) pro frekvence 0 a 1000 Hz. Měli byste dostat stejná čísla jako na předchozím slajdu.

3. Nyní vypočítejte hodnoty frekvenční charakteristiky (modul a fázi) pro 1024 hodnot mezi 0 Hz a Fs/2. Modul určíte pomocí funkce abs (), fázi v radiánech pomocí angle ().

4. Do okna figure (1) zobrazte pod sebe amplitudovou (modulovou) a fázovou charakteristiku. Tu první v decibelové stupnici, tu druhou v úhlové stupnici.

5. Do okna figure (2) zobrazte frekvenční charakteristiku téhož systému vypočtenou pomocí funkce freqz. Porovnejte figure (1) a (2) – pokud jste vše udělali dobře, měly by být shodné.