Signály a informace

Přednáška č.12

Analýza filtrů pomocí Z-transformace a IIR filtry

Připomenutí předchozí přednášky

- Ideální filtry DP, HP, PP a PZ mají jednotkový přenos v propustném pásmu a nulový přenos v nepropustném pásmu. Přechod mezi pásmy je dokonale strmý.
- Reálné filtry toto neumožňují – charakteristiky jsou více či méně zvlněné, přechody jsou pozvolné.
- Filtry FIR jsou jednodušší pro návrh a realizaci, jejich průběhy jsou však vzdálené ideálním filtrům.

Z-transformace - připomenutí

Převádí **časový popis** číslicových signálů do **komplexní roviny**, kde lze snáze studovat chování systémů a jejich **frekvenční charakteristiky**.

Z-transformace obecného číslicového signálu x[n] je

$$X[z] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

Je-li signál konečný pak: $$X[z] = \sum_{k=0}^{N} x[k] z^{-k}$$

x[0], x[1], x[2], … x[N] $\rightarrow$ $X[z] = x[0] + x[1] z^{-1} + \ldots x[N] z^{-N}$

operátor z^{-1} představuje **zpoždění o 1 vzorek**

Z-transformace a frekv. charakteristika

Aplikujeme-li Z-transformaci na diferenční rovnici,

$$y[n] + A_1 y[n-1] \cdots A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M]$$

dostaneme:

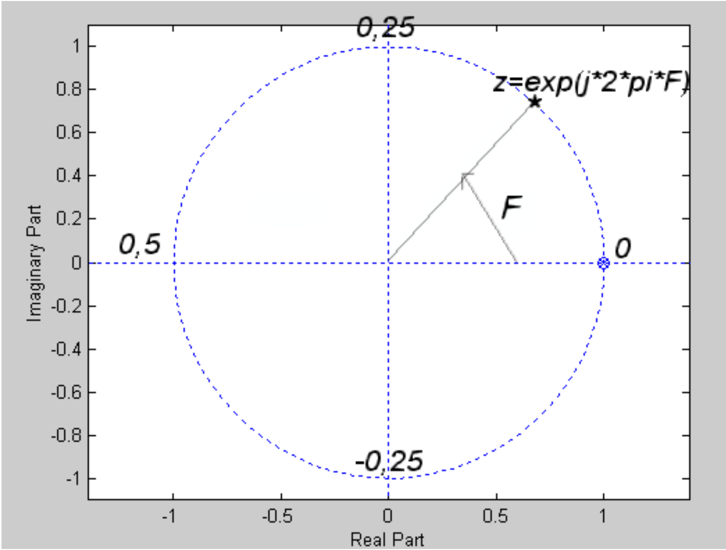
$$Y(z) = H(z) X(z) \qquad H(z) = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} \cdots B_M z^{-M}}{1 + A_1 z^{-1} \cdots A_N z^{-N}}$$

Přenosová funkce H(z) popisuje chování systému v komplex. rovině

Vztah mezi přenos. funkcí *H(z)* a **frekvenční char**. *H(F):*

H(F) získáme dosazením $z = e^{j2\pi F}$ do *H(z)*

$$H(F) = \frac{B_0 + B_1 e^{-j2\pi F} \cdots B_M e^{-j2\pi FM}}{1 + A_1 e^{-j2\pi F} \cdots A_N e^{-j2\pi FN}}$$



Geometrický význam:

$e^{j2\pi F}$ představuje jednotkovou kružnici

v prostoru komplex. čísel, F je parametrem

Analýza chování filtru v Z-rovině (1)

FIR filtr: $H(z) = B_0 + B_1 z^{-1} \cdots B_M z^{-M}$

Záporné mocniny lze eliminovat vytknutím z^{-M}

$$H(z) = z^{-M}(B_0 z^M + B_1 z^{M-1} \cdots B_M) = \frac{(B_0 z^M + B_1 z^{M-1} \cdots B_M)}{z^M}$$

Polynom v čitateli lze dále rozdělit na činitele

$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)..(z - z_M)}{z^M}$$

Funkce ve tvaru zlomku má „nuly" ($z=z_1$, $z=z_2$,..), kde nabývá **nulové hodnoty** a „póly" (z=0), kde nabývá **nekonečně velké hodnoty**.

Jsou-li tyto nuly a póly poblíž jednotkové kružnice, **ovlivňují** výrazným způsobem **přenosové a frekvenční charakteristiky** systému.

Analýza chování filtru v Z-rovině (2)

Příklad: $H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}$

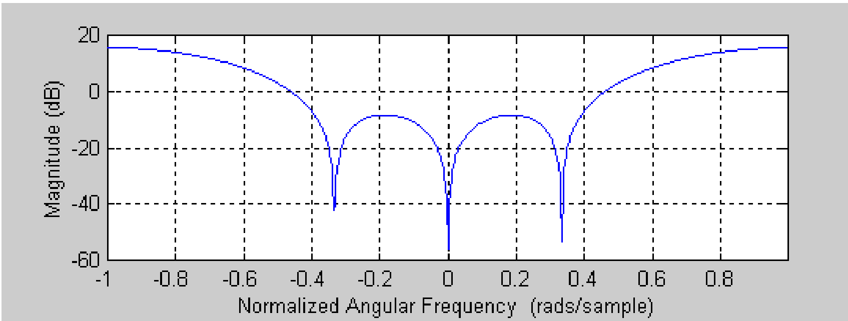
Úpravou dostaneme $H(z) = \dfrac{(z-1)(z-e^{j\pi/3})(z-e^{-j\pi/3})}{z^3}$

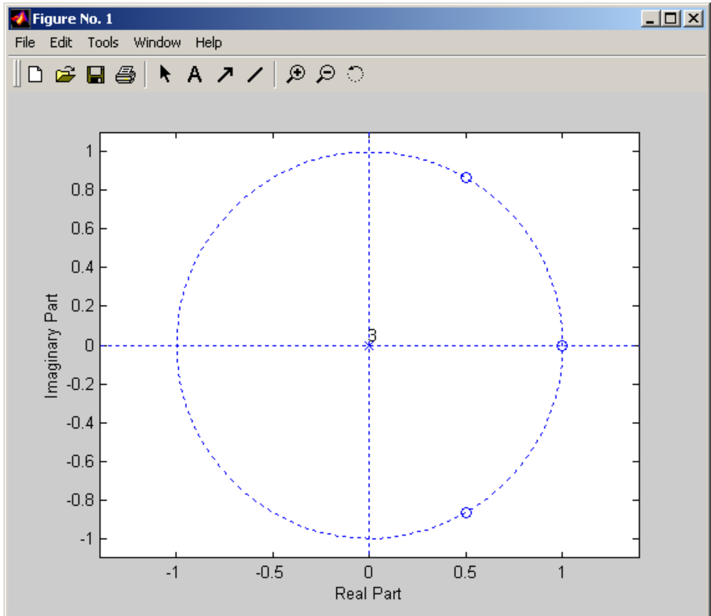
Funkce má 3 nuly a 1 trojnásobný pól v počátku

V MATLABu je snadno získáme funkcí **zplane**

```
zplane ([1 -2 2 -1], 1)
```

- nuly jsou označeny kolečkem
- póly křížkem





Návrh nulovacího filtru

Nulovací filtr - kompletně potlačuje konkrétní frekvence

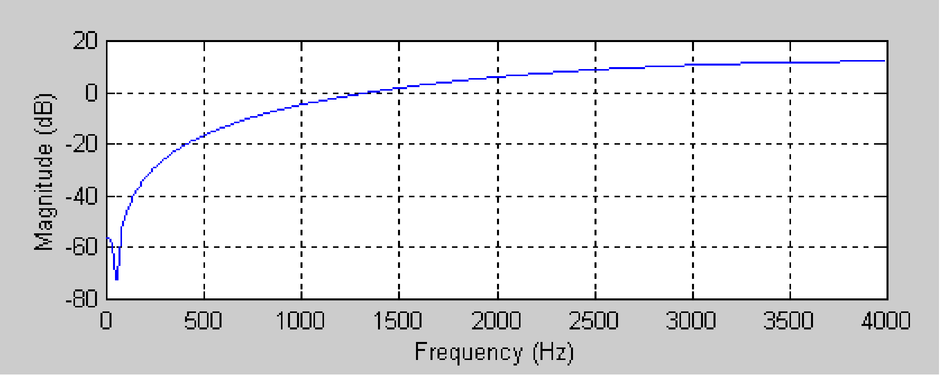
Příklad: chceme potlačit složku 50 Hz v signálu vzorkovaném 8 kHz

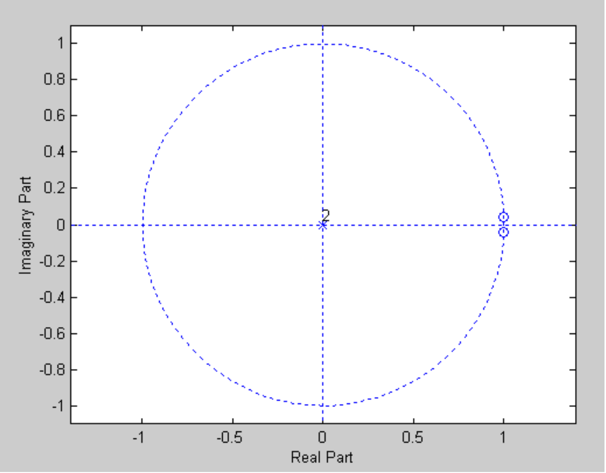
$f_n = 50, \quad F_n = 50 / 8000 = 0{,}00625$

$$H(z) = \frac{(z - e^{j2.\pi.0,00625})(z - e^{-j2.\pi.0,00625})}{z^2}$$

$$= 1 - (e^{j2.\pi.0,00625} + e^{-j2.\pi.0,00625})z^{-1} + (e^{j2.\pi.0,00625}.e^{-j2.\pi.0,00625})z^{-2}$$

$$= 1 - 2\cos(2.\pi.0,00625)z^{-1} + z^{-2}$$

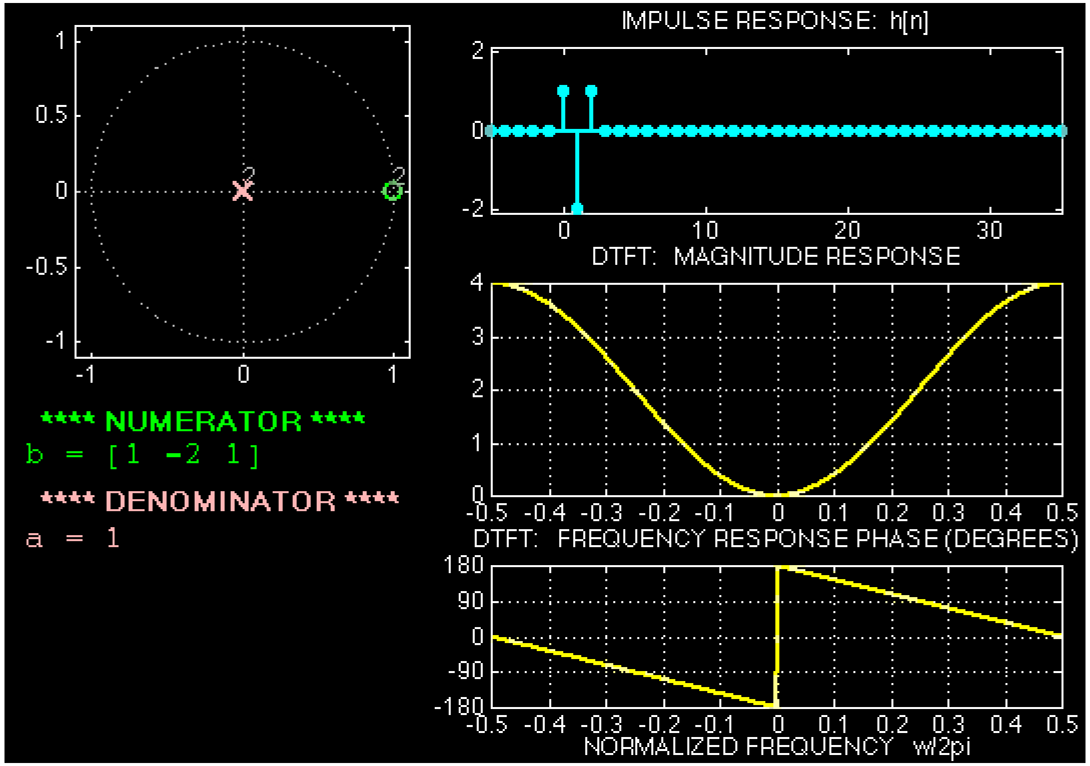




Demo – filtry FIR (1)

Filtr FIR 2. řádu

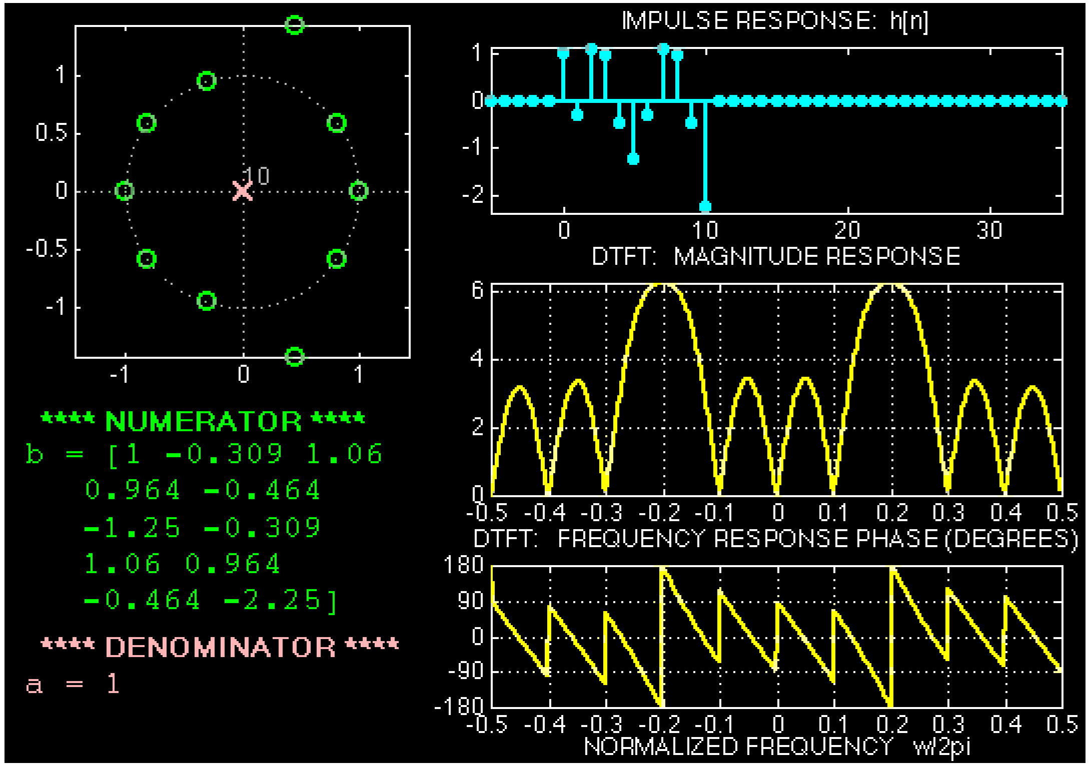
Animace závislosti frekvenční charakteristiky na rozmístění nul



Demo – filtry FIR (2)

Filtr FIR 10. řádu

Animace závislosti frekvenční charakteristiky na rozmístění nul

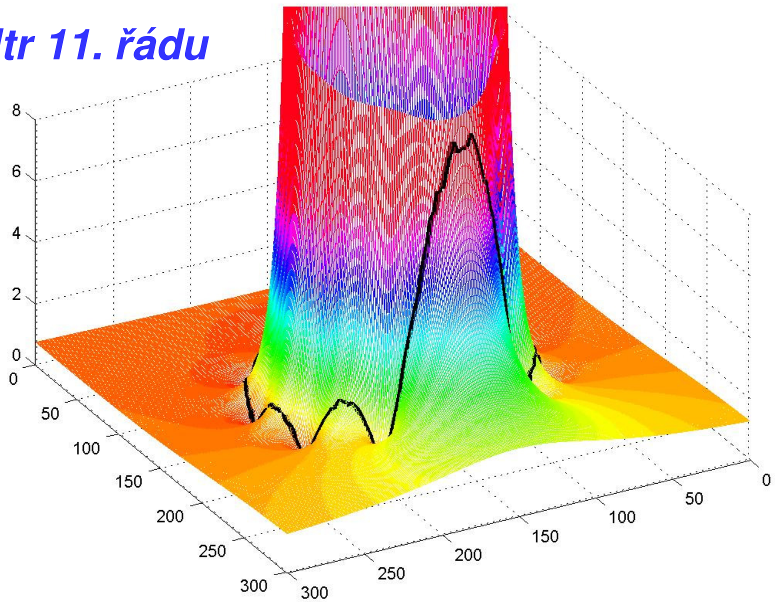


Závěrečné poznámky pro filtry FIR

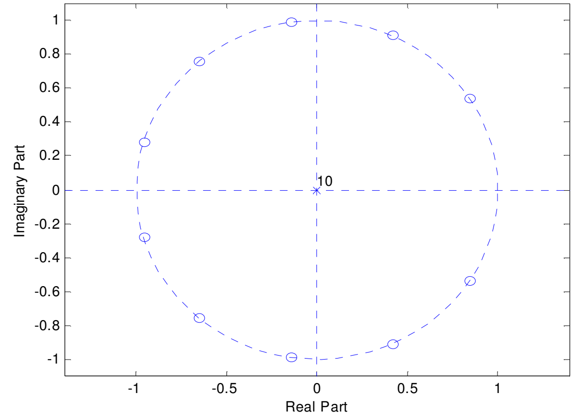
Filtry FIR řádu M

- mají M nulových bodů, které určují místa největšího útlumu
- mají M-násobný pól v počátku, který má pouze nepřímý vliv na funkci filtru

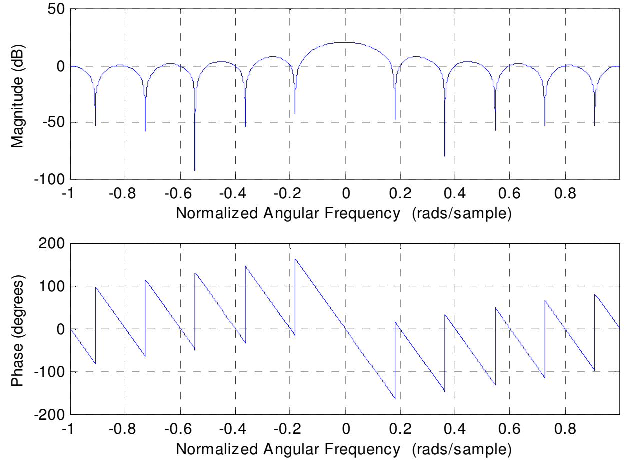
Průměr. filtr 11. řádu



3D pohled na funkci H(z)



Nuly a póly v rovině z



Frekvenční charakteristika

Filtry IIR (1)

IIR – infinite impuls response, s nekonečnou impulsní odezvou

Výstupní signál zaveden na vstup – **zpětná vazba**

$$y[n]+A_1 y[n-1]\cdots A_N y[n-N]=B_0 x[n]+B_1 x[n-1]\cdots B_M x[n-M]$$

Přenosová funkce vyjádřená pomocí Z-transformace

$$H(z)=\frac{B_0+B_1 z^{-1}\cdots B_M z^{-M}}{1+A_1 z^{-1}\cdots A_N z^{-N}}=z^{N-M}\,\frac{(z-z_1)(z-z_2)..(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)..(z-p_N)}$$

má **M nul** (v čitateli), **N pólů** (ve jmenovateli), a dále nuly nebo póly v počátku či v nekonečnu (v závislosti na členu z^{N-M})

Frekv. charakteristiku dostaneme opět dosazením *$z = e^{j2\pi F}$* do *$H(z)$, tedy na jednotkové kružnici*

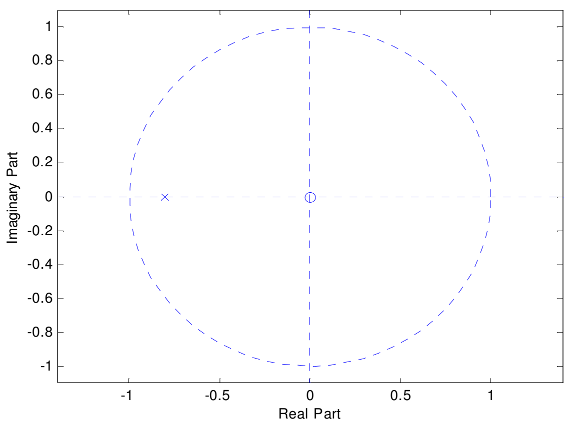
$$H(F)=\frac{B_0+B_1 e^{-j2\pi F}\cdots B_M e^{-j2\pi FM}}{1+A_1 e^{-j2\pi F}\cdots A_N e^{-j2\pi FN}}$$

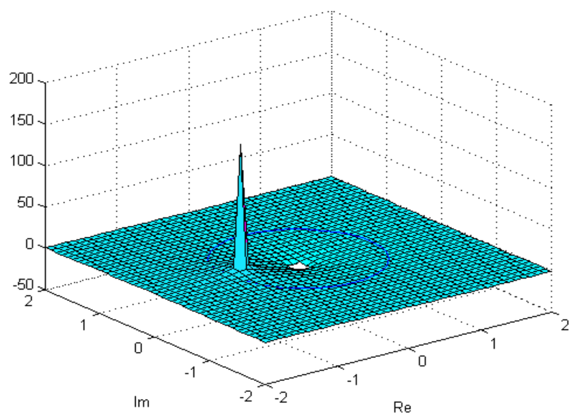
Filtry IIR – příklad (2)

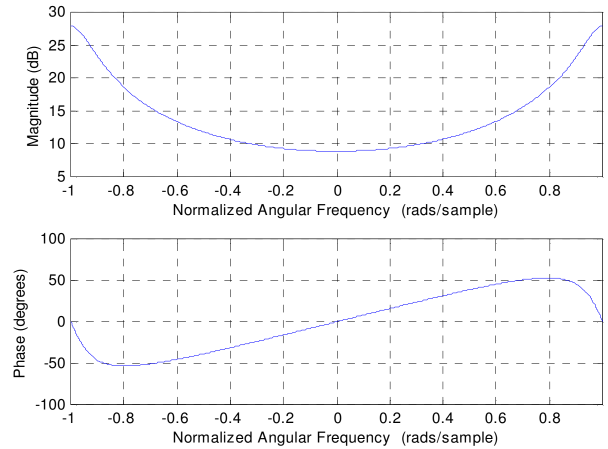
Příklad: filtr IIR 1. řádu $y[n] = -0.8\,y[n-1] + 5x[n]$

V Matlabu snadno určíme póly a nuly, funkci H(z) i frekvenční charakteristiku

zplane (5, [1 0.8]) freqz (5, [1 0.8])







stejně tak i impulzní odezvu

filter (5, [1 0.8], [1 0 0 0 0 0 0 0 0])

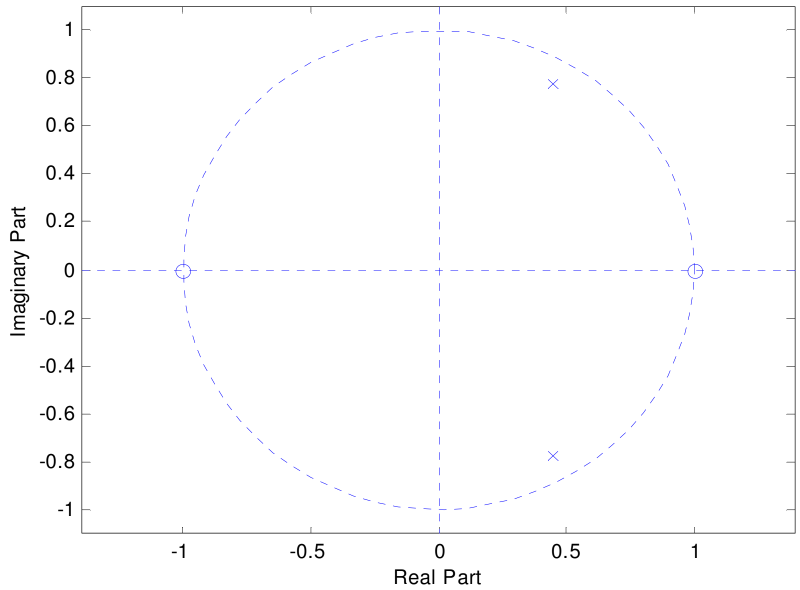
ans = 5.000 -4.000 3.200 -2.560 2.048 -1.638 1.310 -1.048 0.838 ..

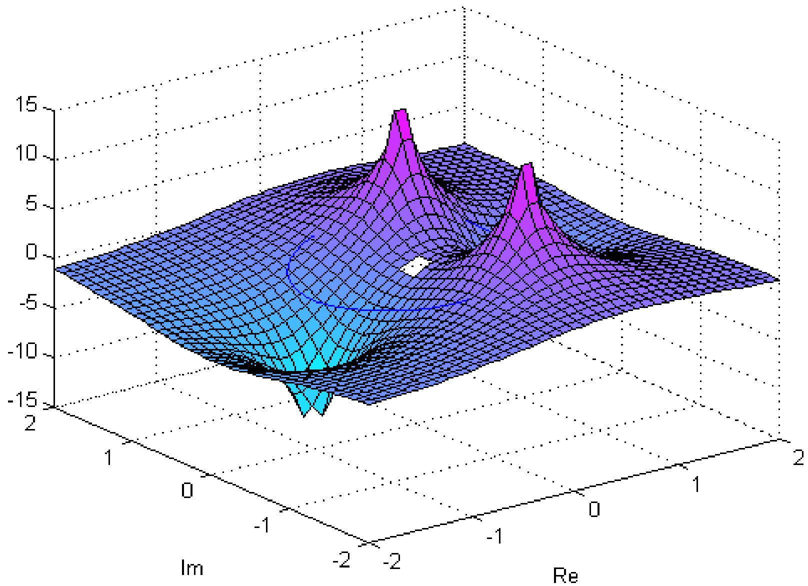
Filtry IIR – příklad (3)

Složitější filtr IIR 2. řádu

$$y[n] = 0.9\,y[n-1] - 0.81\,y[n-2] + x[n] - x[n-2]$$

zplane ([1 0 -1], [1 -0.9 0.81])

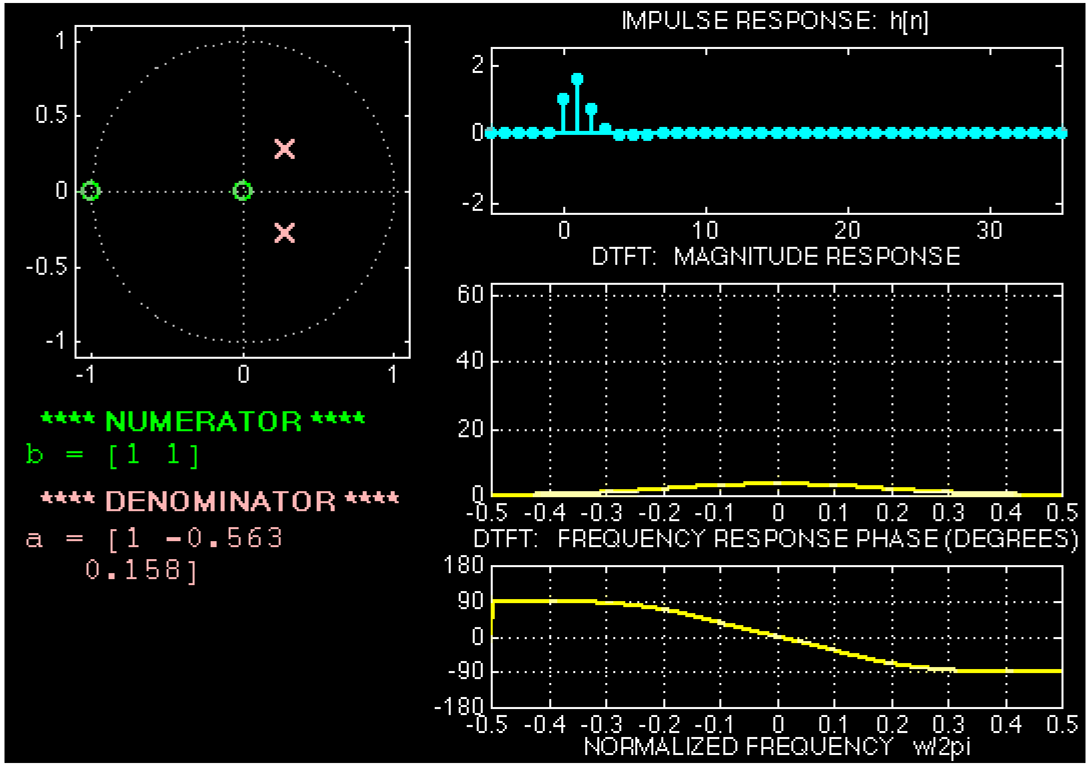




Demo – filtry IIR (1)

Filtr IIR 2. řádu

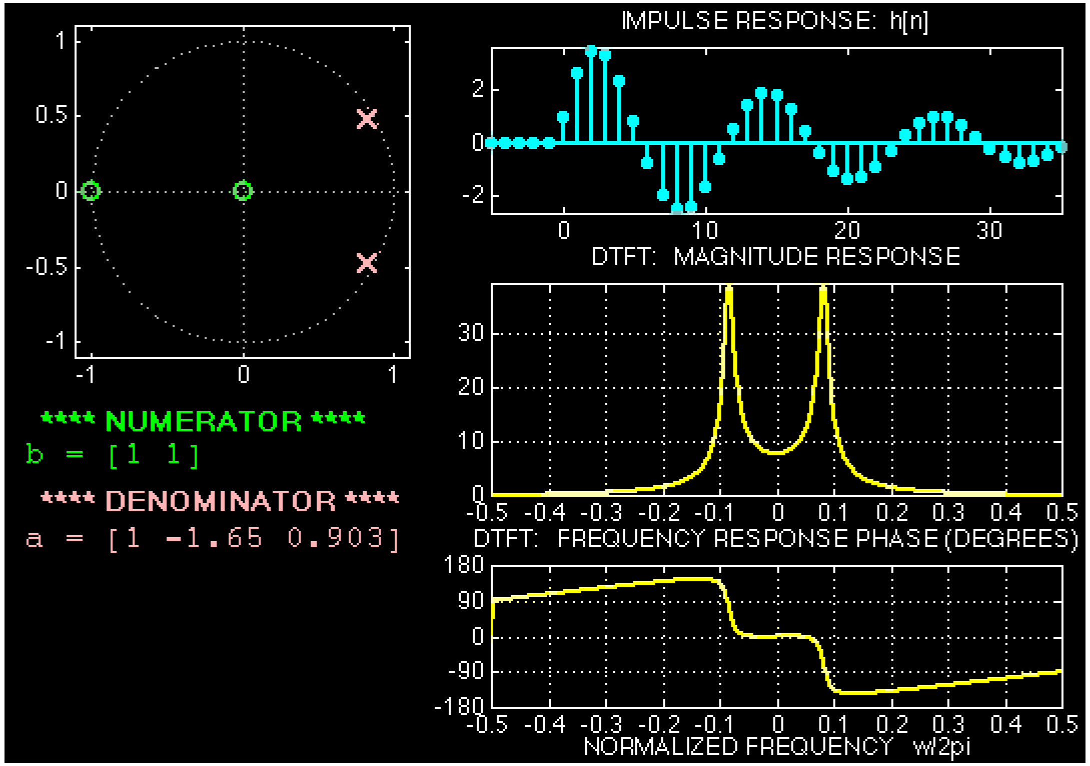
Animace závislosti frekvenční charakteristiky na rozmístění pólů



Demo – filtry IIR (2)

Filtr IIR 2. řádu

Animace závislosti frekvenční charakteristiky na rozmístění pólů

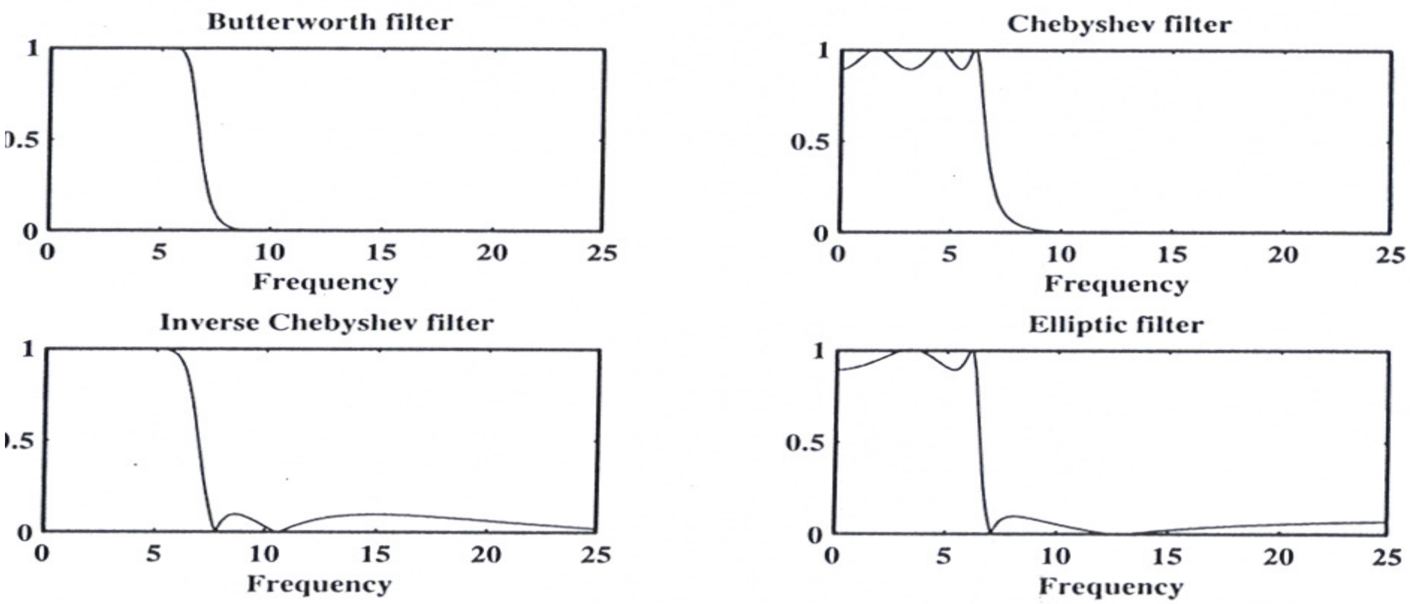


Nástroje pro návrh filtrů IIR v MATLABu (1)

Umožňují navrhovat filtry požadovaných typů (DP, HP, PP, PZ), zvolených pásem, hodnot útlumů a průběhů

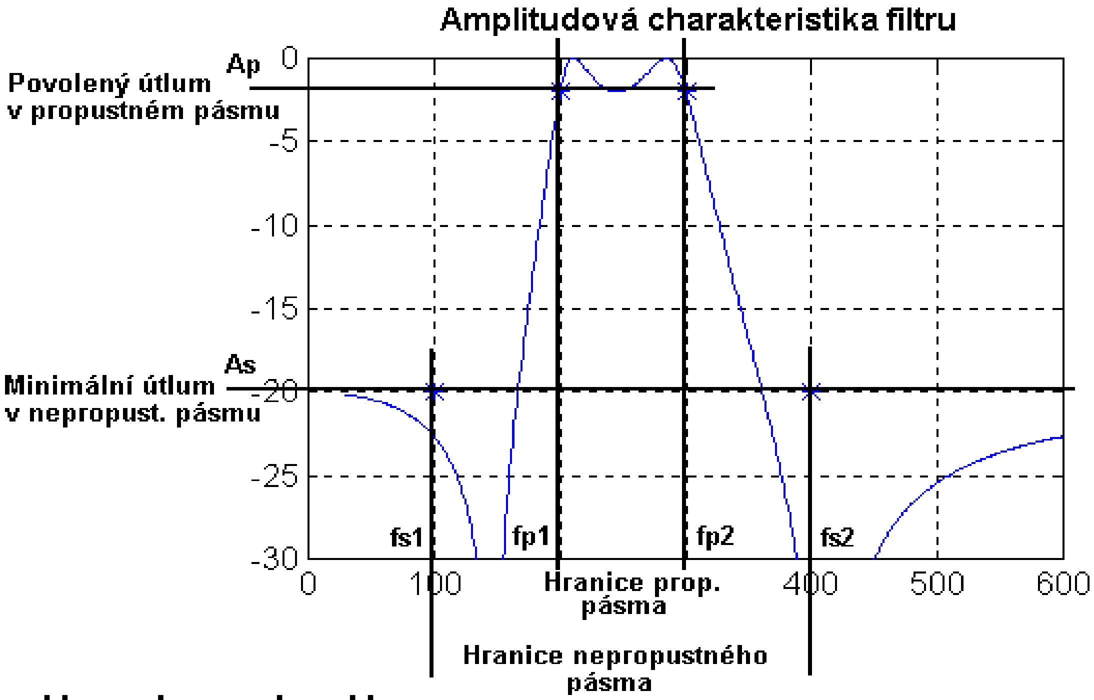
Čtyři typy průběhů (podle plochosti charakteristiky)

1. Buterworth – maximálně plochý průběh bez zvlnění
2. Čebyšev 1 – zvlnění v propustném pásmu
3. Čebysev 2 – zvlnění v nepropustném pásmu
4. Eliptický - zvlnění povoleno v obou pásmech



Nástroje pro návrh filtrů IIR v MATLABu (2)

Parametry zadání:



Funkce Matlabu

- Buterworth – buttord.m, butt.m
- Čebyšev 1 – cheb1ord.m, cheby1.m
- Čebyšev 2 – cheb2ord.m, cheby2.m
- Eliptický - elliprod.m, ellip.m
- Univerzální návrhová funkce - dfdiir.m
  (není standardní součástí MATLAbu

Výhody a nevýhody filtrů IIR

1. Poměrně **složitý** a **méně intuitivní** návrh
2. Filtr je **rekursivní** (se zpětnými vazbami), může být **nestabilní** (pro amplitudově omezený vstupní signál by generoval signál s neustále rostoucími amplitudami)
3. Filtr IIR bude **stabilní,** pokud všechny jeho póly leží **uvnitř jednotkové kružnice**
4. S filtry IIR lze dosáhnout **velmi strmé přechody** mezi propustným a nepropustným pásmem, a to i při malém řádu filtru.
5. Filtry IIR nemají lineární průběh fázové charakteristiky.

Konec přednášky

Děkuji za pozornost.