LTI systémy v obrazové rovině a Z-transformace

1. Uvažujte systém popsaný diferenční rovnicí $y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$ a nulové počáteční podmínky.

a) Určete impulsní odezvu zadaného systému.
b) Určete obrazový přenos zadaného systému pomocí Z-transformace vypočítané impulsní odezvy.
c) Určete obrazový přenos zadaného systému pomocí Z-transformace zadané diferenční rovnice.
d) Jak spolu obě uvedené definice obrazového přenosu souvisí? Jaký je Z-obraz jednotkového impulsu?
e) Vypočítejte odezvu zadaného systému na signál x = [1 0 1] pomocí Z-transformace.

2. Uvažujte systém popsaný diferenční rovnicí $y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right) - \frac{1}{2}y[n-1]$ a nulové počáteční podmínky.

a) Určete impulsní odezvu zadaného systému.
b) Určete obrazový přenos zadaného systému pomocí Z-transformace vypočítané impulsní odezvy.
c) Určete obrazový přenos zadaného systému pomocí Z-transformace zadané diferenční rovnice.
d) Jak spolu obě uvedené definice obrazového přenosu souvisí? Jaký je Z-obraz jednotkového impulsu?
e) Naznačte vypočet odezvy zadaného systému na signál x = [1 0 1] pomocí Z-transformace.

Určení obrazové přenosu systému z impulsní odezvy a z diferenční rovnice při PP = 0:

1) $H(z) = Z(h[n])$

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right) - \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$h[n] = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{3}{12} \quad -\frac{\frac{3}{12}}{2} \quad +\frac{\frac{3}{12}}{4}\ldots\ldots\ldots$$

$$H(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{3}{12}z^{-2} - \frac{\frac{3}{12}}{2}z^{-3} + \frac{\frac{3}{12}}{4}z^{-4}\ldots\ldots$$

$$H(z) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{3}{8}z^{-3} + \frac{3}{16}z^{-4} - \ldots\right)$$

$\frac{3}{4}z^{-2} - \frac{3}{8}z^{-3} + \frac{3}{16}z^{-4}\ldots\ldots$ je geometrická řada s kvocientem $q = -\frac{1}{2}z^{-1}$

její součet je dán vztahem $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{4}z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$

$$H(z) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{\frac{3}{4}z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{3}{4}z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

2) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right) - \frac{1}{2}y[n-1]$$

$x[n] \equiv X[z]$

$x[n-1] \equiv X[z]z^{-1}$

.....

$$Y(z) = \frac{1}{3}X(z) + \frac{1}{3}X(z)z^{-1} + \frac{1}{3}X(z)z^{-2} - \frac{1}{2}Y(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

souvislost obou definicí

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Pro $x[n] = \delta[n]$ platí, že y[n] představuje impulsní odezvu a $X(Z) = 1$

=>

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{1} = Y(Z) = Z(y[n]) = \mathrm{Z(h[n])}$$

Ukázka vypočtu odezvy systému $y[n]=\frac{1}{3}\left(x[n]+x[n-1]+x[n-2]\right)-\frac{1}{2}y[n-1]$ na signál x = [1 0 1] pomocí Z-transformace a nekonečného dělení

$$x[n]=1{,}0{,}1$$

$$X[z]\equiv 1+z^{-2}=\frac{z^2+1}{z^2}$$

$$H(z)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{\frac{1}{3}\frac{z^2+z+1}{z^2}}{\frac{2z\ \ +1}{2z}}=\frac{2}{3}\frac{z^2+z+1}{2z^2+z}$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{2}{3}\frac{z^2+z+1}{2z^2+z}\frac{z^2+1}{z^2}=\frac{2}{3}\frac{z^4+z^3+z^2+z^2+z+1}{2z^4+z^3}=\frac{2}{3}\frac{z^4+z^3+2z^2+z+1}{2z^4+z^3}$$

$$Y(z)=\frac{2}{3}(z^4+z^3+2z^2+z+1):(2z^4+z^3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}z^{-1}+\frac{7}{12}z^{-2}.....$$

$$y(n)=\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{7}{12}.....$$