Signály a informace

Přednáška č.8

Z-transformace jako nástroj pro analýzu a návrh systémů

Připomenutí předchozí přednášky

- Signály lze generovat, modifikovat či transformovat požadovaným způsobem pomocí systémů
- Z hlediska popisu a návrhu jsou nejjednodušší systémy LTI (lineární a časově nezávislé)
- Chování systémů LTI lze jednoznačně popsat pomocí odezvy na jednotkový impuls – h[n]
- Odezva systému na libovolný signál x[n]
  se spočítá jako konvoluce x[n]* h[n]
- Systémy mohou být typu
  - FIR (s konečnou impulzní odezvou)
  - IIR (s nekonečnou impulzní odezvou)

Připomenutí operace konvoluce

- Fungování každého LTI systému jednoznačně popisuje odezva na jednotkový impuls – h[n]
- Je-li vstupním signálem jednotkový impuls násobený konstantou k, je výstupem k . h[n]
- Skládá-li se vstupní signál ze vzorků x[0], x[1], x[2] … , skládá se celková odezva ze součtu (posunutých) odezev na první vzorek x[0]. h[n], na druhý vzorek x[1]. h[n], atd. Tento součet je vyjádřen vztahem

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

a nazývá se konvoluce

Z-transformace – k čemu je dobrá

Je efektivním nástrojem, který **usnadňuje analýzu chování LTI systémů a jejich návrh**.

Její myšlenka spočívá v tom, že číslicové signály a popisy číslicových systémů **převádí** (transformuje) **do prostoru komplexních čísel**, kde lze snadněji a rychleji provést potřebné operace.

Její největší přínos je v tom, že výpočetně náročnou **operaci konvoluce převede na** snazší **operaci součinu**.

Další výhoda spočívá v tom, že existuje **přímá vazba mezi Fourierovou transformací a Z-transformací**. Máme-li systém popsán pomocí Z-tranformace, jsme schopni velmi snadno určit frekvenční charakteristiku systému.

Poprvé navržena v roce 1952 (autoři J. R. Ragazzini and L. A. Zadeh)

Z-transformace - úvod

Z-transformace obecného (nekonečného) číslicového signálu x[n] je definována vztahem:

$$X[z]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k}$$

Je-li signál konečný, tj. tvoří ho vzorky x[0], x[1], x[2], … x[N] pak:

$$X[z]=\sum_{k=0}^{N}x[k]z^{-k}$$

Příklad: signál 2 5 3 4 je transformován na

$$X[z] = 2z^{0} + 5z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

Shrnutí: Z-tranformace převádí signál na polynom, v němž hrajou klíčovou roli mocniny **komplexní** proměnné z^{-1}

Z-transformace – terminologie

Signál popsaný v čase se nazývá **originál**

Jeho transformovaná verze se označuje jako **obraz** (*též z-obraz, z-transformace signálu*)

Prostor, v němž jsou popsány originální vzorky signálu se nazývá **časový prostor** (též časová oblast), transformací je převeden na **obrazový prostor** (obrazová oblast, obrazová rovina)

Signály v časovém prostoru se značí *x[n], y[n],* **...**

v obrazovém prostoru pak *X[z], Y[z],*

a formálně píšeme $X[z] = Z\{x[n]\}$

Inverzní Z-transformace $x[n] = Z^{-1}\{X[z]\}$

Z-transformace – význam členu z^{-1}

Z definice z-transformace $$X[z] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

si odvoďme,

jak vypadá obraz některých nejjednodušších signálů:

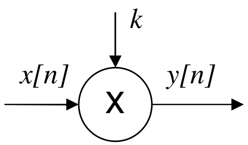
jednotkový impulz: $x[n] = \delta[n] \quad \rightarrow \quad X[z] = 1$

posunutý j. impulz: $x[n] = \delta[n-1] \quad \rightarrow \quad X[z] = z^{-1}$

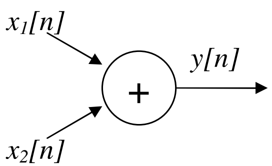
posunutý libov. sig: $y[n] = x[n-1] \quad \rightarrow \quad Y[z] = z^{-1} X[z]$

Člen (též operátor) z^{-1} má význam **jednotkového zpoždění**.

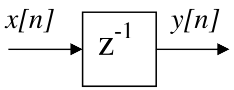
Značení se používá i ve schématech systémů



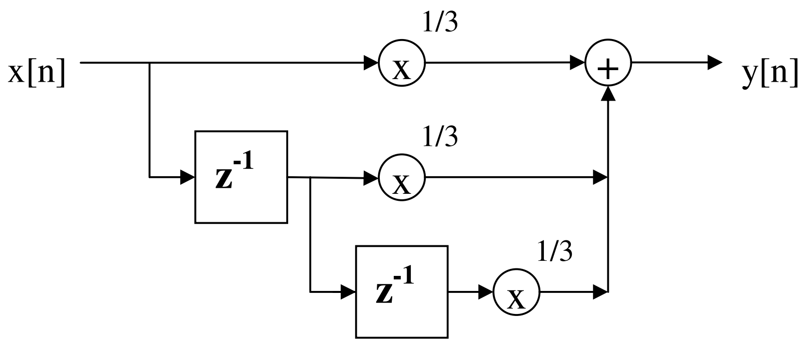
násobicí člen



sčítací člen



zpožďovací člen



Z-transformace a diferenční rovnice

Aplikujeme-li Z-transformaci na diferenční rovnici,

$$y[n] + A_1 y[n-1] \cdots A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M]$$

dostaneme:

$$Y[z] + A_1 z^{-1} Y[z] \cdots A_N z^{-N} Y[z] = B_0 X[z] + B_1 z^{-1} X[z] \cdots B_M z^{-M} X[z]$$

po úpravě (vytknutí):

$$Y[z](1 + A_1 z^{-1} \ldots + A_N z^{-N}) = X[z](B_0 + B_1 z^{-1} \cdots + B_M z^{-M})$$

a po vydělení a substituci : $Y[z] = H[z] X[z]$

kde H[z] je tzv. **přenosová funkce** popisující chování systému v obrazové oblasti

$$H(z) = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} \cdots B_M z^{-M}}{1 + A_1 z^{-1} \cdots A_N z^{-N}}$$

Vztah přenos. funkce a impulzní odezvy

Pro libovolný LTI systém platí

- v časové oblasti $$y[n] = h[n] * x[n]$$
- v obrazové oblasti $$Y[z] = H[z]X[z]$$

kde h[n] je **impulzní odezva** a
H[z] je **přenosová funkce**

Platí, že

- **přenosová funkce je obrazem impulzní odezvy**
- **konvoluce v časové oblasti se transformuje na součin v obrazové oblasti**

Popis číslicových LTI systémů (1)

Činnost LTI systému lze popsat několika způsoby

– všechny jsou jednoznačné a vzájemně ekvivalentní

A. Pomocí diferenční rovnice

$$A_0 y[n] + A_1 y[n-1] \cdots A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M]$$

B. Pomocí přenosové funkce

Postihuje „přenos dat“ mezi výstupem a vstupem

prostřednictvím Z-transformace

$$H(z) = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} \cdots B_M z^{-M}}{A_0 + A_1 z^{-1} \cdots A_N z^{-N}}$$

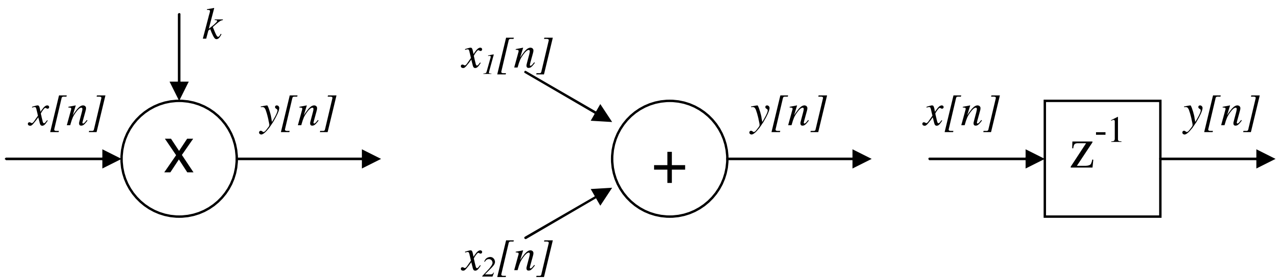
Popis číslicových LTI systémů (2)

C. Pomocí impulsní odezvy

Impulsní odezva - odezva ustáleného systému na jednotkový impuls

$$h[n] = F(\delta[n])$$

D. Pomocí základních stavebních prvků



násobící prvek, sčítací prvek, zpožďovací prvek

Příklady jednoduchých LTI systémů (1)

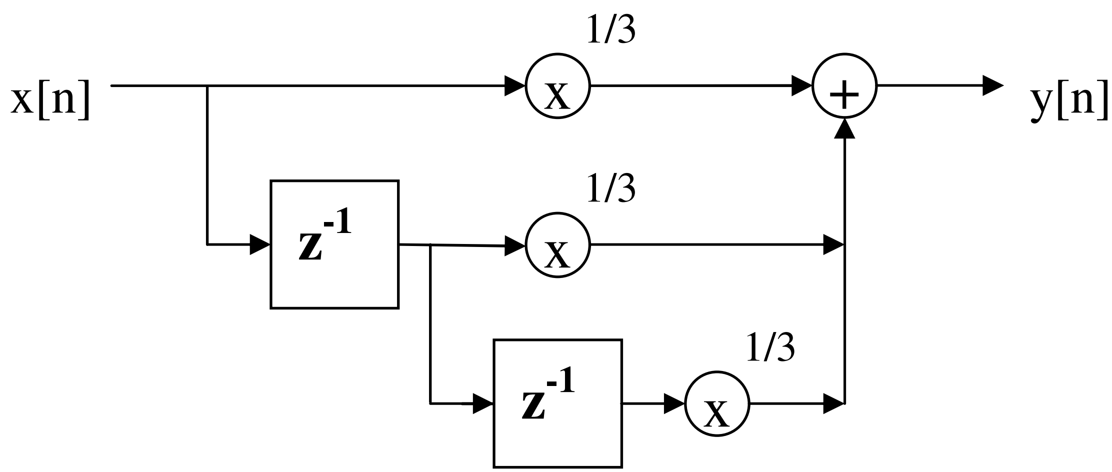
Průměrovací filtr (systém který počítá výstupní hodnotu z průměru N aktuálních vzorků – zde N = 3)

A. Diferenční rovnice $y[n] = \frac{1}{3}x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2]$

B. Přenosová funkce $H(z) = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$

C. Impulzní odezva $h[0] = \frac{1}{3}, h[1] = \frac{1}{3}, h[2] = \frac{1}{3}$

D. Grafické schéma



Příklady jednoduchých LTI systémů (2)

Systémy typu FIR (Final Impulse Response)

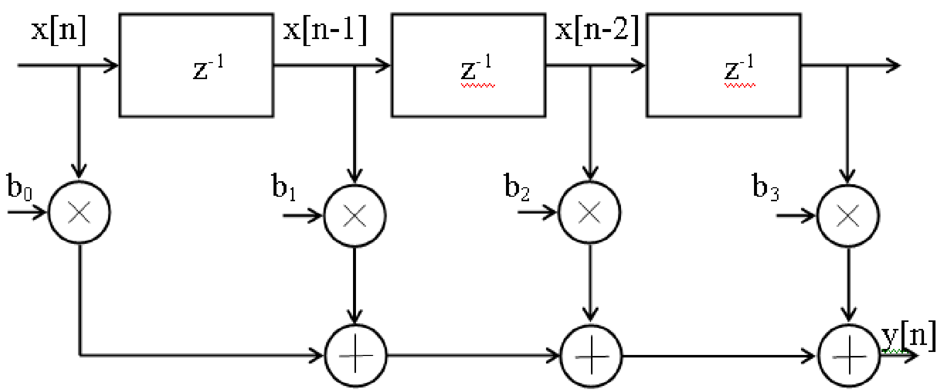
- systémy s konečnou impulzní odezvou
  (na jednotkový impulz reagují signálem s konečným počtem vzorků)
- popis v časové oblasti $y[n]=\sum_{k=0}^{M-1} b_k x[n-k]$

  impulzní odezva trvá M vzorků

- popis pomocí Z-transformace $H(z)=b_0+b_1 z^{-1}\cdots b_M z^{-M}$

  přenosová funkce má pouze čitatele

- realizace

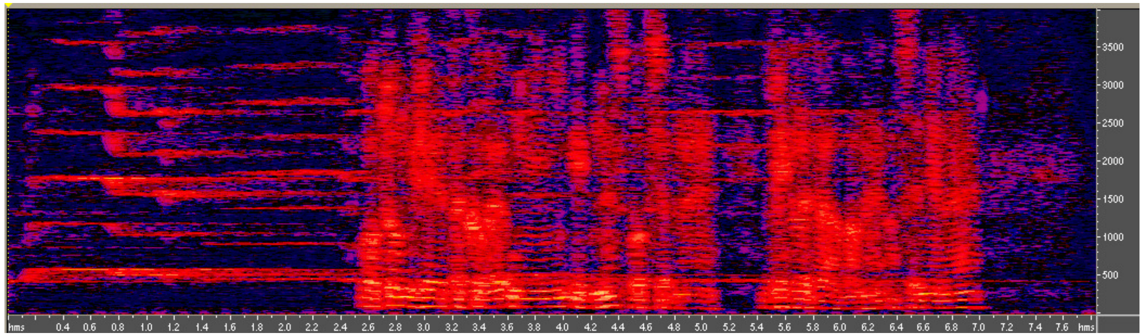


Příklady číslicových filtrů (1)

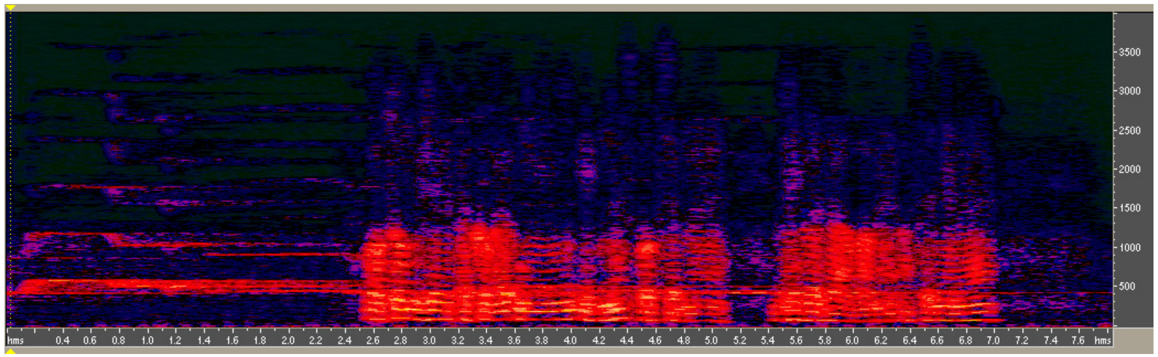
Filtry – systémy modifikující vstupní signál

Modifikace ve frekvenční oblasti: DP – dolní propust, HP – horní propust, PP – pásmová propust, PZ – pásmová zádrž

Vstupní signál

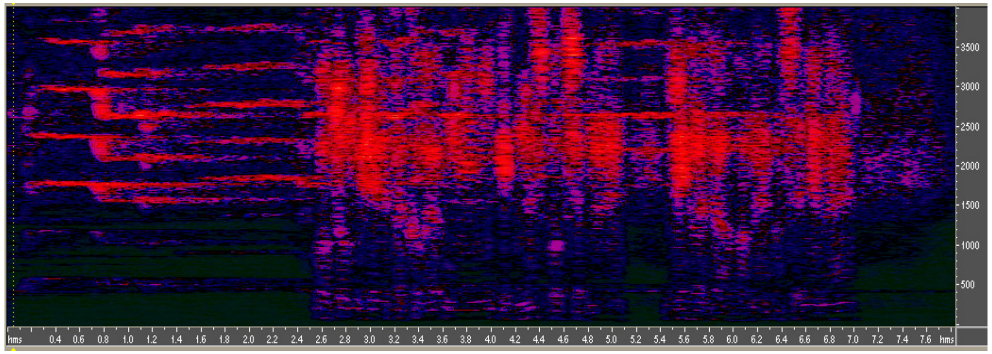


DP

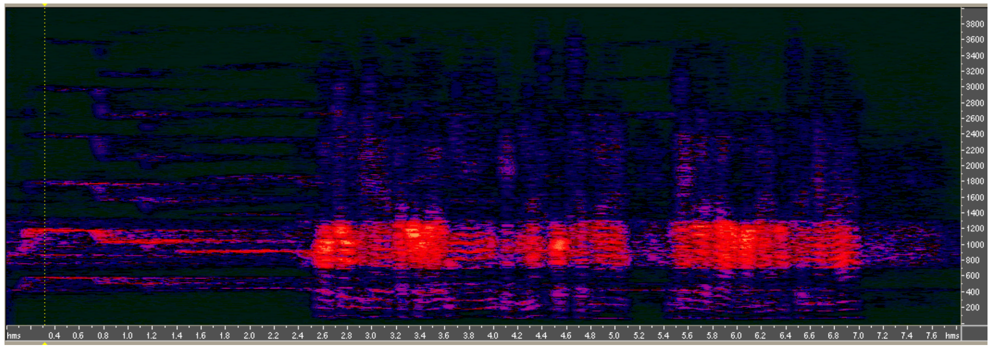


Příklady číslicových LTI systémů (2)

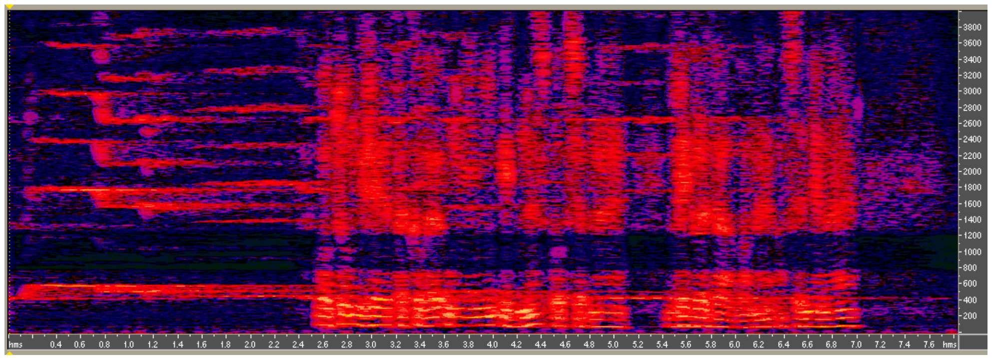
HP



PP



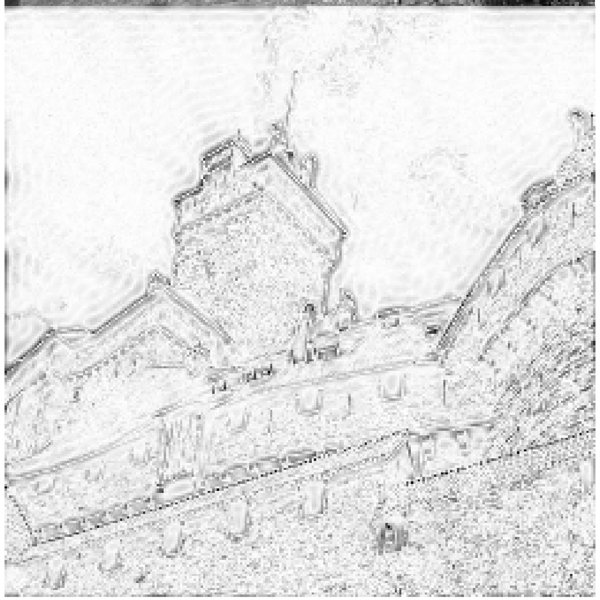
PZ



Příklady číslicových LTI systémů (3)

DP

HP



PP

Konec přednášky

Děkuji za pozornost.