Signály a informace

Přednáška č.5

Vzorkování, aliasing a rekonstrukce signálů. Analýza skutečných signálů

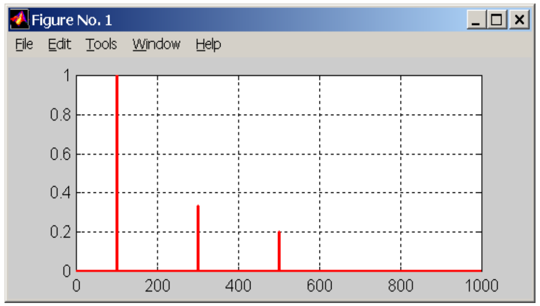
Obsah předchozí přednášky

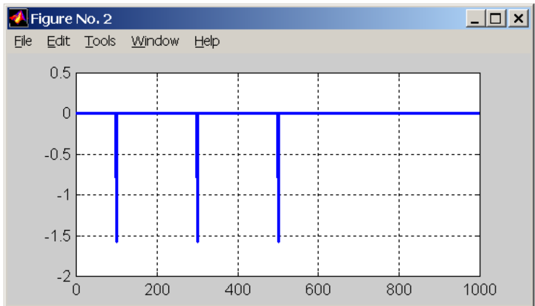
- **Harmonické signály:** popsány funkcemi sin(x) a cos(x) a jejich lineárními kombinacemi, preferujeme funkci cos
- **Harmonicky vázané signály:** kosinusovky s frekvencemi, které jsou násobkem základní frekvence
- Operace s harmonickými funkcemi je vhodné provádět v exp. tvaru (Eulerovy vztahy)
- Libovolný periodický signál lze **syntetizovat** – součtem harmonicky vázaných kosinusovek
- Libovolný periodický signál lze **analyzovat** - rozložit na základní harmonické složky pomocí Fourierových řad
- Frekvenční analýzu (spektrum) u číslicových signálů lze provést pomocí číslicové Fourierovy transformace (FFT)

Spektrum

Závislost amplitud a fází složek na frekvenci

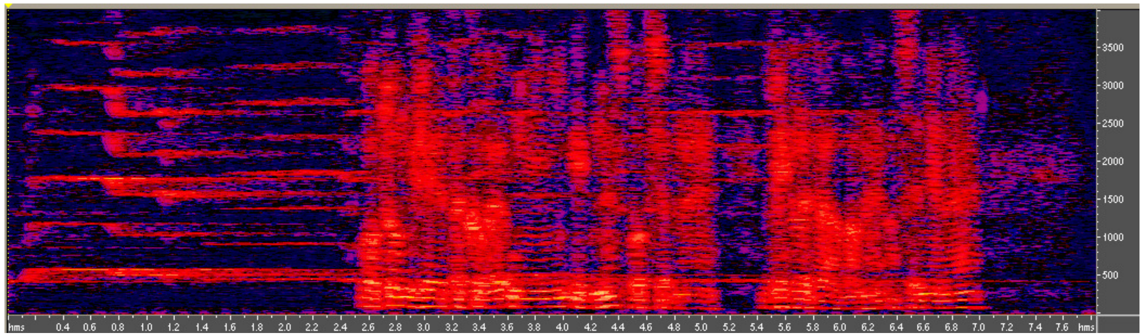
- u periodických signálů je čarové





U neperiodických signálů se spektrum vyvíjí v čase

– znázorňuje se **spektrogramem**

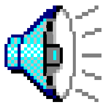


Vzorkování harmonických signálů (1)

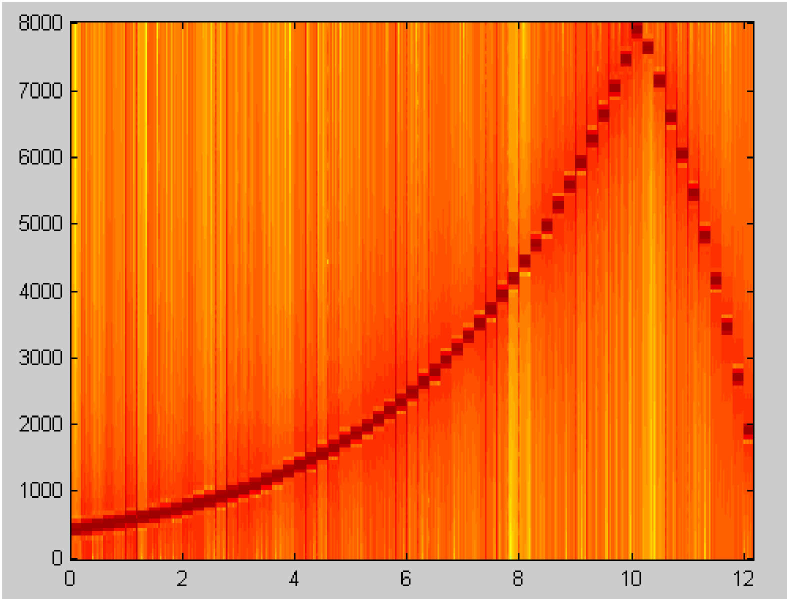
Ilustrační příklad (v Matlabu):

Vygenerujme hudební tóny od 440 Hz do 14 kHz

```
Fs = 16000;  % vzorkovací frekvence
t=0:1/Fs:0.2; % časové vzorky v rámci 0.2 s
f = 440; % komorní a
q = 2^(1/12); frekvenční kvocient odpovídající půltónu
for k = 0:60
  f = f * q^k   % zvyš frekvenci o půltón
  ton = sin(2*pi*f*t);
  sound (ton);
end
```



? Proč zní tóny jinak?



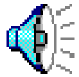
Spektrogram

Vzorkování harmonických signálů (2)

Ilustrační příklad (pokračování):

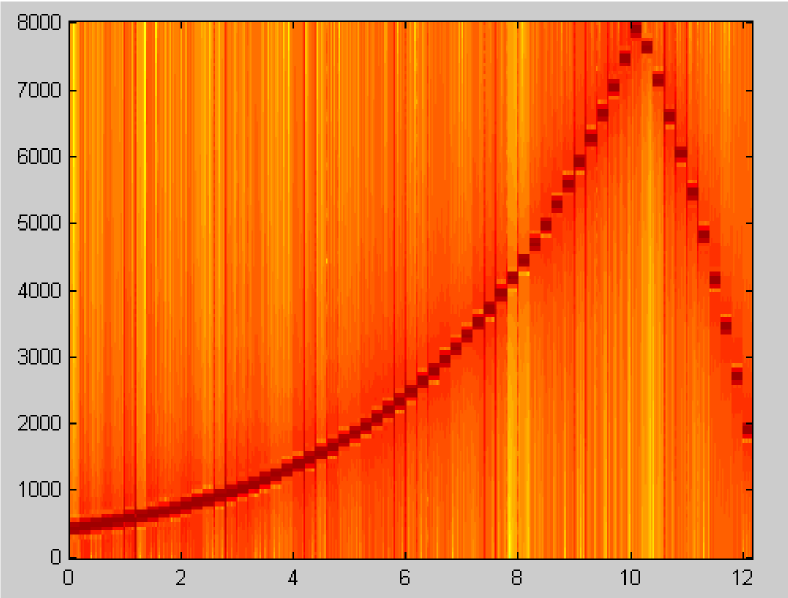
Udělejme malou změnu v programu (změna vzorkovací frekvence)

Fs = 8000; % vzorkovaci frekvence

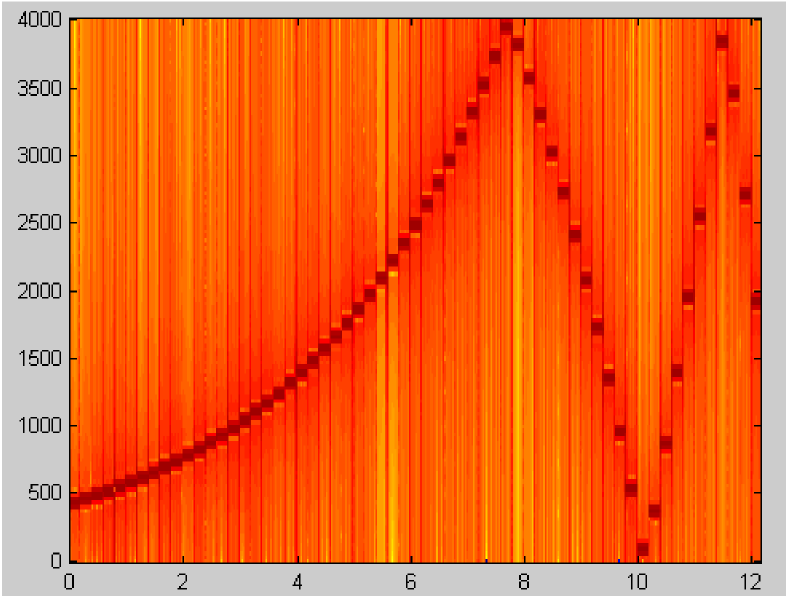


...

Fs = 16000 Hz



Fs = 8000 H



Vysvětlení: nepodařilo se vygenerovat signály s frekvencí vyšší než Fs/2

místo nich vznikly signály s jinými frekvencemi v pásmu 0 až Fs/2

Aliasing (1)

Aliasing – překládání frekvencí (f_x „alias“ f_0)

- jev svázaný se vzorkováním a vzork. frekvencí

Matematické objasnění

Číslicová kosinusovka $\cos(2\pi f n t_s) = \cos(2\pi n f / f_s) = \cos(2\pi n F)$

Veličina $F = f / f_s$ se nazývá **číslicová frekvence**

Otázka 1: Kdy je čísl. kosinusovka periodická?

tehdy když $\cos(2\pi F(n+N)) = \cos(2\pi n F)$

levá strana $\cos(2\pi n F)\cos(2\pi N F) - \sin(2\pi n F)\sin(2\pi N F)$

se rovná pravé pouze když $NF = Nf / f_s = k \in Z$ (celé číslo)

podíl zákl. a vzork. frekvence musí být rac. zlomek

Aliasing (2)

Otázka 2: Existuje čísl. kosinusovka s frekv. > f_s?

uvažujme $\cos(2\pi n(f_0 + f_s)/f_s)$

upravme

$$\cos(2\pi n(f_0 + f_s)/f_s) = \cos(2\pi n f_0/f_s + 2\pi n) =$$

$$= \cos(2\pi n f_0/f_s)\cos(2\pi n) - \sin(2\pi n f_0/f_s)\sin(2\pi n) =$$

$$= \cos(2\pi n f_0/f_s) \quad \text{.... což je kosinusovka s frekv. } f_0$$

*Závěr: kosinusovky s frekvencí > f_s **neexistují**, jsou vždy **přeloženy** do pásma 0 až f_s. Neexistuje tudíž ani žádný obecný číslicový signál s frekvencí nad f_s.*

Aliasing (3)

Otázka 3: Existuje čísl. kosinusovka s frekv.> $f_s/2$?

uvažujme $\cos(2\pi n(f_0 + f_s/2)/f_s)$

upravme

$$\cos(2\pi n(f_0 + f_s/2)/f_s) = \cos(2\pi n f_0/f_s + \pi n) =$$

$$= \cos(2\pi n f_0/f_s)\cos(\pi n) - \sin(2\pi n f_0/f_s)\sin(\pi n) =$$

$$= -\cos(2\pi n f_0/f_s) = \cos(2\pi n f_0/f_s - \pi)$$

… což je kosinusovka s frekvencí f_0 ale opačnou fází

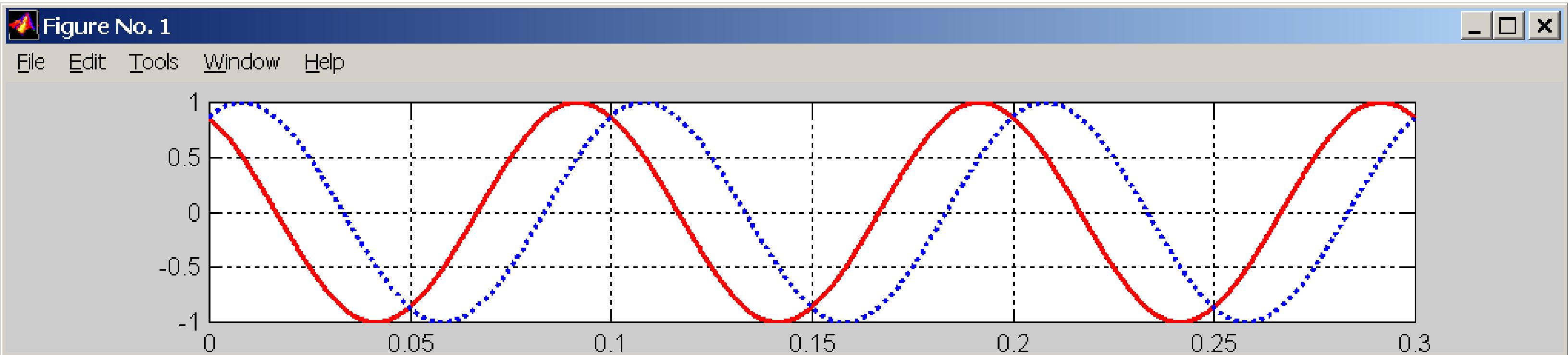
*Závěr: kosinusovky s frekvencí > $f_s/2$ **neexistují**, jsou vždy **přeloženy** do pásma 0 až $f_s/2$.Neexistuje tudíž ani žádný obecný číslicový signál s frekvencí nad $f_s/2$.*

Aliasing (4)

Otázka 4: Jaký význam má záporná frekvence?

$$\cos(2\pi n(-f_0)+\varphi)=\cos(-(2\pi n f_0-\varphi))=$$
$$=\cos(2\pi n f_0-\varphi)$$

*Kosinusovka se **zápornou frekvencí** představuje kosinusovku s toutéž kladnou frekvencí ale s fází s opačným znaménkem.*



Aliasing (5)

Klíčová otázka: Co se stane, když vzorkujeme nebo generujeme kosinusovku s frekvencí větší než $f_s/2$?

Dojde k **přeložení frekvence** na novou hodnotu f_a, ležící v intervalu <- $f_s/2$, $f_s/2$> podle vztahu

$$f_a = f_0 - kf_S \in \left(-\tfrac{1}{2} f_S, +\tfrac{1}{2} f_S\right)$$

Příklad: f_s*=8000 Hz,* f_o*= 15600 Hz*

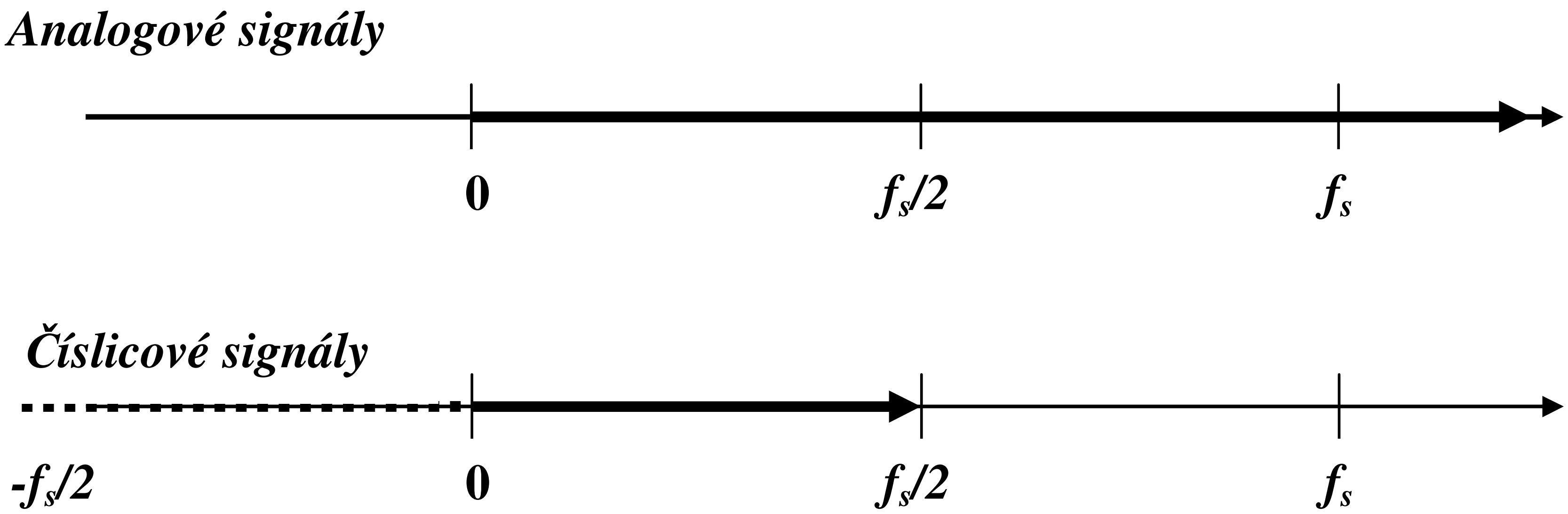
f_a*=15600 – 2 * 8000 = - 400 Hz*

Kosinusovka bude přeložena na 400 Hz

Aliasing (6)

Závěrečné shrnutí:

Zatímco u analogových signálů nejsou frekvence ničím omezené, **u číslicových signálů lze pracovat pouze se signály ve frekvenčním rozsahu 0 až $f_s/2$.**
Číslicové signály s frekvencí vyšší než $f_s/2$ neexistují.



Antialiasing

Při vzorkování analogových signálů hrozí, že složky signálu, které mají vyšší frekvence než $f_s/2$ budou změněny (přeloženy na jiné frekvence) a dojde ke zkreslení signálu a tím i přenášené informace.

Jak tomu zabránit:

Před A/D převodník vložit speciální obvod - **antialiasingový filtr** -, který nepropustí složky o frekvencích vyšších než $f_s/2$ (tzv. dolní propust).

Příklady:

1. *Digitální telefonie pracuje se vzorkovací frekvencí 8 kHz. Vstupní signál prochází nejprve filtrem propouštějícím pouze pásmo 0 až 3,3 KHz a teprve pak je digitalizován.*
2. *Zvukové karty mají speciální vstupní filtry, které se aktivují při nastavení příslušné vzorkovací frekvence*

Shannonův (Nyquistův) vzorkovací teorém

Nemá-li dojít při vzorkování analogových signálů (a též při přímém generování číslicových signálů) ke ztrátě či ke zkreslení informace, musí být vzorkovací frekvence alespoň dvojnásobkem nejvyšší frekvence obsažené v signálu.

Nyquistova frekvence = poloviční vzorkovací frekvence, $f_s/2$

Harry Nyquist (1889-1976), Claude Shannon (1916-2001) – tvůrci teorie informace a kódování (40. léta 20. století)

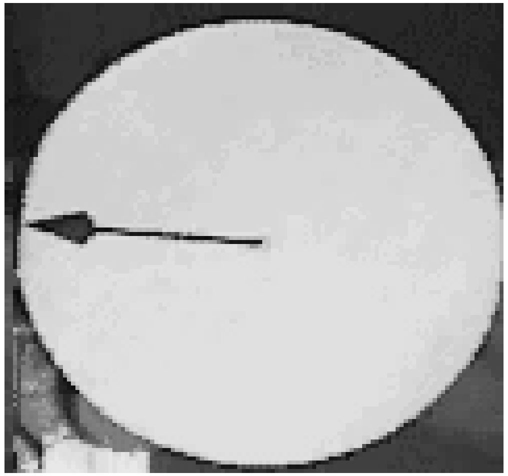
Vzorkování u obrazových dat

I zde musí být splněn Shannonův teorém.

Zjednodušeně lze říci, že vzorkovací frekvence musí být alespoň dvakrát vyšší než frekvence nejmenšího detailu.

Příklady: skenování (tištěných) obrázků

Vyšší DPI (300) a nižší DPI (75) porovnatelné s rastrem



stroboskopické snímání rotujícího předmětu

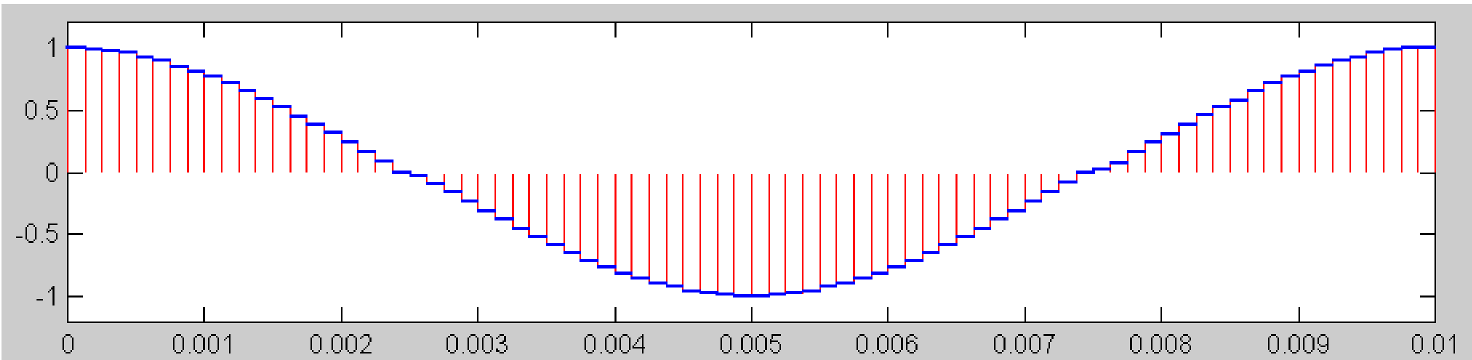
proměnná rychlost otáčení, konstantní frekvence strobování (30 Hz)

Převod digitálních signálů na analogové (1)

D/A převod, zpětná rekonstrukce signálů

Aplikace: rekonstrukce hudby z CD, videa z DVD, řeči z WAV, generování signálů počítačem, …..

Pokud by se číslicový signál zavedl přímo do výstupního zařízení (např. reproduktoru), vypadal by následovně:

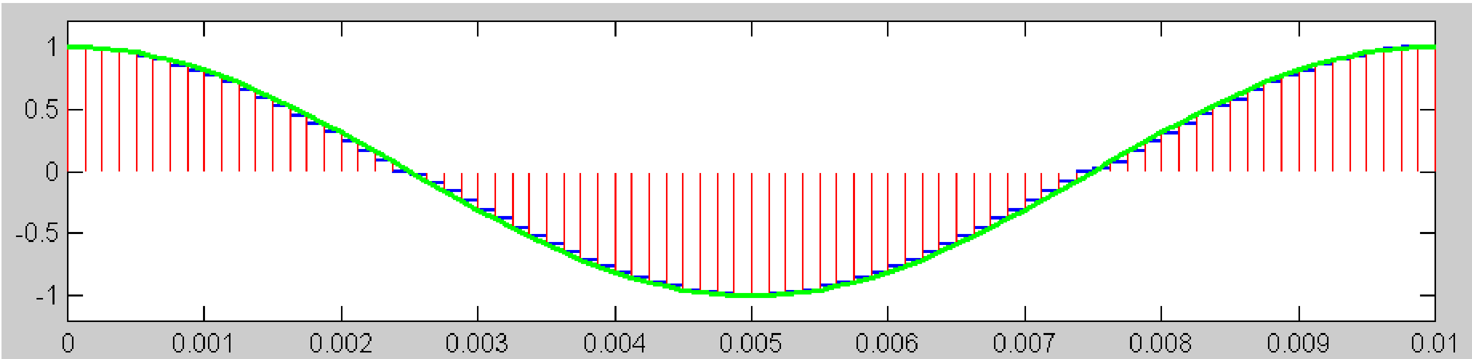


Schodovitý výstupní signál

Převod digitálních signálů na analogové (2)

Problém „schodovitého" průběhu – obdélníková funkce, která obsahuje velký podíl vyšších harmonických

Řešení: číslicový signál je na výstupu D/A převodníku zaveden do filtru (dolní propust), který propustí pouze složky do $f_s/2$



Závěr: Omezení na pásmo 0 až $f_s/2$ je tedy nutné jak při A/D převodu, tak i D/A převodu

Analýza skutečných signálů (1)

Reálné signály (signály z praxe) nikdy **nejsou periodické** (buď přímo z podstaty měřeného jevu nebo vlivem rušení, útlumu, nelinearit, atd.)

Např.:

- chvění struny u kytary je po úderu velmi rychle tlumeno
- vibrace jazýčku u flétny se mění s proudem dechu
- řeč má krátkodobě periodický tvar jen u samohlásek, u souhlásek je přítomen šum,
- u ekonomických dat převládá „náhodná složka“ nad periodickou
- u obrazových dat bývá periodicita rovněž jen lokální (v čase nebo v prostoru)

Reálné signály jsou proto mnohem složitější pro analýzu, na druhé straně „ideální“ periodické signály jsou nezajímavé (nenesou žádnou novou informaci).

Analýza skutečných signálů (2)

Základní princip analýzy reálných signálů:

Rozdělení signálu do kratších úseků, u nichž lze předpokládat ***stacionaritu***, zejména

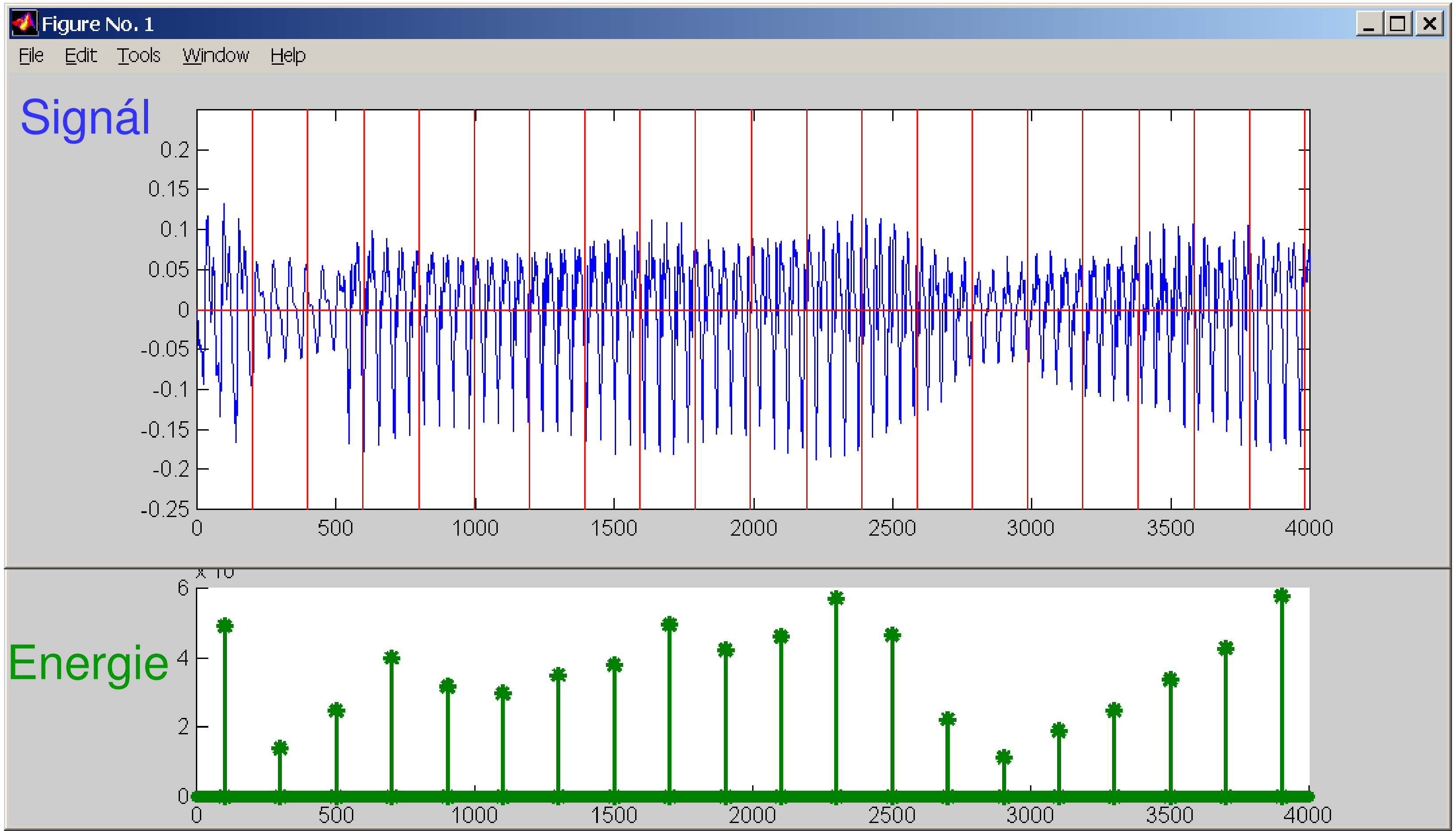
a) *periodičnost* průběhu,
b) jistou *podobnost* průběhu,
c) *neměnnost* určitých charakteristik,
d) *lokální vazby* (např. u obrázků).

Příklady:

1. **Řeč** se analyzuje v rámci tzv. rámců (frame) o délce kolem 10 až 25 ms (signál lze v nich považovat za stacionární),
2. Podobným způsobem se analyzují i další **akustické** a obecně **jednorozměrné signály**
3. **Video** (dynamický obrazový záznam) se analyzuje v rámci tzv. snímků (frame)

Analýza skutečných signálů (3)

Příklad: analýza signálu řeči prostřednictvím analýzy kratších úseků signálu (rámců)



Veličiny (charakteristiky) používané pro krátkodobou analýzu signálů

Příklady veličin (charakteristik, parametrů) používaných při krátkodobé analýze signálů

1. Střední hodnota signálu
2. Energie signálu
3. Spektrum (frekvenční charakteristika) signálu

Analyzuje se vždy úsek signálu s konstantní délkou tj. konstantním počtem vzorků *N*.

Krátkodobá stř. hodnota a energie

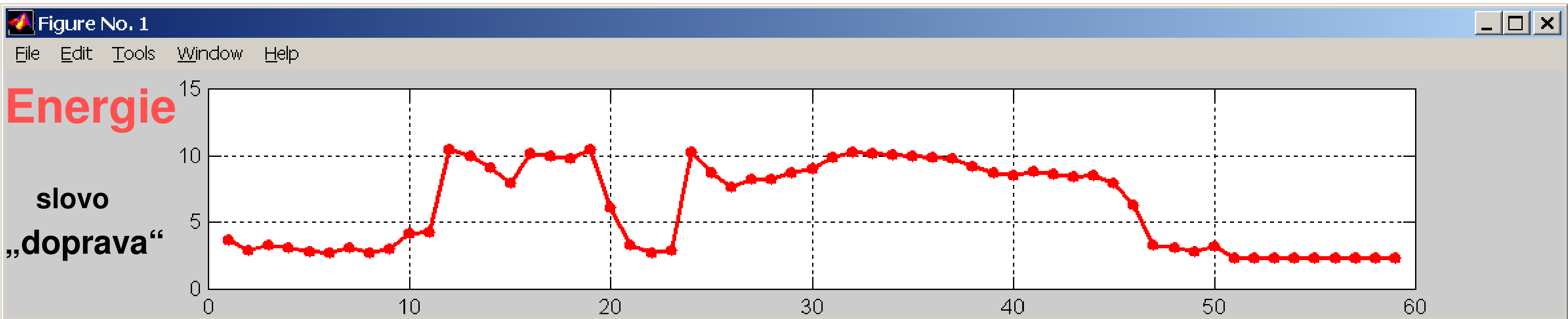
Vztahy:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \qquad E = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)$$

Poznámky:

1. U řady signálů bývá stř. hodnota 0 (zejména u signálů popisujících kmitání), takže tento parametr často nenese žádnou informaci
2. Střední energie (díky kvadrátu) je vždy nezáporná, např. u zvuku nese informaci související s hlasitostí
3. Některé převodníky mívají nenulový offset (ss složku), pro výpočet energie je proto vhodné nejprve odečíst stř. hodnotu

Příklad:



Krátkodobé spektrum

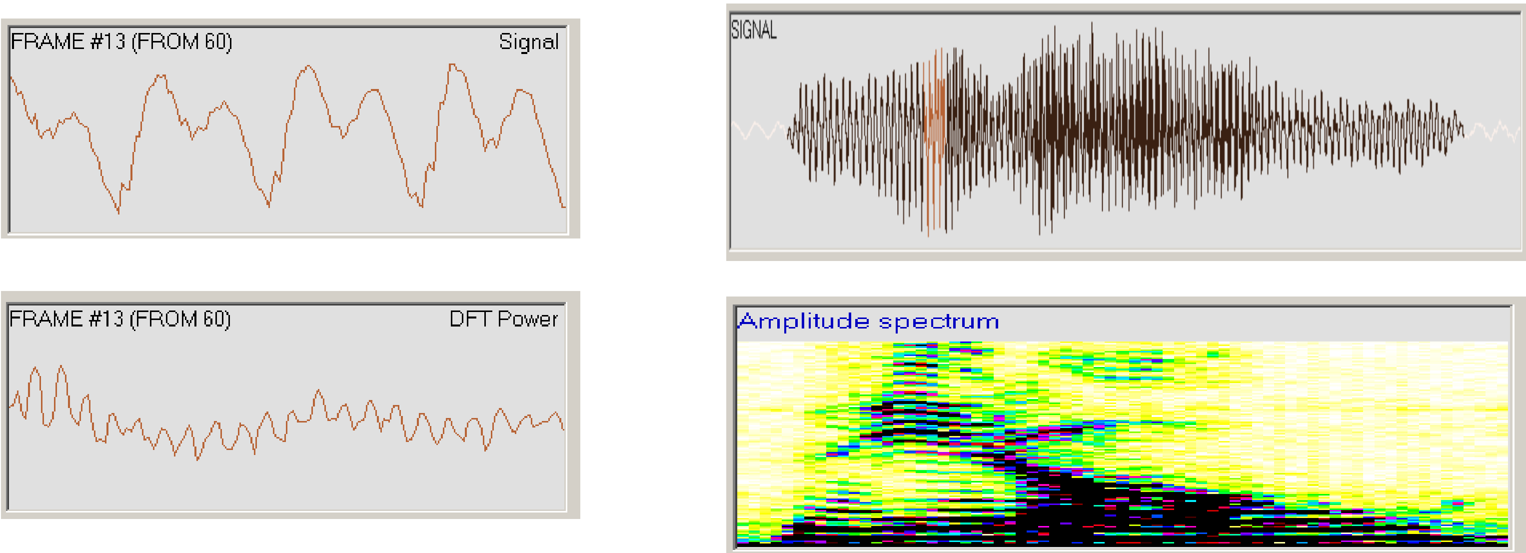
Vztah:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi nk / N)$$

Poznámky:

1. Jde rovněž o **funkci - řadu hodnot -** závisejících na *k*.
2. Výše uvedený vztah **definuje diskrétní Fourierovu transformaci – DFT**. Čísla X[k] udávají (v komplexním tvaru, tj. $c_k e^{j\varphi}$) amplitudu a fázi složek na dílčích frekvencích, jejichž konkrétní hodnotu můžeme vypočítat podle vztahu $f_k = k. f_s / N$

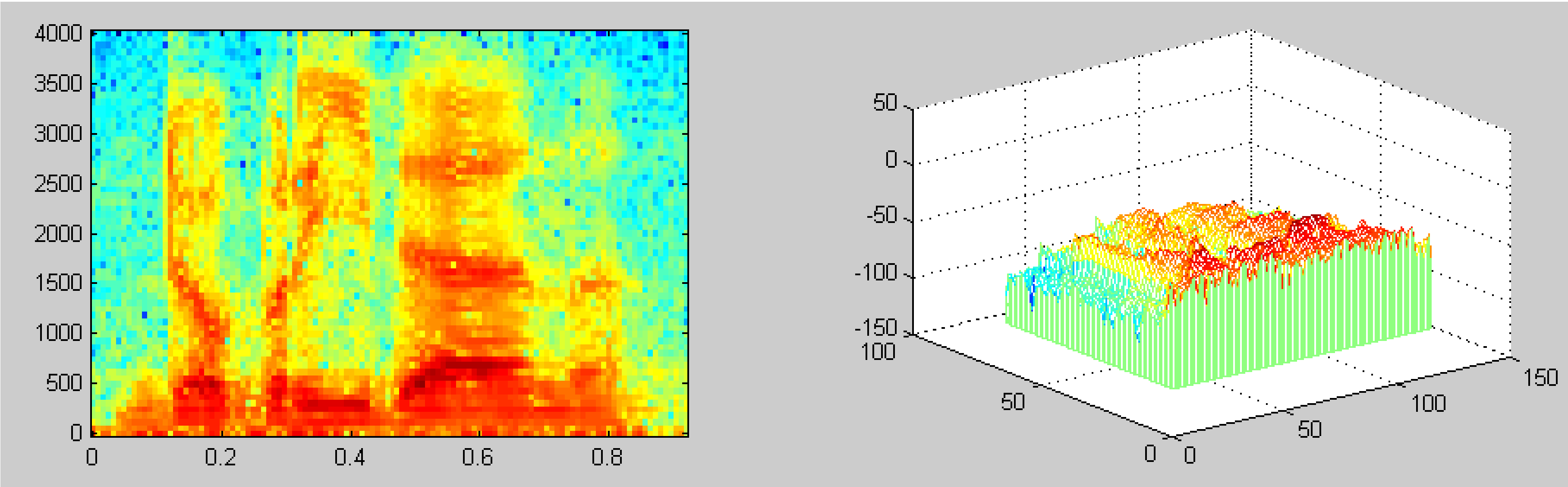
Příklad:



Spektrogram (1)

Spektrogram je **grafické vyjádření spektra** v závislosti na čase.

Na **vodorovné ose je vynášen čas**, na **svislé ose y frekvence**, **amplituda** (případně výkon) pro každý čas a frekvenci je **zobrazena barvou** (čím vyšší amplituda, tím sytější barva)



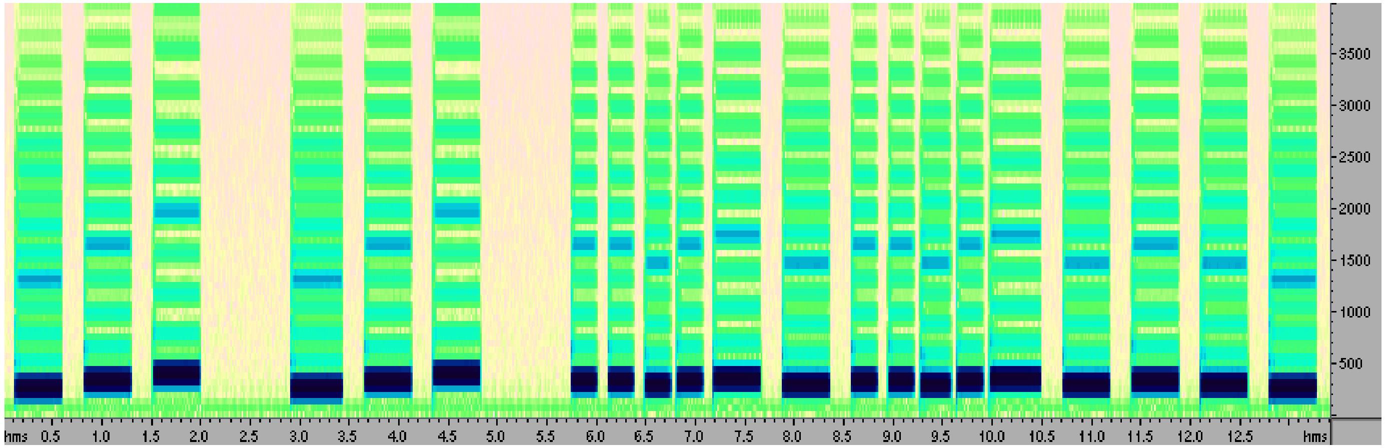
Spektrogram řeči (věta „Dobrý den“). Vlevo klasický spektrogram, vpravo 3D zobrazení.

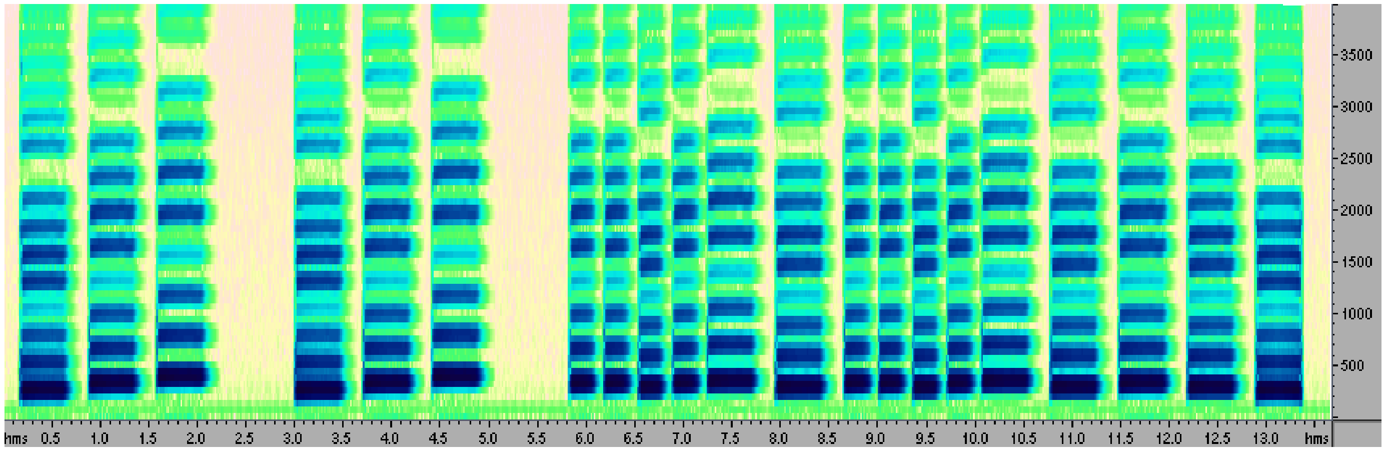
- Příkaz v MATLABu: [B,f,t] = specgram (rec, 128, Fs, hamming(128))

Spektrogram (2)

Příklady spektrogramů dalších akustických signálů:

tatáž hudební melodie hraná zobcovou flétnou a houslemi





Spektrogramy názorně ukazují různé zastoupení vyšších harmonických u různých nástrojů

Shrnutí přednášky

- Na rozdíl od analogových signálů, **číslicové signály mají omezený rozsah frekvencí** - pouze v intervalu 0 až fs/2.
- Signály o frekvencích vyšších než fs/2 jsou **přeloženy** do tohoto základního pásma.
- Nedodržení Shannonova vzorkovacího způsobí nejen změnu frekvencí ale i **zkreslení přenášené informace**.
- Před vzorkováním a při zpětné rekonstrukci je **nutné použít filtr** potlačující frekvence nad fs/2.
- Reálné signály jsou **neperiodické**, částečně **náhodné**. Takové signály je třeba nejprve rozdělit na kratší (stacionární) úseky a v nich provést potřebnou analýzu.

Ukázky příkladů v testu

1. Je dán signál

$$y(t) = \cos(2\pi 200t) + \cos(2\pi 800t + \pi) + \cos(2\pi 1000t)$$

Co se stane se signálem po vzorkování 1kHz?

Řešení:

Nyquistova frekvence (fs/2) = 500 Hz

$$y[n] = \cos(2\pi 200n) + \cos(2\pi(-200n) + \pi) + a.\cos(2\pi 0n) =$$
$$\cos(2\pi 200n) + \cos(2\pi 200n - \pi) + a =$$
$$= \cos(2\pi 200n) - \cos(2\pi 200n) + a = a$$

Rozbor: první složka zůstane nezměněna, druhá bude přeložena na frekvenci -200 Hz (signál s opačnou fází), díky tomu se první dvě složky vzájemně vyruší, třetí složka bude převedena na nulovou frekvenci

Závěr: všechny 3 frekvenční složky vlivem aliasingu vymizí, signál bude „degradován" na konstantu

Konec přednášky

Děkuji za pozornost.