

## **II. MKP v dynamice konstrukcí**

- 1. Princip virtuálních prací**
- 2. Metoda konečných prvků**
- 3. Prutový prvek v rovině**



## 1. Princip virtuálních prací

### Princip virtuálních prací - PVP - 2 základní verze:

- **princip virtuálních posunutí - PVp**
  - práce skutečných sil na virtuálních posunutích
  - deformační (posunová) varianta řešení MKP
- **princip virtuálních sil - PVs**
  - práce virtuálních sil na skutečných posunutích
  - silová varianta řešení MKP



## 1. Princip virtuálních prací

### Princip virtuálních posunutí

Virtuální pole  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  a  $\delta \mathbf{u}$  nesmějí narušovat vazby v tělese, tj. musí platit:

- virtuální posuny  $\delta \mathbf{u}$  musí splňovat geometrické okrajové podmínky

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{na části hranice } \Gamma_u)$$

- virtuální deformace  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  musí být svázány s virtuálními posuny geometrickými rovnicemi

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial^T \mathbf{u} \quad \text{resp.} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \partial^T \delta \mathbf{u}$$

Podmínky rovnováhy a statické okrajové podmínky jsou důsledkem PVp



## 2. Metoda konečných prvků

**Setrvačné síly** (na jedn. objemu)  $\hat{\mathbf{f}}_i = -\rho\ddot{\mathbf{u}} \Rightarrow \mathbf{f}_i = \int_V -\rho\ddot{\mathbf{u}}dV$   
 $\rho$  – objemová hmotnost

**Tlumičí síly** (na jednotku objemu)  $\hat{\mathbf{f}}_d = -c\dot{\mathbf{u}} \Rightarrow \mathbf{f}_d = \int_V -c\dot{\mathbf{u}}dV$   
 $c$  – součinitel útlumu

## Princip virtuálních posunutí

$$\rightarrow \boxed{\delta W_I = \delta W_E}$$

virtuální práce vnitřních sil = virtuální práce vnějších sil



## 2. Metoda konečných prvků

Virtuální práce vnitřních sil

$$\rightarrow \delta W_I = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

$\boldsymbol{\sigma}$  – vektor napětí     $\boldsymbol{\varepsilon}$  – vektor deformace

Virtuální práce vnějších sil

$$\rightarrow \delta W_E = \int_V \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{f}}_i dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{f}}_d dV$$

$\mathbf{u}$  – vektor posunutí

$\hat{\mathbf{f}}_i$  – vektor setrvačných sil       $\hat{\mathbf{f}}_d$  – vektor tlumicích sil



## 2. Metoda konečných prvků

**Koncepce MKP**  $\rightarrow$   $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{r} \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{r}} \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{u}^T = \mathbf{r}^T \mathbf{N}^T \quad \delta \mathbf{u}^T = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{N}^T$$

$\mathbf{r}$  – vektor uzlových posunutí (vektor neznámých)

$\mathbf{N}$  – matice interpolačních (bázových, aproximačních) funkcí

**Geometrické rovnice**  $\rightarrow$   $\boldsymbol{\varepsilon} = \partial^T \mathbf{u} = \partial^T \mathbf{N}\mathbf{r} = \mathbf{B}\mathbf{r}$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{B}^T$$

**Fyzikální rovnice**  $\rightarrow$   $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{r}$

(konstitutivní vztahy)

lineárně elastický materiál

$\mathbf{D}$  – matice tuhosti materiálu



## 2. Metoda konečných prvků

$$\rightarrow \delta W_I = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{r}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \delta W_E &= \int_V \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{f}}_i dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{f}}_d dV \\ &= -\delta \mathbf{u}^T \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} dV - \delta \mathbf{u}^T \int_V c \dot{\mathbf{u}} dV \\ &= -\delta \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{r}} - \delta \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV \dot{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

$$\text{PVp} \quad \rightarrow \quad -\delta W_E + \delta W_I = 0$$

$$\delta \mathbf{r}^T \left( \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{r}} + \int_V \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV \dot{\mathbf{r}} + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{r} \right) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{0}}$$



## 2. Metoda konečných prvků

**Matice hmotnosti**  
(konzistentní formulace)

$$\rightarrow \mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV$$

**Matice útlumu**

$$\rightarrow \mathbf{C} = \int_V \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV$$

**Matice tuhosti**

$$\rightarrow \mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

**Matice hmotnosti** – jiné možné formulace

Diagonální matice = matice soustředěných hmotností

2 varianty:

- rovnoměrné rozdělení hmotnosti do všech uzlů
- speciální rozdělení hmotnosti (prvky jsou úměrné diagonálním prvkům konzistentní matice)





### 3. Prutový prvek v rovině

Charakteristiky:  $E$  - modul pružnosti  
 $A$  - průřezová plocha  
 $I_y$  - moment setrvačnosti k vodor. ose  
 $l$  - délka prutu

Výchozím krokem je aproximace pole posunutí  $\mathbf{u} = \{u, w\}^T$

Za přijatých předpokladů je *přesným* řešením úlohy:

- aproximace osových posunů

$$\rightarrow u = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1 + \frac{x}{l} u_2 = h_1 u_1 + h_2 u_2$$

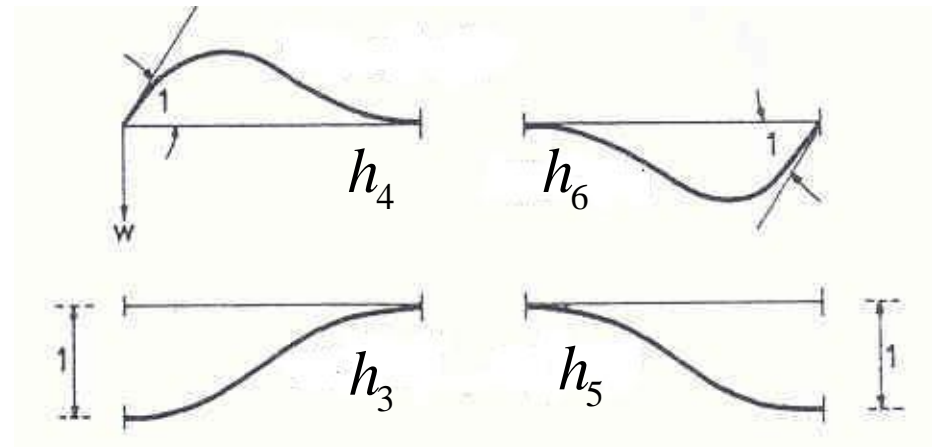
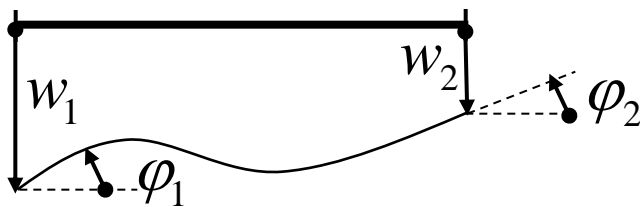
$u_1$  – osový posun vlevo       $u_2$  – osový posun vpravo



### 3. Prutový prvek v rovině

- aproximace průhybů

$$\begin{aligned}
 \rightarrow w &= \left[ 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] w_1 + \left[ -\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] l\varphi_1 \\
 &+ \left[ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] w_2 + \left[ \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] l\varphi_2 \\
 &= h_3 w_1 + h_4 \varphi_1 + h_5 w_2 + h_6 \varphi_2
 \end{aligned}$$



### 3. Prutový prvek v rovině

Vektor uzlových  
posunutí

$$\mathbf{r} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2\}^T$$

Matice interpolačních  
funkcí

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_4 & 0 & h_5 & h_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{r}$$

Fyzikální rovnice

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ -\frac{d^2w}{dx^2} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Geometrické rovnice

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial^T \mathbf{u} = \partial^T \mathbf{N}\mathbf{r} = \mathbf{B}\mathbf{r}$$



## 3. Prutový prvek v rovině

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{dh_2}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2h_3}{dx^2} & -\frac{d^2h_4}{dx^2} & 0 & -\frac{d^2h_5}{dx^2} & -\frac{d^2h_6}{dx^2} \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti

$$\mathbf{K} = \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dl$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & -\frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & \frac{2EI_y}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & \frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & \frac{2EI_y}{l} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & \frac{4EI_y}{l} \end{bmatrix}$$



### 3. Prutový prvek v rovině

#### Matice hmotnosti

(konzistentní)

$$\mathbf{M} = \int_0^l \mathbf{N}^T \mu \mathbf{N} dl$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mu l}{420}$$

$\mu$  – hmotnost na jednotku délky

$l$  – délka prutu

$$\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & -22l & 0 & 54 & 13l \\ & & 4l^2 & 0 & -13l & -3l^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & & & & 156 & 22l \\ & & & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

*sym*



### 3. Prutový prvek v rovině

Jiná možná  
aproximace průhybů:

$$w = \left(1 - \frac{x}{l}\right) w_1 + \frac{x}{l} w_2$$

$$= h_1 w_1 + h_2 w_2$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 140 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & & & & 140 & 0 \\ \text{sym} & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

### Diagonální matice hmotnosti

Je-li  $h_1 = 1$  pro  $x \leq l/2$   
 $h_1 = 0$  pro  $x > l/2$

$h_2 = 0$  pro  $x < l/2$   
 $h_2 = 1$  pro  $x \geq l/2$

$$\mathbf{M} = \frac{\mu l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ \text{sym} & & & & & 0 \end{bmatrix}$$



### 3. Prutový prvek v rovině

#### Porovnání MKP s přesným řešením

**TABLE 17.10.1** NATURAL FREQUENCIES OF A UNIFORM CANTILEVER BEAM:  
CONSISTENT-MASS FINITE ELEMENT AND EXACT SOLUTIONS

Mode	Number of Finite Elements, $N_e$					Exact
	1	2	3	4	5	
1	3.53273	3.51772	3.51637	3.51613	3.51606	3.51602
2	34.8069	22.2215	22.1069	22.0602	22.0455	22.0345
3		75.1571	62.4659	62.1749	61.9188	61.6972
4		218.138	140.671	122.657	122.320	120.902
5			264.743	228.137	203.020	199.860
6			527.796	366.390	337.273	298.556
7				580.849	493.264	416.991
8				953.051	715.341	555.165
9					1016.20	713.079
10					1494.88	890.732

Source: R. R. Craig, Jr., *Structural Dynamics*, Wiley, New York, 1981.



### 3. Prutový prvek v rovině

#### Porovnání MKP s přesným řešením

**TABLE 17.10.2** NATURAL FREQUENCIES OF A UNIFORM CANTILEVER BEAM: LUMPED-MASS FINITE ELEMENT AND EXACT SOLUTIONS

Mode	Number of Finite Elements, $N_e$					Exact
	1	2	3	4	5	
1	2.44949	3.15623	3.34568	3.41804	3.45266	3.51602
2		16.2580	18.8859	20.0904	20.7335	22.0345
3			47.0284	53.2017	55.9529	61.6972
4				92.7302	104.436	120.902
5					153.017	199.860

Source: R. R. Craig, Jr., *Structural Dynamics*, Wiley, New York, 1981.

**Přesnost analýzy konstrukcí pomocí MKP se zvyšuje s rostoucím počtem stupňů volnosti**

