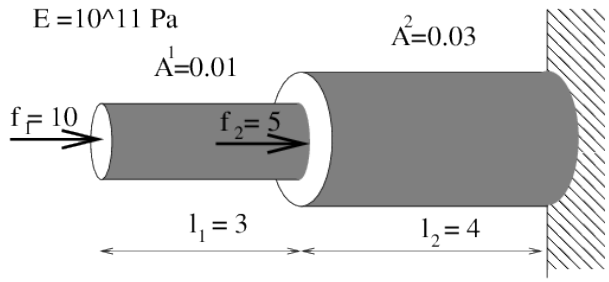
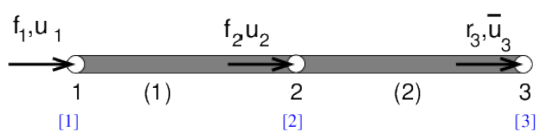
1 Cvičení č.2 - 1D elastický prvek: Lokalizace, jednoduché příklady

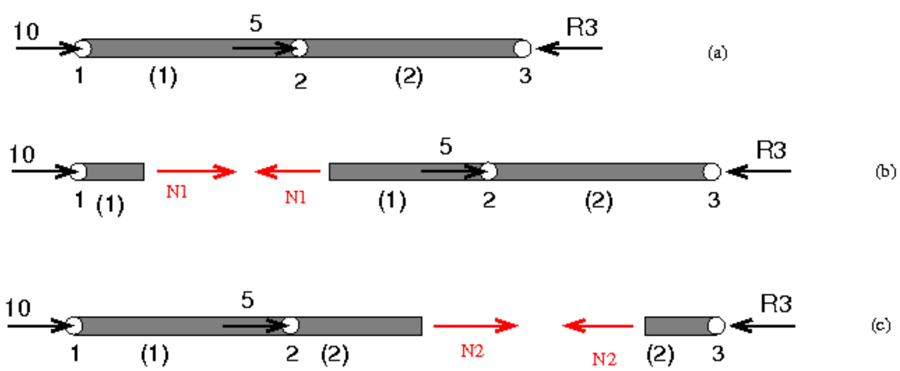
1.1 Příklad 1





1.2 Ruční výpočet

Zadaná konstrukce je staticky určitá, z podmínek rovnováhy můžeme přímo určit vnitřní síly a reakce:



Z podmímek rovnováhy celku (a): $10 + 5 - R_3 = 0 \rightarrow R_3 = 15$
Z podmínek rovnováhy na dílčích částech přerušených řezem zleva (b)+(c):

- $10 + N_1 = 0 \rightarrow N_1 = -10$
- $10 + 5 + N_2 = 0 \rightarrow N_2 = -15$

Dopočtení deformací:

- $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{N_1}{A_1 E} = -\frac{10}{0.01 * 10^{11}} = -1.10^{-8}$
- $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{N_2}{A_2 E} = -\frac{15}{0.03 * 10^{11}} = -5.10^{-9}$

Integrací deformací získáme posunutí:
Budeme postupovat zprava od známého posunu $u_3 = 0$:

- $u_2 = (u_3 - \varepsilon_2 * l_2) = (0 + 5.10^{-9} * 4) = 2.10^{-8}$
- $u_1 = (u_2 - \varepsilon_1 * l_1) = (2.10^{-8} + 1.10^{-8} * 3) = 5.10^{-8}$

1.3 Analytické řešení diferenciální rovnice

Připomeňme si diferenciální rovnici pro tažený-tlačený prut

$EA\frac{d^2u}{dx^2} + f_x(x) = 0$

Tedy pro prut 1

(1) $EA_1\frac{d^2u_1}{dx^2} = 0, \;\; x \in (0,3)$

A pro prut 2 * (2) $EA_2\frac{d^2u_2}{dx^2} = 0, \;\; x \in (3,5)$

Postupnou integrací rovnice (1) obdržíme * $EA_1\frac{du_1}{dx} + C_1 = 0$ * $EA_1u_1 + C_1x + C_2 = 0$

Obdobně pro rovnici (2): * $EA_2\frac{du_2}{dx} + C_3 = 0$ * $EA_2u_2 + C_3x + C_4 = 0$

Pro řešení musíme najít příslušné integrační konstanty C_1, C_2, C_3aC_4. Ty určíme z okrajových podmínek:

- (3.1) Statická podmínka na levém okraji $N_1(0) = EA_1\varepsilon_1 = EA_1\frac{du_1}{dx}(0) = -10 \rightarrow EA_1\frac{du_1}{dx}(0) = -10$
- (3.2) Podmínka spojitosti posunutí v uzlu 2: $u_1(3) = u_2(3)$
- (3.3) Podmínka rovnováhy v uzlu 2: $-N_1(3)+N_2(3)+5 = 0 \rightarrow -EA_1\frac{du_1}{dx}(3)+EA_2\frac{du_2}{dx}(3)+5 = 0$
- (3.4) Kinematická podmínka vpravo ve vetknutí $u_2(7) = 0$

Dosazením do podmínek (3) obdržíme soustavu lineárních rovnic pro integrační konstanty C:

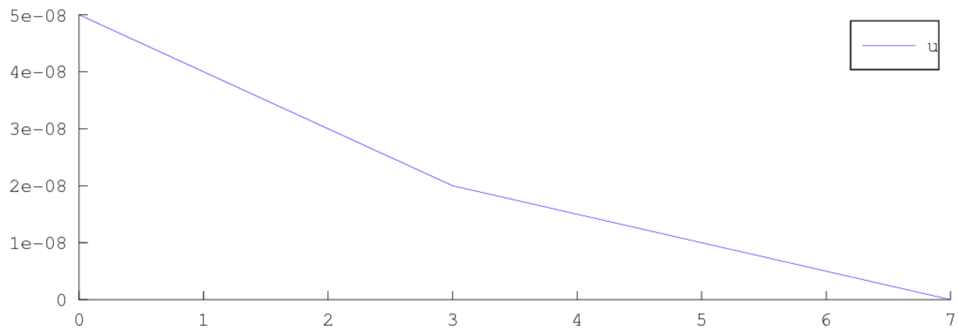
- $-C_1 = -10$
- $-\frac{3C_1+C_2}{EA_1} = -\frac{3C_3+C_4}{EA_2}$
- $C_1 - C_3 + 5 = 0$
- $-\frac{7C_3+C_4}{EA_2} = 0$

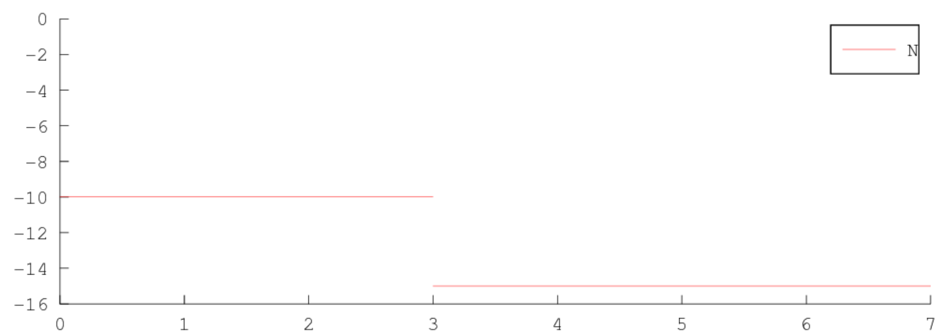
```
In [17]: e=1.e11;
         a1=0.01;
         a2=0.03;
         A = [-1, 0,0,0;
              -3/(e*a1),-1/(e*a1), 3/(e*a2), 1/(e*a2);
              1, 0, -1, 0;
              0, 0, -7/(e*a2), -1/(e*a2)];
         b = [-10; 0; -5; 0];
         c=A\b
```

```
c =

    10.000
   -50.000
    15.000
  -105.000
```

Tedy máme: * $N_1(x) = EA_1\frac{du_1}{dx}(x) = -C_1 = -10.0$ * $u_1(x) = -\frac{C_1x+C_2}{EA_1} = \frac{-10x+50}{EA_1}$, tedy $u_1(0) = -5.10^{-8}$ a $u_1(3) = -2.10^{-8}$ * $N_2(x) = EA_2\frac{du_2}{dx}(x) = -C_3 = -15.0$ * $u_2(x) = -\frac{C_3x+C_4}{EA_2} = \frac{-15x+105}{EA_2}$, tedy $u_2(3) = -2.10^{-8}$ a $u_1(7) = 0$

```
In [36]: x1 = 0:0.1:3;
         x2 = 3:0.1:7;

         subplot(211)
         hold on;
         plot (x1, (-10*x1+50)/(e*a1), "b;u;")
         plot (x2, (-15*x2+105)/(e*a2), "b")
         subplot(212)
         hold on;
         ylim([-16 0])
         plot (x1, -10+0*x1, "r;N;")
         plot (x2, -15+0*x2, "r")
```





1.4 Deformační metoda

```
In [1]: e=1.e11;
        a1=0.01;
        a2=0.03;
        l1=3;
        l2=4;
```

```
        k1 = (e*a1/l1)*[1 -1; -1 1]
        k2 = (e*a2/l2)*[1 -1; -1 1]
```

```
k1 =

   3.3333e+08  -3.3333e+08
  -3.3333e+08   3.3333e+08

k2 =

   750000000  -750000000
  -750000000   750000000
```

1.5 Sestavení podmínek rovnováhy v uzlech - Lokalizace

Z přednášky víme, že koncové síly na prutu můžeme vyjádřit prostřednictvím koncových posunů prutu:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1^i \\ F_2^i \end{array} \right\} = \frac{EA^i}{l^i} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^i \\ u_2^i \end{array} \right\}$$

- Podmínka rovnováhy v uzlu 1: $-F_1^1 + f_1 = 0$

  Pro koncovou sílu F_1^1 platí $F_1^1 = \frac{EA^1}{l^1}(u_1 - u_2)$
  A tedy můžeme psát:
  $\frac{EA^1}{l^1}(u_1 - u_2) = f_1$

- Obdobně pro uzel 2: $-F_2^1 - F_1^2 + f_2 = 0$
  $\frac{EA^1}{l^1}(u_2 - u_1) + \frac{EA^2}{l^2}(u_2 - u_3) = f_2$

```
In [2]: loc1 = [1 2];
        loc2 = [2 3];

        K = zeros(3);
        K(loc1, loc1) += k1
        K(loc2, loc2) += k2
```

```
K =

   3.3333e+08  -3.3333e+08   0.0000e+00
  -3.3333e+08   3.3333e+08   0.0000e+00
   0.0000e+00   0.0000e+00   0.0000e+00

K =

   3.3333e+08  -3.3333e+08   0.0000e+00
  -3.3333e+08   1.0833e+09  -7.5000e+08
```

```
   0.0000e+00  -7.5000e+08   7.5000e+08
```

1.6 Řešení

```
In [3]: f = [10; 5]
        u = K(1:2, 1:2)\f
        # vektor posunuti cele konstrukce
        U = [u(1), u(2), 0]
```

```
f =

   10
    5

u =

   5.0000e-08
   2.0000e-08

U =

   5.0000e-08   2.0000e-08   0.0000e+00
```

1.7 Dopočtení deformací a vntiřních sil

Deformaci spočteme jako pomerné přetvoření každého prutu: $\varepsilon^i = (u_2^i - u_1^i)/l_i$
Normálovou sílu pak $N^i = A^i \sigma^i = A^i E^i \varepsilon^i$

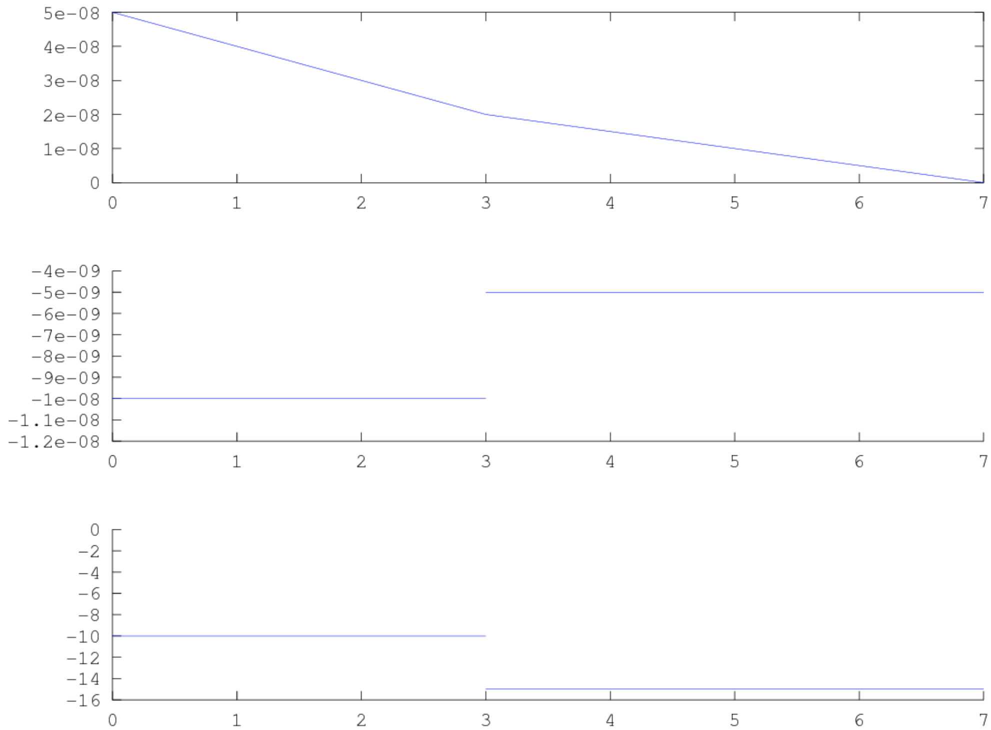
```
In [4]: eps1=(U(2)-U(1))/l1
        eps2=(U(3)-U(2))/l2

        N1 = e*a1*eps1
        N2 = e*a2*eps2
```

```
eps1 =   -1.0000e-08
eps2 =   -5.0000e-09
N1 = -10.000
N2 = -15
```

1.8 Vykreslení

```
In [5]: subplot(311)
        plot ([0 l1 l1+l2], U)
        #title("Posuny")
```

```
subplot(312)
hold on
plot ([0 l1], [eps1 eps1])
plot ([l1 l1+l2], [eps2 eps2])
#title("deformace")
subplot(313)
hold on
ylim ([-16 0])
plot ([0 l1], [N1 N1])
plot ([l1 l1+l2], [N2 N2])
#title("normalova sila")
```




```
In [ ]:
```