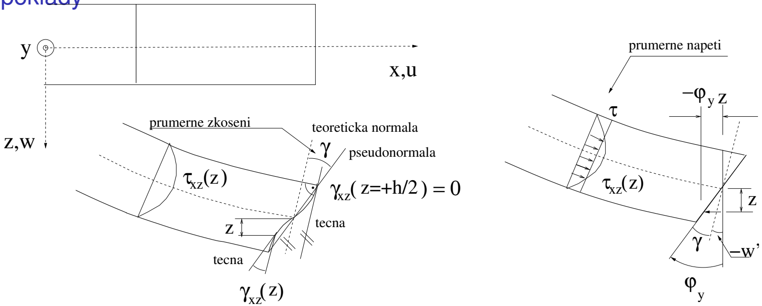
Rovinné nosníky

Rovinné nosníky - mindlinovské řešení

Předpoklady



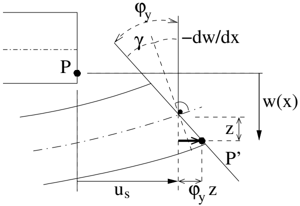
Přijmeme následující předpoklady

- Zatížení nosníku působí v rovině xz, která je i rovinou symetrie, řešení tedy není funkcí souřadnice y.
- Pruhyb je po výšce průřezu konstantní (w(x,y,z)=w(x))
- Průřez zůstává i po deformaci rovinný, ne však nezbytně kolmý k deformované střednici ($u(x,z) = \varphi_y(x)z$).
- Tyto předpoklady navrženy nezávisle Timošenkem, Reissnerem a Mindlinem.

Základní vztahy - Geometrické rovnice

Kinematika přemístění průřezu (viz předpoklady)

- $u(x, z) = u_s(x) + \varphi_y(x) z$
- $v = 0$
- $w(x, z) = w(x)$



Na základě předpokladů o kinematice odvodíme deformace. Nenulové složky jsou

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d u_s}{dx} + \frac{d\varphi_y}{dx} z = \varepsilon_s + \kappa_y z$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dw}{dx} + \varphi_y$$

- κ_y bývá nazývána pseudokřivostí ohybové čáry
- Poměrná deformace ε_x je součtem příspěvků od protažení střednice $\dfrac{d u_s}{dx}$ a příspěvku od ohybu

Základní vztahy

Konstitutivní rovnice

Předpokládejme, že prut je ve stavu rovinné napjatosti, takže pro nenulové složky napětí platí

$$
\begin{aligned}
\sigma_x(x,z) &= E(x)\varepsilon_x(x,z) = E(x)(\varepsilon_s + \kappa_y z) \\
\tau_{xz}(x) &= kG(x)\gamma_{xz}(x) = kG(x)(\frac{dw}{dx} + \varphi_y)
\end{aligned}
$$

Místo v napětích je běžné pracovat s integrálními veličninami M,N,V:

$$
\begin{aligned}
N(x) &= \int_A \sigma_x dydz = E(\varepsilon_s + \kappa_y z)\int_A dydz = EA\varepsilon_s \\
V(x) &= \int_A \tau_{yz}\, dydz = kG(\frac{dw}{dx} + \varphi_y)\int_A dydz = kGA(\frac{dw}{dx} + \varphi_y) \\
M(x) &= \int_A \sigma_x zdydz = E(\int_A (\varepsilon_s + \kappa_y z)z\, dydz) = EI_y\kappa_y
\end{aligned}
$$

V první a třetí rovnice vypadnou členy, kde $\int_A z\, dA = 0$, protože vnitřní síly definujeme v těžišti, kde statické momenty jsou rovny nule.

Uvážení skutečného průběhu smykového napětí

- Skutečný průběh smykového napětí v průřezu
$\tau_{xz}(z) = \dfrac{V\bar{S}_y(z)}{I_y b(z)}$
- Porovnejme práci skutečných napětí a zprůměrovaných napětí

$$\int_A \tau_{xz}\gamma_{xz}\, dA = \frac{V^2}{GI_y^2}\int_A \frac{\bar{S}_y^2(z)}{b^2(z)}\, dA$$

$$\int_A \tau\gamma = \tau\gamma A = \frac{V^2}{kGA}$$

- Porovnáním výrazů

$$k = \frac{I_y^2}{A\int_A \frac{\bar{S}_y^2(z)}{b^2(z)}\, dA}$$

- Pro obdélník $k = 5/6$.

Základní vztahy

Podmínky rovnováhy

- Vodorovná podmínka

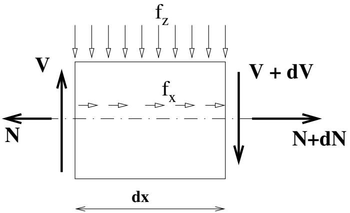
$$\frac{dN}{dx} + f_x = 0$$

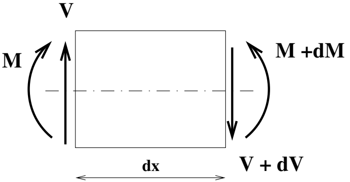
- Svislá podmínka

$$\frac{dV}{dx} + f_z = 0$$

- Momentová podmínka

$$\frac{dM}{dx} - V = 0$$





Diferenciální rovnice problému

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(EA\frac{du_s}{dx}) + f_x &= 0\\
\frac{d}{dx}\left(kGA\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_y\right)\right) + f_z &= 0\\
\frac{d}{dx}(EI_y\frac{d\varphi_y}{dx}) - kGA(\frac{dw}{dx} + \varphi_y) &= 0
\end{aligned}
$$

Okrajové podmínky

- Kinematické podmínky: vetknutí ($u_s = w = \varphi_y = 0$), pevný kloub ($u_s = w = 0$), adt
- Statické okrajové podmínky: $nN(x) = \bar{N}(x), nV(x) = \bar{V}(x), nM(x) = \bar{M}(x)$

Slabé řešení

$$
\begin{aligned}
0 &= \int \delta u_s\left(\frac{dN}{dx} + f_x\right)dx \\
0 &= \int \delta w\left(\frac{dV}{dx} + f_z\right)dx \\
0 &= \int \delta \varphi_y\left(\frac{dM}{dx} - V\right)dx
\end{aligned}
$$

Pro všechny $\delta u_s, \delta w$ a $\delta \varphi_y$ splňující kinematické okrajové podmínky. Integrací per-partes, dosazením konstitutivních rovnic a uvážením okrajových podmínek dostáváme:

$$
\int \frac{d(\delta u_s)}{dx} EA \frac{du_s}{dx}\, dx = [\delta u_s \bar{N}]_\Gamma + \int \delta u_s \bar{f}_x\, dx
$$

$$
\int \frac{d(\delta w)}{dx} kGA \left(\frac{dw}{dx} + \varphi_y\right) dx = [\delta w \bar{V}]_\Gamma + \int \delta w \bar{f}_z\, dx
$$

$$
\int \frac{d(\delta \varphi_y)}{dx} EI \frac{d\varphi_y}{dx}\, dx + \int \delta \varphi_y kGA\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_y\right) dx = [\delta \varphi_y \bar{M}]_\Gamma
$$

Diskretizace MKP

- Konstrukci rozdělíme na n prvků
- Na každém prvku budeme aproximovat vodorovný posun u, průhyb w a pootočení φ_y pomocí interpolačních funkcí a uzlových hodnot u_i, w_i a φ_{y_i}

$$u(x) \approx \boldsymbol{N}_u^e r_u^e \quad w(x) \approx \boldsymbol{N}_w^e r_w^e \quad \varphi_y(x) \approx \boldsymbol{N}_\varphi^e r_\varphi^e$$

- Do slabého řešení potřebujeme i vyjádření derivací

$$\frac{du(x)}{dx} \approx \boldsymbol{B}_u^e r_u^e \quad \frac{dw(x)}{dx} \approx \boldsymbol{B}_w^e r_w^e \quad \frac{d\varphi_y(x)}{dx} \approx \boldsymbol{B}_\varphi^e r_\varphi^e$$

- Obdobně i pro aproximaci váhových funkcí

$$\delta u_s(x) \approx \boldsymbol{N}_u^e \delta r_u^e \quad \delta w(x) \approx \boldsymbol{N}_w^e \delta r_w^e \quad \delta\varphi_y(x) \approx \boldsymbol{N}_\varphi^e \delta r_\varphi^e$$

$$\frac{d\delta u_s(x)}{dx} \approx \boldsymbol{B}_u^e \delta r_u^e \quad \frac{d\delta w(x)}{dx} \approx \boldsymbol{B}_w^e \delta r_w^e \quad \frac{d\delta\varphi_y(x)}{dx} \approx \boldsymbol{B}_\varphi^e \delta r_\varphi^e$$

- Dosazením do slabého řešení

$$\sum_e \delta \boldsymbol{r}_u^{eT} \left(\int \boldsymbol{B}_u^{eT} EA \boldsymbol{B}_u^e \, dx \, \boldsymbol{r}_u^e - [\boldsymbol{N}_u^{eT} \bar{N}]_\Gamma - \int \boldsymbol{N}_u^{eT} \bar{f}_x \, dx \right) = 0$$

$$\sum_e \delta \boldsymbol{r}_w^{eT} \left(\int \boldsymbol{B}_w^{eT} kGA(\boldsymbol{B}_w^e \boldsymbol{r}_w^e + \boldsymbol{N}_\varphi^e \boldsymbol{r}_\varphi^e) \, dx - [\boldsymbol{N}_w^{eT} \bar{V}]_\Gamma - \int \boldsymbol{N}_w^{eT} \bar{f}_z \, dx \right) = 0$$

$$\sum_e \delta \boldsymbol{r}_\varphi^{eT} \left(\int \boldsymbol{B}_\varphi^{eT} EI \boldsymbol{B}_\varphi^e \, dx \, \boldsymbol{r}_\varphi + \int \boldsymbol{N}_\varphi^{eT} kGA(\boldsymbol{B}_w^e \boldsymbol{r}_w^e + \boldsymbol{N}_\varphi^e \boldsymbol{r}_\varphi^e) \, dx \right.$$
$$\left. - [\boldsymbol{N}_\varphi^{eT} \bar{M}]_\Gamma \right) = 0$$

- V kompaktním zápisu pak

$$\begin{aligned}
\sum_e \delta \boldsymbol{r}_u^{eT} \left(\boldsymbol{K}_{uu}^e \boldsymbol{r}_u^e - \boldsymbol{R}_u^e \right) &= 0 \\
\sum_e \delta \boldsymbol{r}_w^{eT} \left(\boldsymbol{K}_{ww}^e \boldsymbol{r}_w^e + \boldsymbol{K}_{w\varphi}^e \boldsymbol{r}_\varphi^e - \boldsymbol{R}_w^e \right) &= 0 \\
\sum_e \delta \boldsymbol{r}_\varphi^{eT} \left(\boldsymbol{K}_{\varphi w}^e \boldsymbol{r}_w^e + \boldsymbol{K}_{\varphi\varphi}^e \boldsymbol{r}_\varphi^e - \boldsymbol{R}_\varphi^e \right) &= 0
\end{aligned}$$

- Lokalizací příspěvků jednotlivých prvků

$$\left\{\begin{array}{c}\delta \boldsymbol{r}_u\\ \delta \boldsymbol{r}_w\\ \delta \boldsymbol{r}_\varphi\end{array}\right\}^T \left(\left[\begin{array}{ccc}\boldsymbol{K}_{uu} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{ww} & \boldsymbol{K}_{w\varphi}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{\varphi w} & \boldsymbol{K}_{\varphi\varphi}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{r}_u\\ \boldsymbol{r}_w\\ \boldsymbol{r}_\varphi\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{R}_u\\ \boldsymbol{R}_w\\ \boldsymbol{R}_\varphi\end{array}\right\}\right) = \boldsymbol{0}$$

- Všimněme si, že $\boldsymbol{K}_{w\varphi}^T = \boldsymbol{K}_{\varphi w}$ a tedy matice tuhosti $\boldsymbol{K}$ je opět symetrická

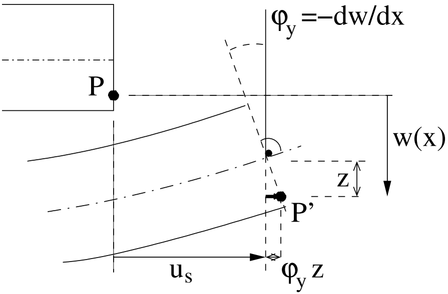
Smykové zamknutí

- Pro $h/L \to 0$ by se výsledky mindlinovského řešení měli blížit klasickému řešení bez vlivu smyku (Bernoulli-Navierova teorie)
- Pokud volíme např. aproximaci průhybu a natočení lineární, výsledek je pro štíhlé pruty příliš tuhý - tzv. *smykové zamknutí* (shear locking)
- Statické zdůvodnění
  - Posouvající síla $V(x) = kGA\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_y\right)$ - lineární
  - Ohybový moment $M(x) = EI\frac{d\varphi_y}{dx}$ - konstantní
  - To je v *hrubém* rozporu se Schwedlerovou větou

$$\frac{dM(x)}{dx} - V(x) = 0$$

Rovinné nosníky - Bernoulli-Navierova hypotéza

Předpoklady



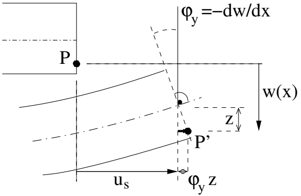
Přijmeme následující předpoklady

- Zatížení nosníku působí v rovině xz, která je i rovinou symetrie, řešení tedy není funkcí souřadnice y.
- Pruhyb je po výšce průřezu konstantní (w(x,y,z)=w(x))
- Průřez zůstává i po deformaci rovinný a kolmý k deformované střednici ($u(x,z) = \varphi_y(x) z = -\dfrac{dw(x)}{dx} z$).

Základní vztahy - Geometrické rovnice

Kinematika přemístění průřezu

- $u(x,z) = u_s(x) + \varphi_y(x) z = u_s(x) - \dfrac{dw(x)}{dx} z$
- $v = 0$
- $w(x,z) = w(x)$



Na základě předpokladů o kinematice odvodíme deformace.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_s}{dx} - \frac{d^2 w(x)}{dx^2} z \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dw}{dx} - \frac{dw}{dx} = 0
\end{aligned}
$$

- Poměrná deformace ε_x je součtem příspěvků od protažení střednice $\dfrac{du_s}{dx}$ a příspěvku od ohybu

Základní vztahy

Konstitutivní rovnice

Předpokládejme, že prut je ve stavu rovinné napjatosti, takže pro nenulové složky napětí platí

$$\sigma_x(x,z) \quad = \quad E(x)\varepsilon_x(x,z) = E(x)(\varepsilon_s + \kappa_y z)$$

Místo v napětích je běžné pracovat s integrálními veličninami M,N:

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_A \sigma_x dydz = E(\varepsilon_s - \frac{d^2w}{dx^2}z)\int_A dydz = EA\varepsilon_s \\ M(x) &= \int_A \sigma_x zdydz = E(\int_A (\varepsilon_s - \frac{d^2w}{dx^2}z)z\,dydz) = -EI_y\frac{d^2w}{dx^2} \end{aligned}$$

V obou rovnicích vypadnou členy, kde $\int_A z\,dA = 0$, protože vnitřní síly definujeme v těžišti, kde statické momenty jsou rovny nule.

Podmínky rovnováhy, Diferenciální rovnice problému

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(EA\frac{du_s}{dx}) + f_x &= 0\\ \frac{d^2}{dx^2}(EI_y\frac{d^2w}{dx^2}) + f_z &= 0\end{aligned}$$

Slabé řešení: Pro všechny $\delta u_s, \delta w$ splňující kinematické okrajové podmínky.

$$\begin{aligned}\int \delta u_s \left(\frac{d}{dx}(EA\frac{du_s}{dx}) + f_x\right) dx &= 0\\ \int \delta w \left(\frac{d^2}{dx^2}(EI_y\frac{d^2w}{dx^2}) + f_z\right) dx &= 0\end{aligned}$$

Integrací per-partes

$$\int_\Gamma \delta u_s \underbrace{(EA\frac{du_s}{dx})n}_{\bar{N}}\, d\Gamma - \int \frac{d(\delta u_s)}{dx} EA\frac{du_s}{dx}\, dx + \int \delta u_s \bar{f}_x\, dx = 0$$

$$\int_\Gamma \delta w \left(\underbrace{\frac{d}{dx}\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}\right) n}_{-\bar{Q}} \right) d\Gamma - \int \frac{d(\delta w)}{dx} \left(\frac{d}{dx}\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}\right)\right) dx + \int \delta w \bar{f}_z\, dx = 0$$

Integraci per-partes zopakujeme ještě jednou pro druhý člen druhé rovnice:

$$\int_\Gamma \delta u_s \bar{N}\, d\Gamma - \int \frac{d(\delta u_s)}{dx} EA\frac{du_s}{dx}\, dx + \int \delta u_s \bar{f}_x\, dx = 0$$

$$-\int_\Gamma \delta w \bar{Q}\, d\Gamma - \int_\Gamma \frac{d\delta w}{dx} \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}\right) n}_{\bar{M}}\, d\Gamma + \int \frac{d^2 \delta w}{dx^2} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}\, dx + \int \delta w \bar{f}_z\, dx = 0$$

Diskretizace

- Z druhé rovnice plyne nutnost zajistit jak spojitost w, tak i w', aby uvedené výrazy měly smysl.
- Pro w potřebujeme tedy aproximaci z C_1 (polynomy druhého stupně), ale protože musíme zajistit C_1 spojitost i mezi prvky v uzlech, je nutno volit polynomy třetího stupně.
- Pro δu_s potřebujeme C_0 spojitost a vystačíme s lineární aproximací.
- Aproximace w: $\xi \in < -1, 1 >$, $\xi = 2x/l - 1$

$$
\begin{aligned}
w(x) \quad = \quad & \overbrace{\frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)}^{N_1}\ w_1 + \overbrace{\frac{l}{8}(1-\xi)^2(1+\xi)}^{N_2}\ w_1' + \\
& \underbrace{\frac{1}{4}(1-\xi)^2(2-\xi)}_{N_3}\ w_2 + \underbrace{\frac{l}{8}(1+\xi)^2(\xi-1)}_{N_4}\ w_2'
\end{aligned}
$$

Bernoulli-Navierova a Mindlinova hypotéza - porovnání

	Bernoulli-Navier	Minlin
Obor platnosti	$h/l < 1/10$	$h/l < 1/3$
Průřez	Rovinný, kolmý	Rovinný
γ_{xz}	0	$\neq 0$
Neznámé	w(x)	$\varphi_y(x)$
	$\varphi_y = -w'(x)$	nezávislé

Smykové zatuhnutí

Selektivní (redukovaná) integrace

- Motivací je zmírnit rozpor plynoucí ze Schvedlerovy věty
- Smykové zkosení $\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi$ uvažováno jako konstantní po prvku hodnotou $\bar{\gamma} = (w_2 - w_1)/l + (\varphi_1 + \varphi_2)/2$
- Tedy v případě lineární aproximace člen slabého řešení zahrnující vliv smyku (původně kvadratický) je uvažován průměrnou hodnotou
- To odpovídá náhradě přesné integrace integrací jednobodovou - proto mluvíme o redukované integraci

Smykové zatuhnutí

Použítí hierarchické funkce

- Smykové zkosení $\gamma = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \varphi$, pro případ lineární aproximace
  $\gamma = (w_2 - w_1)/l + \varphi_1 + \dfrac{x}{l}(\varphi_2 - \varphi_1) = konst + \dfrac{x}{l}(\varphi_2 - \varphi_1)$
- Pokud chceme, aby smykové zkosení bylo konstantní, pak musíme zajistit, aby lineární člen vymizel
- Vylepšíme aproximaci průhybu $w(x) = w^{lin} + \alpha x(x - l)$[1] a α stanovíme tak, aby $\gamma = konst$:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi = (w_2 - w_1)/l + \alpha(2x - l) + \varphi_1 + \frac{x}{l}(\varphi_2 - \varphi_1) \\
&= (w_2 - w_1)/l - \alpha l + \varphi_1 + \frac{x}{l}(\varphi 2 - \varphi_1 + 2\alpha l) = 0
\end{aligned}
$$

- Odtud je zřejmé, že musíme α volit rovno $\dfrac{1}{2l}(\varphi_2 - \varphi_1)$

[1] Přidáme právě vhodný kvadratický člen, takový, aby jeho derivace (lineární funkce) vyrušila lineární člen smykového zkosení

Smykové zatuhnutí

Použítí hierarchické funkce

- Výsledná aproximace

$$
\begin{aligned}
u_s(x) &= N_1 u_{s1} + N_2 u_{s2} \\
w(x) &= w_1(1 - \frac{x}{l}) + w_2 \frac{x}{l} + \frac{1}{2l}(\varphi_2 - \varphi_1)x(x - l) \\
&= N_1 w_1 + N_2 w_2 - N_3 \varphi_1/(2l) + N_3 \varphi_2/(2l) \\
\varphi(x) &= N_1 \varphi_1 + N_2 \varphi_2
\end{aligned}
$$

Doporučená literatura:

1. Z. Bittnar, J. Šejnoha:*Numerické metody mechaniky I*, ES ČVUT, 1992.
2. J. Šejnoha, J. Bittnarová:*Pružnost a pevnost 10*, ES ČVUT, 1997.