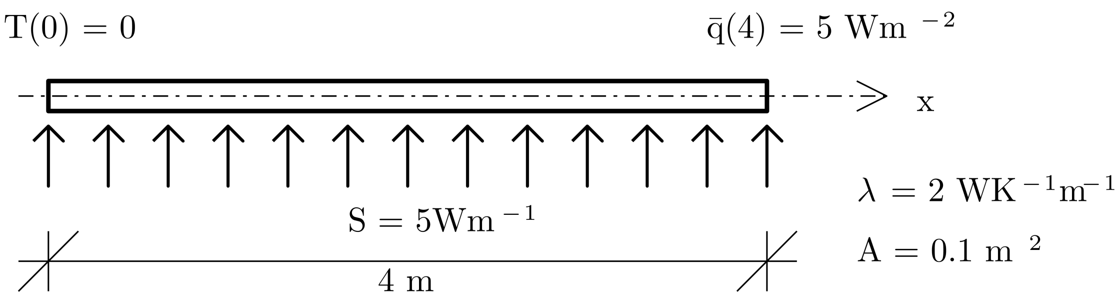
Cvičení č.6 - Stacionární vedení tepla v 1D

Příklad 1



Analytické řešení

- Diferenciální rovnice vedení tepla

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{dT(x)}{dx}\right)+\bar{Q}(x)=0$$

- Pro $\lambda(x)=konst.=\lambda$

$$\lambda\frac{d^2T(x)}{dx^2}=-\bar{Q}(x)$$

- Integrací získáme

$$\lambda\frac{dT(x)}{dx}=-\bar{Q}(x)x+C_1$$

$$\lambda T(x)=-\bar{Q}(x)\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

- Okrajové podmínky:

$$\begin{array}{llll} \bar{T}(0)=0 & \lambda T(0)=C_2 & \Rightarrow & C_2=0 \\ \bar{q}(4)=5 & q(4)=-\lambda\frac{dT(x)}{dx}=Q(4)\cdot 4-C_1 & \Rightarrow & C_1=Q(4)\cdot 4-q(4)=\frac{S}{A}\cdot 4-q(4)=4\frac{5}{0.1}-5=195 \end{array}$$

- Analytické řešení

$$T(x)=-\frac{1}{\lambda}\bar{Q}(x)\frac{x^2}{2}+\frac{1}{\lambda}195x$$

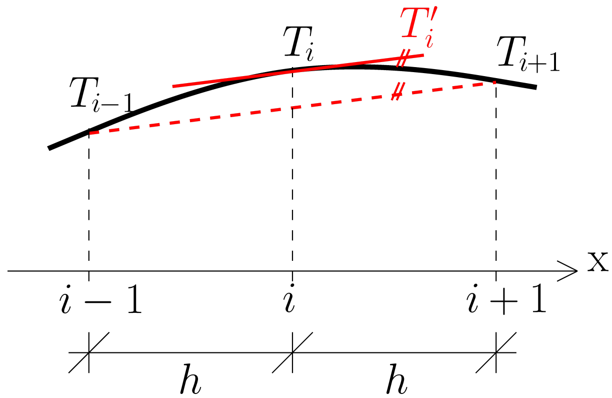
$$T(x)=-\frac{1}{2}\frac{5}{0.1}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}195x$$

$$T(x)=-12.5x^2+97.5x$$

Metoda konečných diferencí (Metoda sítí)

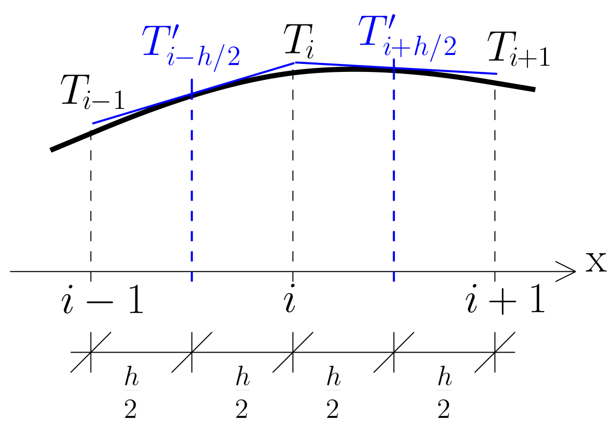
Pomocí metody konečných diferencí převedeme diferenciální rovnici na soustavu algebraických rovnic. Řešenou oblast diskretizujeme, uzly budeme pro jednoduchost volit s ekvidistantním krokem h. Derivace v uzlech nahradíme diferencemi, které si odvodíme z geometrické představy derivace jako tečny funkce. V následujících příkladech budeme používat tzv. centrální diference (lze použít i dopřednou/zpětnou diferenci).

- Náhrada první derivace



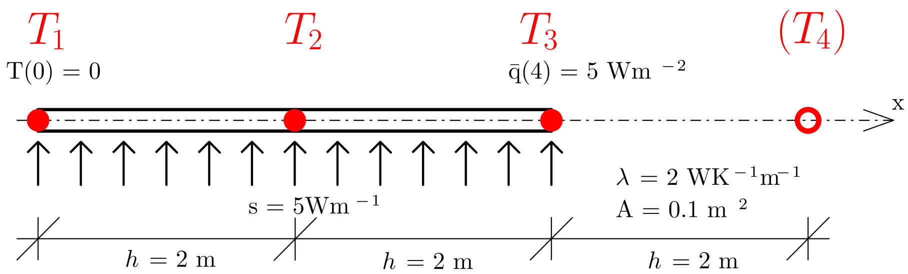
$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h}$$

- Náhrada druhé derivace



$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dT_i}{dx}\right) = \frac{\frac{dT_{i+h/2}}{dx} - \frac{dT_{i-h/2}}{dx}}{h} = \frac{\frac{T_{i+1}-T_i}{h} - \frac{T_i-T_{i-1}}{h}}{h} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2}$$

Příklad 1



- Pro připomenutí: $\lambda(x) = konst. = \lambda$ tedy

$$\lambda \frac{d^2T(x)}{dx^2} = -\bar{Q}(x)$$

- Diferenciální rovnici problému zapíšeme v diskretizovaném tvaru pro všechny uzly sítě, ve kterých není předepsána Dirichletova okrajová podmínka:

$$i = 2: \qquad \lambda \left(\frac{T_1 - 2T_2 + T_3}{h^2} \right) = -Q(x)$$

$$i = 3: \qquad \lambda \left(\frac{T_2 - 2T_3 + T_4}{h^2} \right) = -Q(x)$$

- Máme dvě rovnice pro tři neznámé (T_2, T_3, T_4), třetí rovnici získáme z Neumannovy okrajové podmínky (předepsaný tok v uzlu 3):

$$\bar{q_x} = n(x) q_x(x) = -\lambda \frac{dT_3}{dx}:$$

$$-\lambda \left(\frac{T_4 - T_2}{2h} \right) = \bar{q}(x)$$

- S uvážením $T_1 = 0$ a po dosazení zadaných hodnot získáme následující soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2T_2 & + & T_3 & & & = & -100 \\ T_2 & - & 2T_3 & + & T_4 & = & -100 \\ T_2 & & & - & T_4 & = & 10 \end{array}$$

In [5]:
```
m = [-2 1 0; 1 -2 1; 1 0 -1]
v = [-100; -100; 10];

T = m\v;
T(1:2)
```

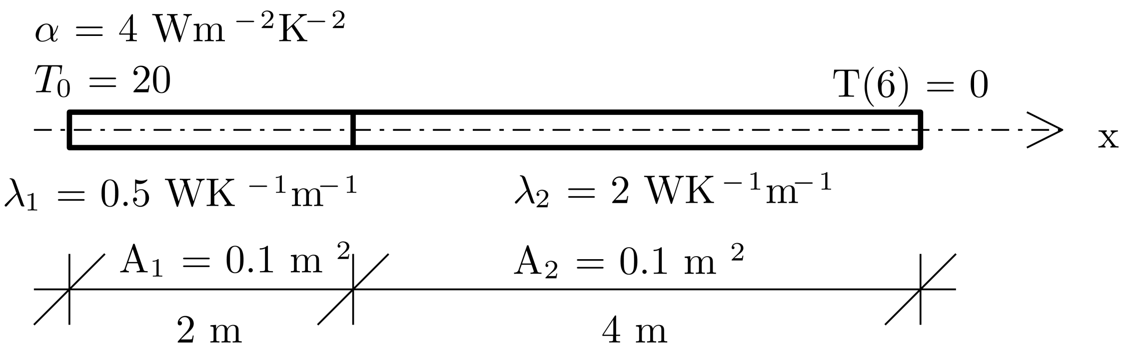
```
m =

  -2   1   0
   1  -2   1
   1   0  -1

ans =

   145
   190
```

Příklad 2



Analytické řešení

- Diferenciální rovnice vedení tepla

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{dT(x)}{dx}\right) + \bar{Q}(x) = 0$$

- Pro $\lambda_i(x) = konst. = \lambda_i,\ \bar{Q}(x) = 0$

$$\begin{array}{ll} \text{prut 1:} & \text{prut 2:} \\ \lambda_1 \frac{d^2T_1(x)}{dx^2} = 0 & \lambda_2 \frac{d^2T_2(x)}{dx^2} = 0 \end{array}$$

- Integrací získáme

$$\begin{array}{ll} \text{prut 1:} & \text{prut 2:} \\ \lambda_1 \frac{dT_1(x)}{dx} = C_1 & \lambda_2 \frac{dT_2(x)}{dx} = D_1 \\ \lambda_1 T_1(x) = C_1 x + C_2 & \lambda_2 T_2(x) = D_1 x + D_2 \end{array}$$

- Okrajové podmínky:

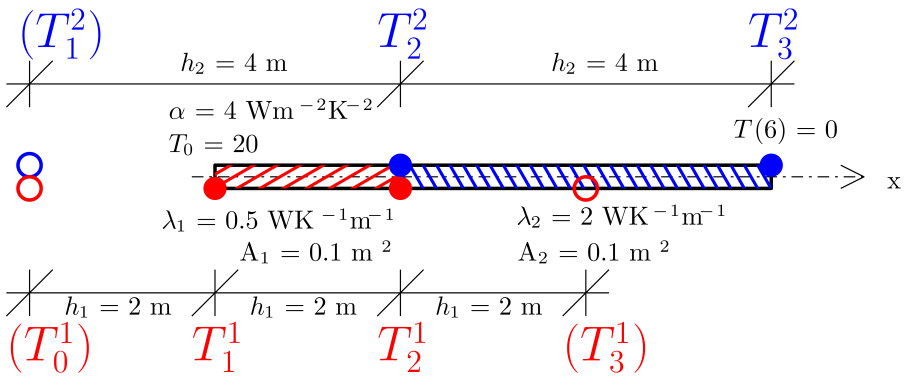
$$\begin{array}{lll} \bar{T}_2(6) = 0 & \lambda_2 T_2(6) = D_1 \cdot 6 + D_2 & \Rightarrow 6D_1 = -D_2 \\ \bar{q}_1(0) = \alpha(0)(T_1(0) - T_0(0)) & -C_1 = q_1(0) = n(x)\bar{q}_1(0) = -\alpha\left(\frac{1}{\lambda_1}C_2 - T_0\right) = -4\left(\frac{1}{0.5}C_2 - 20\right) & \Rightarrow C_1 = 8C_2 - 80 \\ q_1(2) = q_2(2) & -C_1 = -D_1 & \Rightarrow C_1 = D_1 \\ T_1(2) = T_2(2) & \frac{1}{\lambda_1}(C_1 \cdot 2 + C_2) = 4C_1 + 2C_2 = \frac{1}{\lambda_2}(D_1 \cdot 2 + D_2) = D_1 + \frac{1}{2}D_2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{16}{5}, \qquad C_2 = \frac{48}{5}, \qquad D_1 = -\frac{16}{5}, \qquad D_2 = \frac{96}{5},$$

- Analytické řešení

$$\begin{array}{ll} \text{prut 1:} & \text{prut 2:} \\ T_1(x) = \frac{1}{0.5}\left(-\frac{16}{5}x + \frac{48}{5}\right) & T_2(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{16}{5}x + \frac{96}{5}\right) \\ & \\ T_1(x) = -\frac{32}{5}x + \frac{96}{5} & T_2(x) = -\frac{8}{5}x + \frac{48}{5} \end{array}$$

Metoda sítí



- Prvek 1:
  - Vnitřní uzly sítě

$$i = 1: \qquad \lambda_1 \left(\frac{T_0^1 - 2T_1^1 + T_2^1}{h_1^2} \right) = 0 \qquad (1)$$

$$i = 2: \qquad \lambda_1 \left(\frac{T_1^1 - 2T_2^1 + T_3^1}{h_1^2} \right) = 0 \qquad (2)$$

  - Smíšená okrajová podmínka

$$q_{x1}(0) = n(x)\bar{q}_{x1}(0) = -1 \cdot \alpha \left(T_1^1 - T_0 \right) = -\lambda_1 \frac{dT_1}{dx}:$$

$$-\lambda_1 \left(\frac{T_2^1 - T_0^1}{2h_1} \right) = -\alpha(T_1^1 - T_0) \qquad (3)$$

- Prvek 2:
  - Vnitřní uzly sítě

$$i = 2: \qquad \lambda_2 \left(\frac{T_1^2 - 2T_2^2 + T_3^2}{h_2^2} \right) = 0 \qquad (4)$$

  - Dirichletova okrajová podmínka

$$T_3^2 = 0$$

- Máme čtyři rovnice pro neznámé $T_0^1, T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_1^2, T_2^2$, ze spojitosti mezi prvky dále plyne:
  - Teplota:

$$T_2 = T_2^1 = T_2^2$$

  - Tepelný tok:

$$q_{x1}(2) = q_{x2}(2): \qquad -\lambda_1 \left(\frac{T_3^1 - T_1^1}{2h_1} \right) = -\lambda_2 \left(\frac{T_3^2 - T_1^2}{2h_2} \right) \qquad (5)$$

- Dosazením do rovnic (1)-(5) získáme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
-2T_1^1 & + & T_2 & + & T_0^1 & & & & & = & 0 \\
T_1^1 & - & 2T_2 & & & + & T_3^1 & & & = & 0 \\
-32T_1^1 & + & T_2 & - & T_0^1 & & & & & = & -640 \\
 & - & 2T_2 & & & & & + & T_1^2 & = & 0 \\
-T_1^1 & & & & & + & T_3^1 & + & 2T_1^2 & = & 0
\end{array}$$

In [15]:
```
m = [-2 1 1 0 0; 1 -2 0 1 0; -32 1 -1 0 0; 0 -2 0 0 1; -1 0 0 1 2]
v = [0; 0; -640; 0; 0];

T = m\v;
T(1:2)
```

```
m =

   -2    1    1    0    0
    1   -2    0    1    0
  -32    1   -1    0    0
    0   -2    0    0    1
   -1    0    0    1    2

ans =

   19.2000
    6.4000
```