Přednáška č.9: Jednorozměrná konsolidace

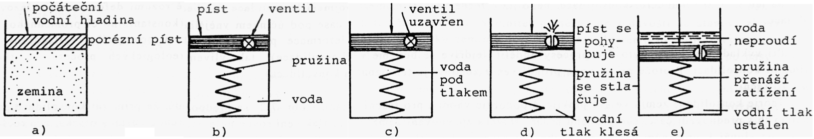
Motivace

Diferenciální rovnice jednorozměrné konsolidace

Slabé řešení

Motivace

- Jeden z důležitých problémů v geotechnice:
  "Jak se bude deformovat zemina působením vnějšího zatížení?"
- Analýza deformace porézního materiálu
- *Časově závislý problém*
- Typický příklad sdruženého problému
- Jednoduchý model (viz. [1]):



Diferenciální rovnice jednorozměrné konsolidace

- Základní neznámé
  - Pole posunutí (sednutí) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$
  - Pórový tlak $p(\boldsymbol{x}, t)$
- Předpoklady
  - Rovnoměrný přírůstek zatížení $\overline{\sigma}$ aplikovaný na 1 m^2 povrchu zeminy [vynechán symbol Δ pro úsporu místa]
  - Zemina uvažována jako porézní médium s póry, které jsou *zcela* vyplněny *nestlačitelným médiem* (vodou) [tzv. plně saturovaná zemina]
  - Zanedbáme setrvačné síly, předpokládáme vevazkou tekutinu
  - Odezvu budeme hledat na časovém intervalu $[0, T]$

- Prostorová závislost jen na prostorové proměnné $z \in [0, L]$, $\Rightarrow \Omega = (0, L)$, $\Gamma = \{0, L\}$
- Pole posunutí: $w(z, t)$; $w(z = L, t) = 0$ m
- Nenulová složka deformace ($z \in \Omega$): $\varepsilon_z(z, t) = \frac{\partial w(z,t)}{\partial z}$
- Koncept efektivních napětí:

$$\sigma_z(z, t) = \sigma_z^{\text{eff}}(z, t) - p(z, t),$$

  kde
  - $\sigma_z^{\text{eff}}(z, t)$ je efektivní napětí ve skeletu zeminy
  - $p(z, t)$ je *pórový tlak*, $p(z = 0, t) = \overline{p}(t)$ [$p > 0$ tlak]

Diferenciální rovnice jednorozměrné konsolidace

Podmínky rovnováhy/bilanční rovnice

- Podmínky rovnováhy ($z \in \Omega$)

$$\sigma_z(z+\Delta z, t) \cdot 1\ \mathrm{m}^2 - \sigma_z(z,t) \cdot 1\ \mathrm{m}^2 + \gamma(z)\Delta z \cdot 1\ \mathrm{m}^2 = 0$$

- Podělením Δz a limitním přechodem $\Delta z \to 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\sigma_z(z,t) + \gamma_z(z) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\sigma_z^{\mathrm{eff}}(z,t) - \frac{\partial}{\partial z}p(z,t) + \gamma_z(z) &= 0 \end{aligned}$$

- Podmínka rovnováhy pro $z = 0$ m:

$$\begin{aligned} \sigma_z(0,t) \cdot 1\ \ \mathrm{m}^2 + \overline{\sigma} \cdot 1\ \ \mathrm{m}^2 &= 0 \\ p(0,t) - \sigma_z^{\mathrm{eff}}(0,t) &= \overline{\sigma} \end{aligned}$$

- Objemová bilance: Změna objemu materiálu $\equiv$ objemu vytlačené vody [nestlačitelnost]

Diferenciální rovnice jednorozměrné konsolidace

Podmínky rovnováhy/bilanční rovnice

- Změna objemu materiálu (stlačení, za jednotku času)

$$\left(\varepsilon_z(z+\frac{\Delta z}{2}, t+\Delta t) - \varepsilon_z(z+\frac{\Delta z}{2}, t)\right)\Delta z \cdot 1\ \mathrm{m}^2$$

- Změna objemu kapaliny: Rychlost proudění $v_z(z,t)$ [ms^{-1}]

$$\left(v_z(z+\Delta z, t+\frac{\Delta t}{2}) - v_z(z, t+\frac{\Delta t}{2})\right) 1\ \mathrm{m}^2 \cdot \Delta t$$

- Bilancí objemových změn, podělením $\Delta t \Delta z \cdot 1\ \mathrm{m}^2$ a limitním přechodem $\Delta t \to 0$, $\Delta z \to 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_z(z,t) = \frac{\partial}{\partial z}v_z(z,t)$$

- Okrajová podmínka: $v_z(L,t) = 0\ \mathrm{ms}^{-1}$

Diferenciální rovnice jednorozměrné konsolidace

Konstitutivní rovnice

- Pro skelet zeminy: pro $z \in \Omega$:

$$\sigma_z^{\mathrm{eff}}(z,t) = \frac{E(z)(1-\nu(z))}{(1+\nu(z))(1-2\nu(z))}\varepsilon_z(z,t) = E_{\mathrm{eod}}(z)\varepsilon_z(z,t),$$

  kde E_{eod} je tzv. *edometrický* modul pružnosti.
- Rychlost proudění kapaliny v porézním prostředím udává Darcyho zákon

$$v_z(z,t) = -k(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p(z,t)}{\gamma_z(z)} + z\right),$$

  kde k=[ms^{-1}] je filtrační součinitel zeminy (hydraulická vodivost).
- Počáteční podmínky [uvažujeme pouze přitížení/odtížení vzhledem k referenčnímu stavu]

$$w(z,t_0) = \overline{w}_0(z) = 0 \text{ m}$$

Diferenciálné rovnice problému

Hledáme $w(z,t)$ a $p(z,t)$ [dostatečně hladké], takové aby:

- pro $z \in \Omega$ a $0 < t \leq T$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial z}\left(E_{\mathrm{oed}}(z)\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}\right) + \frac{\partial p(z,t)}{\partial z} &= \gamma_z(z) \\
-\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z \partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(k(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p(z,t)}{\gamma_z(z)} + z\right)\right) &= 0
\end{aligned}
$$

- Okrajové podmínky:

$$
\begin{aligned}
p(0,t) &= \overline{p} \qquad & v_z(L,t) &= 0 \\
\sigma(0,t) &= -\overline{\sigma} \qquad & w(L,t) &= 0
\end{aligned}
$$

- Počáteční podmínky

$$
w(z,0) = 0
$$

Slabé řešení

- Použime časovou diskretizaci diferenčními schematy
- Diferenciální rovnice přenásobíme testovacími funkcemi ($\delta w(z)$ a $\delta p(z)$) a provedeme integraci na řešené oblasti

$$\int_\Omega \delta w(z) \left(-\frac{\partial}{\partial z} \left(E_{\mathrm{oed}}(z) \frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \right) + \frac{\partial p(z,t)}{\partial z} - \gamma_z(z) \right) \mathrm{d}z = 0$$

$$\int_\Omega \delta p(z) \left(-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p(z,t)}{\gamma_z(z)} + z \right) \right) \right) \mathrm{d}z = 0$$

- Provedeme integraci per-partes a uvažováním následující MKP aproximace

$$\begin{aligned} w^e(z,t) &= \boldsymbol{N}_w^e(z)\boldsymbol{w}^e(t) & \qquad p^e(z,t) &= \boldsymbol{N}_p^e(z)\boldsymbol{p}^e(t) \\ \delta w^e(z) &= \boldsymbol{N}_w^e(z)\delta\boldsymbol{w}^e & \qquad \delta p^e(z,t) &= \boldsymbol{N}_p^e(z)\delta\boldsymbol{p}^e \end{aligned}$$

- obdržíme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \sum_e (\delta \boldsymbol{w}^e)^\mathsf{T} \left(\boldsymbol{K}_w^e \boldsymbol{w}^e(t) + \boldsymbol{K}_{wp}^e \boldsymbol{p}^e(t) - \boldsymbol{f}_w^e(t) \right) &= 0 \\ \sum_e (\delta \boldsymbol{p}^e)^\mathsf{T} \left(\boldsymbol{K}_{wp}^e \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}^e(t)}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{K}_p^e \boldsymbol{p}^e(t) - \boldsymbol{f}_p^e(t) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Slabé řešení

- Vyjádření v globálním tvaru

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_w \boldsymbol{w}(t) + \boldsymbol{K}_{wp} \boldsymbol{p}(t) &= \boldsymbol{f}_w(t) + \boldsymbol{R}_w(t) \\
\boldsymbol{K}_{wp}^{\mathsf{T}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t)}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{K}_p \boldsymbol{p}(t) &= \boldsymbol{f}_p(t) + \boldsymbol{R}_p(t)
\end{aligned}
$$

- Rovnice formálně vyjádříme ve stejném tvaru jako v případě nestacionárního vedení tepla

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{K}_{wp}^{\mathsf{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{p}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_w & \boldsymbol{K}_{wp} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{p}(t) \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_w(t) \\ \boldsymbol{f}_p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_w(t) \\ \boldsymbol{R}_p(t) \end{bmatrix}
$$

- V kompaktní formě: $\boldsymbol{P} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{R}(t)$
  $\rightarrow$ diskretizace v čase metodou konečných diferencí

Please feel free to e-mail any suggestions, errors and typos to
Jan Zeman, zemanj@cml.fsv.cvut.cz
Český překlad a drobné doplňky, Bořek Patzák,
bp@cml.fsv.cvut.cz.

Literatura:

I. Vaníček, “Mechanika zemin”,Vydavatelství ČVUT, Praha, 1996.