Přednáška č. 5: Jednorozměrné ustálené vedení tepla

Motivace

- Analýza *transportních jevů* – thermal envelope design
- Podobné problémy

Fyzikální jev	***Charakteristická proměnná***
Difúze	koncentrace
Průhyb membrány	průhyb
Smyková deplanace průřezu	deplanační funkce
Elektrostatika	potenciál
Transport vlhkosti	relativní vlhkost
Ustálené proudění	hydraulická výška

- Hledaná funkce: Rozdělení teploty $T(x)$ [K]
- Postup podobný úloze taženého-tlačeného prutu

$$\boxed{\text{diferenciální rovnice + Okrajové podmínky}}$$

$$\rightarrow \boxed{\text{slabé řešení)}} \rightarrow \boxed{\text{diskretizace}}$$

Diferenciální rovnice problému

Základní veličiny

Je třeba rozlišovat dvě různé veličiny:

- Teplo $Q(x)$ (též tepelná energie) je část vnitřní energie, kterou těleso přijme nebo odevzdá při tepelné výměně druhému tělesu (vyjadřuje změnu stavu) [J]
- Teplota $T(x)$, která vyjadřuje stav tělesa [K]

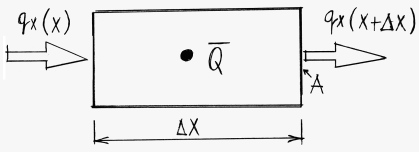
- Výměna tepelné energie závisí na teplotním *rozdílu*, ne na vlastní teplotě;

  gradient teploty$(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T(x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)$
- *Tepelný tok* q [Wm^{-2}] je definován jako $q_n(x) = \frac{Q(x)}{1\ \mathrm{m}^2 \times 1\ \mathrm{s}} n(x)$, a určuje množství tepla $Q(x)$, které projde jednotkovou plochou s normálou n.
- Studujeme-li ustálený stav, potom tepelný tok nezávisí na čase.

Diferenciální rovnice problému

Bilance energie

Při přenosu tepla protéká tepelný tok objemovým elementem. Bilance energie vyžaduje, aby změna tepelné energie qA, která je generována uvnitř kontrolního objemu byla rovna tepelné energii odevzdané, protože teplota a tedy i energie musí být konstantní v kontrolním objemu pro ustálený stav.



- Uvnitř tělesa ($x \in \Omega$)

$$\overbrace{q_x(x)A(x)}^{\text{vstup}} + \overbrace{\overline{Q}(x+\frac{\Delta x}{2})\Delta x A(x+\frac{\Delta x}{2})}^{\text{zdroj}} = \overbrace{q_x(x+\Delta x)A(x+\Delta x)}^{\text{výstup}},$$

kde $\overline{Q}$ označuje tzv. zdroj tepla (kladný, pokud je teplo generováno, záporný pokud je teplo odebíráno) [$\mathrm{Jm}^{-3}\mathrm{s}^{-1}$].

- Úpravou a limitním přechodem pro $\Delta x \to 0$:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(q_x(x)A(x)\right) + \overline{Q}(x)A(x) = 0,$$

  Pokud uvažujeme $A(x) =$ konst., rovnice se zjednoduší na

$$-\frac{\mathrm{d}q_x}{\mathrm{d}x}(x) + \overline{Q}(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in \Omega$$

- Konstitutivní rovnice (Fourierův zákon): pro $x \in \Omega$

$$q(x) = -\lambda(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x);$$

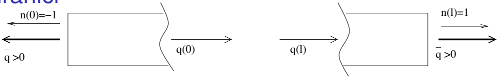
  λ je součinitel tepelné vodivosti [$\mathrm{Wm}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$].

- Předepsaná teplota na hranici - Dirichletovská okrajová podmínka:

$$T(x) = \overline{T}(x) \quad \text{pro} \quad x \in \Gamma_T$$

Diferenciální rovnice problému

Bilance energie na hranici



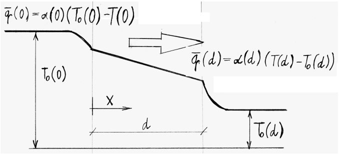
Kladný předepsaný tok uvažujeme ve směru vnější normály. Bilance energie na hranici pak můžeme psát ve tvaru

$$q_x(x)n(x) = \overline{q}_x(x) \quad \text{pro} \quad x \in \Gamma_{\overline{q}}$$

- Neumannova okrajová podmínka: $\overline{q}_x(x)$ je dáno
- Smíšená okrajová podmínka (Convection/mixed/Robin/(Newton) BC)

$$\overline{q}_x(x) = \alpha(x)\left(T(x) - T_0(x)\right), \quad \text{pro} \quad x \in \Gamma_{qc}$$

kde α [$\mathrm{Jm^{-2}K^{-1}s^{-1}}$] je tzv. film coefficient a T_0 je teplota okolního prostředí



Diferenciální rovnice problému

Bilance energie na hranici

- Radiace (Radiation/non-linear mixed/Newton BC)

$$\overline{q}(x) = \varepsilon(x)\sigma(x)\left(T^4(x) - T_\infty^4\right) \quad \text{pro} \quad x \in \Gamma_{qr}$$

kde

- ε [-]: je povrchové vyzařování vytažené k černému tělesu $(0 < \varepsilon < 1)$
- $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4} je Stefan-Boltzmannova konstanta
- T_∞ je teplota okolního prostředí

Diferenciální rovnice problému

Rovnice vedení tepla

Hledáme $T(x)$ [dostatečně hladké] takové aby:

- pro $x \in \Omega$:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)\right) + \overline{Q}(x) = 0,$$
- pro $x \in \Gamma_T$: $T(x) = \overline{T}(x)$
- pro $x \in \Gamma_q$: $-\lambda(x)\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)n(x) = \overline{q}_x(x)$, kde
  - pro $x \in \Gamma_{qp} : \overline{q}_x(x)$ je dáno
  - pro $x \in \Gamma_{qc} : \overline{q}_x(x) = \alpha(x)\,(T(x) - T_0(x))$
  - pro $x \in \Gamma_{qr} : \overline{q}_x(x) = \varepsilon(x)\sigma(x)\left(T^4(x) - T_\infty^4\right)$

- *Nelineární* okrajová podmínka $\rightarrow \Gamma_{qr} = \emptyset$

Slabé řešení

- Pro libovolnou váhovou funkci δT takovou, aby $\delta T(x) = 0$ pro $x \in \Gamma_T$

$$\int_\Omega \delta T(x) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda(x) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)\right) + \overline{Q}(x) \right) \mathrm{d}x = 0$$

- Integrací per-partes

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Gamma \delta T(x)\lambda(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)n(x)\,\mathrm{d}s - \int_\Omega \frac{\mathrm{d}\delta T}{\mathrm{d}x}(x)\lambda(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega \delta T(x)\overline{Q}(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- Rozdělení integrálu na hranici

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \delta T(x)\lambda(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)n(x)\,\mathrm{d}s &= \int_{\Gamma_T} \overbrace{\delta T(x)}^{=0} \lambda(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)n(x)\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_{\Gamma_q} \delta T(x) \underbrace{\lambda(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)n(x)}_{=-\overline{q}_x}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Slabé řešení

$$\int_{\Gamma_q} \delta T(x)\overline{q}_x(x)\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_{qp}} \delta T(x)\overline{q}_x(x)\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_{qc}} \delta T(x)\alpha(x)\left(T(x) - T_0(x)\right)\,\mathrm{d}s$$

- Dohromady tedy máme

Hledáme $T(x)$ [dostatečně integrovatelné] takové aby:

$$\int_{\Omega} \frac{\mathrm{d}\delta T}{\mathrm{d}x}(x)\lambda(x)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{qc}} \delta T(x)\alpha(x)T(x)\,\mathrm{d}s =$$

$$\int_{\Gamma_{qc}} \delta T(x)\alpha(x)T_0(x)\,\mathrm{d}s - \int_{\Gamma_{qp}} \delta T(x)\overline{q}_x(x)\,\mathrm{d}s + \int_{\Omega} \delta T(x)\overline{Q}(x)\,\mathrm{d}x$$

pro všechna δT taková, že $\delta T = 0$ na Γ_T.

Diskretizace metodou konečných prvků

- Uvažujme dělení oblasti Ω na n konečných prvků Ω^e
- Na každém prvku e, zavedeme *lokální* apoximaci

$$T^e(x) \approx \boldsymbol{N}^e(x)\boldsymbol{r}^e, \frac{\mathrm{d}T^e}{\mathrm{d}x}(x) \approx \boldsymbol{B}^e(x)\boldsymbol{r}^e, \delta T^e(x) \approx \boldsymbol{N}^e(x)\boldsymbol{w}^e, \frac{\mathrm{d}\delta T^e}{\mathrm{d}x}(x) \approx \boldsymbol{B}^e(x)\boldsymbol{w}^e$$

- Dosazením do slabého řešení: Pro všechna $\boldsymbol{w}^e$ taková, že $\boldsymbol{w}^e = 0$ na Γ_T

$$\sum_{e=1}^{n} \boldsymbol{w}^{e\mathsf{T}} \Big(\overbrace{\int_{\Omega^e} \boldsymbol{B}^e(x)^{\mathsf{T}} \lambda^e(x) \boldsymbol{B}^e(x)\,\mathrm{d}x}^{\boldsymbol{K}_{e,\Omega}}\, \boldsymbol{r}^e + \overbrace{\int_{\Gamma^e_{qc}} \boldsymbol{N}^e(x)^{\mathsf{T}} \alpha^e(x) \boldsymbol{N}^e(x)\,\mathrm{d}s}^{\boldsymbol{K}_{e,\Gamma}}\, \boldsymbol{r}^e$$

$$- \overbrace{\int_{\Gamma^e_{qc}} \boldsymbol{N}^e(x)^{\mathsf{T}} \alpha(x) \boldsymbol{N}^e(x) \boldsymbol{T}^e_0\,\mathrm{d}s}^{\boldsymbol{f}_{e,\Gamma_c}} + \overbrace{\int_{\Gamma^e_{qp}} \boldsymbol{N}^e(x)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{N}^e(x) \boldsymbol{q}_e\,\mathrm{d}s}^{-\boldsymbol{f}_{e,\Gamma_p}}$$

$$- \overbrace{\int_{\Omega^e} \boldsymbol{N}^e(x)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{N}^e(x) \boldsymbol{Q}_e\,\mathrm{d}s}^{\boldsymbol{f}_{e,\Omega}} \Big) = 0$$

Diskretizace metodou konečných prvků

- Globální veličiny ($\equiv$ lokalizace)

$$\boldsymbol{w}^{\mathsf{T}}\left(\sum_{e=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{K}}_e\boldsymbol{r}-\sum_{e=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{f}}_e\right)=0$$

- Konečná podoba soustavy rovnic

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) & \boldsymbol{K}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\\ \boldsymbol{K}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}) & \boldsymbol{K}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\\ \boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{R}\end{bmatrix}$$

- Řešení:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})\\ \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{K}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{K}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

Please feel free to e-mail any suggestions, errors and typos to `zemanj@cml.fsv.cvut.cz`.

Version -002

Verze 2: Česká verze, drobné doplňky
[B. Patzák (borek.patzak@fsv.cvut.cz)]