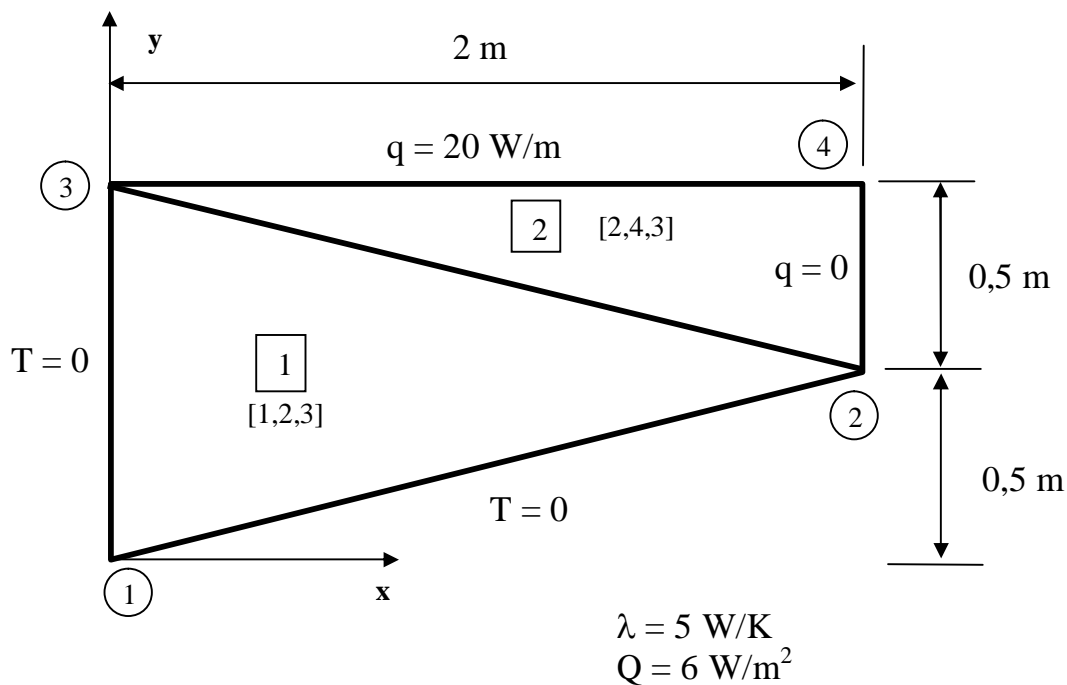


Cvičení č. 4

Příklad č. 1 - Vedení tepla, vnitřní zdroj a předepsaný tok



Slabé řešení:

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^n \mathbf{w}^e \top & \left(\overbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^e(\mathbf{x})^\top \lambda^e(\mathbf{x}) \mathbf{B}^e(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}^{K_{e,\Omega}} \mathbf{r}^e + \overbrace{\int_{\Gamma_{qc}^e} \mathbf{N}^e(\mathbf{x})^\top \alpha^e(\mathbf{x}) \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \, ds}^{K_{e,\Gamma}} \mathbf{r}^e \right. \\
 & - \overbrace{\int_{\Gamma_{qc}^e} \mathbf{N}^e(\mathbf{x})^\top \alpha(\mathbf{x}) \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}_0^e \, ds}^{f_{e,\Gamma_c}} + \overbrace{\int_{\Gamma_{qp}^e} \mathbf{N}^e(\mathbf{x})^\top \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{q}}_n^e \, ds}^{-f_{e,\Gamma_p}} \\
 & \left. - \overbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^e(\mathbf{x})^\top \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{Q}}_e \, ds}^{f_{e,\Omega}} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Derivace interpolačních funkcí:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^e &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} -0.2500 & 0.5000 & -0.2500 \\ -1.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5000 & -0.5000 \\ -2.0000 & 2.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice vodivosti prvku:

$$(\mathbf{K}_{e,\Omega})_{3 \times 3} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \lambda^e \mathbf{B}^e d\Omega = \mathbf{B}^{eT} \lambda^e \mathbf{B}^e \int_{\Omega^e} d\Omega = A \mathbf{B}^{eT} \lambda^e \mathbf{B}^e$$

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} 5.3125 & -0.6250 & -4.6875 \\ -0.6250 & 1.2500 & -0.6250 \\ -4.6875 & -0.6250 & 5.3125 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} 10.0000 & -10.0000 & 0 \\ -10.0000 & 10.6250 & -0.6250 \\ 0 & -0.6250 & 0.6250 \end{bmatrix}$$

Lokalizace matice vodivosti konstrukce:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5.3125 & -0.6250 & -4.6875 & 0 \\ -0.6250 & 11.2500 & -0.6250 & -10.0000 \\ -4.6875 & -0.6250 & 5.9375 & -0.6250 \\ 0 & -10.0000 & -0.6250 & 10.6250 \end{bmatrix}$$

Okrajové podmínky:

Vnitřní zdroj $f_{e,\Omega}$:

$$f_{\Omega}^{1,2} = \int_{\Omega^e} N^e(x)^T Q(x) ds$$

$$f_{\Omega}^1 = [\quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad]$$

$$f_{\Omega}^2 = [\quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad]$$

Lokalizace vnitřního zdroje

$$f_{\Omega} = [\quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad]$$

Předepsaný tok na hranici

$$f_{\Gamma_p}^2 = - \int_{\Gamma_{qp}} N^e(x)^T \bar{q}(x) d\Gamma_{qp}$$

$$f_{\Gamma_p}^2 = [\quad 0 \quad -20 \quad -20 \quad]$$

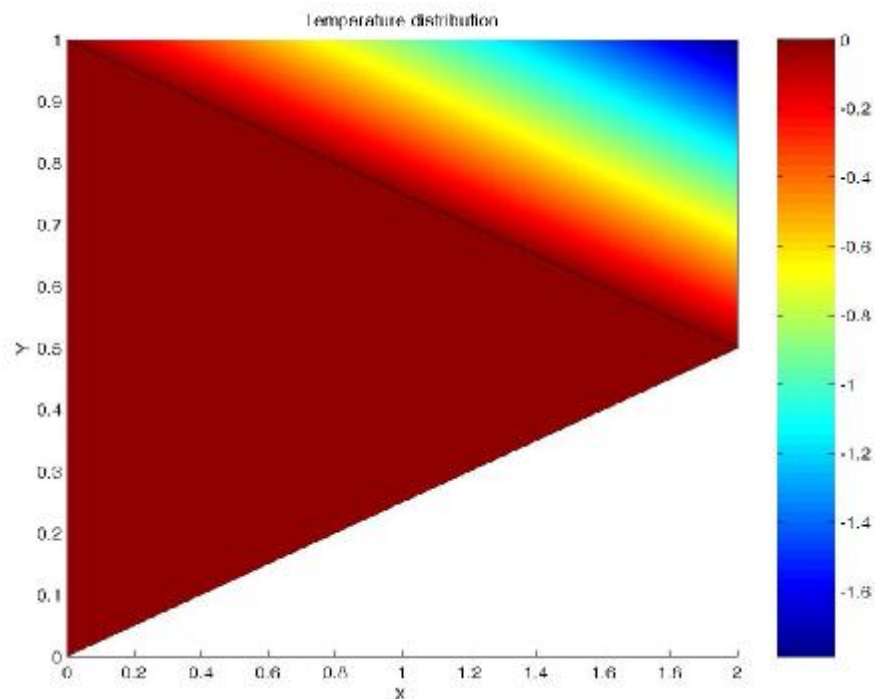
Lokalizace pravé strany

$$f = [\quad 2 \quad 3 \quad -17 \quad -19 \quad]$$

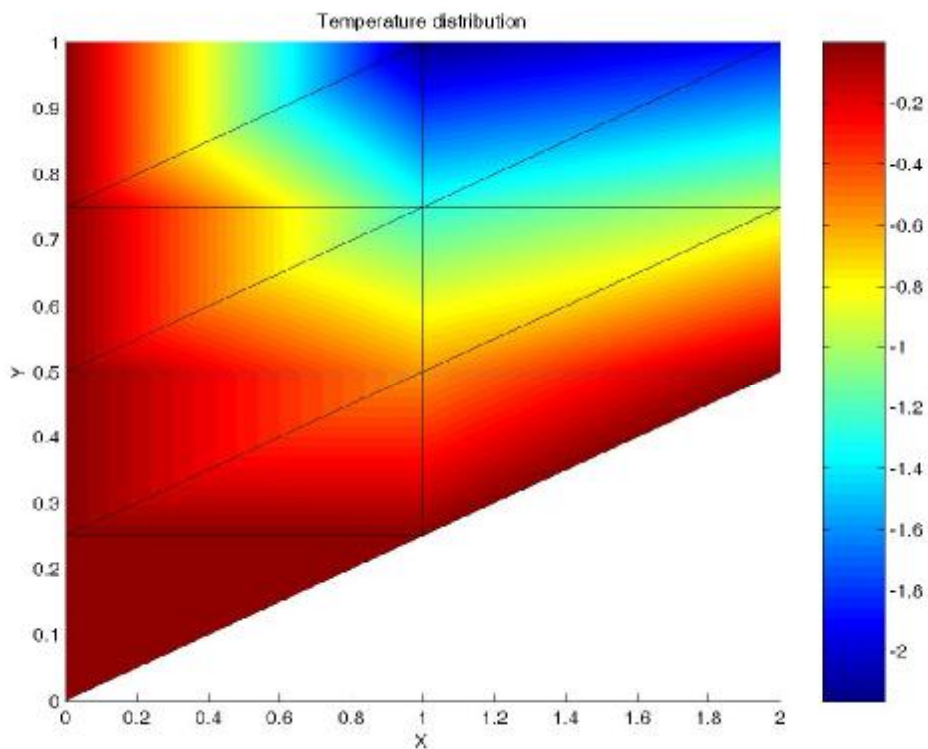
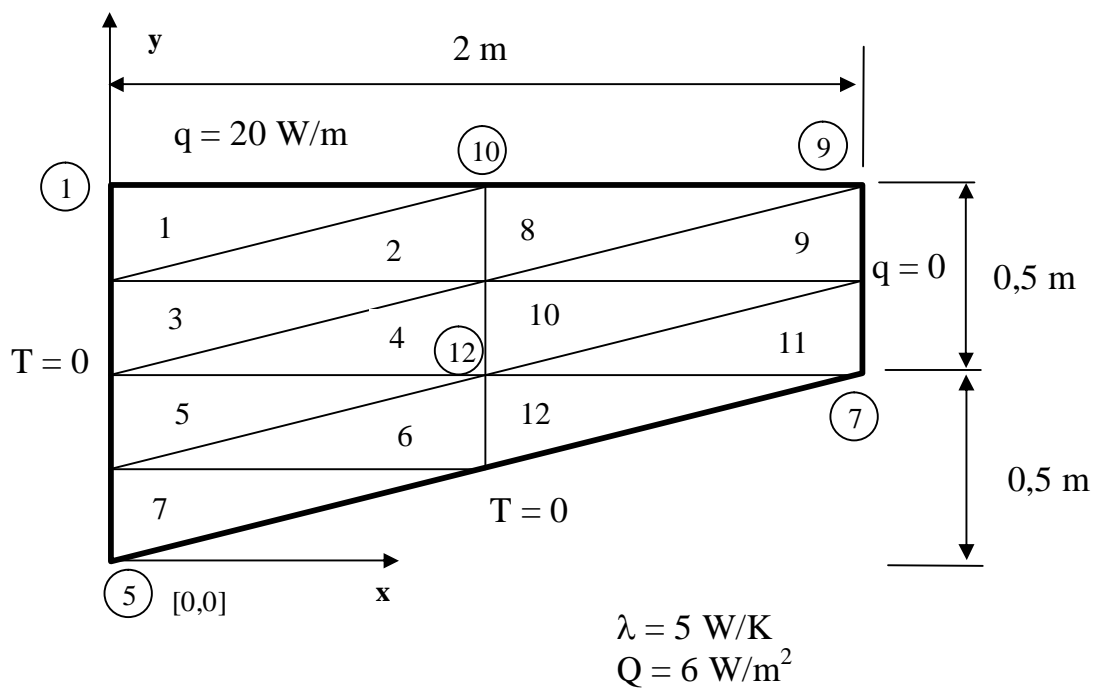
Pro neznámou teplotu T_4 :

$$10.6250 T_4 = -19$$

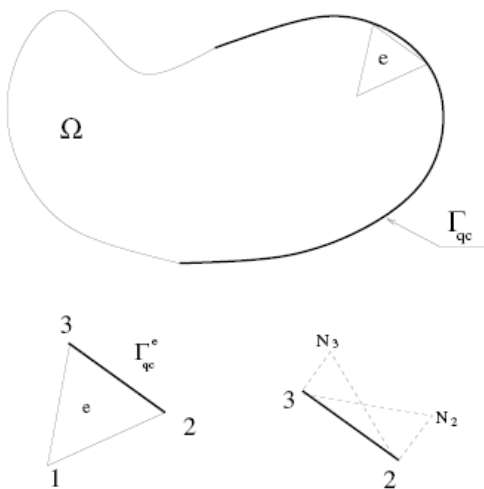
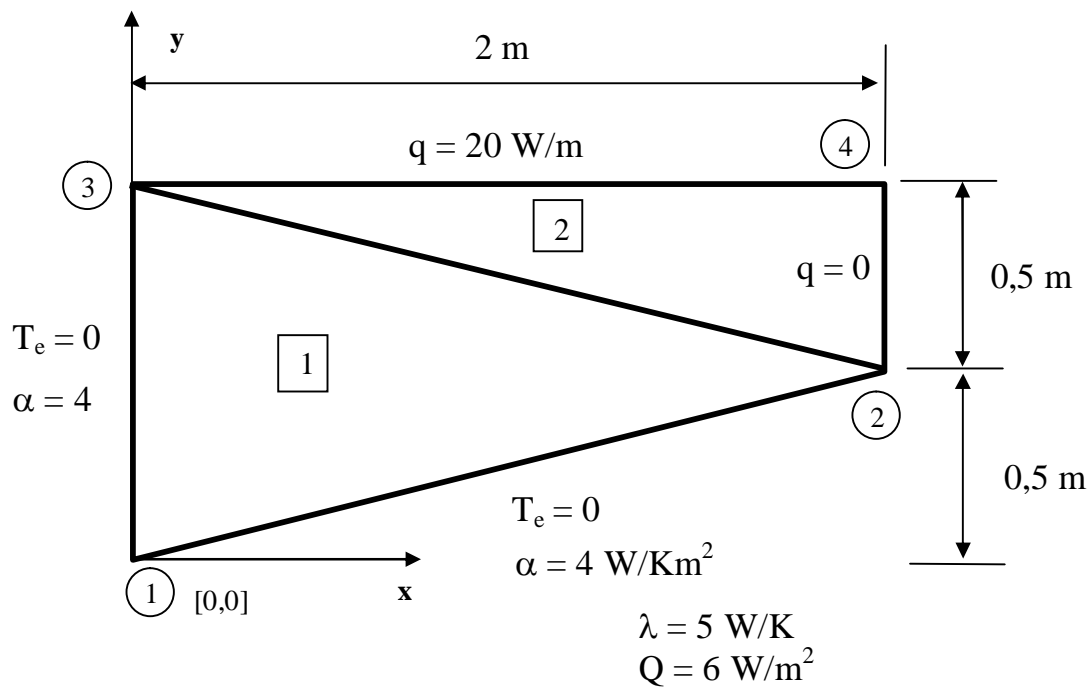
$$T_4 = -1.7882$$



Příklad č. 2 - Vedení tepla, vnitřní zdroj a předepsaný tok



Příklad č. 3 - Vedení tepla, vnitřní zdroj, předepsaný tok a přestup



$$\begin{aligned}
 K_{e,\Gamma} &= \int_{\Gamma_{qc}^e} N^{eT} \alpha N^e d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma_{qc}} \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \alpha [0, N_2, N_3] d\Gamma \\
 &= \alpha \int_{\Gamma_{qc}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 N_2 & N_2 N_3 \\ 0 & N_3 N_2 & N_3 N_3 \end{bmatrix} d\Gamma \\
 &= \alpha l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$K_{\Gamma}^I = \begin{bmatrix} 4.0821 & 1.3744 & 0.6667 \\ 1.3744 & 2.7487 & 0 \\ 0.6667 & 0 & 1.3333 \end{bmatrix}$$

Lokalizace matice vodivosti konstrukce:

$$K = \begin{bmatrix} 9.3946 & 0.7494 & -4.0208 & 0 \\ 0.7494 & 13.9987 & -0.6250 & -10.0000 \\ -4.0208 & -0.6250 & 7.2708 & -0.6250 \\ 0 & -10.0000 & -0.6250 & 10.6250 \end{bmatrix}$$

Přestup tepla

$$\mathbf{f}_{\Gamma_c}^e = \int_{\Gamma_{qc}^e} \mathbf{N}^e(x)^\top \alpha(x) T_e(x) \, ds$$

$$f^2_{\Gamma_c} = 0$$

Lokalizace pravé strany

$$\mathbf{f} = [2 \quad 3 \quad -17 \quad -19]$$

Řešení

$$\mathbf{T} = [-1.0845 \quad -4.0697 \quad -3.7898 \quad -5.8415]$$

