# I. Základy dynamiky stavebních konstrukcí

1. Základní úlohy dynamiky
2. Volné tlumené kmitání – 1SV
3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV
4. Soustavy s více SV
5. Vlastní netlumené kmitání – nSV
6. Vynucené tlumené kmitání – nSV
7. Rayleighova metoda – energetická metoda
8. Seizmické zatížení

# 1. Základní úlohy dynamiky

**STATIKA** - úloha o rovnováze vnitřních a vnějších sil

$\boxed{\mathbf{K}\,\mathbf{r} = \mathbf{f}}$ $\mathbf{K}$– matice tuhosti $\mathbf{f}$ – vektor zatížení $\mathbf{r}$ – vektor posunutí

odezva závisí na tuhosti konstrukce a velikosti zatížení

**DYNAMIKA** - úloha o rovnováze
včetně setrvačných a tlumicích sil

$$\boxed{\mathbf{K}\,\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{r}}(t)}$$

$\mathbf{M}$ – matice hmotnosti $\mathbf{C}$ – matice útlumu
$\ddot{\mathbf{r}}$ – vektor zrychlení $\dot{\mathbf{r}}$ – vektor rychlosti $t$ – čas

odezva závisí na dynamických vlastnostech konstrukce (tuhost, hmotnost, útlum) a časovém průběhu zatížení

## 1. Základní úlohy dynamiky

### VYNUCENÉ KMITÁNÍ

výpočet odezvy konstrukce na dynamické zatížení

$$\boxed{\mathbf{K}\,\mathbf{r}(t) + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(t)}$$

soustava diferenciálních rovnic II. řádu

neznámé: r(t) – časový průběh posunutí

### VLASTNÍ KMITÁNÍ

určení základních dynamických vlastností konstrukce

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\mathbf{K}\,\mathbf{r}(t) + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}} \\ \mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\phi}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \\ \boxed{\left(\mathbf{K} - \omega_n^2\mathbf{M}\right)\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}} \end{array}$$

problém vlastních čísel

neznámé: vlastní frekvence $\omega_n$ a tvary kmitání $\boldsymbol{\phi}_n$ ($n$ – počet SV)

## 1. Základní úlohy dynamiky

### VLIVY KMITÁNÍ

•na spolehlivost stavební konstrukce
(mezní stavy únosnosti a použitelnosti)
•na technologické zařízení
•na lidský organismus
•na přenos otřesů do okolí

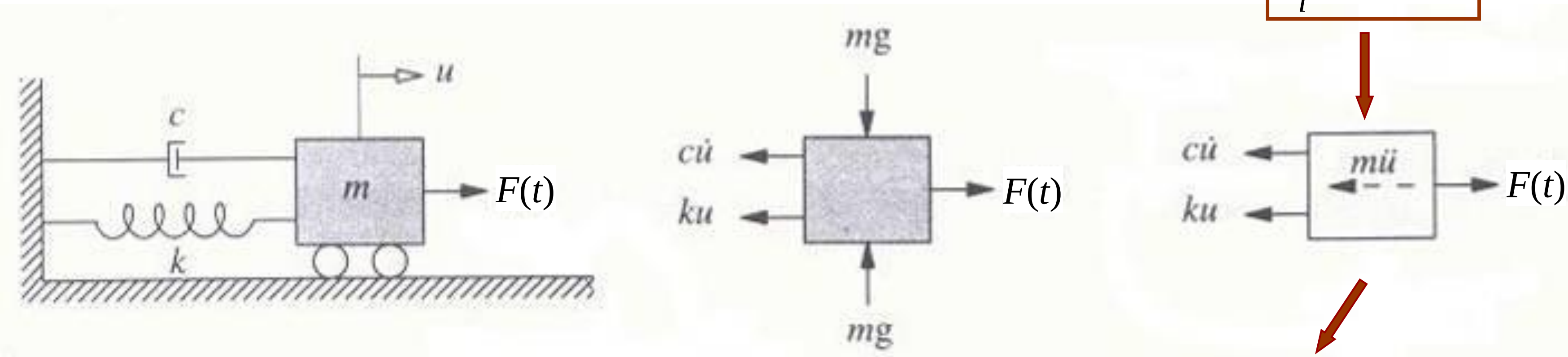
**Pozor:**

***Nevyhovuje-li dynamicky zatížená konstrukce, nemusí pouhé její zesílení vždy vést k úspěchu !!!***

## 1. Základní úlohy dynamiky

D´Alembertův princip – součet všech sil působících na těleso (hmotný bod) ve směru kmitání, včetně sil setrvačných, je roven nule

$$\boxed{\sum_i F_i = 0}$$

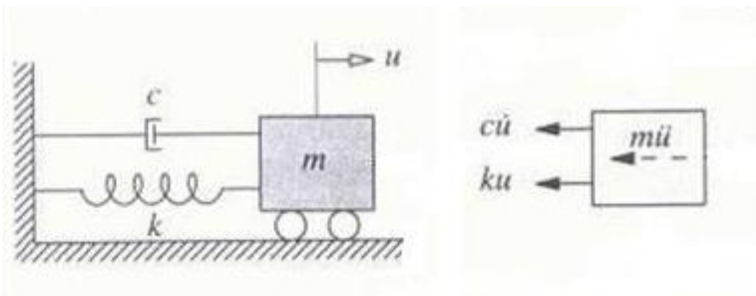



$$\boxed{m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t)}$$

# 2. Volné tlumené kmitání – 1SV

Nepůsobí žádná budicí síla, pohyb je vyvolán nenulovými počátečními podmínkami

tlumicí síla závisí na rychlosti kmitání → viskózní útlum




$$\boxed{m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=0}$$

součinitel tlumení (kg s$^{-1}$)

obecné řešení homogenní rovnice $u(t)=Ce^{\alpha t}$

$$\underbrace{(m\alpha^2+c\alpha+k)}_{0}\,Ce^{\alpha t}=0 \quad\rightarrow\quad \alpha_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\omega_0^{\,2}}$$

Kritický útlum: $\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2-\dfrac{k}{m}=0 \;\Rightarrow\; \boxed{c_{cr}=2\sqrt{km}}$

## 2. Volné tlumené kmitání – 1SV

Odezva závisí na relativních hodnotách tuhosti, hmotnosti a tlumení

Poměrný útlum: $\boxed{\xi = \dfrac{c}{c_{cr}}}$ Útlum: $\boxed{c = \xi c_{cr}}$ (udává se v % kritického útlumu)

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\xi c_{cr}}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\xi c_{cr}}{2m}\right)^2 - \omega_0{}^2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

3 typy odezvy (v závislosti na $\xi$ ):

a) Nadkritický útlum: $\boxed{\xi > 1}$

$$\alpha_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$u(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$$

b) Kritický útlum: $\boxed{\xi = 1}$

$$\alpha_{1,2} = -\omega_0$$

$$u(t) = e^{-\omega_0 t}\left(A + Bt\right)$$

neperiodický pohyb

## 2. Volné tlumené kmitání – 1SV

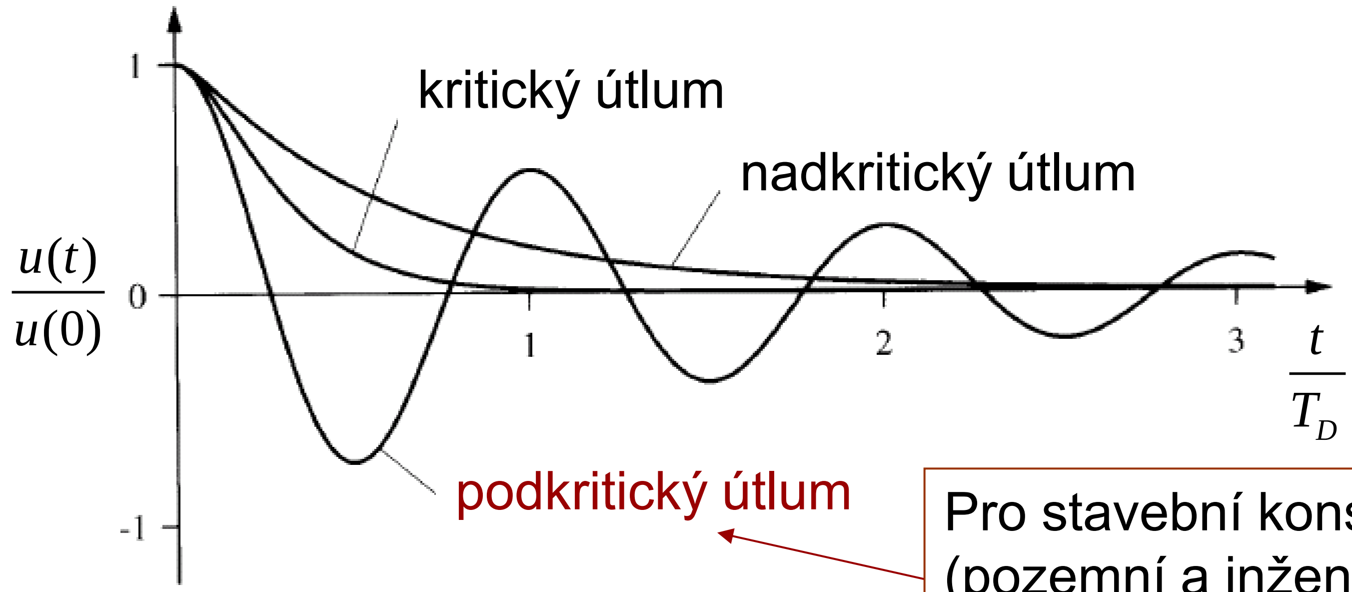
### c) Podkritický útlum: $\boxed{\xi < 1}$

$$\alpha_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_D$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(u_{DC}\cos\omega_D t + u_{DS}\sin\omega_D t\right)$$

vlastní kruhová frekvence tlumeného kmitání

$$\boxed{\omega_D = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$




Pro stavební konstrukce (pozemní a inženýrské konstr.) je hodnota útlumu $\xi < 0{,}2$

## 2. Volné tlumené kmitání – 1SV

# Řešení tlumeného kmitání při podkritickém útlumu

$$\boxed{u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(u_{DC}\cos\omega_D t + u_{DS}\sin\omega_D t\right)} \qquad \omega_D = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

Integrační konstanty $u_{DC}$ , $u_{DS}$ se stanoví z počátečních podmínek pohybu $u_{t=0} = u(0)$ $\dot{u}_{t=0} = \dot{u}(0)$

$$u(0) = e^{-\xi\omega_0 0}\left(u_{DC}\cos\omega_D 0 + u_{DS}\sin\omega_D 0\right) \Rightarrow u_{DC} = u(0)$$

$$\dot{u}(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(\left(\omega_D u_{DS} - \xi\omega_0 u_{DC}\right)\cos\omega_D t - \left(\omega_D u_{DC} + \xi\omega_0 u_{DS}\right)\sin\omega_D t\right)$$

$$\dot{u}(0) = \omega_D u_{DS} - \xi\omega_0 u_{DC} \Rightarrow u_{DS} = \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega_0 u(0)}{\omega_D}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(u(0)\cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega_0 u(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t\right)}$$

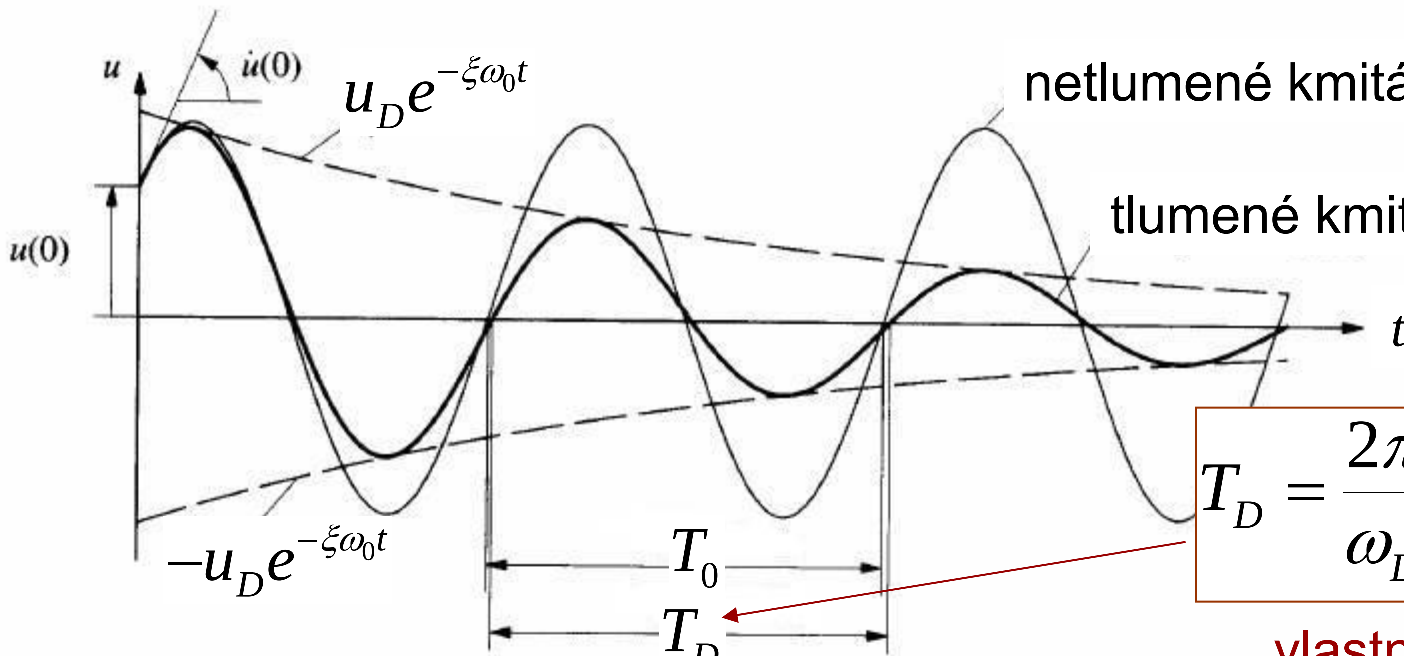
## 2. Volné tlumené kmitání – 1SV

# Řešení pohybové rovnice pomocí amplitudy a fáze

$$\boxed{u(t) = u_D e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_D t + \varphi_D)}$$

$$u_D = \sqrt{u_{DC}^2 + u_{DS}^2}$$ amplituda

$$\varphi_D = \operatorname{arc\,tg}\frac{u_{DC}}{u_{DS}}$$ úhel fázového posunutí

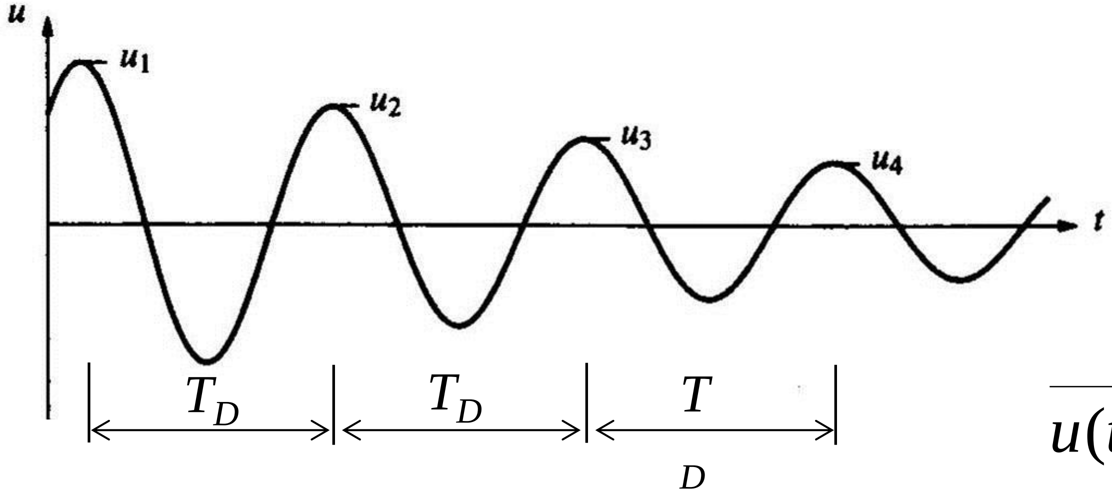



$$\boxed{T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

vlastní perioda

## 2. Volné tlumené kmitání – 1SV

Součinitel tlumení lze určit z odezvy při volném kmitání pomocí poměru dvou za sebou následujících výchylek




$$\frac{u(t_i)}{u(t_i+T_D)} = e^{\xi\omega_0 T_D} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Logaritmický dekrement útlumu

$$\boxed{\vartheta = \ln\frac{u(t_i)}{u(t_i+T_D)} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

pro malý útlum: $\vartheta \doteq 2\pi\xi$

## 2. Volné tlumené kmitání – 1SV

Logaritmický dekrement se často určuje pomocí experimentálních záznamů kmitání z poměru výchylek po *n*-tém kmitu

$$\vartheta = \frac{1}{n} \ln \frac{u(t_i)}{u(t_i + n \cdot T_D)}$$

Pro malé hodnoty poměrného útlumu $\xi \leq 0,20$ platí:

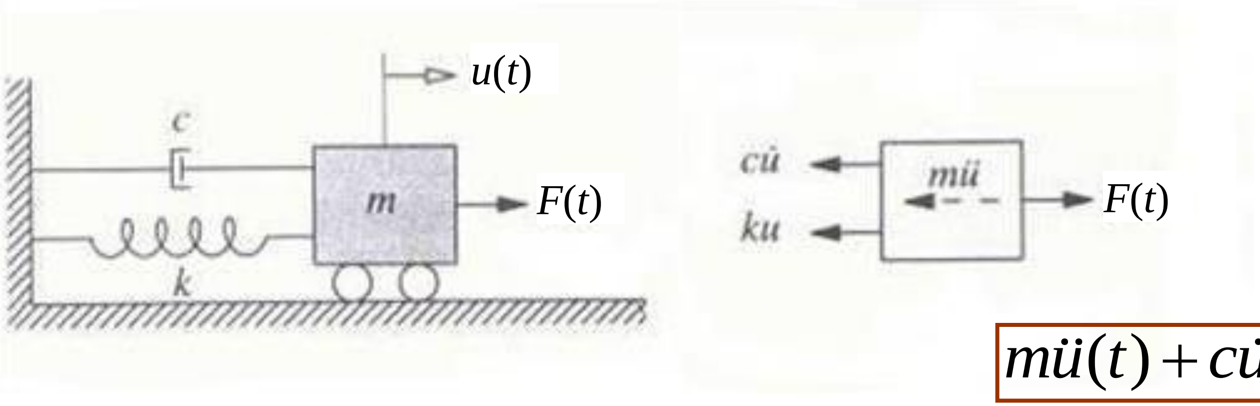
pro $\xi = 0,20$ $\quad \sqrt{1-\xi^2} = 0,9798 \doteq 1$

$$\rightarrow \quad \omega_D = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \approx \omega_0$$

$$\rightarrow \quad T_D = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx T_0$$

$$\rightarrow \quad \vartheta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi$$

# 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV




$$\boxed{m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=F(t)}$$

Harmonická budicí síla $F(t)=F_A \sin\omega t$

$F_A$ - amplituda

$\omega$ - budicí kruhová frekvence

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=F_A \sin\omega t$$

obecné řešení = řešení homogenní rov. + partikulární řešení

partikulární řešení $\rightarrow$ $\boxed{u_p(t)=u_S \sin\omega t+u_C \cos\omega t}$

### 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV

určení konstant $u_S$ a $u_C$ – dosazení partikulárního řešení do pohybové rovnice → ustálené kmitání

$$\dot{u}_p(t) = u_S \omega \cos \omega t - u_C \omega \sin \omega t$$

$$\ddot{u}_p(t) = -u_S \omega^2 \sin \omega t - u_C \omega^2 \cos \omega t$$

$$k\left(u_S \sin \omega t + u_C \cos \omega t\right) + c\left(u_S \omega \cos \omega t - u_C \omega \sin \omega t\right) +$$

$$m\left(-u_S \omega^2 \sin \omega t - u_C \omega^2 \cos \omega t\right) = F_A \sin \omega t$$

$$\boxed{\begin{aligned} (k-\omega^2 m)u_S - \omega c u_C &= F_A \\ \omega c u_S + (k-\omega^2 m)u_C &= 0 \end{aligned}} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} u_S &= \frac{F_A}{k} \frac{1-\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2} \\ u_C &= \frac{F_A}{k} \frac{-2\xi\eta}{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2} \end{aligned} \right.$$

$$\left( \eta = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad \xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \right)$$

## 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV

partikulární řešení - vyjádření pomocí amplitudy a fáze

$$\boxed{u_p(t) = u_A \sin(\omega t + \varphi)} \quad \begin{cases} u_A = \sqrt{u_S^2 + u_C^2} = \dfrac{F_A}{k} \dfrac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \\[2ex] \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{u_C}{u_S} = \operatorname{arctg}\left( -\dfrac{2\xi\eta}{1-\eta^2} \right) \end{cases}$$

$$u_S = u_A \cos\varphi \qquad u_C = u_A \sin\varphi$$

obecné řešení = přechodové kmitání + ustálené kmitání

kmitání s vlastní frekvencí s frekvencí budicí síly

$$\boxed{u(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega_0 t}\left(u_{DC}\cos\omega_D t + u_{DS}\sin\omega_D t\right)} + \underbrace{u_S \sin\omega t + u_C \cos\omega t}}$$

## 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV

obecné řešení = přechodové kmitání + ustálené kmitání

kmitání s vlastní frekvencí s frekvencí budicí síly

alternativní vyjádření →

$$\boxed{u(t) = \underbrace{u_D e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_D t + \varphi_D)} + \underbrace{u_A \sin(\omega t + \varphi)}}$$

Pro ustálené kmitání mimo oblast rezonance $(\eta \ll 1)$
a pro malý útlum $(\xi \leq 0,2)$ platí: → $\varphi \doteq 0$

Obecné řešení
pro počáteční podmínky

$$u_D = -\frac{u_A \omega}{\omega_D} \qquad \varphi_D = 0$$

$u(0) = 0 \quad ; \quad \dot{u}(0) = 0$ →

$$u(t) = u_A\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega_0 t}\sin\omega_D t\right)$$

malý útlum
kmitání mimo rezonanci

$$\omega_D \doteq \omega_0$$

## 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV

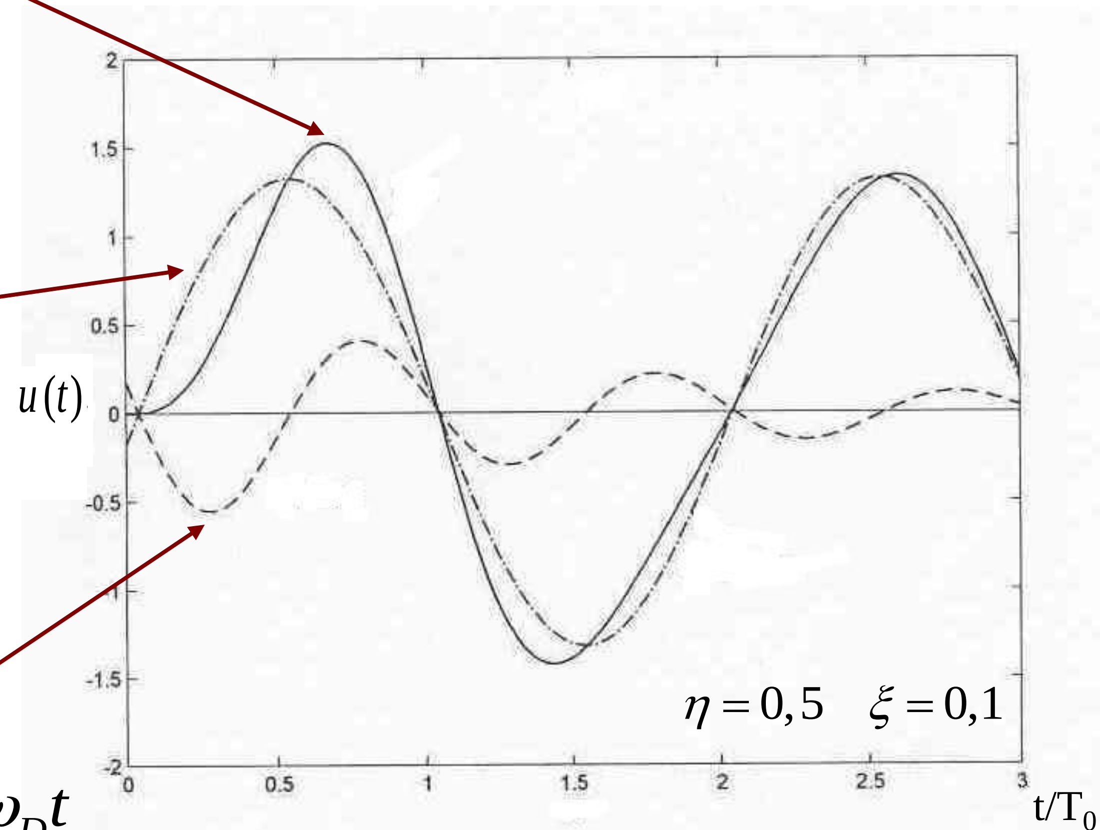
Obecné řešení pro nulové počáteční podmínky a $\dfrac{F_A}{k} = u_{st} = 1$

ustálené kmitání
(dominantní část odezvy)

$$u(t) = u_A \sin \omega t$$

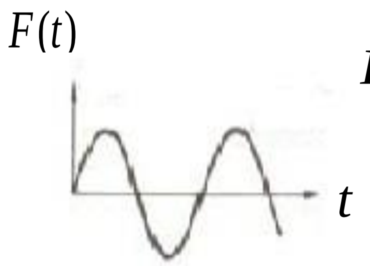
přechodové kmitání
(exponenciální pokles v čase)

$$u(t) = u_A \frac{\omega}{\omega_D} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \omega_D t$$



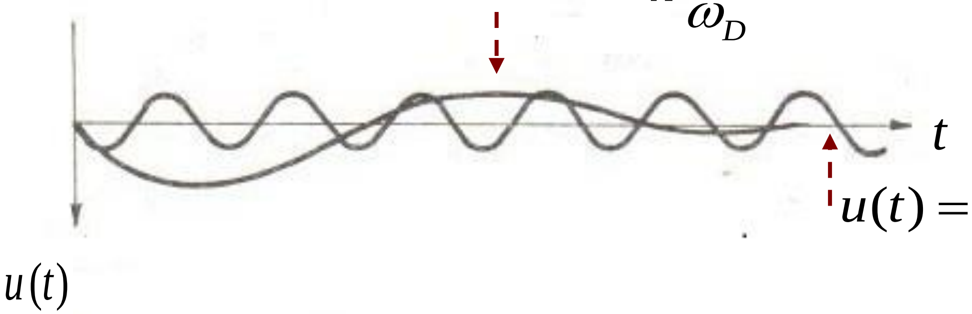
## 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV

# Obecné řešení pro nulové počáteční podmínky

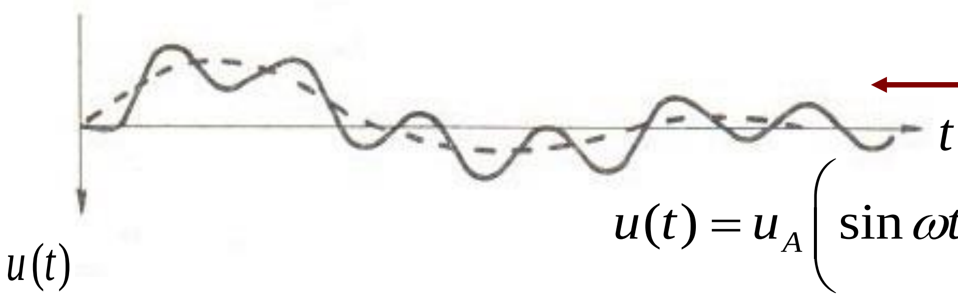



$$F(t) = F_A \sin \omega t$$ ← budicí síla

$$u(t) = u_A \frac{\omega}{\omega_D} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \omega_D t$$ ← přechodové kmitání




$$u(t) = u_A \sin \omega t$$ ← ustálené kmitání




← vynucené tlumené kmitání – obecné řešení

$$u(t) = u_A \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_D} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \omega_D t \right)$$

## 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV

### Rezonanční křivka - ustálené harmonické kmitání

$$u(t) \equiv u_p(t) = u_A \sin(\omega t + \varphi) = \frac{F_A}{k}\delta \sin(\omega t + \varphi)$$

dynamický součinitel

$$\boxed{\delta = \frac{u_A}{u_{st}} = \frac{u_A}{\frac{F_A}{k}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}}}$$

úhel fázového posunutí

$$\boxed{\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2\xi\eta}{1-\eta^2}\right)} \qquad \left(\eta = \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

fázové posunutí je zpoždění odezvy vzhledem k budicí síle:

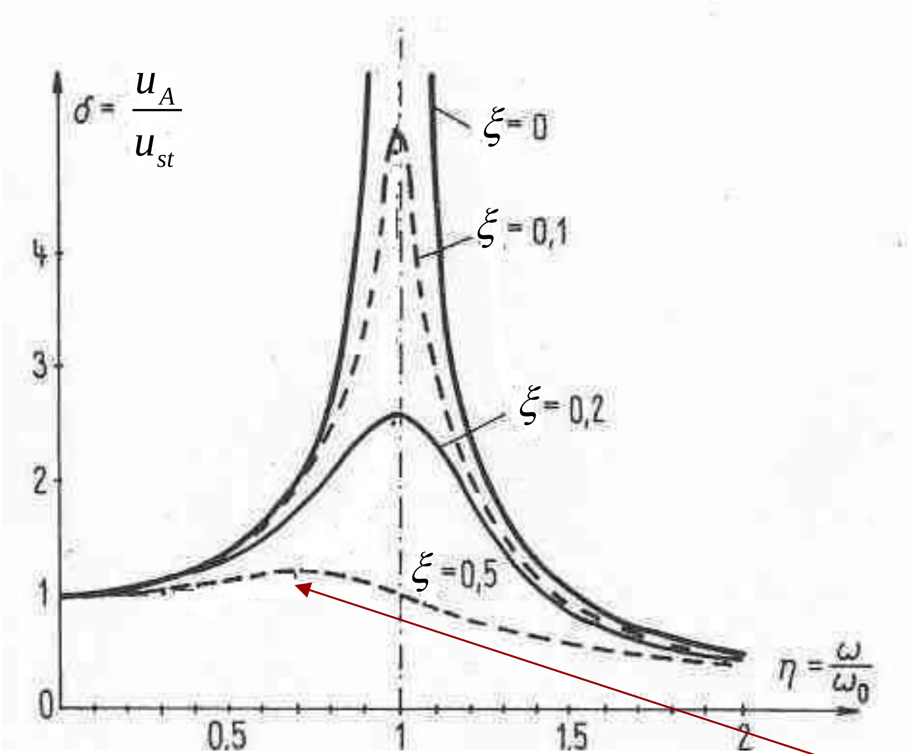
pro $\eta \ll 1$ $\rightarrow$ odezva je ve fázi s budicí silou ($\varphi \approx 0$)

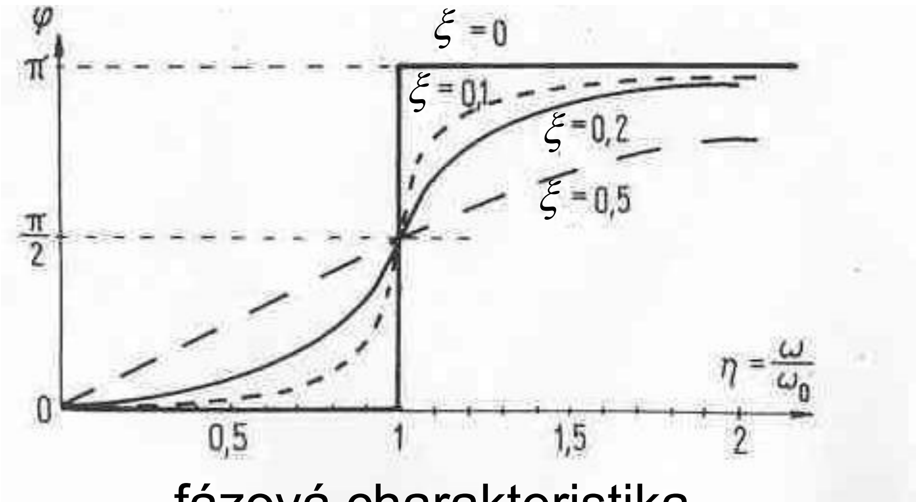
$\eta \gg 1$ $\rightarrow$ odezva je v protifázi s budicí silou ($\varphi \approx \pi$)

$\eta \approx 1$ $\rightarrow$ odezva je maximální, je-li budicí síla nulová ($\varphi \approx \pi/2$ )

## 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV

# Rezonanční křivka - ustálené harmonické kmitání




fázová charakteristika

rezonance
$\omega = \omega_0$

$$\delta = \frac{u_A}{u_{st}} = \frac{1}{2\xi}$$

Pozn.:
maximální výchylka je pro

$$\eta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

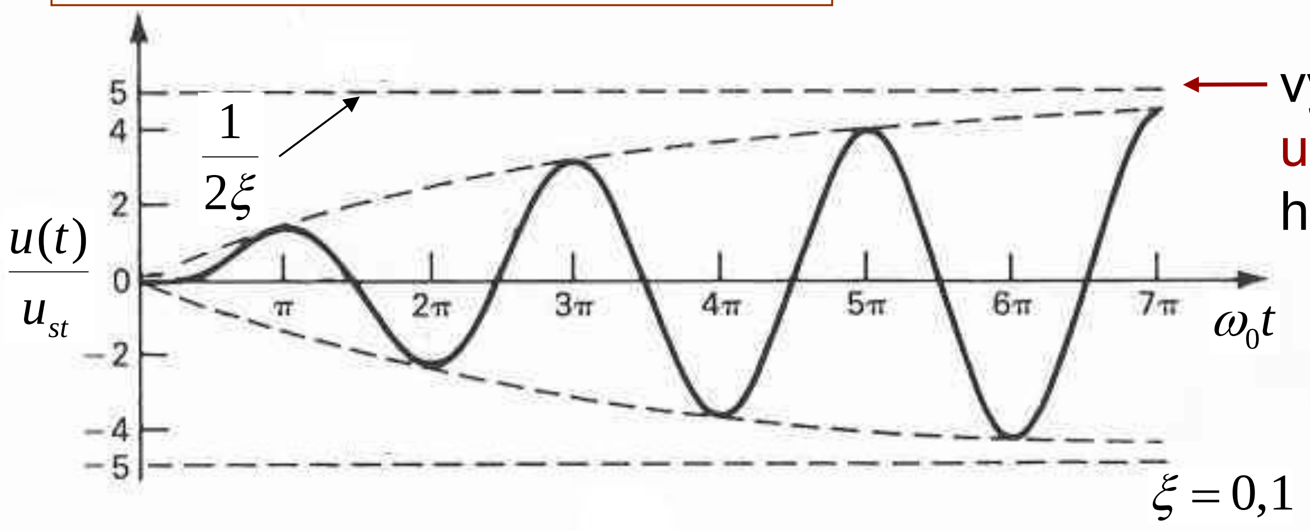
## 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV

Stav rezonance $\omega = \omega_0$ – časový průběh výchylky

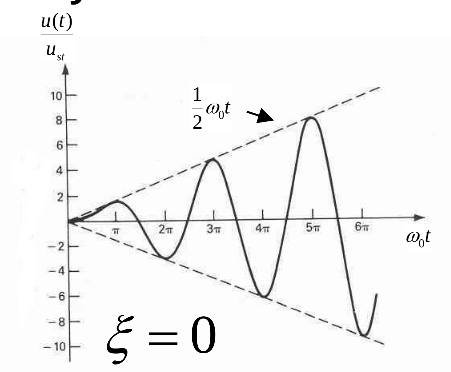
$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(u_{DC}\cos\omega_D t + u_{DS}\sin\omega_D t\right) - \frac{F_A}{k}\frac{1}{2\xi}\cos\omega_0 t$$

pro nulové počáteční podmínky a malý útlum $(\omega_D \doteq \omega_0)$ platí

$$\boxed{u(t) = \frac{F_A}{k}\frac{1}{2\xi}\left(e^{-\xi\omega_0 t} - 1\right)\cos\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad \max u(t) = \frac{F_A}{k}\frac{1}{2\xi}$$




výchylka dosahuje ustálené (konečné) hodnoty



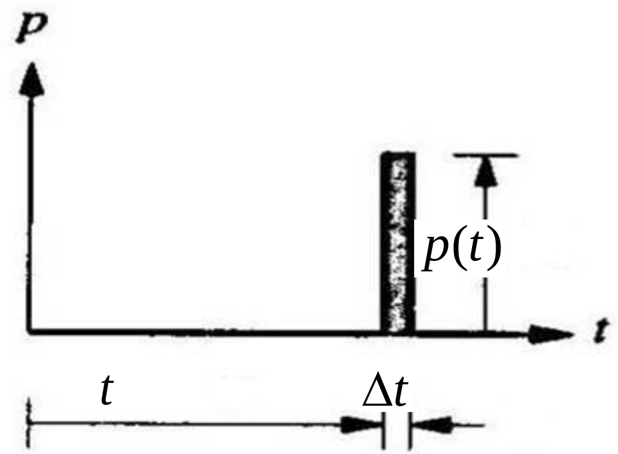
### 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV

## Zatížení impulsem síly

délka impulzu $\Delta t < (0{,}25 - 0{,}5)\, T_0$

$$I = \int_t^{t+\Delta t} p(t)dt = m\dot{u}(t+\Delta t) - m\dot{u}(t)$$

impulz = změna hybnosti




čas $t$ – začátek impulzu, stav klidu $\rightarrow$ $\dot{u}(t) = 0$

čas $t+\Delta t$ – konec impulzu, začátek kmitání $\rightarrow$ $\dot{u}(t+\Delta t) = \dfrac{I}{m}$

pohybová rovnice $\quad m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$

počáteční podmínky $\quad u(0) = 0\ ;\ \dot{u}(0) = \dfrac{I}{m}$

odezva na zatížení $\rightarrow$ $\boxed{u(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\dfrac{I}{m\omega_D}\sin\omega_D t}$

## 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV

# Odezva na obecné zatížení – Duhamelův integrál

základní myšlenka – libovolné zatížení $p(t)$ je vyjádřeno jako spojité působení impulzů síly

odezva na jednotkový impulz (začínající v čase $\tau$)

$$\rightarrow \quad \boxed{h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_0 (t-\tau)} \sin \omega_D (t-\tau)}$$

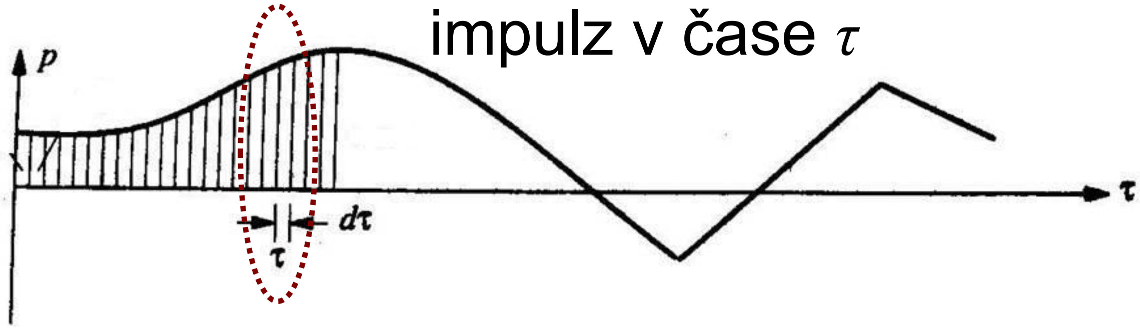
výsledná odezva = součet odezev na jednotlivé impulzy

$$\rightarrow \quad \boxed{u(t) = \int_0^t p(\tau)\, h(t-\tau) d\tau}$$

## 3. Vynucené tlumené kmitání – 1SV

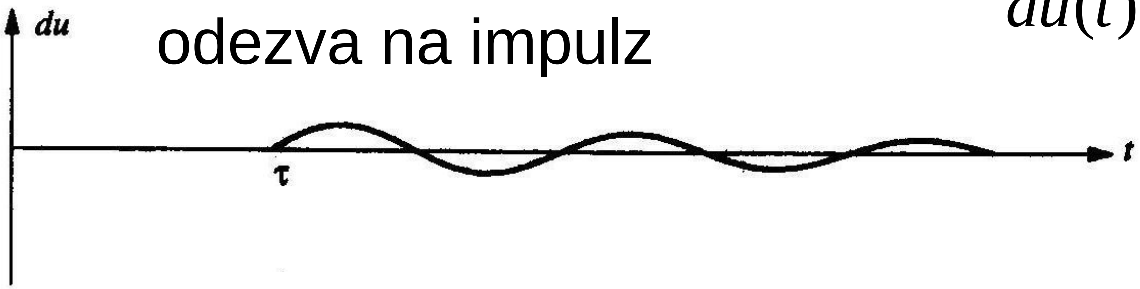
# Odezva na obecné zatížení

impulz v čase $\tau$



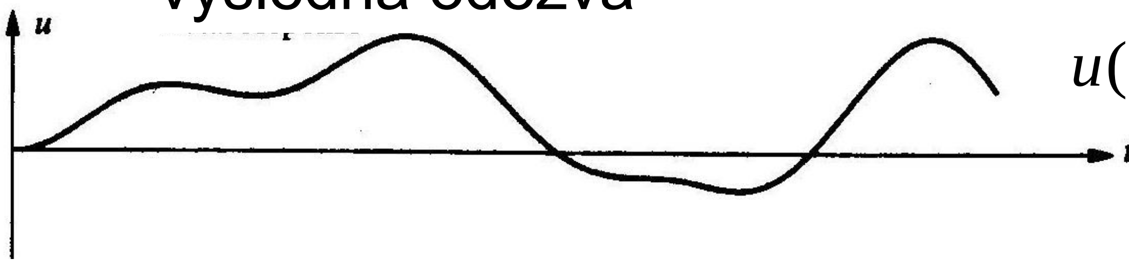

$$dI = p(\tau)d\tau$$

odezva na impulz




$$du(t) = [\underbrace{p(\tau)\, d\tau}_{\text{velikost zatížení}}]\, \underbrace{h(t-\tau)}_{\text{jednotková odezva}}$$

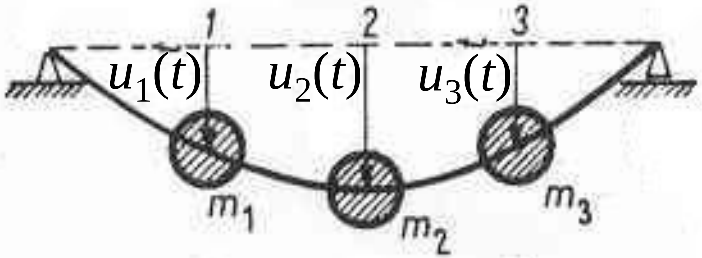
výsledná odezva



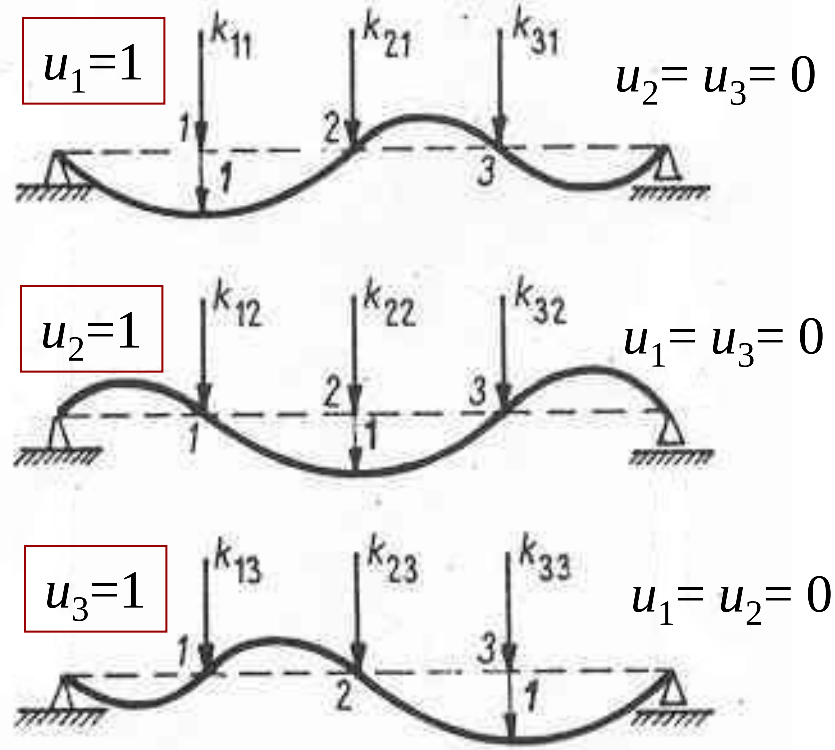

$$u(t) = \int_0^t p(\tau)\, h(t-\tau)d\tau$$

# 4. Soustavy s více SV

## Metoda konstant tuhosti




prvky matice tuhosti $k_{ij}$




Prvky matice tuhosti $k_{ij}$ – síla v bodě $i$ při posunutí v bodě $j$ rovném jedné a ostatních posunutích rovných nule

## 4. Soustavy s více SV

$$\left.\begin{aligned} k_{11}u_1(t) + k_{12}u_2(t) + m_1\ddot{u}_1(t) &= F_1(t) \\ k_{21}u_1(t) + k_{22}u_2(t) + m_2\ddot{u}_2(t) &= F_2(t) \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}(t)}$$

metoda konstant tuhosti

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

matice tuhosti (*n***n*)
(*n* je počet stupňů volnosti)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

matice hmotnosti (*n***n*)
(<u>nemusí</u> být vždy nutně diagonální)

$$\mathbf{f}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

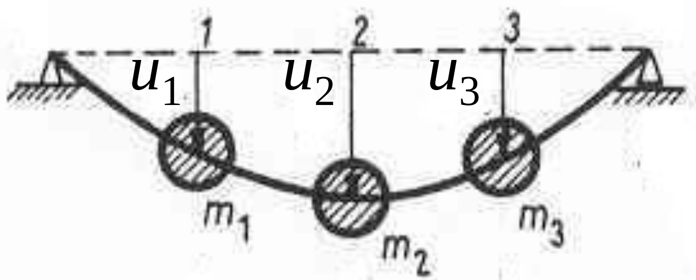
vektor zatížení (*n**1)

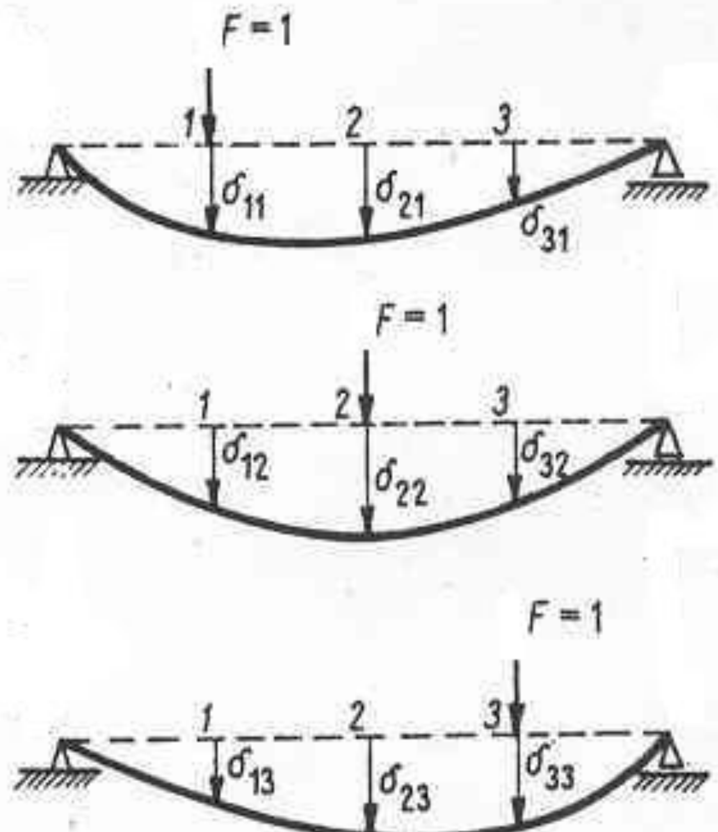
$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}$$

vektor posunutí (*n**1)
(vektor neznámých)

## 4. Soustavy s více SV

# Metoda konstant poddajnosti




Prvky matice poddajnosti $\delta_{ij}$ –
přetvoření v bodě $i$
při jednotkovém zatížení v bodě $j$

## 4. Soustavy s více SV

Matice poddajnosti konstrukce

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1N} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & \cdots & \delta_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\delta}\mathbf{f} \quad \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{I} \quad \boldsymbol{\delta} = \mathbf{K}^{-1}$$

vlastní kmitání $\longrightarrow$ $\boxed{(\mathbf{I} - \omega_n^2\, \boldsymbol{\delta}\, \mathbf{M})\, \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}}$

vynucené kmitání $\longrightarrow$ $\boxed{\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\delta}\, \mathbf{M}\, \ddot{\mathbf{u}}(t) = \boldsymbol{\delta}\, \mathbf{f}(t)}$

ustálené kmitání $\longrightarrow$ $\boxed{(\mathbf{I} - \omega^2 \boldsymbol{\delta}\mathbf{M})\mathbf{u}_A = \boldsymbol{\delta}\mathbf{f}_A}$

# 5. Vlastní netlumené kmitání

Nepůsobí žádné budicí síly, útlum se zanedbává $\mathbf{C} = \mathbf{0}$
Cílem je stanovit dynamické charakteristiky systému – vlastní kruhové frekvence a odpovídající tvary kmitání

pohybová rovnice $\boxed{\mathbf{K}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0}}$

řešení rovnice $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega^2\mathbf{u}(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)}_{=\mathbf{0}}\boldsymbol{\phi}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = \mathbf{0}$$

rovnice vlastního kmitání → $\boxed{(\mathbf{K} - \omega_n^2\mathbf{M})\,\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}}$ problém vlastních čísel

neznámé: vlastní kruhové frekvence $\omega_n$
tvary vlastního kmitání $\boldsymbol{\phi}_n$ ($n$ - počet stupňů volnosti)

## 5. Vlastní netlumené kmitání - nSV

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})\,\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}$$

podmínka netriviálního řešení → $\det.\,(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) = 0$

(polynom stupně *n* pro $\omega_n^2$ )

kořeny polynomu – *N* reálných kladných čísel

$\omega_1^2\,;\,\omega_2^2\,;\,\omega_3^2\,\ldots\,\omega_N^2$ → vlastní kruh. frekvence - vlastní čísla

$(\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \leq \ldots \leq \omega_N^2)$ (*N* je počet stupňů volnosti)

pro každou hodnotu $\omega_n^2$ je možné určit odpovídající vektor $\boldsymbol{\phi}_n$

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})\,\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\phi}_n$$

→ tvary vlastního kmitání
- vlastní vektory

$$\boldsymbol{\phi}_n = \begin{Bmatrix} \phi_{1(n)} \\ \phi_{2(n)} \\ \ldots \\ \phi_{N(n)} \end{Bmatrix}$$

pořadnice
(*n*)-tého vl. tvaru
v bodě *N*

$\phi_{N(n)}$

## 5. Vlastní netlumené kmitání - nSV

Modální matice
$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{1(1)} & \phi_{1(2)} & \cdots & \phi_{1(N)} \\ \phi_{2(1)} & \phi_{2(2)} & \cdots & \phi_{2(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N(1)} & \phi_{N(2)} & \cdots & \phi_{N(N)} \end{bmatrix}$$

(*N*)-tý tvar

Spektrální matice
$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})\,\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}\,\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2\,\mathbf{M}\,\boldsymbol{\phi}_n$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{K}\,\mathbf{\Phi} = \mathbf{M}\,\mathbf{\Phi}\,\mathbf{\Omega}^2}$$

kompaktní zápis rovnice vlastního kmitání pro všechny vl. tvary

## 5. Vlastní netlumené kmitání - nSV

# Ortogonalita vlastních tvarů

Dva různé vlastní tvary odpovídající dvěma různým vlastním frekvencím $(\omega_n \neq \omega_m)$ splňují podmínky ortogonality:

$$\boxed{\boldsymbol{\phi}_n^T \ \mathbf{K} \ \boldsymbol{\phi}_m = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{\phi}_n^T \ \mathbf{M} \ \boldsymbol{\phi}_m = 0}$$

Důkaz:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n \qquad\qquad \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_m = \omega_m^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_m$$

$$\boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n \qquad\qquad \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_m = \omega_m^2 \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_m$$

$$\left[\boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_n\right]^T = \left[\omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_m^T \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n\right]^T$$

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_m = \omega_n^2 \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_m$$

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2)\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_m = 0$$

pro $(\omega_n \neq \omega_m)$ $\rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \ \boldsymbol{\phi}_m = 0}$

obdobně lze dokázat $\rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{K} \ \boldsymbol{\phi}_m = 0}$

5. Vlastní netlumené kmitání - nSV

## Normované vlastní tvary

Řešením vlastního kmitání získáme vlastní tvary jako vzájemné poměry výchylek v jednotlivých bodech, nikoliv jejich skutečné velikosti. Proto je možné vlastní tvary normalizovat, tj. přenásobit je vhodným číslem tak, aby byly splněny určité podmínky (např. největší pořadnice je rovna 1)

Nejčastěji se používají vlastní tvary normované vzhledem k matici hmotnosti

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{\phi}_n}{\sqrt{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\, \boldsymbol{\phi}_n}} = \frac{\boldsymbol{\phi}_n}{\sqrt{M_n}}}$$

modální hmotnost $M_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n$

Pro ně platí:

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n = 1 \qquad \boxed{\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M}\, \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}} \quad \text{(jednotková matice)}$$

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \qquad \boxed{\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}\, \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Omega}^2}$$

# 6. Vynucené tlumené kmitání - nSV

Soustava je zatížena budicími sílami $(t)$
Cílem je stanovit dynamickou odezvu systému

pohybové rovnice $\boxed{\mathbf{K}\,\mathbf{u}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{f}(t)}$ (soustava *N* diferenciálních rovnic)

počáteční podm. $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0 \quad \dot{\mathbf{u}}(0)=\dot{\mathbf{u}}_0$

řešení - přímá integrace pohybových rovnic
- modální analýza (rozklad do vlastních tvarů)

## Přímá integrace pohybových rovnic

základní idea: pohybové rovnice se postupně řeší jednotlivých okamžicích $t_i, t_{i+1}$, časová osa se rozdělí pomocí délky integračního kroku $\Delta t = t_{i+1} - t_i$
derivace se nahradí diferencemi, soustava diferenciálních rovnic se převede na rovnice algebraické

## 6. Vynucené tlumené kmitání - nSV

# Rozklad do vlastních tvarů – modální analýza

základní idea: odezva se stanoví jako kombinace vlastních tvarů kmitání $\boldsymbol{\phi}_i$ pomocí modálních souřadnic $q_i(t)$ $(i=1,2\ldots N)$

$$\boxed{\mathbf{u}(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_i q_i(t)=\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t)}$$

dosazení do pohybových rovnic $\mathbf{K}\,\mathbf{u}(t)+\mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{f}(t)$

$$\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Phi}\,\mathbf{q}(t)+\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Phi}\,\dot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{M}\,\boldsymbol{\Phi}\,\ddot{\mathbf{q}}(t)=\mathbf{f}(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\,\boldsymbol{\Phi}\,\mathbf{q}(t)+\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Phi}\,\dot{\mathbf{q}}(t)+\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\,\boldsymbol{\Phi}\,\ddot{\mathbf{q}}(t)=\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{f}(t)$$

pro normované vlastní tvary dále platí

$$\boldsymbol{\Omega}^2\,\mathbf{q}(t)+\underbrace{\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Phi}}_{\text{obecně není diagonální matice}}\,\dot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{I}\,\ddot{\mathbf{q}}(t)=\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{f}(t)$$

## 6. Vynucené tlumené kmitání - nSV

### Klasický útlum

$\boxed{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}\, \mathbf{\Phi}}$ je <u>diagonální matice</u>, jejíž prvky jsou $\boxed{2\xi_i \omega_i}$
tj. vlastní tvary jsou ortogonální též k matici útlumu
$\xi_i$ - koeficient poměrného útlumu *i*-tého vlast. tvaru
$\omega_i$ - *i*-tá vlastní frekvence

$$\mathbf{\Omega}^2\, \mathbf{q}(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}\, \mathbf{\Phi}\, \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{I}\, \ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_i^2 q_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \ddot{q}_i(t) = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{f}(t)}$$

(řešení - např. Duhamelův integrál)

soustava *N* <u>nezávislých</u> rovnic pro $q_i(t)$ - obvykle $(i=1,2\ldots P)$
počet uvažovaných vl. tvarů *P* je dán frekvenčním složením zatížení $\boxed{P \ll N}$

### Rayleighův útlum – proporcionální (klasický) útlum

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \qquad \alpha = \xi_1 \omega_1 \qquad \beta = \xi_1 / \omega_1$$

platí za hypotetického předpokladu - nejméně je tlumen 1. tvar

## 6. Vynucené tlumené kmitání - nSV

### Ustálené harmonické kmitání

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}(t) \qquad \mathbf{p}(t) = \mathbf{f}_S \sin\omega t + \mathbf{f}_C \cos\omega t$$

odezva $\longrightarrow$ $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_S \sin\omega t + \mathbf{u}_C \cos\omega t$

po dosazení do soustavy pohybových rovnic a po úpravě

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{u}_S - \omega\mathbf{C}\mathbf{u}_C &= \mathbf{f}_S \\ \omega\mathbf{C}\mathbf{u}_S + (\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{u}_C &= \mathbf{f}_C\end{aligned}} \longrightarrow \mathbf{u}_S\ ;\mathbf{u}_C$$

soustava 2*N* algebraických rovnic (*N* = počet st. volnosti)

<u>*i*-tá složka vektoru $\mathbf{u}(t)$</u>

$$u_i(t) = u_{Si}\sin\omega t + u_{Ci}\cos\omega t = u_i \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_i = \sqrt{u_{Si}^2 + u_{Ci}^2}$$

$$\varphi_i = \arctan\frac{u_{Ci}}{u_{Si}}$$

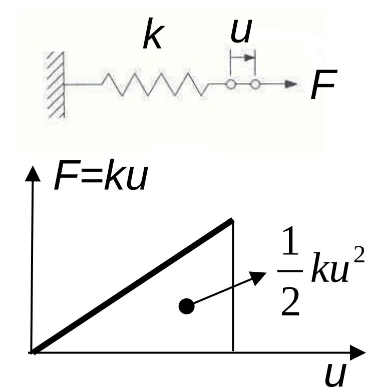
# 7. Rayleighova metoda – energetická metoda

Určení <u>základní (první) vlastní frekvence</u>

aproximace shora

využívá zákon zachování mechanické energie

$$E_k + E_p = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^T(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t)}_{\text{energie kinetická}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{u}^T(t)\mathbf{K}\mathbf{u}(t)}_{\text{potenciální}} = konst.$$




pro vlastní kmitání:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi} C \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \omega \boldsymbol{\phi} C \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{\max E_k = \max E_p}$$

rovnovážná poloha
max. rychlost

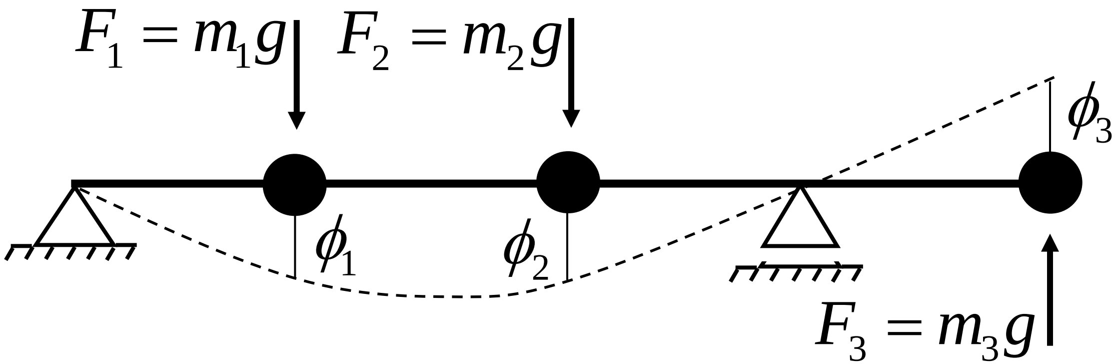
krajní poloha
max. výchylka

$$\max \mathbf{u}(t) \cong \boldsymbol{\phi}$$

$$\max \dot{\mathbf{u}}(t) \cong \omega \boldsymbol{\phi}$$

## 7. Rayleighova metoda – energetická metoda

tvar kmitání $\phi$ se volí tak, aby odpovídal prvnímu tvaru nejlépe od zatížení vlastní tíhou $F_i$ působící ve směru kmitání



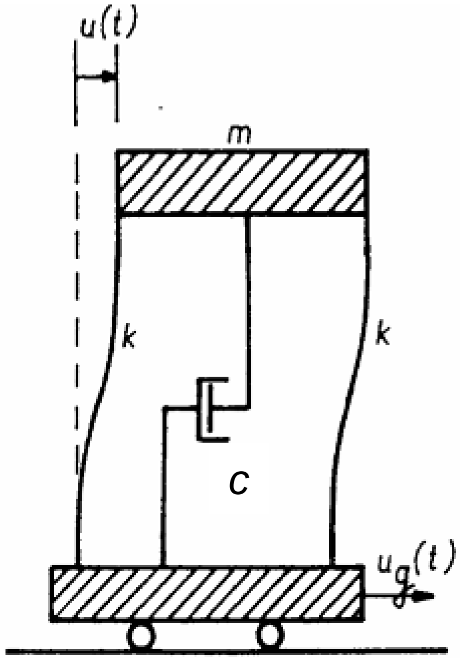

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{K}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{Bmatrix}$$

$$\max E_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{u}_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i\,\phi_i^2$$

$$\max E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} F_i\,\phi_i$$

$$\boxed{\omega \equiv \omega_1 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} F_i\,\phi_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i\,\phi_i^2}\right)^{1/2}}$$

# 8. Výpočet seizmické odezvy




Soustava s 1 SV

$$u_t = u + u_g \rightarrow \ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g \longleftarrow$$ akcelerogram

$$m\ddot{u}_t(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

$$\boxed{m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t)}$$

Soustava s *n* SV

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}^s\ddot{u}_g(t)}$$

směrový vektor – (složený z 0 a 1) určuje směr zatížení zemětřesením

Řešení:

- přímá integrace (akcelerogram) → průběh odezvy v čase
- modální analýza pomocí spektra odezvy → maxima odezvy