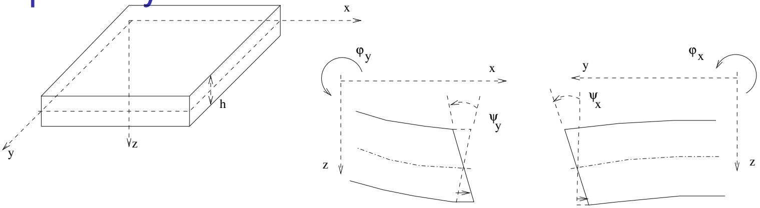
Desky

Předpoklady



Přijmeme následující předpoklady

- Zatížení desky působí kolmo ke střednicové rovině
- Příčné stlačení desky zanedbáváme
  $\Rightarrow w(x, y, z) = w(x, y)$
- Normály ke střednicové rovině zůstávájí i po deformaci přímé (pseudonormály), jejich pootočení kolem souřadnicových os oynačíme jako ψ_x, ψ_y.

Z uvedených předpokladů plynou následující vztahy pro posun libovolného bodu desky

$$u(x, y, z) = z\psi_y(x, y), \quad v(x, y, y) = -z\psi_x(x, y), \quad w(x, y, z) = w(x, y)$$

Na základě uvažovaného pole posunutí stanovíme nenulové složky deformačního tenzoru

Membránové složky

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z\frac{\partial \psi_y}{\partial x} && (1)\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial \psi_x}{\partial y} && (2)\\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right) && (3)\\
& && (4)
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = z \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \psi_x \\ \psi_y \end{array} \right\} \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \boldsymbol{\kappa} z = z\, \boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{S} \psi \qquad (6)$$

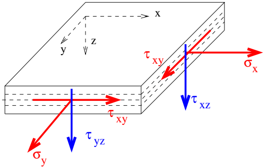
Smykové složky

$$
\begin{aligned}
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial x} && (7)\\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\psi_x \frac{\partial w}{\partial y} && (8)
\end{aligned}
$$

$$
\gamma = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} w + \left\{ \begin{array}{c} \varphi_y \\ -\varphi_x \end{array} \right\} \qquad (9)
$$

$$
\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\nabla} w + \boldsymbol{S}\boldsymbol{\varphi} \qquad (10)
$$

Představme si desku desku rozřezanou na vrstvičky (rovnoběžné se střednicovou rovinou xy).



$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x} - \nu\frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right)$$

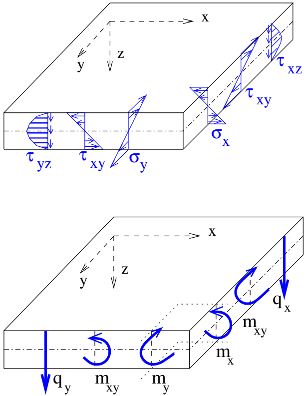
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(-\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \nu\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y} - \frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(-\psi_x + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Měrné vnitřní síly



$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z\, dz \quad (11)$$

$$m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z\, dz \quad (12)$$

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z\, dz \quad (13)$$

$$q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz}\, dz \quad (14)$$

$$q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz}\, dz \quad (15)$$

Tyto integrální veličiny jsou vztaženy na jednotku šířky a proto bývají nazývány jako měrné síly (intenzity vnitřních sil).

Mindlinova a Kirchhoffova teorie

- Kirchhoffova teorie - předpokládá, že nedochází k příčné smykové deformaci ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$), a tedy $\psi_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ a $\psi_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ (pseudonormála zůstává i po deformaci kolmá ke střednicové ploše).
  Vhodná pro tenké desky ($\frac{1}{100} \leq \frac{h}{l} \leq \frac{1}{10}$),
- Mindlinova teorie - průhyb w a natočení pseudonormály ψ_x, ψ_y jsou nezávislé. Vhodná pro tlusté desky ($\frac{h}{l} \geq \frac{1}{10}$),
- Membrány ($\frac{h}{l} \leq \frac{1}{100}$) nepřenášejí ohybové účinky

- Momenty

$$
\begin{aligned}
m_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right) z \, dz \\
&= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

Maticově tedy

$$
\left\{ \begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)D}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{D}_m \partial^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{\varphi}
$$

- Momenty

$$
\begin{aligned}
q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz}\, dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau \frac{E}{2(1+\nu)} (\psi_y + \frac{\partial w}{\partial x})\, z\, dz \\
&= k\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

Maticově tedy

$$
\left\{ \begin{array}{c} q_x \\ q_y \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} kGh & 0 \\ 0 & kGh \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\psi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} = \boldsymbol{D}_s(\boldsymbol{\nabla} w + \boldsymbol{S}\varphi)
$$

Uvažujme pouze zatížení ve smeru osy z. Podmínky rovnováhy pak mají tvar:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \bar{Z} = 0 \tag{18}$$

Po přenásobení podmínek rovnováhy souřadnicí z a jejich integrací po výšce průřezu dostaneme

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}}_{*} \right) z\, dz = 0$$

Označený člen upravíme integrací per-partes

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} z\, dz = \underbrace{\left[\tau_{zx}\, z\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}}_{=0} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx}\, dz$$

- Momentové podmínky

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\partial m} - \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{20}$$

- Silová podmínka

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} + \bar{f}_z = 0 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^T \boldsymbol{q} + \bar{f}_z = 0 \tag{22}$$

Slabé řešení

Vyjdeme z maticového zápisu podmínek rovnováhy. Pro libovolné $\delta\varphi, \delta w$ splňující $\delta\varphi = 0$ na Γ_{mu} a $\delta w = 0$ na Γ_{wu} platí

$$\int_\Omega (\boldsymbol{S}\delta\varphi)^T(\partial\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q})\,dx = 0 \tag{23}$$

$$\int_\Omega \delta w^T(\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{q} + \bar{f}_z)\,dx = 0 \tag{24}$$

První rovnici upravíme použitím Clapeyronova teorému

$$0 = \int_\Omega (\boldsymbol{S}\delta\varphi)^T(\partial\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q})\,dx \tag{25}$$

$$= \int_{\Gamma_m} (\boldsymbol{S}\delta\varphi)^T \overbrace{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}^{\bar{\mathbf{m}} \text{ na } \Gamma_m}\,dx - \int_\Omega (\partial^T\boldsymbol{S}\delta\varphi)^T\,\boldsymbol{m}\,dx \tag{26}$$

$$- \int_\Omega \boldsymbol{S}\delta\varphi^T\,\boldsymbol{q}\,dx \tag{27}$$

Silovou podmínku upravíme pomocí Gaussova-Greenova vztahu

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \delta w^T (\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{q} + \bar{f}_z)\, dx && (28)\\
&= \int_{\Gamma_q} \delta w \overbrace{\boldsymbol{n}^T \cdot \boldsymbol{q}}^{\bar{q} \text{ na } \Gamma_q} dx - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\nabla} \delta w)^T \boldsymbol{q}\, dx && (29)\\
&+ \int_{\Omega} \delta w \bar{f}_z\, dx && (30)
\end{aligned}
$$

- Výsledné vztahy

$$\int_\Omega (\partial^T \boldsymbol{S}\delta\varphi)^T\ \boldsymbol{m}\,dx + \int_\Omega (\boldsymbol{S}\delta\varphi)^T \boldsymbol{q}\,dx = \int_{\Gamma_m} (\boldsymbol{S}\delta\varphi)^T \bar{\boldsymbol{m}}\,dx$$

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\delta w)^T \boldsymbol{q}\,dx = \int_{\Gamma_q} \delta w \bar{q}\,dx + \int_\Omega \delta w \bar{f}_z\,dx$$

- Postup diskretizace je obdobný jako u ostatních úloh $w(x,y) = \boldsymbol{N}_w \boldsymbol{r}_w, \{\varphi_x, \varphi_y\}^t = \boldsymbol{N}_\varphi \boldsymbol{r}_\varphi$ Pokud diferenciální operátory vyjádříme následovně $\partial\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{B}_\varphi \boldsymbol{r}_\varphi$, $\boldsymbol{\nabla w} = \boldsymbol{B}_w \boldsymbol{w}$, pak můžeme psát

$$
\begin{aligned}
\sum_e \boldsymbol{r}_\varphi^T \quad & \Big(\boldsymbol{S}^T \int \boldsymbol{B}_\varphi^T \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{B}_\varphi \boldsymbol{S}\, dx\, \boldsymbol{r}_\varphi \\
& \quad + \int \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{N}_\varphi^T \boldsymbol{D}_s (\boldsymbol{B}_w \boldsymbol{r}_w + \boldsymbol{S}\boldsymbol{N}_\varphi \boldsymbol{r}_\varphi)\, dx - \boldsymbol{f}_m \Big) = 0 \\
\sum_e \boldsymbol{r}_w^T \quad & \Big(\int \boldsymbol{B}_w^T \boldsymbol{D}_s (\boldsymbol{B}_w \boldsymbol{r}_w + \boldsymbol{S}\boldsymbol{N}_\varphi \boldsymbol{r}_\varphi)\, dx - \boldsymbol{f}_w \Big) = 0
\end{aligned}
$$

- Podobně jako u nosníků je třeba ošetřit smykové zatuhnutí

Doporučená literatura:

1. Z. Bittnar, J. Šejnoha:*Numerické metody mechaniky I*, ES ČVUT, 1992.
2. J. Šejnoha, J. Bittnarová:*Pružnost a pevnost 10*, ES ČVUT, 1997.