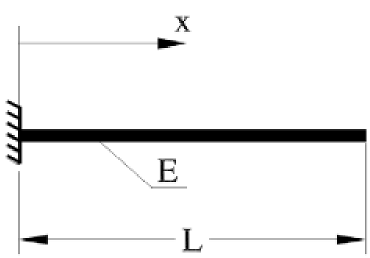
.08.1 – Eigenfrequenzen und Eigenformen beim Balken

admin2 (https://me-lrt.de/author/admin2) - 10. 06. 09 - Technische Mechanik III (https://me-lrt.de/kategorie/studium-1/technische-mechanik-iii) - 1 Comment (https://me-lrt.de/eigenfrequenzen-eigenformen-beim-balken#comments)

Berechnen Sie die ersten drei Eigenfrequenzen und die dazugehörenden Eigenformen des transversal schwingenden, einseitig eingespannten Balkens mit kreisförmigem Querschnitt.



Gegeben:

$E = 206000 \frac{N}{mm^2}$

$\rho = 7850 \frac{kg}{m^3}$

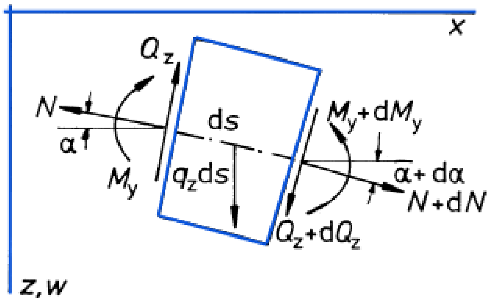
$r = 20mm$

$L = 1m$

Lösung

Die einzelnen Schritte zum Herleiten der DGL sind in diesem Artikel (https://me-lrt.de/33-balkenschwingungen-1-herleitung-der-dgl) genau erläutert. Hier nur eine kurze Zusammenfassung:

Schritt 1: Freischneiden am differentiellen Element



Schritt 2: Schwerpunktsatz in z-Richtung aufstellen und linearisieren, Größen zweiter Ordnung vernachlässigen

Schritt 3: Drallsatz in negativer y-Richtung aufstellen und vereinfachen (ds = dx), Größen zweiter Ordnung vernachlässigen

Schritt 4: resultierende allgemeine DGL der Balkenschwingung aufstellen

Ergebnis:

$$\underbrace{-\left(EI_y w''\right)''}_{(1)} + \underbrace{(\rho I_y \ddot{w}')'}_{(2)} + \underbrace{(Nw')'}_{(3)} + \underbrace{q_z}_{(4)} = \rho A \ddot{w}$$

Bedeutung der Elemente:

1: Biegung, elastische Eigenschaften

2: rotatorische Trägheit

3. Normalkraft

4. eingeprägte Querkraft

Schritt 5: vereinfachende Behandlung der Balkenschwingung:

a) N = 0, frei von Normalkräften

b) rotatorische Trägheit vernachlässigen

Es ergibt sich:

$$-\left(EI_y w''\right)'' + q_z = \rho A \ddot{w}$$

Bei einer freien Schwingung ist $q_z = 0$ und EI_y = const, daraus ergibt sich:

$$-EI_y w'''' = \rho A \ddot{w}$$

Lösung der Differentialgleichung

Um die Differentialgleichung zu lösen, nutzt man den Produktansatz von Bernoulli:

$$w\left(x,t\right) = \hat{w}\left(x\right) T\left(t\right)$$

$$w'''' = \hat{w}'''' T$$

$$\ddot{w} = \hat{w} \ddot{T}$$

Separation der Variablen:

$$-\frac{EI_y}{\rho A}\frac{\hat{w}''''}{\hat{w}} = \frac{\ddot{T}}{T} = const = -\omega_j^2$$

Schlussweise von Bernoulli:

Differentialgleichung vierter Ordnung nach dem Ort:

$$\hat{w}'''' + \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^4 \hat{w} = 0, \qquad \lambda_j^4 = \frac{\rho A}{EI_y}\omega_j^2 L^4$$

Differentialgleichung zweiter Ordnung nach der Zeit:

$$\ddot{T} + \omega_j^2 T = 0$$

Lösungsansatz:

$$\hat{w}\left(x\right) = c \cdot e^{\beta x}$$

In die DGL einsetzen ergibt:

$$\beta^4 - \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^4 = 0$$

Daraus folgt nach der **Eulerformel**:

$$\hat{w}\left(x,t\right) = C_{1j}\cos\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{2j}\sin\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{3j}\cosh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{4j}\sinh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right)$$

In die Formel für die Gesamtauslenkung eingesetzt ergibt sich damit:

$$w\left(x,t\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[C_{1j}\cos\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{2j}\sin\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{3j}\cosh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{4j}\sinh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right)\right]\left[A_j\cos\left(\omega_j t\right) + B_j\sin\left(\omega_j t\right)\right]$$

Die **Eigenformen** ergeben sich aus den Randbedingungen:

$$w\left(0,t\right) = 0$$

$$\alpha = w'\left(0,t\right) = 0$$

$$M\left(L,t\right) = -EI_y w''\left(L,t\right) = 0$$

$$Q\left(L,t\right) = -EI_y w'''\left(L,t\right) = 0$$

Die benötigten Ableitungen:

$$\hat{w}\left(x,t\right) = C_{1j}\cos\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{2j}\sin\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{3j}\cosh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{4j}\sinh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right)$$

$$\hat{w}'\left(x,t\right) = \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)\left[-C_{1j}\sin\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{2j}\cos\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{3j}\sinh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{4j}\cosh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right)\right]$$

$$\hat{w}''\left(x,t\right) = \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^2\left[-C_{1j}\cos\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) - C_{2j}\sin\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{3j}\cosh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{4j}\sinh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right)\right]$$

$$\hat{w}'''\left(x,t\right) = \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^3\left[C_{1j}\sin\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) - C_{2j}\cos\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{3j}\sinh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right) + C_{4j}\cosh\left(\lambda_j \frac{x}{L}\right)\right]$$

Aus den Randbedingungen folgt:

1.

$$w\left(0,t\right) = 0 = \sum_{j=1}^{\infty} T_j\left[C_{2j} + C_{4j}\right] \qquad \Rightarrow \qquad C_{1j} = -C_{3j}$$

2.

$$w'(0,t) = 0 = \sum_{j=1}^{\infty} T_j \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)[C_{2j} + C_{4j}] \qquad \Rightarrow \qquad C_{2j} = -C_{4j}$$

3.

$$w''(L,t) = 0 = \sum_{j=1}^{\infty} T_j \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^2 [-C_{1j}(\cosh(\lambda_j) + \cos(\lambda_j)) - C_{2j}(\sinh(\lambda_j) + \sin(\lambda_j))]$$

4.

$$w'''(L,t) = 0 = \sum_{j=1}^{\infty} T_j \left(\frac{\lambda_j}{L}\right)^3 [-C_{1j}(-\sinh(\lambda_j) + \sin(\lambda_j)) - C_{2j}(\cosh(\lambda_j) + \cos(\lambda_j))]$$

In **Matrixschreibweise** ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} -[\cosh(\lambda_j) + \cos(\lambda_j)] & -[\sinh(\lambda_j) + \sin(\lambda_j)] \\ -\sinh(\lambda_j) + \sin(\lambda_j) & -[\cosh(\lambda_j) + \cos(\lambda_j)] \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} C_{1j} \\ C_{2j} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

triviale Lösung:

$$C_{1j} = C_{2j} = 0$$

nicht-triviale Lösung:

$$[\cosh(\lambda_j) + \cos(\lambda_j)]^2 + \sin^2(\lambda_j) - \sinh^2(\lambda_j) = 0$$

$$\cos(\lambda_j)\cosh(\lambda_j) + 1 = 0$$

Daraus folgen die **Wellenzahlen**:

$$\lambda_1 = 1,875$$

$$\lambda_2 = 4,694$$

$$\lambda_3 = 7,855$$

Daraus folgen die **Eigenfrequenzen**:

$$\omega_j^2 = \frac{\lambda_j^4}{L^4}\frac{EI_y}{\rho A}$$

$$f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}$$

Die Eigenfrequenzen sind also:

$$f_1 = 28,7Hz$$

$$f_2 = 180Hz$$

$$f_3 = 503Hz$$

Die **Eigenformen** sind:

$$C_{2j} = C_{1j}\frac{\sin(\lambda_j) - \sinh(\lambda_j)}{\cos(\lambda_j) + \cosh(\lambda_j)}$$

Für die **Schwingungsgleichung** ergibt sich:

$$w\left(x,t\right)=\sum_{j=1}^{\infty}T_j\left(t\right)C_{1j}\left\{\cos\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-\cosh\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)+\underbrace{\frac{\sin\left(\lambda_j\right)-\sinh\left(\lambda_j\right)}{\cos\left(\lambda_j\right)+\cosh\left(\lambda_j\right)}}_{\alpha_j}\left[\sin\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-\sinh\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)\right]\right\}$$

$$w\left(x,t\right)=\sum_{j=1}^{\infty}T_j^*\left\{\cos\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-\cosh\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)+\alpha_j\left[\sin\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-\sinh\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)\right]\right\}$$

Die ersten drei Werte für α_j sind:

$$\alpha_1=-0,734$$

$$\alpha_2=-1,018$$

$$\alpha_3=-0,999$$

Eingesetzt ergeben sich die **Eigenfunktionen**:

$$\hat{w}_1\left(x\right)=\cos\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-\cosh\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-0,734\left[\sin\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-\sinh\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)\right]$$

$$\hat{w}_2\left(x\right)=\cos\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-\cosh\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-1,018\left[\sin\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-\sinh\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)\right]$$

$$\hat{w}_3\left(x\right)=\cos\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-\cosh\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-0,999\left[\sin\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)-\sinh\left(\lambda_j\tfrac{x}{L}\right)\right]$$

YOU MIGHT ALSO LIKE

[02 – Ungedämpfte lineare Schwingungen mit einem Freiheitsgrad (https://me-lrt.de/02-ungedampfte-lineare-schwingung-freiheitsgrad)]

07. 04. 09

[19 – Erzwungene Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden (https://me-lrt.de/erzwungene-schwingung-zwei-freiheitsgrade)]

16. 05. 09

[.04.3 – Unebenheiten in der Straße lassen ein Auto schwingen (https://me-lrt.de/unebenheiten-strase-auto-schwingen-anregung)]

27. 05. 09

THIS POST HAS ONE COMMENT

R.S. (http://www.femcad.de) 10 APR 2014

Hallo,
auf der Webseite
http://www.finite-elemente-software-fem-dienstleistungen.de/Rohrleitungssystem.pdf (http://www.finite-elemente-software-fem-dienstleistungen.de/Rohrleitungssystem.pdf)
wurde dieses Beispiel exakt mit einem FEM-System für Rohrleitungen nachgerechnet.
mfg. R.S.
http://www.femcad.de (http://www.femcad.de)

Leave a Reply

Your Comment Here...

Name (required)

Email (required)

Website

Save my name, email, and website in this browser for the next time I comment.

POST COMMENT