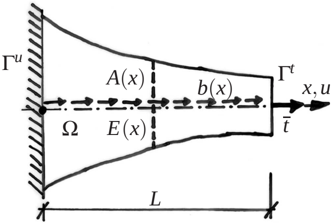
MKP formulace pro elastické pruty v 1D

Diferenciální rovnice problému



$$\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du}{dx}\right) + b = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$\sigma n = \bar{t} \text{ on } \Gamma_t,$$

$$u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_u$$

Slabé řešení - Variační formulace

$$\int_{\Omega} \delta u \left(\frac{d}{dx} (EA \frac{du}{dx} + b) \right) dx = 0$$

Integrací per partes

$$\int_{\Gamma} \delta u \, EA \frac{du}{dx} n \, dx - \int_{\Omega} \frac{d\delta u}{dx} EA \frac{du}{dx} \, dx + \int_{\Omega} \delta u \, b \, dx = 0$$

Hledáme tedy u, kde $u = \bar{u}$ na Γ_u, aby platilo

$$\int_{\Omega} \frac{d\delta u}{dx} EA \frac{du}{dx} \, dx = \int_{\Omega} \delta u \, b \, dx + \int_{\Gamma_t} \delta u \, \bar{t} \, dx \quad \forall \delta u; \;\; \delta u = 0 \in \Gamma_u$$

Nyní vyjádříme slabé řešení pomocí aproximace řešení a váhových funkcí na jednotlivých prvcích (trial and test functions). Pro náš problém slabé řešení vyžaduje C^0 kontinuitu. Aproximaci řešení - funkce posunutí u uvažujme ve tvaru

$$u^e = \boldsymbol{N}^e \boldsymbol{r}^e, \text{kde } u^e = \bar{u} \text{ na } \Gamma_u,$$

kde $\boldsymbol{r}^e$ je vektor uzlových hodnot neznámých posunů. Váhové funkce budeme aproximovat pomocí stejných interpolačních funkcí

$$\delta u^e = \boldsymbol{N}^e \boldsymbol{w}^e$$

Integrál slabého řešení na celé oblasti rozdělíme na sumu integrálů přes jednotlivé prvky:

$$\sum_{e=1}^{n} \left\{ \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\frac{d\delta u^e}{dx} \right) EA \left(\frac{du^e}{dx} \right) dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} \delta u^e \, b \, dx - (\delta u^e \, \bar{t})|_{\Gamma_t} \right\} = 0$$

Pro derivace aproximovaných funkcí platí

$$u^e(x) = \boldsymbol{N}^e(x)\boldsymbol{r}^e \rightarrow \frac{du^e}{dx} = \frac{\boldsymbol{N}^e(x)}{dx}\boldsymbol{r}^e = \boldsymbol{B}^e(x)\boldsymbol{r}^e,$$

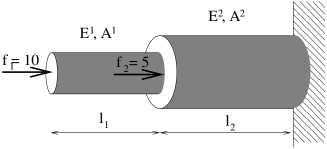
$$\delta u^e(x) = \boldsymbol{N}^e(x)\boldsymbol{w}^e \rightarrow \frac{d\delta u^e}{dx} = \frac{\boldsymbol{N}^e(x)}{dx}\boldsymbol{w}^e = \boldsymbol{B}^e(x)\boldsymbol{w}^e$$

Dosazením těchto vztahů do předchozí rovnice

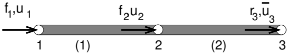
$$\sum_{e=1}^{n} \boldsymbol{w}^{eT} \left\{ \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} \boldsymbol{B}^{eT} EA\boldsymbol{B}^e \, dx}_{\boldsymbol{K}^e} \; \boldsymbol{r}^e - \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} \boldsymbol{N}^{eT} \, b \, dx}_{\boldsymbol{f}_\Omega} - \underbrace{\left(\boldsymbol{N}^{eT}\bar{t}\right)_{\Gamma_t}}_{\boldsymbol{f}_{\Gamma_t}} \right\} = 0$$

Pokud lokální vektory $\boldsymbol{u}^e, \boldsymbol{w}^e$ rozšíříme do globálních vektorů uzlových hodnot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$, pak můžeme psát

$$\boldsymbol{w}^T \underbrace{\left(\sum_{e=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{K}}^e \boldsymbol{r} - \sum_{e=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{f}}^e \right)}_{\boldsymbol{K}^g \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}} = 0, \quad \forall \boldsymbol{w},\ w = 0 \,\mathrm{na}\, \Gamma_u$$



$$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R} = 0, \quad \forall \boldsymbol{w}, \quad w = 0 \,\text{na}\, \Gamma_u$$



$$\begin{aligned} w_1 R_1 + w_2 R_2 &= 0, \quad \text{pro lib. } w_1, w_2 \Rightarrow R_1 = R_2 = 0 \\ R_3 &\neq 0, \quad \text{Reakce v uzlu 3} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{R} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ R_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \bar{u}_3 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \bar{u}_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 + R_3 \end{array} \right\}$$

Matice tuhosti prvku s lineární aproximací

Matice interpolačních funkcí $\boldsymbol{N}^e$ má v našem případě tvar

$$\boldsymbol{N}^e = \frac{1}{l^e}\left[x_2^e - x, \quad x - x_1^e\right]$$

A tedy pro geometrickou matici $\boldsymbol{B}^e$ platí

$$\boldsymbol{B}^e = \frac{d}{dx}\boldsymbol{N}^e = \frac{1}{l^e}\left[-1, \quad 1\right]$$

Dosazením do výrazu pro matici tuhosti

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}^e &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} \boldsymbol{B}^{eT} EA \boldsymbol{B}^e \, dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{1}{l^e}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} EA \frac{1}{l^e}\left[-1, \quad 1\right] dx \\ &= \frac{EA}{l^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vektor zatížení prvku s lineární aproximací

$$\boldsymbol{f}^e_\Omega = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \boldsymbol{N}^{eT}\, b(x)\, dx$$

Pokud budeme uvažovat lineární objemové zatížení $b(x)$, potom jej můžeme vyjádřit také pomocí lineárních interpolačních funkcí

$$b(x) = \boldsymbol{N}^e \boldsymbol{b}^e$$

Potom pro vektor zatížení platí

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}^e_\Omega &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} \boldsymbol{N}^{eT} \boldsymbol{N}^e\, dx\, \boldsymbol{b}^e \\
&= \frac{1}{l^{e2}} \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left[\begin{array}{cc} (x_2^e - x)^2 & (x_2^e - x)(x - x_1^e) \\ (x_2^e - x)(x - x_1^e) & (x - x_1^e)^2 \end{array} \right] dx\, \boldsymbol{b}^e \\
&= \frac{l^e}{6} \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} b_1^e \\ b_2^e \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Lineární prvek v přirozených souřadnicích

Matice interpolačních funkcí $\boldsymbol{N}^e$ vyjádřená v přirozené souřadnici ξ:

$$\boldsymbol{N}^e = \left[\frac{1}{2}(1-\xi),\ \ \frac{1}{2}(1+\xi)\right]$$

Pro výpočet geometrické matice $\boldsymbol{B}^e$ a matice tuhosti budeme potřebovat vyjádřit derivace bázových funkcí podle x.
Na základě věty o derivaci složené funkce platí

$$df/d\xi = (df/dx)\,(dx/d\xi),$$

odtud plyne inverzní vztah

$$df/dx = (dx/d\xi)^{-1}\ df/d\xi.$$

Potřebujeme vyjádřit x v závislosti na ξ.

Využijeme stejné aproximační funkce (izoparametrické prvky):
$x(\xi) = \boldsymbol{N}^e(\xi)\boldsymbol{x}^e$.
Pro diferenciál dx tedy platí $dx = (d\boldsymbol{N}^e/d\xi)\,\boldsymbol{x}^e\,d\xi = J\,d\xi$.
Pro případ lineární aproximace

$$
\begin{aligned}
x(\xi) &= 1/2(1-\xi) * x_1^e + 1/2(1+\xi) * x_2^e \\
dx &= (x_2^e - x_1^e)/2d\xi = l^e/2d\xi
\end{aligned}
$$

Pro matici tuhosti tedy můžeme psát

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}^e &= \int_{-1}^{1} \boldsymbol{B}^{eT}\,EA\,\boldsymbol{B}^e\,J\,d\xi = \int_{-1}^{1} \left[\begin{array}{c} -1/l^e \\ 1/l^e \end{array}\right] EA \left[\begin{array}{cc} \frac{-1}{l^e} & \frac{1}{l^e} \end{array}\right] \frac{l^e}{2}\,d\xi \\
&= \frac{EA}{l^e}\left[\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Prvek s kvadratickou interpolací

Matice interpolačních funkcí $\boldsymbol{N}^e$ vyjádřená v přirozené souřadnici ξ:

$$\boldsymbol{N}^e = \left[\frac{1}{2}(1-\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi^2),\ (1-\xi^2),\ \frac{1}{2}(1+\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi^2)\right]$$

Aproximace geometrie:

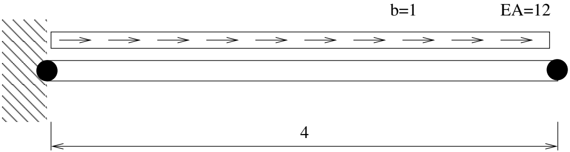
$$x = \boldsymbol{N}\boldsymbol{x} = (-1/2\xi + 1/2\xi^2)x_1 + (1-\xi^2)x_2 + (1/2\xi + 1/2\xi^2)x_3$$

$$J = \frac{dx}{d\xi} = (-1/2+\xi)x_1 - 2\xi x_2 + (1/2+\xi)x_3$$

$$\boldsymbol{K} = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{B}^T EA\boldsymbol{B}\, J d\xi$$

$$\boldsymbol{f}_e = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{N} b(\xi)\, J\, d\xi$$

Příklad



Silné řešení:

$$EA\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -b \;\Big|\; EA\frac{du(x)}{dx} = -bx + c_1 \;\Big|\; EAu(x) = -\frac{1}{2}bx^2 + c_1x + c_2$$

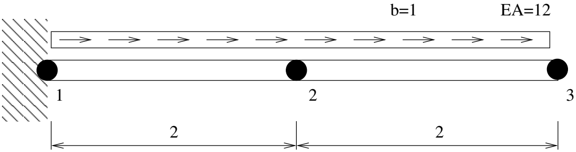
Integrační konstanty c_1 a c_2 určíme z okrajových podmínek:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 : c_2 = 0 \\ N(4) &= 0 : EA\frac{du(4)}{dx} = -4b + c_1 = 0 : c_1 = 4 \end{aligned}$$

Celkem tedy máme:

$$u(x) = \frac{1}{EA}\left(-\frac{bx^2}{2} + 4x\right) \Rightarrow u\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2},\; u(l) = \frac{2}{3}$$

Řešení jedním kvadratickým prvkem:



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_c &= \{0;2;4\}^T \\
\boldsymbol{N} &= [-1/2\xi + 1/2\xi^2,\ 1-\xi^2,\ 1/2*\xi + 1/2*\xi^2] \\
x &= \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_c = 2 + 2*\xi \Rightarrow \ \frac{dx}{d\xi} = 2,\ \ J = 2 \\
\frac{d\boldsymbol{N}}{d\xi} &= [-1/2+\xi,\ -2*\xi,\ 1/2+\xi] \\
\boldsymbol{B} &= \frac{d\boldsymbol{N}}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = [-1/4 + 1/2*\xi,\ -\xi,\ 1/4 + 1/2*\xi] \\
\boldsymbol{K} &= \int_{-1}^{1} \boldsymbol{B}^T EA\boldsymbol{B}\, J d\xi = \frac{EA}{12}\left[\begin{array}{ccc} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_e &= \int_{-1}^{1} \boldsymbol{N} b\, J\, d\xi = \{2/3;\ 8/3;\ 2/3\}^T \\
\boldsymbol{f} &= \{8/3; 2/3\}^T \\
\boldsymbol{K}_u &= \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{r}_u &= \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{f}_u = \{1/2; 2/3\}^T \\
\varepsilon &= \frac{du}{dx} = \boldsymbol{Br} = \boldsymbol{B}\{0;\ 1/2;\ 2/3\}^T = 1/6 - 1/6 * \xi \\
R_1 &= \boldsymbol{K}(1, 2:3)\boldsymbol{r}_u - \boldsymbol{f}_e(1) = -4
\end{aligned}
$$

Řešení jedním lineárním prvkem:

$$\boldsymbol{K} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}_e = \int_0^4 \boldsymbol{N} b \, dx = \{2, 2\}^T$$

Podmínky rovnováhy na konstrukci:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{Bmatrix}$$