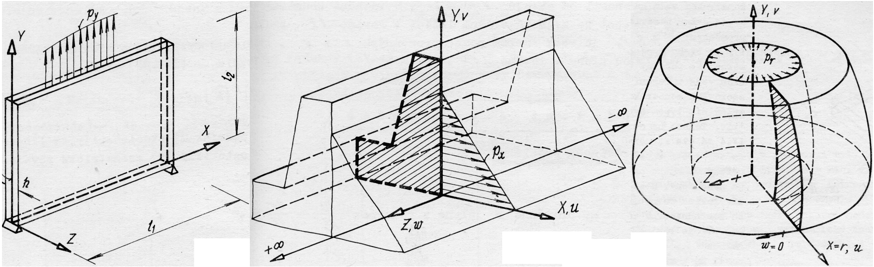
Rovinná úloha pružnosti

Základní rovnice pro rovinné problémy



- Všechny veličiny (geometrie, materiálové vlastnosti, zatížení) jsou nezávislé na jedné prostorové proměnné
  - Rovinná napjatost
  - Rovinná deformace
  - Rotačně symetrická úloha
- Rovinná napjatost – historicky první praktická aplikace metody konečných prvků [Turner, 1956]

Geometrické rovnice

- Poloha charakterizována $\boldsymbol{x} = \{x, y\}^{\mathsf{T}}$
- Základní neznámé $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \{u(\boldsymbol{x}), v(\boldsymbol{x})\}^{\mathsf{T}}$
- Vektor (nezávislých složek) deformace $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \{\varepsilon_x(\boldsymbol{x}), \varepsilon_y(\boldsymbol{x}), \gamma_{xy}(\boldsymbol{x})\}^{\mathsf{T}}$
- Geometrické rovnice

$$
\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x(\boldsymbol{x}) \\ \varepsilon_y(\boldsymbol{x}) \\ \gamma_{xy}(\boldsymbol{x}) \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u(\boldsymbol{x}) \\ v(\boldsymbol{x}) \end{array} \right\} \\
\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{\partial}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

- Pro rovinnou deformaci je $\varepsilon_z = 0$, pro rovinnou napjatost se $\varepsilon_z \neq 0$ dopočítává z konstitutivních rovnic

Podmínky rovnováhy - statické rovnice

- Vektor (nezávislých složek) napětí $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \{\sigma_x(\boldsymbol{x}), \sigma_y(\boldsymbol{x}), \tau_{xy}(\boldsymbol{x})\}^\mathsf{T}$
- Statické rovnice: $\boldsymbol{x} \in \Omega$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x(\boldsymbol{x}) \\ \sigma_y(\boldsymbol{x}) \\ \tau_{xy}(\boldsymbol{x}) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \overline{X}(\boldsymbol{x}) \\ \overline{Y}(\boldsymbol{x}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\boldsymbol{\partial}\, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{0}$$

- $\sigma_z = 0$ pro rovinnou napjatost, $\sigma_z \neq 0$ pro rovinnou deformaci vyplývá z konstitutivních rovnic

Konstitutivní rovnice - lineární izotropní materiál

- Rovinná deformace

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{array}\right\} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right]$$

- Rovinná napjatost

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{array}\right\} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

Okrajové podmínky

- Kinematické okrajové podmínky: $\boldsymbol{x} \in \Gamma_u$: $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$
- Statické okrajové podmínky: $\boldsymbol{x} \in \Gamma_p$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_x(\boldsymbol{x}) & 0 & n_y(\boldsymbol{x}) \\ 0 & n_y(\boldsymbol{x}) & n_x(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x(\boldsymbol{x}) \\ \sigma_y(\boldsymbol{x}) \\ \tau_{xy}(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \overline{p}_x(\boldsymbol{x}) \\ \overline{p}_y(\boldsymbol{x}) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) - \overline{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Divergenční (Clapeyronův) teorém:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{u} d\Omega = \int_\Gamma \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{n} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{\sigma} d\Omega$$

Slabé řešení

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})^\mathsf{T}\left(\partial\,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \overline{\boldsymbol{X}}\right)\ d\Omega \\
&\overset{\text{Clapeyron}}{=} \int_{\Gamma_u} \overbrace{\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})^\mathsf{T}}^{\boldsymbol{0}}\,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\ d\Gamma_u + \int_{\Gamma_p} \delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})^\mathsf{T}\,\overbrace{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})}^{\overline{\boldsymbol{p}}}\ d\Omega \\
&- \int_\Omega \left(\partial^\mathsf{T}\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right)^\mathsf{T}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\ d\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})^\mathsf{T}\overline{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\ d\Omega
\end{aligned}
$$

- Přisoudíme-li váhové funkci $\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ fyzikální smysl *virtuálního posunu*, můžeme člen $\partial^\mathsf{T}\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ identifikovat jako virtuální deformaci $\delta\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$.

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})^\mathsf{T}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\ d\Omega &= \int_{\Gamma_p} \delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})^\mathsf{T}\overline{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\ d\Gamma_p + \int_\Omega \delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})^\mathsf{T}\overline{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\ d\Omega \\
\delta W_{\mathrm{int}} &= \delta W_{\mathrm{ext}}.
\end{aligned}
$$

Metodu vážených reziduí lze tedy chápat jako *zobecnění principu virtuálních posunů*

Galerkinovská aproximace

- Provedeme diskretizaci řešené oblasti
- Aproximace neznámých posunů $\boldsymbol{u}^e(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{N}^e(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{r}^e)$,
- Aproximace polí deformací a napětí

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^e(\boldsymbol{x}) &\approx \boldsymbol{B}^e(\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{r}^e\right) \\
\sigma^e(\boldsymbol{x}) &\approx \boldsymbol{D}^e(\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{B}^e(\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{r}^e\right)\right)
\end{aligned}
$$

- Aproximace váhových funkcí

$$
\delta \boldsymbol{u}^e(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{N}^e(\boldsymbol{x})\delta \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{e}} \qquad \delta\varepsilon^{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{B}^e(\boldsymbol{x})\delta \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{e}}
$$

- Po dosazení do slabé formulace podmínek rovnováhy dostáváme

$$\delta \boldsymbol{r}^{\mathsf{T}} \left\{ \sum_{e=1}^{n} \boldsymbol{L}^{eT} \left[\overbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{B}^{e}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D}^{e}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{B}^{e}(\boldsymbol{x})\ d\Omega}^{\boldsymbol{K}^{e}} \boldsymbol{L}^{e} \boldsymbol{r} - \overbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{N}^{e}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}} \overline{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\Omega}^{\boldsymbol{f}_{\Omega}^{e}} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \underbrace{\int_{\Gamma_p} \boldsymbol{N}^{e}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}} \overline{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\ d\Gamma_p}_{\boldsymbol{f}_{\Gamma}^{e}} \right] \right\} = 0$$

Neznámé uzlové posuny tedy splňují rovnici

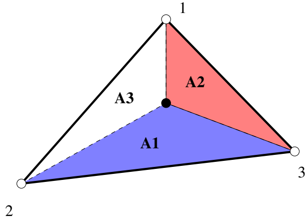
$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{\Omega} + \boldsymbol{f}_{\Gamma}$$

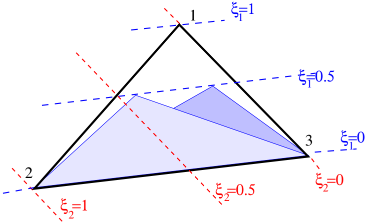
Izoparametrická aproximace pro trojúhelníkové prvky

Trojúhelníkové (plošné) souřadnice daného bodu P jsou definovány jako

$$\xi_i = \frac{A_i}{A}$$

kde A_i je plocha trojúhelníku spojujícího uzly $j, k \neq i$ a bod P a A je plocha troúhelníku 123.





Rovnice $\xi_i = const$ reprezentují množinu přímek rovnoběžných s protilehlou stranou k i-tému uzlu. Rovnice odpovídající hranám 2–3, 3–1 a 1–2 jsou $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, a $\xi_3 = 0$. Třem uzlům odpovídají souřadnice (1,0,0), (0,1,0) a (0,0,1). Body uprostřed jednotlivých hran mají souřadnice (1/2,1/2,0), (0,1/2,1/2) a (1/2,0,1/2), těžiště pak (1/3,1/3,1/3).

Trojúhelníkové souřadnice nejsou nezávislé, jejich součet musí být roven jedné

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{1}$$

Plošné souřadnice splňují Kronecker delta podmínku $\xi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$, odtud myšlenka jejich použítí jako interpolačních funkcí. Z definice plošných souřadnic plyne, že závislost mezi reálnými souřadnicemi a plošnými souřadnicemi je lineární a tedy pro lineární aproximaci hledané funkce ϕ můžeme psát:

$$\phi^e = \sum_{i=1}^{3} \xi_i \phi_i^e = \xi_1 \phi_1^e + \xi_2 \phi_2^e + \xi_3 \phi_3^e$$

Stejně tak vyjádříme vztah mezi reálnými a trojúhelníkovými souřadnicemi

$$x = \sum_i x_i \xi_i; \qquad y = \sum_i y_i \xi_i \tag{2}$$

Transformace souřadnic

Veličiny, které jsou spjaty s geometrií nejsnadněji vyjádříme prostřednictvím trojúhelníkových souřadnic. Na druhou stranu, veličiny jako posunutí, deformace, či napětí jsou vyjádřeny v kartézském souřadném systému (x,y). Proto potřebujeme transformaci pro přechod mezi jednotlivými souřadnými systémy. Kartézské souřadnice jsou s troůhelníkovými svázány prostřednictvím

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\}$$

První rovnice vyjadřuje, že součet trojúhelníkových souřadnic je roven jedné (1). Druhá a třetí rovnice vyjadřují souřadnice x a y jako lineární kombinaci ξ_i (2). Inverzí získáme

$$\left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\} = \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{ccc} x_1^e y_3^e - x_3^e y_2^e & y_2^e - y_3^e & x_3^e - x_2^e \\ x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e & y_3^e - y_1^e & x_1^e - x_3^e \\ x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e & y_1^e - y_2^e & x_2^e - x_1^e \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array} \right\}$$

Pro vztahy mezi parciálními derivacemi pak platí

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i} = x_i \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi_i} = y_i$$
$$2A\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = y_{jk} \quad 2A\frac{\partial \xi_i}{\partial y} = x_{kj}$$

kde $x_{ij} = x_i^e - x_j^e,\ y_{ij} = y_i^e - y_j^e$ a v posledním řádku jsou indexy i,j,k svázány cyklickou permutací. Např. pro i=2 je j=2 a k=1. Derivace dané funkce $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ vzhledem k x, y plynou z věty o derivaci složené funkce

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}y_{23} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}y_{31} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3}y_{12}\right)\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}x_{32} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}x_{13} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3}x_{21}\right)
\end{aligned}$$

Maticově zapsáno

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right\} = \frac{1}{2A}\left[\begin{array}{ccc} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{array}\right]\left\{\frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \frac{\partial f}{\partial \xi_3}\right\}^T$$

Matice tuhosti lineárního trojúhelníkového prvku

- Interpolační funkce jsou v tomto případě shodné s trojúhelníkovými souřadnicemi $N_i = \xi_i$
- Aproximace posunů

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\}$$

$$\boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{N}^e \boldsymbol{r}^e$$

- Výpočet matice $\boldsymbol{B}^e$ vyžaduje členy

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial x} = \frac{y_{jk}}{2A} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \xi_i}{\partial L_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial \xi_i}{\partial L_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial y} = \frac{x_{kj}}{2A} \end{aligned}$$

- $\boldsymbol{B}^e(\boldsymbol{x}) = \partial^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}^e(\boldsymbol{x})$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^e &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{B}^e$ je po prvku konstantní
- Matice tuhosti $\boldsymbol{K}^e$ (předpokládáme, že $\boldsymbol{D}^e$ je též konstantní)

$$
(\boldsymbol{K}^e)_{6\times 6} = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{B}^{eT} \boldsymbol{D}^e \boldsymbol{B}^e d\Omega = \boldsymbol{B}^{eT} \boldsymbol{D}^e \boldsymbol{B}^e \int_{\Omega^e} d\Omega = A \boldsymbol{B}^{eT} \boldsymbol{D}^e \boldsymbol{B}^e
$$

- Výpočet zbylých členů soustavy je obdobný

Parametrické souřadnice na trojúhelníku

Volitelná látka

Předpokládejme, že funkce je aproximována na trojúhelníku lineární aproximací uzlových hodnot $F = ax + by + c$, kde konstanty a, b, c je třeba určit. Postupným dosazením $x = x_k, y = y_k,\ k = 1, 2, 3$:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} c \\ a \\ b \end{array} \right\}$$

Z první rovnice můžeme eliminovat neznámou konstantu $c = F_1 - ax_1 - by_1$ a tedy

$$F - F_1 = a(x - x_1) + b(y - y_1) \tag{3}$$

Z druhé a třetí rovnice plyne

$$F_2 - F_1 = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1)$$
$$F_3 - F_1 = a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1)$$

To jsou dvě rovnice pro dvě neznámé. Odtud tedy

$$a = ((y_3 - y_1)(F_2 - F_1) - (y_2 - y_1)(F_3 - F_1))/(2A)$$
$$b = ((x_2 - x_1)(F_3 - F_1) - (x_3 - x_1)(F_2 - F_1))/(2A)$$

kde $2A = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$ je dvojnásobek plochy trojúhelníku. Díky tomu a rovnici (3) můžeme psát

$$F - F_1 = \xi_2(F_2 - F_1) + \xi_3(F_3 - F_1),$$

kde

$$\xi_2 = ((y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1))/(2A)$$
$$\xi_3 = ((x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_3 - y_1)(x - x_1))/(2A)$$

Pro aproximaci F tedy platí
$F - F_1 = \xi_2(F_2 - F_1) + \xi_3(F_3 - F_1) \Rightarrow$
$\underline{F = F_1(1 - \xi_2 - \xi_3) + F_2\xi_2 + F_3\xi_3 = F_1\xi_1 + F_2\xi_2 + F_3\xi_3}$

$$\xi_2 = \left((y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)\right)/(2A)$$
$$\xi_3 = \left((x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_3 - y_1)(x - x_1)\right)/(2A)$$

Parametrické souřadnice ξ_1, ξ_2, ξ_3 mohou být interpretovány jako tzv. plošné souřadnice, definované jako

$$\xi_1 = A_1/A, \quad \xi_2 = A_2/A, \quad \xi_3 = A_3/A,$$

kde A_i je plocha trojúhelníku spojujícího uzly $j, k \neq i$ a bod P. Například pro ξ_2 platí
$\xi_2 = A_2/A = (x - x_1,\ y - y_1,\ 0)x(x_3 - x_1,\ y_3 - x_1,\ 0)/2A = (x - x_1)(y_3 - y_1) - (y - y_1)(x_3 - x_1)/2A$.

$$\begin{aligned}
\xi_1^e &= \frac{1}{2A}(x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e + (y_2^e - y_3^e)x + (x_3^e - x_2^e)y) \\
\xi_2^e &= \frac{1}{2A}(x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e + (y_3^e - y_1^e)x + (x_1^e - x_3^e)y) \\
\xi_3^e &= \frac{1}{2A}(x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e + (y_1^e - y_2^e)x + (x_2^e - x_1^e)y)
\end{aligned}$$

Z definice plošných souřadnic plyne $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$.

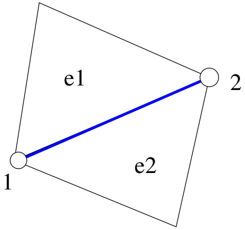
Kontinuita a úplnost

Volitelná látka

Globální aproximaci (globální bázové funkce) získáme sečtením příspěvků od jednotlivých prvků $\boldsymbol{N}^g = \sum_e \boldsymbol{N}^e \boldsymbol{L}^e$, kde $\boldsymbol{L}^e$ je distribuční matice prvku (viz 1. přednáška). Pro aproximaci funkce ϕ na celé oblasti pak $\phi^h = \boldsymbol{N}^g \boldsymbol{d}^g$. Protože interpolační funkce jsou C^0 spojité, je zajištěna i C^0 spojitost jejich lineární kombinace a tedy i ϕ^h.

Ověření kompatibility

Podél každé hrany, jsou posunutí u a v lineární a jednoznačně určeny hodnotami uzlových posunů příslušejících dané hraně. Například na hraně 1-2 prvku e1 je průběh posunutí u,v následující ($\xi_3 = 0$):



$$
\begin{aligned}
u &= u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 \\
v &= v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + v_3\xi_3 = v_1\xi_1 + v_2\xi_2
\end{aligned}
$$

Stejný postup a shodný výsledek obdržíme i pro sousední prvek e2 sdílející stejnou hranu. Protože hodnoty uzlových posunutí jsou pro všechny prvky sdílející daný uzel stejné, aproximace u a v jsou kompatibilní podél hran a tedy aproximace je podél hran C^0 spojitá. Jelikož aproximace je také spojitá uvnitř prvků, je podmínka spojitosti a kompatibility splněna.

Ověření úplnosti

Ověříme, že aproximace je schopna popsat lineární pole posunutí. To uvažujeme ve tvaru:

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y, \qquad v = b_0 + b_1 x + b_2 y \tag{4}$$

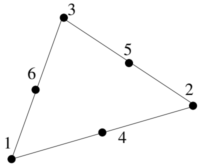
Pro ověření budeme potřebovat určit uzlové hodnoty: $u_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i$ a $v = b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i$ pro $i = 1, 2, 3$. Dosazením těchto uzlových hodnot do uvažované aproximace ověříme, že rov. (4) je splněna. Např. pro u platí:

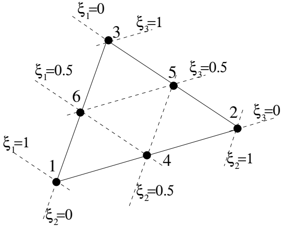
$$\begin{aligned} u &= \sum_i u_i \xi_i = \sum_i (a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i)\xi_i = \sum_i (a_0 \xi_i + a_1 x_i \xi_i + a_2 y_i \xi_i) \\ &= a_0 \sum_i \xi_i + a_1 \sum_i (x_i \xi_i) + a_2 \sum_i (y_i \xi_i) = a_0 + a_1 x + a_2 y \end{aligned}$$

Kvadratický prvek

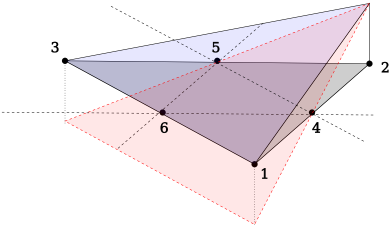
Volitelná látka

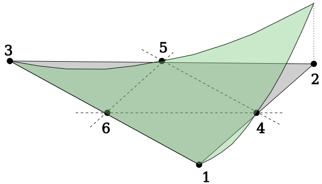
Kvadratická interpolace vyžaduje určení šesti parametrů ($\phi^e = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2$). Protože ji budeme chtít vyjádřit opět pomocí uzlových hodnot, budeme potřebovat stejný počet uzlů. Uvažujme tedy šesti-uzlový trojúhelníkový prvek, se třemi uzly ve vrcholech (číslované 1,2,3 proti směru hodinových ručiček) a třemi uzly ve středech jednotlivých hran, tomu odpovídají souřadnice (1/2,1/2,0), (0,1/2,1/2) a (1/2,0,1/2).





Konstrukce bázových funkcí je podobná konstrukci Lagrangeových interpolačních polynomů: Při konstrukci interpolačních funkcí hledáme takovou, která je rovna jedné v daném uzlu a ve všech ostatních rovna nule. Ukažme si to na příkladu interpolační funkce N_2^e: Začneme tím, že hledáme funkci, která je rovna jedné v uzlu 2 a rovna nule v ostatních vrcholech (uzly 1 a 3) - takovou funkcí je ξ_2. V druhém kroku hledáme takovou funkci, která vynásobena ξ_2 vymizí ve zbývajících uzlech (vyjma druhého). Takovou funkcí je např. $(2\xi_2 - 1)$.





Zbývá zajistit, aby $N_2(x_2, y_2) = N_2(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1, \xi_3 = 0) = 1$. To je však již splněno.

i	ξ_1	ξ_2	ξ_3	$N_i^e(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$
1	1	0	0	$\xi_1(2\xi_1 - 1)$
2	0	1	0	$\xi_2(2\xi_2 - 1)$
3	0	0	1	$\xi_3(2\xi_3 - 1)$
4	1/2	1/2	0	$4\xi_1\xi_2$
5	0	1/2	1/2	$4\xi_2\xi_3$
6	1/2	0	1/2	$4\xi_1\xi_3$

Interpolační funkce kvadratického trujúhelníkového prvku