Cvičení č.8 - Nestacionární vedení tepla

Nestacionární vedení tepla v jedné dimenzi je popsáno následující rovnicí (viz také přednášky):

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) = Q.$$

Okrajové podmínky v hraničních bodech řešené oblasti (intervalu) mají stejnou podobu, jako v případě stacionárního vedení tepla pouze s tím rozdílem, že nyní mohou záviset na čase. Například lze psát

$$T(0,t) = \bar{T}$$
$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = \bar{q},$$

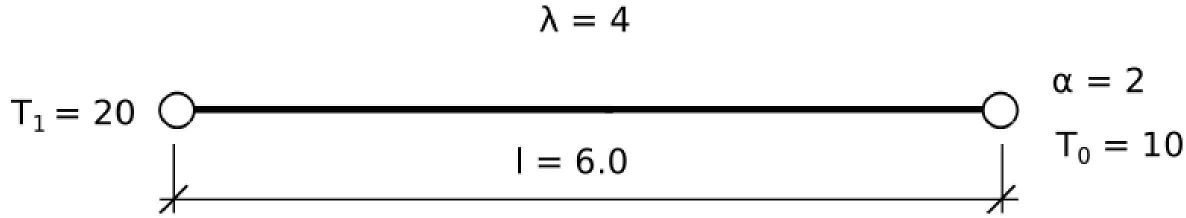
kde $\bar{q}$ lze předepsat přímo číselnou hodnotou, nebo ve formě podmínky modelující přestup tepla (viz cvičení na stacionární vedení tepla). Díky časové závislosti je však nově třeba předepsat takzvanou počáteční podmínku, která říká, jak je teplota po řešené oblasti rozložena v okamžiku počátku řešení. Počáteční teplota může být předepsána libovolnou (obvykle však spojitou) funkcí, kterou označíme ϕ:

$$T(x,0) = \phi(x).$$

Všimněte si také, že v případě nestacionárního vedení tepla představuje řídící rovnice problému parciální diferenciální rovnici, na rozdíl od stacionárního případu, kde jsme vystačili s obyčejnou diferenciální rovnicí. Tato "komplikace" se projeví i ve složitějších postupech řešení.

Řešme následující příklad.

Příklad - 1D úloha



Stanovte rozložení teploty na intervalu (viz obr.) během časového intervalu [0,10] sekund. Vlevo je teplota předepsána, vpravo je okrajová podmínka přestupu tepla (Hodnoty materiálových konstant jsou pouze ilustrační). Počáteční rozložení teploty je konstantní a má hodnotu 20 K (všimněte si, že počáteční podmínka se vlevo shoduje s okrajovou podmínkou).

- $\lambda = 4\, Wm^{-1}K^{-1}$
- $\alpha = 2\, Wm^{-2}K^{-1}$
- $\rho = 1\, kg/m^{-3}$
- $c_v = 1\, Jkg^{-1}K^{-1}$
- $T_1 = 20\, K$
- $T_o = 10\, K$

Analytické řešení

Nejprve úlohu vyřešíme analyticky. Matematicky lze problém popsat následovně:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \frac{\lambda}{c_v\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad x \in (0,L), \quad t \in [0,T].$$
$$T(0,t) = T_1$$
$$\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) + \frac{\alpha}{\lambda}T(L,t) = \frac{\alpha}{\lambda}T_o$$
$$T(x,0) = \phi(x)$$

K řešení použijeme tzv. Fourierovu metodu, někdy zvanou též metodu separace proměnných. Její idea spočívá v tom, že hledanou funkci T (V našem případě rozložení teploty, ale může jít o libovolnou jinou funkci v závislosti na řešeném problému. Fourierova metoda je aplikovatelná i na jiné rovnice, např. na vlnovou rovnici, Laplaceovu rovnici apod.) ve tvaru součinu funkcí, kde každá z těchto funkcí již závisí pouze na jedné proměnné, tzn.

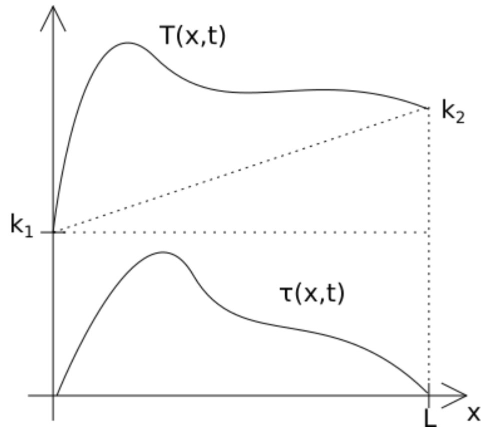
$$T(x,t) = U(t)V(x).$$

Po dosazení tohoto tvaru do původní rovnice se úloha rozpadne na dvě obyčejné diferenciální rovnice pro $U(t)$ a $V(x)$, které umíme snadno vyřešit. Získaná řešení pak dle předpokladu vynásobíme a získáme tak hledané řešení. Geometricky tento multiplikativní rozklad znamená, že řešení v čase "nemění svůj tvar", pouze se mění jeho amplituda.

Drobnou nevýhodou Fourierovy metody však je, že ji lze jednoduše použít pouze pro homogenní úlohu, tzn. úlohu s nulovým tepelným zdrojem Q a s nulovými okrajovými podmínkami. Zatímco nulový zdroj v našem příkladu máme, okrajové podmínky jsou nehomogenní. Proto je nejprve třeba provést transformaci úlohy tak, aby okrajové podmínky homogenní byly. Pochopitelně je nelze pouze zrušit, transformace se projeví zeložitěním počáteční podmínky (což však pro použití Fourierovy metody nepředstavuje problém).

Transformace spočívá v následujícím vyjádření, jehož smysl je patrný z obrázku:

$$T(x,t) = \tau(x,t) + k_1 + \frac{k_2 - k_1}{L}x.$$



Od hledané teploty T odečteme lineární funkci tak, aby výsledná funkce τ měla homogenní okrajové podmůnky tak, jak jsme potřebovali. Z hlediska řešení představuje $\tau(x,t)$ časově proměnnou část řešení, odečtená lineární část potom stacionární část řešení. Dosazením do původní rovnice (po troše algebraických úprav a jedné derivaci) získáme následující transofrmovaný problém:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(x,t) - 4\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad x \in (0,6), \quad t \in [0,T].$$

$$\tau(0,t) = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(6,t) + \frac{1}{2}\tau(6,t) = 0$$

$$\tau(x,0) = 20 - \left(20 + \frac{12.5 - 20}{6}x\right) = 1.25x = \overline{\phi(x)},$$

kde jsme dosadili za vypočtené hodnoty $k_1 = 20$, $k_2 = 12.5$, získané dosazením lineární části řešení do obou okrajových podmínek.

Řešme transformovaný problém Fourierovou metodou:

$$\tau(x,t) = U(t)V(x).$$

Dosazením do transformované rovnice dostaneme

$$\dot{U}(t)V(x) - 4V''(x)U(t) = 0,$$

kde pro přehlednost tečkou značíme časovou derivaci a čárkou prostorovou derivaci. Po vydělení výrazem $4U(t)V(x)$ nakonec dostaneme

$$\frac{\dot{U}(t)}{4U(t)} = \frac{V''(x)}{V(x)}.$$

Jelikož levá strana rovnice nezávisí na x a pravá nezávisí na t, mohou se obě strany pro libovolné hodnoty x, t rovnat pouze pokud budou konstantní (tj. nezávislé na x i na t). Označíme-li tuto konstantu k, obdržíme

$$\dot{U}(t) - 4kU(t) = 0,$$
$$V''(x) - kV(x) = 0,$$

tedy dvě obyčejné diferenciální rovnice, jejichž řešení snadno nalezneme elementárními metodami (viz přednášky z matematiky). Řešením první rovnice je zřejmě exponenciální funkce v čase. Je zřejmé, že abychom dostali fyzikálně smysluplné řešení, musí tato exponenciální funkce v čase klesat (jinak by teplota v čase rostla nade všechny meze, což je v rozporu s termodynamickými zákony). Konstanta k proto musí být záporná a pro zdůraznění tohoto faktu je zvykem ji volit ve tvaru $k = -\omega^2$. Řešením druhé rovnice pro $V(x)$ jsou zřejmě kombinace harmonických funkcí. Dostáváme tedy

$$U(t) = C_1 e^{-(2\omega)^2 t},$$
$$V(x) = C_2 \sin(\omega x) + C_3 \cos(\omega x).$$

Celkem po vynásobení dílčích řešení dostáváme hledané řešení ve tvaru

$$\tau(x,t) = e^{-(2\omega)^2 t}[A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)],$$

kde A, B jsou libovolné konstanty, které je třeba určit z okrajových podmínek. Dosazením vychází

$$\tau(0,t) = 0 = Be^{-(2\omega)^2 t} \Rightarrow B = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(6,t) + \frac{1}{2}\tau(6,t) = 0 = A\omega e^{-(2\omega)^2 t}\cos(6\omega) + \frac{1}{2}e^{-(2\omega)^2 t}A\sin(6\omega x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan(6\omega) = -2\omega.$$

Vidíme, že ze druhé okrajové podmínky vznikla nelineární rovnice pro parametr ω (nakreslete si schematicky grafické řešení), kterou je třeba řešit numericky. Prvních pět hodnot ω (kterých je samozřejmě nekonečně mnoho) je

- $\omega_1 = 0.409274$

- $\omega_2 = 0.872156$
- $\omega_3 = 1.367422$
- $\omega_4 = 1.876$
- $\omega_5 = 2.9082$

Poznamenejme pro úplnost, že vypočtené hodnoty ω_n jsou vlastní čísla přidruženého, tzv. Sturmova-Liouvilleova, problému

$$\begin{gathered} V''(x) - kV(x) = 0 \\ V(0) = 0 \\ V'(6) + 0.5V(6) = 0. \end{gathered}$$

Řešením jsou tedy funkce tvaru

$$\tau_n(x,t) = e^{-(2\omega_n)^2 t}\sin(\omega_n x),$$

které tvoří tzv. fundametální systém řešení. Funkce $\sin(\omega_n x)$ jsou příslušné vlastní funkce. Z linearity problému plyne, že je řešením i libovolná lineární kombinace těchto řešení:

$$\sum_{n=1}^{N} A_n \tau_n(x,t) = \sum_{n=1}^{N} A_n e^{-(2\omega_n)^2 t}\sin(\omega_n x).$$

Posledním krokem řešení je zakomponování počáteční podmínky. Sestavené řešení se totiž samozřejmě musí v čase $t=0$ shodovat se zadanou počáteční podmínkou. Jelikož však počáteční podmínka může být dána jako libovolná funkce (můžeme se omezit na spojité funkce, ačkoliv by přípustná třída funkcí mohla být i širší), je evidentní, že ne každou takovou funkci je možné vyjádřit ve tvaru takovéto lineární kombinace. Situace se však změní, pokusíme-li se hledat řešení ve tvaru nekonečné lineární kombinace, tzn. pokusíme -li se jit s $N \to \infty$.

Hledejme tedy řešení ve tvaru nekonečné řady tvaru

$$\tau(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(2\omega_n)^2 t}\sin(\omega_n x).$$

Aby to bylo možné, muselo by v čase $t=0$ platit, že

$$\tau(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n x) = \overline{\phi(x)}.$$

Jinými slovy, podmínkou řešení ve tvaru nekonečné řady je možnost rozvinout počáteční podmínku $\phi(x)$ do "sinové řady". Takové řady jsou speciálním případem tzv. Fourierových řad (na počest Fouriera, který tento problém poprvé tímto způsobem řešil). Každou "dostatečně rozumnou" funkci lze ve Fourierovu řadu rozvést a příslušné koeficienty A_n lze najít s využitím toho, že funkce $\sin(\omega_n x)$ tvoří na intervalu $[0, L]$ ortogonální bázi. Čtenář snadno ověří, že

$$\int_0^L \sin(\omega_n x)\sin(\omega_m x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\omega_n L - 2\sin(\omega_n L)\cos(\omega_n L)}{2\omega_n}, & m = n \end{cases}$$

Pro určení koeficientů A_n stačí vynásobit obě strany $\sin(\omega_m x)$ a zintegrovat od 0 do L. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^6 \overline{\phi(x)}\sin(\omega_m x)\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^6 \sin(\omega_m x)\sin(\omega_n x)\,dx \\ A_n &= \frac{2\omega_n}{\omega_n L - 2\sin(\omega_n L)\cos(\omega_n L)} \int_0^6 \overline{\phi(x)}\sin(\omega_n x)\,dx, \end{aligned}$$

kde $\overline{\phi(x)} = 1.25x$. S takto vypočtenými koeficienty pak získáme postupně řešení transformovaného problému pro $\tau(x,t)$ a následně po přičtení lineární (stacionární) části řešení i pro $T(x,t)$:

$$T(x,t) = \underbrace{20 - 1.25x}_{stacionární\ část-vliv\ okrajových\ podmínek} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n e^{-(2\omega_n)^2 t}}_{"amplituda"} \underbrace{\sin(\omega_n x)}_{"tvar"}}_{nestacionární\ část-vliv\ počáteční\ podmínky}.$$

Graf přesného řešení (technicky vzato nejde o zcela přesné řešení, protože není možné uvažovat nekonečně mnoho členu řady. Prvních pět členu však aproximuje přesné řešení s velkou přesností) je vynesen červenou barvou pro porovnaní s řešením získaným mkp. Všimněte si, že s rostoucím časem se počáteční podmínka vlivem difúze "rozpustí" a zůstane jen lieární část řešení, která představuje časově nezávislou složku řešení. Ta je určena okrajovými podmínkami a shoduje se s lineární funkcí, kterou jsme na začátku odečitali v rámci transformace na homogenní okrajové podmínky.

Diskretizovaná úloha

Po diskretizaci slabé formulace naší původní úlohy metodou konečných prvků je třeba na každém prvku sestavit následující členy (POZOR, v našem příkladu se nevyskytují všechny teoreticky možné členy - viz přednáška):

$$\boldsymbol{P}_\Omega^e \dot{\boldsymbol{r}}^e + \left(\boldsymbol{K}_\Omega^e + \boldsymbol{K}_\Gamma^e\right) \boldsymbol{r}^e = f_\Gamma^e$$

- Levá strana
  - Matice vodivosti K_Ω^e
  $$\boldsymbol{K}_\Omega^e = \int_\Omega \boldsymbol{B}^{eT} \lambda \, \boldsymbol{B}^e \, dx$$
  - Příspěvek do matice vodivosti od přestupu tepla K_Γ^e
  $$\boldsymbol{K}_\Gamma^e = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{N}^{eT} \alpha \boldsymbol{N}^e \, ds$$
  - Matice kapacity P_Ω^e
  $$\boldsymbol{P}_\Omega^e = \int_\Omega c_v \rho \, \boldsymbol{N}^{eT} \boldsymbol{N}^e \, dx$$
- Pravá strana
  - Tepelný tok vlivem přestupu tepla f_Γ^e
  $$f_\Gamma^e = \int_{\Gamma_p} \boldsymbol{N}^{eT} \alpha T_o \, ds$$

Numerická integrace v čase

Pro diskretizaci teploty v čase použijeme metodu konečných diferencí. Konkrétní odvození vychází z věty o střední hodnotě:

$$\int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{r}}(t) \, dt = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)\right) = \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{r}}(\xi)\Delta t, \quad \xi \in [t, t+\Delta t].$$

Z toho plyne

$$\boldsymbol{P}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{r}(\xi) + \boldsymbol{F},$$

kde jsme do $\boldsymbol{K}$ zahrnuli matici vodivosti spolu s maticí vzniklou od přestupu tepla a do $\boldsymbol{F}$ veškeré zatížení (v našem případě sestávající pouze z vektoru od přestupu tepla). Konečně vyjádříme-li mezilehlý bod jako,

$$\xi = \gamma(t+\Delta t) + (1-\gamma)t$$

kde $\gamma \in [0, 1]$, a předpokládáme-li, že Δt je dostatečně malé, aby

$$\boldsymbol{r}(\gamma(t+\Delta t) + (1-\gamma)t) \approx \gamma\boldsymbol{r}(t+\Delta t) + (1-\gamma)\boldsymbol{r}(t),$$

dostaneme po přeuspořádaní členů

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{P} + \gamma\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{r}_{t+\Delta t} = \left[\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{P} - (1-\gamma)\boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{r}_t + (1-\gamma)\boldsymbol{F}_t + \gamma\boldsymbol{F}_{t+\Delta t}$$

kde Δt je délka časového kroku. Parametr γ ovlivňuje stabilitu a přesnost výpočtu, některé hodnoty odpovídají konkrétním metodám numerické integrace

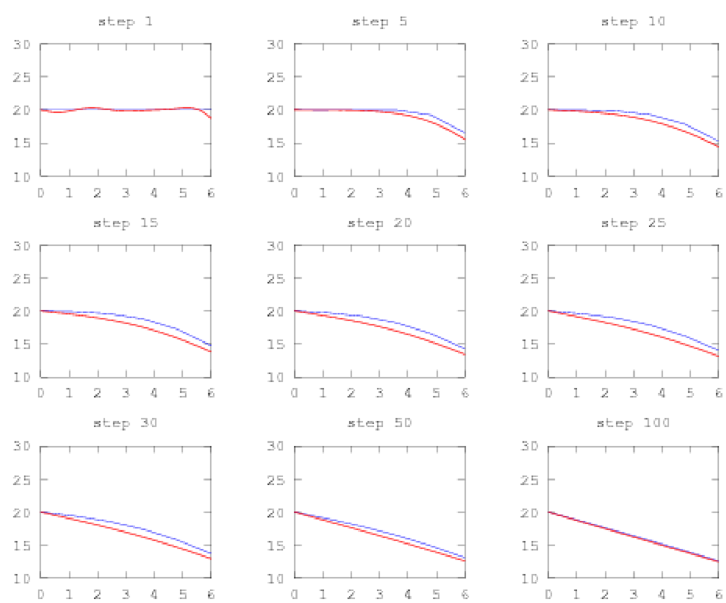
- $\gamma = 0$: Dopředná diference (Eulerova metoda), podmínečně stabilní
- $\gamma = \frac{1}{2}$: Metoda Crank-Nicolson, nepodmínečně stabilní
- $\gamma = \frac{2}{3}$: Galerkinova metoda, nepodmínečně stabilní
- $\gamma = 1$: Zpětná diference, nepodmínečně stabilní

Poznamenejme, že pro $\gamma \geq 0.5$ je metoda nepodmíněně stabilní a teoreticky neexistuje žádná omezující podmínka na velikost časového kroku. Pro $\gamma \leq 0.5$ je metoda pouze podmíněně stabilní a volbu kroku je nutno volit s ohledem na splnění jisté stabilitní podmínky, viz níže.

In [51]:

```
n = 5;
L = 6;
l = L/n;
t_end = 10;
A = 1.0;
lambda = 4;
x1 = 0; x2 = L/n;
alpha = 2; % film coefficient
c = 1; % Thermal capacity
T_o = 10; % Ambient temperature
T_1 = 20;
ro = 1; % Density

dt = 0.1; % Time step
gamma = 2/3; % Numerical integration parameter

ki = (lambda/l)*[1 -1; -1 1];
pi = c*ro*A*l/6*[2 1; 1 2];
fo = 0.0*[(x2*x2-x2^2/2)/l (x2^2/2)/l];
k_gamma = alpha * [0 0; 0 1];
f_alpha = alpha * T_o *[0 1];

K = zeros (n+1);
P = zeros (n+1);
F = zeros (n+1, 1);
for i=1:n
    loc = [i i+1];
    K(loc, loc) += ki;
    P(loc, loc) += pi;
    F(loc)+= fo';
end
F([n n+1]) += f_alpha';
K([n n+1], [n n+1]) += k_gamma;

MK_L = 1/dt*P+gamma*K;
MK_R = 1/dt*P-(1-gamma)*K;



%u = K(2:n+1, 2:n+1)\(F(2:n+1,1));
%U = [0 ; u]


N = t_end / dt;
T_init = 20 * ones(n+1, 1);
T_history = zeros(n+1, N+1);
T_history(:,1) = T_init;
r = K*T_history(:,end)-F;

% Time integration loop
for i=1:N
  if i == 1
    T_curr = T_init;
  else
    T_curr = T_history(:,i-1);
  end
  RHS = F + MK_R*T_curr - T_1*MK_L(:,1);
  T_next = [T_1; MK_L(2:end,2:end)\RHS(2:end)];
  T_history(:,i+1) = T_next;
endfor;
T_history(:,i);


function [u_ex] = plot_ex_sol(x,t,kappa,n)
u_ex = zeros(n,1);
w_1 = 0.409274;
w_2 = 0.872156;
w_3 = 1.367422;
w_4 = 1.876;
w_5 = 2.9082;
coeff_1 = 18.9071;
coeff_2 = -5.7026;
coeff_3 = 2.5114;
```

```
coeff_4 = -1.37262;
coeff_5 = -0.58308;
w = [w_1; w_2; w_3; w_4; w_5];
coeff = [coeff_1, coeff_2, coeff_3,coeff_4,coeff_5 ];
for i = 1:n
  for j = 1:5
    a_j = (2*w(j)  / (6*w(j) - sin(w(j)*6)*cos(w(j)*6)) )*coeff(j);
    u_ex(i) = u_ex(i) + a_j * exp(-1.0*(w(j)*kappa)^2*t)*sin(w(j)*x(i));
  end
  u_ex(i) = u_ex(i) + 20 - 1.25*x(i);
end
plot(x,u_ex,'-r','LineWidth',2)
end



%for i = 1:4:N
%  %plot(0:n:4, T_history(:,1), "b;T2 dt=0.1;")
%  plot(0:l:L, T_history(:,i))
%  hold on;
%  plot_ex_sol(0:L/(10*n):L,(i)*dt,sqrt(lambda/(c*ro)),10*n+1);
%  %waitforbuttonpress
%  hold off;
%  %plot(0:dt:t_end, T_history(3,:), "r;T3 dt=0.1;")
%  %plot(0:dt:t_end, r(1,:), "g;q1 dt=0.1;")
%end


stepstoplot = [1 5 10 15 20 25 30 50 100];
for i = 1:9
  subplot(3,3,i);
  plot(0:l:L,T_history(:,stepstoplot(i)));
  hold on
  plot_ex_sol(0:L/(10*n):L,(stepstoplot(i)-1)*dt,sqrt(lambda/(c*ro)),10*n+1);
  ylim([10 30]);
  title(sprintf("step %d",stepstoplot(i)))
endfor
```



Řešení nestacionární úlohy explicitní metodou

Při řešení explicitní metodou je stabilita výpočtu podmíněna délkou časového kroku. Maximální délka kroku pro podmínečně stabilní metody $\left(\gamma < \frac{1}{2}\right)$ se stanoví jako

$$\Delta t = \frac{2}{(1-2\gamma)\lambda_{max}}$$

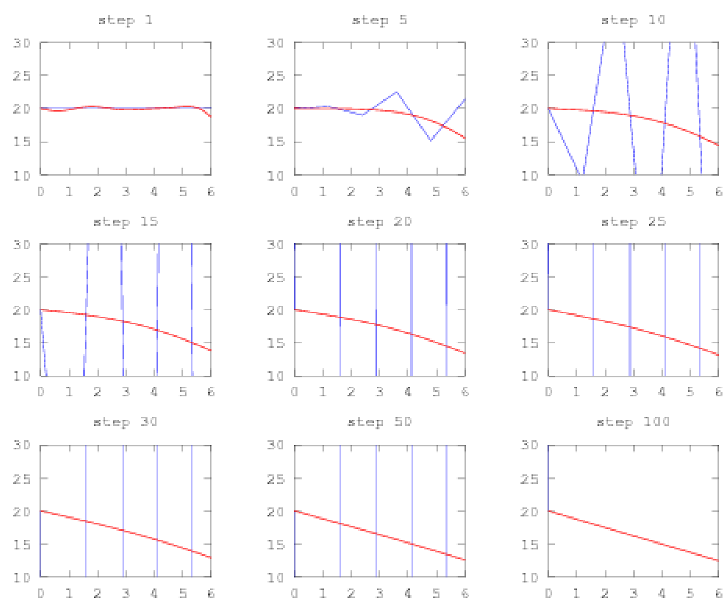
kde λ_{max} je největší vlastní číslo rovnice

$$(\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{M})r = 0$$

In [52]:

```
n = 5;
L = 6;
l = L/n;
t_end = 10;
A = 1.0;
lambda = 4;
x1 = 0; x2 = L/n;
alpha = 2; % film coefficient
c = 1; % Thermal capacity
T_o = 10; % Ambient temperature
T_1 = 20;
ro = 1; % Density

dt = 0.1; % Time step - UNSTABLE
%dt = 0.05; % STABLE
gamma = 0.0; % Numerical integration parameter

ki = (lambda/l)*[1 -1; -1 1];
pi = c*ro*A*l/6*[2 1; 1 2];
fo = 0.0*[(x2*x2-x2^2/2)/l (x2^2/2)/l];
k_gamma = alpha * [0 0; 0 1];
f_alpha = alpha * T_o *[0 1];

K = zeros (n+1);
P = zeros (n+1);
F = zeros (n+1, 1);
for i=1:n
    loc = [i i+1];
    K(loc, loc) += ki;
    P(loc, loc) += pi;
    F(loc)+= fo';
end
F([n n+1]) += f_alpha';
K([n n+1], [n n+1]) += k_gamma;

MK_L = 1/dt*P+gamma*K;
MK_R = 1/dt*P-(1-gamma)*K;



%u = K(2:n+1, 2:n+1)\(F(2:n+1,1));
%U = [0 ; u]


N = t_end / dt;
T_init = 20 * ones(n+1, 1);
T_history = zeros(n+1, N+1);
T_history(:,1) = T_init;
r = K*T_history(:,end)-F;

% Time integration loop
for i=1:N
  if i == 1
    T_curr = T_init;
  else
    T_curr = T_history(:,i-1);
  end
  RHS = F + MK_R*T_curr - T_1*MK_L(:,1);
  T_next = [T_1; MK_L(2:end,2:end)\RHS(2:end)];
  T_history(:,i+1) = T_next;
endfor;
T_history(:,i);


function [u_ex] = plot_ex_sol(x,t,kappa,n)
u_ex = zeros(n,1);
w_1 = 0.409274;
w_2 = 0.872156;
w_3 = 1.367422;
w_4 = 1.876;
w_5 = 2.9082;
coeff_1 = 18.9071;
coeff_2 = -5.7026;
```

```
coeff_3 = 2.5114;
coeff_4 = -1.37262;
coeff_5 = -0.58308;
w = [w_1; w_2; w_3; w_4; w_5];
coeff = [coeff_1, coeff_2, coeff_3,coeff_4,coeff_5 ];
for i = 1:n
  for j = 1:5
    a_j = (2*w(j)  / (6*w(j) - sin(w(j)*6)*cos(w(j)*6)) )*coeff(j);
    u_ex(i) = u_ex(i) + a_j * exp(-1.0*(w(j)*kappa)^2*t)*sin(w(j)*x(i));
  end
  u_ex(i) = u_ex(i) + 20 - 1.25*x(i);
end
plot(x,u_ex,'-r','LineWidth',2)
end



for i = 1:4:N
  %plot(0:n:4, T_history(:,1), "b;T2 dt=0.1;")
  plot(0:l:L, T_history(:,i))
  hold on;
  plot_ex_sol(0:L/(10*n):L,(i)*dt,sqrt(lambda/(c*ro)),10*n+1);
  %waitforbuttonpress
  hold off;
  %plot(0:dt:t_end, T_history(3,:), "r;T3 dt=0.1;")
  %plot(0:dt:t_end, r(1,:), "g;q1 dt=0.1;")
end


stepstoplot = [1 5 10 15 20 25 30 50 100];
for i = 1:9
  subplot(3,3,i);
  plot(0:l:L,T_history(:,stepstoplot(i)));
  hold on
  plot_ex_sol(0:L/(10*n):L,(stepstoplot(i)-1)*dt,sqrt(lambda/(c*ro)),10*n+1);
  ylim([10 30]);
  title(sprintf("step %d",stepstoplot(i)))
endfor
```



In [ ]: