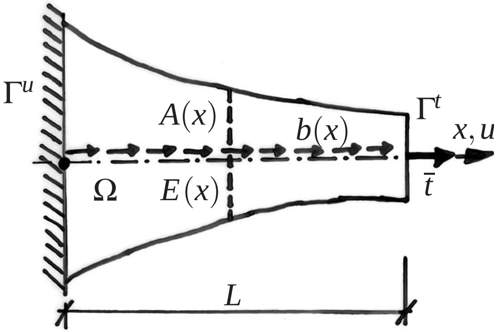
Přednáška č. 2 - Slabé řešení
Galerkinova Metoda, tažený-tlačený prut v 1D

Zavedení značení, základní rovnice

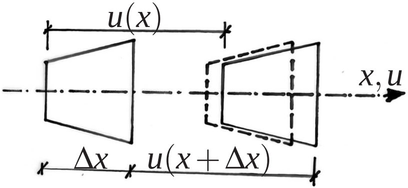


- Uvažujme jednorozměrný problém elastického, taženého - tlačeného prutu na oblasti $\Omega = (0, L)$ s hranicí $\Gamma = \{0, L\}$,
- Prut je vystaven:
  - spojitému objemovému zatížení $b(x)$
  - předepsaným posunům na části hranice Γ^u $(x = 0)$
  - předepsaným napětím na hranici Γ^t $(x = L)$
- Materiálové parametry: Modul pružnosti $E(x)$
- Charakteristika průřezu: Průřezová plocha $A(x)$

Zavedení značení, základní rovnice

Kinematika ($\mathcal{K}$)

- Posunutí v daném bodě $u(x)$
- Deformace $\varepsilon(x)$ tělesa ($x \in \Omega$)

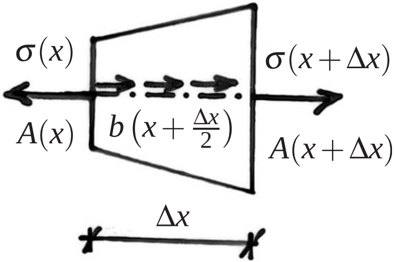


$$
\begin{aligned}
\varepsilon(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \bar{x} - \Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x + u(x + \Delta x) - u(x) - \Delta x}{\Delta x} \\
&= \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

- Okrajové podmínky: $u(x) = \overline{u}(x)$ pro $x \in \Gamma^u$

Zavedení značení, základní rovnice

Podmínky rovnováhy ($\mathcal{E}$)

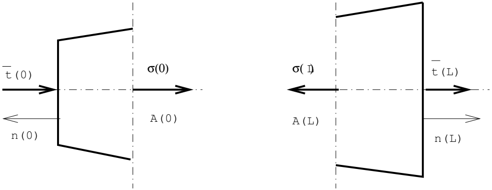


- Uvnitř tělesa Ω ($x \in \Omega$)

$$
\begin{aligned}
\rightarrow: -\sigma(x)A(x) + b(x + \frac{\Delta x}{2})\Delta x + \sigma(x+\Delta x)A(x+\Delta x) &= 0 \\
\frac{\sigma(x+\Delta x)A(x+\Delta x) - \sigma(x)A(x)}{\Delta x} + b(x + \frac{\Delta x}{2}) &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sigma(x)A(x)\big) + b(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Zavedení značení, základní rovnice

Podmínky rovnováhy ($\mathcal{E}$) a konstitutivní rovnice ($\mathcal{C}$)



- Na hranici ($x \in \Gamma$)

$$\rightarrow: \bar{t}(0) + \sigma(0)A(0) = 0 \qquad \rightarrow: -\sigma(L)A(L) + \bar{t}(L) = 0$$

$$\sigma(x)A(x)n(x) - \bar{t}(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in \Gamma^t$$

- Konstitutivní rovnice (Hookův zákon) ($x \in \Omega$)

$$\sigma(x) = E(x)\varepsilon(x)$$

Zavedení značení, základní rovnice

- Deformační varianta (formulace v posunech) ($x \in \Omega$)

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K} & \to & \mathcal{C} & \to & \mathcal{E} \\ \varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) & \to & \sigma(x) = E(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) & \to & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(E(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)A(x)\right) + b(x) = 0 \end{array}$$

Hledáme řešení $u(x)$ dostatečně hladké, tak aby splňovalo:

- Pro $x \in \Omega$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\right) + b(x) = 0,$$

- pro $x \in \Gamma^u$: $u(x) = \overline{u}(x)$.
- pro $x \in \Gamma^t$: $E(x)A(x)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)n(x) = \bar{t}(x)$.

Takové pole posunutí $u(x)$ které splňuje tyto rovnice se nazývá *silné řešení*.

Formulace slabého řešení pro tažený-tlačený prut

Příprava

- Integrace per partes

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= [f(x)g(x)]_0^L - \int_0^L f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x \\
\int_\Omega \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_\Gamma f(x)g(x)n(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

- Definujme reziduum řešení pro danou funkci $v(x)$

$$
\begin{aligned}
x \in \Omega &: \quad r\left(v(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x)\Big) + b(x) \\
x \in \Gamma^u &: \quad r\left(v(x)\right) = \bar{u}(x) - v(x) \\
x \in \Gamma^t &: \quad r\left(v(x)\right) = \bar{t}(x) - E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x)n(x)
\end{aligned}
$$

- Pokud $v(x) \equiv u(x)$ máme $r(x) \equiv 0$

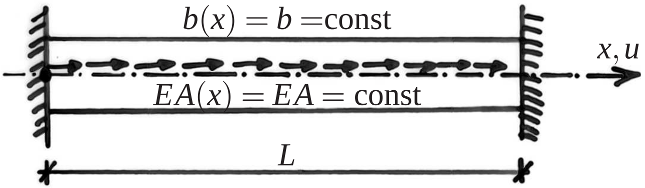
Formulace slabého řešení pro tažený-tlačený prut

Metoda vážených reziduí

- Jak zjistíme, že $v(x)$ je řešením?
- Idea metody vážených reziduí: Zvolme libovolnou funkci $\delta u(x)$ (tzv. váhová funkce (test, weight function)) a spočtěme

$$\int_\Omega \delta u(x) r(v(x))\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \delta u(x) r(v(x))\,\mathrm{d}x.$$

  Jestliže hodnota integrálu bude rovna nule pro **všechny** váhové funkce $\delta u(x)$, potom $v(x)$ je řešením problému.
- Příklad:



Formulace slabého řešení pro tažený-tlačený prut

- Pro náš problém, řešení $u(x)$ musí splňovat:

$$\int_\Omega \delta u(x) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\right) + b(x) \right)\, \mathrm{d}x = 0$$

- Intergací per partes:

$$\begin{aligned} & \int_\Gamma \delta u(x) E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)n(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{\mathrm{d}\delta u}{\mathrm{d}x}(x)E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x \\ + & \int_\Omega \delta u(x) b(x)\,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

- Výrazy na hranici:

$$\int_{\Gamma^u} \underbrace{\delta u(x)}_{=0} E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma^t} \delta u(x)\underbrace{E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)n(x)}_{=\bar{t}}\,\mathrm{d}x$$

Formulace slabého řešení pro tažený-tlačený prut

Hledáme $u(x)$ [dostatečně integrovatelné], $u(x) = \overline{u}(x)$ pro $x \in \Gamma^u$ takové, aby:

$$\int_\Omega \frac{\mathrm{d}\delta u}{\mathrm{d}x}(x) E(x) A(x) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \delta u(x) b(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma^t} \delta u(x) \bar{t}(x)\,\mathrm{d}x$$

pro libolné $\delta u(x)$ [dostatečně integrovatelné], kde $\delta u(x) = 0$ pro $x \in \Gamma^u$. Taková funkce $u(x)$ se nazývá *slabé řešení problému*.

- Proč "slabé" řešení?
  - $u(x)$ musí být pouze dostetečně "integrovatelná", požadavky na spojitost jsou menší [$C^2(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$]
  - Silné řešení (řešení dif. rovnice) $\Rightarrow$ slabé řešení
  - Dovoluje flexibilní numerické řešení
- Pro vlastní numerickou realizaci potřebujeme:
  - vhodné vyjádření (parametrizace) vlastního řešení a váhových funkcí,
  - vhodná numerická metoda pro výpočet integrálů

Lagrangeův princip minima potenciální energie

Volitelná látka

Ze všech kinematicky přípustných stavů pružného tělesa nastává ten, který dává potenciální energii systému minimální hodnotu

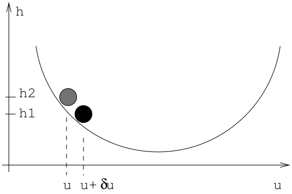
$$\Pi = E_i + E_e = min,$$

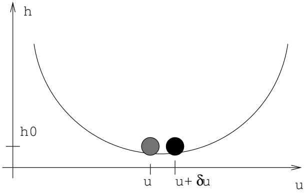
$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma\varepsilon \, d\Omega \\ E_e &= -\int_\Omega ub \, d\Omega - \int_{\Gamma^t} u\bar{t} \, d\Gamma \end{aligned}$$

Π je funkcionál (funkce funkcí). Jak se bude měnit hodnota Π, když se bude měnit $u(x)$? Malou změnu funkce budeme nazývat její variací a vyjádříme ji jako $\delta u(x) = \xi w(x)$, kde $w(x)$ je libovolná funkce a ξ malé nezáporné číslo. Odpovídající změna funkcionálu, která se nazývá jeho variací je definována jako

$$\delta\Pi = \Pi(u(x) + \xi w(x)) - \Pi(u(x)) \equiv \Pi(u(x) + \delta u(x)) - \Pi(u(x)).$$

My hledáme minimum, tedy variace musí být nulová a tedy $\delta\Pi = 0$.





Pro náš případ

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \frac{1}{2}\int AE\left(\frac{du}{dx}+\xi\frac{dw}{dx}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int AE\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \\ &\quad - \int (u+\xi w)b\,dx - \int (u+\xi w)\bar{t}\,d\Gamma + \int (u)b\,dx + \int (u)\bar{t}\,d\Gamma \\ &= \frac{1}{2}\int AE\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\xi\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} + \xi^2\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right) dx \\ &\quad -\frac{1}{2}\int AE\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \xi\int wb\,dx - \xi(w\bar{t})|_\Gamma\end{aligned}$$

$$\delta\Pi = \xi\int AE\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}\,dx - \xi\int wb\,dx - \xi(w\bar{t})|_\Gamma$$

Hledáme minimum, tedy variace musí být nulová a dostáváme $\delta\Pi = 0$. Dosazením z předchozích výrazů a podělením ξ máme

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi\xi &= \int_\Omega AE\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}\,dx - \int_\Omega wb\,dx - (w\bar{t})|_\Gamma = 0 \\
\delta\Pi &= \int_\Omega AE\frac{d\delta u}{dx}\frac{du}{dx}\,dx - \int_\Omega \delta ub\,dx - (\delta u\bar{t})|_\Gamma = 0
\end{aligned}
$$

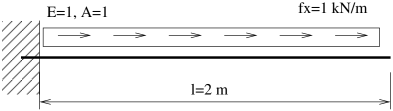
To lze dále pomocí konstitutivních vztahů zjednodušit

$$
\boxed{\delta\Pi = \int_\Omega A\sigma\delta\varepsilon\,dx - \int_\Omega \delta ub\,dx - (\delta u\bar{t})|_\Gamma = 0}
$$

A to je známý “Princip virtuálních posunutí”.
Všimněte si ekvivalence výrazů z první části přednášky a těch právě odvozených.

Příklad: tažený-tlačený prut

Silné řešení



Hledáme $u(x)$, které splňuje

$$EA\left(\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}\right)+1, \quad x\in(0,2), \;\; u(0)=0, \; N(2)=AE\frac{\mathrm{d}u(2)}{\mathrm{d}x}=0$$

- Integrací postupně dostaneme:

$$EA\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}+1x+C_1=0, \qquad EAu(x)+1\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2=0$$

- Integrační konstanty C_1 a C_2 určíme z okrajových podmínek:

$$u(0)=0:C_2=0, \qquad N(2)=0:AE\frac{\mathrm{d}u(2)}{\mathrm{d}x}=-C_1-2=0:C_1=-2$$

- Konečně tedy dostáváme:

$$u(x)=\frac{1}{EA}(2x-x^2/2), \quad N(x)=AE\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}=2-x$$

Příklad: tažený-tlačený prut

Slabé řešení - lineární aproximace

Hledáme $u(x)$ [dostatečně integrovatelné], $u(0) = 0$ takové, aby:

$$\int_0^2 EA \frac{\mathrm{d}\delta u}{\mathrm{d}x}(x) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \delta u(x) 1\,\mathrm{d}x$$

pro libolné $\delta u(x)$ [dostatečně integrovatelné], kde $\delta u(0) = 0$

- Hledané řešení a váhovou funkci vyjádřeme jako:

$$u(x) = ax + b, \quad \delta u(x) = cx + d$$

- Z podmínky $u(0) = 0$ plyne $b = 0$,
- Z podmínky $\delta u(0) = 0$ pak $d = 0$,

Příklad: tažený-tlačený prut

Slabé řešení - lineární aproximace

- Zvolenou aproximaci řešení a váhové funkce dosadíme do slabého řešení:

  $$\int_0^2 ac\,\mathrm{d}x - \int_0^2 cx\,\mathrm{d}x = 0$$

  Provedením integrace

  $$2ac - 2c = 0$$

  Všimněte si, že každý člen obsahuje konstantu c která je libovolná (vyjadřuje variabilitu volby váhové funkce).

  $$c(2a - 2) = 0$$

  Protože $c \neq 0$, pak výraz v závorce musí být roven 0:

  $$2a - 2 = 0 \;\Rightarrow\; a = 1$$

- Konečně tedy dostáváme

  $$u(x) = x, \quad N(x) = EA\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$$

Příklad: tažený-tlačený prut

Slabé řešení - kvadratická aproximace

- Nyní hledané řešení a váhovou funkci vyjádřeme jako:

$$u(x) = ax^2 + bx + c, \quad \delta u(x) = cx^2 + dx + e$$

- $u(0) = 0 \Rightarrow c = 0, \quad \delta u(0) = 0 \Rightarrow e = 0,$
- Zvolenou aproximaci u a δu dosadíme do slabého řešení:

$$\int_0^2 (2cx + d)(2ax + b)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 (cx^2 + dx)\,\mathrm{d}x = 0$$

Provedením integrace

$$32ca/3 + 4cb + 4da + 2db - 8c/3 - 2d = 0$$

Všimněte si, že každý člen obsahuje konstantu c nebo d které jsou libovolné (vyjadřují variabilitu volby váhové funkce).

$$c(32a/3 + 4b - 8/3) + d(4a + 2b - 2) = 0$$

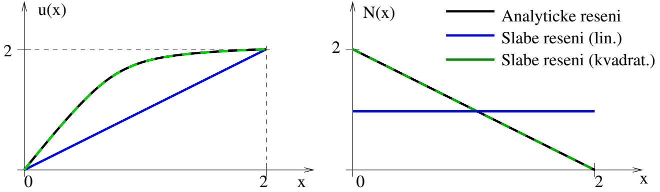
Příklad: tažený-tlačený prut

Slabé řešení - kvadratická aproximace, porovnání

$$c(32a/3 + 4b - 8/3) + d(4a + 2b - 2) = 0$$

- Protože $c \neq 0,\ d \neq 0,\ \ c \neq d$, pak výrazy v závorce musí být rovny 0. Ty tvoří soustavu lineárních rovnic pro konstanty a, b . Rešením obdržíme $a = -1/2,\ b = 2$
- Konečně tedy dostáváme

$$u(x) = \frac{1}{EA}(2x - x^2/2), \quad N(x) = AE\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = 2 - x$$



Příklad: tažený-tlačený prut

Metoda konečných diferencí

Položme $x_0 \equiv a$ a $x_{N+1} \equiv b$. Vložíme mezi a a b body $x_1, \ldots, x_n$.
Budeme hledat aproximaci řešení v uvedených bodech.
Nejjednodušší je ekvidistantní krok
$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = (b-a)/(N+1) = h$.
Derivace lze nahradit konečnými diferencemi různě. Například

- dopředná diference $\frac{du}{dx}(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$
- centrální diference $\frac{du}{dx}(x) \approx \frac{u(x+h/2)-u(x-h/2)}{h}$
- Pro druhou derivaci platí
  $u''(x) \approx \frac{u'(x+h/2)-u'(x-h/2)}{2} = \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x+h)}{h^2}$, kde např.
  $u'(x+h/2) \approx \frac{u(x+h/2+h/2)-u(x+h/2-h/2)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$.

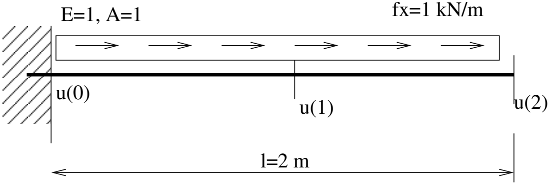
Příklad: tažený-tlačený prut

Metoda konečných diferencí - chyba aproximace

- dopředná diference $\frac{du}{dx}(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$, protože platí $u(x+h) \approx u(x) + u'(x)h + u''(x)h^2/2 + \dots$ a odtud $u'(x) - \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u''h/2 + \dots = O(h)$ jde tedy o metodu prvního řádu přesnosti.
- centrální diference $\frac{du}{dx}(x) \approx \frac{u(x+h/2)-u(x-h/2)}{h}$, kde např. (Taylorův rozvoj): $u'(x+h/2) = u'(x) + \frac{u''(x)}{2!}\frac{h^2}{4} + \frac{u'''(x)}{3!}\frac{h^3}{8} + \dots$ pro chybu aproximace tedy platí $u'(x) - \frac{u(x+h/2)-u(x-h/2)}{h} =$ $u'(x) - \frac{u(x)+u'(x)\frac{h}{2}+\frac{u''(x)}{2!}(\frac{h}{2})^2+\frac{u'''(x)}{3!}(\frac{h}{2})^3-\left(u(x)+u'(x)\frac{-h}{2}+\frac{u''(x)}{2!}(\frac{-h}{2})^2+\frac{u'''(x)}{3!}(\frac{-h}{2})^3\right)}{h} =$ $\frac{u'''(x)}{3!}\frac{h^2}{8} + \dots = O(h^2)$ jde tedy o metodu druhého řádu přesnosti.

Příklad: tažený-tlačený prut

Rešení



$$EA\frac{d^2u}{dx^2} + b(x) = 0, kde\ u(0) = 0;\ N(l) = EA\frac{du}{dx}(l) = 0$$

$$x = 0 : u(0) = 0$$
$$x = 1 : EA\left(\frac{u(2)-2u(1)+u(0)}{1}\right) + 1 = 0$$
$$x = 2 : EA\left(\frac{u(3)-2u(2)+u(1)}{1}\right) + 1 = 0;\quad u'(2) = 0 \Rightarrow u(3) = u(1)$$

$$\begin{array}{c} u(2) - 2u(1) + 1 = 0 \\ 2u(1) - 2u(2) + 1 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} u(1) = 1.5 \\ u(2) = 2.0 \end{array}$$

Verze 1 Puvodní anglická verze [J. Zeman (jan.zeman@fsv.cvut.cz)]

Verze 2 Česká verze, modifikováno odvození deformace, doplněn princip minima potenciální energie + drobné doplňky [B. Patzák (borek.patzak@fsv.cvut.cz)]

Verze 3 Opraven obrázek u podmínek rovnováhy na hranici, doplněny chybějící členy ve variaci funkcionálu [B. Patzák (borek.patzak@fsv.cvut.cz)]

Verze 4 Doplnění příkladu [B. Patzák (borek.patzak@fsv.cvut.cz)]