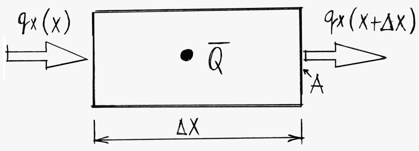
Řešení časově evolučních procesů - jednorozměrné nestacionární vedení tepla

B. Patzák (borek.patzak@fsv.cvut.cz), verze 01

Diferenciální rovnice problému

Bilance energie

Při přenosu tepla protéká tepelný tok objemovým elementem. Bilance energie v kontrolním objemu (Δx) za jednotku času Δt):



$$c_v dm \Delta T = \overbrace{q_x(x)A(x)}^{\text{vstup}} - \overbrace{q_x(x+\Delta x)A(x+\Delta x)}^{\text{výstup}} + \overbrace{\overline{Q}(x+\frac{\Delta x}{2})\Delta x A(x+\frac{\Delta x}{2})}^{\text{zdroj}}$$

- c_v je měrná tepelná kapacita materiálu, výjadřuje množství tepla na hmotnosti objemu, potřebné k jeho změně o jeden stupeň $[J\ kg^{-1} K^{-1}]$
- $dm = \rho \Delta x \Delta y$ je diferenciál hmotnosti kontrolního objemu
- Ostatní členy - viz. přednáška o stacionárním vedení tepla

Úpravou, uvažováním Fourierova zákona $q(x) = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$ a limitním přechodem pro $\Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0$:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \overline{Q}$$

Okrajové a počáteční podmínky

- Předepsaná teplota na hranici - Dirichletovská okrajová podmínka:

$$T(x) = \overline{T}(x) \quad \text{pro} \quad x \in \Gamma_T$$

- Předepsaný tepelný tok

$$q_x(x)n(x) = \overline{q}_x(x) \quad \text{pro} \quad x \in \Gamma_{\overline{q}}$$

- Počáteční podmínky $T(x, 0) = \bar{T}_0(x)$

Slabé řešení

Základní přístupy k formulaci slabého řešení

- diskretizace celé časoprostorové oblasti - časoprostorové prvky
- časová diskretizace metodou vážených reziduí
- časová diskretizace direnčními schémata

Poslední dva přístupy představují algoritmicky výhodnou variantu (podstatně menší paměťové nároky).

Diskretizace podle prostorových proměnných

$$\int_\Omega \delta T \left(\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \overline{Q} \right) \, d\Omega = 0$$

Integrací per-partes u druhého členu:

$$\int_\Omega \delta T \left(\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} \right) \, d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial \delta T}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \, d\Omega - \int_\Gamma \delta T \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \, d\Omega - \int_\Omega \delta T \bar{Q} \, d\Omega$$

Diskretizace podle prostorových proměnných

- Uvažujme dělení oblasti Ω na n konečných prvků Ω^e
- Na každém prvku e, zavedeme *lokální* apoximaci

$$T^e(x) \approx \boldsymbol{N}^e(x)\boldsymbol{r}^e, \frac{\partial T^e}{\partial x}(x) \approx \boldsymbol{B}^e(x)\boldsymbol{r}^e,$$
$$\delta T^e(x) \approx \boldsymbol{N}^e(x)\boldsymbol{w}^e, \frac{\partial \delta T^e}{\partial x}(x) \approx \boldsymbol{B}^e(x)\boldsymbol{w}^e$$

- Dosazením do slabého řešení: Pro všechna $\boldsymbol{w}^e$ taková, že $\boldsymbol{w}^e = 0$ na Γ_T

$$\sum_{e=1}^{n} w^{eT} \Bigg(\overbrace{\int_{\Omega^e} \boldsymbol{N}^{eT} \rho c_v \boldsymbol{N}^e \, d\Omega}^{\boldsymbol{P}_{e,\Omega}} \frac{\partial T^e}{\partial t} + \overbrace{\int_{\Omega^e} \boldsymbol{B}^e(x)^{\mathsf{T}} \lambda^e(x) \boldsymbol{B}^e(x) dx}^{\boldsymbol{K}_{e,\Omega}} \boldsymbol{r}^e + \overbrace{\int_{\Gamma^e_{qc}} \boldsymbol{N}^e(x)^{\mathsf{T}} \alpha^e(x) \boldsymbol{N}^e(x) \, ds}^{\boldsymbol{K}_{e,\Gamma}} \boldsymbol{r}^e$$
$$- \overbrace{\int_{\Gamma^e_{qc}} \boldsymbol{N}^e(x)^{\mathsf{T}} \alpha(x) \boldsymbol{N}^e(x) \boldsymbol{T}^e_0 \, ds}^{\boldsymbol{f}_{e,\Gamma_c}} + \overbrace{\int_{\Gamma^e_{qp}} \boldsymbol{N}^e(x)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{N}^e(x) \boldsymbol{q}_e \, ds}^{-\boldsymbol{f}_{e,\Gamma_p}} - \overbrace{\int_{\Omega^e} \boldsymbol{N}^e(x)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{N}^e(x) \boldsymbol{Q}_e \, ds}^{\boldsymbol{f}_{e,\Omega}} \Bigg) = 0$$

pro všechna δT taková, že $\delta T = 0$ na Γ_T.

Uvažujme aproximaci řešení na časovém intervalu $[t, t + \Delta t]$ ve tvaru

$$\boldsymbol{r}^e = (1 - \tau)\boldsymbol{r}^e_t + \tau \boldsymbol{r}^e_{t+\Delta t}, \quad \tau \in [0, 1]$$

Stejným způsobem aproximujeme i vektory okrajových podmínek

$$\boldsymbol{f}^e = (1 - \tau)\boldsymbol{f}^e_t + \tau \boldsymbol{f}^e_{t+\Delta t}, \quad \tau \in [0, 1]$$

Časovou derivaci vyjádříme pomocí následující diferenční náhrady

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^e}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{r}^e_{t+\Delta t} - \boldsymbol{r}^e_t)$$

Po dosazení do slabého řešení (s provedenou prostorovou diskretizací)

$$\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{P}^e(\boldsymbol{r}^e_{t+\Delta t} - \boldsymbol{r}^e_t) + \ \boldsymbol{K}^e\left((1-\tau)\boldsymbol{R}^e_t + \tau\boldsymbol{r}^e_{\Delta t}\right) = (1-\tau)\boldsymbol{f}^e_t + \tau\boldsymbol{f}^e_{t+\Delta t}$$

Po úpravě obdržíme

$$\left(\tau\boldsymbol{K}^e + \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{r}^e_{t+\Delta t} =$$
$$\left(-(1-\tau)\boldsymbol{K}^e + \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{P}^e\right)\boldsymbol{r}^e_t + (1-\tau)\boldsymbol{f}^e_t + \tau\boldsymbol{f}^e_{t+\Delta t}$$

Poslední rovnice představuje rekurentní vztah pro výpočet uzlových hodnot teploty. Pokud známe počáteční hodnoty, lze opakovaným použitím této rovnice stanovit řešení pro libovolný čas.

Volba τ ovlivňuje stabilitu a přesnost metody

τ	název	stabilita	přesnost
0	explicitní (Eulerova)	podmíněná	$O(\Delta t)$
1	implicitní	nepodmíněná	$O(\Delta t)$
1/2	Crank-Nicolson	nepodmíněná	$O(\Delta t^2)$

Diskretizace v čase

Metoda vážených reziduí

- Vektor uzlových hodnot aproximujeme v časovém intervalu Δt jako
$$\boldsymbol{T}^e(\tau) = \sum_i \boldsymbol{N}(\tau)\boldsymbol{T}_i^e$$
- Pro lineární aproximaci
$$\boldsymbol{T}^e = (1 - \frac{\tau}{\Delta t})\boldsymbol{T}_t^e + \frac{\tau}{\Delta t}\boldsymbol{T}_{t+\Delta t}^e$$
dosazením do rovnice, přenásobením váhovou funkcí[1] a integrací na intervalu $[0, \Delta t]$
$$\int_0^{\Delta t} w \left[\boldsymbol{P} \left(\frac{\partial(1 - \frac{\tau}{\Delta t})}{\partial \tau} \boldsymbol{T}_t + \frac{\partial(\tau/\Delta t)}{\partial \tau} \boldsymbol{T}_{t+\Delta t} \right) + \boldsymbol{K} \left((1 - \frac{\tau}{\Delta t})\boldsymbol{T}_t + \frac{\tau}{\Delta t}\boldsymbol{T}_{t+\Delta t} \right) - \boldsymbol{f} \right] d\tau = 0$$

[1] Předpokládáme, že $\boldsymbol{T}_t$ známe, stačí tedy jen jedna váhová funkce

Úpravou pak

$$\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T}_{t+\Delta t}-\boldsymbol{T}_t)\int_0^{\Delta t} w d\tau + \boldsymbol{K}\boldsymbol{T}_t\int_0^{\Delta t} w d\tau + \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{T}_{t+\Delta t}-\boldsymbol{T}_t)\int_0^{\Delta t} w\tau d\tau - \int_0^{\Delta t} w\boldsymbol{f} d\tau = 0$$

Pokud označíme

$$\gamma = \frac{1}{\Delta t}\frac{\int_0^{\Delta t} w\tau d\tau}{\int_0^{\Delta t} w d\tau}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}} = \frac{\int_0^{\Delta t} w\boldsymbol{f} d\tau}{\int_0^{\Delta t} w d\tau}$$

$$\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T}_{t+\Delta t}-\boldsymbol{T}_t) + \boldsymbol{K}\left[\boldsymbol{T}_t + \gamma(\boldsymbol{T}_{t+\Delta t}-\boldsymbol{T}_t)\right] - \bar{\boldsymbol{f}} = 0$$

a po úpravě dostaneme formálně shodný zápis s předchozím postupem

$$\underbrace{\left(\gamma\boldsymbol{K} + \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{P}\right)}_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{T}_{t+\Delta t} =$$

$$\underbrace{\left(-(1-\gamma)\boldsymbol{K} + \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{P}\right)}_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{T}_{t} + \bar{\boldsymbol{f}}$$

Zvolíme-li váhovou funkci $w = \tau/\Delta t$ (Galerkin), pak $\gamma = 2/3$, nebo pro $w = konst.$, pak $\gamma = 1/2$.
Předností je definice $\bar{\boldsymbol{f}}$, která umožňuje zahrnout obecné změny okrajových podmínek během časového kroku.

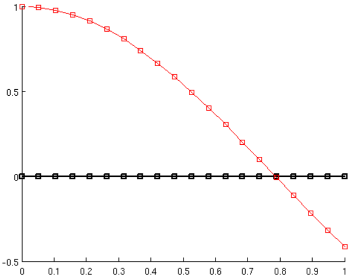
Metoda konečných diferencí

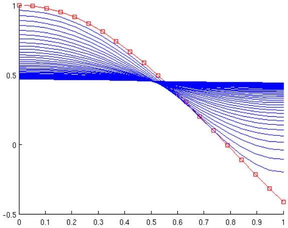
Výpočet matice kapacity, příklad

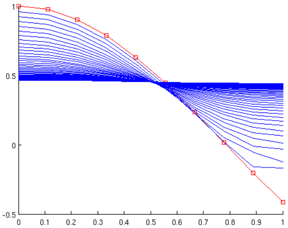
Uvažujme prvek s lineární aproximací a $\tau = 0.5$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{e,\Omega} &= \int_{\Omega^e} \boldsymbol{N}^{eT} \rho c_v \boldsymbol{N}^e \, d\Omega = \\
&= \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} (x_2 - x)/l \\ (x - x_1)/l \end{bmatrix} \rho c_v \begin{bmatrix} \dfrac{x_2 - x}{l} & \dfrac{x - x_1}{l} \end{bmatrix} d\Omega = \\
&= \rho c_v l \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ilustrační příklad: Určete rozložení teploty v nekonečné stěně o šířce 1m, jejíž stěny jsou dokonale izolované a počáteční teplota je $T_o(x) = cos(2x)$ ($\rho = c_v = \lambda = 1.0$):







Doporučená literatura:

1. R. Černý:*Řešení transportních jevů na počítači*, vydavatelství ČVUT, 1997.