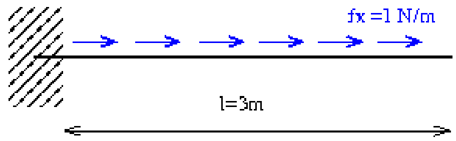
Cvičení 3 - Tažený-tlačený prut



Pro jednoduchost uvažujme E = A = 1

Analytické řešení

Diferenciální rovnice pro tažený-tlačený prut

$EA\frac{d^2u}{dx^2} + f_x(x) = 0$

Integrací postupně dostáváme

$EA\frac{du}{dx} + C_1 + 1x = 0$

$EAu + C_1x + C_2 + x^2/2 = 0$

Z okrajových podmínek ($u(0) = 0, N(l) = EA\frac{du}{dx} = 0$):

$EAu(0) + C_1 0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$

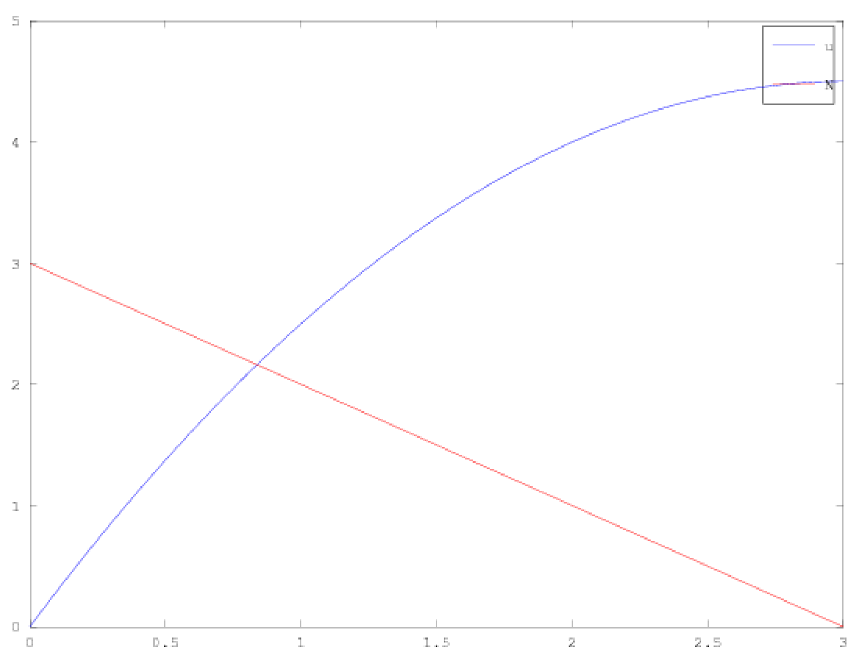
$EA\frac{du}{dx}(l) + C_1 + l = 0 \rightarrow C_1 = -l$

Naše řešení má tedy tvar: $u(x) = \frac{1}{EA}(-x^2/2 + lx)$

$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{EA}(-x + l)$

$N(x) = EA\varepsilon(x) = -x + l$

In [52]:
```
x = 0:0.1:3;
plot (x, -x.^2/2+3*x, "b;u;", x, -x+3, "r;N;")
```



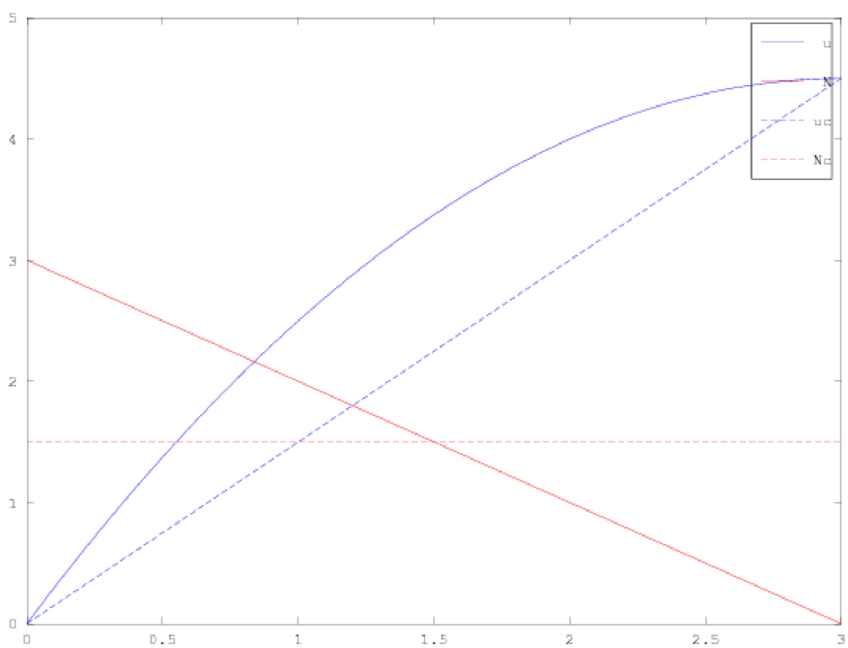
Řešení jedním prvkem s lineární aproximací

Vektor zatížení

$$f_e = \int_0^l N^T f_x dx = \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{l-x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{bmatrix} 1 dx = \begin{bmatrix} \frac{l^2}{2l} \\ \frac{l^2}{2l} \end{bmatrix}$$

In [53]:
```
E = 1;
A = 1;
l1 = 3;

k1 = (E*A/l1)*[1 -1; -1 1];
loc1 = [0 1];
K = k1;
f1 = [l1^2/(2*l1) l1^2/(2*l1)];
F = f1

u = F(2)/K(2,2);
U = [0 u]
eps1 = (U(2)-U(1))/l1;
N1 = E*A*eps1;

hold on;
plot (x, -x.^2/2+3*x, "b;u;", x, -x+3, "r;N;")
plot ([0 l1], [U(1) U(2)], "b--;uc;")
plot ([0 l1], [N1 N1], "r--;Nc;")
```

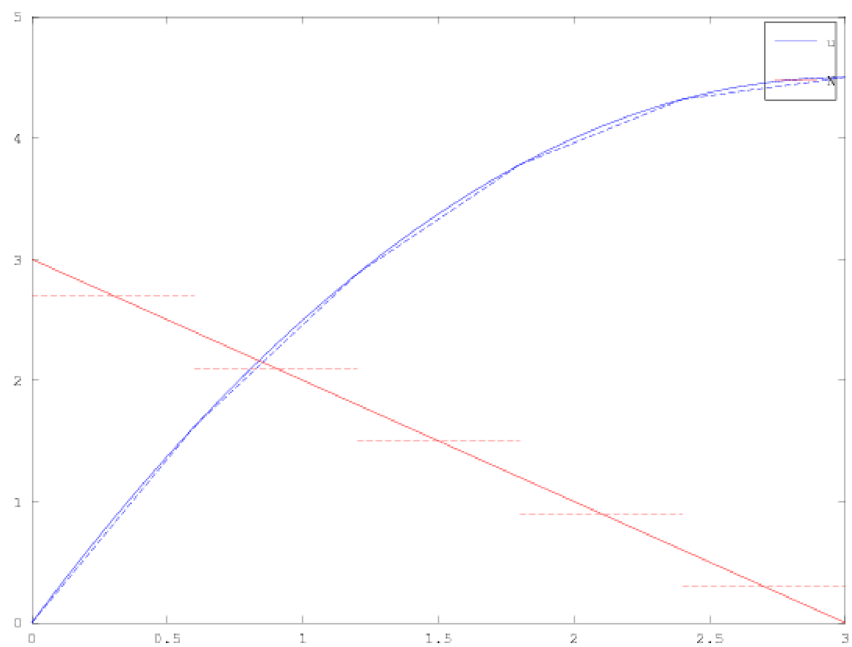
```
F =

   1.5000   1.5000

U =

   0.00000   4.50000
```



Řešení s n prvky

In [54]:
```
n = 5
l = 3/n;

E = 1;
A = 1;

ki = (E*A/l)*[1 -1; -1 1];
fi = [l^2/(2*l) l^2/(2*l)];
K = zeros (n+1);
F = zeros (n+1, 1);
for i=1:n
    loc = [i i+1];
    K(loc, loc) += ki;
    F(loc)+= fi';
endfor
u = K(2:n+1, 2:n+1)\(F(2:n+1,1));
U = [0 ; u]

#plot analytical solution
hold on;
plot (x, -x.^2/2+3*x, "b;u;", x, -x+3, "r;N;")

#plot obtained solution
for i=1:n
    eps = (U(i+1)-U(i))/l;
    N = E*A*eps;
    plot ([(i-1)*l i*l], [U(i) U(i+1)], "b--")
    plot ([(i-1)*l i*l], [N N], "r--")
endfor
```

```
n =  5
U =

   0.00000
   1.62000
   2.88000
   3.78000
   4.32000
   4.50000
```



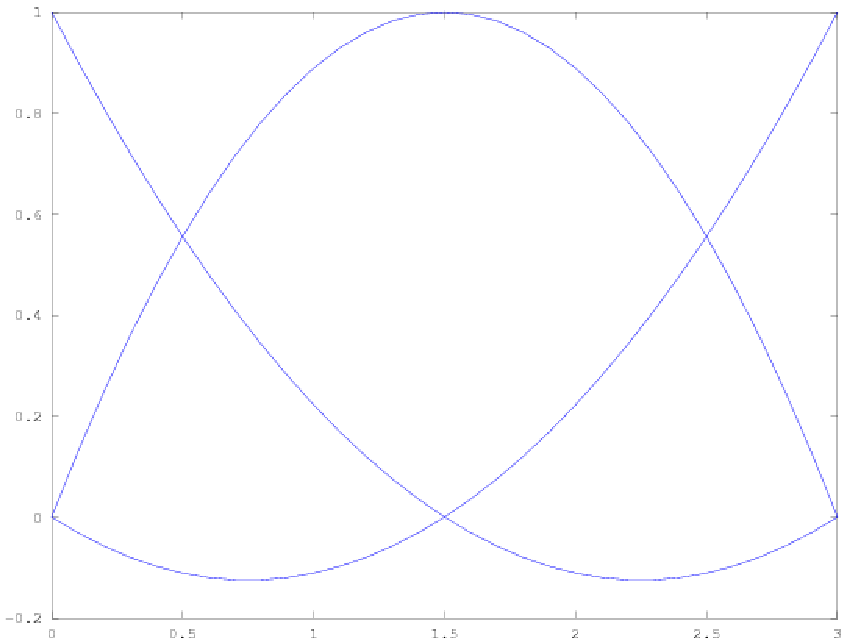
Řešení jedním prvkem s kvadratickou aproximací

Aproximační funkce

Kvadratická aproximace vyžaduje 3 uzly, 2 v krajních bodech a jeden, který volíme obvykle uprostřed. Pro tento případ mají aproximační funkce mají tvar

- $N_1(x) = \frac{2}{l^2}(x - l/2)(x - l)$
- $N_2(x) = -\frac{4}{l^2}(x)(x - l)$
- $N_3(x) = \frac{2}{l^2}(x)(x - l/2)$

In [55]:
```
l = 3;
x=0:0.1:l;
hold on;

plot (x, (2/l^2).*(x-l/2).*(x-l))
plot (x, -(4/l^2).*x.*(x-l))
plot (x, (2/l^2).*x.*(x-l/2))
```



Vyjádření matice tuhosti

Pro výpočet prvků matice tuhosti potřebujeme znát derivace interpolačních funkcí

- $\frac{dN_1}{dx}(x) = \frac{2}{l^2}((x-l)+(x-l/2))$
- $\frac{dN_2}{dx}(x) = -\frac{4}{l^2}((x-l)+x)$
- $\frac{dN_3}{dx}(x) = \frac{2}{l^2}((x-l/2)+x)$

Derivace bázových funkcí tvoří geometrickou matici B:

$$B = [\frac{dN_1}{dx}(x), \frac{dN_2}{dx}(x), \frac{dN_3}{dx}(x)] = \frac{1}{l^2}[4x-3l, -8x+4l, 4x-l]$$

Pro matici tuhosti K pak platí $K = \int_0^l B^T EAB\, dx$.

Pro jednotlivé prvky tedy

- $K_{11} = EA\int_0^3 (\frac{dN_1}{dx})^2\, dx = EA\int_0^3 \frac{4}{81}((x-3)+(x-1.5))^2\, dx = EA\frac{4}{81}\int_0^3 (2x-4.5)^2\, dx = EA\frac{4}{81}\int_0^3 (4x^2-18x+4.5^2)\, dx$
  $= EA\frac{4}{81}[\frac{4x^3}{3} - 18\frac{x^2}{2} + 20.25x]_0^3 = EA\frac{7}{9}$
- $K_{12} = K_{21} = EA\int_0^3 (\frac{dN_1}{dx})(\frac{dN_2}{dx})\, dx = -EA\frac{8}{9}$
- $K_{13} = K_{31} = EA\int_0^3 (\frac{dN_1}{dx})(\frac{dN_3}{dx})\, dx = EA\frac{1}{9}$
- ....

$$K = EA\begin{bmatrix} 7/9 & -8/9 & 1/9 \\ -8/9 & 16/9 & -8/9 \\ 1/9 & -8/9 & 7/9 \end{bmatrix}$$

Vektor zatížení

Vektor zatížení spočteme dle vzorečku (viz. přednáška):

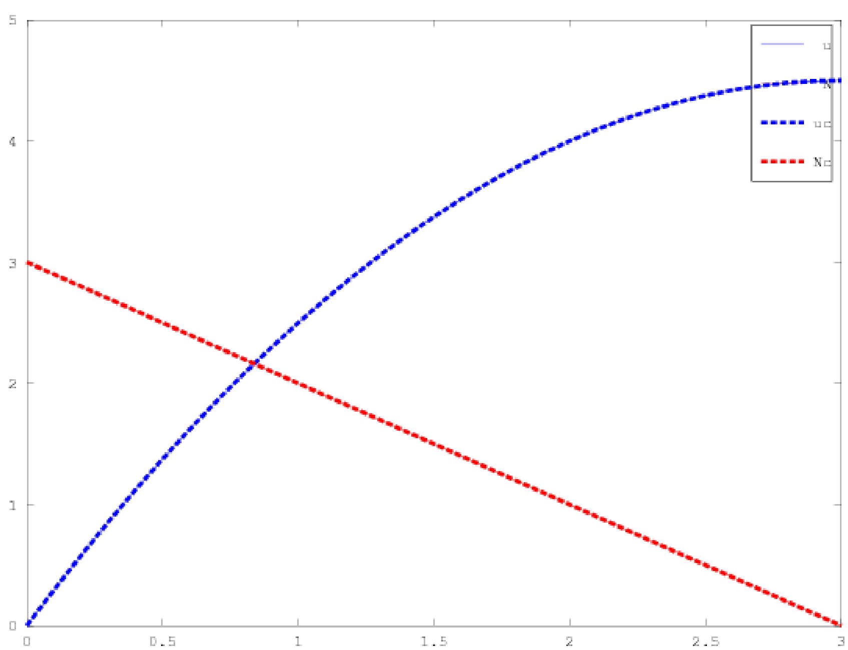
$$f = \int_0^l N^T f\, dx$$

kde matice N je matice obsahující interpolační funkce. Pro jednotlivé prvky postupně

- $f_1 = \int_0^1 \frac{2}{l^2}(x-l/2)(x-l)\ 1\, dx = \frac{2}{l^2}[x^3/3 - (3/4)lx^2 + xl^2/2]_0^3 = 1/2$
- $f_2 = \int_0^1 -\frac{4}{l^2}(x)(x-l)\ 1\, dx = 2$
- $f_3 = \int_0^1 \frac{2}{l^2}(x)(x-l/2)\ 1\, dx = 1/2$

In [56]:
```
E = 1;
A = 1;

k1 = (E*A)*[7/9, -8/9, 1/9;
            -8/9, 16/9, -8/9;
            1/9, -8/9, 7/9]
loc1 = [0 1 2];
K = k1;
f1 = [1/2; 2; 1/2];
F = f1

u = K(2:3,2:3)\F(2:3);
U = [0;u]
eps1 = @(x) (1/9).*((4.*x-9)*U(1)+(-8.*x+12)*U(2)+(4.*x-3)*U(3));
u1x = @(x) (2/9).*(((x-1.5).*(x-3))*U(1)+(-2.*x.*(x-3))*U(2)+(x.*(x-1.5))*U(3));

hold on;
xlim=[0 3];
plot (x, -x.^2/2+3*x, "b;u;", x, -x+3, "r;N;")
plot (x, u1x(x), "b--;uc;", "linewidth",10)
plot (x, eps1(x)*E*A, "r--;Nc;", "linewidth", 10)
```

```
k1 =

   0.77778  -0.88889   0.11111
  -0.88889   1.77778  -0.88889
   0.11111  -0.88889   0.77778

F =

   0.50000
   2.00000
   0.50000

U =

   0.00000
   3.37500
   4.50000
```



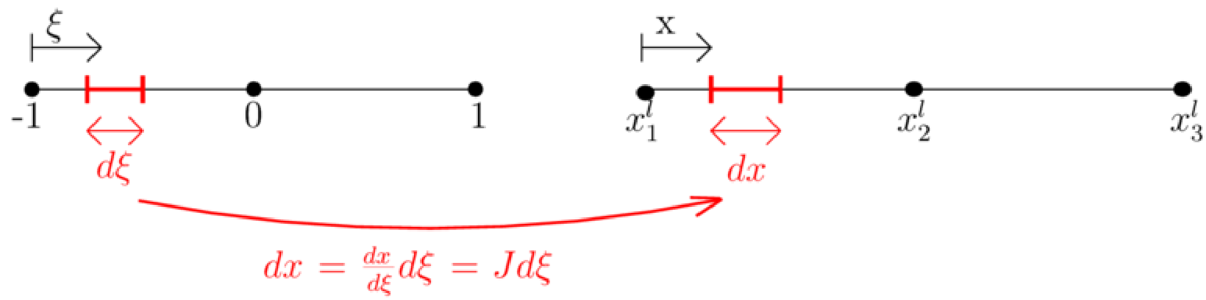
Řešení s využitím numerické integrace rozšířené do 2D

Transformace do lokálních souřadnic

Protože systém přirozených souřadnic je jednorozměrný, ale konstrukce se nachází v rovině, provedeme nejdřív transformaci uzlových souřadnic prvku do lokální soustavy dané střednicí podle vztahu

$x^{le} = T^e x^{ge}$

In [1]:
```
function T = transformation_matrix(x)
    # Transformation matrix for a given vector of global element nodal coordinates into local coordinates
    # Vector xeg contains sequentially ordered nodal vectors - xeg = [x1g, y1g, x2g, y2g, ..., xng, yng]
    # n = number of element nodes / (order of approximation - 1)
    # Minimum n = 2 (linear approximation)
    # nodes 1 and 2 define the local coordinate system (angle of rotation fi)
    length=sqrt((x(3)-x(1))^2+(x(4)-x(2))^2);
    c = (x(3)-x(1))/length; c2=c^2;
    s = (x(4)-x(2))/length; s2=s^2;
    t1 = [c, s;
          -s,c];
    number_of_nodes = size(x)(2)/2;
    T = zeros(number_of_nodes*2);
    for i = 1:number_of_nodes
        loc = 2*i-1:2*i;
        T(loc,loc) += t1;
    end
end
```



Transformace do přirozených souřadnic

Osu přirozených souřadnic pro jednorozměrný prvek zavedeme ve směru střednice. Počáteční uzel bude mít souřadnici $\xi_1 = -1$, koncový uzel $\xi_n = 1$ kde n je počet uzlů prvku.

Izoparametrický prvek

Protože prvek popisujeme v přirozených souřadnicích, potřebujeme transformační vztah vyjadřující po délce prvku kartézské souřadnice v závislosti na přirozených. Tzv. izoparametrické prvky používají pro aproximaci souřadnic stejný vztah jako pro uzlové posuny, platí tedy

- $u(\xi) = N(\xi)^T u^{le}$
- $x(\xi) = N(\xi)^T x^{le}$

Jakobián transformace spočteme jako derivaci skutečných souřadnic podle přirozených

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dN}{d\xi}x^{le} = J$$

Derivace bázových funkcí získáme s použitím pravidla pro derivaci složené funkce jako

$$B(\xi) = \frac{dN(\xi(x))}{dx} = \frac{dN(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{dN}{d\xi}J^{-1}$$

Matice tuhosti prvku je definována v kartézských souřadnicích jako

$$K^{le} = EA\int_{x_1^{le}}^{x_n^{le}} B(x)^T B(x)dx$$

což můžeme vyjádřit v přirozených souřadnicích jako

$$K^{le} = EA\int_{\xi(x_1^{le})}^{\xi(x_n^{le})} B(\xi(x))^T B(\xi(x))dx = EA\int_{-1}^{1} B(\xi)^T B(\xi)Jd\xi.$$

Obdobně vyjádříme vektor zatížení jako

$$f^{le} = \int_{x_1^{le}}^{x_n^{le}} N(x)^T f_x(x)dx = \int_{\xi(x_1^{le})}^{\xi(x_n^{le})} N(\xi(x))^T f_x(\xi(x))dx = \int_{-1}^{1} N(\xi)^T f_x(\xi)Jd\xi$$

Význam přirozených souřadnic

Použití transformace prvku do přirozených souřadnic umožňuje provádět numerickou integraci na konstantním intervalu. Místo toho, aby se meze integrálu měnily v závislosti na délce prvku, integrujeme vždy na intervalu $< -1, 1 >$.

In [2]:
```
# Weights for gaussian integration
global w_switch = cell(3,1);
w_switch{1} = [2.];
w_switch{2} = [1., 1.];
w_switch{3} = [0.555556 0.888889 0.555556];
# Locations for gaussian integration
global xi_switch = cell(3,1);
xi_switch{1} = [0.];
xi_switch{2} = [-1./sqrt(3.), 1./sqrt(3.)];
xi_switch{3} = [-0.774597, 0., 0.774597];

function ans = numerical_integration(nip, f)
    # Numerical integration using the Gauss quadrature rule
    # f - function to be integrated, defined in natural coordinates
    # nip - number of integration points
    global w_switch
    global xi_switch
    w = w_switch{nip};
    xi = xi_switch{nip};
    ans = 0.0*f(0.);
    for i=1:nip
        ans = ans + w(i)*f(xi(i));
    end
end
```

Lineární prvek

Vektor bázových funkcí pro lineární prvek definujeme jako

$$N(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{-(\xi-1)}{2} & 0 & \frac{\xi+1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

, jeho derivaci v přirozených souřadnicích jako

$$\frac{dN(\xi)}{d\xi} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

In [3]:
```
global N_lin = @(xi) [-(xi-1.)/2., 0., (xi+1.)/2., 0.];

global dN_lin = @(xi) [-1./2., 0., 1./2., 0.];
global J_lin = @(xi, xe) dN_lin(xi)*xe';

function ans = K_truss2d_linear(xeg, EA)
    # Local stiffness matrix of linear truss element
    # in natural coordinates
    global dN_lin;
    global J_lin;
    T = transformation_matrix(xeg);
    xel = T*xeg';
    integrand = @(xi) dN_lin(xi)'*dN_lin(xi)/J_lin(xi,xel');
    ans = EA*numerical_integration(2, integrand);
    ans = T'*ans*T;
end

function ans = f_linear(xeg, f)
    global N_lin;
    global J_lin;
    T = transformation_matrix(xeg);
    xel = T*xeg';
    integrand = @(xi) N_lin(xi)'*f(xi)*J_lin(xi,xel');
    ans = numerical_integration(2, integrand);
    ans = T'*ans;
end
```

Kvadratický prvek

Vektor bázových funkcí pro kvadratický prvek definujeme jako

$$N(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\xi(\xi-1)}{2} & 0 & -(\xi+1)(\xi-1) & 0 & \frac{\xi(\xi+1)}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

, jeho derivaci v přirozených souřadnicích jako

$$\frac{dN(\xi)}{d\xi} = \begin{bmatrix} \xi - \frac{1}{2} & 0 & -2\xi & 0 & \xi + \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

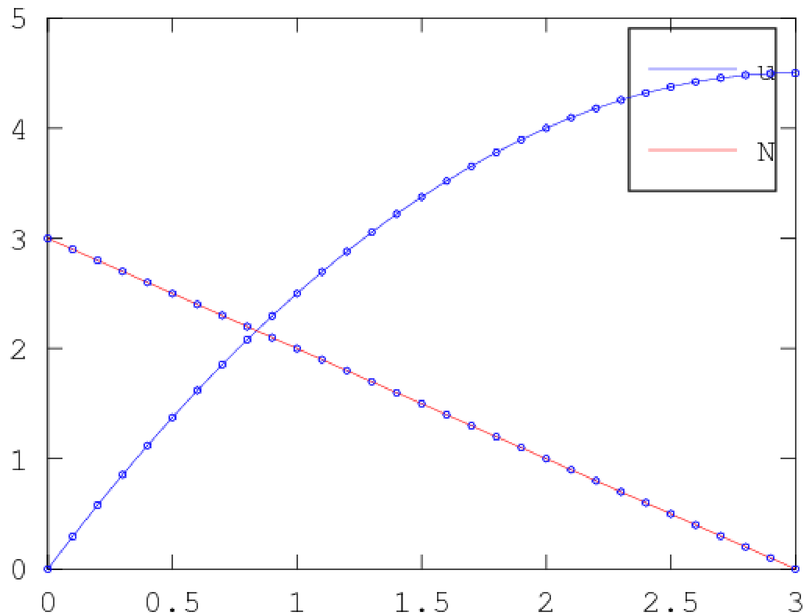
In [4]:

```
global N_qua = @(xi) [xi*(xi-1.)/2., 0.,-(xi+1.)*(xi-1.), 0., (xi+1.)*xi/2., 0.];
global dN_qua = @(xi) [xi-1./2., 0., -2*xi, 0., xi+1./2., 0.];
global J_qua = @(xi, xe) dN_qua(xi)*xe';

function ans = K_truss2d_quadratic(xeg, EA)
    # Local stiffness matrix of quadratic truss element
    global dN_qua;
    global J_qua;
    T = transformation_matrix(xeg);
    xel = T*xeg';
    integrand = @(xi) dN_qua(xi)'*dN_qua(xi)/J_qua(xi,xel');
    ans = EA*numerical_integration(3, integrand);
    ans = T'*ans*T;
end

function ans = f_quadratic(xeg, f)
    global N_qua;
    global J_qua;
    T = transformation_matrix(xeg);
    xel = T*xeg';
    integrand = @(xi) N_qua(xi)'*f(xi)*J_qua(xi,xel');
    ans = numerical_integration(2, integrand);
    ans = T'*ans;
end
```

Zpět k našemu příkladu

In [5]:
```
function ans = N(x,l)
    ans = [(2/l^2).*(x-l/2).*(x-l), -(4/l^2).*x.*(x-l), (2/l^2).*x.*(x-l/2)];
end

function ans = B(x, l)
    ans = (1/l^2)*[4*x-3*l, -8*x+4*l, 4*x-l];
end

function ans = K_bar_2(l, EA)
    # integration points + weights
    w=[1 1]; ip=[-1/sqrt(3) 1/sqrt(3)];

    nip = size(w)(2);
    ans = zeros (3,3);
    for i=1:nip
        x = l/2+ip(i)*l/2;
        b = B(x, l);
        ans=ans+EA*b'*b*w(i)*l/2.;
    end
end

function ans = f_bar_2(l,f)
    # integration points + weights
    w=[1 1]; ip=[-1/sqrt(3) 1/sqrt(3)];

    nip = size(w)(2);
    ans = zeros (3,1);
    for i=1:nip
        x = l/2+ip(i)*l/2;
        n = N(x, l);
        ans=ans+n'*f(x)*w(i)*l/2.;
    end
end

####### Main #########
E = 1;
A = 1;
l =3;
K = K_bar_2(l, E*A);
F = f_bar_2(l, @(x) 1);

u = K(2:3,2:3)\F(2:3);
U = [0;u]

hold on;
xlim=[0 3];
x=0:0.1:l;
#analytical solution for reference
plot (x, -x.^2/2+3*x, "b;u;", x, -x+3, "r;N;");
#computed results
for x=0:0.1:3
    scatter (x, N(x,l)*U);
    scatter (x, E*A*B(x,l)*U);
end
```

```
U =

   0.00000
   3.37500
   4.50000
```




```
In [ ]:
```