Nichtlineare
Finite Elemente

– Vorlesungsunterlagen WS 05/06 –

JP Dr.–Ing. habil. Ellen Kuhl

Kaiserslautern, Januar 2006

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Bathe, K. J. [1995]. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[2] Bathe, K. J. [2000]. *Finite–Element–Methoden*. Springer Verlag, Berlin.

[3] Belytschko, T., W. K. Liu & B. Moran [2000]. *Nonlinear Finite Element Analysis for Continua and Structures*. John Wiley & Sons.

[4] Bonet, J. & R. D. Wood [1997]. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press.

[5] Crisfield, M. A. [1996]. *Non–linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons.

[6] Holzapfel, G. A. [2000]. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons.

[7] Hughes, T. J. R. [2000]. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[8] Wriggers, P. [2001]. *Nichtlineare Finite–Element–Methoden*. Springer Verlag, Berlin.

[9] Zienkiewicz, O. C. & R. L. Taylor [2000]. *The Finite Element Method, Volume I: The Basis*. Butterworth Heinemann, fifth edition.

[10] Zienkiewicz, O. C. & R. L. Taylor [2000]. *The Finite Element Method, Volume II: Solid Mechanics*. Butterworth Heinemann, fifth edition.

1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

FEM I (bisher):
lineare FEM, Gleichgewicht am unverformten System
- Verzerrungen als lineare Funktion der Verschiebungen $\boldsymbol{u}$
- Spannungen als lineare Funktion der Verzerrungen

lineares Gleichungssystem der Form

$$\boldsymbol{f}_I^{\text{int}} - \boldsymbol{f}_I^{\text{ext}} = \mathbf{0} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{f}_I^{\text{int}} = \sum_{J=1}^{n_{\text{nd}}} \mathbf{K}_{IJ}\, \boldsymbol{u}_J$$

direkt lösbar für unbekannten Knotenvektor $\boldsymbol{u}_J = -\sum_{I=1}^{n_{\text{nd}}} \mathbf{K}_{JI}^{-1}\, \boldsymbol{f}_I^{\text{ext}}$

FEM II (jetzt):
nichtlineare FEM, Gleichgewicht am deformierten System
- Verzerrungen als nichtlineare Funktion der Deformation '
  es gibt unterschiedliche Verzerrungsmaße
  primäre Unbekannte $'_J = \boldsymbol{X}_J + \boldsymbol{u}_J$
- Spannungen als nichtlineare Funktion der Verzerrungen
  es gibt unterschiedliche Spannungsmaße

nichtlineares Gleichungssystem der Form

$$\boldsymbol{f}_I^{\text{int}} - \boldsymbol{f}_I^{\text{ext}} = \mathbf{0} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{f}_I^{\text{int}} = \boldsymbol{f}_I^{\text{int}}('_J)$$

nur iterativ lösbar für unbekannten Knotenvektor $'_J$

1.1 Kinematik

Lehre der Bewegung und Deformation ohne Bezug zur Ursache

1.1.1 Deformationsabbildung

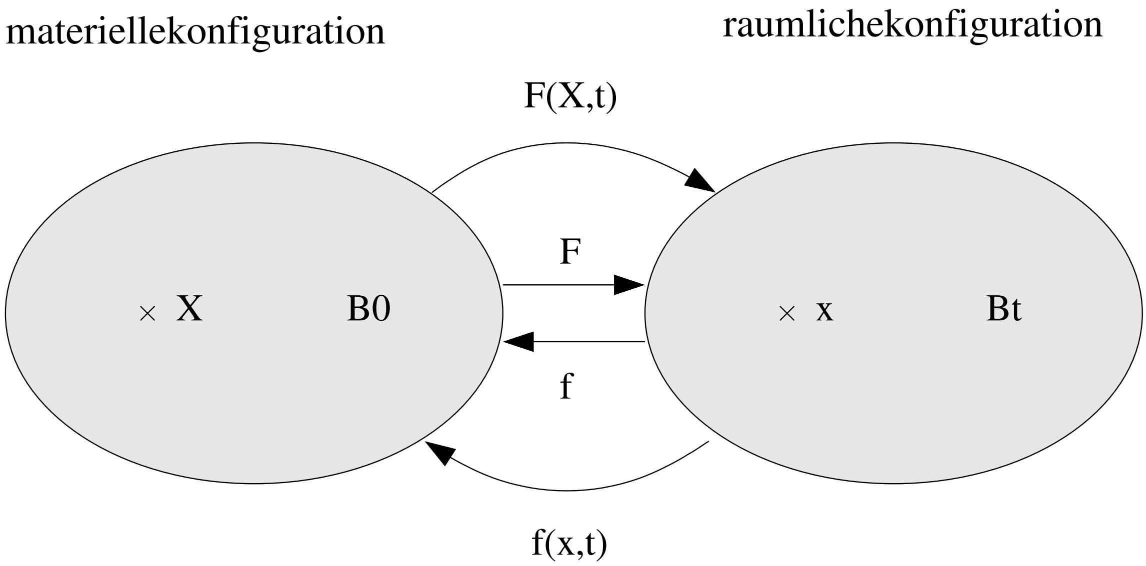


Abbildung 1.1: Deformationsabbildung und Deformationsgradient

Bewegung des Körpers $\mathcal{B}$ mathematisch beschreibbar durch die Deformationsabbildung ' $(\boldsymbol{X}, t)$ bzw. $(\boldsymbol{x}, t)$

- materielle Deformationsabbildung ' von $\mathcal{B}_0$ nach $\mathcal{B}_t$

  $\boldsymbol{x} = {}'\ (\boldsymbol{X}, t) : \quad \mathcal{B}_0 \times \mathbb{R} \to \mathcal{B}_t$

Lagrange'sche Betrachtungsweise, beschreibt das Verhalten eines materiellen Punktes $\boldsymbol{X}$, üblich in der Festkörpermechanik

- räumliche Deformationsabbildung von $\mathcal{B}_t$ nach $\mathcal{B}_0$

  $\boldsymbol{X} = \quad (\boldsymbol{x}, t) : \quad \mathcal{B}_t \times \mathbb{R} \to \mathcal{B}_0$

Euler'sche Betrachtungsweise, beschreibt das Verhalten an einem räumlichen Punkt $\boldsymbol{x}$, üblich in der Fluidmechanik im folgenden: Lagrange'sche Betrachtungsweise

- Verschiebungsvektor $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} = \varphi - \boldsymbol{X}$$

1.1.2 Deformationsgradient

- materieller Deformationsgradient $\boldsymbol{F}$
  Tangentenabbildung von $T\mathcal{B}_0$ nach $T\mathcal{B}_t$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{X}} = \nabla_X \varphi \\ F_{iJ} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_J} = \nabla_{X_J} \varphi_i \end{aligned}\right. \quad : \quad T\mathcal{B}_0 \rightarrow T\mathcal{B}_t$$

mit

$$F_{iJ} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

zentrale Größe zur Beschreibung finiter Deformationen, beschreibt die relative räumliche Position zweier benachbarter Partikel nach ihrer Deformation als Funktion ihrer relativen materiellen Position vor der Deformation, Zweifeldtensor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \nabla_X \varphi = \nabla_X [\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}] = \boldsymbol{I} + \nabla_X \boldsymbol{u} \\ F_{iJ} &= \nabla_{X_J} \varphi_i = \nabla_{X_J} [X_i + u_i] = \;_{iJ} + \nabla_{X_J} u_i \end{aligned}$$

- Jacobi Determinante J

$$J = \det(\boldsymbol{F})$$

- Transformation von Linienelementen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \nabla_X \; ' \quad \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \\
\mathrm{d}x_i &= \nabla_{X\,J} \, ' \;{}_i \;\; \mathrm{d}X_J
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{F} \;\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \\
\mathrm{d}x_i &= F_{iJ} \;\; \mathrm{d}X_J
\end{aligned}
$$

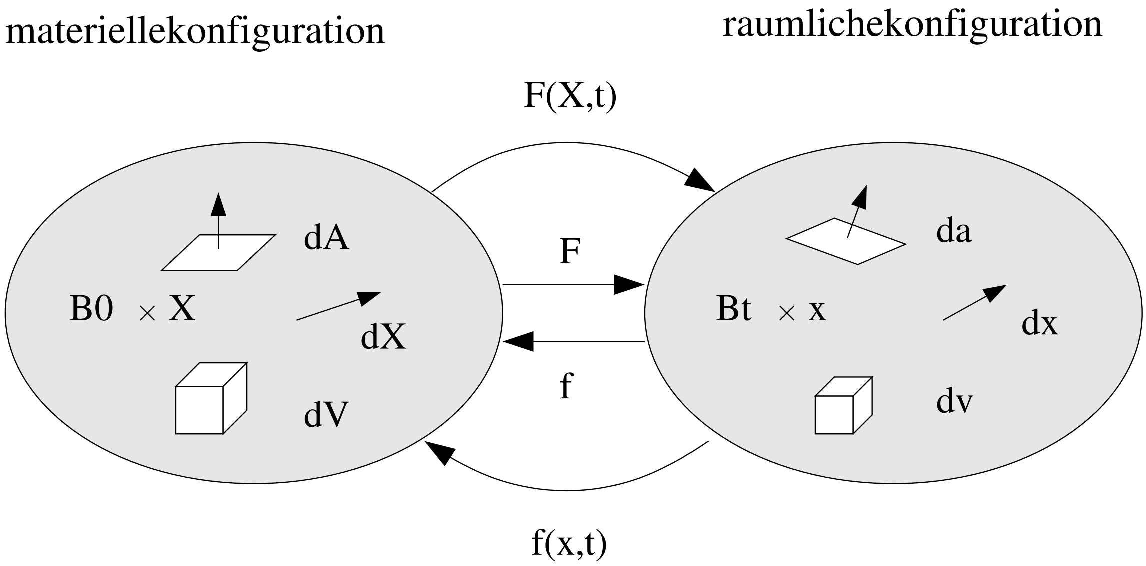


Abbildung 1.2: Transformation von Linien-/ Flächen- und Volumenelementen

- Transformation von Volumenelementen
  materielles Volumenelement $\mathrm{d}V$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \mathrm{d}\boldsymbol{X}_1 \cdot [\, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_2 \times \mathrm{d}\boldsymbol{X}_3 \,] \\
&= \det(\, [\, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_3 \,]\,)
\end{aligned}
$$

räumliches Volumenelement $\mathrm{d}v$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1 \cdot [\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_2 \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}_3 \,] \\ &= \det(\, [\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_2, \mathrm{d}\boldsymbol{x}_3 \,] \,) \\ &= \det(\, [\, \boldsymbol{F} \, [\, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_3 \,] \,] \,) \\ &= \det(\boldsymbol{F}) \det(\, [\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \mathrm{d}\boldsymbol{X}_3] \,) \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}v = J \, \mathrm{d}V$$

• Transformation von Flächenelementen
materielles Flächen- und Volumenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ und $\mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{N} \, \mathrm{d}A \qquad \mathrm{d}V = \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

$\boldsymbol{N}$ ... Einheitsnormale des materiellen Flächenelements $\mathrm{d}A$

räumliches Flächen- und Volumenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ und $\mathrm{d}v$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}a \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{n}$ ... Einheitsnormalen des räumlichen Flächenelements $\mathrm{d}a$

mit $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}}$ und $\mathrm{d}v = J \, \mathrm{d}V$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot J \, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = J \, \mathrm{d}V \end{aligned}$$

Nanson's formula

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = J \, \boldsymbol{F}^{-\mathrm{t}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

$$\mathrm{d}a_i = J \, F_{iJ}^{-\mathrm{t}} \;\; \mathrm{d}A_J$$

1.1.3 Verzerrungsmaße

Vergleich des Skalarproduktes des materiellen Linienelementes $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$ mit dem zugeörigen räumlichen Linienelement $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} - \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

$$\mathrm{d}x_k \ \mathrm{d}\boldsymbol{x}_k - \mathrm{d}X_I \ \mathrm{d}X_I = F_{kI} \ \mathrm{d}X_I \ F_{kJ} \ \mathrm{d}X_J - \mathrm{d}X_I \ \mathrm{d}X_I$$

ausklammern ergibt

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot [\, \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I} \,] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

$$\mathrm{d}x_k \ \mathrm{d}\boldsymbol{x}_k - \mathrm{d}X_I \ \mathrm{d}X_I = \mathrm{d}X_I \ [\, F^{\mathrm{t}}_{Ik} \ F_{kJ} - \ _{IJ} \,] \ \mathrm{d}X_J$$

- Deformationstensoren

rechter Cauchy–Green Deformationtensor $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F}$$

$$C_{IJ} = F^{\mathrm{t}}_{Ik} \ F_{kJ}$$

rein materielle Größe, es gilt:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot [\, \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F} \,] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

linker Cauchy–Green Deformationtensor (Fingertensor) $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}}$$

$$b_{ij} = F_{iK} \ F^{\mathrm{t}}_{Kj}$$

rein räumliche Größe, es gilt:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot [\, \boldsymbol{F}^{-\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \,] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}^{-1} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

- Verzerrungstensoren

Green–Lagrange Verzerrungstensor $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} [\, \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I} \,] = \frac{1}{2} [\, \boldsymbol{C} - \boldsymbol{I} \,]$$

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} [\, F^{\mathrm{t}}_{Ik} \ F_{kJ} - \ _{IJ} \,] = \frac{1}{2} [\, C_{IJ} - \ _{IJ} \,]$$

rein materielle Größe

es gilt mit $\boldsymbol{F} = \nabla_X \boldsymbol{x} = \nabla_X[\,\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}\,] = \boldsymbol{I} + \nabla_X \boldsymbol{u}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{1}{2}[\,\boldsymbol{I} + \nabla_X^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}\,][\,\boldsymbol{I} + \nabla_X \boldsymbol{u}\,] - \boldsymbol{I}\,] \\ &= \frac{1}{2}\,[\,\boldsymbol{I} + \nabla_X\boldsymbol{u} + \nabla_X^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u} + \nabla_X^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}\cdot\nabla_X\boldsymbol{u} - \boldsymbol{I}\,] \\ &= \frac{1}{2}\,[\,\nabla_X\boldsymbol{u} + \nabla_X^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u} + \nabla_X^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}\cdot\nabla_X\boldsymbol{u}] \end{aligned}$$

vergleiche mit geometrisch linearer Theorie (FEM I)

$$= \frac{1}{2}[\,\nabla\boldsymbol{u} + \nabla^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}\,]$$

Euler–Almansi Verzerrungstensor $\boldsymbol{e}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e} &= \frac{1}{2}\,[\,\boldsymbol{I} \quad - \boldsymbol{F}^{-\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\,] = \frac{1}{2}\,[\,\boldsymbol{I} \quad - \boldsymbol{b}^{-1}\,] \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}\,[\quad_{ij} - F^{-\mathrm{t}}_{iK} \quad F^{-1}_{Kj}\,] = \frac{1}{2}\,[\quad_{ij} - b^{-1}_{ij}\,] \end{aligned}$$

rein räumliche Größe

es gilt mit $\boldsymbol{F}^{-1} = \nabla_x \boldsymbol{X} = \nabla_x[\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\,] = \boldsymbol{I} - \nabla_x \boldsymbol{u}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e} &= \frac{1}{2}\,[\,\boldsymbol{I} - [\,\boldsymbol{I} - \nabla_x^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}\,][\,\boldsymbol{I} - \nabla_x\boldsymbol{u}\,]\,] \\ &= \frac{1}{2}\,[\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{I} + \nabla_x\boldsymbol{u} + \nabla_x^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u} - \nabla_x^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}\cdot\nabla_x\boldsymbol{u}\,] \\ &= \frac{1}{2}\,[\,\nabla_x\boldsymbol{u} + \nabla_x^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u} - \nabla_x^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}\cdot\nabla_x\boldsymbol{u}] \end{aligned}$$

vergleiche mit geometrisch linearer Theorie (FEM I)

$$= \frac{1}{2}[\,\nabla\boldsymbol{u} + \nabla^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}\,]$$

es gilt

push forward $\boldsymbol{e} \;= \boldsymbol{F}^{-\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{E} \quad \cdot\boldsymbol{F}^{-1}$ pull back $\boldsymbol{E} \;= \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \;\cdot\boldsymbol{e} \;\cdot\boldsymbol{F}$

$$e_{ij} = F^{-\mathrm{t}}_{iK} \quad E_{KL} \quad F^{-1}_{Lj} \qquad E_{IJ} = F^{\mathrm{t}}_{Ik} \quad e_{kl} \quad F_{lJ}$$

1.2 Spannungen

1.2.1 Spannungsmaße

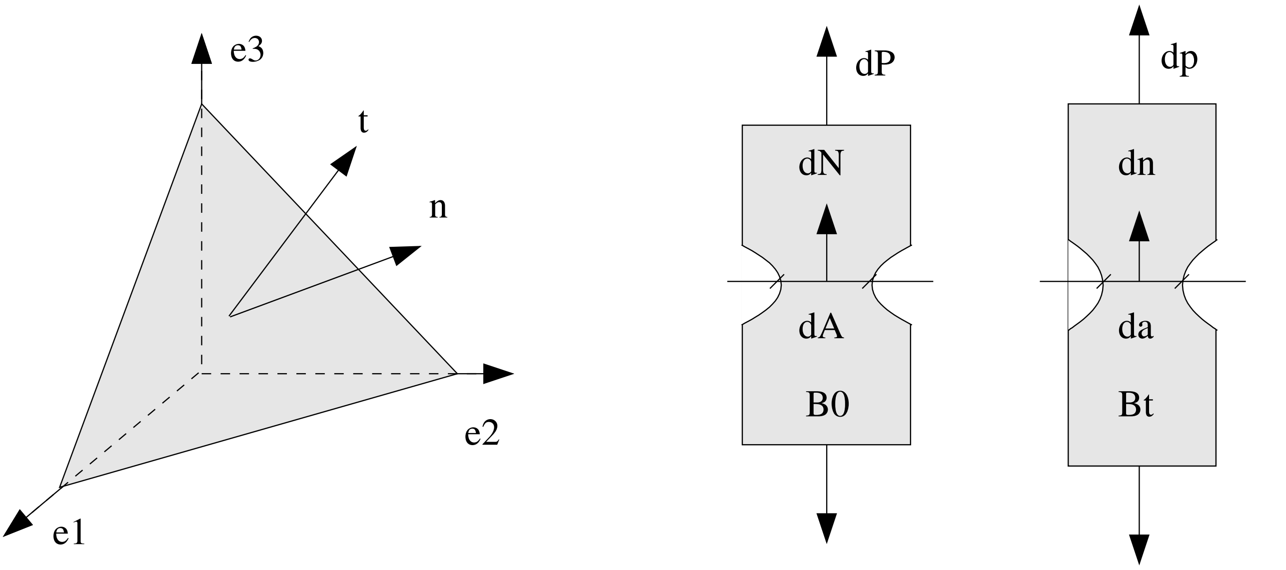


Abbildung 1.3: Definition der Spannungen

- Cauchy Spannungstensor $\quad^{t}$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n} \cdot \quad = \quad^{t} \cdot \boldsymbol{n}$$

$$t_i = n_j \quad_{ji} = \quad^{t}_{ij}\, n_j$$

j... erster Index: Normale auf die Fläche
i... zweiter Index: Richtung
betrachte Kraftelement $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ der räumlichen Konfiguration

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{t}\, \mathrm{d}a = \quad^{t} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}a$$

physikalische Interpretation

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \quad^{t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

Cauchy Spannungstensor liefert Beziehung zwischen Kraftelement $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ der räumlichen Konfiguration und Oberflächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ der räumlichen Konfiguration, rein räumliche Größe

• 1. Piola–Kirchhoff Spannungstensor $\ ^{\mathsf{t}}$ (vergl. Literatur: $\boldsymbol{P}$)
betrachte Kraftelement $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ der räumlichen Konfiguration

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}a = \ ^{\mathsf{t}}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \ ^{\mathsf{t}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = J\ \ ^{\mathsf{t}}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathsf{t}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \ ^{\mathsf{t}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

Zusammenhang

$$\ ^{\mathsf{t}} = J\ \ ^{\mathsf{t}}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathsf{t}} \qquad\qquad = J\,\boldsymbol{F}^{-1}\cdot$$

$$\ ^{\mathsf{t}}_{iJ} = J\ \ ^{\mathsf{t}}_{ik}\ F^{-\mathsf{t}}_{kJ} \qquad\qquad \ _{Ji} = J\,F^{-1}_{Jk}\ \ _{ki}$$

physikalische Interpretation

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \ ^{\mathsf{t}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

erster PK liefert liefert Beziehung zwischen Kraftelement $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ der räumlichen Konfiguration und Oberflächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ der materiellen Konfiguration, Zweifeldtensor

• 2. Piola–Kirchhoff Spannungstensor $\ ^{\mathsf{t}}$ (vergl. Literatur: $\boldsymbol{S}$)
betrachte Kraftelement $\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ der materiellen Konfiguration

$$\mathrm{d}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\ \ ^{\mathsf{t}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = J\,\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\ \ ^{\mathsf{t}}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathsf{t}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \ ^{\mathsf{t}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

Zusammenhang

$$\ ^{\mathsf{t}} = \boldsymbol{F}^{-1}\cdot\ \ ^{\mathsf{t}} = J\,\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\ \ ^{\mathsf{t}}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathsf{t}}$$

$$\ ^{\mathsf{t}}_{IJ} = F^{-1}_{Ik}\ \ ^{\mathsf{t}}_{kJ} = J\,F^{-1}_{Ik}\ \ ^{\mathsf{t}}_{kl}\ F^{-\mathsf{t}}_{lJ}$$

physikalische Interpretation

$$\mathrm{d}\boldsymbol{P} = \ ^{\mathsf{t}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

zweiter PK liefert liefert Beziehung zwischen Kraftelement $\mathrm{d}\boldsymbol{P}$ der materiellen Konfiguration und Oberflächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ der materiellen Konfiguration, rein materielle Größe es gilt

push forward	$^{\mathrm{t}} = \frac{1}{J} \boldsymbol{F} \cdot \; ^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}}$	pull back	$^{\mathrm{t}} = J\, \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \; ^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F}^{-\mathrm{t}}$
	$^{\mathrm{t}}_{ij} = \frac{1}{J} F_{iK} \; ^{\mathrm{t}}_{KL} F^{\mathrm{t}}_{Lj}$		$^{\mathrm{t}}_{IJ} = J\, F^{-1}_{Ik} \; ^{\mathrm{t}}_{kl} F^{-\mathrm{t}}_{lJ}$

1.2.2 Hyperelastizität

- Elastizität:
  Spannungszustand ist allein eine Funktion des aktuellen Deformationszustandes
- Hyperelastizität:
  Spannungszustand ist pfadunabhängig und läßt sich als Funktion der gespeicherten Verzerrungsenergie darstellen

$$= \quad (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{X}) \qquad \dot{} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{F}} : \dot{\boldsymbol{F}} = \; ^{\mathrm{t}} : \dot{\boldsymbol{F}} \qquad ^{\mathrm{t}} := \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{F}}$$

$$= \quad (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{X}) \qquad \dot{} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{E}} : \dot{\boldsymbol{E}} = \; ^{\mathrm{t}} : \dot{\boldsymbol{E}} \qquad ^{\mathrm{t}} := \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{E}} = 2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{C}}$$

Zusammenhang zwischen materiellem Spannungszuwachs $\Delta \; ^{\mathrm{t}}$ und materiellem Verzerrungszuwachs $\Delta \boldsymbol{E}$

$$\Delta \; ^{\mathrm{t}} = \mathbb{L} : \Delta \boldsymbol{E} \qquad \text{mit} \qquad \mathbb{L} = \frac{\partial \; ^{\mathrm{t}}}{\partial \boldsymbol{E}} = \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{E}^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{C}^2}$$

$\mathbb{L}$ ... vierstufiger Lagrange'scher Elastizitätstensor
$\mathbb{E}$ ... vierstufiger Euler'scher Elastizitätstensor

es gilt

---

push forward	$\mathbb{E}$	$= \frac{1}{J} [\,\boldsymbol{F} \;\bar{\otimes}\; \boldsymbol{F}\;] : \mathbb{L} \; : [\,\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \;\bar{\otimes}\; \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}}]$
	E_{ijkl}	$= \frac{1}{J} \; F_{iI} \quad F_{jJ} \quad \mathrm{L}_{IJKL} \quad F_{Kk} \quad F_{Ll}$
pull back	$\mathbb{L}$	$= J \; [\,\boldsymbol{F}^{-1} \,\bar{\otimes}\, \boldsymbol{F}^{-1}\,] : \mathbb{E} \; : [\,\boldsymbol{F}^{-\mathrm{t}} \,\bar{\otimes}\, \boldsymbol{F}^{-\mathrm{t}}\,]$
	L_{IJKL}	$= J \quad F_{Ii} \quad F_{Jj} \quad \mathrm{E}_{ijkl} \quad F_{kK} \quad F_{lL}$

Beispiel: St. Venant–Kirchhoff Material (materiell)

Verzerrungsenergiefunktion des St. Venant–Kirchhoff Materials

$$^{\mathrm{kir}}(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2} \quad [\,\boldsymbol{E} : \boldsymbol{I}\,]^2 + \quad \boldsymbol{E} : \boldsymbol{E}$$

, ... Lamé Parameter

zugehörige Spannungen und Materialoperator

$$^{\mathrm{kir}\,\mathrm{t}}(\boldsymbol{E}) = \frac{\partial \quad ^{\mathrm{kir}}}{\partial \boldsymbol{E}} = \quad [\,\boldsymbol{E} : \boldsymbol{I}\,]\, \boldsymbol{I} + 2 \quad \boldsymbol{E}$$

$$\mathbb{L}^{\mathrm{kir}} \; (\boldsymbol{E}) = \frac{\partial \quad ^{\mathrm{kir}\,\mathrm{t}}}{\partial \boldsymbol{E}} = \quad \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \quad + 2 \quad \mathbb{I}^{\mathrm{sym}}$$

$\boldsymbol{I}$ ... zweistufiger Einheitstensor $[I_{IJ}] = \quad_{IJ}$
$\mathbb{I}^{\mathrm{sym}}$ ... symmetrischer vierstufiger Einheitstensor
$\mathbb{I}^{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{I} \overline{\otimes} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{I}]$ bzw. $[\mathrm{I}^{\mathrm{sym}}_{IJKL}] = \frac{1}{2} [\quad_{IK} \quad_{JL} + \quad_{IL} \quad_{JK}]$

vergleiche FEM I, Hooke'sches Gesetz, $\boldsymbol{E} \leftarrow$ und $\leftarrow$

Beispiel: Neo–Hooke Material (materiell)

dazu: Invarianten der Deformationstensoren

$$I_C = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{I} = \boldsymbol{b} : \boldsymbol{I} = I_b$$
$$II_C = \tfrac{1}{2}[\,\mathrm{tr}^2(\boldsymbol{C}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^2)\,] = \tfrac{1}{2}[\,\mathrm{tr}^2(\boldsymbol{b}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{b}^2)\,] = II_b$$
$$III_C = \det(\boldsymbol{C}) = J^2 = \det(\boldsymbol{b}) = III_b$$

partielle Ableitung der Invarianten

$$\frac{\partial I_C}{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{I} \qquad \frac{\partial I_b}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{I}$$
$$\frac{\partial II_C}{\boldsymbol{C}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{t}} \qquad \frac{\partial II_b}{\boldsymbol{b}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{b})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{t}}$$
$$\frac{\partial III_C}{\boldsymbol{C}} = \det(\boldsymbol{C})\ \boldsymbol{C}^{-1} = J^2\ \boldsymbol{C}^{-\mathrm{t}} \qquad \frac{\partial III_b}{\boldsymbol{b}} = \det(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{b}^{-1} = J^2\ \boldsymbol{b}^{-\mathrm{t}}$$

Verzerrungsenergiefunktion des Neo–Hooke Materials

$$^{\mathrm{neo}}(\boldsymbol{C}) = \frac{}{2}[\,I_C - 3\,] - \ \ln(J) + \frac{}{2}[\,\ln(J)\,]^2$$

mit:

$$\frac{\partial \ln(J)}{\partial \boldsymbol{C}} = \frac{\partial \ln(\sqrt{III_C})}{\partial \boldsymbol{C}} = \frac{1}{\sqrt{III_C}}\frac{\partial \sqrt{III_C}}{\partial \boldsymbol{C}} = \frac{1}{\sqrt{III_C}}\frac{1}{2}\frac{III_C}{\sqrt{III_C}}\boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{C}^{-1}$$
$$\frac{\partial \ln^2(J)}{\partial \boldsymbol{C}} = 2\ln(J)\,\frac{1}{2}\,\boldsymbol{C}^{-1} = \ln(J)\,\boldsymbol{C}^{-1}$$

zugehörige Spannungen und Materialoperator

$$^{\mathrm{neo\,t}} = 2\frac{\partial\ ^{\mathrm{neo}}}{\partial \boldsymbol{C}} = \ [\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^{-1}\,] + \ \ln(J)\,\boldsymbol{C}^{-1}$$
$$\mathbb{L}^{\mathrm{neo}} = 2\frac{\partial\ ^{\mathrm{neo\,t}}}{\partial \boldsymbol{C}} = [\,2\ \ - 2\ \ \ln(J)\,][\,-\frac{\partial \boldsymbol{C}^{-1}}{\partial \boldsymbol{C}}\,] + \ \boldsymbol{C}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}^{-1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{C}^{-1}}{\partial \boldsymbol{C}} = -\tfrac{1}{2}\left[\boldsymbol{C}^{-1}\overline{\otimes}\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{C}^{-1}\underline{\otimes}\boldsymbol{C}^{-1}\right]$$
$$\left[\frac{\partial C_{IJ}^{-1}}{\partial C_{KL}}\right] = -\tfrac{1}{2}\left[C_{IK}^{-1}C_{JL}^{-1} + C_{IL}^{-1}C_{JK}^{-1}\right]$$

Beispiel: Neo–Hooke Material (räumlich)

push forward des Spannungstensors und des Materialtensors

$$
\begin{aligned}
{}^{\text{neo t}} &= \frac{1}{J}\,\boldsymbol{F}\cdot\ {}^{\text{neo t}}\cdot\boldsymbol{F}^{\text{t}} = \frac{}{J}\,[\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{I}\,] + \frac{\ln(J)}{J}\,\boldsymbol{I} \\
\mathbb{E}^{\text{neo}} &= \frac{1}{J}\,[\,\boldsymbol{F}\bar{\otimes}\boldsymbol{F}\,] : \mathbb{L}^{\text{neo}} : [\,\boldsymbol{F}^{\text{t}}\bar{\otimes}\boldsymbol{F}^{\text{t}}\,] = \ {}^{*}\,\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + 2\ {}^{*}\,\mathbb{i}^{\text{sym}}
\end{aligned}
$$

Materialparameter

$$
{}^{*} = \frac{}{J} \qquad\qquad {}^{*} = \frac{-\quad\ln(J)}{J}
$$

$\boldsymbol{I}$ ... zweistufiger Einheitstensor $[I_{ij}] = \ {}_{ij}$
$\mathbb{i}^{\text{sym}}$ ... symmetrischer vierstufiger Einheitstensor
$\mathbb{i}^{\text{sym}} = \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{I}\overline{\otimes}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}\underline{\otimes}\boldsymbol{I}]$ bzw. $[\mathrm{i}^{\text{sym}}_{ijkl}] = \frac{1}{2}\,[\ {}_{ik}\ {}_{jl} + \ {}_{il}\ {}_{jk}]$

vergleiche FEM I, Hooke'sches Gesetz, $J \leftarrow 1,\ \ {}^{*} \leftarrow\ \ ,\ \ {}^{*} \leftarrow$

1.3 Bilanzgleichungen

zeitliche Änderung der Bilanzgröße $\{\bullet\}_0$, $\{\bullet\}_t$ bilanziert mit Oberflächenfluß $\{\Box\}$, $\{\Diamond\}$ und Volumenquelltermen $\{\circ\}_0$, $\{\circ\}_t$

- materiell, auf raumfestem materiellem Gebiet $\mathcal{B}_0$

$$\mathrm{D}_t\{\bullet\}_0 = \mathrm{Div}\,\{\Box\} + \{\circ\}_0$$

- räumlich, auf zeitveränderlichem räumlichem Gebiet $\mathcal{B}_t$

$$\mathrm{D}_t\{\bullet\}_t = \mathrm{div}\,(\{\Diamond\}) + \{\circ\}_t \quad \mathrm{d}_t\{\bullet\}_t = \mathrm{div}\,(\{\Diamond\} - \{\bullet\}_t \otimes \boldsymbol{v}) + \{\circ\}_t$$

1.3.1 Massenbilanz

"Die zeitliche Änderung der Masse m, der materiellen Volumendichte $\;_0$ im materiellen Gebiet $\mathcal{B}_0$, bzw. der räumlichen Volumendichte $\;_t$ im räumlichen Gebiet $\mathcal{B}_t$ ist identisch zu Null."

- materiell

$$\mathrm{D}_t \;\;_0 = 0$$

kein Fluß– & Quellterm, konstante Massendichte $\;_0 = \mathrm{const.}$

- räumlich

$$\mathrm{D}_t \;\;_t = - \;\;_t\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}) \qquad \mathrm{d}_t \;\;_t = \mathrm{div}\,(- \;\;_t\,\boldsymbol{v})$$

vergleiche Kontinuitätsgleichung der Strömungsmechanik

1.3.2 Impulsbilanz

"Die zeitliche Änderung des Impulses $\boldsymbol{I}$, der mit der materiellen bzw. räumlichen Volumendichte $\;_0$ bzw. $\;_t$ gewichteten Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{v}} = \mathrm{D}_t' \;\; = '^{\cdot\cdot}$ im materiellen bzw. räumlichen

Gebiet $\mathcal{B}_0$ bzw. $\mathcal{B}_t$ entspricht der Summe aus Kräften aus dem Oberflächenfluß $\;^{t}$, und den Volumenkräften $\;_0\boldsymbol{b}$, $\;_t\boldsymbol{b}$ (z.B. Gravitation)."

- lokale Form, materiell

$$\;_0\,\mathrm{D}_t\boldsymbol{v} = \mathrm{Div}\,(\quad^{\mathrm{t}}) + \;_0\,\boldsymbol{b}$$

1. Cauchy'sche Bewegungsgleichung

- räumlich

$$\;_t\,\mathrm{D}_t\boldsymbol{v} = \mathrm{div}\,(\quad^{\mathrm{t}}) + \;_t\,\boldsymbol{b} \qquad \;_t\,\mathrm{d}_t\boldsymbol{v} = \mathrm{div}\,(\quad^{\mathrm{t}} - \;_t\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) + \;_t\,\boldsymbol{b}$$

vergleiche Strömungsmechanik

1.3.3 Drehimpulsbilanz

"Die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{I}$, entspricht der Summe aus dem Drehimpuls verursacht durch Oberflächenkräfte $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}$ und dem Drehimpuls verursacht durch Volumenkräfte $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b}$."

- materiell

$$\boldsymbol{F} \cdot \quad = \quad^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \qquad\qquad = \quad^{\mathrm{t}}$$

1. Piola–Kirchhoff Spannungstensor nicht symmetrisch, aber
2. Piola–Kirchhoff Spannungstensor ist symmetrisch

- räumlich

$$\quad = \quad^{\mathrm{t}}$$

Symmetrie des Cauchy Spannungstensors

1.3.4 Energiebilanz

"Die zeitliche Änderung der (inneren) Energie I_0 Entropie S_0 entspricht der Summe aus Wärmeänderung durch den Oberflächenfluß $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{q}$ und den Volumenquellterm $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_t$ plus der inneren mechanischen Leistung $\;^{\mathrm{t}} : \mathrm{D}_t\boldsymbol{F}$, $\; : \nabla_x\boldsymbol{v}$."

- materiell, energie–basiert

$$\mathrm{D}_t I_0 = \mathrm{Div}\,(-\boldsymbol{Q}) + \mathcal{Q}_0 + \;^{\mathrm{t}} : \mathrm{D}_t\boldsymbol{F}$$

- materiell, entropie–basiert
  mit $I_0 = \;_0 + \; S_0$ und $\mathrm{D}_t \;_0 = \;^{\mathrm{t}} : \mathrm{D}_t\boldsymbol{F} - S_0\,\mathrm{D}_t$ folgt

$$\mathrm{D}_t S_0 = \mathrm{Div}\,(-\boldsymbol{Q}) + \mathcal{Q}_0$$

- räumlich, energie–basiert

$$\mathrm{D}_t I_t = \mathrm{div}\,(-\boldsymbol{q}) + \mathcal{Q}_t + \;^{\mathrm{t}} : \nabla_x\boldsymbol{v} \quad \mathrm{d}_t I_t = \mathrm{div}\,(-\boldsymbol{q} - I_t\boldsymbol{v}) + \mathcal{Q}_t + \;^{\mathrm{t}} : \nabla$$

(wobei $\nabla_x\boldsymbol{v} = \mathrm{D}_t\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{l}$)

- räumlich, entropie–basiert
  mit $I_t = \;_t + \; S_t$ und $\mathrm{D}_t \;_t = \;^{\mathrm{t}} : \nabla_x\boldsymbol{v} - S_t\,\mathrm{D}_t$ folgt

$$\mathrm{D}_t S_t = -\mathrm{div}\,(-\boldsymbol{q}) + \mathcal{Q}_t \qquad \mathrm{d}_t S_t = \mathrm{div}\,(-\boldsymbol{q} - S_t\boldsymbol{v}) + \mathcal{Q}_t$$

1.4 Prinzip der virtuellen Arbeit

1.4.1 Prinzip der virtuellen Arbeit (materiell)

- Kinematik $\quad \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right]$ in $\mathcal{B}_0$
- Gleichgewicht $\quad {}_0\,'^{\cdot\cdot} = \mathrm{Div}\ {}^{\mathrm{t}} + {}_0\boldsymbol{b}$ in $\mathcal{B}_0$
- Konstitutives Gesetz $\quad {}^{\mathrm{t}} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}}$ in $\mathcal{B}_0$
- Dirichlet RB $\quad ' = '^{-}$ auf $\partial\mathcal{B}_{0'}$
- Neumann RB $\quad \boldsymbol{T} = {}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{N} = \bar{\boldsymbol{T}}$ auf $\partial\mathcal{B}_0$

0. Ausgangspunkt: lokale materielle Form der Impulsbilanz

$$- {}_0\,'^{\cdot\cdot} + \mathrm{Div}\ {}^{\mathrm{t}} + {}_0\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$
$$- {}_0\,'^{\cdot\cdot}{}_i + {}^{\mathrm{t}}_{iJ,J} + {}_0\,b_i = 0_i$$

1. Skalarmultiplikation mit Testfunktion

$$\cdot \left[- {}_0\,'^{\cdot\cdot} + \mathrm{Div}\ {}^{\mathrm{t}} + {}_0\,\boldsymbol{b} \right] = 0$$
$${}_i \left[- {}_0\,'^{\cdot\cdot}{}_i + {}^{\mathrm{t}}_{iJ,J} + {}_0\,b_i \right] = 0$$

2. Integration über das materielle Gebiet $\mathcal{B}_0$

$$-\int_{\mathcal{B}_0} \cdot {}_0\,'^{\cdot\cdot}\ \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0} \cdot \mathrm{Div}\ {}^{\mathrm{t}}\ \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0} \cdot {}_0\,\boldsymbol{b}\ \mathrm{d}V = 0$$
$$-\int_{\mathcal{B}_0} {}_i\ {}_0\,'^{\cdot\cdot}{}_i\,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0} {}_i\ {}^{\mathrm{t}}_{iJ,J}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0} {}_i\ {}_0\,b_i\,\mathrm{d}V = 0$$

3. partielle Integration des Divergenzterms

$$\int_{\mathcal{B}_0} \cdot \mathrm{Div}\ {}^{\mathrm{t}}\ \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}_0} \mathrm{Div}\left[\ \cdot\ {}^{\mathrm{t}}\right]\ \mathrm{d}V - \int_{\mathcal{B}_0} \nabla_X\ :\ {}^{\mathrm{t}}\ \mathrm{d}V$$
$$\int_{\mathcal{B}_0} {}_i\ {}^{\mathrm{t}}_{iJ,J}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}_0} \left[\ {}_i\ {}^{\mathrm{t}}_{iJ}\right]_{,J}\mathrm{d}V - \int_{\mathcal{B}_0} {}_{i,J} : {}^{\mathrm{t}}_{iJ}\,\mathrm{d}V$$

4. Gauss'scher Integralsatz

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathrm{Div}\,[\quad\cdot\quad^{\mathrm{t}}]\;\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \quad\cdot\quad^{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{N}\;\mathrm{d}A$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \quad[\;_i\quad^{\mathrm{t}}_{iJ}]_{,J}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \;_i\quad^{\mathrm{t}}_{iJ}\;N_J\,\mathrm{d}A$$

5. Randbedingungen

$' \quad = '^{-}$ auf $\partial\mathcal{B}_{0'}$ $\qquad = \boldsymbol{0}$ auf $\partial\mathcal{B}_{0'}$ $\qquad \boldsymbol{T} = \quad^{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{N} = \bar{\boldsymbol{T}}$ auf $\partial\mathcal{B}_0$

$' \;_i = '^{-}{}_i$ auf $\partial\mathcal{B}_{0'}$ $\qquad _i = 0_i$ auf $\partial\mathcal{B}_{0'}$ $\qquad T_i = \quad^{\mathrm{t}}_{iJ}\cdot N_J = \bar{T}_i$ auf $\partial\mathcal{B}_0$

$$\int_{\partial\mathcal{B}_0} \quad\cdot\quad^{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{N}\;\mathrm{d}A = \int_{\partial\mathcal{B}_{0'}} \quad\cdot\quad^{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{N}\;\mathrm{d}A + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \quad\cdot\bar{\boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}A$$

$$\int_{\partial\mathcal{B}_0} \;_i\quad^{\mathrm{t}}_{iJ}\;N_J\,\mathrm{d}A = \int_{\partial\mathcal{B}_{0'}} \;_i\quad^{\mathrm{t}}_{iJ}\;N_J\,\mathrm{d}A + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \;_i\;\bar{T}_i\,\mathrm{d}A$$

- schwache Form

$$\int_{\mathcal{B}_0} \quad\cdot\;_0{'}^{\cdot\cdot}\;\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0}\nabla_X\quad:\quad^{\mathrm{t}}\mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}_0}\quad\cdot\bar{\boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}A - \int_{\mathcal{B}_0}\quad\cdot\;_0\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}V = 0$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \;_i\;_0{'}^{\cdot\cdot}{}_i\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0}\quad_{i,J}:\quad^{\mathrm{t}}_{iJ}\mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}_0}\;_i\;\bar{T}_i\mathrm{d}A - \int_{\mathcal{B}_0}\;_i\;_0 b_i\mathrm{d}V = 0$$

bzw. mit $\nabla_X \quad : \quad^{\mathrm{t}} = \nabla_X \quad : \boldsymbol{F}\cdot \quad = [\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}}\cdot\nabla_X\quad]^{\mathrm{sym}} :$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \quad\cdot\;_0{'}^{\cdot\cdot}\;\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0}[\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}}\cdot\nabla_X\quad]^{\mathrm{sym}}:\quad\mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}_0}\quad\cdot\bar{\boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}A - \int_{\mathcal{B}_0}\quad\cdot\;_0\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}V = 0$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} \;_i\;_0{'}^{\cdot\cdot}{}_i\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0}[F^{\mathrm{t}}_{Ii}\quad_{i,J}]^{\mathrm{sym}}:\quad^{\mathrm{t}}_{IJ}\mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}_0}\;_i\;\bar{T}_i\mathrm{d}A - \int_{\mathcal{B}_0}\;_i\;_0 b_i\mathrm{d}V = 0$$

Interpretation als Prinzip der virtuellen Arbeit

mit $\leftarrow$ ' ... virtuelle Verschiebung

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_0^{\mathrm{dyn}} + \mathcal{W}_0^{\mathrm{int}} - \mathcal{W}_0^{\mathrm{ext}} = 0$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_0^{\mathrm{dyn}} &= \int_{\mathcal{B}_0} {}' \cdot {}_0 {}'^{\,\cdot\cdot} \, \mathrm{d}V \\
\mathcal{W}_0^{\mathrm{int}} &= \int_{\mathcal{B}_0} \nabla_X {}' : {}^{\mathrm{t}} \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{E} : \, \mathrm{d}V \\
\mathcal{W}_0^{\mathrm{ext}} &= \int_{\partial\mathcal{B}_0} {}' \cdot \bar{\boldsymbol{T}} \, \mathrm{d}A + \int_{\mathcal{B}_0} {}' \cdot {}_0 \boldsymbol{b} \, \mathrm{d}V
\end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{E} = [\ \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F}\,]^{\mathrm{sym}}$ ... virtueller Verzerrungstensor

1.4.2 Prinzip der virtuellen Arbeit (räumlich)

- Kinematik $\quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \quad$ in $\quad \mathcal{B}_t$
- Gleichgewicht $\quad {}_t\,{}^{\prime\cdot\cdot} = \mathrm{div} \quad + \; {}_t\boldsymbol{b} \quad$ in $\quad \mathcal{B}_t$
- Konstitutives Gesetz $\quad = \dfrac{2}{J}\,\boldsymbol{b}\cdot\dfrac{\partial W}{\partial \boldsymbol{b}} \quad$ in $\quad \mathcal{B}_t$
- Dirichlet RB $\quad {}^{\prime} = {}^{\prime -} \quad$ auf $\quad \partial\mathcal{B}_{t}$
- Neumann RB $\quad \boldsymbol{t} = {}^{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}} \quad$ auf $\quad \partial\mathcal{B}_t$

0. Ausgangspunkt: lokale räumliche Form der Impulsbilanz

$$- \;{}_t\,{}^{\prime\cdot\cdot} + \mathrm{div} \qquad + \;{}_t\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$
$$- \;{}_t\,{}^{\prime\cdot\cdot}{}_i + \qquad {}_{ij,j} + \;{}_t\,b_i = 0_i$$

1. Skalarmultiplikation mit Testfunktion

$$\cdot\,[\,- \;{}_t\,{}^{\prime\cdot\cdot} + \mathrm{div} \qquad + \;{}_t\,\boldsymbol{b}\,] = 0$$
$${}_i\;[\,- \;{}_t\,{}^{\prime\cdot\cdot}{}_i + \qquad {}_{ij,j} + \;{}_t\,b_i\,] = 0$$

2. Integration über das räumliche Gebiet $\mathcal{B}_t$

$$-\int_{\mathcal{B}_t} \cdot \;{}_t\,{}^{\prime\cdot\cdot}\,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{B}_t} \cdot\,\mathrm{div} \qquad \mathrm{d}v + \int_{\mathcal{B}_t} \cdot \;{}_t\,\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}v = 0$$
$$-\int_{\mathcal{B}_t} {}_i \;\; {}_t\,{}^{\prime\cdot\cdot}{}_i\,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{B}_t} {}_i \qquad {}_{ij,j}\,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{B}_t} {}_i \;\; {}_t\,b_i\,\mathrm{d}v = 0$$

3. partielle Integration des Divergenzterms

$$\int_{\mathcal{B}_t} \cdot\,\mathrm{div} \qquad \mathrm{d}v = \int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{div}\,[\quad\cdot\quad]\;\mathrm{d}v - \int_{\mathcal{B}_t} \nabla_x^{\mathrm{sym}} \qquad : \qquad \mathrm{d}v$$
$$\int_{\mathcal{B}_t} {}_i \qquad {}_{ij,j}\,\mathrm{d}v = \int_{\mathcal{B}_t} [\;{}_i \quad {}_{ij}\,]_{,j}\,\mathrm{d}v - \int_{\mathcal{B}_t} {}^{\mathrm{sym}}_{i,j} : \;{}_{ij}\,\mathrm{d}v$$

4. Gauss'scher Integralsatz

$$\int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{div}\,[\quad\cdot\quad]\;\mathrm{d}v = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \quad\cdot\quad\cdot\boldsymbol{n}\;\mathrm{d}a$$
$$\int_{\mathcal{B}_t} \quad[\;_i\quad_{ij}]_{,j}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \;_i\quad_{ij}\;n_j\,\mathrm{d}a$$

5. Randbedingungen

$$' \;=\; '^{-} \text{ auf } \partial\mathcal{B}_{t'} \qquad = \mathbf{0} \text{ auf } \partial\mathcal{B}_{t'} \qquad \boldsymbol{t} = \quad\cdot\boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}} \text{ auf } \partial\mathcal{B}_t$$
$$'\,_i = '^{-}_i \text{ auf } \partial\mathcal{B}_{t'} \qquad _i = 0_i \text{ auf } \partial\mathcal{B}_{t'} \qquad t_i = \;_{ij}\cdot n_j = \bar{t}_i \text{ auf } \partial\mathcal{B}_t$$

$$\int_{\partial\mathcal{B}_t} \quad\cdot\quad\cdot\boldsymbol{n}\;\mathrm{d}a = \int_{\partial\mathcal{B}_{t'}} \quad\cdot\quad\cdot\boldsymbol{n}\;\mathrm{d}a + \int_{\partial\mathcal{B}_t} \quad\cdot\bar{\boldsymbol{t}}\;\mathrm{d}a$$
$$\int_{\partial\mathcal{B}_t} \;_i\quad_{ij}\;n_j\,\mathrm{d}a = \int_{\partial\mathcal{B}_{t'}} \;_i\quad_{ij}\;n_j\,\mathrm{d}a + \int_{\partial\mathcal{B}_t} \;_i\;\bar{t}_i\,\mathrm{d}a$$

- schwache Form

$$\int_{\mathcal{B}_t} \cdot\;_t{}^{'\cdot\cdot}\;\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{B}_t} \nabla_x^{\mathrm{sym}}\quad:\quad\mathrm{d}v - \int_{\partial\mathcal{B}_t} \cdot\bar{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}a - \int_{\mathcal{B}_t} \cdot\;_t\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}v = 0$$
$$\int_{\mathcal{B}_t} \;_i\;_t{}^{'\cdot\cdot}{}_i\,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{B}_t} \quad^{\mathrm{sym}}_{i,j} : \;_{ij}\mathrm{d}v - \int_{\partial\mathcal{B}_t} \;_i\;\bar{t}_i\,\mathrm{d}a - \int_{\mathcal{B}_t} \;_i\;_t b_i\,\mathrm{d}v = 0$$

Interpretation als Prinzip der virtuellen Leistung

mit $\quad\leftarrow\quad\boldsymbol{v}$ ... virtuelle Geschwindigkeit

$$\mathcal{W}_t = \;\mathcal{W}_t^{\mathrm{dyn}} + \;\mathcal{W}_t^{\mathrm{int}} - \;\mathcal{W}_t^{\mathrm{ext}} = 0$$

mit

$$\mathcal{W}_t^{\mathrm{dyn}} = \int_{\mathcal{B}_t} \quad\boldsymbol{v}\cdot\;_t{}^{'\cdot\cdot}\quad\mathrm{d}v$$
$$\mathcal{W}_t^{\mathrm{int}} = \int_{\mathcal{B}_t} \nabla_x^{\mathrm{sym}}\;\boldsymbol{v} :\quad\mathrm{d}v = \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{d} :\quad\mathrm{d}v$$
$$\mathcal{W}_t^{\mathrm{ext}} = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \quad\boldsymbol{v}\cdot\bar{\boldsymbol{t}}\quad\mathrm{d}a + \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{v}\cdot\;_t\boldsymbol{b}\;\mathrm{d}v$$

wobei $\boldsymbol{d} = \nabla_x^{\mathrm{sym}}\;\boldsymbol{v}$ ... virtueller Deformationsratentensor

1.5 Richtungsableitung – Linearisierung

Problem: nichtlineare Kontinuumsmechanik führt auf nichtlineares Gleichungssystem, i.a. gelöst mit Newton–Raphson Verfahren, dazu Linearisierung des nichtlinearen Gleichungssystems erforderlich

allgemeine Definition der Richtungsableitung von $\mathcal{F}(\boldsymbol{x})$ an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ in Richtung von $\Delta\boldsymbol{x}$

$$\Delta\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0) = \mathrm{D}_{\Delta x}\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\Delta\boldsymbol{x} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\left[\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0 + \quad \Delta\boldsymbol{x})\right]\bigg|_{=0}$$

Bemerkung: Die Richtungsableitung $\mathrm{D}_{\Delta x}\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\Delta\boldsymbol{x}$ liefert die Änderung der Funktion $\mathcal{F}$ aufgrund einer kleinen Änderung $\Delta\boldsymbol{x}$ ihres Argumentes $\boldsymbol{x}_0$. $\mathrm{D}_{\Delta x}\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\Delta\boldsymbol{x}$ ist dabei immer linear in $\Delta\boldsymbol{x}$, so daß die Richtungsableitung auch als Linearisierung $\Delta\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0)$ von $\mathcal{F}$ bezüglich $\Delta\boldsymbol{x}$ verstanden werden kann.

Bemerkung: Häufig findet man auch die folgende Darstellung.

$$\Delta\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial\boldsymbol{x}_0}\cdot\Delta\boldsymbol{x} \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{D}_{\Delta x}\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial\boldsymbol{x}_0}$$

hier: primäre Unbekannte Deformationsabbildung ' , Linearisierung des Residuums $\boldsymbol{r}$ an der Stelle ' in Richtung von Δ'

$$\Delta\boldsymbol{r}(' \quad) = \mathrm{D}_{\Delta'}\,\boldsymbol{r}(' \quad)\cdot\Delta' \quad := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\left[\boldsymbol{r}(' \quad + \quad \Delta' \quad)\right]\bigg|_{=0}$$

1.5.1 Linearisierung kinematischer Größen

- Linearisierung von $\boldsymbol{F}$ an der Stelle ' in Richtung von Δ'

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{F} = \mathrm{D}_{\Delta'}\ \boldsymbol{F}(' \ ) \cdot \Delta' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}[\ \ \boldsymbol{F}(' \ \ + \ \ \Delta' \ )\ \ ]|_{\ =0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}[\nabla_X' \ \ + \nabla_X[\ \ \Delta' \ ]]|_{\ =0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}[\nabla_X' \ \ + \ \ \nabla_X[\Delta' \ ]]|_{\ =0} \\
&= \qquad \nabla_X \Delta' \qquad |_{\ =0} = \nabla_X \Delta'
\end{aligned}
$$

- Linearisierung von $\boldsymbol{E}$ an der Stelle ' in Richtung von Δ'

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{E} &= \mathrm{D}_{\Delta'}\ \ \boldsymbol{E}(' \ ) \cdot \Delta' \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\ \ [\boldsymbol{E}(' \ \ + \ \ \Delta' \ )]|_{\ =0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\ \frac{1}{2}\ [[\nabla_X^{\mathrm{t}}' \ \ + \nabla_X^{\mathrm{t}}[\ \ \Delta' \ ]] \cdot [\nabla_X' \ \ + \nabla_X[\ \ \Delta' \ ]] - \boldsymbol{I}]|_{\ =0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\ \frac{1}{2}\ [\nabla_X^{\mathrm{t}}' \ \ \cdot \nabla_X' \ \ + \ \ \nabla_X^{\mathrm{t}}' \ \ \cdot \nabla_X \Delta' \\
&\qquad + \ \ \nabla_X^{\mathrm{t}} \Delta' \ \ \cdot \nabla_X' \ \ + \ {}^2\, \nabla_X^{\mathrm{t}} \Delta' \ \ \cdot \nabla_X \Delta' \ \ - \boldsymbol{I}]|_{\ =0} \\
&= \ \ \frac{1}{2}\ [\nabla_X^{\mathrm{t}}' \ \ \cdot \nabla_X \Delta' \ \ + \nabla_X^{\mathrm{t}} \Delta' \ \ \cdot \nabla_X' \ \ ] = [\Delta \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F}]^{\mathrm{sym}}
\end{aligned}
$$

alternative Herleitung

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{E} = \mathrm{D}_{\Delta'}\ \boldsymbol{E}(' \ ) \cdot \Delta' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\frac{1}{2}[\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}}(' \ \ + \ \ \Delta' \ ) \cdot \boldsymbol{F}(' \ \ + \ \ \Delta' \ ) - \boldsymbol{I}]|_{\ =0} \\
&= \ \ \frac{1}{2}[\qquad \Delta \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \Delta \boldsymbol{F} \qquad] \\
&= \qquad [\ \Delta \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F}\ ]^{\mathrm{sym}}
\end{aligned}
$$

1.5.2 Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit (materiell)

Bemerkung: hier Linearisierung der kontinuierlichen Gleichungen, dann Diskretisierung mit Finiten Elementen, alternativ: Diskretisierung, dann Linearisierung (insbesondere bei Strukturelementen)

Problem: nichtlineares Gleichungssystem der Form

$$\int_{\mathcal{B}_0} \quad \cdot \quad {}_0 \,'^{\cdot\cdot}\, \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0} [\nabla^{\mathrm{t}}_{X} \quad \cdot \boldsymbol{F}]^{\mathrm{sym}} : \quad \mathrm{d}V$$
$$- \int_{\partial\mathcal{B}_0} \quad \cdot \bar{\boldsymbol{T}} \mathrm{d}A - \int_{\mathcal{B}_0} \quad \cdot \quad {}_0\, \boldsymbol{b} \mathrm{d}V \; = 0$$

allgemeine Form

$$\mathcal{W}_0(' \quad + \Delta' \quad) = 0$$

iterative Lösung mit Hilfe des Newton–Raphson Verfahrens
Taylor Reihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Term

$$\mathcal{W}_0(' \quad + \Delta' \quad) = \quad \mathcal{W}_0(' \quad) + \Delta \quad \mathcal{W}_0(' \quad) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 \; &= \quad\;\; \mathcal{W}_0^{\mathrm{dyn}} \; + \quad\;\; \mathcal{W}_0^{\mathrm{int}} \; - \quad\;\; \mathcal{W}_0^{\mathrm{ext}} \\ \Delta \quad \mathcal{W}_0 \; &= \; \Delta \quad \mathcal{W}_0^{\mathrm{dyn}} \; + \; \Delta \quad \mathcal{W}_0^{\mathrm{int}} \; - \; \Delta \quad \mathcal{W}_0^{\mathrm{ext}} \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_0^{\mathrm{dyn}} &= \int_{\mathcal{B}_0} \cdot \;{}_0 '^{\cdot\cdot} \quad \mathrm{d}V \\
\Delta \; \mathcal{W}_0^{\mathrm{dyn}} &= \int_{\mathcal{B}_0} \cdot \;{}_0 \frac{\partial '^{\cdot\cdot}}{\partial '} \cdot \Delta ' \quad \mathrm{d}V \\
\mathcal{W}_0^{\mathrm{int}} &= \int_{\mathcal{B}_0} [\nabla_X^{\mathrm{t}} \quad \cdot \boldsymbol{F}]^{\mathrm{sym}} : \quad \mathrm{d}V \\
\Delta \; \mathcal{W}_0^{\mathrm{int}} &= \int_{\mathcal{B}_0} [\nabla_X^{\mathrm{t}} \quad \cdot \nabla_X \Delta ' \;]^{\mathrm{sym}} : \quad \mathrm{d}V \; \text{geom. Anteil} \\
&+ \int_{\mathcal{B}_0} [\nabla_X^{\mathrm{t}} \quad \cdot \boldsymbol{F}]^{\mathrm{sym}} : \mathbb{L} : [\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \nabla_X \Delta ' \;]^{\mathrm{sym}} \mathrm{d}V \quad \text{mat. Anteil} \\
\mathcal{W}_0^{\mathrm{ext}} &= \int_{\partial\mathcal{B}_0} \cdot \bar{\boldsymbol{T}} \mathrm{d}A + \int_{\mathcal{B}_0} \cdot \;{}_0 \boldsymbol{b} \quad \mathrm{d}V \\
\Delta \; \mathcal{W}_0^{\mathrm{ext}} &= \int_{\partial\mathcal{B}_0} 0 \quad \mathrm{d}A + \int_{\partial\mathcal{B}_0} 0 \quad \mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

Interpretation als Prinzip der virtuellen Arbeit

mit $\leftarrow \; '$ ... virtuelle Verschiebung

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_0^{\mathrm{int}} &= \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{E} : \mathbb{L} : \quad \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}V \\
\Delta \; \mathcal{W}_0^{\mathrm{int}} &= \int_{\mathcal{B}_0} \Delta\boldsymbol{E} : \mathbb{L} : \quad \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}V \qquad \text{geometrischer Anteil} \\
&+ \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{E} : \mathbb{L} : \Delta\boldsymbol{E} \, \mathrm{d}V \qquad \text{materieller Anteil}
\end{aligned}
$$

wobei

... Variation

Δ ... Linearisierung (formal gleiche Herleitung)

mit

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \nabla_X \; ' & \boldsymbol{E} &= [\quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \quad \boldsymbol{F}]^{\mathrm{sym}} \\
\Delta \; \boldsymbol{F} &= \nabla_X \Delta ' & \Delta \; \boldsymbol{E} &= [\; \Delta\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \quad \boldsymbol{F}]^{\mathrm{sym}} \\
& & \Delta \; \boldsymbol{E} &= [\quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \; \Delta\boldsymbol{F}]^{\mathrm{sym}}
\end{aligned}
$$

1.5.3 Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit (räumlich)

Problem: nichtlineares Gleichungssystem der Form

$$\int_{\mathcal{B}_t} \quad \cdot \quad {}_t \ddot{'} \,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{B}_t} \nabla_x^{\mathrm{sym}} \quad : \quad \mathrm{d}v - \int_{\partial\mathcal{B}_t} \quad \cdot \bar{\boldsymbol{t}} \,\mathrm{d}a - \int_{\mathcal{B}_t} \quad \cdot \quad {}_t \boldsymbol{b} \,\mathrm{d}v$$

allgemeine Form

$$\mathcal{W}_t(' \quad + \Delta' \quad) = 0$$

iterative Lösung mit Hilfe des Newton–Raphson Verfahrens
Taylor Reihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Term

$$\mathcal{W}_t(' \quad + \Delta' \quad) = \quad \mathcal{W}_t(' \quad) + \Delta \quad \mathcal{W}_t(' \quad) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_t &= \quad \mathcal{W}_t^{\mathrm{dyn}} + \quad \mathcal{W}_t^{\mathrm{int}} - \quad \mathcal{W}_t^{\mathrm{ext}} \\ \Delta \quad \mathcal{W}_t &= \Delta \quad \mathcal{W}_t^{\mathrm{dyn}} + \Delta \quad \mathcal{W}_t^{\mathrm{int}} - \Delta \quad \mathcal{W}_t^{\mathrm{ext}} \end{aligned}$$

Bemerkung: Linearisierung auf bewegtem Gebiet $\mathcal{B}_t$ nicht ohne weiteres durchführbar, deshalb: push forward der materiellen Form aus 1.5.2 dazu

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{1}{J} \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}V = \frac{1}{J} \mathrm{d}v$$

also

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_t^{\text{dyn}} &= \int_{\mathcal{B}_t} \cdot \ {}_t\,\ddot{'} \ \mathrm{d}v \\
\Delta\ \mathcal{W}_t^{\text{dyn}} &= \int_{\mathcal{B}_t} \cdot \ {}_t\,\frac{\partial \ddot{'}}{\partial '} \cdot \Delta' \ \mathrm{d}v \\
\mathcal{W}_t^{\text{int}} &= \int_{\mathcal{B}_t} \nabla_x^{\text{sym}} \ : \ \mathrm{d}v \\
\Delta\ \mathcal{W}_t^{\text{int}} &= \int_{\mathcal{B}_t} [\nabla_x^{\text{t}} \ \cdot \nabla_x \Delta' \ ]^{\text{sym}} : \ \mathrm{d}v \quad \text{geometrischer Anteil} \\
&+ \int_{\mathcal{B}_t} \nabla_x^{\text{sym}} \ : \mathbb{E} : \nabla_x^{\text{sym}} \Delta' \ \mathrm{d}v \quad \text{materieller Anteil} \\
\mathcal{W}_t^{\text{ext}} &= \int_{\partial\mathcal{B}_t} \cdot \bar{\boldsymbol{t}} \mathrm{d}a + \int_{\mathcal{B}_t} \cdot \ {}_t\,\boldsymbol{b}\, \mathrm{d}v \\
\Delta\ \mathcal{W}_t^{\text{ext}} &= \int_{\partial\mathcal{B}_t} 0 \ \mathrm{d}a + \int_{\partial\mathcal{B}_t} 0 \ \mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

Interpretation als Prinzip der virtuellen Leistung

mit $\leftarrow \ \boldsymbol{v}$ ... virtuelle Geschwindigkeit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_t^{\text{int}} &= \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{d} : \ \mathrm{d}v \\
\Delta\ \mathcal{W}_t^{\text{int}} &= \int_{\mathcal{B}_t} [\nabla_x^{\text{t}} \ \boldsymbol{v} \cdot \nabla_x \Delta' \ ]^{\text{sym}} : \ \mathrm{d}v \quad \text{geometrischer Anteil} \\
&+ \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{d} : \mathbb{E} : \ \mathrm{d}v \quad \text{materieller Anteil}
\end{aligned}
$$

vergleiche mit geometrisch linearer Theorie (FEM I)

$$
\boldsymbol{d} = \nabla_x^{\text{sym}} \ \boldsymbol{v} \quad \text{und} \quad = \nabla_x^{\text{sym}} \ \boldsymbol{u}
$$

Bemerkungen:

- Generell liefern materielle und räumliche Formulierung identische Ergebnisse, es können also auch einzelne Integralausdrücke materiell und andere räumlich ausgewertet werden.
- Die Beziehung zwischen $\boldsymbol{d} = \nabla_x^{\mathrm{sym}} \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}$ hat formal die gleiche Struktur wie die Beziehung zwischen $\quad = \nabla_x^{\mathrm{sym}} \boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{u}$ der linearen FEM.
- Der materielle Anteil aus der Linearisierung der räumlichen Formulierung nimmt eine analoge Struktur an, wie der entsprechende Term der linearen FEM, deswegen wird häufig die räumliche Form bevorzugt.
- Materielle formulierte Stoffgesetze (St. Venant Kirchhoff) motivieren eine materielle Formulierung, räumliche Stoffgesetze (Neo–Hooke) eine räumliche.
- Bei richtungsabhängigen Lasten, z.B. aus Wasserdruck, der immer senkrecht zur Oberfläche wirkt, ist die Linearisierung der externen Lasten nicht Null, $\Delta \ \mathcal{W}^{\mathrm{ext}} \neq 0$.

1.6 Nichtlineare Analyse eines Dreigelenkrahmens

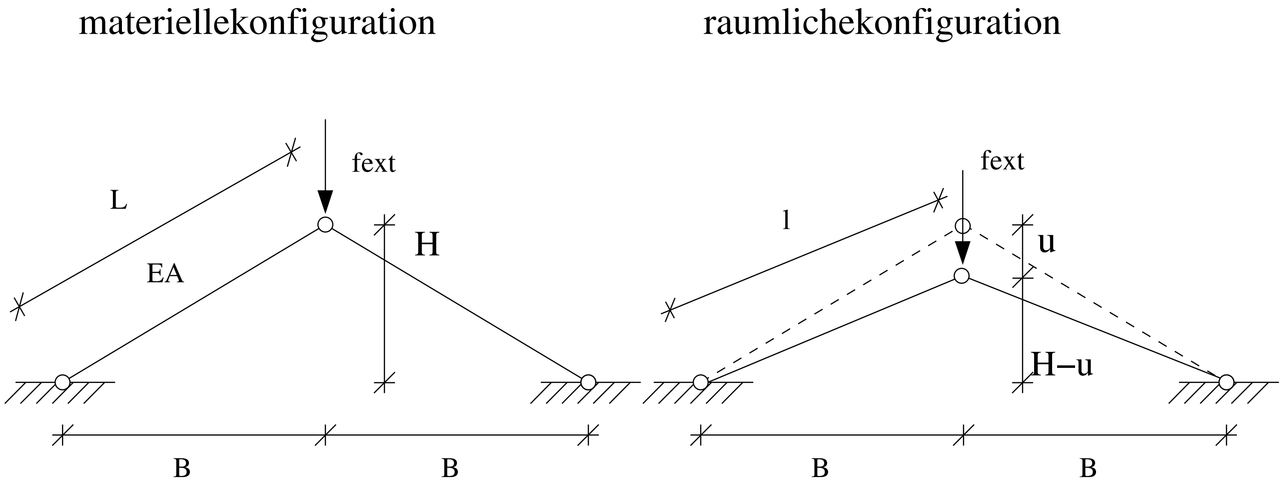


Abbildung 1.4: Dreigelenkrahmen: undeformierte & deformierte Konfiguration

Annahme

homogener Deformationszustand → lineare Deformationsverteilung über Stablänge → konstanter Deformationsgradient

Kinematik

Geometrie des undeformierten Systems

$$L = \sqrt{B^2 + H^2} \qquad l = \sqrt{B^2 + \text{'}\;\;^2}$$

Deformationsgradient ('stretch') F

$$F = \frac{\text{aktuelle Länge}}{\text{Ausgangslänge}} = \frac{l}{L} \qquad J = \det(F) = \frac{l}{L}$$

Verzerrungsmaße

Green–Lagrange Verzerrungstensor E

$$E = \frac{1}{2}\left[\, F^{\mathrm{t}} F - 1 \,\right] = \frac{1}{2}\,\frac{l^2 - L^2}{L^2} = \frac{1}{2L^2}\left[\, '\ \ ^2 - H^2 \,\right]$$

linearer Verzerrungstensor

$$= \frac{\Delta l}{L} \quad \text{mit} \quad \Delta l = u \sin \quad ; \quad \sin \quad = \frac{H}{L} \quad \rightarrow \qquad = \frac{H\,u}{L^2}$$

Linearisierung / Variation kinematischer Größen

Längenänderung

$$\begin{aligned} \Delta l = \mathrm{D}_{\Delta'}\ l(' \ ) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\ \left[\, l\,(' \ \ + \ \ \Delta' \ \ )\,\right] \Big|_{\ =0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\ \left[B^2 + [' \ \ + \ \ \Delta' \ \ ]^2\right]^{1/2} \Bigg|_{\ =0} \\ &= \frac{1}{2\,l}\ \left[2' \ \ \Delta' \ \ + 2\ \ \Delta''^{\,2}\right] \Big|_{\ =0} \\ &= \frac{1}{l}\ \quad ' \ \ \Delta' \end{aligned}$$

Deformationsgradient

$$\Delta F = \mathrm{D}_{\Delta'}\ F\,(' \ ) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\ \left[\frac{1}{L}[\, l\,(' \ \ + \ \ \Delta' \ \ )\,]\right]\Bigg|_{\ =0} = \frac{1}{L\,l}' \ \ \Delta'$$

$$F = \mathrm{D}_{'}\ F\,(' \ ) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\ \left[\frac{1}{L}[\, l\,(' \ \ + \ \ ' \ \ \ )\,]\right]\Bigg|_{\ =0} = \frac{1}{L\,l}' \ '$$

$$\begin{aligned} \Delta\ \ F = \mathrm{D}_{\Delta'}\ \ \ F\,(' \ ) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\ \left[\frac{1}{L l\,(' \ \ + \ \ \Delta' \ \ )}[' \ \ + \ \ \Delta' \ \ ]\ ' \qquad \right]\Bigg|_{\ =0} \\ &= \frac{1}{L\,l}\ ' \quad \left[1 - \frac{' \ \ ^2}{l^2}\right] \Delta' \end{aligned}$$

Green–Lagrange Verzerrungstensor

$$\Delta E = \mathrm{D}_{\Delta'}\ E\,(' \ ) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\ \left[\frac{1}{2\,L^2}[\, l^2\,(' \ \ + \ \ \Delta' \ \ ) - 1\,]\right]\Bigg|_{\ =0} = \frac{1}{L^2}' \ \ \Delta'$$

$$E = \mathrm{D}\cdot \quad E\,(' \quad) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\left[\frac{1}{2\,L^2}[\,l^2\,(' \quad + \quad ' \quad) - 1\,]\right]\Bigg|_{=0} = \frac{1}{L^2}' \ '$$

Bemerkung: Linearisierung der Green–Lagrange Verzerrungen liefert $\Delta\,E \ ^{' \ \to X = H, \Delta' \ \to u}_{\longrightarrow}$

$$\Delta \ \ E = \mathrm{D}_{\Delta'} \quad E\,(' \ ) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\left[\frac{1}{L^2}[' \quad + \quad \Delta' \quad]\ ' \quad \right]\Bigg|_{=0} = \frac{1}{L^2}\Delta' \, '$$

lineare Verzerrungen

$$= \mathrm{D}_{\ u} \quad (u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\left[\frac{H\,[\,u + \quad u\,]}{L^2}\right]\Bigg|_{=0} = \frac{H}{L^2} \ \ u$$

Hyperelastisches Stoffgesetz vom St. Venant Kirchhoff Typ

$$^{\mathrm{kir}} = \mathrm{E}^{\mathrm{mod}}\,E$$

Prinzip der virtuellen Arbeit am halben System

Beschränkung auf symmetrischen Versagenszustand

$$W(' \ ) = \quad W^{\mathrm{int}}(' \ ) - \quad W^{\mathrm{ext}}(' \ ) = 0 \qquad\qquad \forall \quad '$$

$$\begin{aligned}
W(' \ ) &= \int_0^L \quad E\,\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}\,E A\,\mathrm{d}X - ' \quad f^{\mathrm{ext}} \\
&= \int_0^L \left[' \quad \frac{1}{L^2}' \ \right] \mathrm{E}^{\mathrm{mod}} \left[\frac{1}{2L^2}[' \quad ^2 - H^2]\right] A\,\mathrm{d}X - ' \quad f^{\mathrm{ext}} \\
&= \int_0^L \ ' \quad \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}} A}{2L^4}[' \quad ^3 - ' \quad H^2]\,\mathrm{d}X - ' \quad f^{\mathrm{ext}} \\
&= \qquad ' \quad \left[\frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}} A}{2L^3}[' \quad ^3 - ' \quad H^2] - f^{\mathrm{ext}}\right] = 0 \quad \forall \ '
\end{aligned}$$

Newton–Raphson Verfahren

(a) direkte Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$W\,(' \quad + \Delta' \quad) = 0$$

Taylor Reihenentwicklung

$$W(' + \Delta ') = W(') + \Delta W(') + \ldots = 0$$

mit

$$\begin{aligned} W(') &= ' \left[\frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}} A}{2L^3} \left['^{3} - ' H^2 \right] - f^{\mathrm{ext}} \right] \\ \Delta W(') &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}} \left[W(' + \Delta ') \right] \Big|_{=0} \\ &= ' \left[\frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}} A}{2L^3} \left[3'^{2} - H^2 \right] \Delta ' \right] \end{aligned}$$

Iterationsvorschrift für Newton–Raphson Verfahren

$$\Delta ' = \frac{2L^3}{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}} A \left[3'^{2} - H^2 \right]} \left[f^{\mathrm{ext}} - \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}} A}{2L^3} \left['^{3} - ' H^2 \right] \right]$$

---

b) allgemeine Linearisierung des (Prinzips der virtuellen Arbeit
Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$W(' + \Delta ') = 0$$

Taylor Reihenentwicklung

$$W(' + \Delta ') = W(') + \Delta W(') + \ldots = 0$$

mit

$$
\begin{aligned}
W(') &= \int_0^L E\,\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}\,E\,A\,\mathrm{d}X - '\ f^{\mathrm{ext}} \\
&= '\ [\underbrace{\frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}A}{2L^3}\left[' ^3 - '\ H^2\right]}_{:=f^{\mathrm{int}}} - f^{\mathrm{ext}}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\ W(') &= \int_0^L E\,\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}\,\Delta E\,A\,\mathrm{d}X + \int_0^L \Delta\ E\,\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}\,E\,A\,\mathrm{d}X \\
&= \int_0^L \left[' \ \frac{1}{L^2}'\right] \mathrm{E}^{\mathrm{mod}} \left[\frac{1}{L^2}'\ \Delta'\right] A\,\mathrm{d}X \\
&+ \int_0^L \left[' \ \frac{1}{L^2}\Delta'\right] \mathrm{E}^{\mathrm{mod}} \left[\frac{1}{2\,L^2}\left[' ^2 - H^2\right]\right] A\mathrm{d}X \\
&= '\ [\underbrace{\frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}A}{2L^3}\,2' ^2}_{:=\mathrm{K}^{\mathrm{mat}}} + \underbrace{\frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}A}{2L^3}\left[' ^2 - H^2\right]}_{:=\mathrm{K}^{\mathrm{geo}}}]\,\Delta'
\end{aligned}
$$

Iterationsvorschrift für Newton–Raphson Verfahren

$$
\Delta' = \left[\mathrm{K}^{\mathrm{mat}} + \mathrm{K}^{\mathrm{geo}}\right]^{-1} \left[f^{\mathrm{ext}} - f^{\mathrm{int}}\right]
$$

interne Kräfte und Steifigkeit für St. Venant–Kirchhof Material

$$
\begin{aligned}
f^{\mathrm{int}} &= \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mat}}A}{2L^3}\left[' ^3 - H^2'\right] \\
\mathrm{K}^{\mathrm{mat}} &= \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mat}}A}{2L^3}\,2' ^2 \\
\mathrm{K}^{\mathrm{geo}} &= \frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mat}}A}{2L^3}\left[' ^2 - H^2\right]
\end{aligned}
$$

Vergleich mit linearer Theorie (FEM I)

$$
\begin{aligned}
W(u) &= \int_0^L \quad \mathrm{E}^{\mathrm{mod}} \quad A \, \mathrm{d}X - \; u \, f^{\mathrm{ext}} \\
&= \int_0^L \left[\; u \, \frac{H}{L^2} \right] \mathrm{E}^{\mathrm{mod}} \left[\frac{H}{L^2} \, u \right] A \, \mathrm{d}X - \; u \, f^{\mathrm{ext}} \\
&= \qquad u \, [\, \underbrace{\frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}} A}{L^3} H^2}_{:=\mathrm{K}} u - \; f^{\mathrm{ext}} \,] = 0 \qquad \forall \quad u
\end{aligned}
$$

direkte Lösung der linearen Gleichung

$$u = \mathrm{K}^{-1} \, f^{\mathrm{ext}}$$

Gleichung linear in $u \rightarrow$ keine Iteration erforderlich

Last–Verschiebungskurve / Kurvendiskussion

virtuelle Arbeit

$$W('\ \ ) = '\ \ \left[\frac{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}} A}{2\,L^3}\,['\ \ ^3 - '\ \ H^2] - f^{\mathrm{ext}}\right] = 0 \qquad \forall\ '$$

Bestimmung der kritischen Last / Traglast des Systems

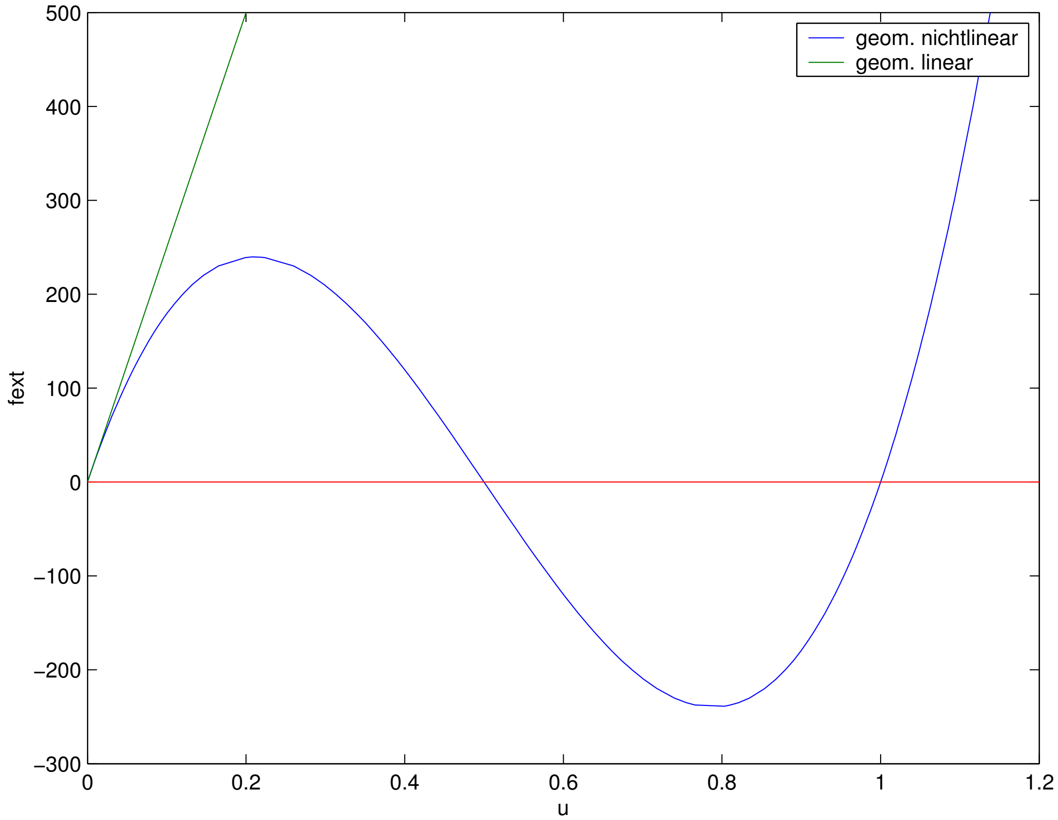
$$= \frac{2\,L^3}{\mathrm{E}^{\mathrm{mod}} A}\,f^{\mathrm{ext}} = '\ \ ^3 - '\ \ H^2 = '\ \ ['\ \ + H\,]\,['\ \ - H\,]$$

Nullstellen

$$'\ \ _1 = H \qquad '\ \ _2 = 0 \qquad '\ \ _3 = -H$$

Extrema mit $3'\ \ ^2 - H^2 = 0$

$$'\ \ _1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,H \qquad '\ \ _2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}\,H$$



2 Finite Element Methode – Elastizität

2.1 Räumliche Diskretisierung mit Finiten Elementen

- ’isoparametrisches Konzept’: gleiche Ansätze für Geometrie $\boldsymbol{X}$ und unbekannte Deformationsabbildung '
- ’Bubnov–Galerkin Technik’: gleiche Ansätze für Unbekannte ' und Testfunktionen (alternativ: ' oder $\boldsymbol{v}$)
- Zerlegung des Gebietes $\mathcal{B}_0$ in n_{el} Elemente $\mathcal{B}_0^e$

$$\mathcal{B}_0 = \bigcup_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \mathcal{B}_0^e$$

2.1.1 Diskretisierung kinematischer Größen

- (elementweise) Approximation der Geometrie $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{en}}} N_i \, \boldsymbol{X}_i$$

n_{en} ... Anzahl Knoten pro Element
N ... hier: Lagrange’sche Formfunktionen, vergl. FEM I

- (elementweise) Approximation der Deformationsabbildung

, der Beschleunigung und der Testfunktion (bzw.)

$$= \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} N_i \quad _i \qquad\qquad = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} N_i \quad _i$$

$$= \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} N_i \quad _i \quad \text{bzw.} \qquad = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} N_i \quad _i$$

- Gradient der Testfunktionen und der Deformation

$$\nabla_X \quad = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} \quad _i \otimes \nabla_X N_i$$

$$\nabla_X \quad = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} \quad _i \otimes \nabla_X N_i$$

- Deformationsgradient

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} \quad _i \otimes \nabla_X N_i \qquad \text{bzw.} \qquad F_{jJ} = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} \quad _{ji} \otimes \nabla_{X_J} N_i$$

mit $N_i = N_i(\quad)$ $\rightarrow$ Kettenregel

$$\nabla_X N_i = \frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial N_i}{\partial \quad} \cdot \frac{\partial \quad}{\partial \boldsymbol{X}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \quad}\right]^{-\text{t}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \quad}$$

- Deformationstensoren

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\text{t}} \cdot \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{en}}} \left[\quad _i \cdot \quad _j\right] \nabla_X N_i \otimes \nabla_X N_j$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\text{t}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{en}}} \left[\nabla_X N_i \cdot \nabla_X N_j\right] \quad _i \otimes \quad _j$$

- Deformationsratentensor

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} \quad _i \otimes \nabla_x N_i + \nabla_x N_i \otimes \quad _i$$

mit $N_i = N_i(\quad)$ $\rightarrow$ Kettenregel

$$\nabla_x N_i = \frac{\partial N_i}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial N_i}{\partial \quad} \cdot \frac{\partial \quad}{\partial \boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \quad}\right]^{-\text{t}} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \quad}$$

2.1.2 Beispiel: Diskretisierung kinematischer Größen

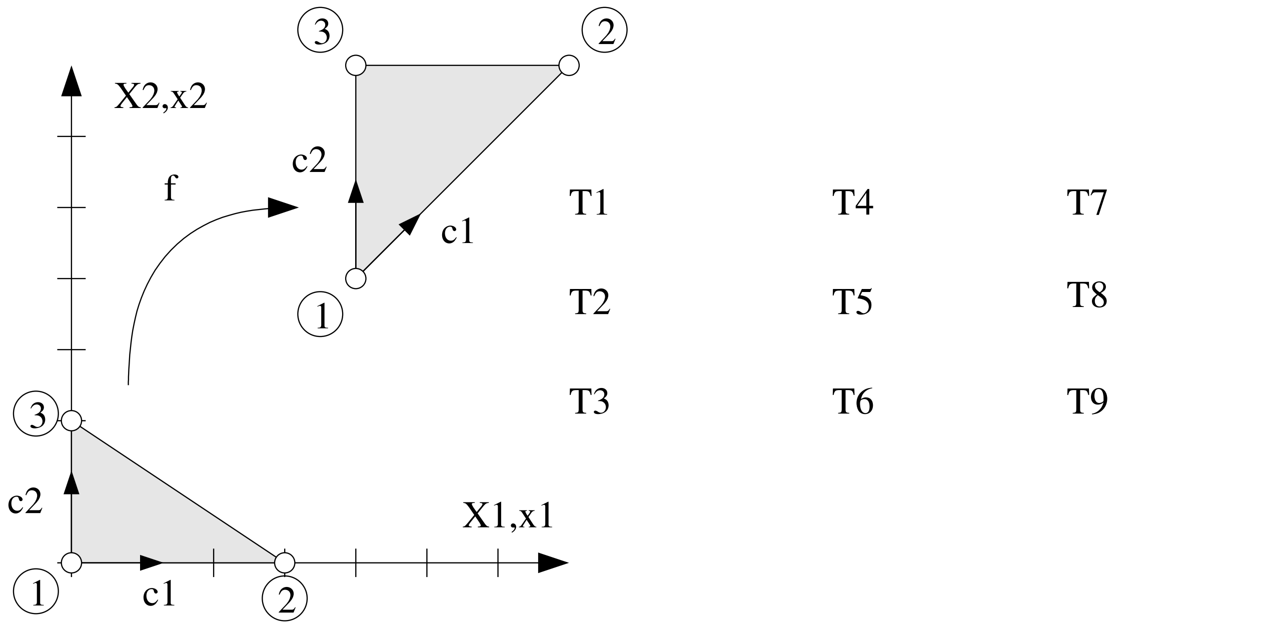


Abbildung 2.1: Diskretisierung kinematischer Größen

- isoparametrische Koordinaten

$$X_1 = 3 \quad {}_1 \qquad \left[\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \left[\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial}\right]^{-t} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = 2 \quad {}_2$$

- Ansatzfunktionen und deren Gradienten

$$N_{(1)} = 1 - \quad {}_1 - \quad {}_2 \qquad \frac{\partial N_{(1)}}{\partial} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial N_{(1)}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$N_{(2)} = \quad {}_1 \qquad \frac{\partial N_{(2)}}{\partial} = \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial N_{(2)}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_{(3)} = \quad {}_2 \qquad \frac{\partial N_{(3)}}{\partial} = \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial N_{(3)}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ +1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Deformationsgradient

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} '\,_{i} \otimes \nabla_X N_i \qquad \text{bzw.} \qquad F_{jJ} = \sum_{i=1}^{3} '\,_{ji} \otimes \nabla_{X_J} N_i$$

$$\begin{aligned}
F_{11} &= '\,_{1(1)} \nabla_1 N_{(1)} + '\,_{1(2)} \nabla_1 N_{(2)} + '\,_{1(3)} \nabla_1 N_{(3)} &&= -\frac{4}{3} + \frac{7}{3} + 0 = 1 \\
F_{12} &= '\,_{1(1)} \nabla_2 N_{(1)} + '\,_{1(2)} \nabla_2 N_{(2)} + '\,_{1(3)} \nabla_2 N_{(3)} &&= -\frac{4}{2} + 0 + \frac{4}{2} = 0 \\
F_{21} &= '\,_{2(1)} \nabla_1 N_{(1)} + '\,_{2(2)} \nabla_1 N_{(2)} + '\,_{2(3)} \nabla_1 N_{(3)} &&= -\frac{4}{3} + \frac{7}{3} + 0 = 1 \\
F_{22} &= '\,_{2(1)} \nabla_2 N_{(1)} + '\,_{2(2)} \nabla_2 N_{(2)} + '\,_{2(3)} \nabla_2 N_{(3)} &&= -\frac{4}{2} + 0 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Annahme: Ebener Verzerrungszustand

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- rechter Cauchy–Green Deformationstensor

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}$$

- linker Cauchy–Green Deformationstensor / Fingertensor

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{t}}$$

- Green–Lagrange Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{t}}$$

- Jacobi Determinante

$$J = \det \boldsymbol{F} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$$

- Kontrolle: Flächeninhalte der Dreieckselemente

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{2} 2 \cdot 3 = 3 \qquad \mathrm{d}v = \frac{1}{2} 3 \cdot 3 = 4.5$$

es gilt

$$\mathrm{d}v = J\, dV = \frac{3}{2} 3 = 4.5 \qquad \surd$$

- Kontrolle: Transformation von Linienelementen

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_{(1-2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{(1-2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \surd$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_{(1-3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{(1-3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \surd$$

2.2 Diskretisierung der schwachen Form (materiell)

2.2.1 Diskretisierung des Residuums

kontinuierliche schwache Form skalare Gleichung

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_0 \; = \; & \int_{\mathcal{B}_0} \cdot \;\; {}_0 \,\dddot{}\; \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0} [\nabla^{\mathrm{t}}_{X} \;\; \cdot \boldsymbol{F}]^{\mathrm{sym}} : \quad \mathrm{d}V \\ - \; & \int_{\partial\mathcal{B}_0} \cdot \bar{\boldsymbol{T}} \mathrm{d}A - \int_{\mathcal{B}_0} \cdot \;\; {}_0\, \boldsymbol{b} \mathrm{d}V = 0\end{aligned}$$

diskretisierte schwache Form skalare Gleichung

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_0 = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \;\; {}_i \cdot [\; & \int_{\mathcal{B}_0^e} N_i \;\; {}_0 \,\dddot{}\;\; \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_0^e} \nabla_X N_i \cdot [\boldsymbol{F} \cdot \quad] \, \mathrm{d}V \\ - & \int_{\partial\mathcal{B}_0^e} N_i \, \bar{\boldsymbol{T}} \quad \mathrm{d}A - \int_{\mathcal{B}_0^e} \quad N_i \;\; {}_0\, \boldsymbol{b} \quad \mathrm{d}V \,] = 0\end{aligned}$$

bzw.

$$\mathcal{W}_0 = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \;\; {}_i \cdot \left[\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{dyn}} + \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{int}} - \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{ext}} \right] = 0 \qquad \forall \quad {}_i$$

$\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}}$ ... Zusammenbau aller $i = 1, .., n_{\mathrm{en}}$ Elementknotenbeiträge zu globalen Knotenbeiträgen $I = 1, .., n_{\mathrm{np}}$

diskretes Gleichgewicht vektorwertige Gleichung

$$\boldsymbol{r}_I := \boldsymbol{f}_I^{\mathrm{dyn}} + \boldsymbol{f}_I^{\mathrm{int}} - \boldsymbol{f}_I^{\mathrm{ext}} = \boldsymbol{0} \qquad \forall \; I = 1, .., n_{\mathrm{np}}$$

---

mit Residuum $\boldsymbol{r}_I$ und diskreten Knotenkräften $\boldsymbol{f}_I^{\text{dyn}}$, $\boldsymbol{f}_I^{\text{int}}$, $\boldsymbol{f}_I^{\text{ext}}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_I^{\text{dyn}} &= \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}_0^e} N_i \quad {}_0 \,'^{\cdot\cdot} \quad \mathrm{d}V && \text{dynamische Kräfte} \\
\boldsymbol{f}_I^{\text{int}} &= \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}_0^e} \nabla_X N_i \cdot [\boldsymbol{F} \cdot \quad] \, \mathrm{d}V && \text{interne Kräfte} \\
\boldsymbol{f}_I^{\text{ext}} &= \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\partial\mathcal{B}_0^e} N_i \, \bar{\boldsymbol{T}} \quad \mathrm{d}A && \text{externe Oberflächenkräfte} \\
&+ \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}_0^e} N_i \quad {}_0 \, \boldsymbol{b} \quad \mathrm{d}V && \text{externe Volumenkräfte}
\end{aligned}
$$

2.2.2 Linearisierung des Residuums

konsistente Linearisierung des Residuums $\boldsymbol{r}_I$ an der Stelle $n+1$

Taylor Reihenentwicklung

$$
\boldsymbol{r}_{I\,n+1}^{\,k+1} = \boldsymbol{r}_{I\,n+1}^{\,k} + \Delta \boldsymbol{r}_I \doteq \boldsymbol{0} \qquad \forall\; I = 1,..,n_{\text{np}}
$$

mit Linearisierung des Residuums $\Delta \boldsymbol{r}_I$

$$
\Delta \boldsymbol{r}_I(' \quad _J) = \sum_{J=1}^{n_{\text{np}}} \mathrm{D}_{\Delta' \quad _J} \boldsymbol{r}_I(' \quad _J) \cdot \Delta' \quad _J = \sum_{J=1}^{n_{\text{np}}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_I(' \quad _J)}{\partial' \quad _J} \cdot \Delta' \quad _J
$$

mit inkrementellem Update des Lösungsvektors $\Delta' \quad _J$

$$
\Delta \boldsymbol{r}_I = \sum_{J=1}^{n_{\text{np}}} \mathbf{K}_{IJ} \cdot \Delta' \quad _J \qquad \mathbf{K}_{IJ} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_I(' \quad _J)}{\partial' \quad _J} \qquad \forall\; I = 1,..,n_{\text{np}}
$$

Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{IJ}$ aus Linearisierung des Residuums $\boldsymbol{r}_I$

$$
\mathbf{K}_{IJ} = \mathbf{K}_{IJ}^{\text{dyn}} + \mathbf{K}_{IJ}^{\text{geo}} + \mathbf{K}_{IJ}^{\text{mat}} \qquad \forall\; I, J = 1,..,n_{\text{np}}
$$

---

mit Anteilen der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{IJ}$

$$\mathbf{K}^{\text{dyn}}_{IJ} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}^e_0} \quad N_i \; {}_0 \frac{\partial'^{\cdot\cdot}}{\partial'} N_j \; \boldsymbol{I} \quad \mathrm{d}V \quad \text{dyn. Anteil}$$

$$\mathbf{K}^{\text{geo}}_{IJ} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}^e_0} \quad \nabla^{\text{t}}_X N_i \cdot \quad \cdot \nabla_X N_j \quad \boldsymbol{I} \quad \mathrm{d}V \; \text{geom. Anteil}$$

$$\mathbf{K}^{\text{mat}}_{IJ} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}^e_0} [\nabla^{\text{t}}_X N_i \cdot \boldsymbol{F}]^{\text{sym}} : \mathbb{L} \cdot [\boldsymbol{F}^{\text{t}} \cdot \nabla_X N_j]^{\text{sym}} \mathrm{d}V \quad \text{mat. Anteil}$$

zu lösendes Gleichungssystem

$$\Delta' \;_J = \sum_{I=1}^{n_{\text{np}}} \mathbf{K}^{-1}_{JI} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_I \qquad \forall \; I, J = 1, .., n_{\text{np}}$$

Bemerkungen:

- Alternativ kann auch zunächst kontinuierliche schwache Form $\mathcal{W}_0(' \;)$ bezüglich der kontinuierlichen Verschiebungen ' linearisiert und die linearisierte schwache Form

  $$\mathcal{W}_0(' \; + \Delta' \;) = \; \mathcal{W}_0(' \;) + \Delta \; \mathcal{W}_0(' \;) \doteq 0$$

  dann diskretisiert werden. Für Kontinuumselemente erhält man formal gleiche Ausdrücke wie bei der hier vorgestellten Vorgehensweise. Insbesondere für Strukturelemente können sich beide Verfahren jedoch erheblich unterscheiden, nur das hier vorgestellte liefert dann die richtigen Tangentenoperatoren.

- Die Summe aus dynamischen, internen und externen Kräften wird als Elementresiduum $\boldsymbol{r}_i \; \forall i = 1, .., n_{\text{en}}$ bzw. als globales Residuum $\boldsymbol{r}_I \; \forall I = 1, .., n_{\text{np}}$ bezeichnet. Das Residuum ist eine nichtlineare Funktion der unbekannten Deformation $' \;_J$. Mit Hilfe des Newton–Raphson Verfahrens wird das globale Residuum an der Stelle $n+1$ iterativ zu Null berechnet, so daß $\boldsymbol{r}_{I\,n+1} \doteq \mathbf{0} \; \forall I = 1, .., n_{\text{np}}$.

- Die Integralausdrücke über das materielle bzw. räumliche Elementgebiet $\int_{\mathcal{B}_0^e} ...\mathrm{d}V$ bzw. $\int_{\mathcal{B}_t^e} ...\mathrm{d}v$ werden üblicherweise im Rahmen der FEM mittels numerischer Integration ermittelt.

  $$\int_{\mathcal{B}_0^e} (\bullet)\mathrm{d}V \approx \sum_{I=1}^{n_{ip}} (\bullet)(\quad_I)\, w_I \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathcal{B}_t^e} (\bullet)\mathrm{d}v \approx \sum_{I=1}^{n_{ip}} (\bullet)(\quad_I)\, w_I$$

  Dazu erfolgt eine Auswertung an $I = 1, .., n_{ip}$ Integrationspunkten und eine anschließende Gewichtung mit den jeweiligen Gewichten w_I, vergleiche FEM I (Gauss–Legendre oder Newton–Cotes Quadratur).

- Aufgrund der komplizierten Darstellung der materiellen Form wird i.a. häufig die räumliche Form bevorzugt, die im folgenden näher betrachtet wird.

2.3 Diskretisierung der schwachen Form (räumlich)

2.3.1 Diskretisierung des Residuums

kontinuierliche schwache Form skalare Gleichung

$$\mathcal{W}_t = \int_{\mathcal{B}_t} \cdot \;{}_t^{\,\prime\cdot\cdot}\,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{B}_t} \nabla_x^{\mathrm{t}} \quad : \quad \mathrm{d}v - \int_{\partial\mathcal{B}_t} \cdot \bar{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}a - \int_{\mathcal{B}_t} \cdot \;{}_t\,\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}v = 0$$

diskretisierte schwache Form skalare Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_t = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \;{}_i \cdot [\int_{\mathcal{B}_t^e} N_i \;{}_t^{\,\prime\cdot\cdot}\;\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}_t^e} \nabla_x^{\mathrm{t}} N_i \quad \mathrm{d}v \\ - \int_{\partial\mathcal{B}_t^e} N_i \cdot \bar{\boldsymbol{t}} \;\; \mathrm{d}a - \int_{\mathcal{B}_t^e} N_i \;{}_t\,\boldsymbol{b}\;\mathrm{d}v \,] = 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathcal{W}_t = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \;{}_i \cdot \left[\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{dyn}} + \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{int}} - \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{ext}} \right] = 0 \qquad \forall \;\; {}_i$$

$\mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}}$ ... Zusammenbau aller $i = 1, .., n_{\mathrm{en}}$ Elementknotenbeiträge zu globalen Knotenbeiträgen $I = 1, .., n_{\mathrm{np}}$

diskretes Gleichgewicht vektorwertige Gleichung

$$\boldsymbol{r}_I := \boldsymbol{f}_I^{\mathrm{dyn}} + \boldsymbol{f}_I^{\mathrm{int}} - \boldsymbol{f}_I^{\mathrm{ext}} = \boldsymbol{0} \qquad \forall\; I = 1, .., n_{\mathrm{np}}$$

---

mit Residuum $\boldsymbol{r}_I$ und diskreten Knotenkräften $\boldsymbol{f}_I^{\text{dyn}}$, $\boldsymbol{f}_I^{\text{int}}$ und $\boldsymbol{f}_I^{\text{ext}}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_I^{\text{dyn}} &= \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}_t^e} N_i \;\; {}_t \, \ddot{'} \; \mathrm{d}v && \text{dynamische Kräfte} \\
\boldsymbol{f}_I^{\text{int}} &= \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}_t^e} \nabla_x N_i \cdot \quad \mathrm{d}v && \text{interne Kräfte} \\
\boldsymbol{f}_I^{\text{ext}} &= \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\partial\mathcal{B}_t^e} N_i \, \bar{\boldsymbol{t}} \quad \mathrm{d}a && \text{externe Oberflächenkräfte} \\
&+ \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}_t^e} N_i \;\; {}_t \, \boldsymbol{b} \; \mathrm{d}v && \text{externe Volumenkräfte}
\end{aligned}
$$

2.3.2 Linearisierung des Residuums

konsistente Linearisierung des Residuums $\boldsymbol{r}_I$ an der Stelle $n+1$

Taylor Reihenentwicklung

$$
\boldsymbol{r}_{I\,n+1}^{\,k+1} = \boldsymbol{r}_{I\,n+1}^{\,k} + \Delta \boldsymbol{r}_I \doteq \boldsymbol{0} \qquad \forall\; I = 1,..,n_{\text{np}}
$$

mit Linearisierung des Residuums $\Delta \boldsymbol{r}_I$

$$
\Delta \boldsymbol{r}_I(' \;\; _J) = \sum_{J=1}^{n_{\text{np}}} \mathrm{D}_{\Delta' \;\; J} \boldsymbol{r}_I(' \;\; _J) \cdot \Delta' \;\; _J = \sum_{J=1}^{n_{\text{np}}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_I(' \;\; _J)}{\partial' \;\; _J} \cdot \Delta' \;\; _J
$$

mit inkrementellem Update des Lösungsvektors $\Delta' \;\; _J$

$$
\Delta \boldsymbol{r}_I = \sum_{J=1}^{n_{\text{np}}} \mathbf{K}_{IJ} \cdot \Delta' \;\; _J \qquad \mathbf{K}_{IJ} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_I(' \;\; _J)}{\partial' \;\; _J} \qquad \forall\; I = 1,..,n_{\text{np}}
$$

Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{IJ}$ aus Linearisierung des Residuums $\boldsymbol{r}_I$

$$
\mathbf{K}_{IJ} = \mathbf{K}_{IJ}^{\text{dyn}} + \mathbf{K}_{IJ}^{\text{geo}} + \mathbf{K}_{IJ}^{\text{mat}} \qquad \forall\; I, J = 1,..,n_{\text{np}}
$$

---

mit Anteilen der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{IJ}$

$$\mathbf{K}^{\text{dyn}}_{IJ} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}_t^e} N_i \quad {}_t \, \frac{\partial'^{\cdot\cdot}}{\partial'} N_j \, \boldsymbol{I} \quad \mathrm{d}v \quad \text{dynamischer Anteil}$$

$$\mathbf{K}^{\text{geo}}_{IJ} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}_t^e} \nabla^{\text{t}}_x N_i \cdot \quad \cdot \nabla_x N_j \, \boldsymbol{I} \, \mathrm{d}v \quad \text{geometrischer Anteil}$$

$$\mathbf{K}^{\text{mat}}_{IJ} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}_t^e} \nabla^{\text{t}}_x N_i \cdot \mathbb{E} \cdot \nabla_x N_j \quad \mathrm{d}v \quad \text{materieller Anteil}$$

- zu lösendes Gleichungssystem

$$\Delta' \quad {}_J = \sum_{I=1}^{n_{\text{np}}} \mathbf{K}^{-1}_{JI} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_I \qquad \forall \; I, J = 1, .., n_{\text{np}}$$

Bemerkung: einzelne Anteile von Residuum und Steifigkeitsmatrix können je nach Problemstellung materiell oder räumlich ausgewertet werden

2.4 Diskretisierung in Matrix–Vektor–Notation

Bemerkung: Bei der Implementierung wird häufig die Voigt'sche Darstellung / Matrixnotation verwendet, für die sich die Darstellung der Tensoren und Vektoren erheblich vereinfacht, vergleiche FEM I

hier: Matrixnotation am Beispiel der räumlichen Formulierung, vergleiche 2.3

- Unbekanntenvektor - Inkrement der Verschiebungen

$$\underset{[3\times1]}{\Delta'} = [\,\Delta'\;{}_{1}, \Delta'\;{}_{2}, \Delta'\;{}_{3}\,]^{\mathrm{t}} \qquad \text{mit} \qquad \underset{[3\times1]}{\Delta'} = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{en}}} N_i\,\Delta'\;{}_{i}$$

- Testfunktion

$$\underset{[3\times1]}{} = [\;{}_{1},\;{}_{2},\;{}_{3}\,]^{\mathrm{t}} \qquad \text{mit} \qquad \underset{[3\times1]}{} = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{en}}} N_i\;{}_{i}$$

N_i ... isoparametrische Formfunktionen

- räumlicher Gradient des Unbekanntenvektors

$$\underset{[6\times1]}{\nabla_x\Delta'} = [\,\Delta'\;{}_{1,1}, \Delta'\;{}_{2,2}, \Delta'\;{}_{3,3}, \Delta'\;{}_{1,2}, \Delta'\;{}_{2,3}, \Delta'\;{}_{3,1}\,]^{\mathrm{t}}$$

mit

$$\underset{[3\times1]}{\nabla_x\Delta'} = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{en}}} \underset{[6\times3]}{\mathbf{B}_i^{\mathrm{t}}} \cdot \underset{[3\times1]}{\Delta'\;{}_{i}}$$

- räumlicher Gradient der Testfunktionen

$$\underset{[6\times1]}{\nabla_x} = [\;{}_{1,1},\;{}_{2,2},\;{}_{3,3},\;{}_{1,2},\;{}_{2,3},\;{}_{3,1}\,]^{\mathrm{t}}$$

mit

$$\underset{[6\times1]}{\nabla_x} = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{en}}} \underset{[6\times3]}{\mathbf{B}_i^{\mathrm{t}}} \cdot \underset{[3\times1]}{{}_{i}}$$

$\mathbf{B}_i$ ... B-Matritzen, vergleiche FEM I

$$\underset{[6\times3]}{\mathbf{B}_i} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_3} \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_1} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_3} & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_1} \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

- Beschleunigungsvektor

$$\underset{[3\times1]}{\ddot{\ }} = [\ \ddot{\ }_1,\ \ddot{\ }_2,\ \ddot{\ }_3\ ]^{\mathrm{t}}$$

- Spannungstensor in Voigt'scher Notation

$$\underset{[6\times1]}{\ } = [\ \ _{11},\ \ _{22},\ \ _{33},\ \ _{12},\ \ _{23},\ \ _{31}\ ]^{\mathrm{t}}$$

- Spannungssvektor

$$\underset{[3\times1]}{\bar{\boldsymbol{t}}} = [\ \bar{t}_1,\ \bar{t}_2,\ \bar{t}_3\ ]^{\mathrm{t}}$$

- Volumenlastvektor

$$\underset{[3\times1]}{\boldsymbol{b}} = [\ b_1,\ b_2,\ b_3\ ]^{\mathrm{t}}$$

- räumlicher Materialtensor

$$\underset{[6\times 6]}{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\,\mathrm{E}_{1111} & 2\,\mathrm{E}_{1122} & 2\,\mathrm{E}_{1133} & \mathrm{E}_{1112}+\mathrm{E}_{1121} & \mathrm{E}_{1123}+\mathrm{E}_{1132} & \mathrm{E}_{1131}+\mathrm{E} \\ & 2\,\mathrm{E}_{2222} & 2\,\mathrm{E}_{2233} & \mathrm{E}_{2212}+\mathrm{E}_{2221} & \mathrm{E}_{2223}+\mathrm{E}_{2232} & \mathrm{E}_{2231}+\mathrm{E} \\ & & 2\,\mathrm{E}_{3333} & \mathrm{E}_{3312}+\mathrm{E}_{3321} & \mathrm{E}_{3323}+\mathrm{E}_{3332} & \mathrm{E}_{3331}+\mathrm{E} \\ & & & \mathrm{E}_{1212}+\mathrm{E}_{1221} & \mathrm{E}_{1223}+\mathrm{E}_{1232} & \mathrm{E}_{1231}+\mathrm{E} \\ & \text{sym.} & & & \mathrm{E}_{2323}+\mathrm{E}_{2332} & \mathrm{E}_{2331}+\mathrm{E} \\ & & & & & \mathrm{E}_{3131}+\mathrm{E} \end{bmatrix}$$

Beispiel: räumlicher Materialtensor des Neo–Hooke Materials

$$\underset{[3\times3\times3\times3]}{\mathbb{E}} = {}^{*}\underset{[3\times3]}{\boldsymbol{I}} \otimes \underset{[3\times3]}{\boldsymbol{I}} + 2\;{}^{*}\underset{[3\times3\times3\times3]}{\boldsymbol{i}}$$

${}^{*},\ {}^{*}$ ... Materialparameter mit ${}^{*} = \frac{}{J}$ und ${}^{*} = \frac{- \quad \ln J}{J}$

$,$ ... Lamé Parameter mit $= \frac{E}{[1+\ ][1-2\ ]}$ und

$$= \frac{E}{2[1+\ ]}$$

$E,$ ... Elastizitätsmodul, Querkontraktion

- Materialtensor des Neo–Hooke Matrerials

$$\underset{[6\times 6]}{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} {}^{*}+2\ {}^{*} & {}^{*} & {}^{*} & 0 & 0 & 0 \\ {}^{*} & {}^{*}+2\ {}^{*} & {}^{*} & 0 & 0 & 0 \\ {}^{*} & {}^{*} & {}^{*}+2\ {}^{*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{*} \end{bmatrix}$$

2.4.1 Diskretisierung des Elementresiduums

- diskretisierte schwache Form pro Element skalare Gleichung

$$\mathcal{W}_t^e = \underset{[1\times3]}{{}^{\mathrm{t}}_{i}} \cdot [\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{dyn}} + \underset{[3\times1]}{\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{int}}} - \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{ext}}] = 0 \qquad \forall \quad {}_i$$

- diskretes Elementgleichgewicht vektorwertige Gleichung

$$\underset{[3\times1]}{\boldsymbol{r}_i} := \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{dyn}} + \underset{[3\times1]}{\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{int}}} - \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{ext}} = \underset{[3\times1]}{\boldsymbol{0}} \qquad \forall\, i = 1,..,n_{\mathrm{en}}$$

---

mit Elementresiduum $\boldsymbol{r}_i$ und Elementknotenkräften $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{dyn}}$, $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{int}}$, $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{ext}}$

$$\underset{[3\times1]}{\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{dyn}}} = \int_{\mathcal{B}_t^e} N_i \;\; {}_t \underset{[3\times1]}{\ddot{}} \; \mathrm{d}v \qquad \text{dynamische Kräfte}$$

$$\underset{[3\times1]}{\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{int}}} = \int_{\mathcal{B}_t^e} \underset{[3\times6]}{\mathbf{B}_i^{\mathrm{t}}} \cdot \underset{[6\times1]}{} \; \mathrm{d}v \qquad \text{interne Kräfte}$$

$$\underset{[3\times1]}{\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{ext}}} = \int_{\partial\mathcal{B}_t^e} N_i \;\; \underset{[3\times1]}{\bar{\boldsymbol{t}}} \; \mathrm{d}a \qquad \text{externe Oberflächenkräfte}$$

$$+ \int_{\mathcal{B}_t^e} N_i \;\; {}_t \underset{[3\times1]}{\boldsymbol{b}} \; \mathrm{d}v \qquad \text{externe Volumenkräfte}$$

- Kontrolle am Beispiel der internen Knotenkräfte
  ... in Tensornotation $\underset{[3\times1]}{\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{int}}} = \int_{\mathcal{B}_t^e} \underset{[1\times3]}{\nabla_x N_i} \cdot \underset{[3\times3]}{} \; \mathrm{d}v$

$$\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{int}} = [\, N_{i,1} \; N_{i,2} \; N_{i,3} \,] \begin{bmatrix} {}_{11} & {}_{12} & {}_{13} \\ {}_{21} & {}_{22} & {}_{23} \\ {}_{31} & {}_{32} & {}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,1} \; {}_{11} & N_{i,2} \; {}_{21} & N_{i,3} \; {}_{31} \\ N_{i,1} \; {}_{12} & N_{i,2} \; {}_{22} & N_{i,3} \; {}_{32} \\ N_{i,1} \; {}_{13} & N_{i,2} \; {}_{23} & N_{i,3} \; {}_{33} \end{bmatrix}$$

... in Matrix- / Vektor-Notation

$$\underset{[3\times1]}{\boldsymbol{f}_i^{\text{int}}} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\mathcal{B}_t^e} \underset{[3\times6]}{\mathbf{B}_i^{\text{t}}} \cdot \underset{[6\times1]}{} \, \mathrm{d}v$$

$$\boldsymbol{f}_i^{\text{int}} = \begin{bmatrix} N_{i,1} & 0 & 0 & N_{i,2} & 0 & N_{i,3} \\ 0 & N_{i,2} & 0 & N_{i,1} & N_{i,3} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,3} & 0 & N_{i,2} & N_{i,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{11} \\ {}_{22} \\ {}_{33} \\ {}_{12} \\ {}_{23} \\ {}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,1} \; {}_{11} & N_{i,2} \; {}_{12} & N_{i,3} \; {}_{31} \\ N_{i,1} \; {}_{12} & N_{i,2} \; {}_{22} & N_{i,3} \; {}_{23} \\ N_{i,1} \; {}_{31} & N_{i,2} \; {}_{23} & N_{i,3} \; {}_{33} \end{bmatrix}$$

2.4.2 Linearisierung des Elementresiduums

konsistente Linearisierung des Elementresiduums $\boldsymbol{r}_i$ an der Stelle $n+1$, Taylor Reihenentwicklung

$$\boldsymbol{r}_{i\,n+1}^{\,k+1} = \boldsymbol{r}_{i\,n+1}^{\,k} + \Delta\boldsymbol{r}_i \doteq \boldsymbol{0} \qquad \forall\; i = 1,..,n_{\text{en}}$$

Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ij}$ aus Linearisierung des Elementresiduums $\boldsymbol{r}_i$

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ij}^{\text{dyn}} + \mathbf{K}_{ij}^{\text{geo}} + \mathbf{K}_{ij}^{\text{mat}} \qquad \forall i, j = 1,..,n_{\text{en}}$$

- mit Anteilen der Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ij}$

$$\underset{[3\times3]}{\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{dyn}}} = \int_{\mathcal{B}_t^e} \quad N_i \quad t\,\frac{\partial'^{\cdot\cdot}}{\partial'} N_j \quad \mathrm{d}v \underset{[3\times3]}{\boldsymbol{I}} \quad \text{dynamischer Anteil}$$

$$\underset{[3\times3]}{\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{geo}}} = \int_{\mathcal{B}_t^e} \underset{[1\times3]}{\nabla_x^{\mathrm{t}} N_i} \cdot \underset{[3\times3]}{} \cdot \underset{[3\times1]}{\nabla_x N_j} \,\mathrm{d}v \underset{[3\times3]}{\boldsymbol{I}} \quad \text{geometrischer Anteil}$$

$$\underset{[3\times3]}{\mathbf{K}_{ij}^{\mathrm{mat}}} = \int_{\mathcal{B}_t^e} \underset{[3\times6]}{\mathbf{B}_i^{\mathrm{t}}} \cdot \underset{[6\times6]}{\mathbf{D}} \cdot \underset{[6\times3]}{\mathbf{B}_j} \,\mathrm{d}v \quad \text{materieller Anteil}$$

Bemerkung: Der geometrische Anteil der Tangentenmatrix läßt sich in geschlossener Form besser in Tensornotation darstellen. Ein wirkliche Vereinfachung erhält man nur für die internen Kräfte $\boldsymbol{f}^{\mathrm{int}}$ und den materiellen Anteil der Tangentenmatrix $\mathbf{K}^{\mathrm{mat}}$.

2.5 Stabelement im 2D Raum

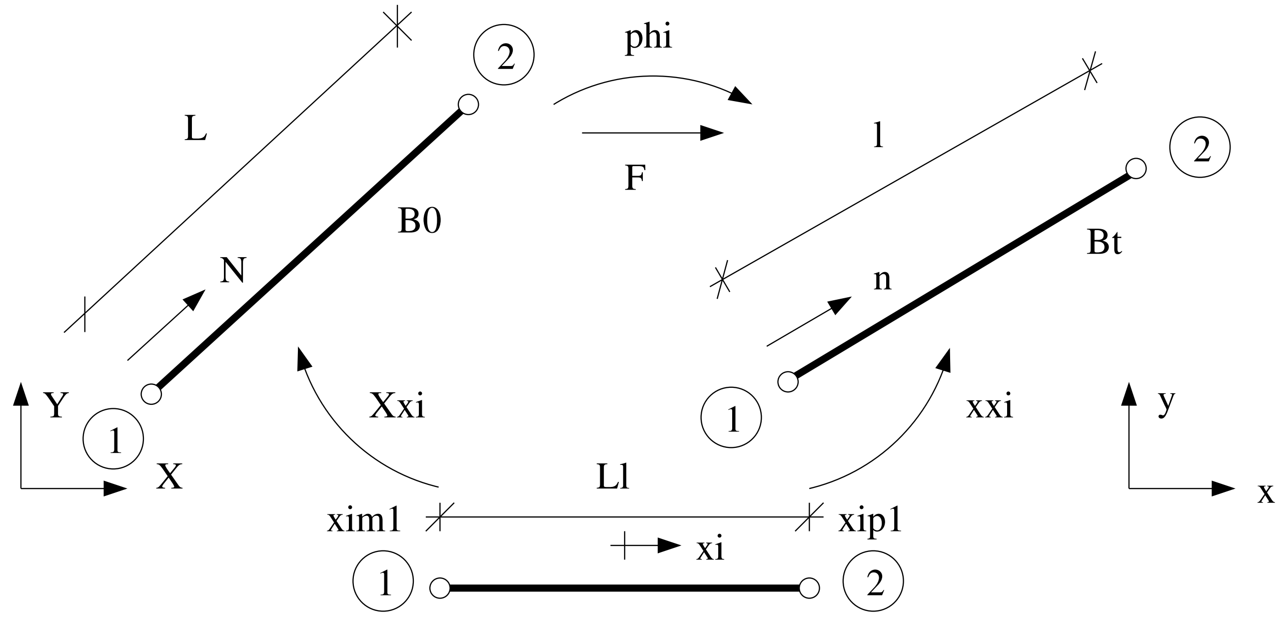


Abbildung 2.2: Nichtlineares Stabelement im 2d-Raum

Annahmen:

- einaxialer Spannungszustand

$$_{11} = \quad \neq 0 \qquad _{ij} = 0 \quad \forall ij \neq 11$$

- lineare Ansatzfunktionen
  u linear, $\nabla_X u$ konstant, F konstant, E konstant, konstant

$$N_{(1)} = \frac{1}{2}[1 - \quad] \qquad N_{(2)} = \frac{1}{2}[1 + \quad]$$

- isoparametrischer Gradient der Formfunktionen

$$\nabla \; N_{(1)} = -\frac{1}{2} \qquad \nabla \; N_{(2)} = +\frac{1}{2} \qquad \nabla \; N_i = \left[-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right]$$

- materieller und räumlicher Gradient der Formfunktionen

$$\nabla_X N_{(1)} = -\frac{1}{L}\boldsymbol{N} \qquad \nabla_X N_{(2)} = +\frac{1}{L}\boldsymbol{N} \qquad \nabla_X N_i = \frac{2}{L}\boldsymbol{N}\nabla \; N_i$$

$$\nabla_x N_{(1)} = -\frac{1}{l}\boldsymbol{n} \qquad \nabla_x N_{(2)} = +\frac{1}{l}\boldsymbol{n} \qquad \nabla_x N_i = \frac{2}{l}\boldsymbol{n}\nabla \; N_i$$

- Diskretisierung der Geometrie und Deformation

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{2} N_i(\quad)\, \boldsymbol{X}_i \qquad ' \quad = \sum_{i=1}^{2} N_i(\quad)\, ' \quad _i$$

also gilt

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} [1- \quad]\, X_{(1)} + [1+ \quad]\, X_{(2)} \\ [1- \quad]\, Y_{(1)} + [1+ \quad]\, Y_{(2)} \end{bmatrix}$$

und damit

$$\boldsymbol{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ Y_{(1)} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X}_{(2)} = \begin{bmatrix} X_{(2)} \\ Y_{(2)} \end{bmatrix}$$

- materielle und räumliche Länge

$$L = ||\, \boldsymbol{X}_{(2)} - \boldsymbol{X}_{(1)}\, || = ||\, \sum_{i=1}^{2} 2\, \boldsymbol{X}_i \nabla \quad N_i\, ||$$

$$l = ||\, ' \quad _{(2)} - ' \quad _{(1)}\, || = ||\, \sum_{i=1}^{2} 2 ' \quad _i \nabla \quad N_i\, ||$$

- materielle und räumliche Normale

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{X}_{(2)} - \boldsymbol{X}_{(1)}}{L} = \frac{\sum_{i=1}^{2} 2\, \boldsymbol{X}_i \nabla \quad N_i}{L} \qquad \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{X}_i \nabla \quad N_i = \frac{L\, \boldsymbol{N}}{2}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{' \quad _{(2)} - ' \quad _{(1)}}{l} = \frac{\sum_{i=1}^{2} 2 ' \quad _i \nabla \quad N_i}{l} \qquad \sum_{i=1}^{2} ' \quad _i \nabla \quad N_i = \frac{l\, \boldsymbol{n}}{2}$$

- materieller und räumlicher Jacobi-"Vector"

$$\nabla_X\{\bullet\} = \frac{2}{L}\boldsymbol{N}\nabla \quad \{\bullet\} \qquad \nabla_x\{\bullet\} = \frac{2}{l}\boldsymbol{n}\nabla \quad \{\bullet\}$$

$$\nabla_X = \frac{2}{L}\boldsymbol{N} \qquad \nabla_x = \frac{2}{l}\boldsymbol{n}$$

- Deformationsgradient

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{2} '\ _i \otimes \nabla_{\boldsymbol{X}} N_i = \sum_{i=1}^{2} '\ _i \nabla\ \ N_i \frac{2}{L} \otimes \boldsymbol{N} = \frac{l}{L} \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{N}$$

alternative Darstellung

$$F = \frac{l}{L} \qquad\qquad \boldsymbol{F} = F\, \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{N}$$

Interpretation als Tangentenabbildung von $T\mathcal{B}_0$ nach $T\mathcal{B}_t$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X} \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}$$

Stretch $F = l\,/\,L$ und Rotation der materiellen Normalen $\boldsymbol{N}$

$$\tilde{\boldsymbol{n}} = \frac{l}{L} \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N} = \frac{l}{L} \boldsymbol{n}$$

- Green–Lagrange Verzerrungstensor

$$E = \frac{1}{2}[\, F\ F - 1\,] = \frac{1}{2}\frac{l^2 - L^2}{L^2} \qquad\qquad \boldsymbol{E} = E\, \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N}$$

vergleiche Dreigelenkrahmen

- (eindimensionales) konstitutives Gesetz:Neo-Hooke Material

$$W_0^{\text{neo}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{E}^{\text{mod}}\,[\, F^2 - 1 - 2\,\ln(F)\,]$$

$$^{\text{neo}} = \frac{\mathrm{d}W_0^{\text{neo}}}{\mathrm{d}F} = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\text{mod}}\left[F - \frac{1}{F}\right] \qquad {}^{t} = \qquad \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{N}$$

$$^{\text{neo}} = \frac{1}{F}\ \ ^{\text{neo}}F = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\text{mod}}\left[F - \frac{1}{F}\right] \qquad = \qquad \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 W_0^{\text{neo}}}{\mathrm{d}F^2} = \frac{\mathrm{d}\ \ ^{\text{neo}}}{\mathrm{d}F} = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\text{mod}}\left[1 + \frac{1}{F^2}\right]$$

- (eindimensionales) konstitutives Gesetz: St.–Venant Kirchhoff Material

$$W_0^{\text{kir}} = \frac{1}{2} E\, \mathrm{E}^{\text{mod}}\, E$$

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{kir}} &= \mathrm{E}^{\mathrm{mod}}\, E = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}[F^2 - 1] & {}^{\mathrm{t}} &= \quad \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N} \\
{}^{\mathrm{t}} &= \boldsymbol{F} \cdot \quad {}^{\mathrm{t}} = \quad \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N} & {}^{\mathrm{t}} &= \; F\, \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{N} \\
{}^{\mathrm{kir}} &= \; F \quad {}^{\mathrm{kir}} = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}[F^3 - F] & {}^{\mathrm{t}} &= \quad \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{N}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}^2 W_0^{\mathrm{kir}}}{\mathrm{d}E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}^{\mathrm{kir}} = \mathrm{E}^{\mathrm{mod}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F}^{\mathrm{kir}} = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}\left[3\, F^2 - 1\right]
$$

- Vergleich Neo–Hooke und St. Venant–Kirchhoff Spannungen

$$
{}^{\mathrm{neo}} = \frac{1}{F^2} \quad {}^{\mathrm{kir}} \qquad\qquad {}^{\mathrm{kir}} = F^2 \quad {}^{\mathrm{neo}}
$$

- innere Kräfte

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_I^{\mathrm{int}} &= \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\mathcal{B}_0^e} \nabla_{\boldsymbol{X}} N_i \cdot \; \boldsymbol{F} \cdot \qquad dV && \text{...materiell} \\
&= \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\mathcal{B}_0^e} \nabla_{\boldsymbol{X}} N_i \cdot \qquad \mathrm{d}V && \text{...materiell} \\
&= \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\mathcal{B}_t^e} \nabla_{\boldsymbol{x}} N_i \cdot \qquad \mathrm{d}v && \text{...räumlich}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\nabla_{\boldsymbol{X}} N_i = \frac{2}{L}\boldsymbol{N}\, \nabla \; N_i \qquad \nabla_{\boldsymbol{x}} N_i = \frac{2}{l}\boldsymbol{n}\, \nabla \; N_i
$$

und

$$
\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\, A\, L\, \mathrm{d} \qquad \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\, A\, l\, \mathrm{d}
$$

$$
\boldsymbol{f}_I^{\mathrm{int}} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \nabla \; N_i\, 2 \quad A\, \boldsymbol{n}_e = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \nabla \; N_i\, 2 \quad A\, \boldsymbol{n}_e
$$

- Linearisierung

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_{IJ} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}_I^{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}'_J} &= \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \frac{\mathrm{d}[\nabla \; N_i \, 2 \quad A\, \boldsymbol{n}_e]}{\mathrm{d}'_j} \\
&= \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \underbrace{\nabla \; N_i \, 2 \, A \, \boldsymbol{n}_e \otimes \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}'_J}}_{\text{materiellerAnteil}} + \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \underbrace{\nabla \; N_i \, 2 \quad A \, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_e}{\mathrm{d}'_j}}_{\text{geometrischerAnteil}}
\end{aligned}
$$

Linearisierung des Stretches $F = l \,/\, L$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}'_j} &= \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}\,l}{\mathrm{d}'_j} = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}||\sum_{i=1}^{2} 2'_i \nabla \; N_i||}{\mathrm{d}'_j} \\
&= \frac{1}{L}\frac{1}{2}\frac{1}{||\sum_{i=1}^{2} 2'_i \nabla \; N_i||} 2 \left[\sum_{i=1}^{2} 2'_i \nabla \; N_i\right] 2 \, \nabla \; N_j \\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}'_j} &= \frac{2}{L} \boldsymbol{n}_e \nabla \; N_j
\end{aligned}
$$

Linearisierung der räumlichen (Einheits-)normale $\boldsymbol{n}_e$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}_e}{\mathrm{d}'_j} &= \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}[\sum_{i=1}^{2} 2'_i \nabla \; N_i]/F}{\mathrm{d}'_j} \\
&= \frac{1}{L}\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}[\sum_{i=1}^{2} 2'_i \nabla \; N_i]}{\mathrm{d}'_j} + \frac{1}{L}[\sum_{i=1}^{2} 2'_i \nabla \; N_i]\frac{\mathrm{d}F^{-1}}{\mathrm{d}'_j} \\
&= \frac{2}{F\,L} \boldsymbol{I} \, \nabla \; N_j - \frac{2}{F\,L} \boldsymbol{n}_e \otimes \boldsymbol{n}_e \, \nabla \; N_j \\
&= \frac{2}{l}[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}_e \otimes \boldsymbol{n}_e] \, \nabla \; N_j
\end{aligned}
$$

- materielle Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{IJ}^{\mathrm{mat}} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\mathcal{B}_0^e} [\nabla_X N_i \cdot \boldsymbol{F}] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F} [\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}} \cdot \nabla_X N_j] \, \mathrm{d}V \qquad \text{...materiell}$$

$$= \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\mathcal{B}_t^e} \nabla_x N_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F} \nabla_x N_j \, \mathrm{d}v \qquad \text{...räumlich}$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^{\mathrm{mat}} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} 4 \, \frac{A}{L} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F} \nabla \; N_i \, \boldsymbol{n}_e \otimes \boldsymbol{n}_e \nabla \; N_j$$

- geometrische Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{IJ}^{\mathrm{geo}} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\mathcal{B}_0^e} \nabla_X N_i \quad \nabla_X N_j \, \mathrm{d}V \boldsymbol{I} \qquad \text{...materiell}$$

$$= \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} \int_{\mathcal{B}_t^e} \nabla_x N_i \quad \nabla_x N_j \; \mathrm{d}v \boldsymbol{I} \qquad \text{...räumlich}$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^{\mathrm{geo}} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{\mathrm{el}}} 4 \, \frac{A}{l} \quad \nabla \; N_i \, [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}_e \otimes \boldsymbol{n}_e] \, \nabla \; N_j$$

2.6 Nichtlineare Analyse eines Dreigelenkrahmens

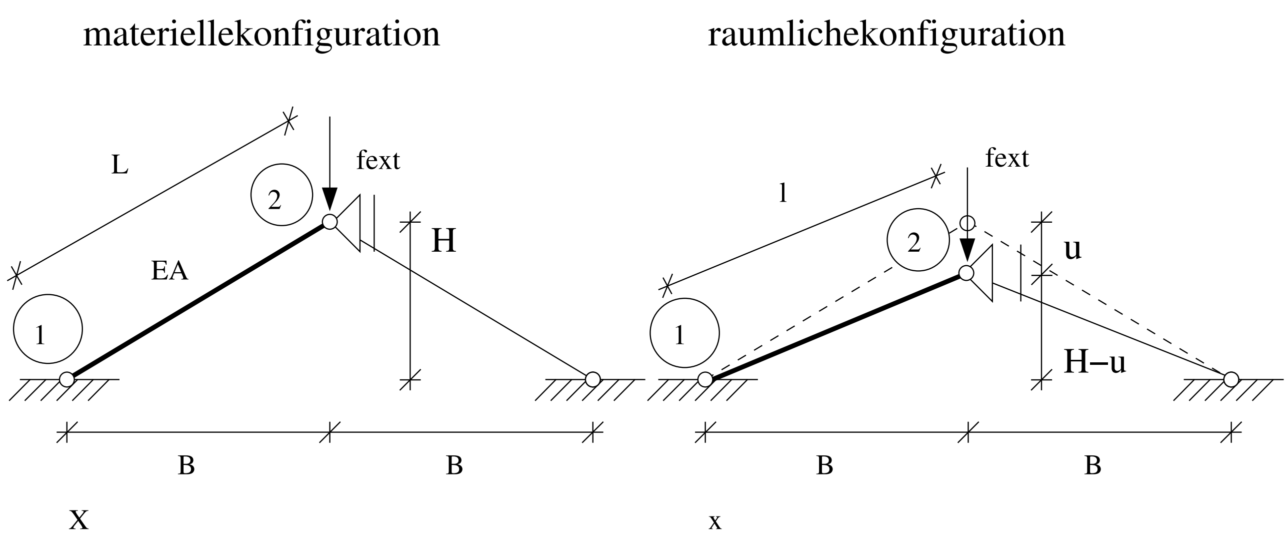


Abbildung 2.3: Dreigelenkrahmen: undeformierte & deformierte Konfiguration

- materielle und räumliche Normale

$$\boldsymbol{N} \;=\; \frac{1}{L}[\,B, H\,]^{\mathrm{t}} \qquad L \;=\; \sqrt{B^2 + H^2}$$

$$\boldsymbol{n} \;=\; \frac{1}{l}[\,B, '\;\;]^{\mathrm{t}} \qquad l \;=\; \sqrt{B^2 + '\;\;^2}$$

- Deformationsgradient

$$F = \frac{l}{L} = \frac{\sqrt{B^2 + H^2}}{\sqrt{B^2 + '\;\;^2}} \qquad\qquad \boldsymbol{F} = F\,\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{N}$$

- Green–Lagrange Verzerrungstensor

$$E = \frac{1}{2}\frac{l^2 - L^2}{L^2} = \frac{1}{2}\frac{'\;\;^2 - H^2}{L^2} \qquad\qquad \boldsymbol{E} = E\,\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N}$$

- Neo–Hooke Material

$$^{\mathrm{neo}} = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}\left[F - \frac{1}{F}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\mathrm{mod}}\frac{'\;\;^2 - H^2}{Ll} \qquad\qquad ^{\mathrm{t}} = \quad \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{N}$$

$$\frac{\mathrm{d}\quad{}^{\text{neo}}}{\mathrm{d}F} = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\text{mod}}\left[1 + \frac{1}{F^2}\right]$$

- St. Venant–Kirchhoff Material

$$
\begin{aligned}
{}^{\text{kir}} &= \mathrm{E}^{\text{mod}}\, E = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\text{mod}}\frac{'\ \ {}^{2} - H^2}{L^2} & {}^{\text{t}} &= \quad \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N}\\
{}^{\text{t}} &= \boldsymbol{F} \cdot \quad {}^{\text{t}} = \quad \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N} & {}^{\text{t}} &= \quad \frac{l}{L}\, \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{N}\\
{}^{\text{kir}} &= \frac{l}{L} \quad {}^{\text{kir}} = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\text{mod}}\frac{l[' \ \ {}^{2} - H^2]}{L^3} & {}^{\text{t}} &= \quad \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{N}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\mathrm{d}\quad{}^{\text{kir}}}{\mathrm{d}F} = \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\text{mod}}\left[3\,F^2 - 1\right] \qquad \frac{\mathrm{d}\quad{}^{\text{kir}}}{\mathrm{d}E} = \mathrm{E}^{\text{mod}}$$

- Vergleich Neo–Hooke und St. Venant–Kirchhoff Spannungen

$${}^{\text{neo}} = \frac{L^2}{l^2} \quad {}^{\text{kir}} = \frac{1}{F^2} \quad {}^{\text{kir}} \qquad {}^{\text{kir}} = \frac{l^2}{L^2} \quad {}^{\text{neo}} = F^2 \quad {}^{\text{neo}}$$

- innere Kräfte

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_I^{\text{int}} &= \nabla \ \ N_i\, 2 \qquad\qquad A \ \ \boldsymbol{n}_e\\
\boldsymbol{f}_{(2)y}^{\text{int neo}} &= \quad +\frac{1}{2}\, 2 \ \ \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\text{mod}}\frac{'\ \ {}^{2} - H^2}{Ll} \ \ A\, \frac{1}{l}\, ' \quad = \frac{\mathrm{E}^{\text{mod}} A}{2Ll^2}[' \ \ {}^{3} - H' \ \ ]\\
\boldsymbol{f}_{(2)y}^{\text{int kir}} &= \quad +\frac{1}{2}\, 2\, \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\text{mod}}\frac{l[' \ \ {}^{2} - H^2]}{L^3}\, A\, \frac{1}{l}\, ' \quad = \frac{\mathrm{E}^{\text{mod}} A}{2L^3}[' \ \ {}^{3} - H' \ \ ]
\end{aligned}
$$

- materielle Steifigkeit

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_{IJ}^{\text{mod}} &= \quad 4\,\frac{A}{L} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F} \qquad \nabla \ \ N_i \ \ \boldsymbol{n}_e \otimes \boldsymbol{n}_e \ \ \nabla \ \ N_j\\
K_{(2)y(2)y}^{\text{mat neo}} &= \quad 4\,\frac{A}{L} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{l}' \ \ \frac{1}{l}' \qquad \frac{1}{2}\\
K_{(2)y(2)y}^{\text{mat neo}} &= \frac{\mathrm{E}^{\text{mod}} A}{2l^2 L} \ \ \left[1 + \frac{1}{F^2}\right] \qquad ' \ \ {}^{2}\\
K_{(2)y(2)y}^{\text{mat kir}} &= \frac{\mathrm{E}^{\text{mod}} A}{2l^2 L} \ \ \left[3F^2 - 1\right] \qquad ' \ \ {}^{2}
\end{aligned}
$$

- geometrische Steifigkeit

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_{IJ}^{\text{geo}} &= 4\,\frac{A}{l} \qquad \nabla\; N_i \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}_e \otimes \boldsymbol{n}_e\right] \nabla\; N_j \\
\mathrm{K}_{(2)y(2)y}^{\text{geo}} &= 4\,\frac{A}{l} \qquad \frac{1}{2} \quad \left[1 - \frac{1}{l}' \; \frac{1}{l}' \;\right] \quad \frac{1}{2} \\
\mathrm{K}_{(2)y(2)y}^{\text{geo neo}} &= \frac{\mathrm{E}^{\text{mod}} A}{2l} \left[F - \frac{1}{F}\right] \qquad \left[1 - \frac{' \;\; ^2}{l^2}\right] \\
\mathrm{K}_{(2)y(2)y}^{\text{geo kir}} &= \frac{\mathrm{E}^{\text{mod}} A}{2l} \left[F^3 - F\right] \qquad \left[1 - \frac{' \;\; ^2}{l^2}\right]
\end{aligned}
$$

- Iterationsvorschrift für Newton–Raphson Verfahren

$$
\Delta' \;=\; \frac{1}{K^{\text{mod}} + K^{\text{geo}}} \left[\, f^{\text{ext}} - f^{\text{int}} \,\right]
$$

---

interne Kräfte und Steifigkeit für St. Venant–Kirchhof Material

$$
\begin{aligned}
f^{\text{int}} &= \frac{\mathrm{E}^{\text{mod}} A}{2L^3} \left[' \;\; ^3 - H^2' \;\;\right] \\
\mathrm{K}^{\text{mod}} + \mathrm{K}^{\text{geo}} &= \frac{\mathrm{E}^{\text{mod}} A}{2L^3} \left[3' \;\; ^2 - \frac{L^2}{l^2}' \;\; ^2\right] \\
&+ \frac{\mathrm{E}^{\text{mod}} A}{2L^3} \left[l^2 - L^2\right] \left[1 - \frac{' \;\; ^2}{l^2}\right] \\
&= \frac{\mathrm{E}^{\text{mod}} A}{2L^3} \left[3' \;\; ^2 - H^2\right]
\end{aligned}
$$

vergleiche kontinuierliche Formulierung Dreigelenkrahmen 1.6

2.7 Algorithmische Umsetzung mit MATLAB

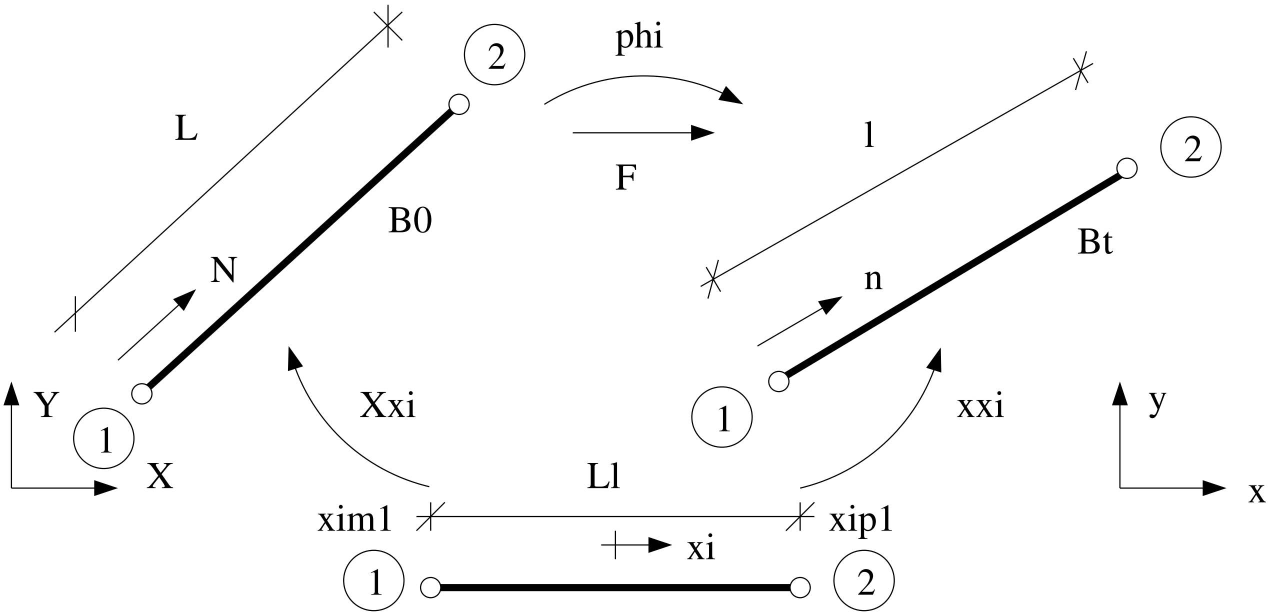


Abbildung 2.4: Nichtlineares Stabelement im 2d-Raum

2.7.1 Hauptprogramm

```
%--------------------------------------------------------------------
% nonlinear elastostatics
%--------------------------------------------------------------------
%--------------------------------------------------------------------
clear all                                              initialization
[ q0,edof,bc,F_ext,emod,area,nel,node,ndof ] = frame_2;
               % input of discretization, geometry, material data
j = 1;                                              % init time index
time(1)= 0;                                               % init time
tol = 1e-8;                            % tolerance of newton iteration
e_mat = extr_dis(edof,q0);                 % init material coordinates
q2 = q0;                                    % init spatial coordinates
n_gp = 2;                               % number of integration points
dt = 1;                                        % init load increment
%--------------------------------------------------------------------
%--------------------------------------------------------------------
for im=1:1000                          % loop over keyboard inputs
macro = input('macro:','s');
[ir,ic] = size(macro);
if ic<4
disp('@ least 4 letters needed')             % wrong keyboard input
else

%--------------------------------------------------------------------
if (strcmp(macro(1:4),'step') == 1); % apply load in n increments
[ir,ic] = size(macro);
if ic==4
  nsteps = 1;
else
  nsteps = str2num(macro(7:ic));
end
for is = 1:nsteps;                     % loop over all load increments
  j = j+1;
  time(j) = time(j-1) + dt;
  iter=0; residuum=1;
  while residuum > tol           % global newton-raphson iteration
    iter=iter+1;
    if iter>20                                        % no convergence
      disp('no convergence after 20 iterations')
      return
    else
      R = zeros(ndof,1);         % initialization of global residuum
      Kt = zeros(ndof,ndof);        % initialization of global stema
```

```
      e_spa = extr_dis(edof,q2);     % extract global displacements
      for ie = 1:nel                         % loop over all elements
        [Ke,Fe] = truss(e_mat(ie,:),e_spa(ie,:),emod,area);
        [Kt,R] = assm_sys(edof(ie,:),Kt,Ke,R,Fe);
      end
      R = R - time(j)*F_ext; % add external load to righthand side
      residuum=res_norm(R,bc)    % norm of residual including bc's
      q2 = solve_nr(Kt,R,q2,bc);              % solution and update
    end
  end                            % end of global newton iteration
end                             % end of load incrementation loop
%------------------------------------------------------------------
%------------------------------------------------------------------
elseif (strcmp(macro(1:4),'pmat') == 1);        % plot mat config
  figure(1)
  elnum = edof(:,1);
  plot_mat(e_mat,elnum)
%------------------------------------------------------------------
%------------------------------------------------------------------
elseif (strcmp(macro(1:4),'pspa') == 1);       % plot spat config
  figure(1)
  e_spa = extr_dis(edof,q2);
  plot_spa(e_spa)
%------------------------------------------------------------------
%------------------------------------------------------------------
elseif (strcmp(macro(1:4),'quit') == 1);                   % quit
  return
%------------------------------------------------------------------
%------------------------------------------------------------------
else                          % displace possible keyboard inputs
  disp('step ... apply one load step')
  disp('step,,n ... apply n load steps')
  disp('pmat ... plot material configuration')
  disp('pspa ... plot spatial configuration')
  disp('quit ... quit fe analyses')
%------------------------------------------------------------------
end
end                                   % end of keyboard input loop
end                                        % end of main programme
%------------------------------------------------------------------
```

2.7.2 Elementlastvektor und Elementsteifigkeitsmatrix

```
%-------------------------------------------------------------------
function [ed] = extr_dis(edof,a)
%-------------------------------------------------------------------
% extract displacements from global vecto
%-------------------------------------------------------------------
[nie,n] = size(edof);
t = edof(:,2:n);
for i = 1:nie
  ed(i,1:(n-1)) = a(t(i,:))';
end
%-------------------------------------------------------------------

%-------------------------------------------------------------------
function [Ke,fe] = truss(e_mat,e_spa,emod,area,e_b)
%-------------------------------------------------------------------
% geometrically nonlinear isoparametric truss element
% two noded element, analytical integration, material formulation
%-------------------------------------------------------------------
% input: e_mat = [ X_1 Y_1 X_2 Y_2 ]            ... material coord
% e_spa = [ x_1 y_1 x_2 y_2 ]                   ... spatial coord
% emod = 2 * mue                                ... young's modulus
% area                                         ... cross section area
% e_b = [ bx; by ]                             ... volume force vector
%-------------------------------------------------------------------
% output: Ke = [ 4 x 4 ]                 ... element stiffness matrix
% fe = [ fx_1 fy_1 fx_2 fy_2]                  ... element load vector
%-------------------------------------------------------------------
fe = [ 0; 0; 0; 0];                             % init load vector
unit = eye(2);                                     % init identity
if nargin==4 b=zeros(2,1); else b=e_b; end   % init volume forces

indx =[1;3];                             % indices of x coordinates
indy =[2;4];                             % indices of y coordinates
ex_mat=e_mat(indx);                 % material x coordinates of 1/2
ey_mat=e_mat(indy);                 % material y coordinates of 1/2
ex_spa=e_spa(indx);                  % spatial x coordinates of 1/2
ey_spa=e_spa(indy);                  % spatial y coordinates of 1/2
```

```
dx_mat = ex_mat(2)-ex_mat(1);     % material length in x direction
dy_mat = ey_mat(2)-ey_mat(1);     % material length in y direction
dx_spa = ex_spa(2)-ex_spa(1);      % spatial length in x direction
dy_spa = ey_spa(2)-ey_spa(1);      % spatial length in y direction

l_mat = sqrt( dx_mat*dx_mat + dy_mat*dy_mat );    % material length
l_spa = sqrt( dx_spa*dx_spa + dy_spa*dy_spa );     % spatial length

n_mat = [ dx_mat; dy_mat ] / l_mat;
n_spa = [ dx_spa; dy_spa ] / l_spa;
dNx_ref = [ -1/2; +1/2 ];          % referential gradient of N1/N2
dNx_mat = [ -n_mat(1); -n_mat(2); +n_mat(1); +n_mat(2) ];
dNx_spa = [ -n_spa(1); -n_spa(2); +n_spa(1); +n_spa(2) ];

F_mat = l_spa / l_mat;             % material deformation gradient
P = emod/2 * ( F_mat - 1/F_mat );  % 1st pk stress / cauchy stress
dPdF = emod/2 * ( 1 + 1/F_mat/F_mat );   % linearization of 1st pk
lin1 = dPdF / l_mat - P / l_spa;
lin2 = P / l_spa;

for i=1:2 indx=[2*i-1; 2*i];
  fe(indx)=P*n_spa*dNx_ref(i)*2*area;
  for j=1:2 jndx=[2*j-1, 2*j];
    Ke(indx,jndx)=dNx_ref(i)*lin1*n_spa*n_spa'*dNx_ref(j)*4*area...
                 +dNx_ref(i)*lin2* unit *dNx_ref(j)*4*area;
  end
end
%-------------------------------------------------------------------
```

2.7.3 Gleichungslöser

```
%-------------------------------------------------------------------
function ug = solve_nr(K,f,ug,bc)
%-------------------------------------------------------------------
%-------------------------------------------------------------------
if nargin==3 ;                            % no dirichlet boundary conds
  ug = ug - K \ f  ;             % solve and update vector of unknowns
elseif nargin==4;        % dirichlet boundary conds to be included
  [nd,nd] = size(K);
  fdof = [1:nd]';
  pdof = bc(:,1);
  dp = bc(:,2);
  fdof(pdof) = [];   % extract load vector of non-dirichlet nodes
  s =- K(fdof,fdof) \ f(fdof);                 % solve reduced system
  ug(fdof) = ug(fdof) + s;            % update vector of unknowns
end
%-------------------------------------------------------------------

%-------------------------------------------------------------------
function residuum = res_norm(f,bc)
%-------------------------------------------------------------------
% norm of residual
%-------------------------------------------------------------------
if nargin==1                                      % no dirichlet bc's
  residuum = norm(f);
elseif nargin==2                                     % dirichlet bc's
  [nr,nc] = size(f);
  fdof = [1:nr]';
  pdof = bc(:,1);
  fdof(pdof) = [];
  residuum = norm(f(fdof));    % residual without reaction forces
end
%-------------------------------------------------------------------
```

2.7.4 Zusammenbau Systemsteifigkeitsmatrix und Systemlastvektor

```
%------------------------------------------------------------------
function [K,f] = assm_sys(edof,K,Ke,f,fe)
%------------------------------------------------------------------
% assemble element contributions to global stiffness and force
%------------------------------------------------------------------
% input: edof = [ elem X1 Y1 X2 Y2 ]          ... incidence matrix
%        Ke = [ ndof x ndof ]          ... element stiffness matrix
%        fe = [ ndof x 1]                    ... element load vector
%------------------------------------------------------------------
% output: K = [ 4 x 4 ]            ... element stiffness matrix Ke
%          f = [ fx_1 fy_1 fx_2 fy_2]     ... element load vector fe
%------------------------------------------------------------------
[nie,n] = size(edof);
t = edof(:,2:n);
for i = 1:nie
  K(t(i,:),t(i,:)) = K(t(i,:),t(i,:))+Ke;
  if nargin==5
    f(t(i,:)) = f(t(i,:))+fe;
  end
end
%------------------------------------------------------------------
```

2.7.5 Plot der materiellen und räumlichen Konfiguration

```
%-----------------------------------------------------------------
function plot_mat(e_mat,elnum)
%-----------------------------------------------------------------
% plot of material configuration (2d frame structures)
%-----------------------------------------------------------------
indx=[1;3]; ex_mat=e_mat(:,indx);a=size(ex_mat);
indy=[2;4]; ey_mat=e_mat(:,indy);b=size(ey_mat);
if(a-b)==[0 0]
  nel=a(1);nen=a(2);
else
  disp('error in input of geometry')
end
s1 = '-'; s1 = [s1,'k']; s2 = 'ko';
x0 = sum(ex_mat')/nen; x = ex_mat'; xc = [x ; x(1,:)];
y0 = sum(ey_mat')/nen; y = ey_mat'; yc = [y ; y(1,:)];
axis('equal')
hold on
plot(xc,yc,s1)
plot(x, y, s2)
for i=1:nel
  h=text(x0(i),y0(i),int2str(elnum(i)));
  set(h,'fontsize',8);
end
xlabel('x');ylabel('y');
hold off
%-----------------------------------------------------------------

%-----------------------------------------------------------------
function plot_spa(e_spa)
%-----------------------------------------------------------------
% plot of spatial configuration (2d frame structures)
%-----------------------------------------------------------------
indx=[1;3]; ex_spa=e_spa(:,indx);
indy=[2;4]; ey_spa=e_spa(:,indy);
s1 = '--'; s1 = [s1,'k']; s2 = 'ko';
x=ex_spa'; xc = [x; x(1,:)]; y=ey_spa'; yc =[y; y(1,:)];
axis('equal')
hold on
plot(xc,yc,s1)
plot(x, y, s2)
hold off
%-----------------------------------------------------------------
```

3 Lösungsverfahren

3.1 Newton–Raphson Verfahren (Lastkontrolle)

Bemerkung: Das Newton–Raphson Verfahren ist ein <u>iteratives</u> Verfahren, das das Residuum $\boldsymbol{r}_I = \boldsymbol{f}_I^{\text{dyn}} + \boldsymbol{f}_I^{\text{int}} - \boldsymbol{f}_I^{\text{ext}}$, den "Fehler im Käftegleichgewicht", zu Null iteriert.

- Problem: nichtlineare Gleichung der Form

$$\boldsymbol{r}_I('\quad_J + \Delta'\quad_J) \doteq \mathbf{0} \qquad \forall\ I = 1,..,n_{\text{np}}$$

- Taylor Reihenentwicklung

$$\boldsymbol{r}_{I_{n+1}}^{k+1} = \boldsymbol{r}_{I_{n+1}}^{k} + \Delta\boldsymbol{r}_I \doteq \mathbf{0} \qquad \forall\ I = 1,..,n_{\text{np}}$$

mit Linearisierung des Residuums $\Delta\boldsymbol{r}_I$

$$\Delta\boldsymbol{r}_I = \sum_{J=1}^{n_{\text{np}}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_I}{\partial'\quad_J} \cdot \Delta'\quad_J \qquad \mathbf{K}_{IJ} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_I}{\partial'\quad_J} \qquad \forall\ I = 1,..,n_{\text{np}}$$

folgt

$$\boldsymbol{r}_{I_{n+1}}^{k+1} = \boldsymbol{r}_{I_{n+1}}^{k} + \sum_{J=1}^{n_{\text{np}}} \mathbf{K}_{IJ} \cdot \Delta'\quad_J \doteq \mathbf{0} \qquad \forall\ I = 1,..,n_{\text{np}}$$

- Iterationsvorschrift für das Newton–Raphson Verfahren

$$\Delta'\quad_J = -\sum_{I=1}^{n_{\text{np}}} \mathbf{K}_{JI}^{-1} \cdot \boldsymbol{r}_{I_{n+1}}^{k} \qquad \forall\ J = 1,..,n_{\text{np}}$$

Bemerkung: Obwohl es theoretisch möglich wäre, die äußere Last $\boldsymbol{f}_I^{\text{ext}}$ in einem einzigen Schritt aufzubringen, ist es im allgemeinen üblich, die Last inkrementell zu steigern, so daß in jedem Lastschritt n eine Teillast $\Delta \boldsymbol{f}_{In}^{\text{ext}}$ mit

$$\boldsymbol{f}_I^{\text{ext}} = \sum_{n=1}^{n_{\text{step}}} \Delta \boldsymbol{f}_{In}^{\text{ext}}$$

aufgebracht wird. Man spricht von einem <u>inkrementell iterativen</u>, <u>lastkontrollierten</u> Verfahren.

3.1.1 Newton–Raphson Verfahren – Algorithmus

---

1. Schleife über alle Lastschritte $n = 1..n_{\text{step}}$
   $\boldsymbol{f}_{In+1}^{\text{ext}} = \boldsymbol{f}_{In}^{\text{ext}} + \Delta \boldsymbol{f}_I^{\text{ext}}$
2. Schleife über alle Iterationsschritte $i = 1..i_{\max}$
   a) Berechne Residuum
   $\boldsymbol{r}_I(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i}) = \boldsymbol{f}_I^{\text{dyn}}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i}) + \boldsymbol{f}_I^{\text{int}}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i}) - \boldsymbol{f}_{In+1}^{\text{ext}}$
   b) Berechne Tangentenmatrix
   $\mathbf{K}_{IJ}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i}) = \mathbf{K}_{IJ}^{\text{dyn}}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i}) + \mathbf{K}_{IJ}^{\text{geo}}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i}) + \mathbf{K}_{IJ}^{\text{mat}}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i})$
   c) Berechne Inkrement der Verschiebungen
   $\Delta\boldsymbol{\varphi}_J = -\sum_{I=1}^{n_{\text{np}}} \mathbf{K}_{JI}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i})^{-1} \cdot \boldsymbol{r}_I(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i})$
   d) Update
   $\boldsymbol{\varphi}_{Jn+1}^{i+1} = \boldsymbol{\varphi}_{Jn+1}^{i} + \Delta\boldsymbol{\varphi}_J$
   e) Konvergenztest
   $$||\boldsymbol{r}_I(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}^{i+1})|| \begin{array}{ll} \leq TOL & \text{goto 1.} \\ > TOL & \text{goto 2.} \end{array}$$

3.1.2 Nichtlineare Analyse eines Dreigelenkrahmens

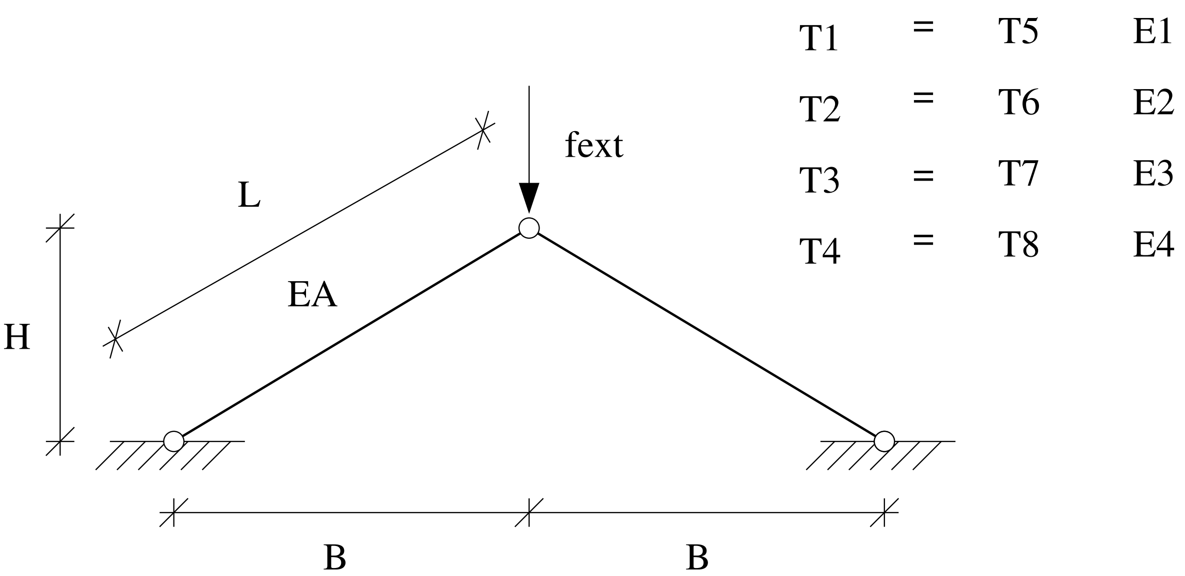


Abbildung 3.1: Durchschlagproblem: Geometrie und Abmessungen

Newton–Raphson Algorithmus, Beispiel Durchschlagproblem

1. Lastschrittschleife, $n = 1..n_{\text{step}}$ $\qquad f^{\text{ext}}_{n+1} = f^{\text{ext}}_n + \Delta f^{\text{ext}}$
2. Iterationsschleife, $i = 1..i_{\max}$
   a) Residuum $\qquad r('^{\,i}_{n+1}) = \frac{EA}{2L^3}\left[' ^3 - H^2 ' \right] - f^{\text{ext}}_n$
   b) Tangente $\qquad k('^{\,i}_{n+1}) = \frac{EA}{2L^3}\left[3 '^2 - H^2\right]$
   c) Inkrement der Deformation $\qquad \Delta' = -k('^{\,i}_{n+1})^{-1}\, r('^{\,i}_{n+1})$
   d) Update $\qquad '^{\,i+1}_{n+1} = '^{\,i}_{n+1} + \Delta'$
   e) Konvergenztest $\qquad ||r('^{\,i}_{n+1})|| \begin{cases} \leq TOL & \text{goto 1.} \\ > TOL & \text{goto 2.} \end{cases}$

- Iterationsverlauf

Iteration i	Residuum $\|\|r(u_n^i)\|\|$	Inkrement Δu [m]	totale Verschiebg u_n^i [m]
1	1.0000E+02	4.0150E-02	4.0150E-02
2	1.1722E+01	6.1222E-03	4.6272E-02
3	2.5643E-01	1.4003E-04	4.6412E-02
4	1.3295E-04	7.2684E-08	4.6412E-02
5	3.5811E-11	1.9576E-14	4.6412E-02

- qualitative Darstellung des Iterationsverlaufes

Bemerkungen:

- Das Newton–Raphson Verfahren ist das gebräuchlichste Verfahren zur Lösung des aus der FE Diskretisierung resultierenden nichtlinearen Gleichungssystems.
- Vorteil: Das Newton–Raphson Verfahren zeichnet sich durch quadratische Konvergenz in der Nähe der Lösung aus, vergleiche Durchschlagproblem.
- Nachteil: In jedem Iterationsschritt muß die Tangentenmatrix neu aufgestellt und invertiert werden, vergleiche 2.(b).

3.2 Modifiziertes Newton Verfahren (Lastkontrolle)

Bemerkung: Das modifizierte Newton Verfahren stellt eine Vereinfachung des Newton–Raphson Verfahrens dar, bei der die Tangentenmatrix pro Lastschritt nur <u>einmalig</u> aufgestellt und invertiert wird.

3.2.1 Modifiziertes Newton Verfahren – Algorithmus

---

1. Schleife über alle Lastschritte $n = 1..n_{\text{step}}$
   $\boldsymbol{f}^{\text{ext}}_{In+1} = \boldsymbol{f}^{\text{ext}}_{In} + \Delta \boldsymbol{f}^{\text{ext}}_{I}$

   Berechne (und invertiere) Tangentenmatrix
   $\mathbf{K}_{IJ}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}) = \mathbf{K}^{\text{dyn}}_{IJ}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}) + \mathbf{K}^{\text{geo}}_{IJ}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1}) + \mathbf{K}^{\text{mat}}_{IJ}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1})$
2. Schleife über alle Iterationsschritte $i = 1..i_{\max}$
   a) Berechne Residuum
      $\boldsymbol{r}_I(\boldsymbol{\varphi}^i_{n+1}) = \boldsymbol{f}^{\text{dyn}}_I(\boldsymbol{\varphi}^i_{n+1}) + \boldsymbol{f}^{\text{int}}_I(\boldsymbol{\varphi}^i_{n+1}) - \boldsymbol{f}^{\text{ext}}_{In+1}$
   b) Berechne Tangentenmatrix (entfällt)
      Tangentenmatrix wird einmalig vor Beginn der Schleife initialisiert
   c) Berechne Inkrement der Verschiebungen
      $\Delta\boldsymbol{\varphi}_J = -\sum_{I=1}^{n_{\text{np}}} \mathbf{K}_{JI}(\boldsymbol{\varphi}_{n+1})^{-1} \cdot \boldsymbol{r}_I(\boldsymbol{\varphi}^i_{n+1})$
   d) Update
      $\boldsymbol{\varphi}^{i+1}_{Jn+1} = \boldsymbol{\varphi}^{i}_{Jn+1} + \Delta\boldsymbol{\varphi}_J$
   e) Konvergenztest

$$||\boldsymbol{r}_I(\boldsymbol{\varphi}^{i+1}_{n+1})|| \begin{array}{ll} \leq TOL & \text{goto 1.} \\ > TOL & \text{goto 2.} \end{array}$$

3.2.2 Nichtlineare Analyse eines Dreigelenkrahmens

- Iterationsverlauf

Iteration i	Residuum $\|\|r(u_n^i)\|\|$	Inkrement Δu [m]	totale Verschiebg u_n^i [m]
1	1.0000E+02	4.0150E-02	4.0150E-02
2	1.1722E+01	4.7066E-03	4.4856E-02
3	2.8623E+00	1.1492E-03	4.6005E-02
4	7.4478E-01	2.9903E-04	4.6304E-02
5	1.9673E-01	7.8989E-05	4.6383E-02
6	5.2170E-02	2.0946E-05	4.6404E-02
7	1.3848E-02	5.5602E-06	4.6410E-02
8	3.6771E-03	1.4763E-06	4.6411E-02
9	9.7644E-04	3.9204E-07	4.6412E-02
10	2.5929E-04	1.0410E-07	4.6412E-02
11	6.8855E-05	2.7645E-08	4.6412E-02
12	1.8284E-05	7.3412E-09	4.6412E-02

- qualitative Darstellung des Iterationsverlaufes

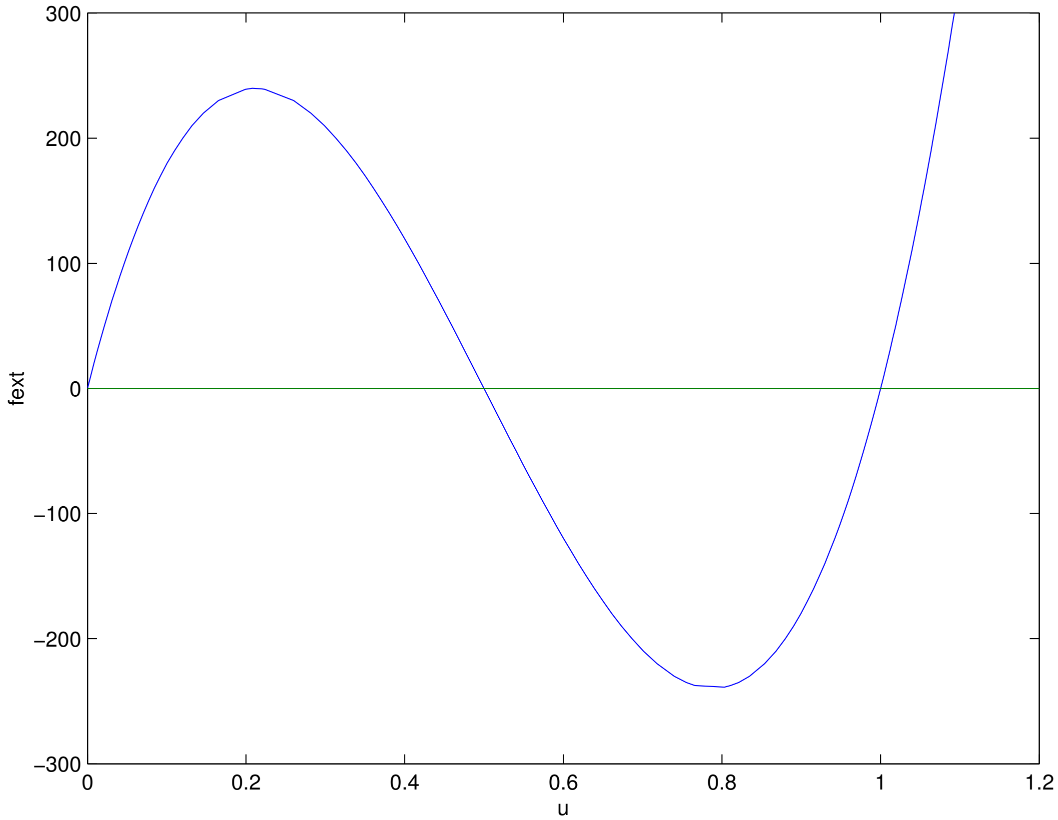
Newton–Raphson Verfahren – Durchschlagproblem

Iteration i	Residuum $\|\|r(u_n^i)\|\|$	Inkrement Δu [m]	totale Verschiebg u_n^i [m]
1	1.0000E+02	4.0150E-02	4.0150E-02
2	1.1722E+01	6.1222E-03	4.6272E-02
3	2.5643E-01	1.4003E-04	4.6412E-02
4	1.3295E-04	7.2684E-08	4.6412E-02
5	3.5811E-11	1.9576E-14	4.6412E-02

Modfiziertes Newton Verfahren – Durchschlagproblem

Iteration i	Residuum $\|\|r(u_n^i)\|\|$	Inkrement Δu [m]	totale Verschiebg u_n^i [m]
1	1.0000E+02	4.0150E-02	4.0150E-02
2	1.1722E+01	4.7066E-03	4.4856E-02
3	2.8623E+00	1.1492E-03	4.6005E-02
4	7.4478E-01	2.9903E-04	4.6304E-02
5	1.9673E-01	7.8989E-05	4.6383E-02
6	5.2170E-02	2.0946E-05	4.6404E-02
7	1.3848E-02	5.5602E-06	4.6410E-02
8	3.6771E-03	1.4763E-06	4.6411E-02
9	9.7644E-04	3.9204E-07	4.6412E-02
10	2.5929E-04	1.0410E-07	4.6412E-02
11	6.8855E-05	2.7645E-08	4.6412E-02
12	1.8284E-05	7.3412E-09	4.6412E-02

Durchschlagproblem – Last–Verschiebungskurve



Benötigte Iterationen bei unterschiedlichen Lastinkrementen

Kraft $f^{ext}[kN]$	Verschiebung $u_n[m]$	Newton Raphson	modifizierter Newton
40	0.016908	4	12
80	0.035892	4	17
120	0.057824	5	24
160	0.084414	5	35
200	0.120120	6	59
240	–	–	–

Die Traglast des gewählten Systems bei den angenommenen Material– und Geometriedaten liegt bei $f_{max}^{\text{ext}} = 239.6$ kN, so daß beide Verfahren für $f_{max}^{\text{ext}} = 240$ kN versagen.

Bemerkungen:

- Vorteil: Die Tangentenmatrix $\mathbf{K}_{IJ}(\varphi_n)$ wird zu Beginn der Iteration aufgestellt und muß nur einmalig invertiert werden.
- Nachteil: Die quadratische Konvergenz des Newton–Raphson Verfahrens geht verloren, die Konvergenz des modifizierten Newton Verfahrens is lediglich linear.
- Wird die Tangentenmatrix nur ein einziges Mal vor Beginn der Berechnung aufgestellt und invertiert, so spricht man vom elastischen Anfangssteifigkeits-Verfahren. Die Konvergenz dieses Verfahrens ist jedoch extrem schlecht.
- Das modifizierte Newton Verfahren wird i.a. nur bei schwach linearen Nichtlinearitäten verwendet.

3.3 Gedämpftes Newton Verfahren ('line search')

Bemerkung: Ein Nachteil des Newton–Raphson Verfahrens ist sein eingeschränkter Konvergenzradius. Es liefert nur "in der Nähe der Lösung" quadratische Konvergenz, erfordert also einen guten Startwert $'^{\,0}_{\,n}$. Alternativ kann die Last inkrementell in mehreren Schritten $\Delta \boldsymbol{f}_I^{\mathrm{ext}}$ aufgebracht werden oder ein gedämpftes Newton–Raphson Verfahren ("line search") verwendet werden. Dabei erfolgt der Update aus 2(d) mit

$$' \,^{i+1}_{n+1} = ' \,^{i}_{n+1} + \;^{i}\Delta' \;= ' \,^{i}_{n+1} + \;^{i}\mathbf{K}^{-1}(' \,^{i}_{n+1}) \cdot \boldsymbol{r}_I(' \,^{i}_{n+1})$$

mit $0 \leq \quad \leq 1$ ... line search Parameter

Bedingung für $\;^{i}$:
Reduktion des Residuums in jedem Iterationsschritt

$$||\boldsymbol{r}_I(' \,^{i+1}_{n+1})|| \leq ||\boldsymbol{r}_I(' \,^{i}_{n+1} + \;^{i}\Delta' \;)|| \leq ||\boldsymbol{r}_I(' \,^{i}_{n+1})||$$

dazu Minimierung der Energie $\Pi(\;^{i})$ des Systems

$$\Pi(\;^{i}) \rightarrow \min$$

daraus folgt

$$r(\;^{i}) := \frac{\partial \Pi}{\partial \;^{i}} = \frac{\partial \Pi}{\partial ' \,^{i}_{n+1}} \cdot \Delta' \; = \boldsymbol{r}_I(' \,^{i}_{n+1} + \;^{i}\Delta' \;) \cdot \Delta' \; = 0$$

nichtlineare Gleichung in $\;^{i}$ $\rightarrow$ iterative Bestimmung von $\;^{i}$ mit "regula falsi" Verfahren (Newton Verfahren auch möglich, aber zu aufwendig)

2.(d) Schleife über alle Iterationsschritte $k = 1..k_{max}$

i. Berechne Inkrement des line search Parameters

$$\Delta \quad = - \frac{{}^{i}_{k} - {}^{i}_{k-1}}{r({}^{i}_{k}) - r({}^{i}_{k-1})} r({}^{i}_{k})$$

ii. Update

$${}^{i}_{k+1} = {}^{i}_{k} + \Delta$$

iii. Konvergenztest

$$||r({}^{i}_{k+1})|| \begin{array}{ll} \leq 0.8\,||r(0)|| & \text{goto 2.(e)} \\ > 0.8\,||r(0)|| & \text{goto 2.(d)} \end{array}$$

3.3.1 Gedämpftes Newton Verfahren – Algorithmus

1. Schleife über alle Lastschritte $n = 1..n_{\text{step}}$
   $\boldsymbol{f}^{\text{ext}}_{In+1} = \boldsymbol{f}^{\text{ext}}_{In} + \Delta \boldsymbol{f}^{\text{ext}}_{I}$
2. Schleife über alle Iterationsschritte $i = 1..i_{\max}$
   a) Berechne Residuum
   $\boldsymbol{r}_I(' \ {}^{i}_{n+1}) = \boldsymbol{f}^{\text{dyn}}_{I}(' \ {}^{i}_{n+1}) + \boldsymbol{f}^{\text{int}}_{I}(' \ {}^{i}_{n+1}) - \boldsymbol{f}^{\text{ext}}_{In+1}$
   b) Berechne Tangentenmatrix
   $\mathbf{K}_{IJ}(' \ {}^{i}_{n+1}) = \mathbf{K}^{\text{dyn}}_{IJ}(' \ {}^{i}_{n+1}) + \mathbf{K}^{\text{geo}}_{IJ}(' \ {}^{i}_{n+1}) + \mathbf{K}^{\text{mat}}_{IJ}(' \ {}^{i}_{n+1})$
   c) Berechne Inkrement der Verschiebungen
   $\Delta' \ {}_J = -\sum_I^{n_{\text{np}}} \mathbf{K}_{JI}(' \ {}^{i}_{n+1})^{-1} \cdot \boldsymbol{r}_I(' \ {}^{i}_{n+1})$
   d) Schleife über alle Iterationsschritte $k = 1..k_{max}$
      i. Berechne Inkrement des line search Parameters
      $$\Delta \quad = -\frac{{}^{i}_{k} - {}^{i}_{k-1}}{r({}^{i}_{k}) - r({}^{i}_{k-1})} r({}^{i}_{k})$$
      ii. Update
      ${}^{i}_{k+1} = {}^{i}_{k} + \Delta$
      iii. Konvergenztest
      $$||r({}^{i}_{k+1})|| \begin{array}{ll} \leq 0.8\,||r(0)|| & \text{goto 2.(e)} \\ > 0.8\,||r(0)|| & \text{goto 2.(d)} \end{array}$$
   e) Update
   $' \ {}^{i+1}_{Jn+1} = ' \ {}^{i}_{Jn+1} + {}^{i}\Delta' \ {}_J$
   f) Konvergenztest
   $$||\boldsymbol{r}_I(' \ {}^{i+1}_{n+1})|| \begin{array}{ll} \leq TOL & \text{goto 1.} \\ > TOL & \text{goto 2.} \end{array}$$

3.4 Newton–Raphson Verfahren (Verschiebungskontrolle)

Bemerkung: Obwohl die line search Technik den Konvergenzradius des Newton–Raphson Verfahrens verbessert, können mit dem lastgesteuerten Verfahren sogenannte "limit points" des Gleichgewichtspfads nicht überschritten werden. Abhilfe schafft ein verschiebungsggesteuertes Verfahren, das durch vorgegebene Verschiebungen an einem ausgewählten Knoten einen Spannungszustand in der Probe erzeugt, aus dem Knotenkräfte an dem verschiebungskontrollierten Knoten resultieren.

Vorgehen:
Partitionierung (Umsortieren) des Lösungsvektors Δ' in tatsächliche Freiheitsgrade Δ'_{f} und vorgeschriebene Werte Δ'_{p}

$$\Delta' = [\,\Delta'_{\mathrm{f}}, \Delta'_{\mathrm{p}}\,]$$

zu lösendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{ff}} & \mathbf{K}^{\mathrm{fp}} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{pf}} & \mathbf{K}^{\mathrm{pp}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta'_{\mathrm{f}} \\ \Delta'_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{f}I} \\ \boldsymbol{f}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{p}I} \end{bmatrix}$$

mit $\Delta'^{\,i=0}_{\mathrm{p}}$ gegeben und $\Delta'^{\,i>0}_{\mathrm{p}} = \mathbf{0}$
1. Iterationsschritt

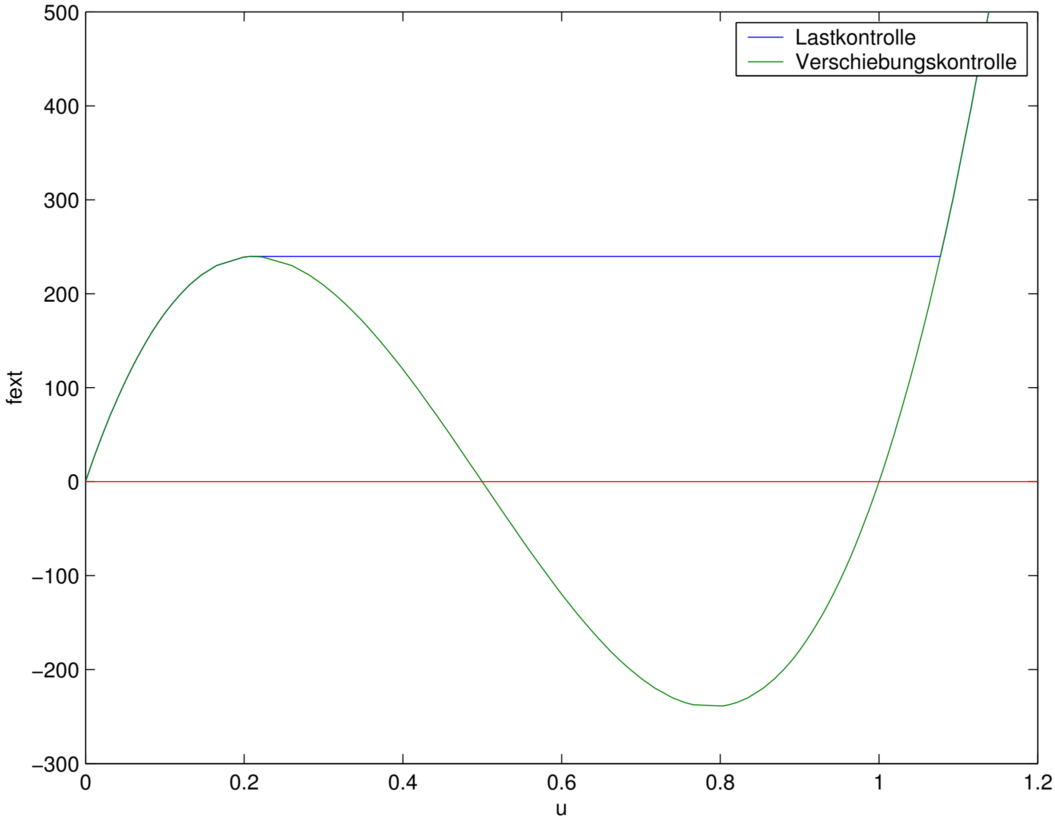
$$\Delta'^{\,1}_{\mathrm{f}} = -\mathbf{K}^{\mathrm{ff}-1} \cdot [\,\mathbf{K}^{\mathrm{fp}} \cdot \Delta'^{\,0}_{\mathrm{P}} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{int}0}_{\mathrm{f}\;\;I}\,]$$

i. Iterationsschritt

$$\Delta'^{\,i+1}_{\mathrm{f}} = -\mathbf{K}^{\mathrm{ff}-1} \cdot [\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{int}i}_{\mathrm{f}\;\;I}\,]$$

Bemerkung: Bei verschiebungskontrollierten Verfahren wird ein reduziertes Gleichungssystem mit veränderter rechter Seite gelöst. Die reduzierte Iterationsmatrix $\mathbf{K}_{ff}$ besitzt i.a. einen kleineren Spektralradius als $\mathbf{K}$. Verschiebungskontrollierte Verfahren liefern also i.a. stabilere Lösungen als lastkontrollierte Verfahren, vergleiche Durchschlagproblem.

Durchschlagproblem – Last–Verschiebungs Kurve



3.5 Bogenlängenverfahren

Bemerkung: Ist man am Verhalten einer Struktur im überkritischen Bereich interessiert, so benötigt man ein stabiles Verfahren zur vollständigen Verfolgung des nichtlinearen Gleichgewichtspfades. Sowohl mit dem lastkontrollierten, als auch mit dem verschiebungskontrollierten Verfahren können bestimmte ”limit points” L_L bzw. L_V nicht überschritten werden. Abhilfe schafft das Bogenlängenverfahren (”arc length control”), das die inkrementelle Last mittels eines Lastparameters   über eine zusätzliche Nebenbedingung bestimmt.

äußere Last zum Zeitpunkt t_n^i

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}i}_{\;\;n} = \;{}^{i}_{n}\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ext}}$$

... Lastparameter, bisher $= 1/n_{\mathrm{step}} = \mathrm{const.}$, jetzt   variabel, bestimmt aus Nebenbedingung $f('\;\;,\;\;) = 0$

erweitertes Gleichungssystem

$$\bar{\boldsymbol{r}}('^{-}\;) = \mathbf{0}$$

mit

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}\,('\;\;,\;\;) \\ \\ f\,('\;\;,\;\;) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad '^{-} = \begin{bmatrix} ' \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Newton–Raphson Verfahren zur Lösung des erweiterten Gleichungssystems, dazu Linearisierung, Newton–Raphson Iterationsvorschrift

$$\bar{\mathbf{K}}('^{-}\;) \cdot \Delta'^{-} = -\bar{\boldsymbol{r}}$$

mit

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial '} & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial} \\ \frac{\partial f}{\partial '} & \frac{\partial f}{\partial} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta ' \\ \Delta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ f \end{bmatrix}$$

Linearisierung der Gleichgewichtsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial '} &= \mathbf{K}'' & & \text{...standard Tangentenmatrix} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial} &= \mathbf{K}' & = -\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ext}} & \text{...externe Last} \end{aligned}$$

Linearisierung der Nebenbedingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial '} &= \mathbf{K}^{\ '} & & \text{...abhängig von der Wahl der NB } f(' \ , \ ) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial} &= \mathrm{K} & & \text{...abhängig von der Wahl der NB } f(' \ , \ ) = 0 \end{aligned}$$

linearisiertes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'' & -\bar{\boldsymbol{f}}_I^{\mathrm{ext}} \\ \mathbf{K}^{\ '} & \mathrm{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta ' \\ \Delta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_I \\ f \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Da die Iterationsmatrix des erweiterten Systems unsymmetrisch ist, $\bar{\mathbf{K}} \neq \bar{\mathbf{K}}^{\mathrm{t}}$, wird das Gleichungssystem üblicherweise mittels Partitionierungstechniken gelöst, um die Symmetrie der Tangentenmatrix, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{\mathrm{t}}$, auszunutzen.

erste Gleichung

$$\mathbf{K} \cdot \Delta ' \ - \boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}} \cdot \Delta \ = -\boldsymbol{r}$$

$$\Delta ' \ = -\mathbf{K}^{-1} \cdot \boldsymbol{r} + \mathbf{K}^{-1} \cdot \Delta \ \ \bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ext}}$$

mit

$$\Delta' \cdot := -\mathbf{K}^{-1} \cdot \boldsymbol{r} \qquad \text{und} \qquad \Delta' := \mathbf{K}^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{f}}^{\text{ext}}$$

$$\Delta' = \Delta' \cdot + \Delta \ \Delta'$$

- zweite Gleichung

$$\mathbf{K}' \cdot \Delta' + \mathrm{K} \ \Delta = -f$$

$$\mathbf{K}' \cdot \Delta' \cdot + [\,\mathbf{K}' \cdot \Delta' + \mathrm{K}\,]\,\Delta = -f$$

$$\Delta = -\frac{f + \mathbf{K}' \cdot \Delta' \cdot}{\mathbf{K}' \cdot \Delta' + \mathrm{K}}$$

Wagner [1991], Wriggers [2001]

3.5.1 Bogenlängenverfahren – Algorithmus

1. Schleife über alle Lastschritte $n = 1..n_{\text{step}}$

   a) Prädiktorschritt
   $$\Delta' \quad = \mathbf{K}^{-1}('\ \ _n) \cdot \bar{\boldsymbol{f}}_I^{\text{ext}}$$
   $$\Delta \quad = \frac{\pm\Delta s}{||\Delta'\quad||} \text{ entsprechend Nebenbedigung } f(\boldsymbol{D}_n,\ \ _n)$$
   $$_{n+1}^{0} = \ \ _n + \Delta$$

2. Schleife über alle Iterationsschritte $i = 1..i_{\max}$

   a) Berechne Residuum
   $$\boldsymbol{r}_I('\ \ _{n+1}^{i},\ \ _{n+1}^{i}) = \boldsymbol{f}_I^{\text{dyn}}('\ \ _{n+1}^{i}) + \boldsymbol{f}_I^{\text{int}}('\ \ _{n+1}^{i}) - \ \ _{n+1}^{i}\bar{\boldsymbol{f}}_I^{\text{ext}}$$

   b) Berechne Tangentenmatrix
   $$\mathbf{K}('\ \ _{n+1}^{i}) = \mathbf{K}^{\text{dyn}}('\ \ _{n+1}^{i}) + \mathbf{K}^{\text{geo}}('\ \ _{n+1}^{i}) + \mathbf{K}^{\text{mat}}('\ \ _{n+1}^{i})$$

   c) Berechne $\Delta'\ '$ und Δ'
   $$\Delta'\ ' \quad = -\mathbf{K}^{-1}('\ \ _{n+1}^{i}) \cdot \boldsymbol{r}_I('\ \ _{n+1}^{i},\ \ _{n+1}^{i})$$
   $$\Delta' \quad = \quad \mathbf{K}^{-1}('\ \ _{n+1}^{i}) \cdot \bar{\boldsymbol{f}}_I^{\text{ext}}$$

   d) Berechne inkrementellen Lastparameter & Deformation
   $$\Delta \quad = -\frac{f_n^i + \mathbf{K}^{'} \quad \cdot \Delta'\ '}{\mathbf{K}^{'} \quad \cdot \Delta' \quad + K} \qquad\qquad \Delta' \quad = \Delta'\ ' + \Delta \quad \Delta'$$

   e) Update
   $$_{n+1}^{i+1} = \ \ _{n+1}^{i} + \Delta \qquad\qquad '\ \ _{n+1}^{i+1} = '\ \ _{n+1}^{i} + \Delta'$$

   f) Konvergenztest
   $$||\boldsymbol{r}_I('\ \ _{n+1}^{i+1},\ \ _{n+1}^{i+1})|| \begin{array}{ll} \leq TOL & \text{goto 1.} \\ > TOL & \text{goto 2.} \end{array}$$

3.5.2 Bogenlängenverfahren – mögliche Nebenbedingungen

Lastkontrolle Standard Newton–Raphson Verfahren

$$f(' \;,\;) = \quad - \quad ^{p}$$

daraus folgt $\quad \mathbf{K}^{'} \;\; = \partial_{'} f = \mathbf{0} \quad$ und $\quad \mathrm{K} \quad = \partial \; f = 1$

bzw. $\quad \Delta \quad \equiv 0 \quad$ und $\quad \Delta' \quad = -\mathbf{K}^{-1} \cdot \boldsymbol{r} = \Delta' \;_{'} \quad$ vergleiche 3.1

Verschiebungskontrolle Batoz & Dhatt [1979]

$$f(' \;,\;) = ' \;_{A} - ' \;^{p}_{A}$$

mit A... kontrollierter Freiheitsgrad, daraus folgt

$$\mathbf{K}^{'} \;\; = \partial_{'} f = [\,0, 0, .., \underbrace{1}_{\text{A-te Komponente}}, .., 0, 0\,] \quad \text{und} \quad K \quad = \partial \; f = 0$$

$$\text{bzw.} \quad \Delta \quad = -\frac{' \;_{A} - ' \;^{p}_{A} + \mathbf{K}^{'} \;\; \cdot \Delta' \;_{'}}{\mathbf{K}^{'} \;\; \cdot \Delta' \quad + 0} = -\frac{' \;_{A} - ' \;^{p}_{A} + \Delta' \;_{A}}{\Delta' \;_{A}}$$

vergleiche 3.4

Iteration auf fixer Normalenebene Riks [1972]

$$f(' \;,\;) = [' \;^{1}_{n} - ' \;_{n}] \cdot [' \;^{i+1}_{n} - ' \;^{1}_{n}] + \;^{2} [\;^{1}_{n} - \;_{n}][\;^{i+1}_{n} - \;^{1}_{n}] \boldsymbol{f}^{\text{ext}}_{I} \cdot \boldsymbol{f}^{\text{ext}}_{I} - \Delta s^{2}$$

daraus folgt $\mathbf{K}^{'} \;\; = \partial f = ' \,{}^{1}_{n} - ' \;{}_{n}$ und $K \;\; = \partial\; f = \;{}^{1}_{n} - \;\;{}_{n}$

- ältestes Pfadverfolgungsverfahren
- ... Wichtungsfaktor
- Δs ... Bogenlänge
- f linear in $' \;{}^{i+1}_{n}$ und $\;{}^{i+1}_{n}$
- f beschreibt Normalenebene zum ersten Tangentenvektor an die Kurve

Iteration auf Normalenebene Ramm [1981]

$$f(' \;,\;\;) = [' \;{}^{i}_{n} - ' \;\;{}_{n}] \cdot [' \;{}^{i+1}_{n} - ' \;{}^{i}_{n}] + \;\;{}^{2}[\;{}^{i}_{n} - \;\;{}_{n}][\;{}^{i+1}_{n} - \;{}^{i}_{n}] \boldsymbol{f}_I^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{f}_I^{\text{ext}} - \Delta s^2$$

---

daraus folgt $\mathbf{K}^{'} \;\; = \partial f = ' \,{}^{i}_{n} - ' \;{}_{n}$ und $K \;\; = \partial\; f = \;{}^{i}_{n} - \;\;{}_{n}$

- f linear in $' \;{}^{i+1}_{n}$ und $\;{}^{i+1}_{n}$
- f beschreibt Normalenebene zum aktuellen Tangentenvektor an die Kurve

Iteration auf Kugelfläche Crisfield [1981]

$$f(' \;,\;\;) = [' \;{}^{i+1}_{n} - ' \;{}^{i}_{n}] \cdot [' \;{}^{i+1}_{n} - ' \;{}^{i}_{n}] + \;\;{}^{2}[\;{}^{i+1}_{n} - \;{}^{i}_{n}][\;{}^{i+1}_{n} - \;{}^{i}_{n}] \boldsymbol{f}_I^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{f}_I^{\text{ext}} - \Delta s^2$$

- f quadratisch in $' \;{}^{i+1}_{n}$ und $\;{}^{i+1}_{n}$
- f beschreibt Kugelfläche um letzten Gleichgewichtspunkt
- Δs ... Radius
- zwei Schnittpunkte mit dem Gleichgewichtspfad

Bemerkung: Bogenlängenverfahren sind i.a. robuster als das Standard Newton–Raphson Verfahren, jedoch sind sie nicht global stabil, so daß sie möglichst nur in Kombination mit line search Techniken eingesetzt werden sollten.