1 Přesnost metody konečných prvků

- Metoda konečných prvků je založena na *diskretizaci* původní spojité konstrukce soustavou prvků (nebo obecněji na diskretizaci slabé formulace řídicích rovnic) $\Rightarrow$ výsledkem je *přibližné* řešení.
- Přesnost přibližného řešení závisí na
  - volbě typu konečného prvku,
  - velikosti jednotlivých prvků,
  - průběhu slabého řešení;

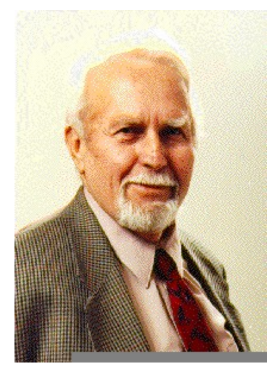
  je tedy silně ovlivněna *konstrukcí sítě konečných prvků* (obecně bázových funkcí).

I. Babuška

A.-L. Cauchy

Ch. E. Delanuay

G. F. Voronoi



O. C. Zienkiewicz

2 Generování sítě konečných prvků

3 Konvergence metody konečných prvků

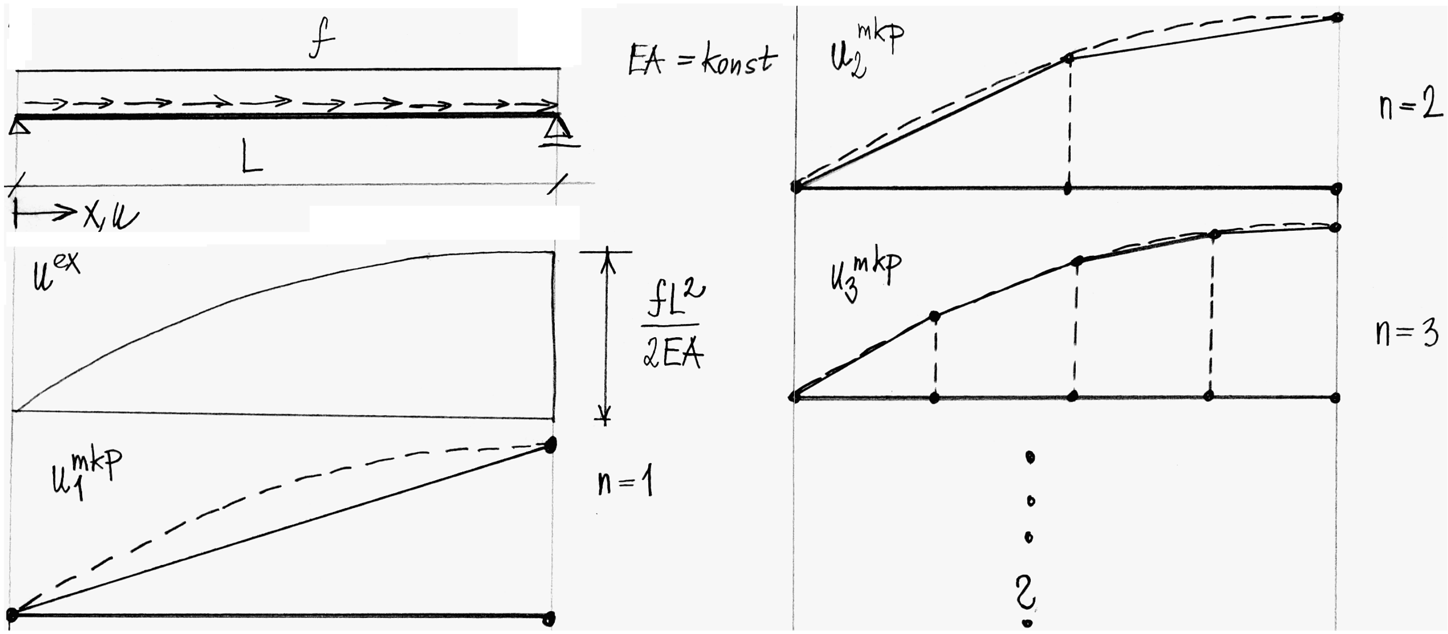
- Pojem *konvergence* (Cauchyho koncepce): Řekneme, že posloupnost reálných čísel a_n konverguje k limitě a, pokud pro *libovolné* $\epsilon > 0$ můžeme najít takové n_0, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|a - a_n| \leq \epsilon$. Pak píšeme

$$a_n \rightarrow a \quad \text{nebo přesněji} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

- Předchozí definice jinými slovy tvrdí, že dokážeme posloupností a_n aproximovat limitu a s libovolnou (danou) přesností $\epsilon > 0$.
- V metodě konečných prvků jde o to, zda lze slabé řešení dané úlohy $\underline{u}^{\mathrm{ex}}$ aproximovat s libovolnou přesností konečněprvkovým řešením $\underline{u}_n^{\mathrm{mkp}}$;

$$\underline{u}_n^{\mathrm{mkp}}(\underline{x}) \stackrel{?}{\rightarrow} \underline{u}^{\mathrm{ex}}(\underline{x})$$

Příklad (tažený/tlačený prut)



- V původní definici konvergence se operuje s reálnými čísly, nás však zajímá konvergence *funkcí*.
- Zavádíme tzv. *energetickou normu* funkce u

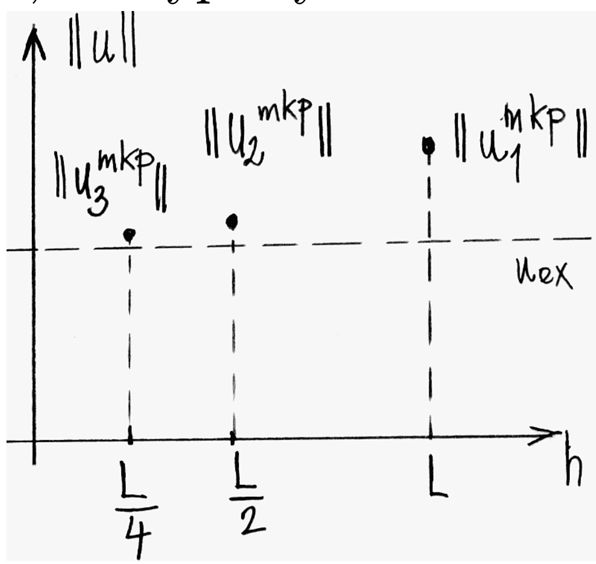
$$\|u(x)\|^2 = \int_I E(x)A(x)\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

která má fyzikální význam vnitřní energie konstrukce, udělíme-li jí daný posun u.

- Zkoumáme tedy otázku, zda platí

$$\|u_n^{\mathrm{mkp}}(\underline{x})\| \to \|u^{\mathrm{ex}}(\underline{x})\|.$$

- V metodě konečných prvků většinou jednotlivá řešení neparametrizujeme počtem prvků n, ale typickým rozměrem prvku h.



- V ideálním případě by mělo platit

$$\lim_{h\to 0} \|u_h^{\mathrm{mkp}}(x)\| \to \|u^{\mathrm{ex}}(x)\|;$$

tedy pro libovolnou zvolenou přesnost $\epsilon > 0$ jsme schopni najít takovou velikost prvku h, že platí

$$\|u_h^{\mathrm{mkp}}(x) - u^{\mathrm{ex}}(x)\| < \epsilon,$$

jsme tedy schopni aproximovat slabé řešení s *libovolnou přesností* v *energetické normě*.

- Pro zajištění této podmínky musí bázové funkce splňovat podmínky
  - *dostatečné hladkosti*: neznámé funkce musí být aproximovány bázovými funkcemi, které mají spojité derivace řádu o jedna vyššího, než se objevuje ve slabém řešení,[a]
  - *spojitosti*: aproximované funkce musí být spojité jak uvnitř prvku, tak na hranicích mezi prvky,
  - *úplnost [pro úlohy teorie pružnosti]*: aproximační funkce musí být schopny

[a]Poznamenejme, že ve všech prezentovaných úlohách postačuje C^0 spojitost bázových funkcí.

    * reprezentovat přemístění prvku jako tuhého tělesa bez vzniku deformací,
    * popsat stav konstantní deformace – vyloučení parazitních posunů (spurious modes).

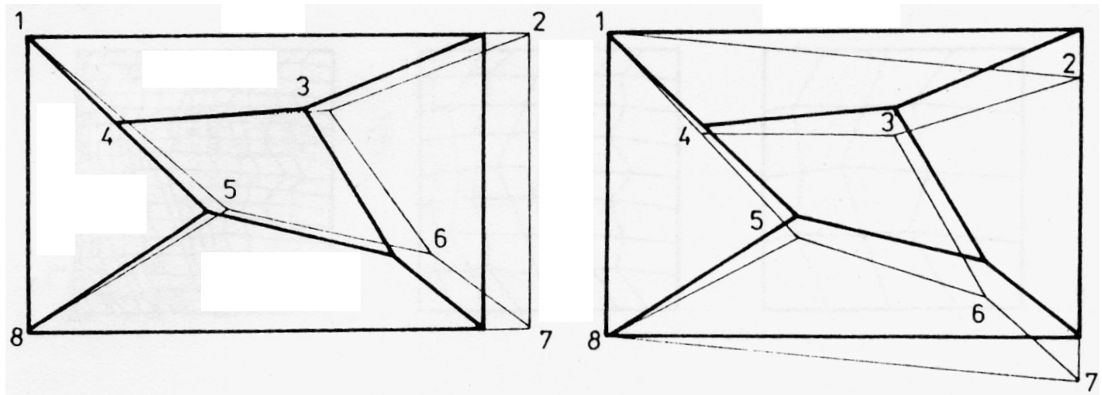
- Prvek, jehož bázové funkce splňují podmínky jak spojitosti, tak úplnosti se nazývá *konformní*. Pak platí

$$\|u_h^{\mathrm{mkp}}(x) - u^{\mathrm{ex}}(x)\| \searrow 0$$

  a hovoříme o tzv. *monotónní* konvergenci.

- Pokud je splněna podmínka úplnosti, ale není spojena podmínka spojitosti, prvek se nazývá *nekonformní*. Řešení pak konverguje, ale konvergence nemusí být monotónní.

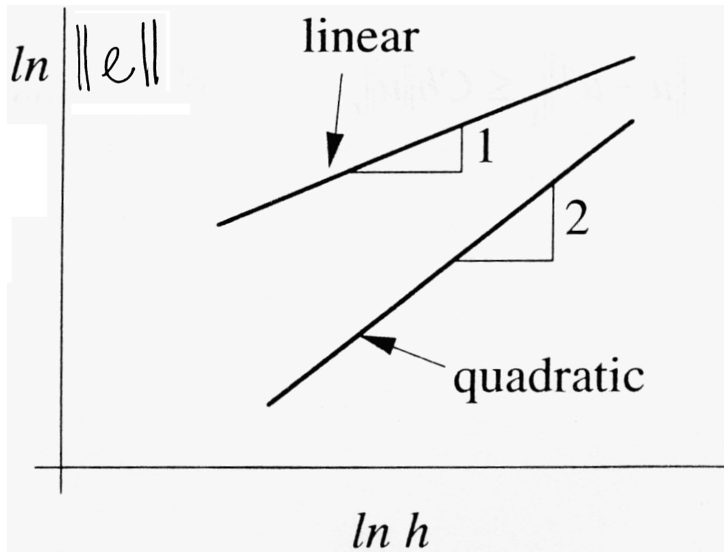
- U nekonformních prvků je rigorózní analýza splnění podmínky úplnosti velmi komplikovaná, proto je často využíván tzv. *patch test*.



4 Adaptivní techniky v MKP

- Předchozí analýza specifikovala podmínky, za kterých řešení MKP konverguje ke správnému výsledku, nebylo však řečeno *jak rychle*.
- Rychlost konvergence lze ovlivnit
  - zjemňováním sítě $h \to 0$ – tzv. h-konvergence,
  - zvyšováním stupně polynomické aproximace p – tzv. p-konvergence MKP,
  - kombinací obou přístupů – hp-konvergence.

- Z výpočetního hlediska je výhodné provádět zjemňování sítě resp. zvyšování stupně polynomu pouze tam, kde přibližné řešení dobře nevystihuje přesné řešení → adaptivní varianta MKP.



- Pro libovolnou adaptivní techniku nutno znát *chybu přibližného řešení*

$$e(x) = u^{\mathrm{mkp}}(x) - u^{\mathrm{ex}}(x) \quad \text{respektive} \quad \|e(x)\| = \|u^{\mathrm{mkp}}(x) - u^{\mathrm{ex}}(x)\|$$

- Názornější veličinou je relativní chyba řešení

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|}$$

- Přesné řešení u^{ex} ovšem není obecně známé, je nutno se spokojit „pouze“ s *odhadem* chyby ${}^0\|e\|$ nebo relativní chyby ${}^0\eta$.
- Výstižnost odhadu chyby slouží tzv. *index účinnosti* odhadu
$$\vartheta = \frac{{}^0\|e\|}{\|e\|}.$$
- Metody odhadu, pro které platí
$$\lim_{h\to 0} \vartheta = 1,$$
se nazývají *(asymptoticky) efektivní.*

5 Odhad chyby pomocí ZZ metody

- Metoda navržená Zienkiewiczem a Zhuem v [2], vhodná pro h-adaptivní variantu metody konečných prvků.
- Velmi jednoduchá na výpočet, vychází ze známých hodnot uzlových

posunů $\underline{r}$.

- Při aproximaci neznámých posunů u^{mkp} po částech lineárními bázovými funkcemi

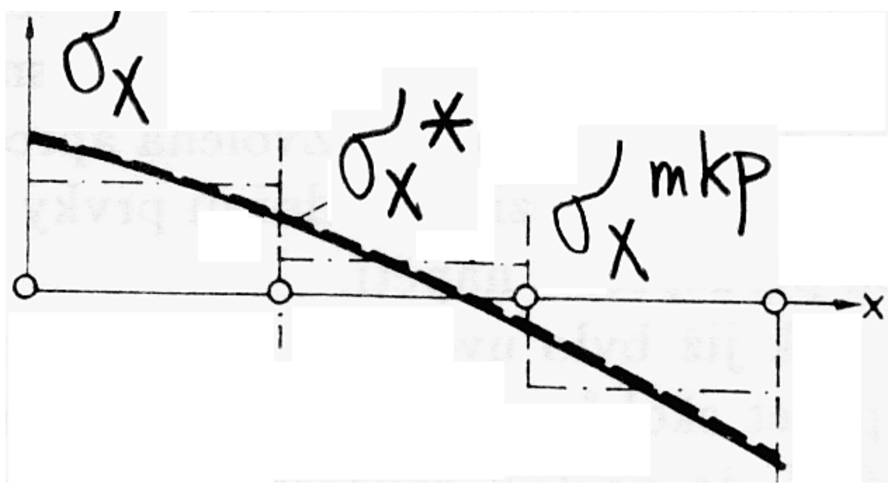
$$\underline{u}^{\mathrm{mkp}}(\underline{x}) \approx \underline{\underline{N}}(\underline{x})\underline{r},$$

jsou průběhy deformací $\underline{\varepsilon}^{\mathrm{mkp}}$ i napětí $\underline{\sigma}^{\mathrm{mkp}}$ po částech konstantní

$$\underline{\sigma}^{\mathrm{mkp}}(\underline{x}) \approx \underline{\underline{B}}(\underline{x})\underline{r}.$$

- *Předpokládáme*, že skutečnému průběhu napětí $\underline{\sigma}^{\mathrm{ex}}$ je bližší průběh

$$\underline{\sigma}^{*}(\underline{x}) = \underline{\underline{N}}(\underline{x})\underline{r}_{\sigma}.$$



- Koeficienty $\underline{r_\sigma}$ určíme tak, aby chyba mezi přibližnými napětími $\underline{\sigma}^{\mathrm{mkp}}$ a „vylepšenými“ napětími $\underline{\sigma}^*$ ve smyslu nejmenších čtverců byla co nejmenší,

$$\int_\Omega \left(\underline{\sigma}^*(\underline{x}) - \underline{\sigma}^{\mathrm{mkp}}(\underline{x})\right)^{\mathsf{T}} \left(\underline{\sigma}^*(\underline{x}) - \underline{\sigma}^{\mathrm{mkp}}(\underline{x})\right) \, \mathrm{d}\underline{x} \to \min .$$

- Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{r_\sigma}} \int_\Omega \left(\underline{\underline{N}}(\underline{x})\underline{r_\sigma} - \underline{\underline{B}}(\underline{x})\underline{r}\right)^{\mathsf{T}} \left(\underline{\underline{N}}(\underline{x})\underline{r_\sigma} - \underline{\underline{B}}(\underline{x})\underline{r}\right) \mathrm{d}\underline{x} &= \underline{0} \\ \int_\Omega \underline{\underline{N}}(\underline{x})^{\mathsf{T}} \left(\underline{\underline{N}}(\underline{x})\underline{r_\sigma} - \underline{\underline{B}}(\underline{x})\underline{r}\right) \mathrm{d}\underline{x} &= \underline{0} \end{aligned}$$

- Uzlové hodnoty vylepšených napětí plynou z řešení lineární soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \underline{\underline{N}}(\underline{x})^{\mathsf{T}} \underline{\underline{N}}(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x}\right) \underline{r_\sigma} &= \left(\int_\Omega \underline{\underline{N}}(\underline{x})^{\mathsf{T}} \underline{\underline{B}}(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x}\right) \underline{r} \\ \underline{\underline{A}}\, \underline{r_\sigma} &= \underline{b} \end{aligned}$$

- Odhad chyby nyní založíme na rozdílu

$$\underline{\sigma}^*(\underline{x}) - \underline{\sigma}^{\mathrm{mkp}}(\underline{x}).$$

- V případě jednorozměrné úlohy dostaneme pro odhad chyby výraz[b]

$${}^0\|e\| = \int_I \frac{A(x)}{E(x)} \left(\sigma_x^*(x) - \sigma_x^{\mathrm{mkp}}(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x.$$

- V případě vícerozměrné úlohy je energetická norma definována vztahem

$$\|\underline{u}\| = \int_\Omega \underline{\varepsilon}(\underline{x})^\mathsf{T} \underline{\underline{D}}(\underline{x}) \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \,\mathrm{d}\underline{x} = \int_\Omega \underline{\sigma}(\underline{x})^\mathsf{T} \underline{\underline{D}}^{-1}(\underline{x}) \underline{\sigma}(\underline{x}) \,\mathrm{d}\underline{x}$$

[b]Připomeňme definici energetické normy

$$\|u\|^2 = \int_I E(x)A(x) \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \int_I \varepsilon_x(x)A(x)E(x)\varepsilon_x(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \frac{A(x)}{E(x)}\sigma_x^2(x)$$

a chyba v energetické normě dána výrazem

$$\|\underline{e}\| = \int_\Omega \left(\underline{\sigma}^*(\underline{x}) - \underline{\sigma}^{\mathrm{mkp}}(\underline{x})\right)^{\mathsf{T}} \underline{\underline{D}}^{-1}(\underline{x}) \left(\underline{\sigma}^*(\underline{x}) - \underline{\sigma}^{\mathrm{mkp}}(\underline{x})\right)^{\mathsf{T}} \mathrm{d}\underline{x}$$

- Lze ukázat, že ZZ-metoda (a průměrovací metody obecně) jsou asymptoticky efektivní [1].

$\square$

Prosba. V případě, že v textu objevíte nějakou chybu nebo budete mít námět na jeho vylepšení, ozvěte se prosím na `zemanj@cml.fsv.cvut.cz`.

Opravy verze -001: Odstraněná celá řada překlepů, nepřesností a chyb (na chyby upozornil J. Šejnoha)

Verze 000

Reference

[1] C. Carstensen, *All first-order averaging techniques for a posteriori finite element error control on unstructured grids are efficient and reliable,*

Mathematics of Computation **73** (2004), no. 247, 1153–1165.

[2] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engeneering analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **24** (1987), 337–357.