Úvodní přednáška
“Direct Approach” to FEM

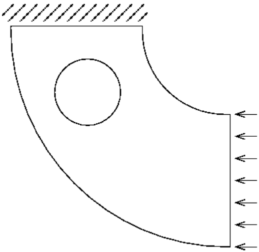
Úvod do Metody Konečných Prvků (MKP)

- Většina fyzikálních jevů může být popsána systémem parciálních diferenciálních rovnic.
- Analytické řešení klasickými metodami pro obecné oblasti je velmi obtížné či prakticky nemožné.
- MKP (Finite Element Method - FEM[1]) je nejčastěji užívaná, systematická a univerzální metoda pro numerické řešení problémů.

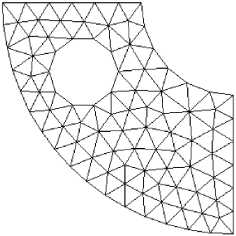
[1] Google “FEM” $>$ 14 mil. odkazů, $>$ 500 knih o MKP, výdaje $>$ 1 mld. USD na FEM Software a výpočetní čas

Idea MKP

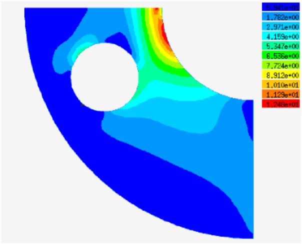
Problém, diferenciální rovnice



Rozdělení oblasti na konečné prvky



Aproximační, "slabé" řešení



Historie MKP

1943 Courant - aplikace variačních principů, položil základ matematické teorie MKP

1950 první inženýrská aplikace v letectví, Boeing&Bell. M.J.Turner, R.W.Clough ($\rightarrow$ Berkeley), M.C.Martin publikovali jeden z prvních článků.

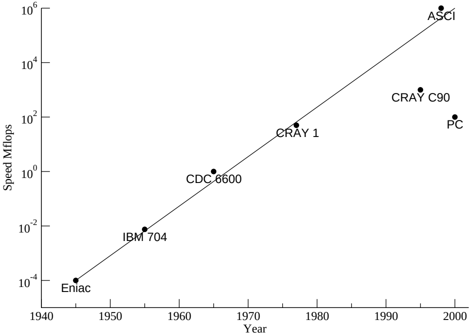
- Berkeley: E. Wilson, R.L.Taylor a jejich PhD studenti: T.J.R. Hughes, C. Felipa, K.J. Bathe
- Swansea: O.C. Zienkiewicz, B. Irons, R.Owen

1960 E. Wilson - první MKP program (freeware)

1965 Nastran; 1969 Ansys (hodnota společnosti $\approx$ 1.8 mld. \$); 1978 Abaqus

dnes MKP aplikována pro řešení současných vědecko-technických problémů - komplexní návrh letadel, simulace výrobních procesů, nárazové testy automobilù, návrh spalovacích motorů, ochraných obálek jaderných reaktorů, seismická analýza přehrad, aplikace v lékařství - simulace provádění plastických operací, ...

Historický vývoj rychlosti počítačů



Z obrázku je patrný lineární nárůst rychlosti (logaritmické měřítko). Toho si prvně všiml G. Moore[2] v roce 1965 a formuloval empirické pravidlo, známé jako Moorův zákon:*Složitost součástek (počet tranzistorů na čipu a jejich výkon) se každý rok zdvojnásobí při zachování stejné ceny.*

---

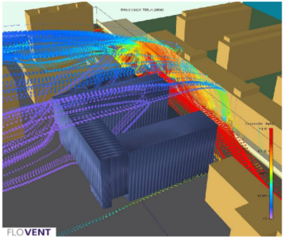
[2] Spoluzakladatel firmy Intel v roce 1968

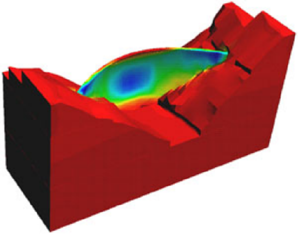
Historický vývoj vybraných cen v USA[3]

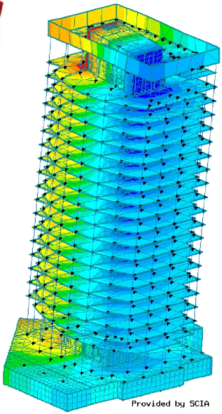
	1968	2005
CDC 6600 (0.5-1 Mflopf)	$8000000	
512 Beowulf cluster, 2003 (1 Tflop)		$500000
PC (200-1600 Mflops)		$500-$3000
MSc Engineer, starting salary	$9000	$51000
Assistant Prof.	$11000	$55000
Tuition at Northwestern (1 year)	$1800	$32000
GM, Ford sedan	$3000	$22000

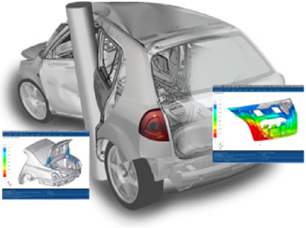
[3] bez vlivu inflace; převzato z Hughes-Belytschko FEM course

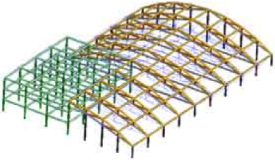
Příklady Aplikace MKP











MKP: Přímé odvození pro tažené-tlačené pruty

- Postup analogický odvození deformační metody
- Spočívá ve vyjádření uzlových sil v závislosti na koncových posunech prvku

Máme k dispozici následující rovnice:

- Podmínky rovnováhy mezi vnitřnímy silami (σ) a uzlovými silami (F_1^e, F_2^e): $F_1^e = -\sigma A, \quad F_2^e = \sigma A$
- Vztah mezi napětím a deformací (Hookův zákon) $\sigma = E\varepsilon$
- Definice deformace jako poměrného protažení prutu $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Pro napětí tedy platí

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l} = E\frac{u_2^e - u_1^e}{l}$$

A pro koncové síly konečně dostáváme

$$F_1^e = -\sigma A = \frac{EA}{l}(u_1^e - u_2^e); \quad F_2^e = \sigma A = \frac{EA}{l}(u_2^e - u_1^e)$$

Maticově to lze zapsat následovně:

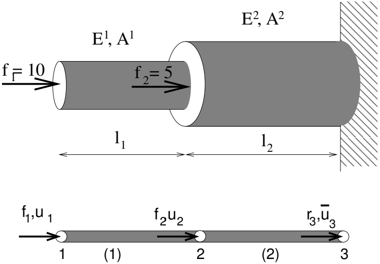
$$\left\{ \begin{array}{c} F_1^e \\ F_2^e \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{rr} k & -k \\ -k & k \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^e \\ u_2^e \end{array} \right\}, \quad \boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{r}^e$$

kde $k = \dfrac{EA}{l}$.

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1^e \\ F_2^e \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{rr} k & -k \\ -k & k \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^e \\ u_2^e \end{array} \right\}$$

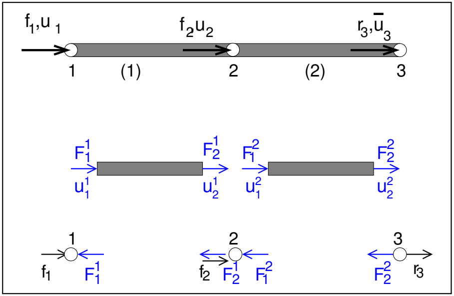
- Pokud $u_1^e = u_2^e$ (posunutí prutu jako tuhého celku) nevzniknou žádné vnitřní síly a $F_1^e = F_2^e = 0$
- Matice tuhosti je symetrická a singulární
- Linearita je důsledkem předpokladů (linearita konstitutivních vztahů, geomerických a rovnovážných rovnic)

Sestavení matice tuhosti konstrukce - Lokalizace



Pro každý prut máme k dispozici vztah mezi koncovými silami a posuny

$$F^1 = K^1 r^1, \quad F^2 = K^2 r^2$$



Podmínky rovnováhy v uzlech:

$$
\begin{aligned}
(1) \leftarrow: \quad & F_1^1 - f_1 = 0 \\
(2) \leftarrow: \quad & F_2^1 + F_1^2 - f_2 = 0 \\
(3) \leftarrow: \quad & F_2^2 - r_3 = 0
\end{aligned}
$$

$$u_1^1 = u_1, \, u_2^1 = u_1^2 = u_2, \, u_2^2 = u_3$$

Uvážíme-li kompatibilitu posunutí mezi prvky, můžeme vyjádřit koncové síly pomocí uzlových posunů:

$$
\begin{aligned}
(1) \leftarrow: \quad & (k^1 u_1 - k^1 u_2) - f_1 = 0 \\
(2) \leftarrow: \quad & (-k^1 u_1 + k^1 u_2) + (k^2 u_2 - k^2 u_3) - f_2 = 0 \\
(3) \leftarrow: \quad & (-k^2 u_2 + k^2 u_3) - r_3 = 0
\end{aligned}
$$

Maticově zapsáno:

$$\begin{array}{l} (1) \leftarrow: \\ (2) \leftarrow: \\ (3) \leftarrow: \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ r_3 \end{array} \right\}$$

Abychom mohli koncové síly vyjádřené na jednotlivých prutech snadno sčítat, vyjádříme je pomocí globálních posunutí

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1^1 \\ F_2^1 \end{array} \right\} = \boldsymbol{K}_1^e \left\{ \begin{array}{c} u_1^e \\ u_2^e \end{array} \right\} = \boldsymbol{K}_1^e \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1^2 \\ F_2^2 \end{array} \right\} = \boldsymbol{K}_2^e \left\{ \begin{array}{c} u_1^e \\ u_2^e \end{array} \right\} = \boldsymbol{K}_2^e \left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ u_3 \end{array} \right\}$$

Lokální vektory koncových sil a posunutí a matici tuhosti rozšíříme přidáním nulových prvků tak, aby obsahovali všechny hodnoty pro celou konstukci:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{F}}^1} = \underbrace{\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{K}}^1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \end{Bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{F}}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{K}}^2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Pak můžeme podmínky rovnováhy elegantně zapsat jako

$$\tilde{\boldsymbol{F}}^1 + \tilde{\boldsymbol{F}}^2 = \boldsymbol{f}$$

Po dosazení za koncové síly pak

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 \\ -k^1 & k^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{K}}^1} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{r}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & -k^2 \\ 0 & -k^2 & k^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{K}}^2} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{r}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ r_3 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

Maticově pak

$$\underbrace{(\tilde{\boldsymbol{K}}^1 + \tilde{\boldsymbol{K}}^2)}_{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}$$

Tento proces lze formalizovat. Definujme pro každý prvek tzv. distribuční matici $\boldsymbol{L}^e$, tak že platí $\boldsymbol{r}^e = \boldsymbol{L}^e \boldsymbol{r}$. Např. pro prvek 1 platí:

$$\boldsymbol{r}^1 = \left\{ \begin{array}{c} u_1^1 \\ u_2^1 \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]}_{\boldsymbol{L}^1} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} = \boldsymbol{L}^1 \boldsymbol{r}$$

To platí obdobně i pro vektor pravé strany:

$$\boldsymbol{F}^1 = \boldsymbol{L}^1 \tilde{\boldsymbol{F}}^1$$

Naše rovnice na prvku $\boldsymbol{K}^e \boldsymbol{r}^e = \boldsymbol{F}^e$ pak můžeme vyjádřit v globálních složkách jako

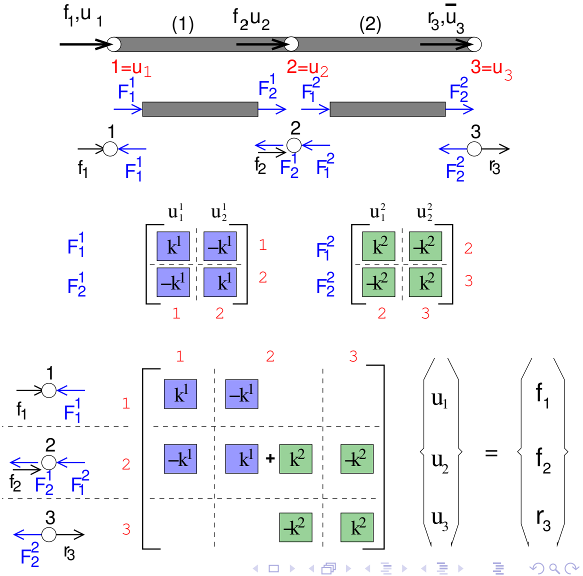
$$\boldsymbol{K}^e \boldsymbol{L}^e \boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}^e$$

A přenásobením zleva maticí $\boldsymbol{L}^{eT}$ nakonec dostáváme

$$\underbrace{\boldsymbol{L}^{eT} \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{L}^e}_{\tilde{\boldsymbol{K}}^e} \boldsymbol{r} = \underbrace{\boldsymbol{L}^{eT} \boldsymbol{F}^e}_{\boldsymbol{f}}$$

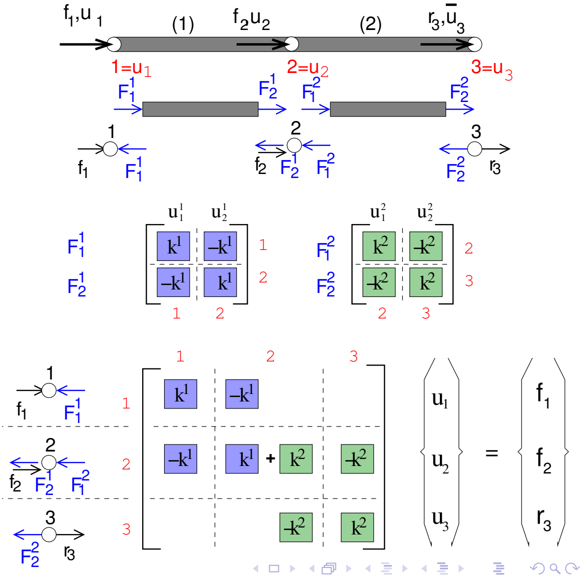
Lokalizace - algoritmizace sestavení globální matice tuhosti

- Zavedení kódových čísel, reprezentující očíslování neznámých (=posunů)



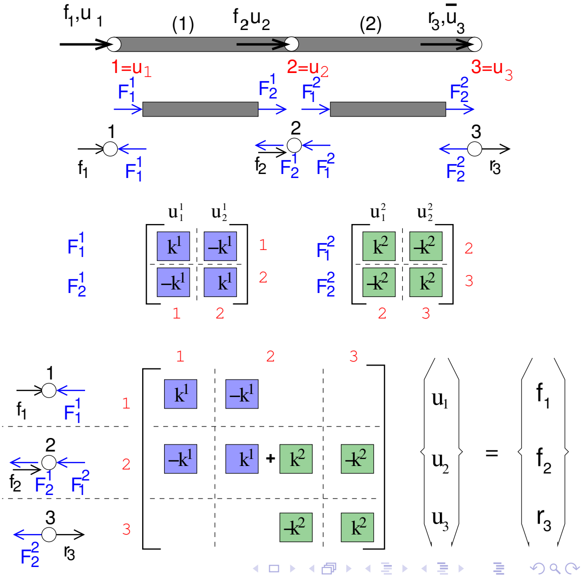
Lokalizace - algoritmizace sestavení globální matice tuhosti

- Zavedení kódových čísel, reprezentující očíslování neznámých (=posunů)
- Jejich přiřazení lokálním posunům a silám na prvcích



Lokalizace - algoritmizace sestavení globální matice tuhosti

- Zavedení kódových čísel, reprezentující očíslování neznámých (=posunů)
- Jejich přiřazení lokálním posunům a silám na prvcích
- Prvky lokální matice tuhosti se přičítají do prvku globální matice určeného kódovými čísly.



Kódová čísla tedy představují mapování mezi lokálním číslováním na prvku a globálním číslování pro celou konstukci

Formálně pak píšeme $\boldsymbol{K}^g = \sum_i \tilde{\boldsymbol{K}}^i$

Obdobný proces i pro vektory

Zavedení okrajových podmínek

- Matice tuhosti konstrukce je singulární - obsahuje posunutí tělesa jako tuhého celku
- Zavedením okrajových podmínek dojde k regularizaci soustavy
- Rozdělme podmínky rovnováhy na ty, které přísluší volným a předepsaným stupňům volnosti
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{uu} & \boldsymbol{K}_{up} \\ \boldsymbol{K}_{up} & \boldsymbol{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \bar{\boldsymbol{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{r} \end{Bmatrix}$$
- Z prvního řádku můžeme spočíst neznámý vektor posunů: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}_{uu}^{-1}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{K}_{up}\bar{\boldsymbol{u}})$
- A z druhé rovnice můžeme následně dopočítat neznámé reakce: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{K}_{up}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}_{pp}\bar{\boldsymbol{u}}$.