© Jiří Máca - katedra mechaniky - B325 - tel. 2 2435 4500 – maca@fsv.cvut.cz

IV. MKP – vynucené kmitání

1. Rovnice vynuceného kmitání

Soustava je zatížena budicími silami $\mathbf{p}(t)$
Cílem je stanovit dynamickou odezvu systému

pohybové rovnice $\boxed{\mathbf{K}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{p}(t)}$ ←

počáteční podm. $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0$

soustava *N* diferenciálních rovnic II. řádu (*N* – počet st. volnosti)
neznámé: $\mathbf{u}(\mathrm{t})$ – časový průběh posunutí
(MKP: $\mathbf{u}(\mathrm{t}) \sim \mathbf{r}(\mathrm{t})$ – vektor uzlových posunutí)

řešení - modální analýza (rozklad do vlastních tvarů)
- přímá integrace pohybových rovnic
- analýza ve frekvenční oblasti

2. Modální analýza – rozklad do vlastních tvarů

základní idea: odezva se stanoví jako kombinace vlastních tvarů kmitání ϕ_i pomocí modálních souřadnic $q_i(t)$ $(\mathrm{i} = 1,2\ldots N)$

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i q_i(t) = \mathbf{\Phi q}(t)}$$

dosazení do pohybových rovnic $\mathbf{K\,u}(t) + \mathbf{C\,\dot{u}}(t) + \mathbf{M\,\ddot{u}}(t) = \mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{K\,\Phi\,q}(t) + \mathbf{C\,\Phi\,\dot{q}}(t) + \mathbf{M\,\Phi\,\ddot{q}}(t) = \mathbf{p}(t)$$

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K\,\Phi\,q}(t) + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{C\,\Phi\,\dot{q}}(t) + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M\,\Phi\,\ddot{q}}(t) = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{p}(t)$$

pro normované vlastní tvary dále platí

$$\mathbf{\Omega}^2\,\mathbf{q}(t) + \underbrace{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C\,\Phi}}\,\mathbf{\dot{q}}(t) + \mathbf{I\,\ddot{q}}(t) = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{p}(t)$$

obecně není diagonální matice

2. Modální analýza – rozklad do vlastních tvarů

Klasický útlum

$\boxed{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}\, \mathbf{\Phi}}$ je diagonální matice, jejíž prvky jsou $\boxed{2\xi_i \omega_i}$

tj. vlastní tvary jsou ortogonální též k matici útlumu

ξ_i - koeficient poměrného útlumu *i*-tého vlast. tvaru

ω_i - *i*-tá vlastní frekvence

$$\mathbf{\Omega}^2\, \mathbf{q}(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}\, \mathbf{\Phi}\, \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{I}\, \ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{p}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_i^2 q_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \ddot{q}_i(t) = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{p}(t)} \longleftarrow$$

soustava *N* nezávislých rovnic pro $q_i(t)$ ⟵ 1. výhoda

řešení - např. Duhamelův integrál (viz soustava s 1SV)

obvykle $i = 1,2\ldots P$ $\boxed{P \ll N}$ ⟵ 2. výhoda

počet uvažovaných vl. tvarů *P* je dán frekvenčním složením zatížení

2. Modální analýza – rozklad do vlastních tvarů

Rayleighův útlum – klasický, proporcionální útlum

$\boxed{\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}}$ ⟵ lineární kombinace matic tuhosti a hmotnosti

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}\, \mathbf{\Phi} = \alpha\, \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M}\, \mathbf{\Phi} + \beta\, \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K}\, \mathbf{\Phi}$$

$$2\xi_i \omega_i = \alpha \cdot 1 + \beta\, \omega_i^2 \qquad \Rightarrow \qquad \xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta}{2}\omega_i$$

koeficienty α, β lze určit, známe-li součinitele poměrného útlumu ξ_i a ξ_j pro dvě rozdílné vlastní frekvence ω_i a ω_j

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha, \beta$$

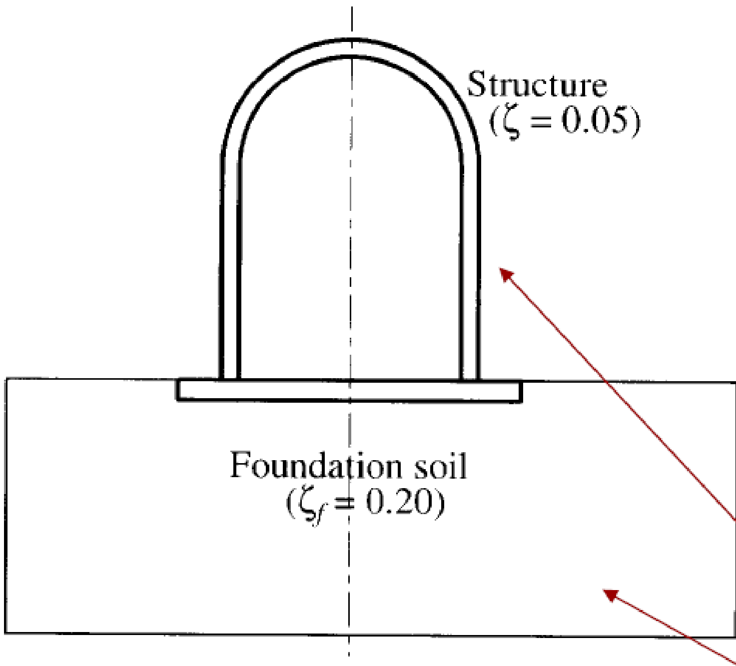
známe-li součinitel útlumu ξ pouze pro první vl. frekvenci ω_1 a předpokládáme-li, že nejméně je tlumen 1. tvar, platí:

$$\alpha = \xi \omega_1 \qquad \beta = \frac{\xi}{\omega_1}$$

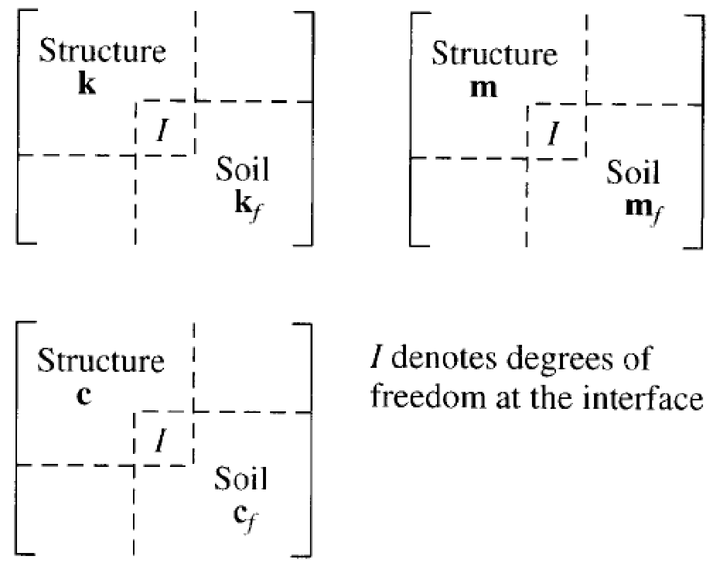
2. Modální analýza – rozklad do vlastních tvarů

Neklasický útlum

Interakce konstrukce a podloží



Sestavení matic pro systém konstrukce - podloží



$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad \xi \approx 0.05$$

$$\mathbf{C}_f = \alpha_f \mathbf{M}_f + \beta_f \mathbf{K}_f \quad \xi_f \approx 0.20$$

Jiný příklad neklasického útlumu – diskrétní tlumiče
(matice útlumu může být diagonální)

2. Modální analýza – rozklad do vlastních tvarů

Volné kmitání – útlum klasický, normované tvary kmitání

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0$$

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i q_i(t)$$

$$\omega_i^2 q_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \ddot{q}_i(t) = 0 \qquad q_i(0) = q_{i0} \quad \dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0}$$

řešení modální rovnice viz soustavy s 1 SV:

$$\boxed{q_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t}\left(q_i(0)\cos\omega_{Di} t + \frac{\dot{q}_i(0) + \xi_i \omega_i q_i(0)}{\omega_{Di}} \sin\omega_{Di} t \right)}$$

$$\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

2. Modální analýza – rozklad do vlastních tvarů

Počáteční podmínky pro modální souřadnice $q_i(0)\,;\;\dot{q}_i(0)$

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i q_i(t) \xrightarrow[\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \times]{} \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\,\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\,\boldsymbol{\phi}_i\, q_i(t)$$

vzhledem k podmínkám ortogonality platí:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i\, q_i(t) \longrightarrow q_i(t) = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\mathbf{u}(t)}{\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_i}$$

pro <u>normované</u> tvary platí:

$$q_i(t) = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\mathbf{u}(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} q_i(0) &= \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\mathbf{u}(0) \\ \dot{q}_i(0) &= \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(0) \end{aligned}}$$

3. Přímá integrace pohybových rovnic

základní idea: pohybové rovnice se postupně řeší jednotlivých okamžicích t_i, t_{i+1}, časová osa se rozdělí pomocí délky integračního kroku

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

derivace se nahradí diferencemi, soustava diferenciálních rovnic se převede na rovnice algebraické

označení: $\mathbf{p}_i \equiv \mathbf{p}(t_i) \quad \mathbf{u}_i \equiv \mathbf{u}(t_i) \quad \dot{\mathbf{u}}_i \equiv \dot{\mathbf{u}}(t_i) \quad \ddot{\mathbf{u}}_i \equiv \ddot{\mathbf{u}}(t_i)$

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}\mathbf{u}_i = \mathbf{p}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{p}_{i+1}}$$

neznámé: $\mathbf{u}_{i+1} \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} \quad \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$

metody řešení:

explicitní – pohybová rovnice se používá v čase t_i

implicitní – pohybová rovnice se používá v čase t_{i+1}

3. Přímá integrace pohybových rovnic

stejný postup se použije pro modální analýzu pro obecný neklasický útlum

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{p}(t) \qquad \mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i q_i(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t)$$

$$\underbrace{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K}\,\mathbf{\Phi}}_{\hat{\mathbf{K}}}\,\mathbf{q}(t) + \underbrace{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}\,\mathbf{\Phi}}_{\hat{\mathbf{C}}}\,\dot{\mathbf{q}}(t) + \underbrace{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M}\,\mathbf{\Phi}}_{\hat{\mathbf{M}}}\,\ddot{\mathbf{q}}(t) = \underbrace{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{p}(t)}_{\hat{\mathbf{p}}(t)}$$

$$\hat{\mathbf{K}}\,\mathbf{q}(t) + \hat{\mathbf{C}}\,\dot{\mathbf{q}}(t) + \hat{\mathbf{M}}\,\ddot{\mathbf{q}}(t) = \hat{\mathbf{p}}(t) \longleftarrow$$ modální rovnice

$$\boxed{\hat{\mathbf{M}}\,\ddot{\mathbf{q}}_i + \hat{\mathbf{C}}\,\dot{\mathbf{q}}_i + \hat{\mathbf{K}}\,\mathbf{q}_i = \hat{\mathbf{p}}_i \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{M}}\,\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} + \hat{\mathbf{C}}\,\dot{\mathbf{q}}_{i+1} + \hat{\mathbf{K}}\,\mathbf{q}_{i+1} = \hat{\mathbf{p}}_{i+1}}$$

neznámé: $\mathbf{q}_{i+1} \quad \dot{\mathbf{q}}_{i+1} \quad \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$

výhoda řešení: obvykle malý počet modálních rovnic *P* $(i = 1,2\ldots P)$

příklad neklasického útlumu: interakce konstrukce s podložím

3. Přímá integrace pohybových rovnic

3.1 Metoda centrálních diferencí – explicitní metoda

pohybové rovnice

přímá integrace $x_n \rightarrow \mathbf{u}_i \qquad f_n \rightarrow \mathbf{p}_i \qquad M, C, K \rightarrow \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$

modální analýza $x_n \rightarrow \mathbf{q}_i \qquad f_n \rightarrow \hat{\mathbf{p}}_i \qquad M, C, K \rightarrow \hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{K}}$

$$\dot{x}_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\ddot{x}_n = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2}$$

aproximace rychlosti a zrychlení

$$M\ddot{x}_n + C\dot{x}_n + Kx_n = f_n$$

$$M\left[\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2}\right] + C\left[\frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t}\right] + Kx_n = f_n$$

pohybová rovnice v čase t

$$x_{n+1} = \left[\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C\right]^{-1}\left[f_n - \left(K - \frac{2}{\Delta t^2}M\right)x_n - \left(\frac{1}{\Delta t^2}M - \frac{1}{2\Delta t}C\right)x_{n-1}\right]$$

soustava *N* algebraických rovnic $\rightarrow x_{n+1}$

3. Přímá integrace pohybových rovnic

3.1 Metoda centrálních diferencí

pro diagonální matice *M* a *C* (*C*=0 nebo *C*=*αM*) se soustava rozpadá na nezávislé rovnice ⟵ **výhoda**

délka integračního kroku

1. metoda je <u>podmíněně stabilní</u> – délka integračního kroku je omezena nejkratší periodou T_M (závisí na rozměru nejtužšího prvku)

$$\Delta t \leq \frac{T_M}{\pi}$$

2. v modální analýze délka je též závislá na periodě T_J nejvyššího uvažovaného vl.tvaru

$$\Delta t \approx \frac{T_J}{20}$$

3. je nutné správně aproximovat zatížení, např. akcelerogramy jsou obvykle udávány pro časový krok 0.02 s.

3. Přímá integrace pohybových rovnic

3.2 Newmarkova metoda – implicitní metoda

$$\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t \dot{x}_n + (0.5-\beta)\Delta t^2 \ddot{x}_n + \beta \ddot{x}_{n+1} \Delta t^2 \\ \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + (1-\gamma)\Delta t \ddot{x}_n + \gamma \Delta t \ddot{x}_{n+1} \end{aligned}}$$

aproximace posunutí a rychlosti

$$\rightarrow \boxed{M\ddot{x}_{n+1} + C\dot{x}_{n+1} + Kx_{n+1} = f_{n+1}}$$

pohybová rovnice v čase $t+\Delta t$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[M + \gamma\Delta t\, C + \beta\Delta t^2 K\right] \ddot{x}_{n+1} \\ &\quad = f_{n+1} - C\left[\dot{x}_n + (1-\gamma)\Delta t\, \ddot{x}_n\right] - K\left[x_n + \Delta t\, \dot{x}_n + (0.5-\beta)\Delta t^2 \ddot{x}_n\right] \end{aligned}}$$

soustava *N* algebraických rovnic $\rightarrow \ddot{x}_{n+1}$

délka integračního kroku

metoda je <u>stabilní</u> pro vhodnou volbu parametrů γ = 1/2 a β = 1/4 (metoda průměrného zrychlení)

délka integračního kroku je však omezena nejkratší periodou T_M zatížení

$$\Delta t \,\square\, \frac{T_M}{20}$$

3. Přímá integrace pohybových rovnic

3.3 Wilsonova metoda – implicitní metoda

délka integračního kroku $\vartheta \Delta t = t_{i+1} - t_i$

metoda je nepodmíněně stabilní pro $\vartheta \geq 1,37$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \vartheta \Delta t \dot{x}_n + \frac{\vartheta^2 \Delta t^2}{6}\left(2\ddot{x}_n + \ddot{x}_{n+1}\right) \\ \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \frac{\vartheta \Delta t}{2}\left(\ddot{x}_n + \ddot{x}_{n+1}\right) \end{aligned}}$$

aproximace posunutí a rychlosti

$$\rightarrow \quad \boxed{M\ddot{x}_{n+1} + C\dot{x}_{n+1} + Kx_{n+1} = f_{n+1}}$$

pohybová rovnice v čase $t + \vartheta \Delta t$

$$\downarrow$$

soustava *N* algebraických rovnic $\rightarrow \ddot{x}_{n+1}$

metoda zavádí tzv. *numerický útlum*

- i v případě netlumeného kmitání se v čase výchylky snižují
- potlačuje se (nežádoucí) vliv vysokých vlastních tvarů a frekvencí na odezvu systému

3. Přímá integrace pohybových rovnic

3.4 Stabilita a chyby numerické integrace

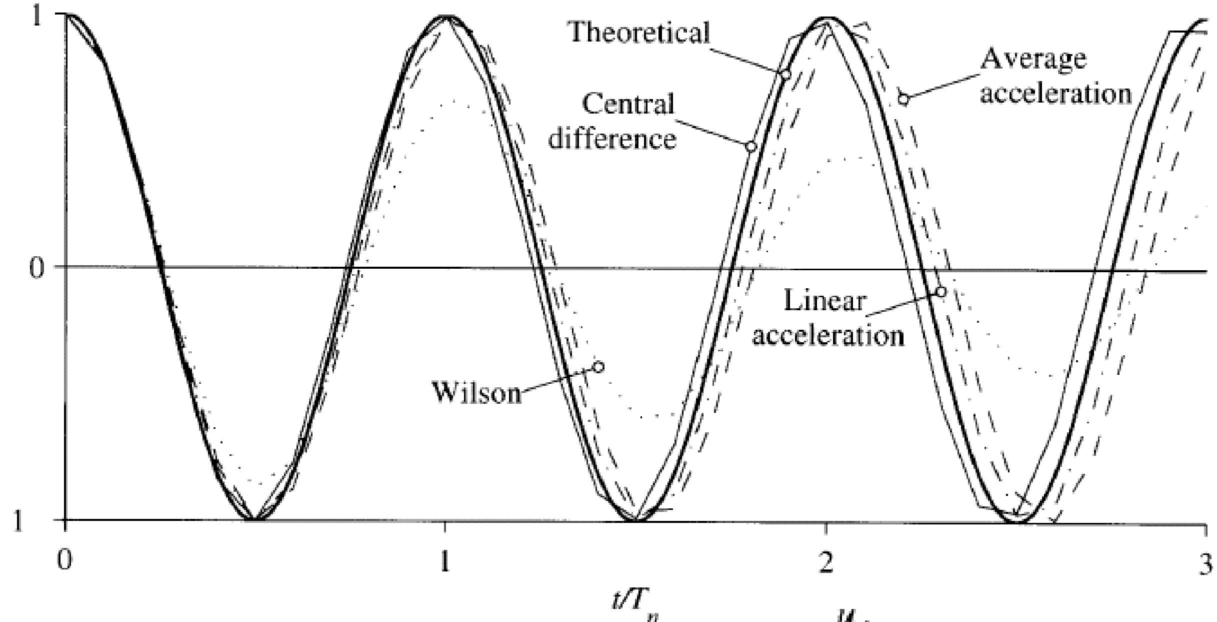
more accurate than

Integration Method	Type of Method	Critical Step Size (Δt_{cr})
Central Different	Explicit	$\frac{2}{\omega}$ $\left(\Delta t \le \frac{T_J}{\pi}\right)$
Newmark Method $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$ (Linear Acceleration)	Implicit	$\frac{3.464}{\omega}$ $(\Delta t \le 0.551 T_J)$
Newmark Method $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$ (Constant-Average-Acceleration)	Implicit	Unconditionally Stable
Newmark Method $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = 0$ (Central Difference)	Explicit	$\frac{2}{\omega}$ $\left(\Delta t \le \frac{T_J}{\pi}\right)$
Wilson-θ	Implicit	Unconditionally Stable when $\theta \ge 1.37$

3. Přímá integrace pohybových rovnic

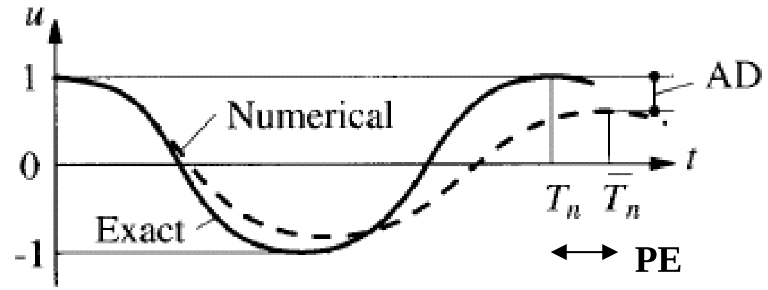
3.4 Stabilita a chyby numerické integrace

volné kmitání: $\boxed{m\ddot{u} + ku = 0 \qquad u(0) = 1 \quad \text{and} \quad \dot{u}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = \cos\omega_n t}$



$(\Delta t = 0.1T_n)$

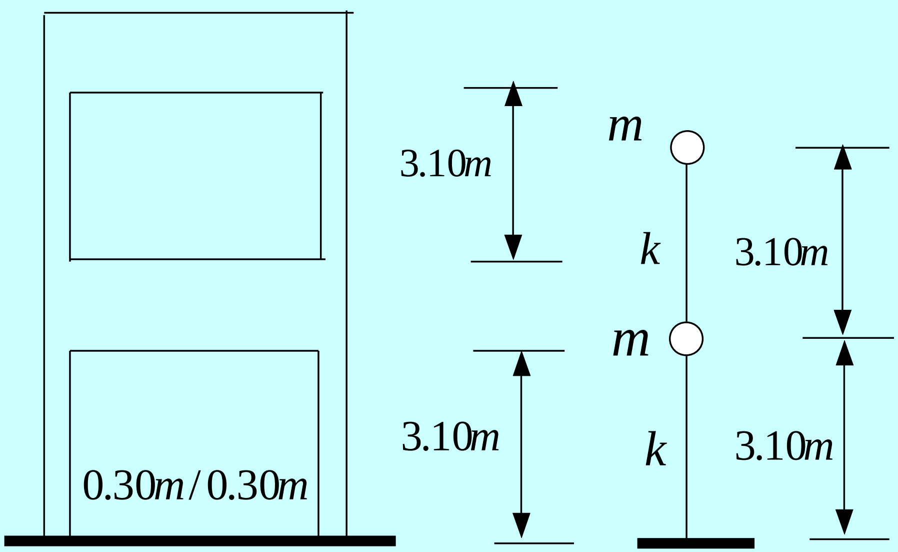
Chyby: snižování amplitudy (AD)
prodlužování periody (PE)

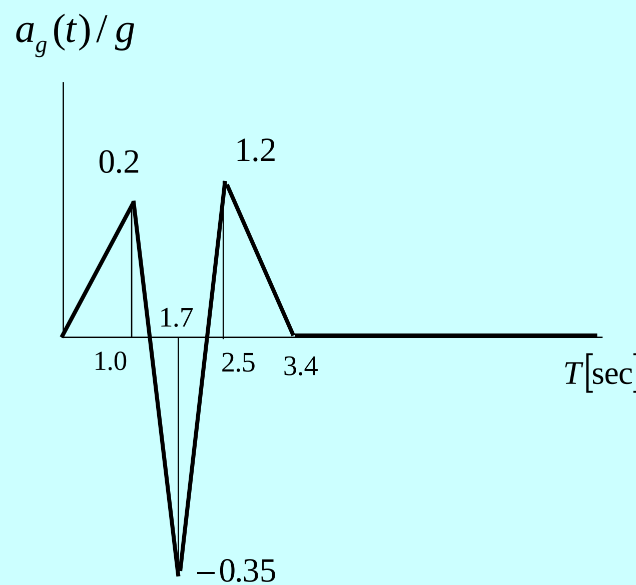


3. Přímá integrace pohybových rovnic

3.5 Příklad – metoda centrálních diferencí

$$E = 3.43*10^7 kN/m^2, I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3*0.3^3}{12} = 6.75*10^{-4}$$





$$k = 2*\frac{12EI}{L^3} = 2*\frac{12*3.43*10^7*6.75*10^{-4}}{3.1^4} = 18640 kN/m$$

$$m = 60 kN \sec^2/m$$

$$K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18640 & -18640 \\ -18640 & 37280 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = 0.58 \sec \qquad T_2 = 0.22 \sec$$

3.5 Příklad – metoda centrálních diferencí

Explicitní metoda integrace netlumené kmitání

$$x_{n+1} = \left[\frac{1}{\Delta t^2} M\right]^{-1} \left[f_n - \left(K - \frac{2}{\Delta t^2} M \right) x_n - \left(\frac{1}{\Delta t^2} M \right) x_{n-1} \right]$$

$$x_{n+1} = \left[\frac{1}{\Delta t^2} M\right]^{-1} \left(f_n - K x_n \right) + 2 x_n - x_{n-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{n+1} = \Delta t^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{M(1,1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M(2,2)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_n - \begin{bmatrix} K(1,1) & K(1,2) \\ K(2,1) & K(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_n \right\} + 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_n - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{n-1}$$

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 = \dfrac{\Delta t^2}{M(1,1)} \left\{ f_1 - K(1,1) * x_n^1 - K(1,2) * x_n^2 \right\} + 2 * x_n^1 - x_{n-1}^1 \\[2ex] x_{n+1}^2 = \dfrac{\Delta t^2}{M(2,2)} \left\{ f_2 - K(2,1) * x_n^1 - K(2,2) * x_n^2 \right\} + 2 * x_n^2 - x_{n-1}^2 \end{cases}$$

3.5 Příklad – metoda centrálních diferencí

seizmické zatížení – zrychlení v základové spáře $a(t)$

$$\begin{cases} x_{n+1}^{1} = \dfrac{\Delta t^{2}}{M(1,1)}\left\{-M(1,1)*a_{n} - K(1,1)*x_{n}^{1} - K(1,2)*x_{n}^{2}\right\} + 2*x_{n}^{1} - x_{n-1}^{1} \\ x_{n+1}^{2} = \dfrac{\Delta t^{2}}{M(2,2)}\left\{-M(2,2)*a_{n} - K(2,1)*x_{n}^{1} - K(2,2)*x_{n}^{2}\right\} + 2*x_{n}^{2} - x_{n-1}^{2} \end{cases}$$

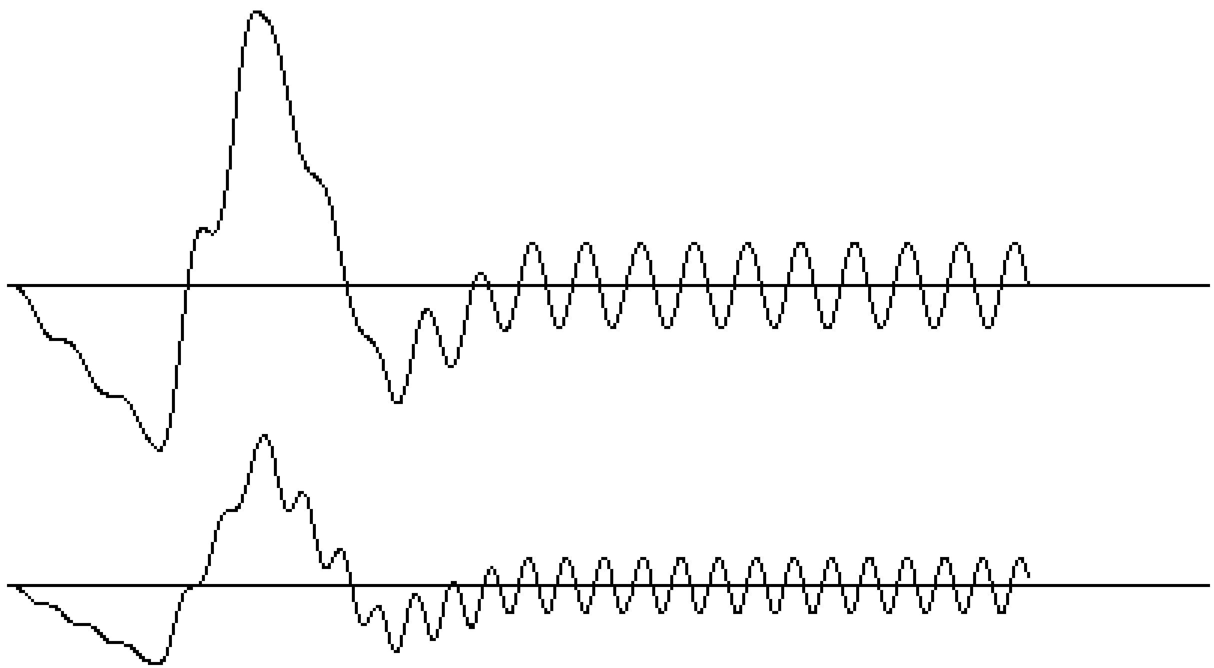
pro danou úlohu – 2 neznámé

$$\begin{cases} x_{n+1}^{1} = \dfrac{\Delta t^{2}}{60}\left\{-60*a_{n} - 18640*x_{n}^{1} + 18640*x_{n}^{2}\right\} + 2*x_{n}^{1} - x_{n-1}^{1} \\ x_{n+1}^{2} = \dfrac{\Delta t^{2}}{60}\left\{-60*a_{n} + 18640*x_{n}^{1} - 37280*x_{n}^{2}\right\} + 2*x_{n}^{2} - x_{n-1}^{2} \end{cases}$$

3.5 Příklad – metoda centrálních diferencí

$\boxed{\Delta t = 0.01 \sec}$

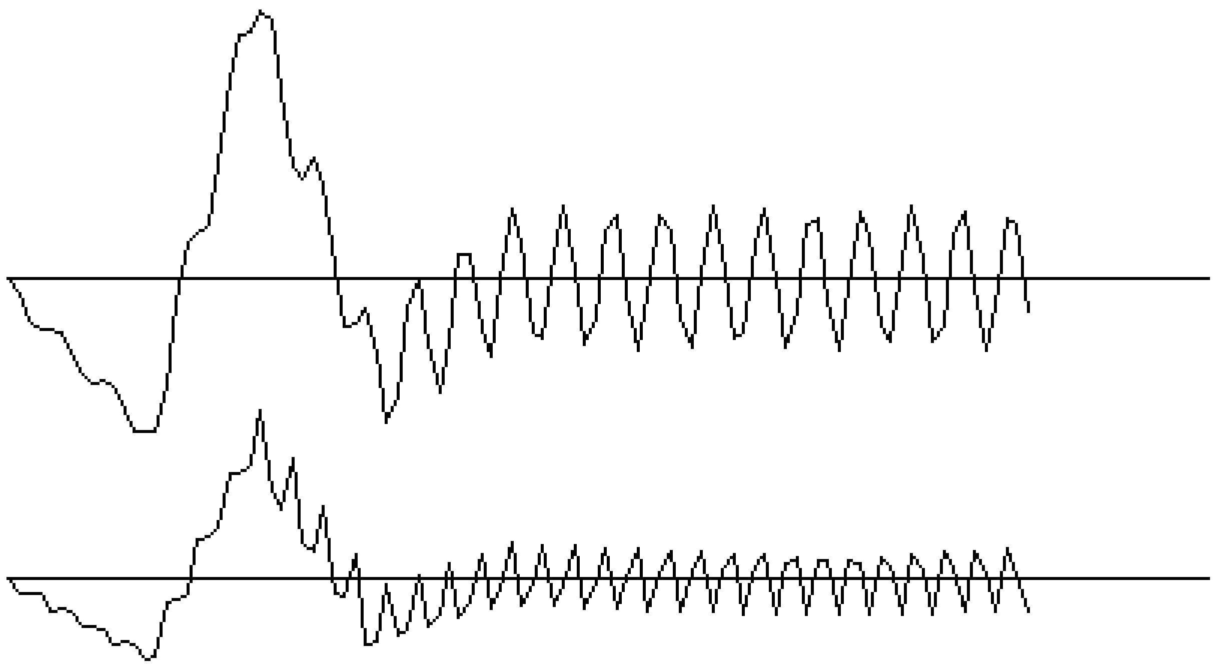
```
U1MAX   1.138665E-02
U2MAX   6.247208E-03
MAX BASE SHEAR   236.0421
Ok
```



3.5 Příklad – metoda centrálních diferencí

$\boxed{\Delta t = 0.05\,\mathrm{sec}}$

```
U1MAX  1.110161E-02
U2MAX  7.008101E-03
MAX BASE SHEAR  263.9425
Ok
```

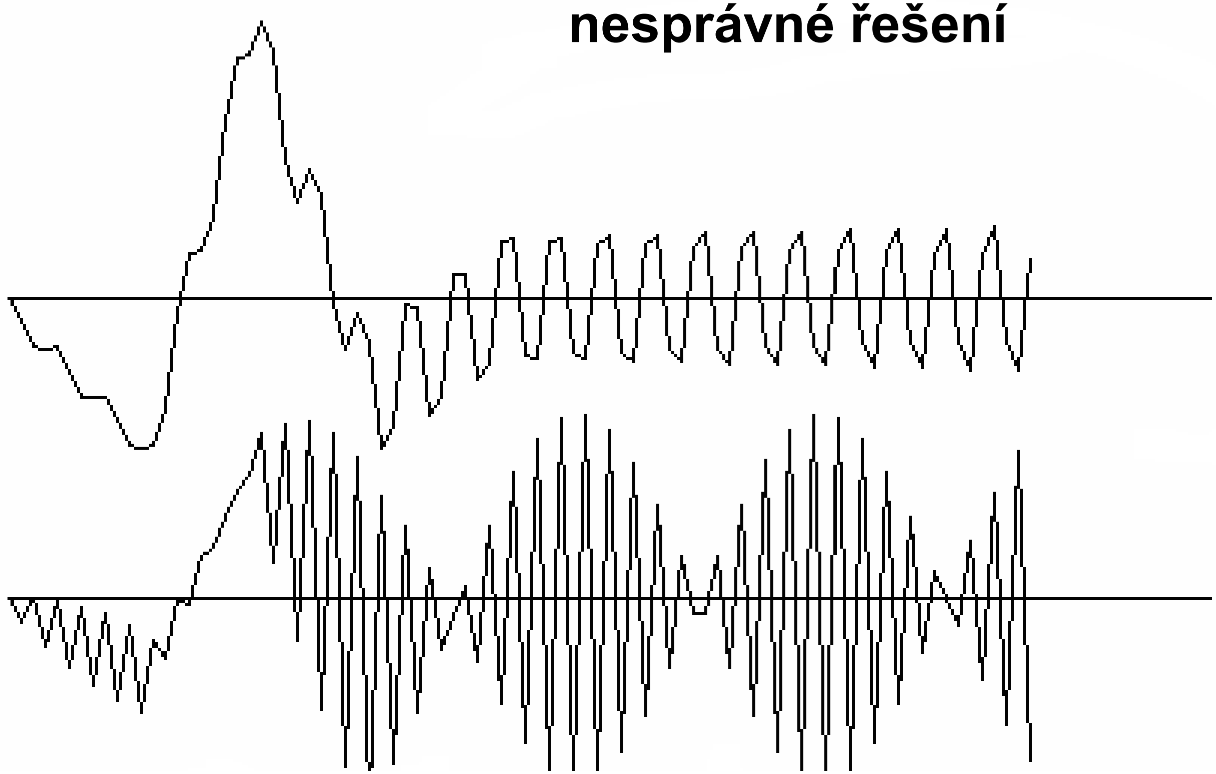


3.5 Příklad – metoda centrálních diferencí

$$\Delta t = 0.08\,\text{sec} > \Delta t_{crit} = \frac{T_{\min}}{\pi} = \frac{0.22}{\pi} \approx 0.07$$

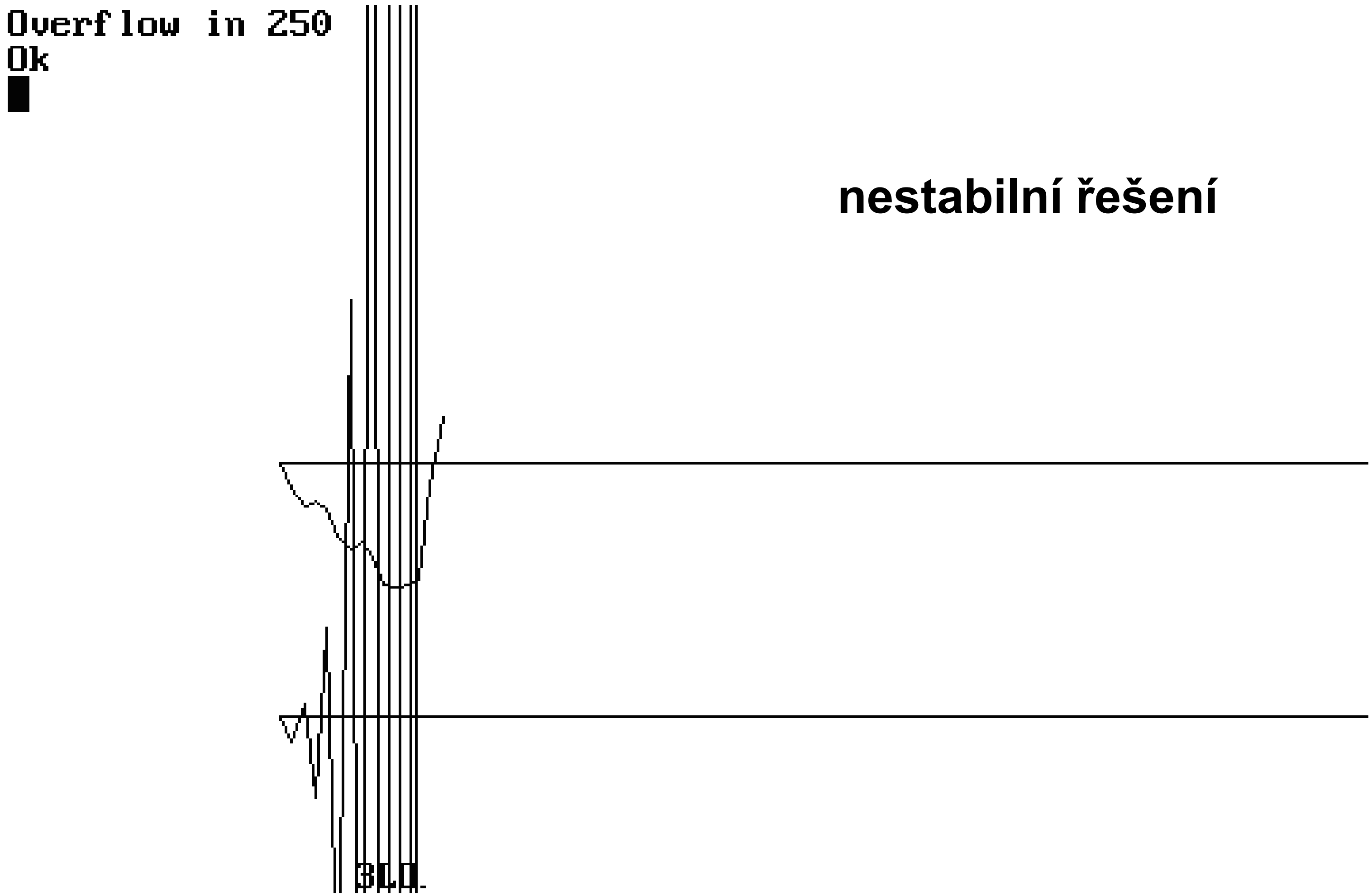
```
U1MAX  1.150803E-02
U2MAX  7.565412E-03
MAX BASE SHEAR  329.8402
Ok
```

nesprávné řešení



3.5 Příklad – metoda centrálních diferencí

$$\boxed{\Delta t = 0.09\,\mathrm{sec} > \Delta t_{crit}}$$

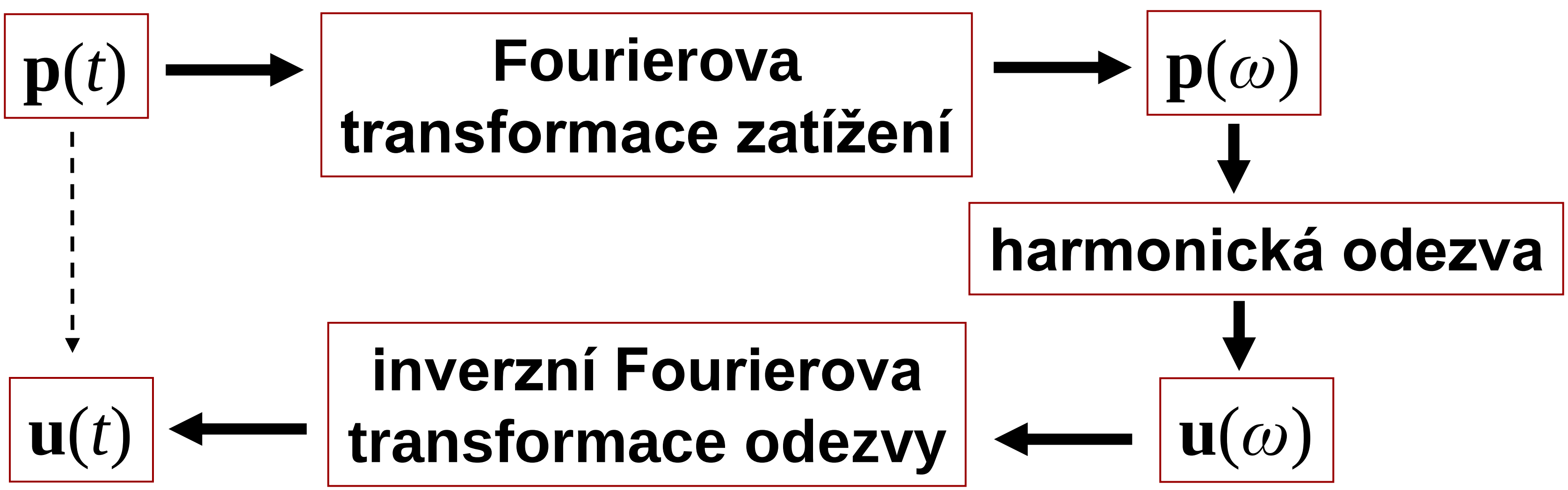


nestabilní řešení

4. Analýza ve frekvenční oblasti

základní idea:

1) zatížení se převede z časové oblasti pomocí Fourierovy transformace do oblasti frekvenční
2) provede se výpočet odezvy na jednotlivé harmonické složky zatížení
3) pomocí inverzní Fourierovy transformace se odezva převede z frekvenční oblasti do časové oblasti



4. Analýza ve frekvenční oblasti

Odezva na harmonické zatížení – ustálené kmitání:

- přímé řešení vyjádřením odezvy pomocí amplitudy a fáze
- řešení rozkladem do vlastních tvarů kmitání

4.1 Ustálené kmitání – přímé řešení

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{p}(t)$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_S \sin\omega t + \mathbf{p}_C \cos\omega t \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_S \sin\omega t + \mathbf{u}_C \cos\omega t \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u}_S - \omega\mathbf{C}\mathbf{u}_C &= \mathbf{p}_S \\ \omega\mathbf{C}\mathbf{u}_S + (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u}_C &= \mathbf{p}_C \end{aligned}} \longrightarrow \mathbf{u}_S\ ;\mathbf{u}_C$$

soustava 2*N* algebraických rovnic (*N* = počet st. volnosti)

k-tá složka vektoru $\mathbf{u}(t)$

$$u_k(t) = u_{Sk}\sin\omega t + u_{Ck}\cos\omega t = u_k\sin(\omega t + \varphi_k)$$

$$\begin{cases} u_k = \sqrt{u_{Sk}^2 + u_{Ck}^2} \\ \varphi_k = \arctan\dfrac{u_{Ck}}{u_{Sk}} \end{cases}$$

<u>výhoda</u>: libovolná matice útlumu

4. Analýza ve frekvenční oblasti

4.2 Ustálené kmitání – rozklad do vlastních tvarů

Pro <u>normované</u> vlastní tvary a <u>klasický</u> útlum platí:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{p}(t) \qquad \mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i q_i(t)$$

$$\omega_i^2 q_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \ddot{q}_i(t) = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{p}(t) \qquad \begin{cases} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_S \sin \omega t + \mathbf{p}_C \cos \omega t \\ q_i(t) = q_{iS} \sin \omega t + q_{iC} \cos \omega t \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\omega_i^2 - \omega^2\right) q_{iS} - 2\xi_i \omega_i \omega q_{iC} &= \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{p}_S \\ 2\xi_i \omega_i \omega q_{iS} + \left(\omega_i^2 - \omega^2\right) q_{iC} &= \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{p}_C \end{aligned}} \;\Rightarrow\; q_{iS}\ ;\ q_{iC}$$

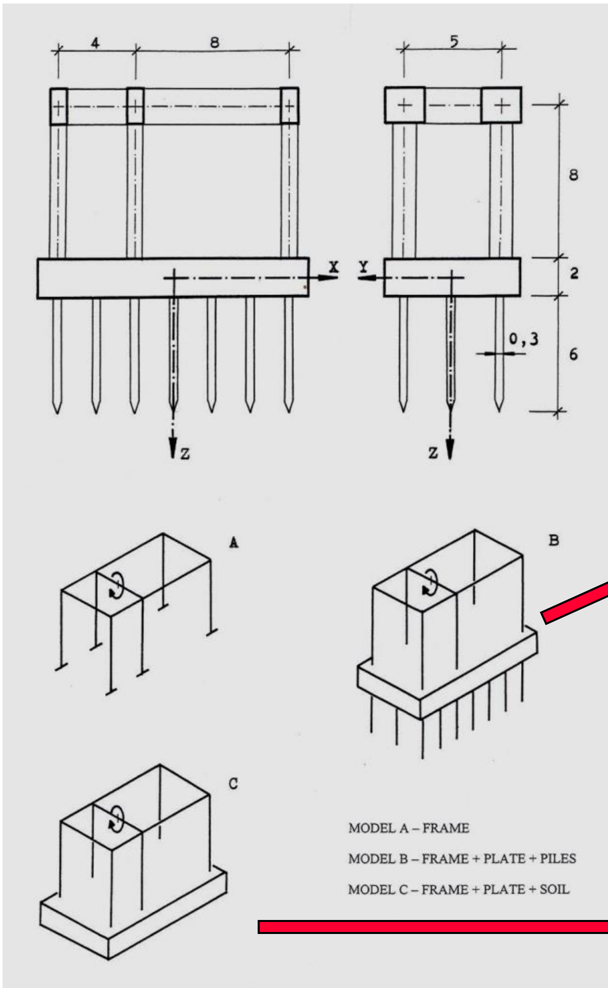
N soustav algebraických rovnic pro 2 neznámé (*N* = počet st. volnosti)

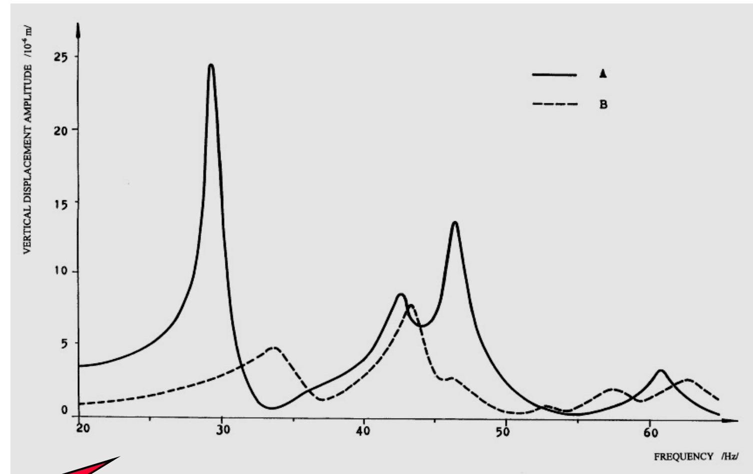
$$q_i(t) = q_{iS} \sin \omega t + q_{iC} \cos \omega t = q_i \sin\left(\omega t + \varphi_i\right) \qquad \begin{cases} q_i = \sqrt{q_{iS}^2 + q_{iC}^2} \\ \varphi_i = \arctan \dfrac{q_{iC}}{q_{iS}} \end{cases}$$

<u>výhoda</u>: obvykle $\left(P \ll N\right)$ soustav rovnic pro 2 nezn.

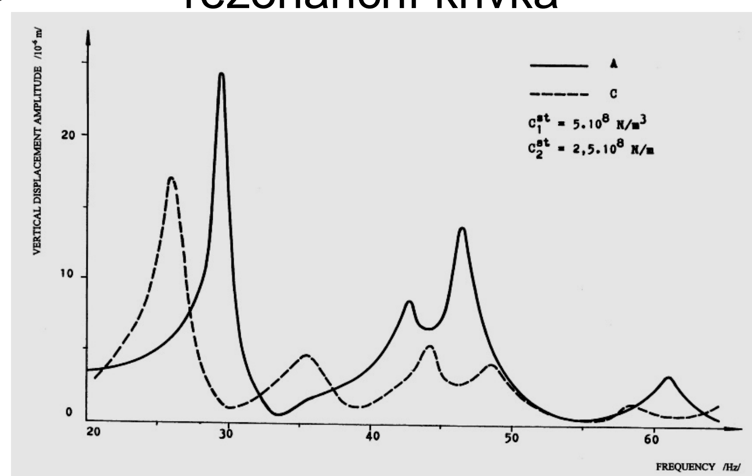
5. Příklady

5.1 Odezva základu turbosoustrojí na harmonické zatížení

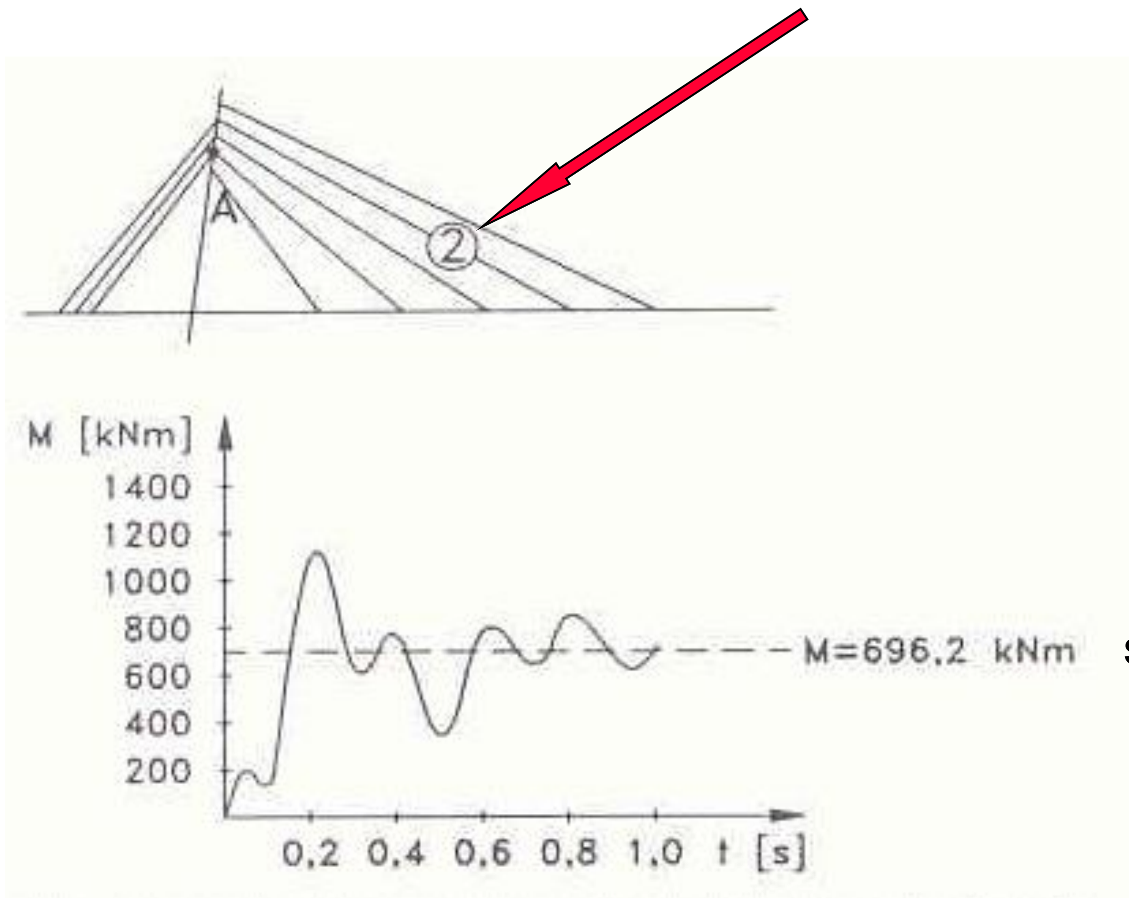




rezonanční křivka



5. Příklady
5.2 Zavěšený most – náhlé přerušení závěsu



statická hodnota

časový průběh ohybového momentu v bodě A