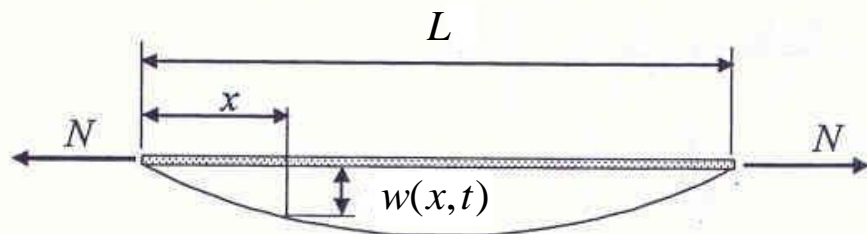


## **IX. Kmitání nosníků se spojitě rozdělenou hmotou**

- 1. Příčné kmitání struny**
- 2. Příčné kmitání nosníku**
- 3. Matice dynamické tuhosti**
- 4. Příklad**



# 1. Příčné kmitání struny



osová síla  $N = \text{konst.}$   
 hmotnost na jedn.délky  
 $\mu = \text{konst.}$   
 délka struny  $L$

harmonické kmitání  $\rightarrow w(x, t) = w(x) \sin \omega t$

$$f_I(x, t) = -\mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \mu \omega^2 w(x) \sin \omega t \quad \leftarrow \text{setrvačné síly}$$

$$N \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \mu \omega^2 w(x) = 0$$

$\leftarrow$  rovnice  
 příčného kmitání  
 (podmínka rovnováhy  
 ve svislém směru)

$$N \frac{\partial (w + dw)}{\partial x} = N \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right)$$

## 1. Příčné kmitání struny

$$w(x) = C_1 \cos \frac{\psi}{L} x + C_2 \sin \frac{\psi}{L} x$$

$$\psi = L \sqrt{\frac{\mu \omega^2}{N}}$$

## Vlastní kmitání struny upevněné na koncích

okrajové podmínky  
(délka struny  $L$ )

$$w(0) = 0 \quad w(L) = 0$$

integrační konstanty

$$w(0) = 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$w(L) = 0 = C_2 \sin \psi \Rightarrow \sin \psi = 0$$

$$\psi = \pi, 2\pi, \dots, n\pi$$

$$\rightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{N}{\mu}}$$

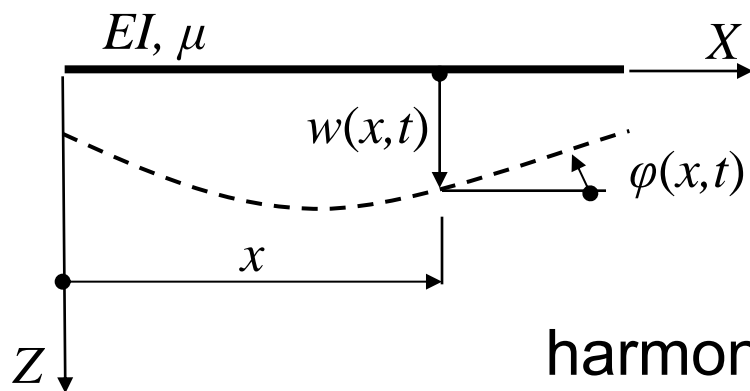
vlastní frekvence

$$\rightarrow \phi_n(x) \equiv w(x) = C_2 \sin \frac{n\pi}{L} x$$

vlastní tvary kmitání



## 2. Příčné kmitání nosníku



ohybová tuhost  $EI_y = EI = \text{konst.}$   
 hmotnost na jedn.délky  $\mu = \text{konst.}$   
 délka nosníku  $L$

harmonické kmitání  $\rightarrow w(x, t) = w(x) \sin \omega t$

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = f_z(x, t)$$

$\leftarrow$  rovnice ohybové čáry

$$f_z(x, t) = f_I = -\mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \mu \omega^2 w(x) \sin \omega t$$

$\leftarrow$  setrvačné síly

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \mu \omega^2 w(x) = 0$$

$\leftarrow$  rovnice příčného kmitání



## 2. Příčné kmitání nosníku

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \frac{\mu \omega^2}{EI} w(x) = \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \left( \frac{\lambda}{L} \right)^4 w(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = L \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EI}}$$

$$w(x) = C_1 \cosh \frac{\lambda x}{L} + C_2 \sinh \frac{\lambda x}{L} + C_3 \cos \frac{\lambda x}{L} + C_4 \sin \frac{\lambda x}{L}$$

$$\varphi(x) = -\frac{dw(x)}{dx} = -\frac{\lambda}{L} \left( C_1 \sinh \frac{\lambda x}{L} + C_2 \cosh \frac{\lambda x}{L} - C_3 \sin \frac{\lambda x}{L} + C_4 \cos \frac{\lambda x}{L} \right)$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -EI \left( \frac{\lambda}{L} \right)^2 \left( C_1 \cosh \frac{\lambda x}{L} + C_2 \sinh \frac{\lambda x}{L} - C_3 \cos \frac{\lambda x}{L} - C_4 \sin \frac{\lambda x}{L} \right)$$

$$V(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} = -EI \left( \frac{\lambda}{L} \right)^3 \left( C_1 \sinh \frac{\lambda x}{L} + C_2 \cosh \frac{\lambda x}{L} + C_3 \sin \frac{\lambda x}{L} - C_4 \cos \frac{\lambda x}{L} \right)$$



## 2. Příčné kmitání nosníku

## Vlastní kmitání prostého nosníku

$$\text{okrajové podmínky} \quad w(0) = 0 \quad M(0) = 0 \quad (1)$$

$$(\text{délka nosníku } L) \quad w(L) = 0 \quad M(L) = 0 \quad (2)$$

integrační konstanty

$$z (1) \quad \left. \begin{array}{l} C_1 + C_3 = 0 \\ C_1 - C_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 0 \quad C_3 = 0$$

$$z (2) \quad \left. \begin{array}{l} C_2 \sinh \lambda + C_4 \sin \lambda = 0 \\ C_2 \sinh \lambda - C_4 \sin \lambda = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_2 \sinh \lambda = 0 \quad C_4 \sin \lambda = 0$$

$$\text{pro } \lambda \neq 0 \rightarrow \sinh \lambda \neq 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{pro netriviální řešení } C_4 \neq 0 \rightarrow \sin \lambda = 0 \rightarrow \lambda = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

$$\rightarrow \omega_n = \left( \frac{\lambda}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

vlastní frekvence

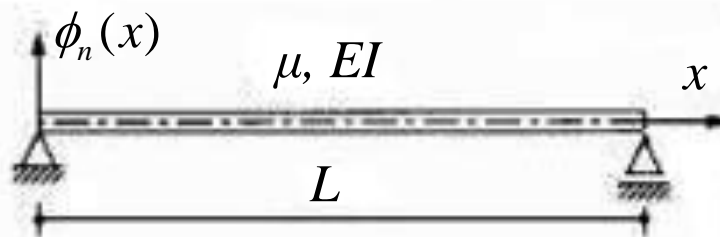
$$\rightarrow \phi_n(x) \equiv w(x) = C_4 \sin \frac{n\pi}{L} x$$

vlastní tvary kmitání

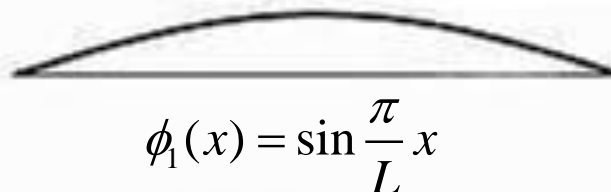


## 2. Příčné kmitání nosníku

vlastní frekvence  
a tvary kmitání

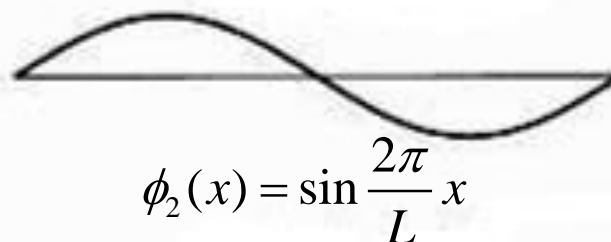


1. tvar kmitání



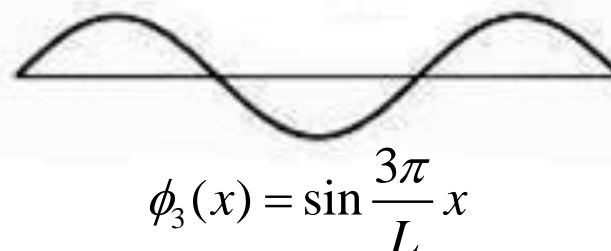
$$\omega_1(x) = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

2. tvar kmitání



$$\omega_2(x) = \frac{4\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

3. tvar kmitání



$$\omega_3(x) = \frac{9\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

## 2. Příčné kmitání nosníku

Vlastní frekvence příčného kmitání

$$\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

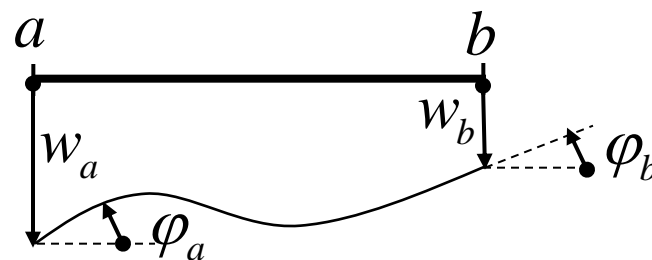
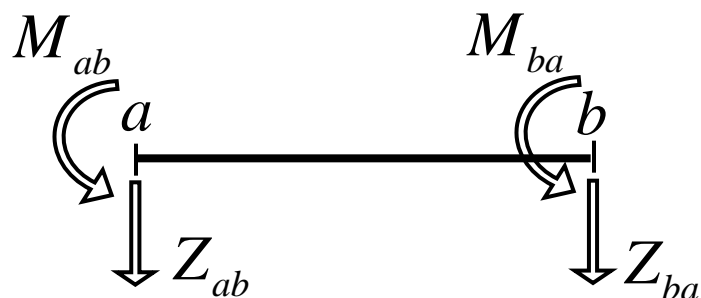
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$n > 5$
oboustranně vetknutý nosník	4,73	7,85	11,00	14,14	17,28	$\lambda_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
jednostranně vetknutý nosník	3,93	7,07	10,21	13,35	16,49	$\lambda_n = (4n+1)\frac{\pi}{4}$
konzola	1,88	4,69	7,85	11,00	14,14	$\lambda_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$





### 3. Matice dynamické tuhosti

prvky matice dynamické tuhosti jsou amplitudy koncových sil a momentů na prutu při jednotkových deformačních stavech (harmonické kmitání konců prutů s amplitudou 1)



$w_a = 1 \cdot \sin \omega t$	$\varphi_a = w_b = \varphi_b = 0$	$\left. \begin{array}{l} \rightarrow C_1 \div C_4 \rightarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} Z_{ab} = -V(0) \\ M_{ab} = -M(0) \\ Z_{ba} = V(L) \\ M_{ba} = M(L) \end{array}$
$\varphi_a = 1 \cdot \sin \omega t$	$w_a = w_b = \varphi_b = 0$	
$w_b = 1 \cdot \sin \omega t$	$w_a = \varphi_a = \varphi_b = 0$	
$\varphi_b = 1 \cdot \sin \omega t$	$w_a = \varphi_a = w_b = 0$	

4 deformační stavy

koncové síly



## 3. Matice dynamické tuhosti

$$\begin{Bmatrix} Z_{ab} \\ M_{ab} \\ Z_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} F_6/L^3 & F_4/L^2 & F_5/L^3 & -F_3/L^2 \\ & F_2/L & F_3/L^2 & F_1/L \\ & & F_6/L^3 & -F_4/L^2 \\ \text{sym} & & & F_2/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} \quad \left| \quad \begin{array}{l} F_i = F_i(\lambda) \\ \lambda = L \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EI}} \end{array} \right.$$

**Matice dynamické tuhosti:** závisí na tuhosti, hmotnosti, **frekvenci**

→ snadný výpočet ustáleného kmitání (daná budicí frekvence)

→ obtížný výpočet vlastního kmitání (frekvence je neznámá)

$$F_1 = -\lambda \frac{\sinh \lambda - \sin \lambda}{\alpha}$$

$$F_4 = \lambda^2 \frac{\sinh \lambda \sin \lambda}{\alpha}$$

$$F_2 = -\lambda \frac{\cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda}{\alpha}$$

$$F_5 = \lambda^3 \frac{\sinh \lambda + \sin \lambda}{\alpha}$$

$$F_3 = -\lambda^2 \frac{\cosh \lambda - \cos \lambda}{\alpha}$$

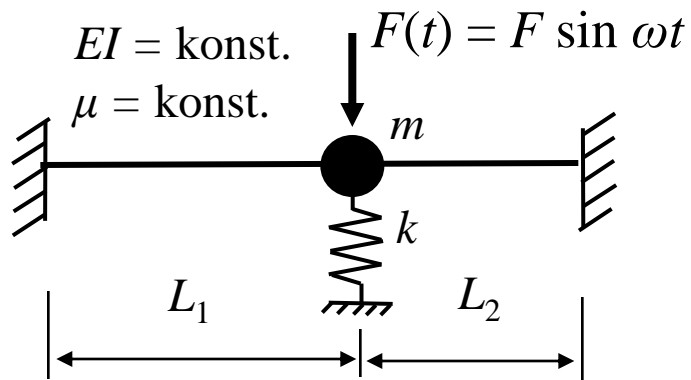
$$F_6 = -\lambda^3 \frac{\cosh \lambda \sin \lambda + \sinh \lambda \cos \lambda}{\alpha}$$

$$\alpha = \cosh \lambda \cos \lambda - 1$$

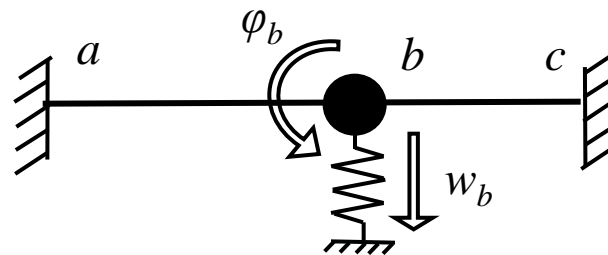


## 4. Příklad

Sestavte matici dynamické tuhosti nosníku



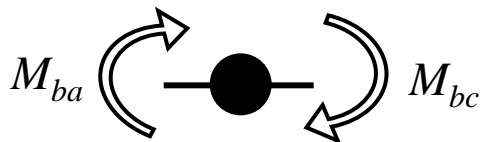
### 1. volba neznámých



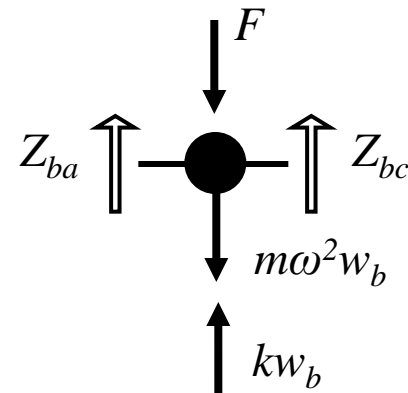
$$\lambda_1 = L_1 \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EI}}$$

$$\lambda_2 = L_2 \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EI}}$$

### 2. podmínky rovnováhy



$$M_{ba} + M_{bc} = 0 \quad (1)$$



$$Z_{ba} + Z_{bc} + kw_b - m\omega^2 w_b = F \quad (2)$$

## 4. Příklad

3. koncové síly

$$M_{ba} = EI \left( -F_4(\lambda_1)/L_1^2 w_b + F_2(\lambda_1)/L_1 \varphi_b \right)$$

$$M_{bc} = EI \left( F_4(\lambda_2)/L_2^2 w_b + F_2(\lambda_2)/L_2 \varphi_b \right)$$

$$Z_{ba} = EI \left( F_6(\lambda_1)/L_1^3 w_b - F_4(\lambda_1)/L_1^2 \varphi_b \right)$$

$$Z_{bc} = EI \left( F_6(\lambda_2)/L_2^3 w_b + F_4(\lambda_2)/L_2^2 \varphi_b \right)$$

4. dosazení do rovnic (1) a (2)

$$\begin{bmatrix} EI(F_2(\lambda_1)/L_1 + F_2(\lambda_2)/L_2) & EI(-F_4(\lambda_1)/L_1^2 + F_4(\lambda_2)/L_2^2) \\ EI(-F_4(\lambda_1)/L_1^2 + F_4(\lambda_2)/L_2^2) & EI(F_6(\lambda_1)/L_1^3 + F_6(\lambda_2)/L_2^3) + k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_b \\ w_b \end{Bmatrix}$$

matice dynamické tuhosti nosníku

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_d \mathbf{r} = \mathbf{F}$$

