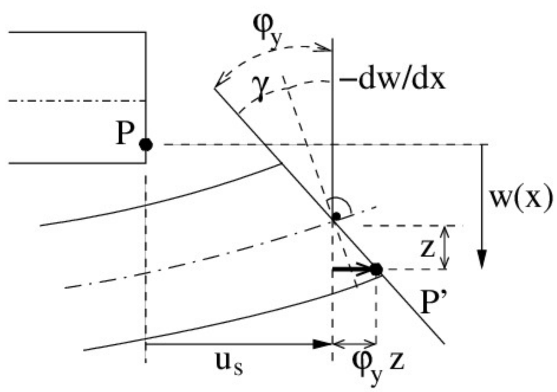
Cvičení č. 10 - Rovinné nosníky

Mindlinova teorie



- Předpoklady
  - Konstantní průhyb po výšce (nestlačitelnost).
  - Zachování rovinnosti průřezu, kolmost mezi střednicí a průřezem nemusí být zachována.
- Kinematika průřezu (rovina xz)

$$u(x,z) = u_s(x) + \varphi_y(x)z$$

$$v = 0$$

$$w(x,z) = w(x)$$

- Nenulové složky deformace

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}z = \varepsilon_s + \kappa_y z$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y$$

- Diferenciální rovnice problému

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du_s}{dx}\right) + f_x = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(kGA\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_y\right)\right) + f_z = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(EI_y\frac{d\varphi_y}{dx}\right) - kGA\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_y\right) = 0$$

- Okrajové podmínky
  - Kinematické podmínky $\left(\text{předepsané } u_s, w, \varphi_y\right)$
  - Statické podmínky $\left(N(x) = \bar{N}(x), V(x) = \bar{V}(x), M(x) = \bar{M}(x)\right)$

Diskretizovaná úloha

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K^e_{uu}} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K^e_{ww}} & \boldsymbol{K^e_{w\varphi}} \\ 0 & \boldsymbol{K^e_{\varphi w}} & \boldsymbol{K^e_{\varphi\varphi}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r^e_u \\ r^e_w \\ r^e_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R^e_u \\ R^e_w \\ R^e_\varphi \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}^e_{\boldsymbol{uu}} = \int \boldsymbol{B}^{eT}_u EA \boldsymbol{B}^e_u \, dx$$

$$\boldsymbol{K}^e_{\boldsymbol{ww}} = \int \boldsymbol{B}^{eT}_w kGA \boldsymbol{B}^e_w \, dx$$

$$\boldsymbol{K}^e_{\boldsymbol{w\varphi}} = \int \boldsymbol{B}^{eT}_w kGA \boldsymbol{N}^e_\varphi \, dx$$

$$\boldsymbol{K}^e_{\boldsymbol{\varphi w}} = \int \boldsymbol{N}^{eT}_\varphi kGA \boldsymbol{B}^e_w$$

$$\boldsymbol{K}^e_{\boldsymbol{\varphi\varphi}} = \int \boldsymbol{B}^{eT}_\varphi EI \boldsymbol{B}^e_\varphi \, dx + \int \boldsymbol{N}^e_\varphi kGA \boldsymbol{N}^e_\varphi \, dx$$

Lineární aproximace

- Matice interpolačních funkcí

$$\boldsymbol{N}^e = \left[\frac{l^e - x}{l^e}, \frac{x}{l^e} \right]$$

- Geometrická matice (derivace interpolačních funkcí)

$$\boldsymbol{B}^e = \left[\frac{-1}{l^e}, \frac{1}{l^e} \right]$$

- Jednotlivé submatice matice tuhosti

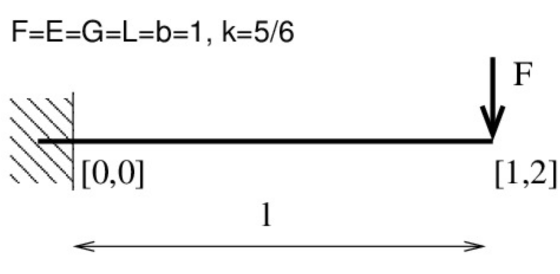
$$\boldsymbol{K}^e_{\boldsymbol{uu}} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}^e_{\boldsymbol{ww}} = \frac{kGA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}^e_{\boldsymbol{w\varphi}} = \boldsymbol{K}^e_{\boldsymbol{\varphi w}} = kGA \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}^e_{\boldsymbol{\varphi\varphi}} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + kGA \begin{bmatrix} l/3 & l/6 \\ l/6 & l/3 \end{bmatrix}$$

Příklad 1



In [3]:

```
function Ke = beam2d_stiffness(xz, EA, kGA, EI)

    l = sqrt((xz(3) - xz(1))^2 + (xz(4) - xz(2))^2)

    Kuu = EA/l*[1 -1; -1 1];
    Kww = kGA/l*[1 -1; -1 1];
    Kwf = kGA*[-1/2 -1/2; 1/2 1/2];
    Kff = EI/l*[1 -1; -1 1] + kGA*[l/3 l/6; l/6 l/3];
    % Kff = EI/l*[1 -1; -1 1] + kGA*[l/4 l/4; l/4 l/4];

    O = zeros(2);

    Ke = [Kuu O O; O Kww Kwf; O Kwf' Kff]
end
```

In [4]:

```
% pole souradnic uzlu
xz=[0, 0;
    1, 0];

% pole kodovych cisel
global lm=[1, 2, 3, 4, 5, 6];

% pole uzlu prvku
elnode=[1 2];

%pocet prvku
nelem=1;

%prurez
b = 1; E = 1; G = 1; h = 0.1;
EA = E * b * h;
EI = E * 1/12 * b * h^3;
kGA = 5/6 * G * b * h;

%nulovani vektoru zatizeni, matice tuhosti
f=zeros(6,1);
k=zeros(6);
r=zeros(6,1);

%sestaveni matic tuhosti
for i=1:nelem;
kel=beam2d_stiffness([xz(elnode(i,1),:) xz(elnode(i,2),:)], EA, kGA, EI);
%lokalizace
k(lm(i,:),lm(i,:)) = k(lm(i,:),lm(i,:)) + kel;
end

%vektor zatizeni
f(4)=1;

%reseni posunuti
kuu=k([2,4,6],[2,4,6])
fu=f([2,4,6])
u=kuu\fu;

%dopocteni reakci
k([1,3,5],[2,4,6])
R=k([1,3,5],[2,4,6])*u;
R

%rekonstrukce celeho vektoru posunuti
r=[0;u(1);0;u(2);0;u(3)];
r
```

```
l =  1
Ke =

   0.10000  -0.10000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
  -0.10000   0.10000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.00000   0.08333  -0.08333  -0.04167  -0.04167
   0.00000   0.00000  -0.08333   0.08333   0.04167   0.04167
   0.00000   0.00000  -0.04167   0.04167   0.02786   0.01381
   0.00000   0.00000  -0.04167   0.04167   0.01381   0.02786

kuu =

   0.10000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.08333   0.04167
   0.00000   0.04167   0.02786

fu =

   0
   1
   0

ans =

  -0.10000   0.00000   0.00000
   0.00000  -0.08333  -0.04167
   0.00000   0.04167   0.01381

R =

   0.00000
  -1.00000
   1.00000

r =

    0.00000
    0.00000
    0.00000
   47.57312
    0.00000
  -71.14625
```

Smykové zamykání

Při stejné volbě aproximace průhybu a natočení je aproximace posouvající síly o stupeň vyšší než aproximace momentu. To je v rozporu se Schwedlerovou větou a výsledek je pro štíhlé pruty příliš tuhý - dochází k tzv. smykovému uzamknutí.

- Posouvající síla $V(x) = kGA\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_y\right)$ - lineární
- Ohybový moment $M(x) = EI\frac{d\varphi_y}{dx}$ - konstantní
- Schwedlerova věta $\frac{dM(x)}{dx} - V(x) = 0$

Problém smykového zamykání lze řešit např. redukovanou integrací nebo vylepšením aproximace průhybu.

Redukovaná integrace

Rozpor se Schwedlerovou větou je zmírněn redukovanou integrací $\boldsymbol{K}_{\varphi\varphi}$, tedy té části matice tuhosti, která odpovídá příspěvku pootočení do posouvající síly.

Smykové zkosení $\gamma = \frac{dw}{dx} + \varphi$ je uvažováno jako konstantní, tedy $\bar{\gamma} = \frac{w_2 - w_1}{l} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, to odpovídá redukované integraci.

Uvažování konstantního průběhu smykového zkosení ovlivní ty části matice tuhosti, do kterých vstupuje N_φ. V případě lineární aproximace se změní pouze submatice $\boldsymbol{K}_{\varphi\varphi}$, protože členy v integrálu mají parabolický průběh. Pokud integrujeme lineární funkce, je jednobodová integrace v podstatě plnou integrací.

$$\boldsymbol{K}^e_{\varphi\varphi} = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + kGA\begin{bmatrix} \boldsymbol{l/4} & \boldsymbol{l/4} \\ \boldsymbol{l/4} & \boldsymbol{l/4} \end{bmatrix}$$

Hierarchická funkce

V případě lineární aproximace pro smykové zkosení platí:

$$\gamma = \frac{dw}{dx} + \varphi = \frac{w_2 - w_1}{l} + \varphi_1 + \frac{x}{l}(\varphi_2 - \varphi_1) = \mathrm{konst} + \frac{x}{l}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Aby bylo smykové zkosení alespoň konstantní, je možné vylepšit aproximaci průhybu tak, aby vymizel lineární člen. Toho docílíme, pokud budeme volit:

$$w(x) = w^{lin} + \frac{1}{2l}(\varphi_2 - \varphi_1)x(x - l)$$

Výsledná aproximace:

$$u_s(x) = N_1 u_{s1} + N_2 u_{s2}$$

$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 w_2 - \frac{N_3}{2l}\varphi_1 + \frac{N_3}{2l}\varphi_2$$

$$u_s(x) = N_1 \varphi_1 + N_2 \varphi_2$$

Pro výpočet je v tomto případě praktické uspořádat uzlové hodnoty průhybů a natočení do jednoho vektoru $r_{w,\varphi} = \{w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2\}$.

Pro interpolaci průhybu a natočení pak platí

$$w(x) = N_w r_{w,\varphi} = [1 - \frac{x}{l}, \frac{x(x-l)}{2l}, \frac{x}{l}. \frac{-x(x-l)}{2l}]$$

$$\varphi(x) = N_\varphi r_{w,\varphi} = [0, \frac{1-x}{l}, 0, \frac{x}{l}]$$

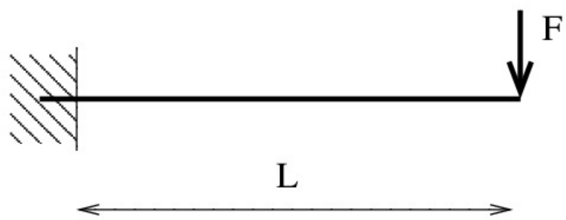
Sub-Matice tuhosti pak maji tvar $K_{ww} = \int B_w^T KGAB_w dx = \begin{bmatrix} & 0 & -\frac{kGA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{kGAl}{12} & 0 & -\frac{kGAl}{12} \\ -\frac{kga}{l} & 0 & \frac{kGA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{kGAl}{12} & 0 & \frac{kGAl}{12} \end{bmatrix}$

$$K_{w\varphi} = \int B_W^T kGAN_\varphi dx = \begin{bmatrix} & -\frac{kGA}{2} & 0 & -\frac{kGA}{2} \\ 0 & -\frac{kGAl}{12} & 0 & \frac{kGAl}{12} \\ 0 & \frac{kGA}{2} & 0 & \frac{kGA}{2} \\ 0 & \frac{kGAl}{12} & 0 & -\frac{kGAl}{12} \end{bmatrix}$$

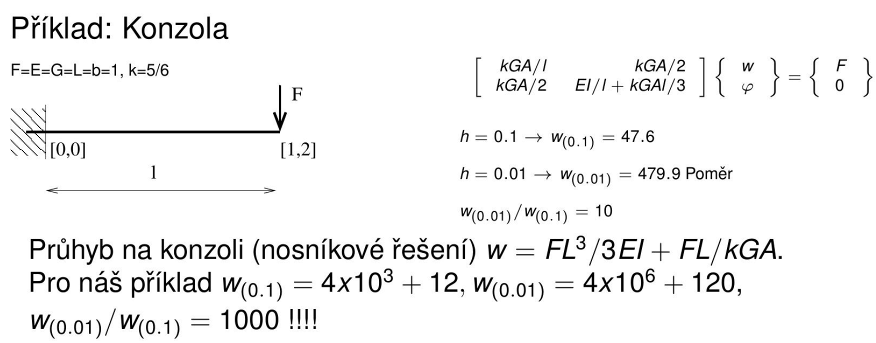
$$K_{\varphi,\varphi} = \int B_\varphi^T EIB_\varphi dx + \int N_\varphi^T kGAN\varphi dx = \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l} + \frac{kGAl}{3} & 0 & -\frac{EI}{l} + \frac{kGAl}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI}{l} + \frac{kGAl}{6} & 0 & \frac{EI}{l} + \frac{kGAl}{3} \end{bmatrix}$$

Po sečtení členů dá stejný výsledek jako redukovaná integrace.

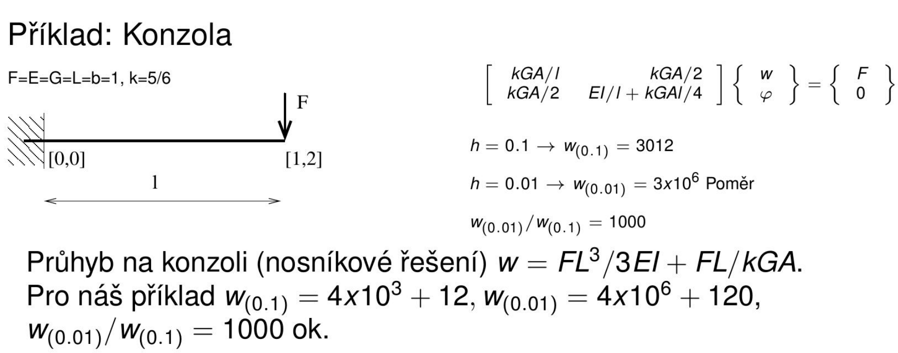
Porovnání na kozole



Plná integrace



Redukovaná integrace



Celkové porovnání plné a redukované integrace pro jeden a více prvků

- Plná integrace (2 body)

$h/L > 1/3$:	
nelem	w/w_e
1	0.0416
2	0.445
4	0.762
8	0.927

$h/L < 1/10$:	
nelem	w/w_e
1	0.0002
2	0.0008
4	0.0003
8	0.0013

- Redukovaná integrace (1 bod)

$h/L > 1/3$:	
nelem	w/w_e
1	0.762
2	0.940
4	0.985
8	0.996

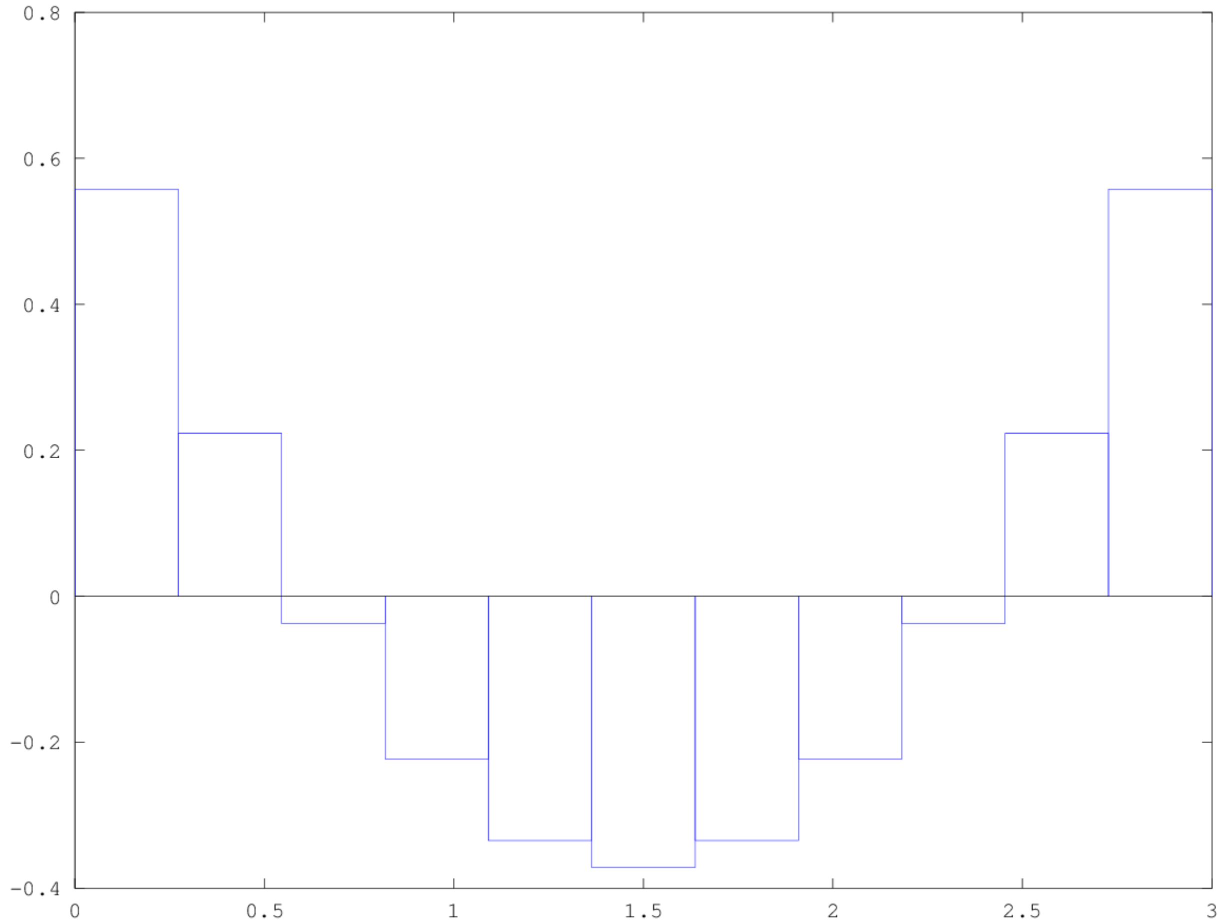
$h/L < 1/10$:	
nelem	w/w_e
1	0.750
2	0.938
4	0.984
8	0.996

Oboustranně vetknutý nosník (spojité zatížení, redukovaná integrace)

In [1]:

```
function Ke = beam2d_stiffness_RI(xz, EA, kGA, EI)

    l = sqrt((xz(3) - xz(1))^2 + (xz(4) - xz(2))^2);

    Kuu = EA/l*[1 -1; -1 1];
    Kww = kGA/l*[1 -1; -1 1];
    Kwf = kGA*[-1/2 -1/2; 1/2 1/2];
    Kff = EI/l*[1 -1; -1 1] + kGA*[l/4 l/4; l/4 l/4];

    O = zeros(2);

    Ke = [Kuu O O; O Kww Kwf; O Kwf' Kff];
end

l = 3;
n = 11;
fz = 1;

%prurez
b = 1; E = 1; G = 1/2; h = 0.1;
EA = E * b * h;
EI = E * 1/12 * b * h^3;
kGA = 5/6 * G * b * h;

k = zeros((n+1)*3);
f = zeros((n+1)*3,1);

dx = l/n;
for i = 1:n
    xz = [(i-1)*dx 0 i*dx 0];
    ke = beam2d_stiffness_RI(xz, EA, kGA, EI);
    loc = [(i-1)*3+1 i*3+1 (i-1)*3+2 i*3+2 (i-1)*3+3 i*3+3];
    k(loc,loc) += ke;
    fe = [0 0 fz*dx/2 fz*dx/2 0 0];
    f(loc) += fe';
end

up = [1 2 3 n*3+1 n*3+2 n*3+3];

kuu = k;
kuu(up,:) = [];
kuu(:,up) = [];
fuu = f;
fuu(up) = [];

u = kuu\fuu;

r = [0; 0; 0; u; 0; 0; 0];

for i = 1:n
    df = (r(i*3+3) - r((i-1)*3+3))/dx;
    M = EI * df;
    plot ([(i-1)*dx (i-1)*dx (i)*dx (i)*dx],[0 -M -M 0]); hold on;
end
plot([0 l], [0 0], 'k')
disp('Prubeh momentu')
```

Prubeh momentu



In [ ]: