

III. MKP – vlastní kmitání

1. Rovnice vlastního kmitání
2. Rayleighova – Ritzova metoda
3. Jacobiho metoda
4. Metoda inverzních iterací
5. Metoda iterace podprostoru
6. Příklady



1. Rovnice vlastního kmitání

určení základních dynamických charakteristik systému:

- vlastní frekvence a tvary kmitání

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ soustava pohybových rovnic pro netlumené vlastní kmitání soustav s n - SV

$\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\phi}_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$ řešení pohybových rovnic
– harmonické kmitání

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega_n^2 \mathbf{r}(t)$$

$$\boxed{(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}}$$



rovnice vlastního kmitání

problém vlastních čísel

$\boldsymbol{\phi}_n$ - vlastní tvar kmitání

ω_n - vlastní (kruhová) frekvence

$$\det(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) = 0$$

podmínka netriviálního řešení

frekvenční rovnice – polynom stupně N pro ω_n^2
pro řešení praktických úloh nevhodná metoda



2. Rayleighova – Ritzova metoda

redukce původního problému vl. čísel s N stupni volnosti
na řešení problému vlastních čísel s J stupni volnosti

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{K} - \rho \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \rho \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}$$



$$\rho = \frac{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}}$$

Rayleighův kvocient

$\boldsymbol{\phi}$ libovolný vektor

Vlastnosti

1. Je-li $\boldsymbol{\phi}$ vlastní vektor $\boldsymbol{\phi}_n$, potom Rayleighův kvocient je roven odpovídajícímu vlastnímu číslu $\rho = \omega_n^2$
2. Rayleighův kvocient je ohraničen nejnižším a nejvyšším vlastním číslem

$$\omega_1^2 \leq \rho \leq \omega_n^2$$

a dále platí: $\omega_1^2 \leq \rho_1 \quad \omega_2^2 \leq \rho_2 \quad \dots \quad \omega_n^2 \leq \rho_n$



2. Rayleighova – Ritzova metoda

nalezení *minima* Rayleighova kvocientu Ritzovou metodou

$\phi = \Psi \mathbf{z}$ vlastní tvary se vyjádří jako kombinace lineárně
nezávislých vektorů ψ_i , $i = 1, 2, \dots, J < N$
Ritzovy vektory ψ_i tvoří sloupce matice Ψ typu $N \times J$
 \mathbf{z} – vektor J zobecněných souřadnic

substituce Ritzových vektorů (Ritzova transformace)
do Rayleighova kvocientu

$$\rho = \rho(\phi) = \frac{\phi^T \mathbf{K} \phi}{\phi^T \mathbf{M} \phi} = \frac{\mathbf{z}^T \Psi^T \mathbf{K} \Psi \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \Psi^T \mathbf{M} \Psi \mathbf{z}} = \rho(\mathbf{z})$$

$\tilde{\mathbf{M}} = \Psi^T \mathbf{M} \Psi$ $\tilde{\mathbf{K}} = \Psi^T \mathbf{K} \Psi$ transformace matic \mathbf{K} , \mathbf{M} typu $N \times N$
na matice typu $J \times J$

$$\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{z} = \rho(\mathbf{z}) \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{z}$$



2. Rayleighova – Ritzova metoda

podmínka minima Rayleighova kvocientu

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{z})}{\partial z_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, J$$

$$\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{z} = \rho(\mathbf{z}) \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{z}$$

$$2\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{z} = \underbrace{\frac{\partial \rho(\mathbf{z})}{\partial z_i} \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{z}}_{=0} + \rho(\mathbf{z}) 2\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{z} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{z} = \rho(\mathbf{z})\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{z}$$

$$\boxed{(\tilde{\mathbf{K}} - \rho\tilde{\mathbf{M}})\mathbf{z} = \mathbf{0}} \\ \Rightarrow \rho_i, \mathbf{z}_i$$

redukovaný problém vlastních čísel

$$i = 1, 2, \dots, J < N$$

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0} \left\{ \begin{array}{l} \omega_i^2 \leq \rho_i \\ \boldsymbol{\phi}_i \approx \boldsymbol{\Psi} \mathbf{z}_i \end{array} \right. \quad \text{aproximace vlastních čísel a vektorů}$$



3. Jacobiho metoda

určení všech vlastních čísel a vektorů

využití – např. redukovaný problém vl. čísel v Rayleighově-Ritzově metodě

základní myšlenka – transformace matic tuhosti a hmotnosti na matice diagonální pomocí transformačních matic \mathbf{T} (matice rotace)

iterační proces – vytváří se posloupnost transformovaných matic \mathbf{K} resp. \mathbf{M}

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{T}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{T}_k \quad \mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{T}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{T}_k$$

na konci iteračního cyklu platí

vlastní frekvence: $\omega_i^2 = \frac{k_{ii}}{m_{ii}}$

vlastní tvary: $\Phi = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_k$
(spektrální matice)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \cdot & \alpha \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \beta & \cdot & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{řádek } i \\ \\ \text{řádek } j \\ \\ \end{matrix}$$

transformační matice pro nulování mimodiagonálního prvku (i,j)



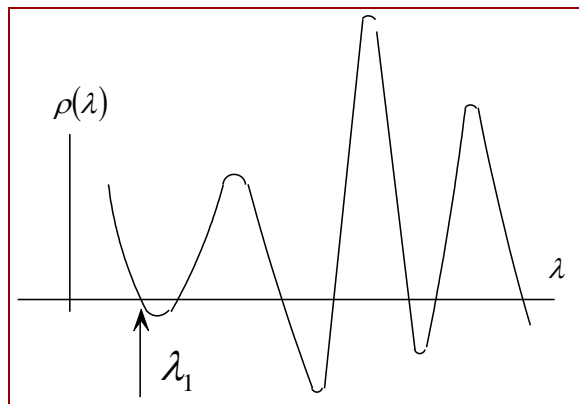
4. Metoda inverzních iterací (Stodolova metoda postupných aproximací)

Iterace vzad - inverzní iterace
určení **nejnižší** vlastní frekvence

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_k \Rightarrow \bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{x}}_{k+1})^{1/2}}$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} \Rightarrow \phi_1 \quad \text{pro } k \rightarrow \infty$$



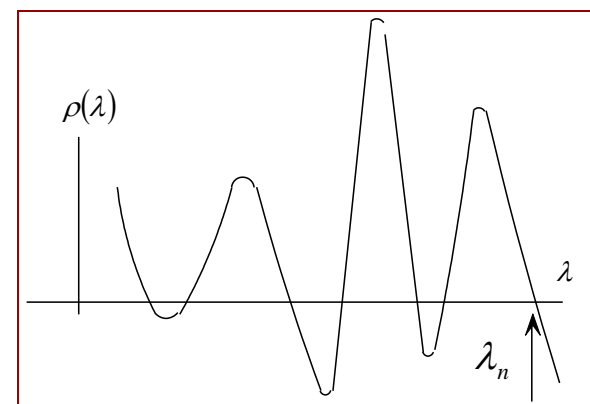
$$\lambda_i = \omega_i^2$$

Iterace vpřed
určení **nejvyšší** vlastní frekvence

$$\mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{K}\mathbf{x}_k \Rightarrow \bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{x}}_{k+1})^{1/2}}$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} \Rightarrow \phi_n \quad \text{pro } k \rightarrow \infty$$



4. Metoda inverzních iterací

1. Startovací vektor \mathbf{x}_0 – libovolný

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{M}\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{R}_0 \Rightarrow \bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}_0$$

$$2. \boxed{\mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_k} \quad \leftarrow \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x}_k = \delta\mathbf{M}\mathbf{x}_k$$

$$3. \rho^{(k+1)} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_{k+1}} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{M}\mathbf{x}_k}{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_{k+1}} \quad (\text{Rayleighův kvocient})$$

$$4. \frac{|\rho^{(k+1)} - \rho^{(k)}|}{\rho^{(k+1)}} \leq tol$$

5. Není-li kritérium konvergence splněno: normování

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{\left(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{M}\bar{\mathbf{x}}_{k+1}\right)^{1/2}} \quad \text{a návrat do bodu 2} \quad (k = k+1)$$



4. Metoda inverzních iterací

6. Je-li kritérium konvergence splněno: pro iteraci $(k+1)$

$$\omega_1^2 = \rho^{(k+1)} \quad \phi_1 = \mathbf{x}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{\left(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{x}}_{k+1} \right)^{1/2}} \quad (\text{normování vl. tvaru})$$

Grammova-Schmidtova ortogonalizace

v této formulaci metoda konverguje k 1. vlastnímu tvaru
 vyšší tvary lze určit tak, že se do algoritmu zavedou podmínky ortogonality
 mezi hledaným $(m+1)$ tvarem a všemi předcházejícími vlastními tvary
 (nutno určit všech m předcházejících vlastních tvarů)

modifikace vektoru \mathbf{x}_{k+1}

– provádí se v každém iteračním kroku před návratem do bodu 2

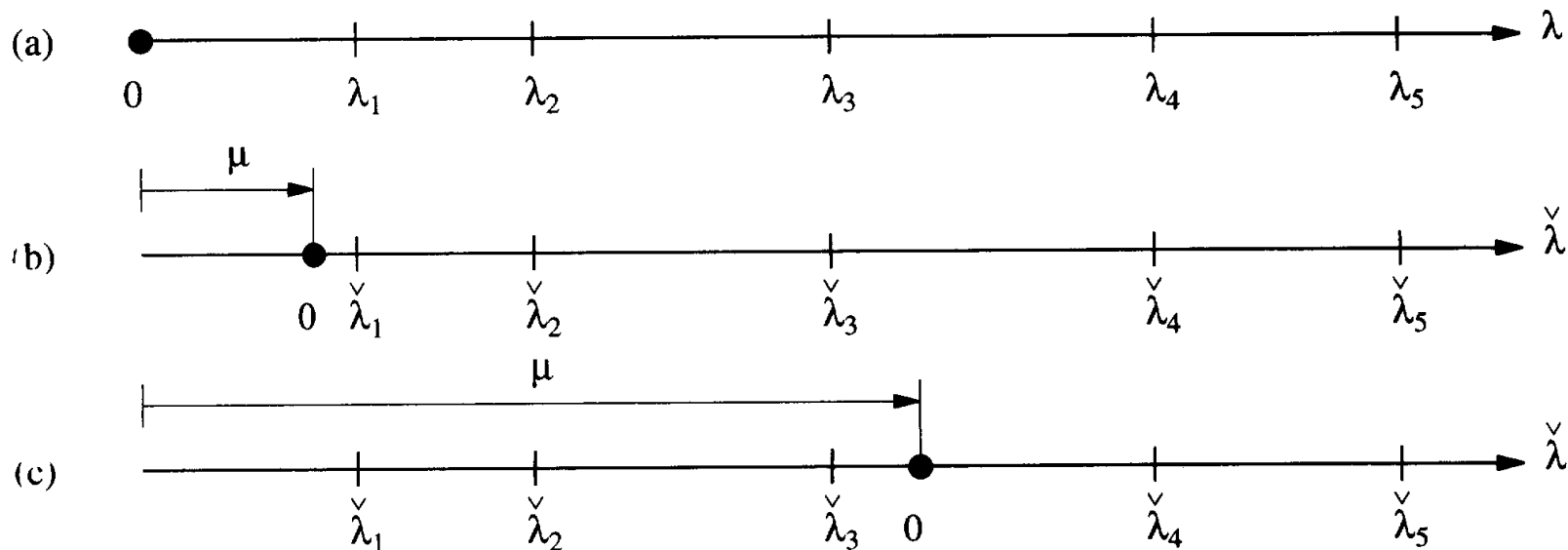
$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^m c_j \phi_j \quad \text{kde} \quad c_j = \phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{k+1}$$



4. Metoda inverzních iterací

Inverzní iterace s posunutím μ

umožňuje výpočet libovolného vlastního čísla λ_i



$$\lambda = \tilde{\lambda} + \mu \quad \tilde{\mathbf{K}}\phi = \tilde{\lambda}\mathbf{M}\phi \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mu\mathbf{M}$$

1. **vlastní vektory** původního problému i problému s posunutím jsou **stejné**
2. inverzní iterace konverguje k vl. číslu, které je **nejblíže** k hodnotě **posunutí μ** – tj. např. k $\tilde{\lambda}_3$ v (c)



5. Metoda iterace podprostoru

metoda vhodná pro řešení rozsáhlých úloh pro určení **několika nejnižších** vlastních tvarů a frekvencí
 spojení inverzních iterací a Rayleighovy-Ritzovy metody
 iterace se provádějí s několika vektory současně – jejich počet je m
 m – menší z čísel $(2p)$ a $(p+8)$, kde p je počet hledaných vlastních čísel
 (p je obvykle podstatně menší než počet stupňů volnosti N)

1. Startovací vektory \mathbf{X}_0

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{M}\mathbf{X}_0$$

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{R}_0$$

2. Iterace podprostoru

a) inverzní iterace

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{X}_k$$

b) Ritzova transformace

$$\tilde{\mathbf{K}}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{X}}_{k+1} \quad \tilde{\mathbf{M}}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{X}}_{k+1}$$



5. Metoda iterace podprostoru

- c) redukovaný problém vlastních čísel (m vlastních čísel)
 Ω – spektrální matice, Q – modální matice

$$\tilde{\mathbf{K}}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} = \Omega_{k+1}^2 \tilde{\mathbf{M}}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1}$$

řešení - např. **Jacobiho metoda**

- d) výpočet nových vektorů

$$\mathbf{X}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1}$$

- e) návrat do bodu 2 a)

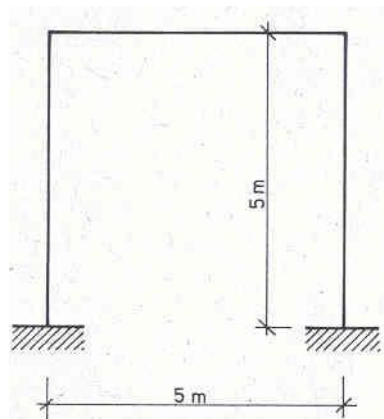
3. Sturmova kontrola

ověření, zda byla vypočtena požadovaná vlastní čísla (vl. frekvence)
a vlastní vektory (vl.tvary) – t.j. právě prvních p vl. čísel



6. Příklady

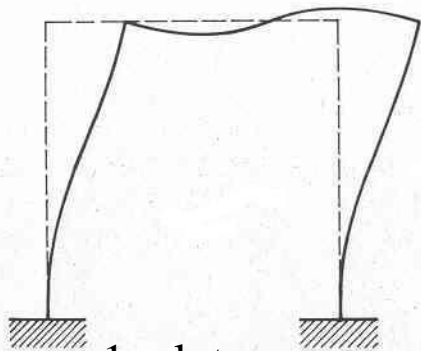
6.1 Jednoduchý rám



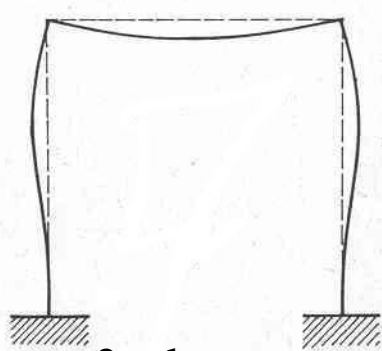
$$EI = 32\,000 \text{ kNm}^2$$

$$\mu = 252 \text{ kgm}^{-1}$$

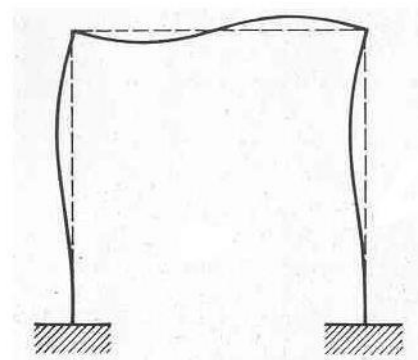
	<i>přesné řešení</i>	<i>3 prvky</i>	<i>6 prvků</i>	<i>12 prvků</i>
f_1 [Hz]	7,270	7,282	7,270	7,270
f_2 [Hz]	28,693	34,285	28,845	28,711
f_3 [Hz]	46,799	74,084	47,084	46,854



1. vl. tvar



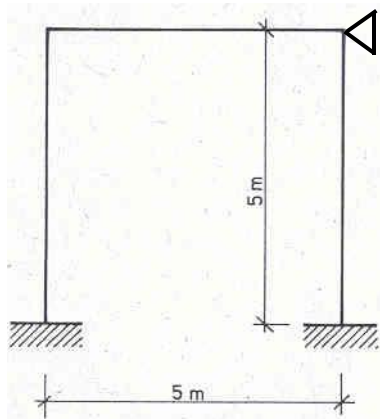
2. vl. tvar



3. vl. tvar

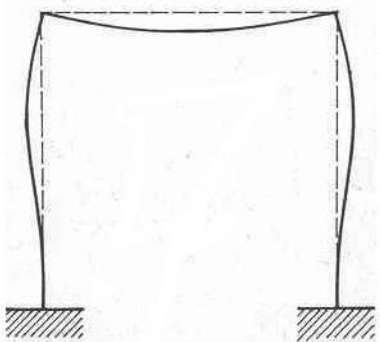
6. Příklady

6.1 Jednoduchý rám



$$EI = 32\,000 \text{ kNm}^2$$

$$\mu = 252 \text{ kgm}^{-1}$$



1. vl. tvar

	<i>přesné řešení</i>	<i>3 prvky</i>	<i>6 prvků</i>
f_1 [Hz]	28,662	34,285	28,845
f_2 [Hz]	41,863	65,623	42,393
f_3 [Hz]	50,653	-	51,474

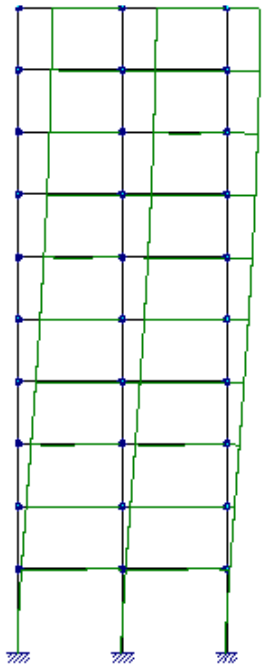
Doporučení:

při vytváření výpočetního modelu MKP
vkládat alespoň 1 uzel mezi styčníky
jednotlivých prutů – vede k podstatnému
zvýšení přesnosti výpočtu
(zejména u jednoduchých konstrukcí)

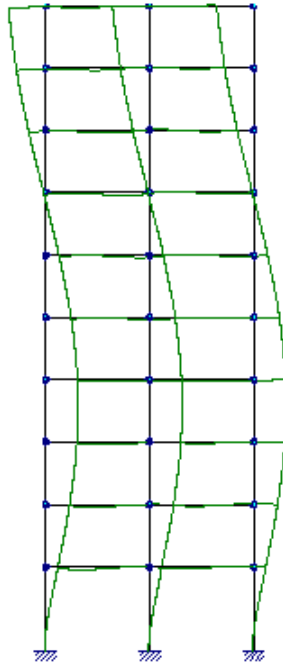


6. Příklady

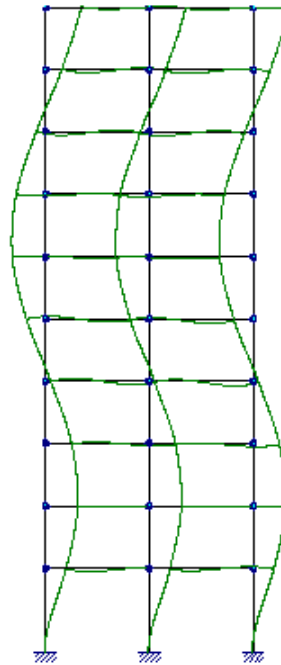
6.2 Rovinný rám – budova



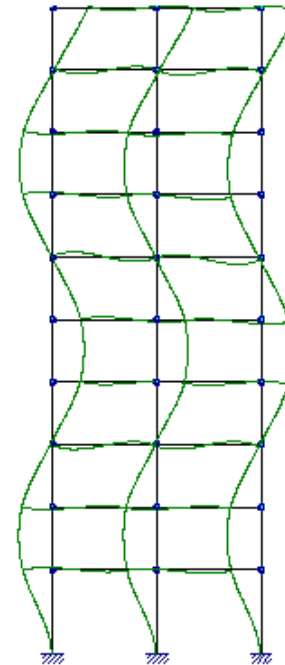
1. tvar kmitání
 $f_1 = 2.19 \text{ Hz}$



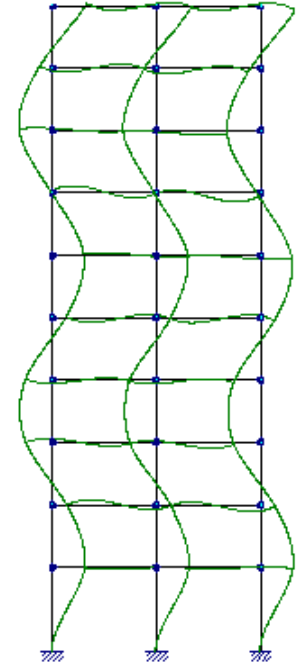
2. tvar kmitání
 $f_2 = 6.91 \text{ Hz}$



3. tvar kmitání
 $f_3 = 12.64 \text{ Hz}$



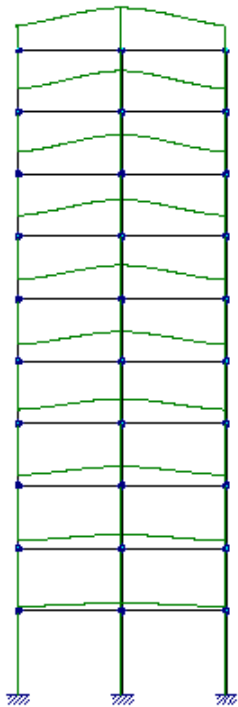
4. tvar kmitání
 $f_4 = 19.47 \text{ Hz}$



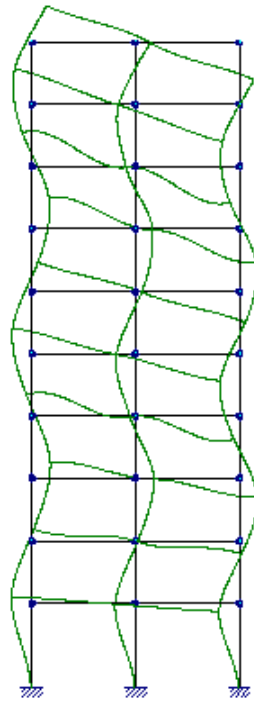
5. tvar kmitání
 $f_5 = 27.70 \text{ Hz}$

6. Příklady

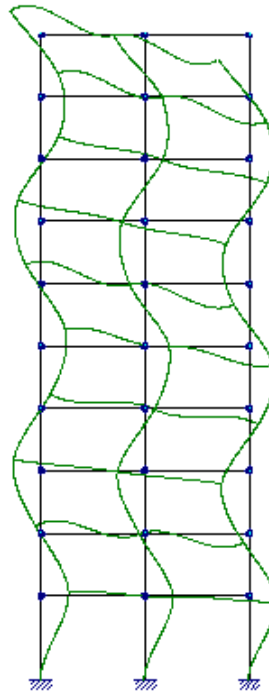
6.2 Rovinný rám – budova



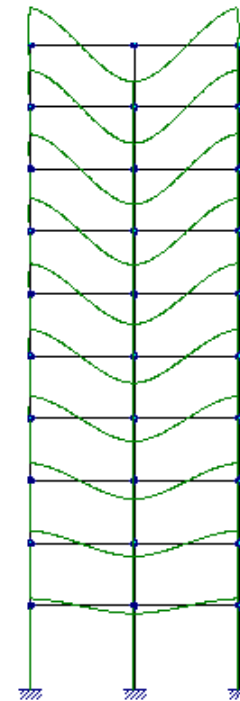
6. tvar kmitání
 $f_6 = 30.93 \text{ Hz}$



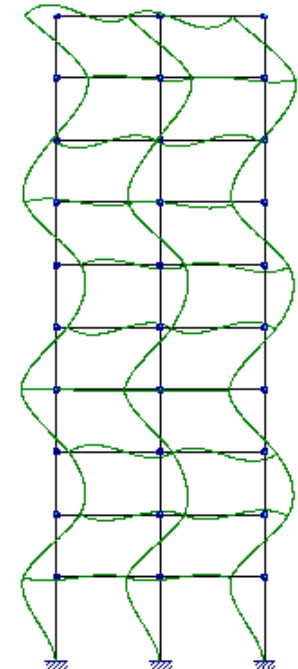
7. tvar kmitání
 $f_7 = 36.49 \text{ Hz}$



8. tvar kmitání
 $f_8 = 37.78 \text{ Hz}$



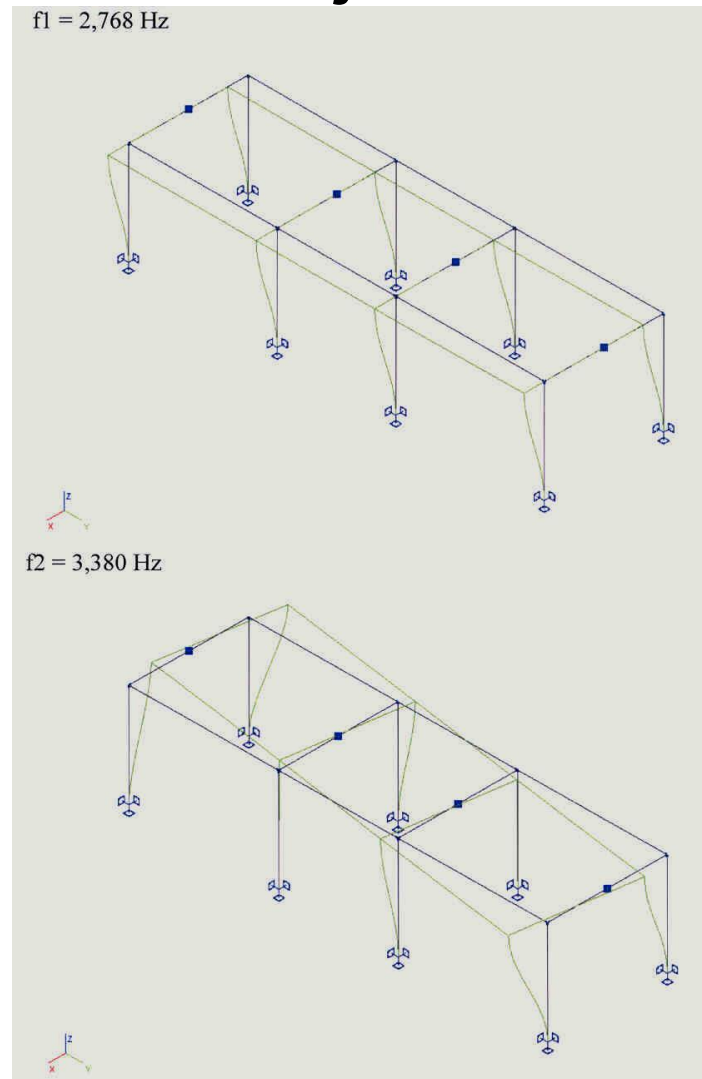
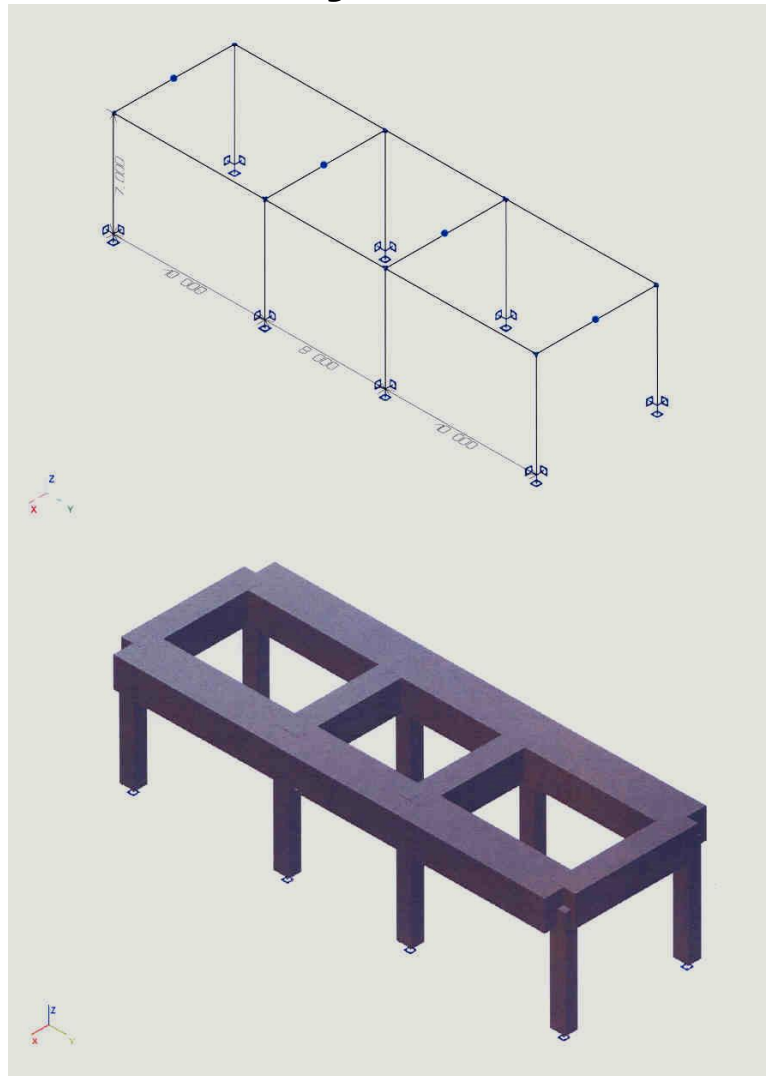
9. tvar kmitání
 $f_9 = 41.62 \text{ Hz}$



10. tvar kmitání
 $f_{10} = 48.33 \text{ Hz}$

6. Příklady

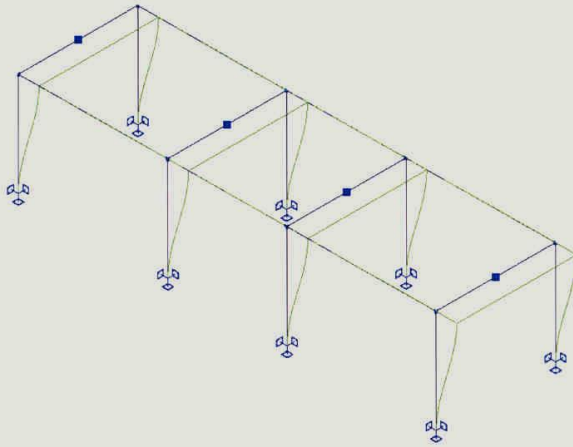
6.3 Prostorový rám – základ turbosoustrojí



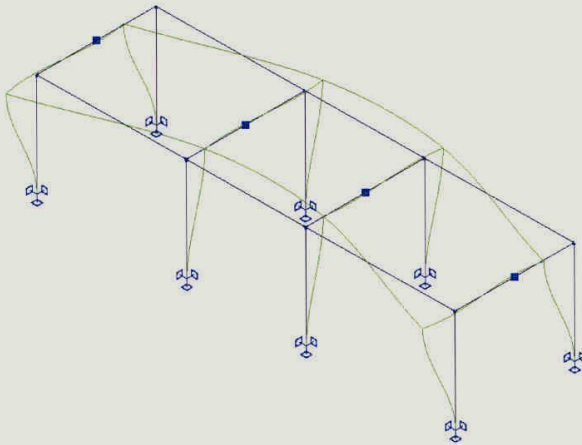
6. Příklady

6.3 Prostorový rám – základ turbosoustrojí

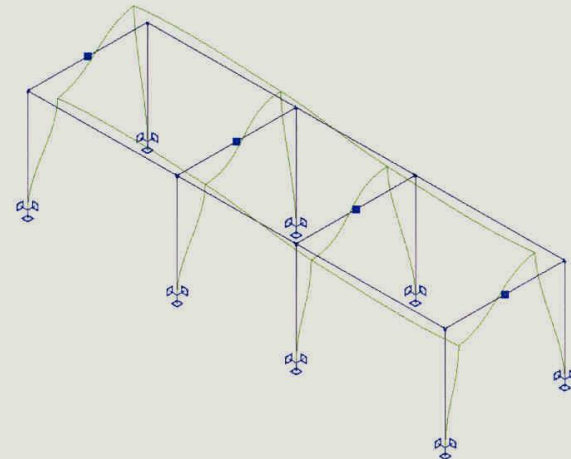
$f_3 = 3,449 \text{ Hz}$



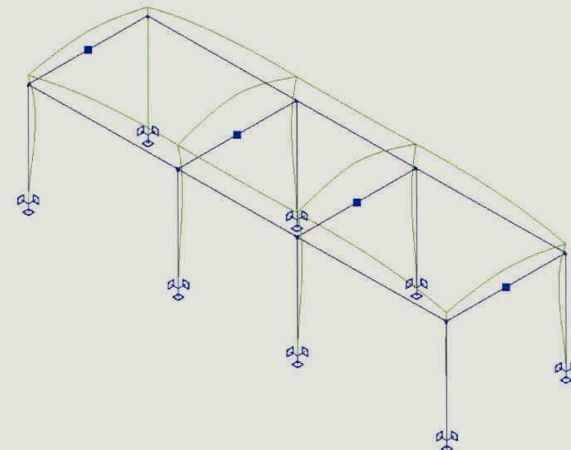
$f_4 = 11,887 \text{ Hz}$



$f_5 = 12,698 \text{ Hz}$

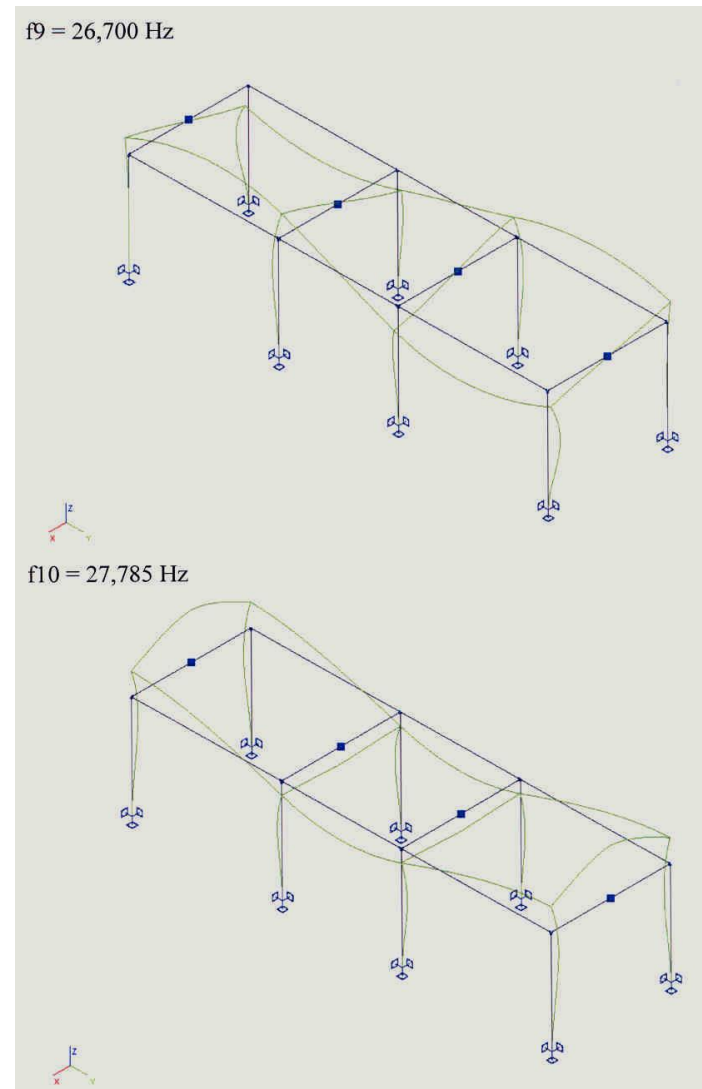
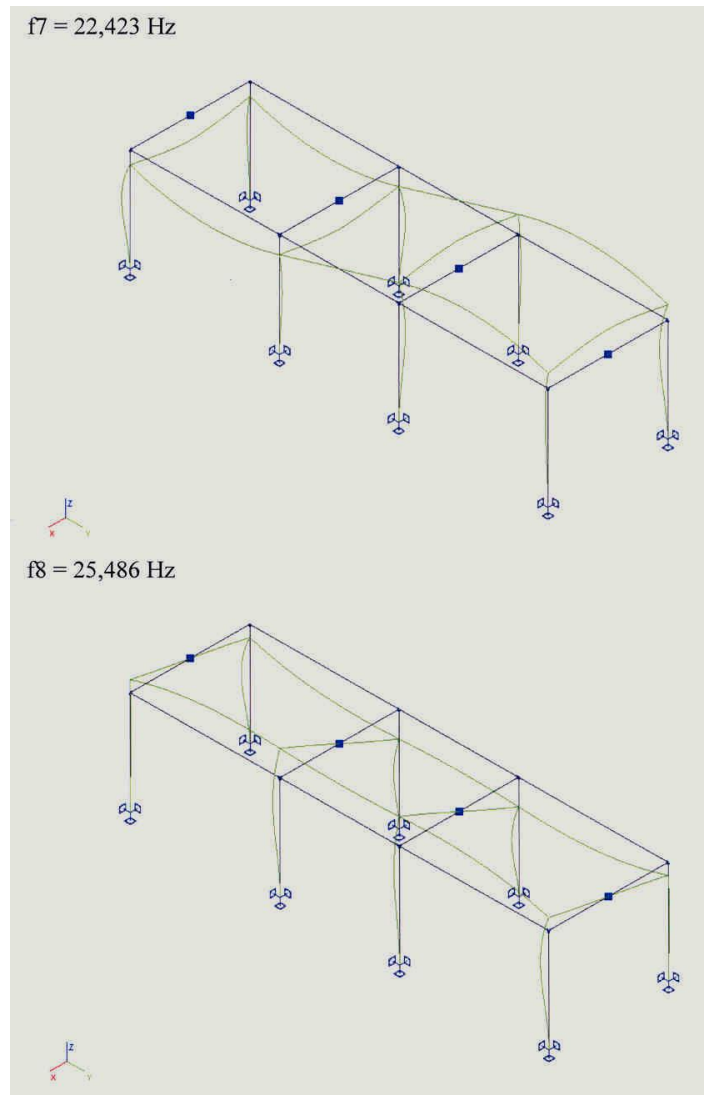


$f_6 = 21,545 \text{ Hz}$



6. Příklady

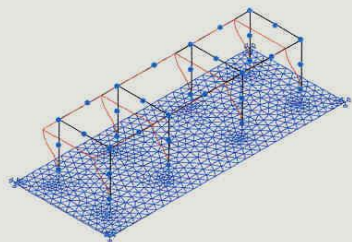
6.3 Prostorový rám – základ turbosoustrojí



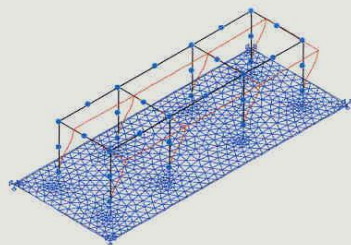
6. Příklady

6.4 Prostorový rám + pružné podloží

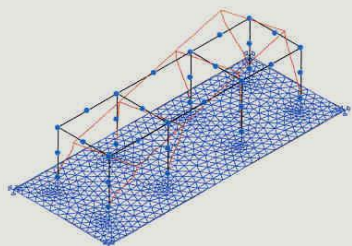
- 1. vlastní tvar



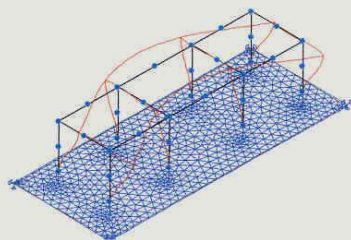
- 2. vlastní tvar



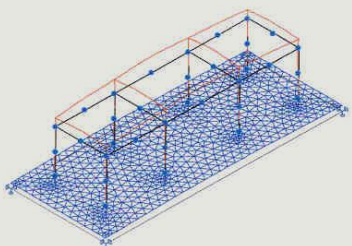
- 3. vlastní tvar



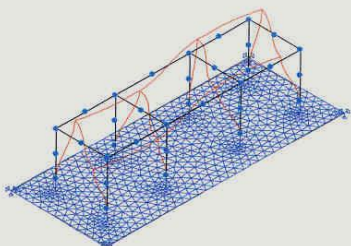
- 4. vlastní tvar



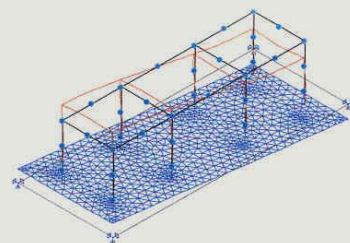
- 5. vlastní tvar



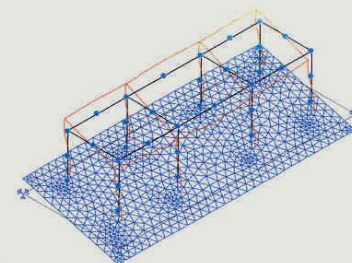
- 6. vlastní tvar



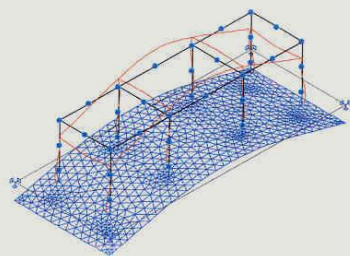
- 7. vlastní tvar



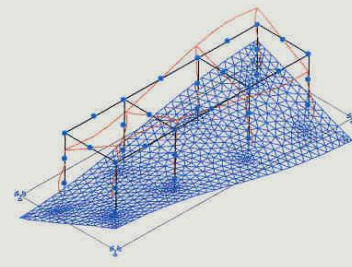
- 8. vlastní tvar



- 9. vlastní tvar

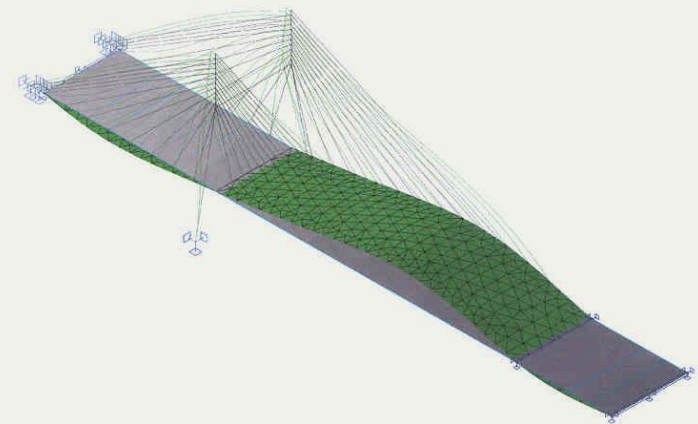
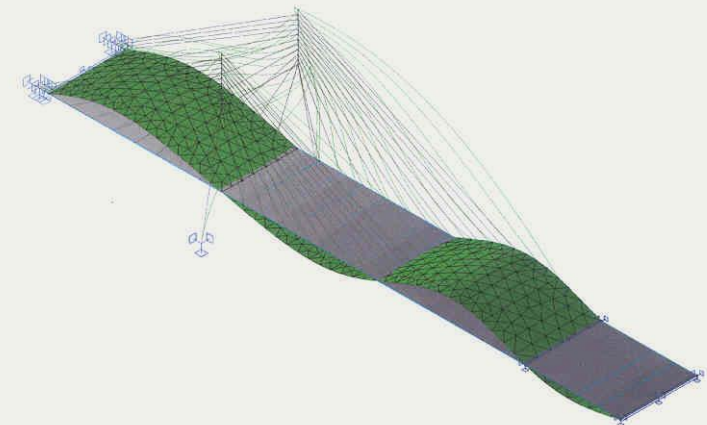


- 10. vlastní tvar



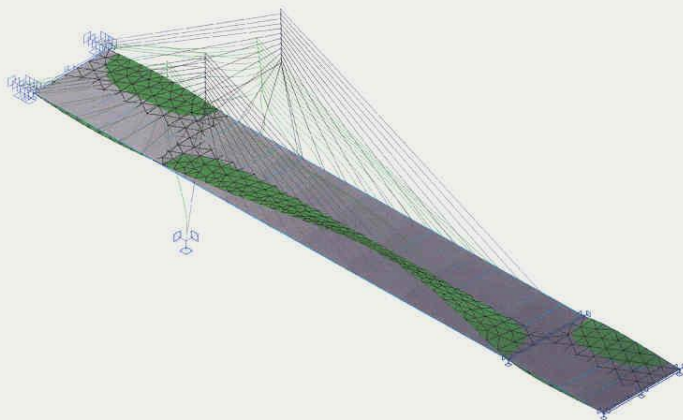
6. Příklady

6.5 Zavěšený most

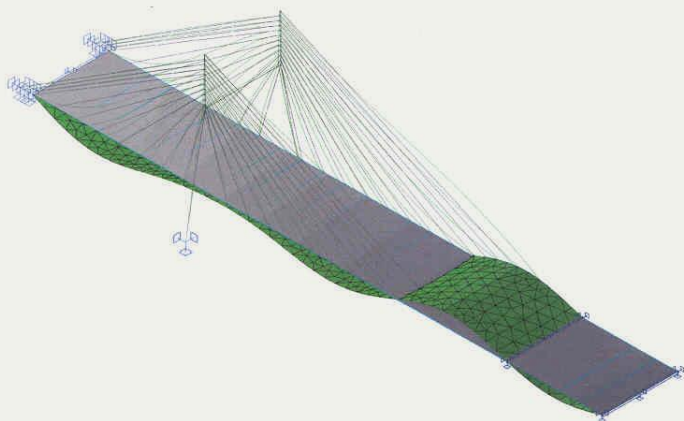
1. Vlastní tvar - vlastní frekvence $f_1 = 0,744$ Hz2. Vlastní tvar - vlastní frekvence $f_2 = 1,183$ Hz

6. Příklady

3. Vlastní tvar - vlastní frekvence $f_3 = 1,209$ Hz

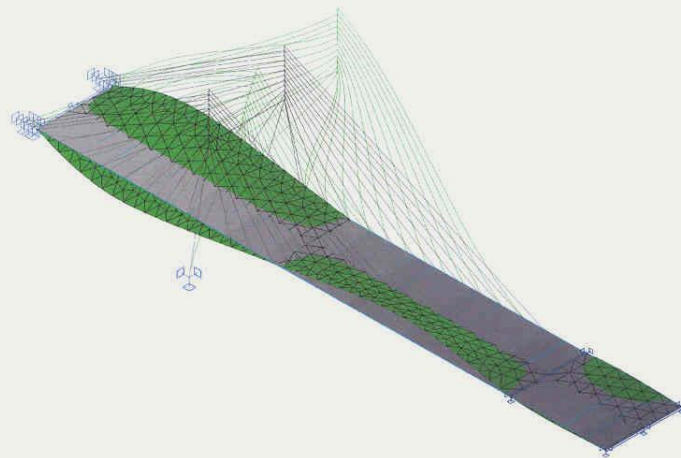


4. Vlastní tvar - vlastní frekvence $f_4 = 1,549$ Hz

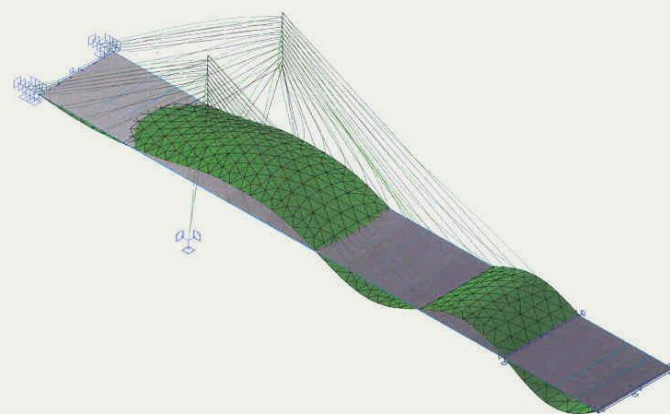


6.5 Zavěšený most

5. Vlastní tvar - vlastní frekvence $f_5 = 1,685$ Hz

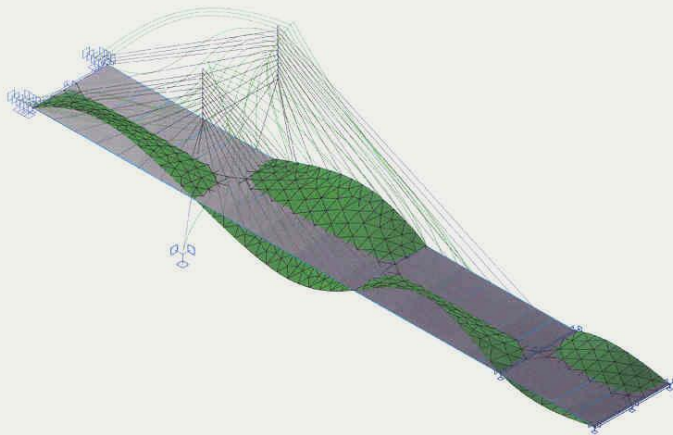


6. Vlastní tvar - vlastní frekvence $f_6 = 1,921$ Hz

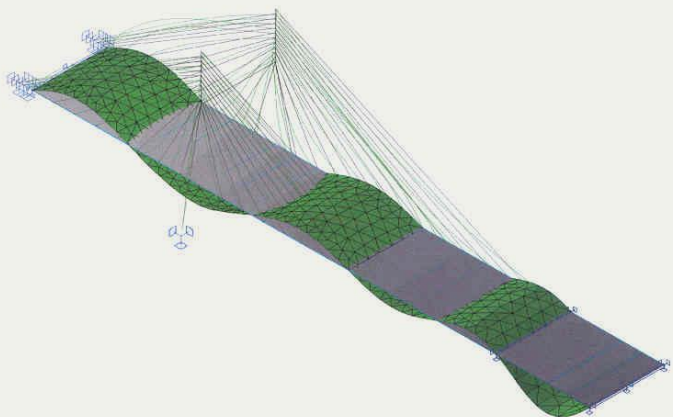


6. Příklady

7. Vlastní tvar - vlastní frekvence $f_7 = 2,153$ Hz

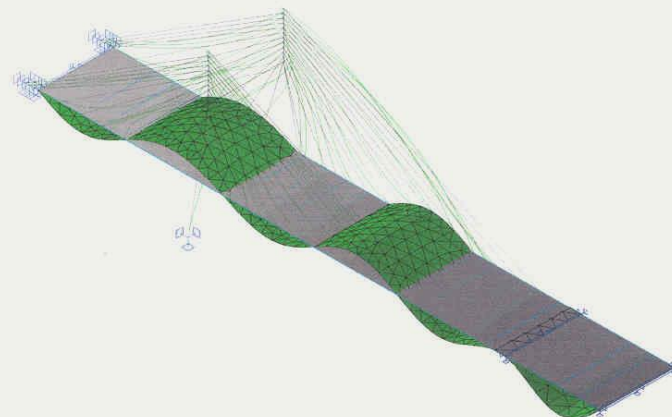


8. Vlastní tvar - vlastní frekvence $f_8 = 2,186$ Hz

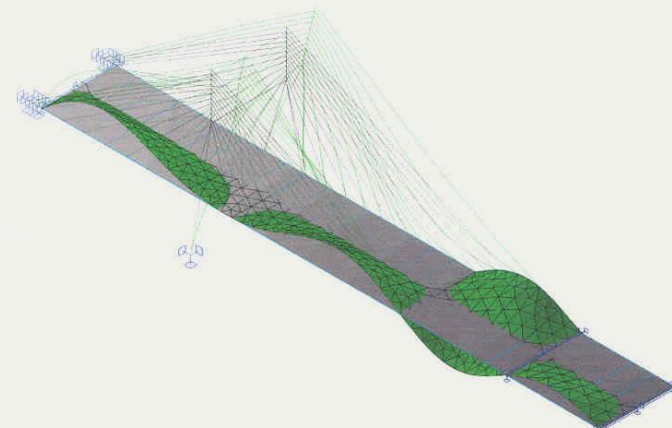


6.5 Zavěšený most

9. Vlastní tvar - vlastní frekvence $f_9 = 2,522$ Hz

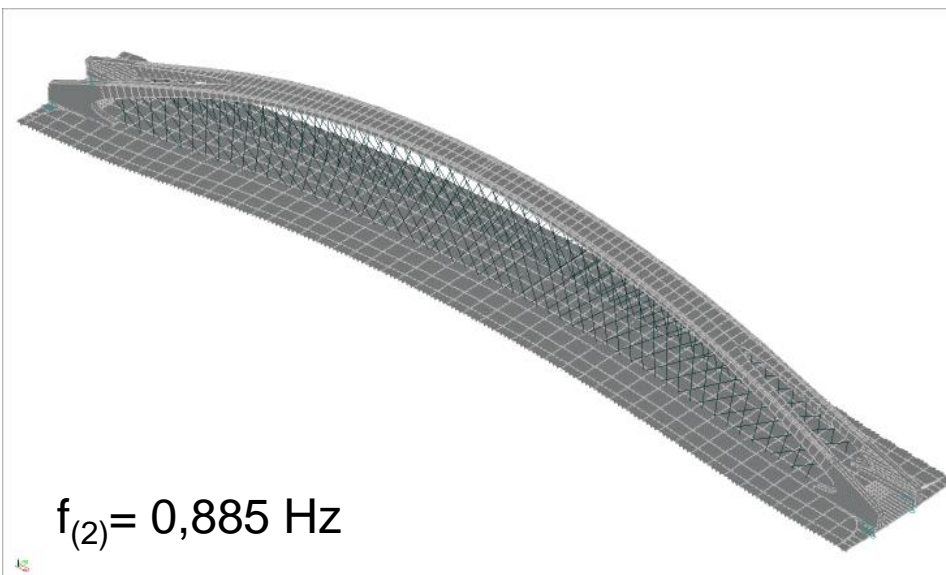
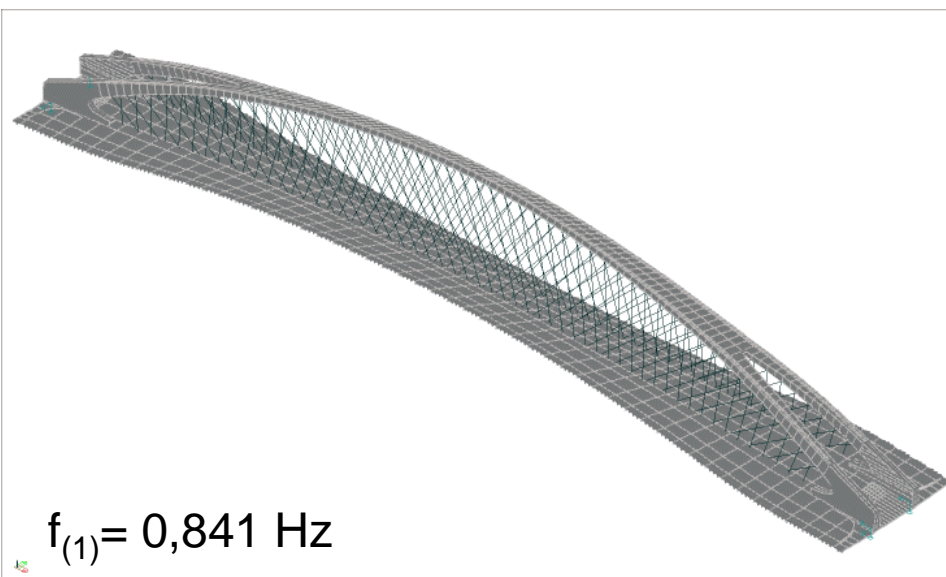


10. Vlastní tvar - vlastní frekvence $f_{10} = 2,763$ Hz



6. Příklady

6.6 Trojský most



6. Příklady

6.6 Trojský most

