Obecné řešení diferenciální rovnice:

1) Aperiodický děj

$$3y'' + 4y' + y = 3u(t)$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Funkce $u(t)$ je v našem případě jednotkový skok.

Obecné řešení: $\varphi(t) = \varphi_h(t) + \varphi_p(t)$

Charakteristický polynom: $3\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$

Kořeny polynomu: $\lambda_1 = -\frac{1}{3} \quad \lambda_2 = -1$

Homogenní řešení: $\varphi_h(t) = c_1 e^{-\frac{1}{3}t} + c_2 e^{-t}$

Obecný tvar speciální pravé strany: $e^{at}(p_1(t)\cos(bt) + p_2 \sin(bt))$

Pravá strana v našem případě: $e^{0t}(p_1(t)\cos(0t) + 0\sin(0t))$

Obecné řešení pravé strany: $\varphi_p(t) = e^{at} t^k (q_1(t)\cos(bt) + q_2 \sin(bt))$

Komplexní číslo $\lambda = a + \mathrm{i}b$ není v našem případě kořenem charakteristického polynomu a koeficient k je v našem případě roven nule.

Řešení pravé strany: $\varphi_p(t) = e^{0t} t^0 (q_1(t)\cos(0t) + 0\sin(0t))$

Polynom $q_1(t)$ je nultého řádu $\varphi_p(t) = q_1(t) = D$

$$\varphi_p{}'(t) = \varphi_p{}''(t) = 0$$

Dosazení do první rovnice: $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + D = 3$

$$\varphi_p(t) = D = 3$$

Výsledný tvar řešení: $y(t) = c_1 e^{-\frac{1}{3}t} + c_2 e^{-t} + 3$

Určení konstant c_1 a c_2: $y(0) = c_1 + c_2 + 3 = 0$

$$y'(t) = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{1}{3}t} + c_2(-1)e^{-t}$$

$$y'(0) = -\frac{1}{3}c_1 - c_2 = 0$$

Z toho $c_1 = -\frac{9}{2} \quad c_2 = \frac{3}{2}$

Výsledná rovnice pro $y(t)$: $y(t) = -\frac{9}{2}e^{-\frac{1}{3}t} + \frac{3}{2}e^{-t} + 3$

2) Kmitavý děj

$$3y'' + 4y' + 10y = 3u(t)$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Funkce $u(t)$ je v našem případě jednotkový skok.

Obecné řešení: $\varphi(t) = \varphi_h(t) + \varphi_p(t)$

Charakteristický polynom: $3\lambda^2 + 4\lambda + 10 = 0$

Kořeny polynomu: $\lambda_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{26}}{3}\mathrm{i}$

Homogenní řešení: $\varphi_p(t) = e^{-\frac{2}{3}t}\left(\mathrm{c}_1\cos\left(\frac{\sqrt{26}}{3}t\right) + \mathrm{c}_2\sin\left(\frac{\sqrt{26}}{3}t\right)\right)$

Obecný tvar speciální pravé strany: $e^{at}(p_1(t)\cos(bt) + p_2\sin(bt))$

Pravá strana v našem případě: $e^{0t}(p_1(t)\cos(0t) + 0\sin(0t))$

Obecné řešení pravé strany: $\varphi_p(t) = e^{at}t^k(q_1(t)\cos(bt) + q_2\sin(bt))$

Komplexní číslo $\lambda = a + \mathrm{i}b$ není v našem případě kořenem charakteristického polynomu a koeficient k je v našem případě roven nule.

Řešení pravé strany: $\varphi_p(t) = e^{0t}t^0(q_1(t)\cos(0t) + 0\sin(0t))$

Polynom $q_1(t)$ je nultého řádu $\varphi_p(t) = q_1(t) = D$

$$\varphi_p{}'(t) = \varphi_p{}''(t) = 0$$

Dosazení do první rovnice: $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 10 \cdot D = 3$

$$\varphi_p(t) = D = \frac{3}{10}$$

Výsledný tvar řešení: $y(t) = e^{-\frac{2}{3}t}\left(\mathrm{c}_1\cos\left(\frac{\sqrt{26}}{3}t\right) + \mathrm{c}_2\sin\left(\frac{\sqrt{26}}{3}t\right)\right) + \frac{3}{10}$

Určení konstant c_1 a c_2: $y(0) = c_1 + \frac{3}{10} = 0$

$$y'(t) = e^{-\frac{2}{3}t}\left(-\frac{2}{3}\right)\mathrm{c}_1\cos\left(\frac{\sqrt{26}}{3}t\right) - e^{-\frac{2}{3}t}\mathrm{c}_1\sin\left(\frac{\sqrt{26}}{3}t\right)\frac{\sqrt{26}}{3} +$$

$$+e^{-\frac{2}{3}t}\left(-\frac{2}{3}\right)\mathrm{c}_2\sin\left(\frac{\sqrt{26}}{3}t\right) + e^{-\frac{2}{3}t}\mathrm{c}_2\cos\left(\frac{\sqrt{26}}{3}t\right)\frac{\sqrt{26}}{3}$$

$$y'(0) = -\frac{2}{3}\mathrm{c}_1 + \frac{\sqrt{26}}{3}\mathrm{c}_2 = 0$$

Z toho $c_1 = -\frac{3}{10} \quad c_2 = -\frac{3}{5\sqrt{26}} = -\frac{3\sqrt{26}}{130}$

Výsledná rovnice pro $y(t)$: $y(t) = e^{-\frac{2}{3}t}\left(-\frac{3}{10}\cos\left(\frac{\sqrt{26}}{3}t\right) - \frac{3\sqrt{26}}{130}\sin\left(\frac{\sqrt{26}}{3}t\right)\right) + \frac{3}{10}$