期望值

2024年1月15日 9:41

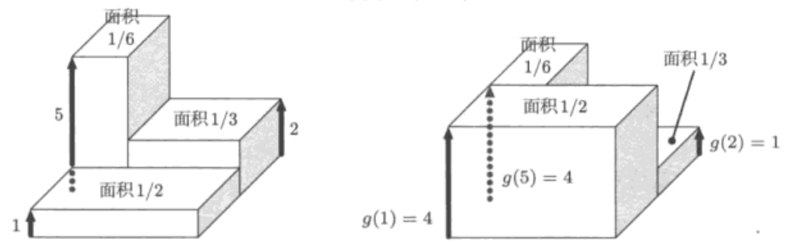
期望值的定义

$$\mathrm{E}[X] = \sum_k k\mathrm{P}(X = k)$$
$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_k g(k)\mathrm{P}(X = k) \quad (g\text{表示某种函数})$$

前者表示的正是式 3.1 的计算方式，后者也非常直观，其含义如下。

对于 Ω 上的各点 ω，以 $g(X(\omega))$ 为高作图，得到的块状体的体积就是期望值 $\mathrm{E}[g(X)]$。

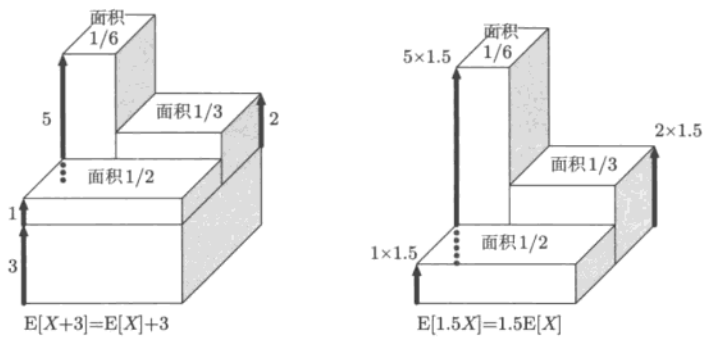
例：$g(x) = (x-3)^2$



期望值的性质

$\mathrm{E}[X + c] = \mathrm{E}[X] + c$ 全国的高度同时增加 3 米后，体积也会增加 3（立方米）

$\mathrm{E}[cX] = c\mathrm{E}[X]$ 全国的高度同时提高至原来的 1.5 倍后，体积也是原来的 1.5 倍



类似地，我们从该图不难看出，对于随机变量 X 与 Y，和的期望值等于期望值之和。

$$\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$$

对于常量 c 的期望值 $\mathrm{E}[c]$，我们可以将其理解为“值为 c 的概率为 1 的随机变量”（参见 P20 脚注①）的期望值。于是显然 $\mathrm{E}[c] = c$。

如果X和Y独立

同理可知，除了这种情况，下面的式子同样成立。

如果 X 与 Y 独立，则 $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$

方差和标准差

2024年1月15日　　9:50

方差的定义

方差即“期望值离散程度”的期望值

设随机变量 X 的期望值 $\mathrm{E}[X]=\mu$。习惯上，随机值 X 以大写字母表示，它的期望值 μ 是一个定值，因此用小写字母表示。

由于 X 是一个随机变量，因此即使它的期望值为 μ，也不表示它的值就一定等于 μ。为此，我们需要计算它的实际取值 x 与 μ 的差距。测量（或者说定义这种偏差）的方式有很多。$|x-\mu|$ 可能是最为直观的方法，但落实到具体计算时，绝对值的存在会带来诸多不便（有时问题不得不分情况讨论，或是由于对应的曲线包含折角而无法微分等）。于是，人们通常使用偏差的平方 $(x-\mu)^2$ 而非绝对值来解决这个问题。

- 如果 X 的取值正巧为 μ，$(x-\mu)^2=0$
- 否则 $(x-\mu)^2>0$
- 且 x 与 μ 的偏差越大，$(x-\mu)^2$ 的值也越大。

这些性质非常符合离散程度的定义。

在确定了标准之后，我们就可以以此测量具体的离散程度。不过，由于 X 是一个随机值，直接计算 $(X-\mu)^2$ 得到的也将是一个随机值，而我们希望得到的是一种数值固定的指标，因此需要进一步计算它的期望值 $\mathrm{E}[(X-\mu)^2]$，来消除其中的随机性。用这种方式得到的“离散程度的期望值”称为方差（variance），记为 $\mathrm{V}[X]$ 或 $\mathrm{Var}[X]$。

$$\mathrm{V}[X]\equiv\mathrm{E}[(X-\mu)^2]\qquad \text{其中 } \mu\equiv\mathrm{E}[X]$$

再多强调一次，X 是随机值，$\mathrm{E}[X]$ 与 $\mathrm{V}[X]$ 是固定值。请读者明确区分两者。

根据定义，方差必然非负。

$$\mathrm{V}[X]\geqslant 0$$

这是因为 $\mathrm{E}[\cdots]$ 中的 $(X-\mu)^2\geqslant 0$ 始终成立。

标准差的定义

请读者再回忆一下方差的定义。

$$\mathrm{E}[X] \equiv \mathrm{E}[(X-\mu)^2] \qquad \text{其中 } \mu \equiv \mathrm{E}[X]$$

需要注意的是，该式使用的是随机变量 X 与 μ 的差的平方。例如，假设 X 表示飞行距离 $[m]$，方差 $\mathrm{V}[X]$ 表示的就是距离之差的平方的期望值 $[m^2]$。如果表示的是长度，方差 $\mathrm{V}[X]$ 表示的就不是长度，而是长度的平方。两者无法直接比较的原因正在于此。

① 这是个有问题的转盘，它的取值概率并不均等。大部分值都在50附近，很少出现大幅偏差。

我们可以通过平方根运算将它还原成长度。诸如此类的方差的平方根称为标准差（standard deviation），通常记为 σ 或 s ①。

$$\sigma \equiv \sqrt{\mathrm{V}[X]}$$

在统计学相关图书中"记方差为 σ^2"的表述十分常见，于是标准差的记法也沿用了这一习惯。

如果 X 表示长度，其方差就表示长度的平方，标准差则同样表示长度。例如，之前图3.6中纵轴的信息其实没有价值。长度与长度的平方是不同的单位，含义也完全不同，无法放到一起比较。标准差就不存在这个问题，可以在同一根轴上比较。期望值 μ 与 $\mu \pm \sigma$ 的示

如果 X 表示长度，其方差就表示长度的平方，标准差则同样表示长度。例如，之前图3.6中纵轴的信息其实没有价值。长度与长度的平方是不同的单位，含义也完全不同，无法放到一起比较。标准差就不存在这个问题，可以在同一根轴上比较。期望值 μ 与 $\mu \pm \sigma$ 的示意图如图3.7所示。通过该图中的标准差 σ，我们就可以大致了解到数值的离散程度。

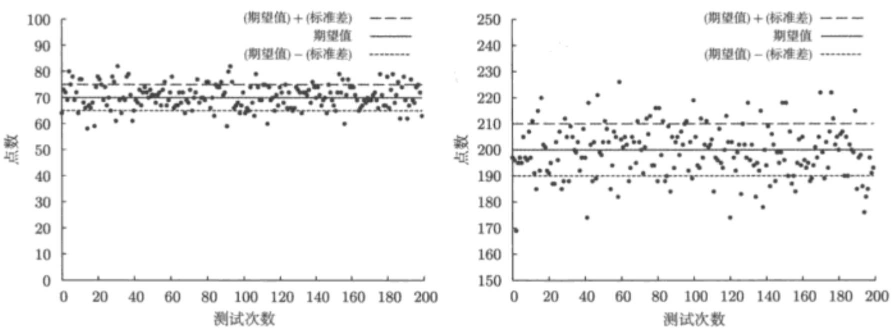


图3.7 转盘的点数、期望值与标准差。图中，每次转动的点数以圆点表示，期望值 μ 及 $\mu \pm \sigma$ 以横线表示。左侧是方差为25的转盘（标准差 $\sigma=\sqrt{25}=5$），右侧是方差为100的转盘（标准差 $\sigma=\sqrt{100}=10$）

常量的加法、乘法及标准化

2024年1月15日　10:07

接下来，我们将讲解方差与标准差的性质。与期望值一样，我们首先来看一下它们的计算。请读者考虑随机变量 X 与某一常量 c 相加及相乘的情况。

$$Y \equiv X + c$$
$$Z \equiv cX$$

Y 与 Z 依然是随机变量。它们的方差如下。

$\mathrm{V}[Y] = \mathrm{V}[X + c] = \mathrm{V}[X]$ ……增加常量 c 后，方差不变

$\mathrm{V}[Z] = \mathrm{V}[cX] = c^2\mathrm{V}[X]$ ……乘以常量 c 后，方差将变为原来的 c^2 倍

换言之，它们的标准差有以下性质

- 在加上常量 c 之后，标准差不变
- 在乘上常量 c 之后，标准差扩大至原来的 $|c|$ 倍①

① $-3X$ 的标准差是 X 的标准差的 $\sqrt{(-3)^2}$ 倍，即 3 倍，而不是 (-3) 倍。

答案

设 $\mathrm{E}[X] \equiv \mu$，我们将得到 $\mathrm{E}[Y] = \mu + c$ 与 $\mathrm{E}[Z] = c\mu$。于是有以下结果。

$$\mathrm{V}[Y] = \mathrm{E}[\{Y - (\mu + c)\}^2] = \mathrm{E}[\{(X + c) - (\mu + c)\}^2] = \mathrm{E}[(X - \mu)^2] = \mathrm{V}[X]$$
$$\mathrm{V}[Z] = \mathrm{E}[(Z - c\mu)^2] = \mathrm{E}[(cX - c\mu)^2] = \mathrm{E}[c^2(X - \mu)^2] = c^2\mathrm{E}[(X - \mu)^2] = c^2\mathrm{V}[X]$$

根据上述性质，我们能够通过转换随机变量 X 来获得需要的期望值与方差。现设 $\mathrm{E}[X] = \mu$，$\mathrm{V}[X] = \sigma^2 > 0$，此时只要令 $W \equiv \frac{X-\mu}{\sigma}$，就能得到 $\mathrm{E}[W] = 0$ 且 $\mathrm{V}[W] = 1$。这种将期望值化为0，方差化为1的转换处理称为标准化（或称归一化）。本书将在4.6.2节、4.6.3节、5.1.3节及8.1.2节中进一步讨论标准化。作为惯例，在对收集到的不同类型的数据进行正式处理前，我们通常需要对它们分别做标准化处理。例如，我们会在比较难易度不同的考试的成绩时引入偏差值，这本质上也是一种标准化。

练习题 3.8

试证明上述转换可以得到 $\mathrm{E}[W] = 0$ 且 $\mathrm{V}[W] = 1$。

答案

$$\mathrm{E}[W] = \mathrm{E}\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{\mathrm{E}[X - \mu]}{\sigma} = \frac{\mathrm{E}[X] - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$$
$$\mathrm{V}[W] = \mathrm{V}\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{\mathrm{V}[X - \mu]}{\sigma^2} = \frac{\mathrm{V}[X]}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

各项独立时，和的方差等于方差的和

2024年1月15日　　10:32

3.4.5　各项独立时，和的方差等于方差的和

如果 X 与 Y 独立，则 $\mathrm{V}[X+Y]=\mathrm{V}[X]+\mathrm{V}[Y]$ 成立。

我们可以借助之前学习的期望值的性质来证明这点，如下所示。

设 $\mathrm{E}[X]=\mu$，$\mathrm{E}[Y]=\nu$[①]：

$$\begin{aligned}\mathrm{V}[X+Y]&=\mathrm{E}\left[\Big((X+Y)-(\mu+\nu)\Big)^2\right]=\mathrm{E}\left[\Big((X-\mu)+(Y-\nu)\Big)^2\right]\\&=\mathrm{E}\left[(X-\mu)^2+(Y-\nu)^2+2(X-\mu)(Y-\nu)\right]\\&=\mathrm{E}[(X-\mu)^2]+\mathrm{E}[(Y-\nu)^2]+\mathrm{E}[2(X-\mu)(Y-\nu)]\\&=\mathrm{V}[X]+\mathrm{V}[Y]+2\mathrm{E}[(X-\mu)(Y-\nu)]\end{aligned}$$

由于此处 X 与 Y 独立，因此 $X-\mu$ 与 $Y-\nu$ 也独立（参见 2.5.3 节）。又由于递等式最后一行的后半部分值为 0，因此 $\mathrm{V}[X+Y]=\mathrm{V}[X]+\mathrm{V}[Y]$ 成立。

$$2\mathrm{E}[(X-\mu)(Y-\nu)]=2\mathrm{E}[X-\mu]\mathrm{E}[Y-\nu]=2(\mu-\mu)(\nu-\nu)=0 \tag{3.2}$$

对于多个随机变量的情况，结论依然相同。例如，如果 X、Y 与 Z 独立，则 $\mathrm{V}[X+Y+Z]=\mathrm{V}[X]+\mathrm{V}[Y]+\mathrm{V}[Z]$ 成立。

求二项分布Bn(n,p)的方差

练习题 3.10

试求二项分布 $\mathrm{Bn}(n,p)$ 的方差。

答案

假设我们有独立的随机变量 $Z_1,\cdots,Z_n$，它们取值为 1 的概率为 p，取值为 0 的概率 $q\equiv 1-p$。这些随机变量之和 $X\equiv Z_1+\cdots+Z_n$，并遵从二项分布 $\mathrm{Bn}(n,p)$（参见 3.2 节）。我们可以根据独立性得到它的方差。

$$\mathrm{V}[X]=\mathrm{V}[Z_1]+\cdots+\mathrm{V}[Z_n]$$

且根据定义，我们可以像下面这样计算个别的方差。

$$\mathrm{V}[Z_t]=\mathrm{E}[(Z_t-p)^2]=(1-p)^2p+(0-p)^2q=q^2p+p^2q=pq(q+p)=pq,\qquad (t=1,\cdots,n)$$

综上，$\mathrm{Bn}(n,p)$ 的方差 $\mathrm{V}[X]=npq=np(1-p)$。

请读者务必记住上述结论基于独立的前提。如果随机变量不独立，方差就不一定能做简单的加法。举个极端的例子，如果 $Y=X$，方差就无法直接相加。

$$\begin{cases}\mathrm{V}[X+Y]=\mathrm{V}[X+X]=\mathrm{V}[2X]=4\mathrm{V}[X]\\ \mathrm{V}[X]+\mathrm{V}[Y]=\mathrm{V}[X]+\mathrm{V}[X]=2\mathrm{V}[X]\end{cases}$$

其中，E 表示期望，μ 是 Z_t 的均值。

对于伯努利随机变量 Z_t，其取值为 0 或 1，且每次取 1 的概率为 p，取 0 的概率为 q = 1 - p。

因此，Z_t 的均值为 $\mu=p$。

将 $\mu=p$ 带入方差的计算公式中，我们得到：

$V[Z_t]=E[(Z_t-p)^2]$

$=E[Z_t^2-2pZ_t+p^2]$

现在我们要来计算 $E[Z_t^2]$ 和 $E[2pZ_t]$：

对于 $E[Z_t^2]$：

当 $Z_t=1$ 时，$E[Z_t^2]=E[1]=1$

$$\mathrm{E}[X]=\sum_k k\mathrm{P}(X=k)$$

$$\mathrm{E}[g(X)]=\sum_k g(k)\mathrm{P}(X=k)\quad (g\text{ 表示某种函数})$$

前者表示的正是式 3.1 的计算方式，后者也非常直观，其含义如下。

对于 $E[Z_t^2]$:

当 $Z_t=1$ 时，$E[Z_t^2]=E[1]=1$

当 $Z_t=0$ 时，$E[Z_t^2]=E[0]=0$

所以，$E[Z_t^2]=1\times p+0\times q=p$

对于 $E[2pZ_t]$:

当 $Z_t=1$ 时，$E[2pZ_t]=2p\times p=2p^2$

当 $Z_t=0$ 时，$E[2pZ_t]=2p\times q=0$

所以，$E[2pZ_t]=2p^2\times p+0\times q=2p^3$

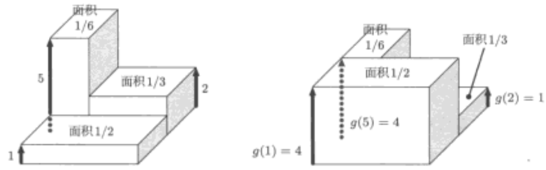
将这些值代入方差的计算公式中，我们得到:

$$\mathrm{E}[g(X)]=\sum_k g(k)\mathrm{P}(X=k)\quad (g\text{表示某种函数})$$

前者表示的正是式3.1的计算方式，后者也非常直观，其含义如下。

对于 Ω 上的各点 ω，以 $g(X(\omega))$ 为高作图，得到的块状体的体积就是期望值 $\mathrm{E}[g(X)]$。

例：$g(x)=(x-3)^2$



将这些值代入方差的计算公式中，我们得到:

$V[Z_t]=E[(Z_t-p)^2]$

$=E[Z_t^2-2pZ_t+p^2]$

$=p-2p^3+p^2$

$=(1-p)^2p+(0-p)^2q$

平方的期望值与方差

2024年1月15日 11:17

3.4.6 平方的期望值与方差

本节中，我们再介绍一条使用起来比较方便的公式。

$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$$

其中，等式右侧的 $\mathrm{E}[X]^2$ 表示 $(\mathrm{E}[X])^2$。这条公式也可以改写为以下形式，便于读者理解。

$$\mathrm{E}[X^2] = \mu^2 + \sigma^2 \qquad 其中\ \mu \equiv \mathrm{E}[X]，\sigma^2 \equiv \mathrm{V}[X]$$

也就是说，X 的平方的期望值等于 X 的期望值的平方加上 X 的方差。请读者注意不要混淆 $\mathrm{E}[X^2]$ 与 $\mathrm{E}[X]^2$，两者并不相同。举个极端的例子，如图 3.12 所示，即使期望值 $\mathrm{E}[X] = 0$，只要方差不为 0，$\mathrm{E}[X^2]$ 就不会取到 0 值①。只要记住这点，就不会将两者混淆。

练习题 3.12

当 $\mathrm{E}[X] = \mu$ 且 $\mathrm{V}[X] = \sigma^2$ 时，试证明对于取值恒定的常量 a，以下等式成立。

$$\mathrm{E}[(X-a)^2] = (\mu - a)^2 + \sigma^2$$

答案

设 $Y \equiv X - \mathrm{a}$，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(X-a)^2] &= \mathrm{E}[Y^2] = \mathrm{E}[Y]^2 + \mathrm{V}[Y] = \mathrm{E}[X-a]^2 + \mathrm{V}[X-a] = (\mathrm{E}[X]-a)^2 + \mathrm{V}[X] \\ &= (\mu - a)^2 + \sigma^2\end{aligned}$$

大数定律

2024年1月15日 16:03

3.5.3 大数定律

我们总结一下前几节得到的结论。对于遵从i.i.d.的随机变量 $X_1, \cdots, X_n$，它们的平均

值 Z 定义如下。

$$Z_n \equiv \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$ （为明确表示这是 n 个随机变量的平均值，我们为 Z 添加了下标）

我们可以进一步计算 Z 的期望值与方差。

$\mathrm{E}[Z_n] = \mu$ ……它的期望值与原来相同

$\mathrm{V}[Z_n] = \frac{\sigma^2}{n}$ ……它的方差是原来的 $\frac{1}{n}$（标准差则是原来的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$）

该平均值的期望值与方差显示，如果可以无限增大，方差 $\mathrm{V}[Z_n]$ 则可以无限减小并趋近于0。

$$\mathrm{V}[Z_n] \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

读者应该还记得，方差为零表示不含随机性。简单来讲，如果随机变量的个数 n 无限增加，它们的平均值将逐渐收敛于 μ。这就是所谓的大数定律 。

3.5.2 平均值的期望值与平均值的方差

接下来，我们将讨论平均值与期望值之间的区别。对于随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，它们的平均值 Z 定义如下 ①。

$$Z \equiv \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是随机值，因此由它们计算得到的 Z 仍然是一个随机值。事实上，在之前的实验中，每次得到的平均值也各不相同。由于平均值仅仅是所有数值之和除以个数后得到的结果，因此自然有以下结论。

- 恒定值的平均值仍然是恒定值
- 随机值的平均值仍然是随机值

另一方面，期望值是通过横向计算不同平行世界而求得的恒定值。对于本例中的随机变量 Z，它的期望值是各个期望值的平均，如下所示。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[Z] &= \mathrm{E}\left[\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right] = \frac{\mathrm{E}[X_1+X_2+\cdots+X_n]}{n} \\ &= \frac{\mathrm{E}[X_1]+\mathrm{E}[X_2]+\cdots+\mathrm{E}[X_n]}{n}\end{aligned}$$

又由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 遵从i.i.d.，因此它们自然都与期望值(设为 μ)相同。于是，我们可以得到随机变量 Z 的期望值。

$$\mathrm{E}[Z] = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

Z 的期望值与每个单独的期望值一致，这也符合我们预期的结果。

既然已经求得了期望值，我们顺便再计算一下 Z 的方差。

$$\mathrm{V}[Z] = \mathrm{V}\left[\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right] = \frac{\mathrm{V}[X_1+X_2+\cdots+X_n]}{n^2} \quad \left(\text{除以}\, n\, \text{后方差为}\frac{1}{n^2}\right)$$

此时，如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立，如下关系成立。

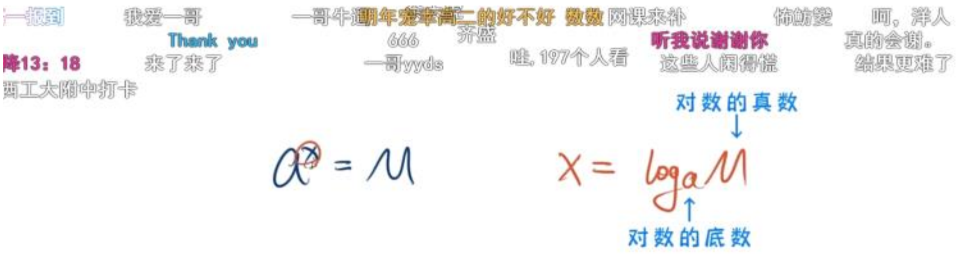
$$\mathrm{V}[Z] = \frac{\mathrm{V}[X_1]+\mathrm{V}[X_2]+\cdots+\mathrm{V}[X_n]}{n^2} \quad (\text{如果独立，和的方差就等于方差的和})$$

进一步讲，当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 遵从i.i.d.时，方差显然相同，于是得到以下结果。

$$\mathrm{V}[Z] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

对数

2024年1月16日 8:59



$$\log_a M + \log_a N = \log_a (MN)$$

$$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

$$\log_a M^n = n\log_a M$$ （推广形式： $\log_{a^m} M^n = \frac{n}{m}\log_a M$ ）

$$a^{\log_a m} = m$$

$c>0$ 且 $c\neq 1$

换底公式：$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$（特别地，当 $c=b$ 时，$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$）

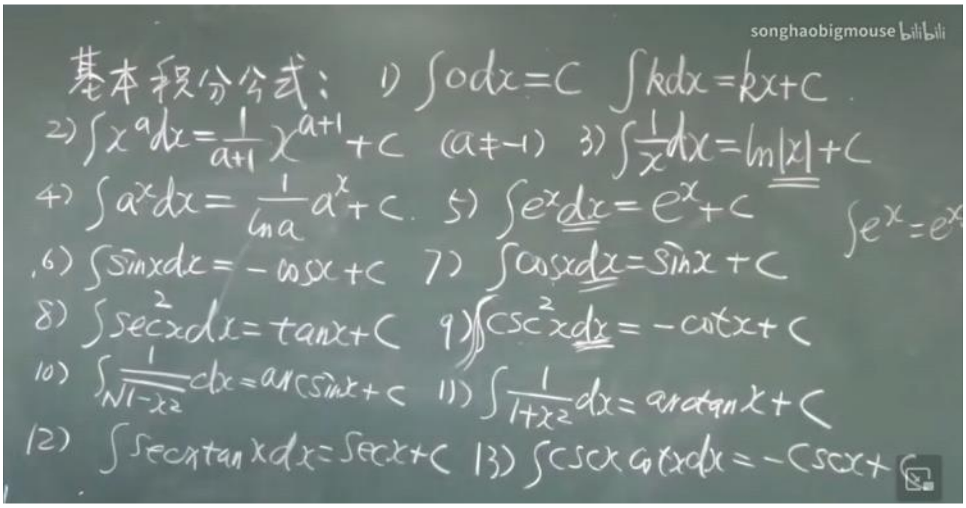
$$\begin{cases} \log_{10} x = \lg x \\ \log_e x = \ln x \end{cases}$$

$= -$

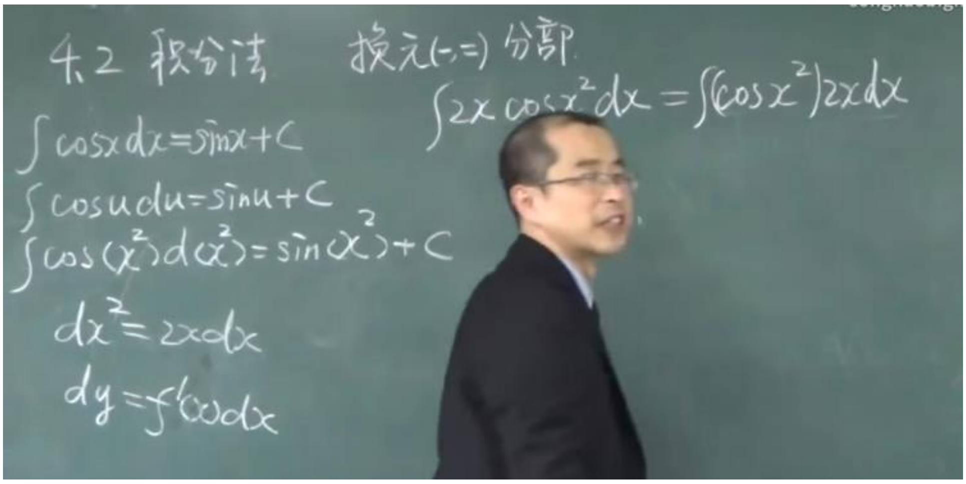
不定积分

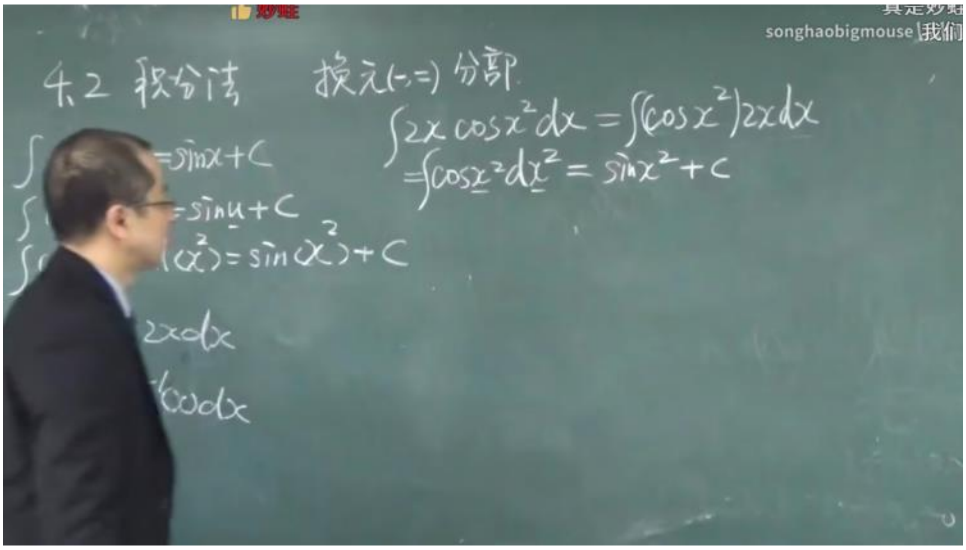
2024年1月18日 16:05

不定积分的基本积分公式



积分法（第一积分换元法）





关键：1.把d前头的某一项挪到d后头2.凑基本积分公式

凑积分积分公式

凑积分法

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x)$$
$$= \int f(u)du = F(u)+C = F(\varphi(x))+C$$

1) $\int 3\cos 3x\,dx = \int \cos(3x)\,d(3x) = \sin(3x)+C$

1) $\int 3\cos 3x\,dx = \int \cos(3x)\,d(3x) = \sin(3x)+C$

2) $\int \frac{1}{3x+2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+2}\,3\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+2}\,d(3x+2)$

$= \frac{1}{3}\ln|3x+2|$

$\int \frac{1}{x}dx$

d里面的项可以任意加减常数

6) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{1}{1+\ln x}\,d(\ln x+1) = \ln|\ln x+1|+C$

6) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{1}{1+\ln x}\,d(\ln x+1) = \ln|\ln x+1|+C$ 凑

7) $\int e^x\sqrt{1-e^x}\,dx = \int -\sqrt{1-e^x}\,d(1-e^x) = -\frac{2}{3}(1-e^x)^{\frac{3}{2}}+C$

9) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{1}{a^2}\,\frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2}$

$\int \frac{1}{1+x^2}dx$

8) $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \tan^3 x\sec^2 x\,dx = \int \tan^3 x\,d(\tan x) = \frac{1}{4}\tan^4 x+C$

9) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{1}{a}\,\frac{dx/a}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

一. 找原函数

$$\boxed{\underline{f(x)} \to \text{找 } F(x)\text{, 使 } F'(x)=f(x)}$$

$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad ✓$$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a) \quad ✓$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

① $\int k\mathrm{d}x = kx + C$（$k$ 为常数）；

② $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$（$\mu \neq -1$）；

③ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$；

④ $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$；

⑤ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$；

⑥ $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

⑦ $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

⑧ $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$；

⑨ $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

⑩ $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；

⑪ $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$；

⑫ $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$；

⑬ $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$；

⑭ $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；

⑮ $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$.

《高等数学轻松学》(第3版) P96
《考研数学这十年》(2024版) P39

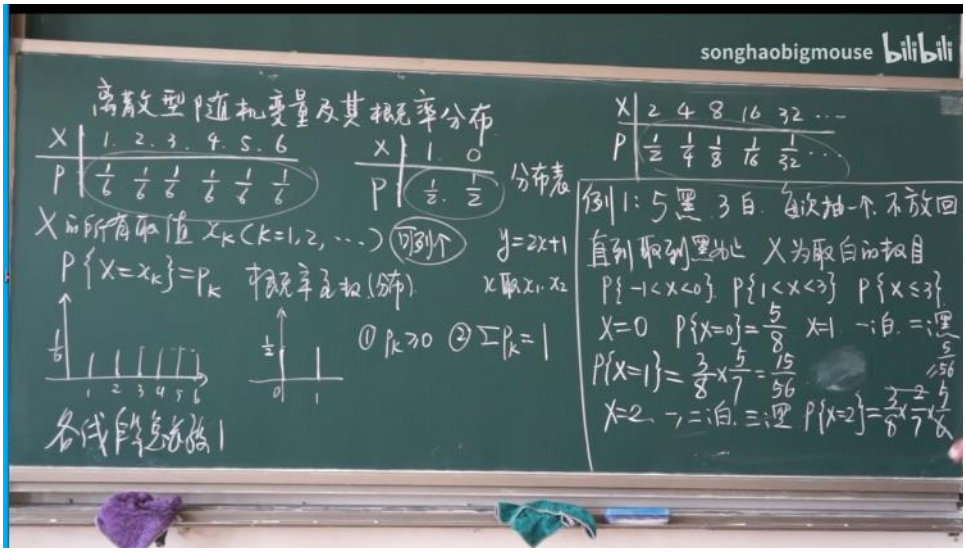
$$\int [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)]dx = k_1\int f(x)dx \pm k_2 \int g(x)dx$$

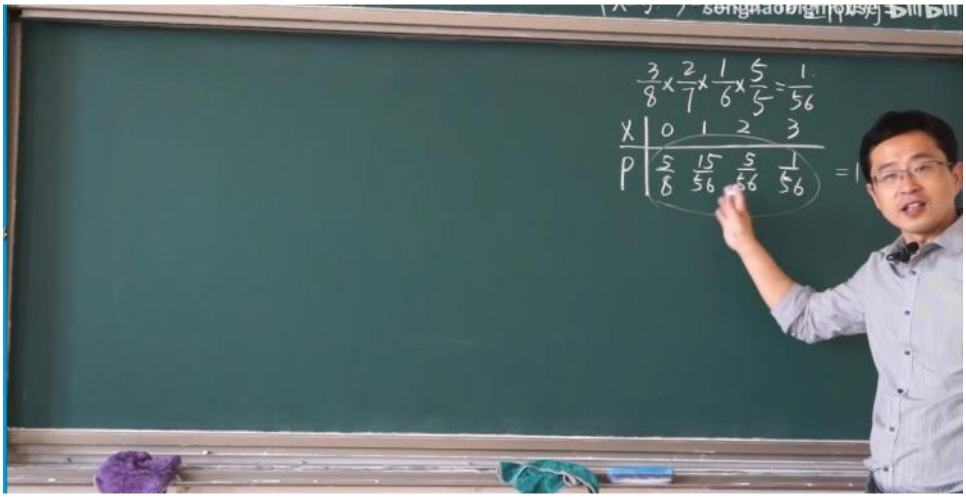
离散型随机变量及其概率分布

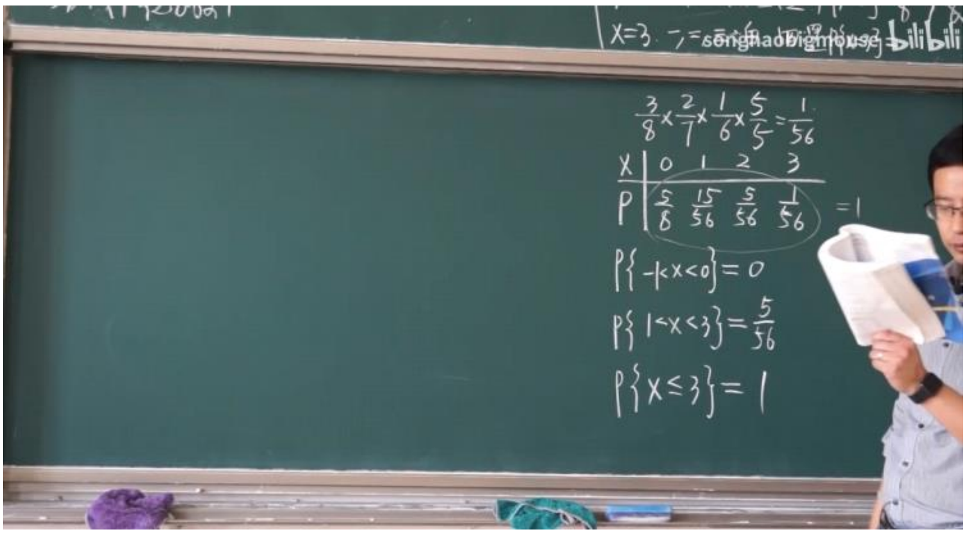
2024年1月16日 15:28

大写X表示变量

小写x表示取值

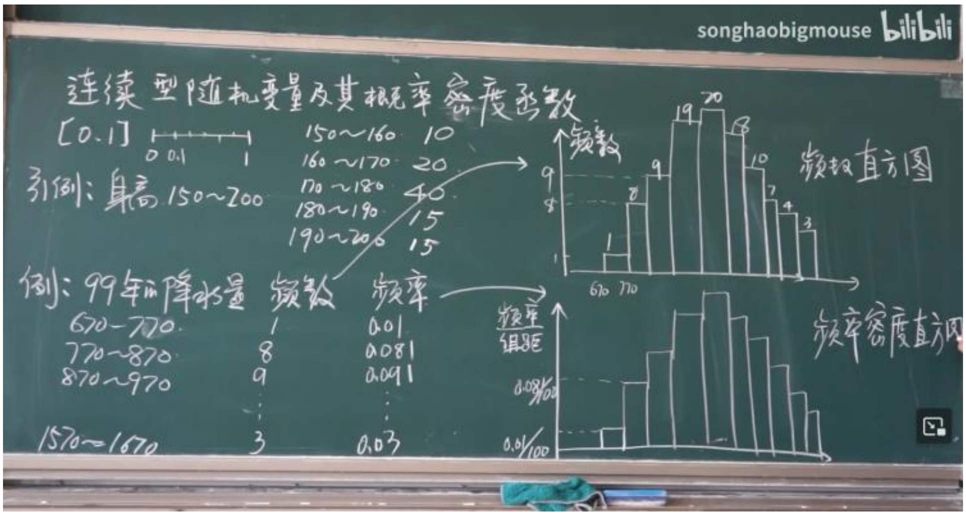






连续型随机变量及其概率密度函数

2024年1月16日　　17:18



频数直方图

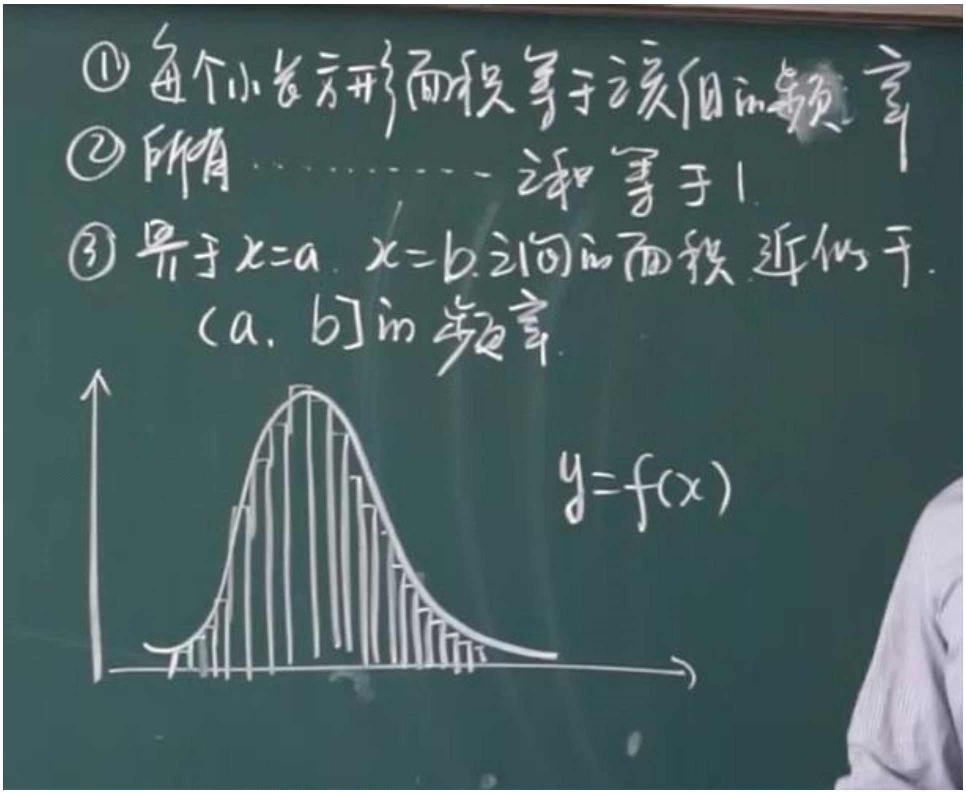
频率密度直方图 纵轴 频率/组距

1.每个小方形的面积等于该组的概率

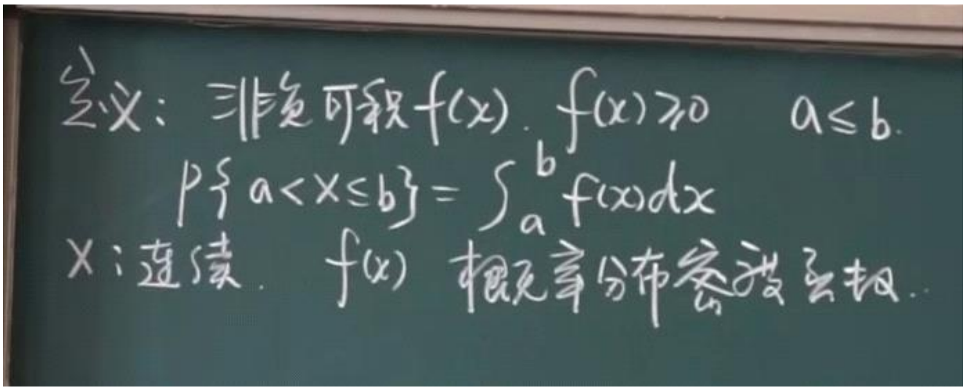
2.所有的小方形面积之和等于1

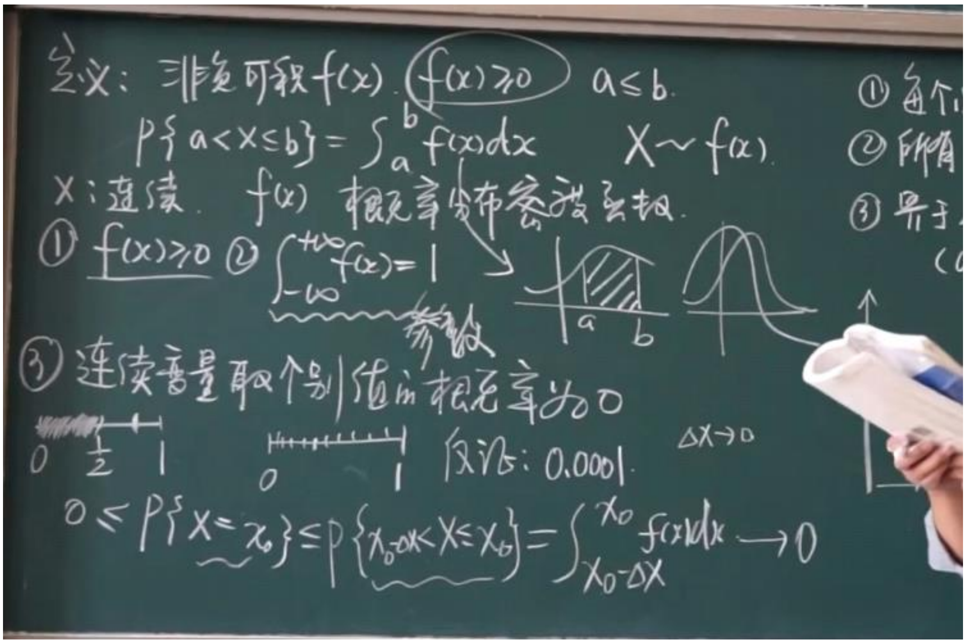
3.介于x=a、x=b之间的面积等于频率

概率分布密度函数

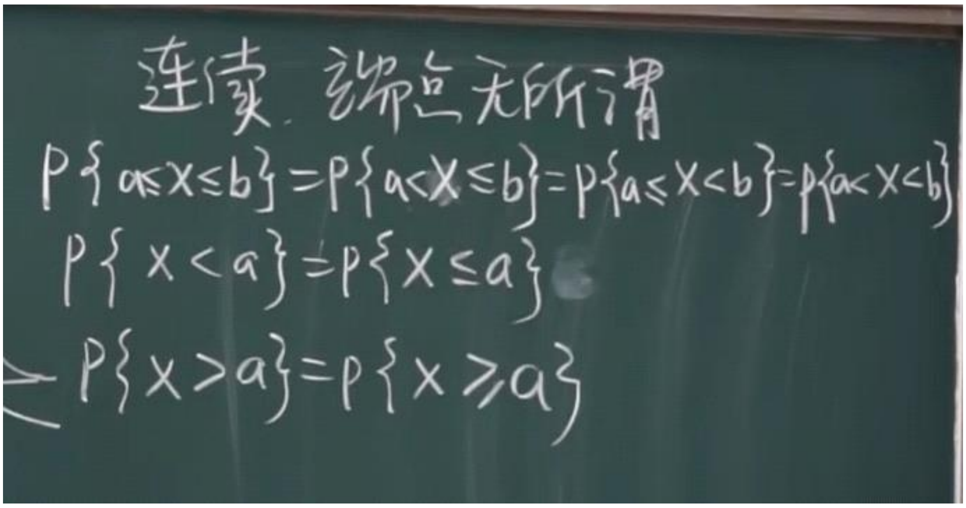


定义非负可积f(x)，f(x)≥0 对于a<=b都有





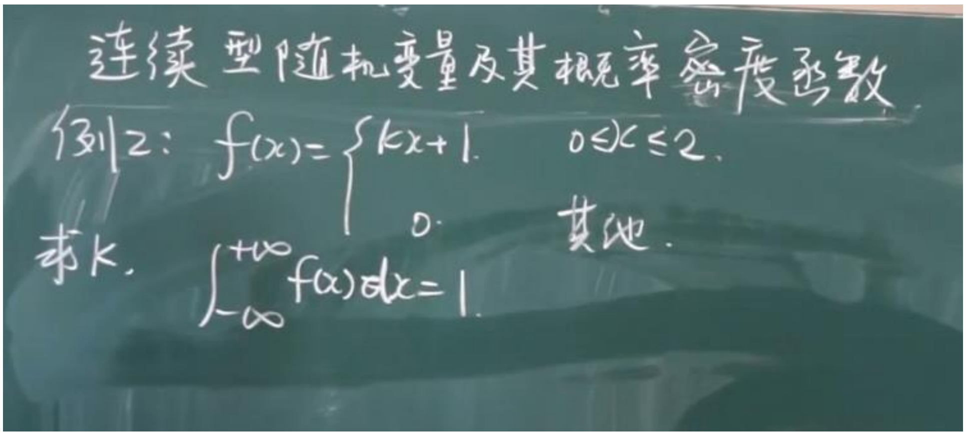
连续型 端点无所谓

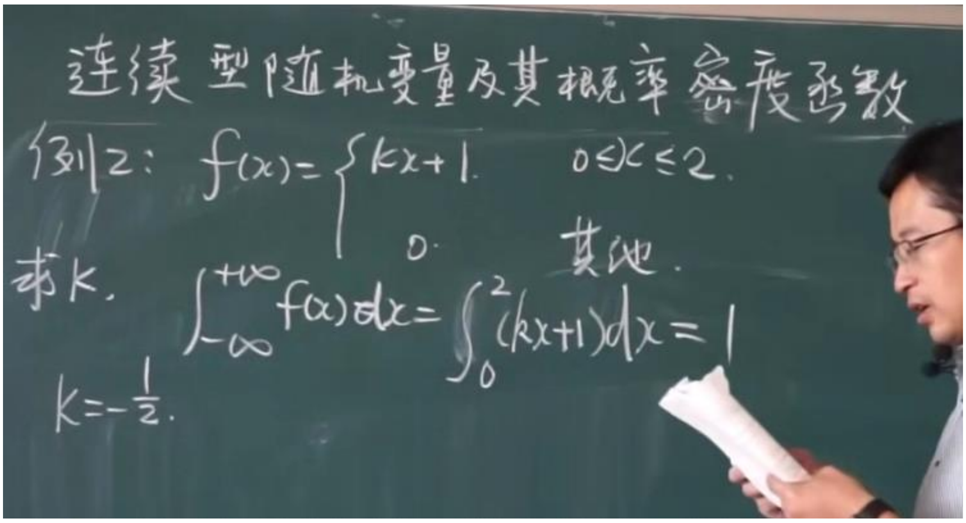


概率为0的事件未必是不可能事件

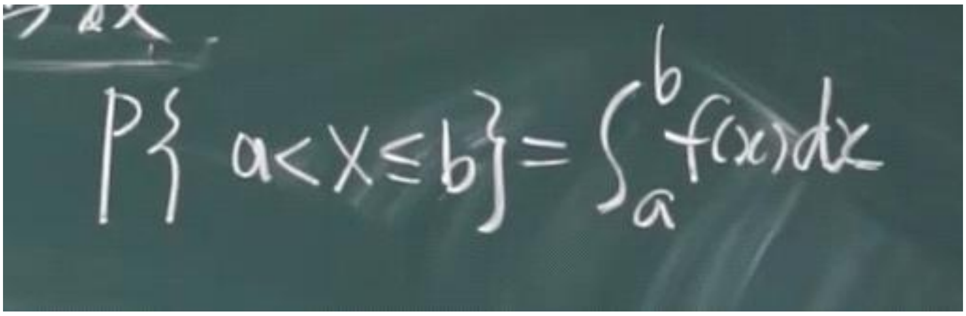
概率为1的事件未必是必然事件

（0，1）开区间 P=1 但是也有可能扔到端点

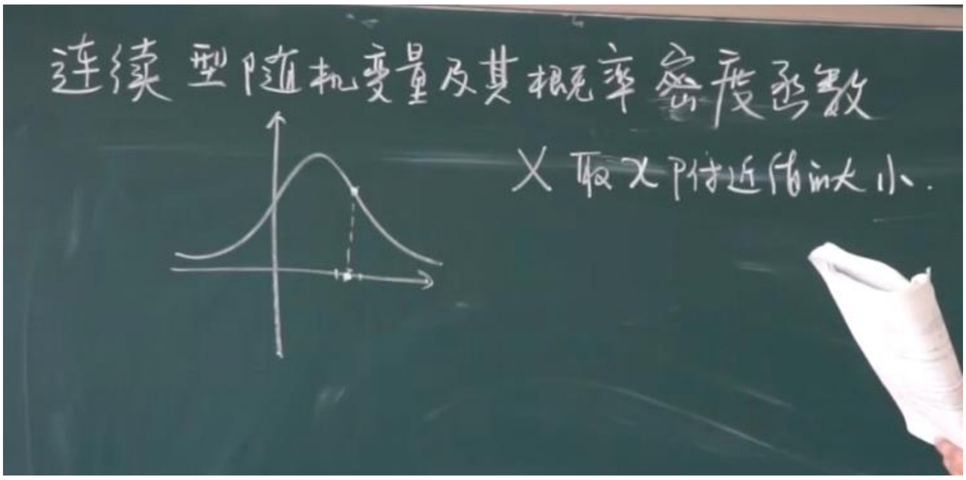


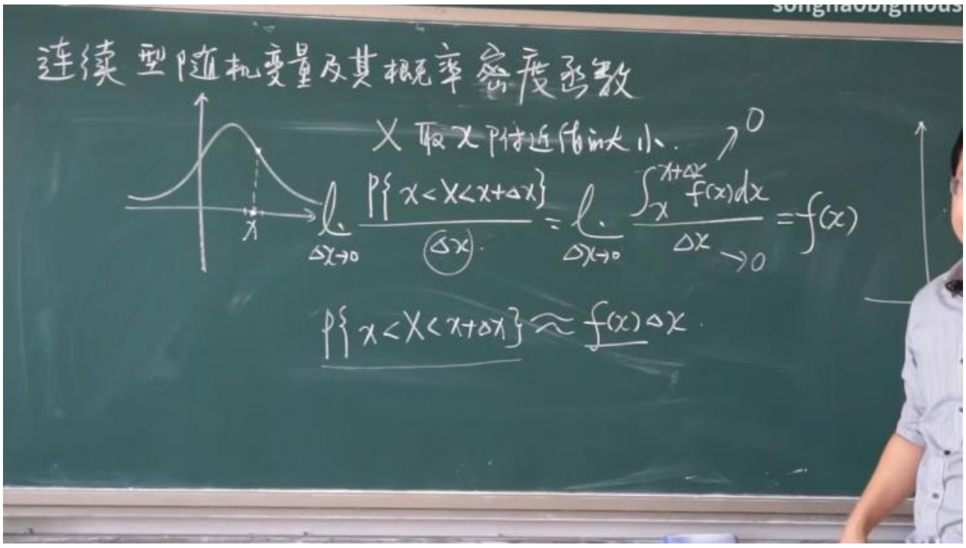


连续型随机变量概率密度函数的原始定义：a到b的概率是从a到b求积分



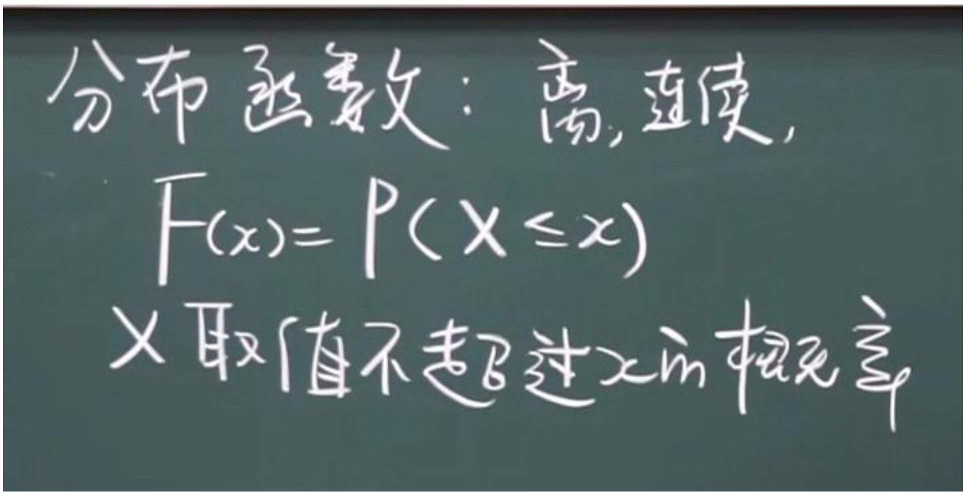
有没有等于号无所谓

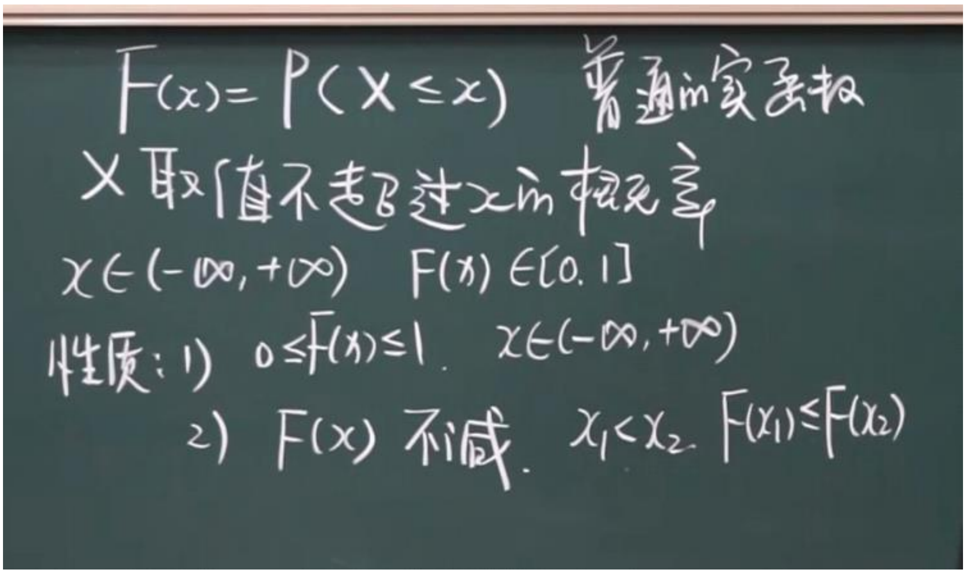



连续型随机变量及其概率密度函数
X 取 x 附近值的大小.
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X < x+\Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x} = f(x)$
$P\{x < X < x+\Delta x\} \approx f(x)\Delta x$

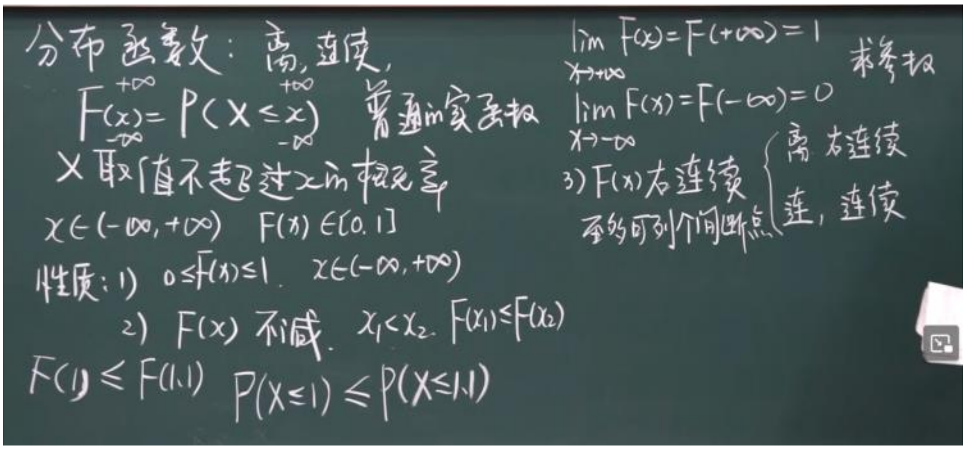
分布函数的定义

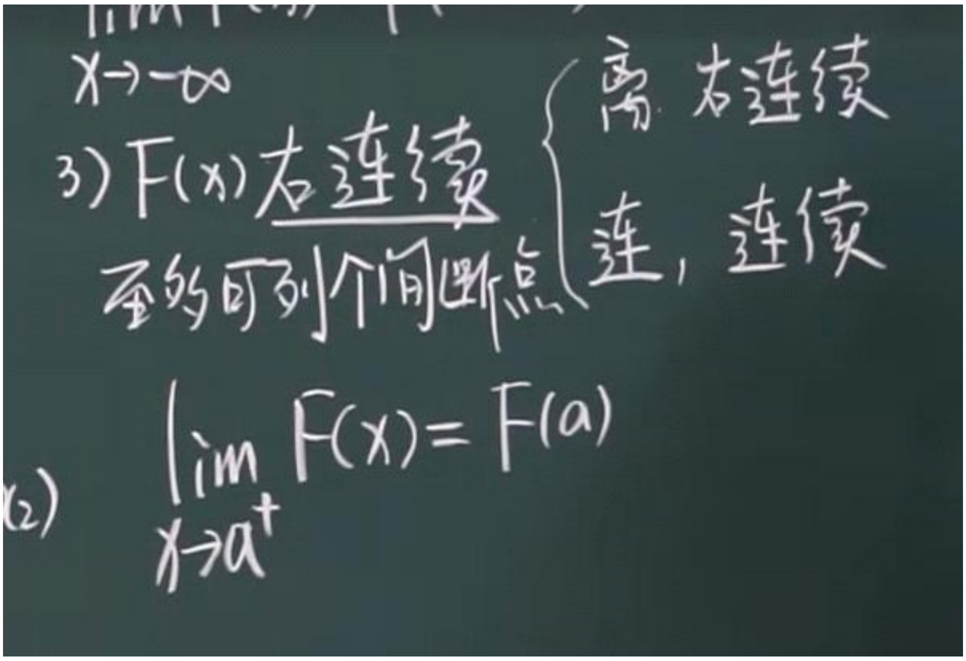
2024年1月16日 19:35



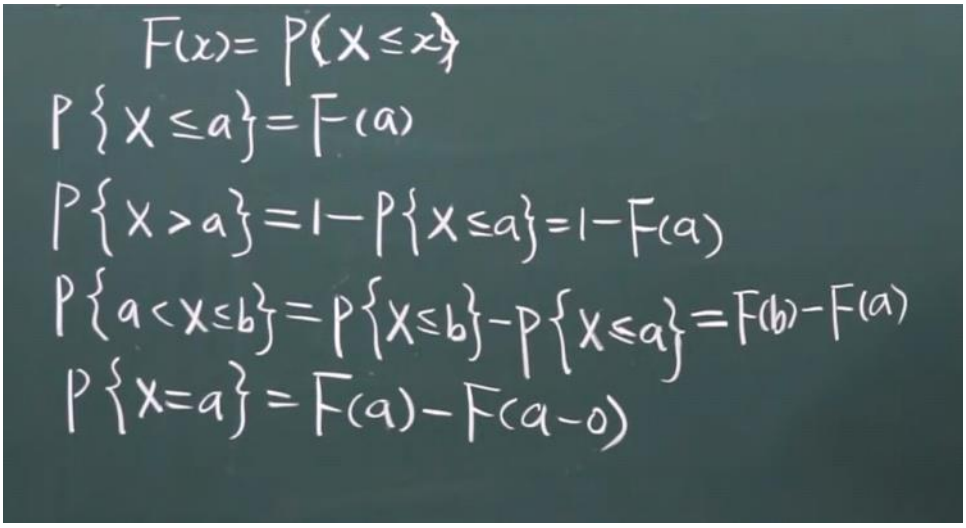


分布函数对离散型、连续型都成立

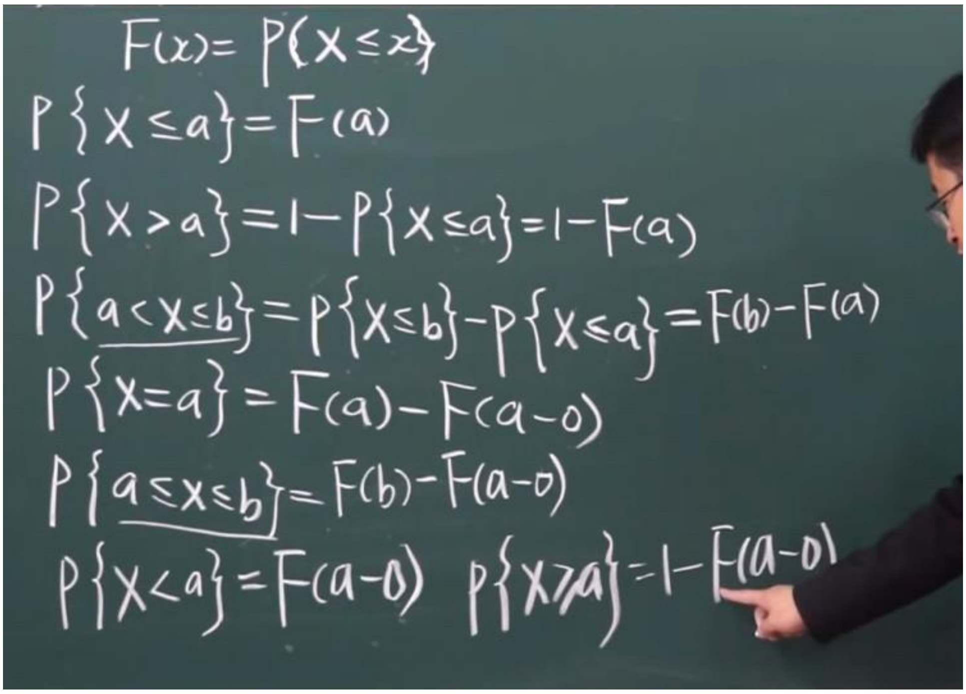




什么是右连续，从右边逼近a，得到F(a)



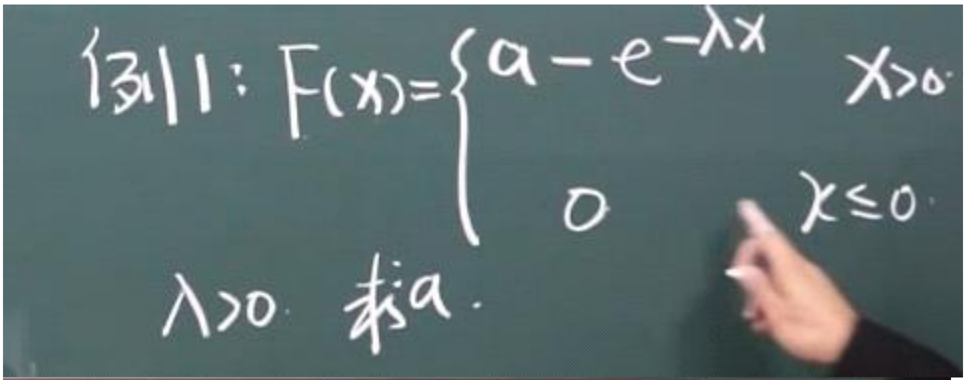
第四条：F(a）是负无穷到a，F（a-0）是逼近a的左极限，相减得到a点的概率

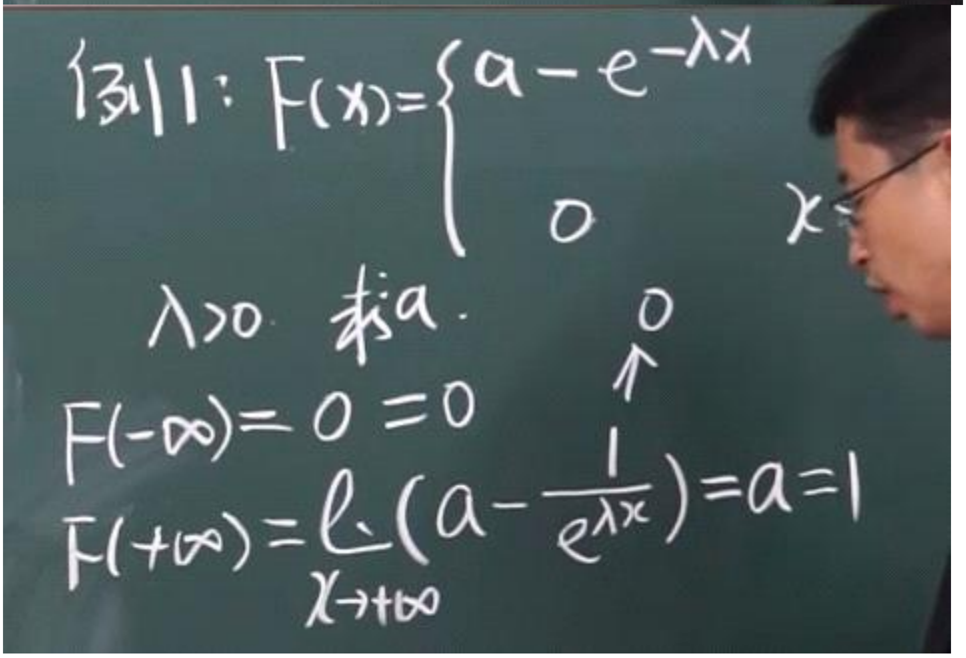


离散型的分布函数

2024年1月17日 14:00

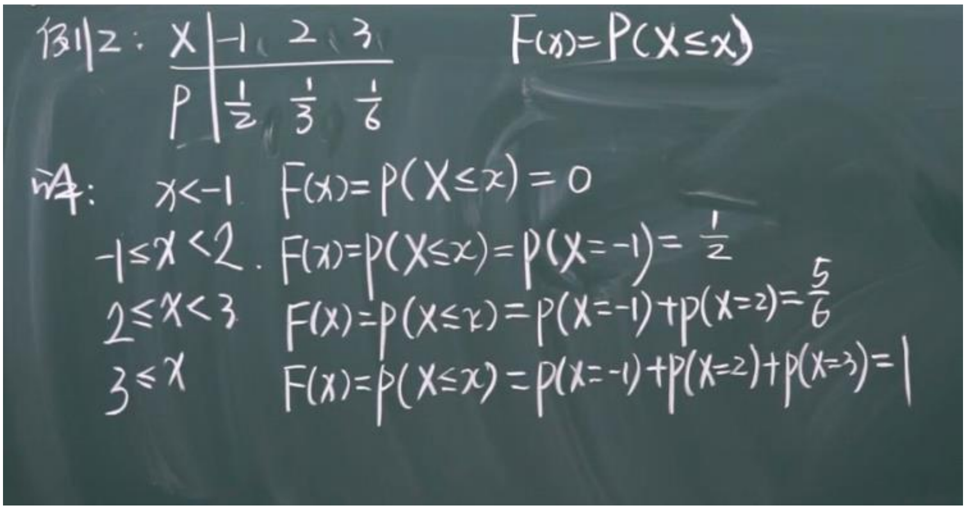
例题1



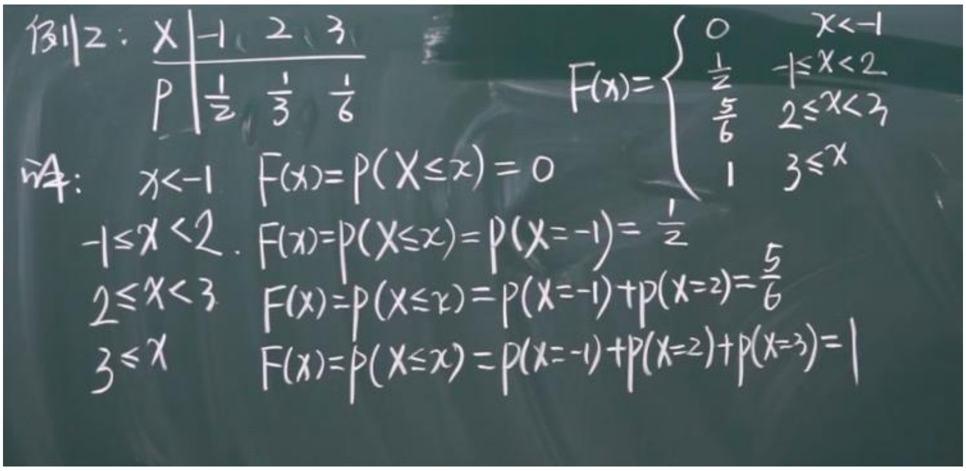


例题2

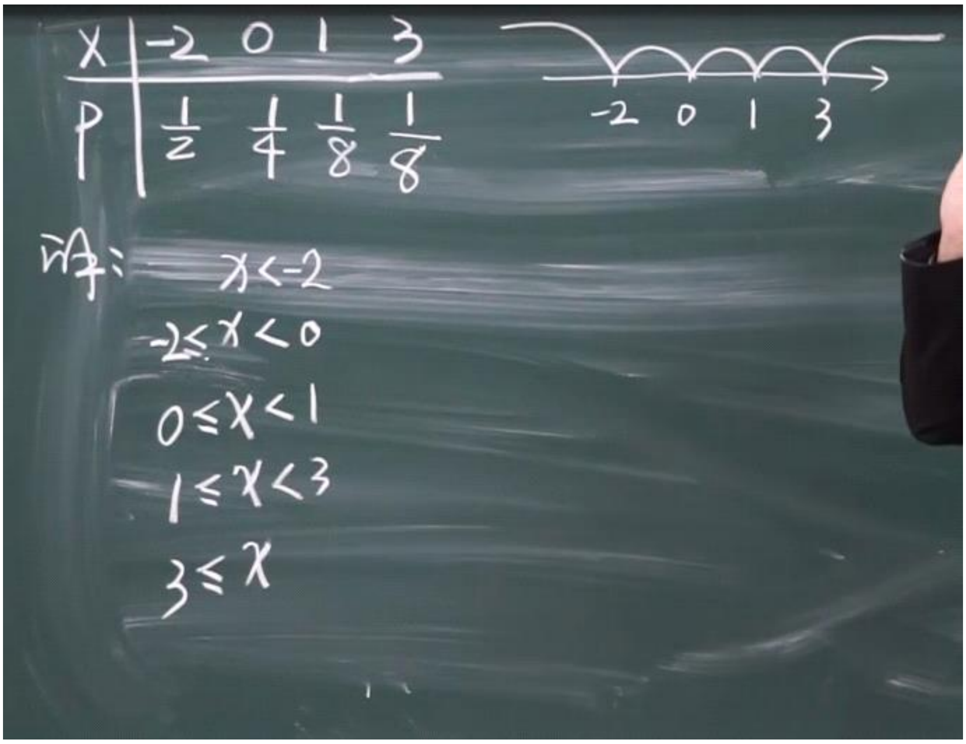
离散型随机变量求分布函数



写出函数表达式

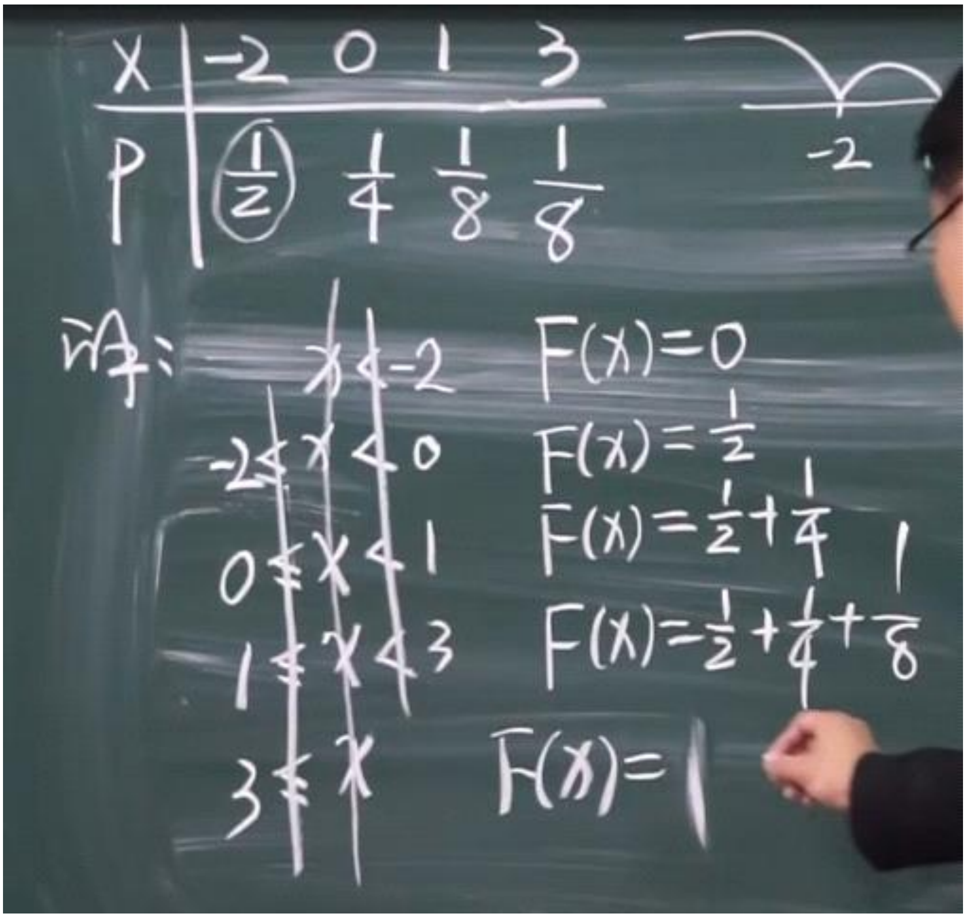


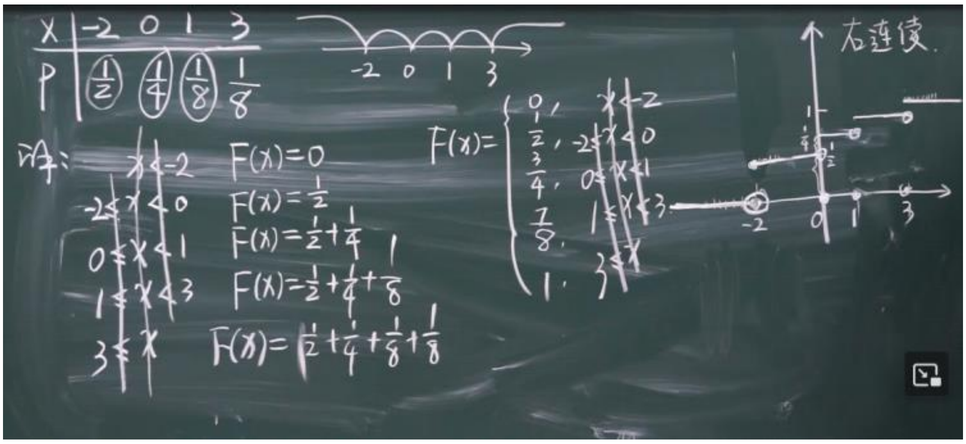
例3



四个断点分成五个部分

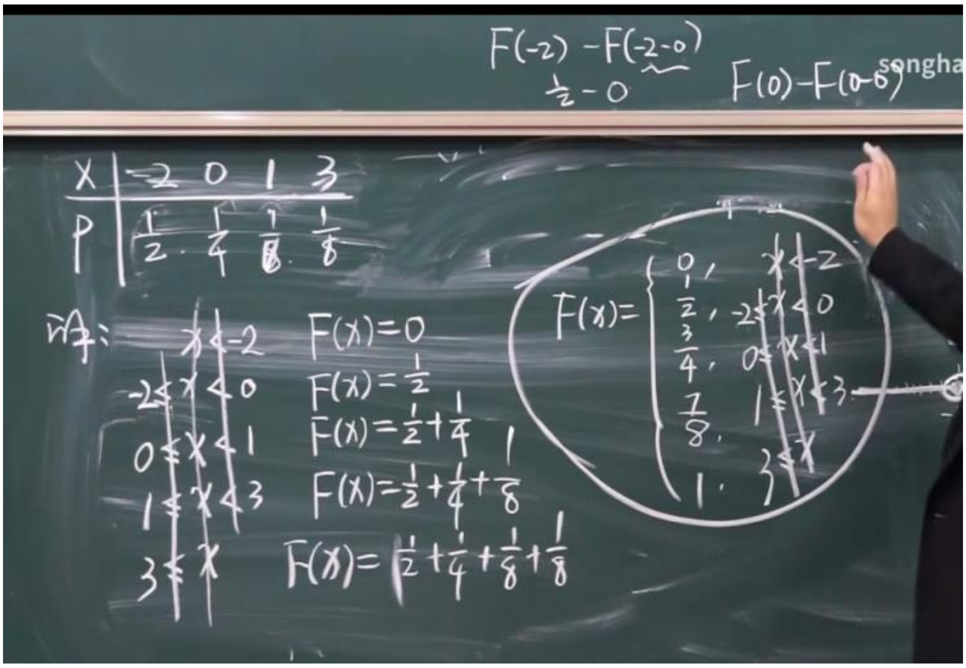
第一段一定等于0，最后一段肯定等于1





是右连续不是左连续

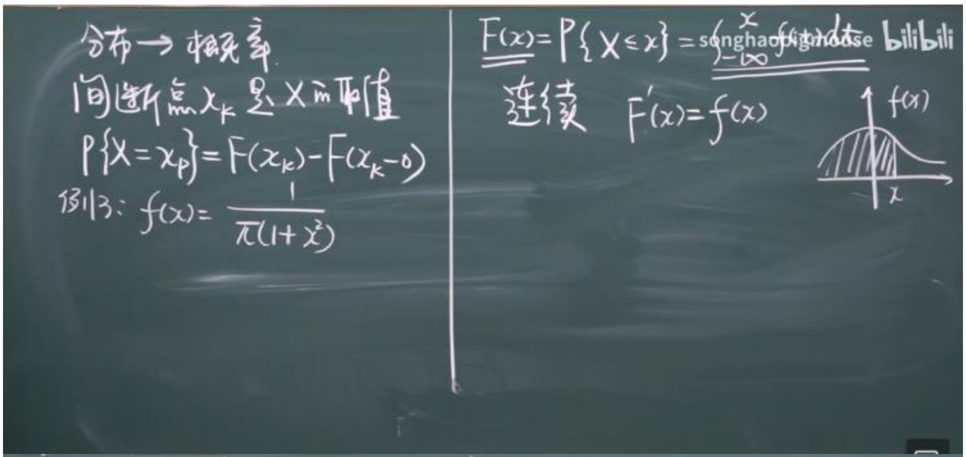
由分布函数求概率函数

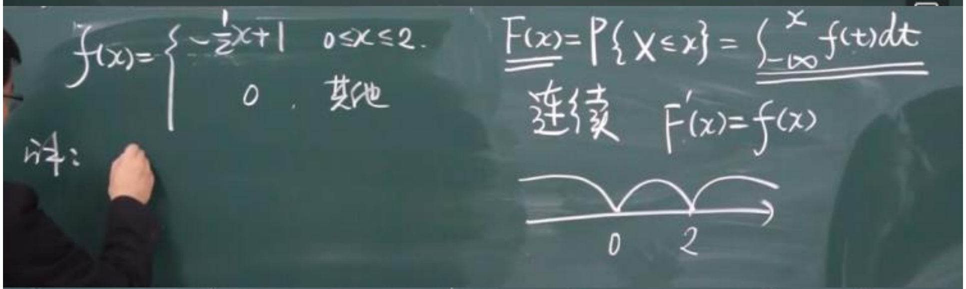


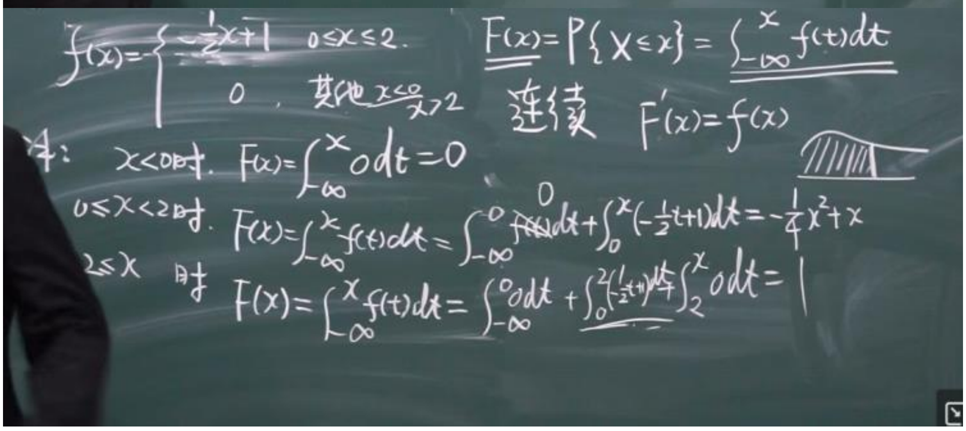
每一个点上的取值，就是每个点跳多高

连续型的分布函数

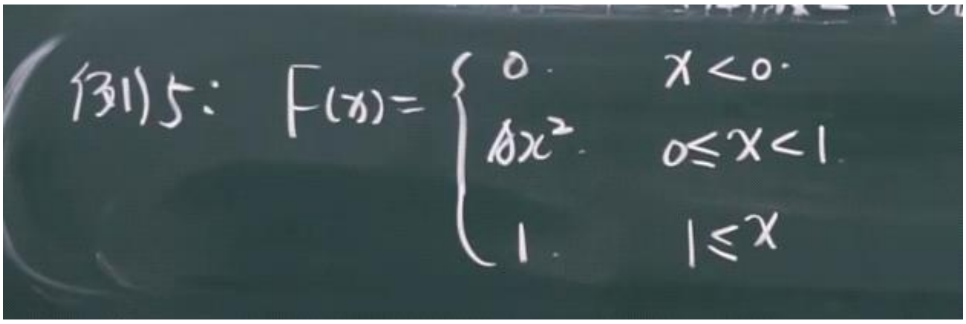
2024年1月17日　　15:22





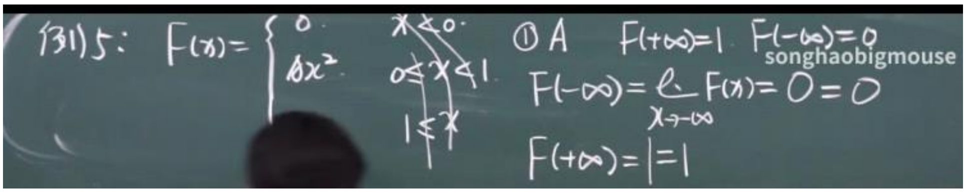


例题5



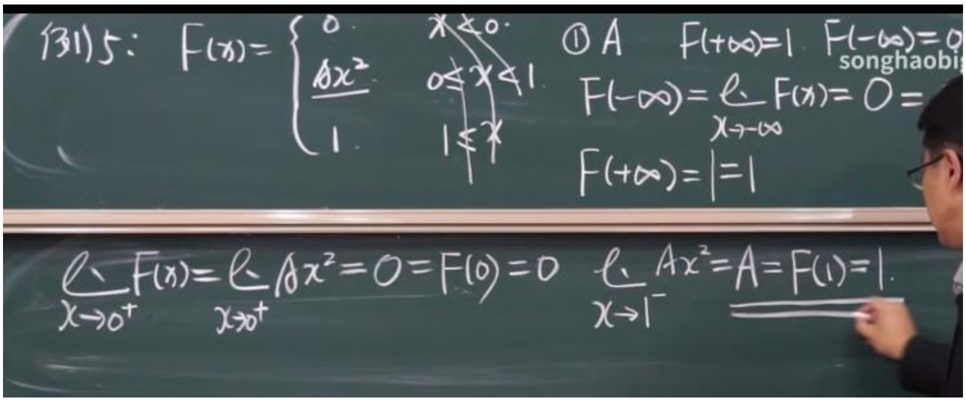
求常数A

正无穷和负无穷都求不出来



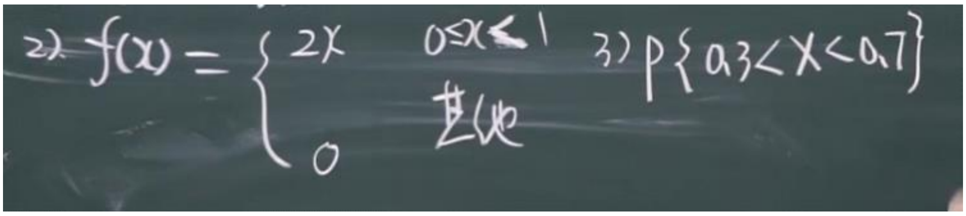
所以只能考虑从X的间断点0和1入手

从0入手，这道题也做不出来

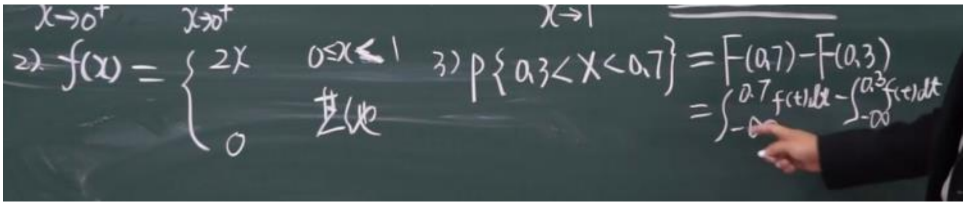


因为是连续函数

例题6



求P（0.3 < x < 0.7）



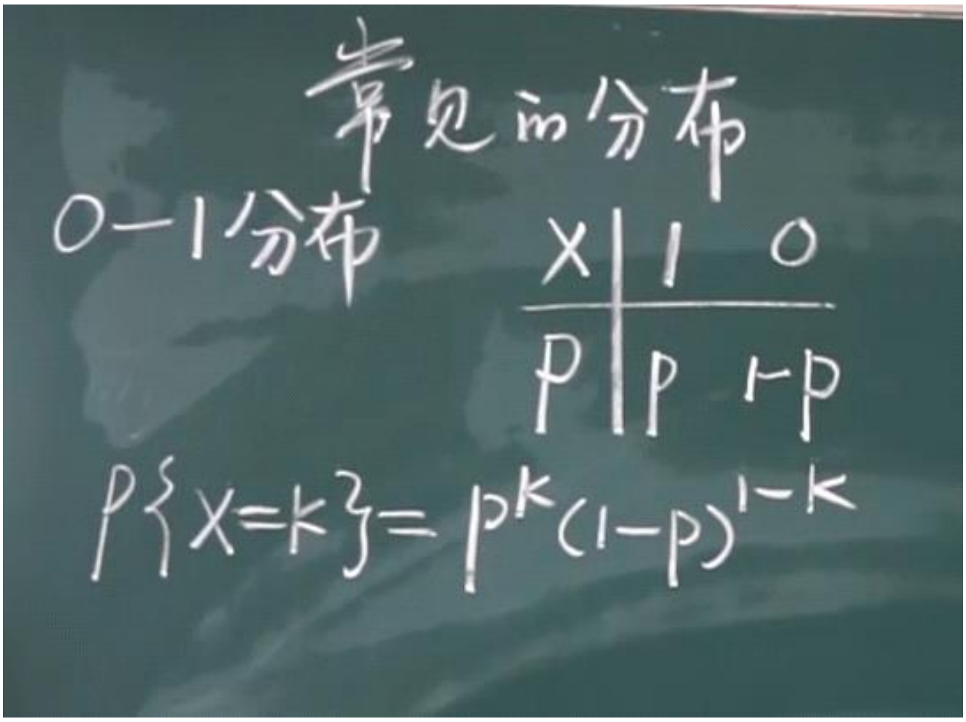
连续的不考虑端点

0.4

0-1分布

2024年1月17日 16:55

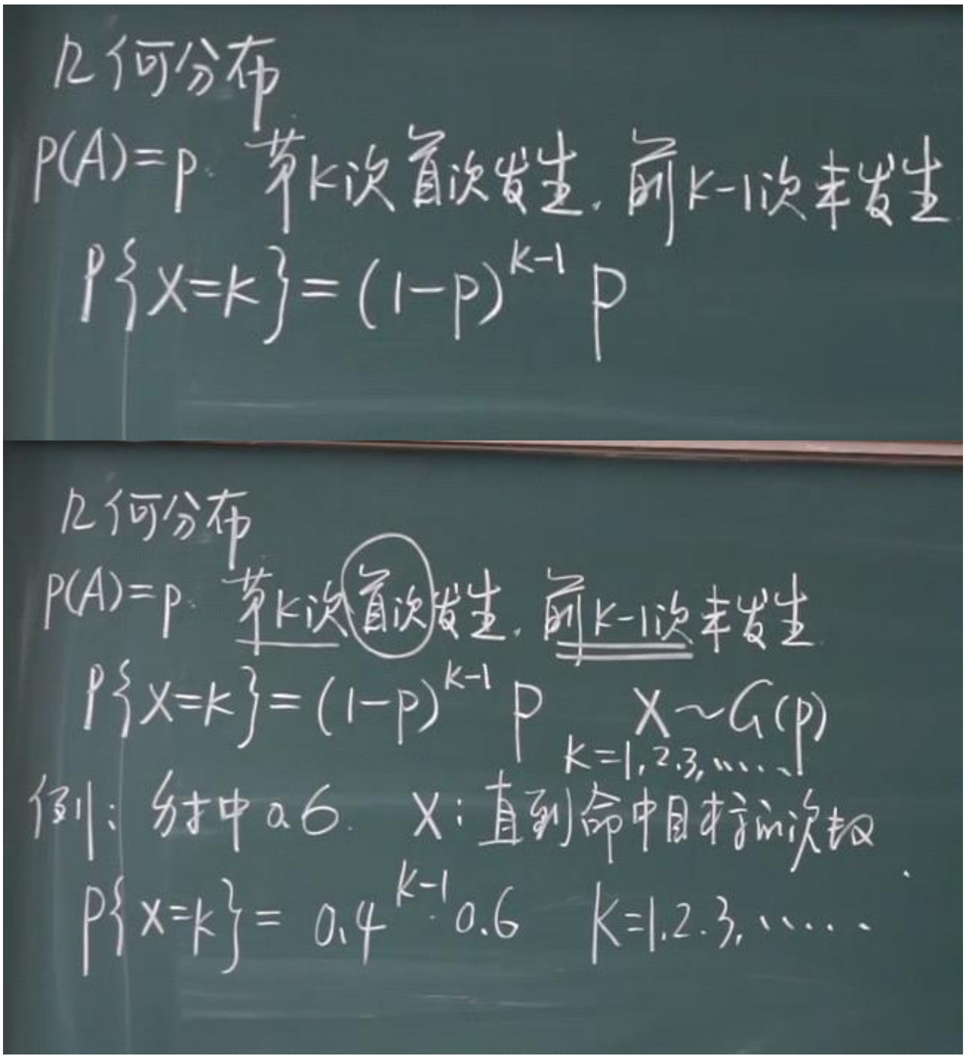
X只能取0和1



几何分布

2024年1月17日　　17:09

P（A）=p第K次首次发生，前K-1次未发生

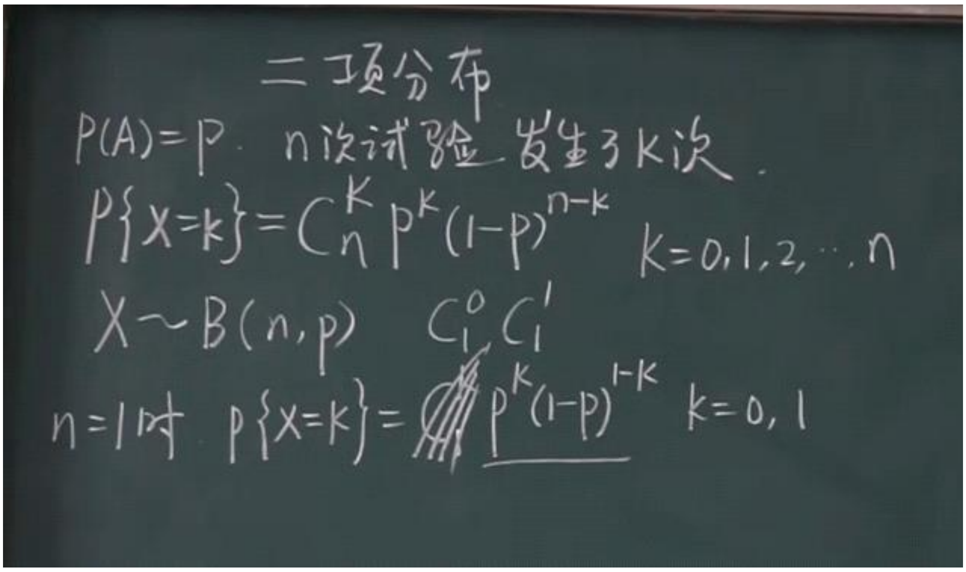


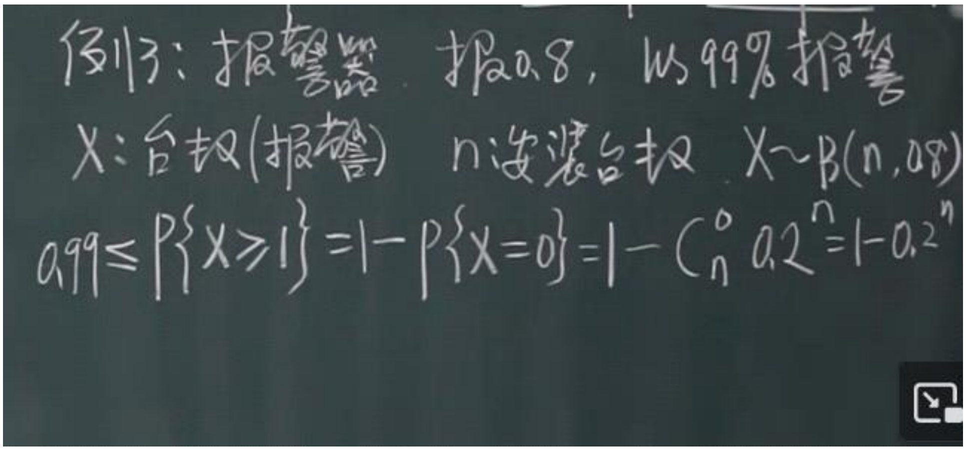
二项分布

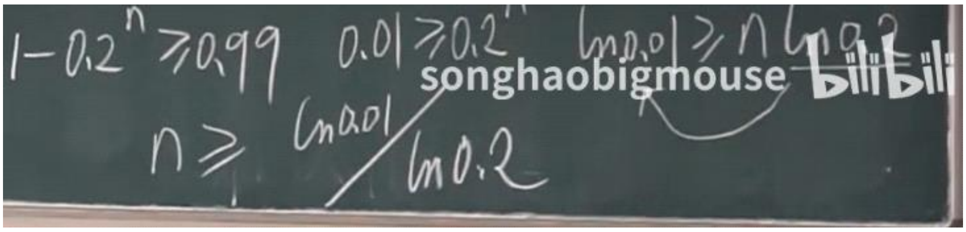
2024年1月17日　　17:14

P（A）=P n次试验，发生了K次

0-1分布是特殊的二项分布







例题

例4：每台机床维修 $p=0.01$.

1) 1个人看20台　2) 3人看80台

不能及时维修的概率

解 1) $n=20.$ $p=0.01$ X 修的台数

$$P\{X>1\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$$

$$=1-C_{20}^{0}\,0.99^{20}-C_{20}^{1}\,0.01\times 0.99^{19}$$

$$\approx 0.0169.$$

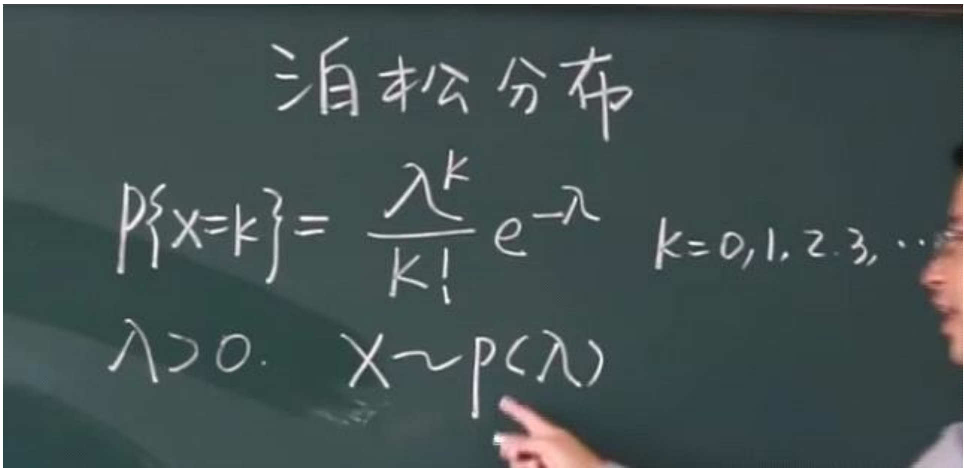
2). $n=80$ $p=0.01$

$$P\{X>3\}=1-P\{X=0\}=P\{X=1\}-P\{X=2\}-P\{X=3\}$$

$$\approx 0.0087$$

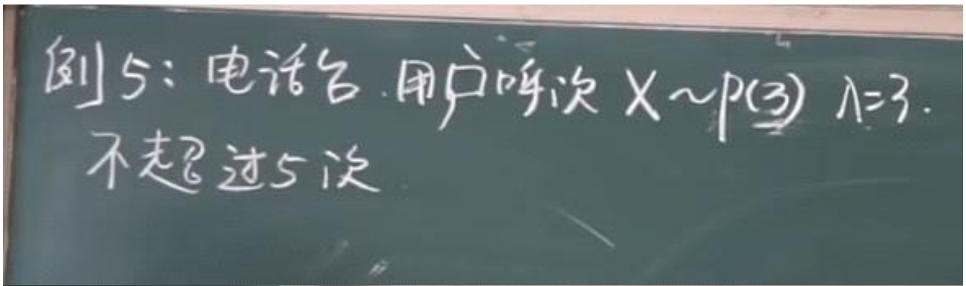
泊松分布（茆世松P85）

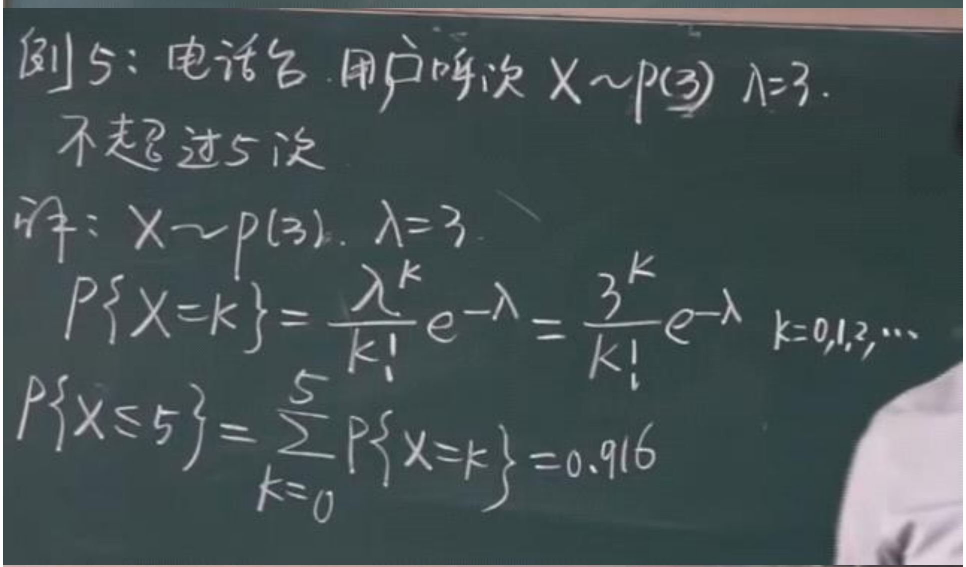
2024年1月17日　19:08

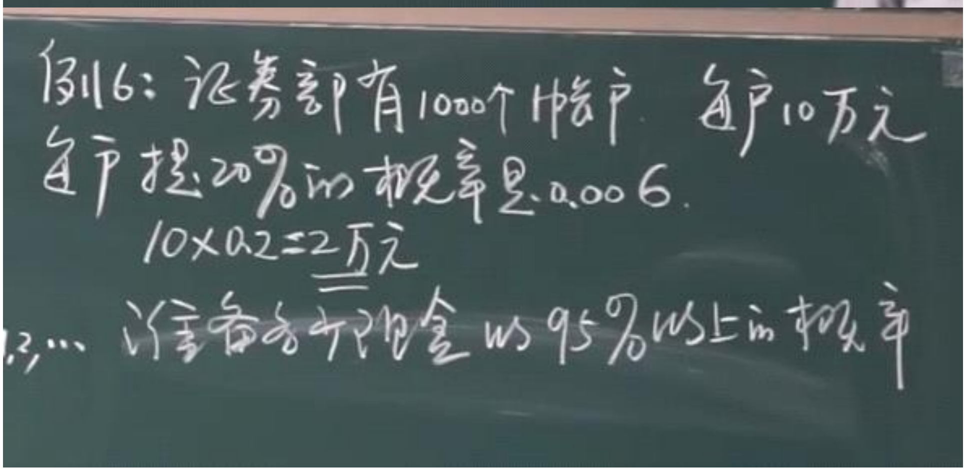


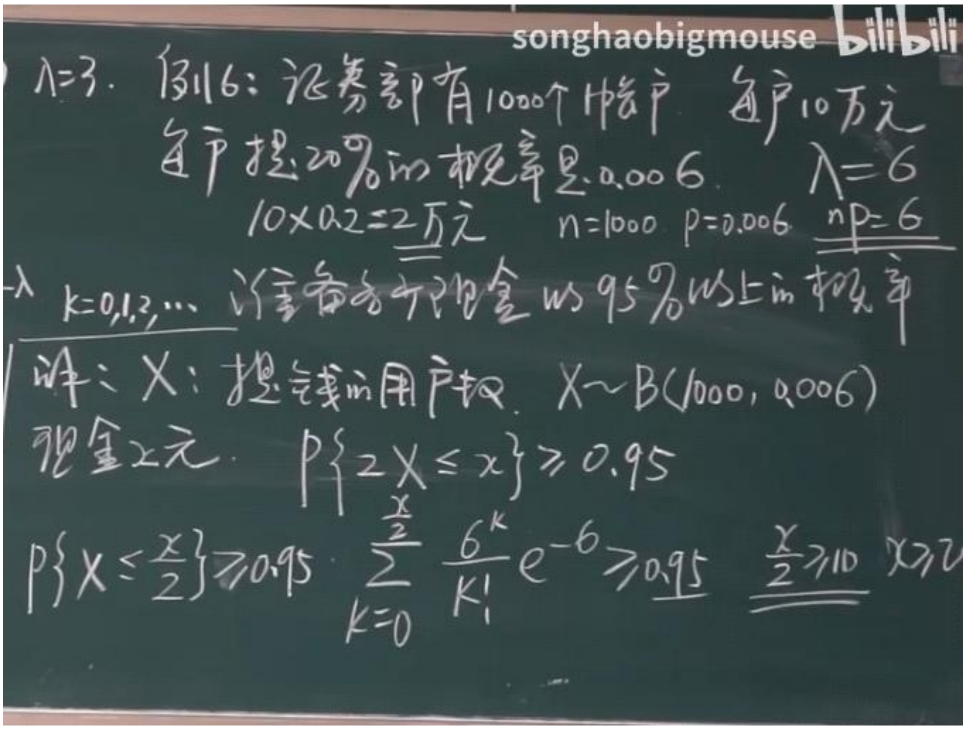
泊松分布查表

二项分布 n≥100，np≤10,可以用泊松分布



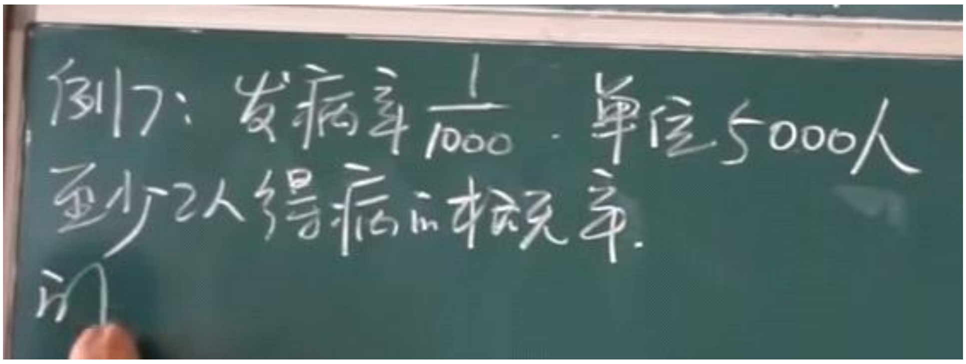


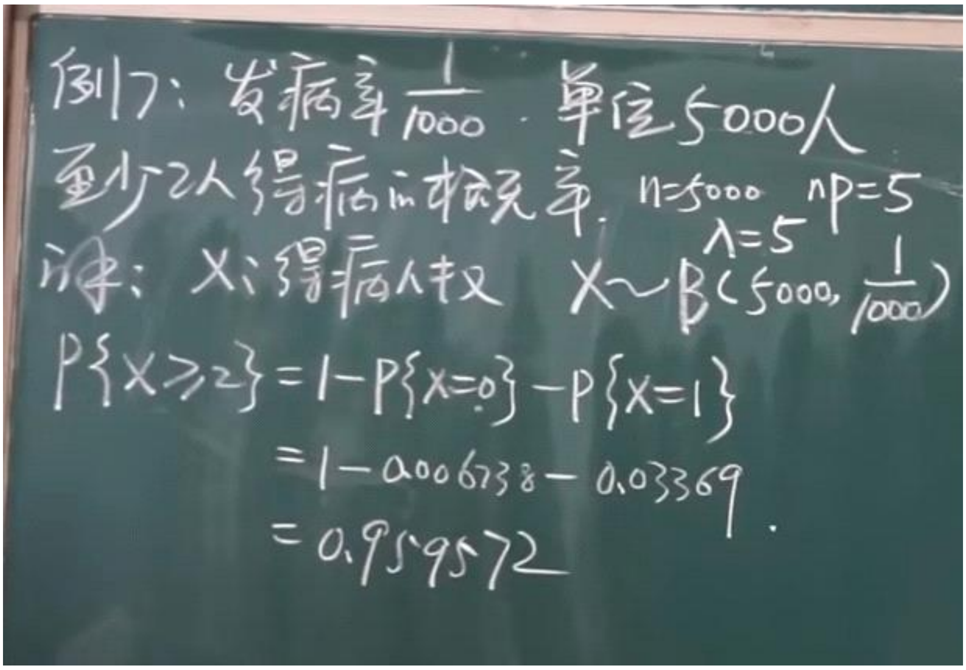




问：应该准备多少钱，保证95%以上的用户提款的要求

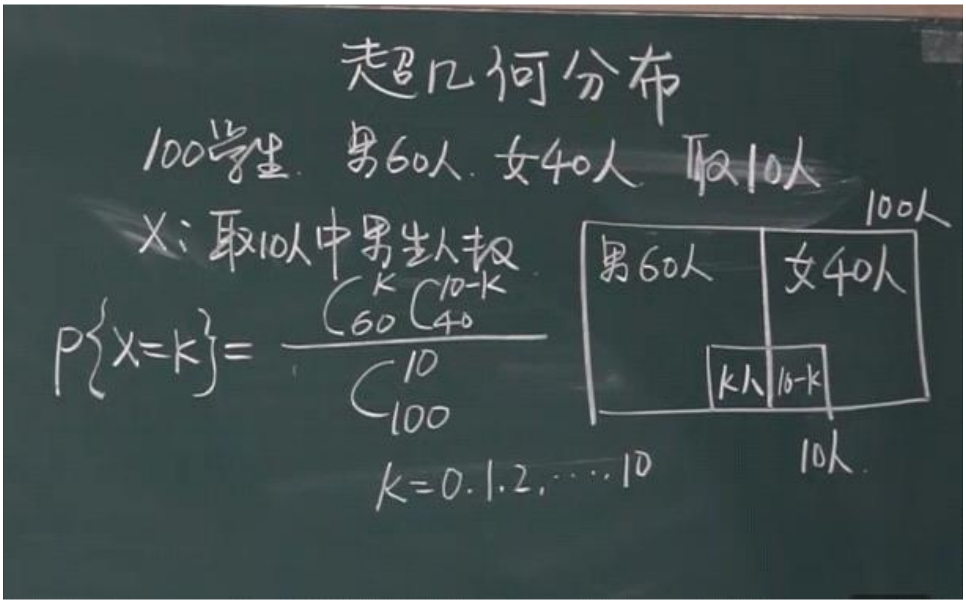
2X提款用户提的款，x准备的钱



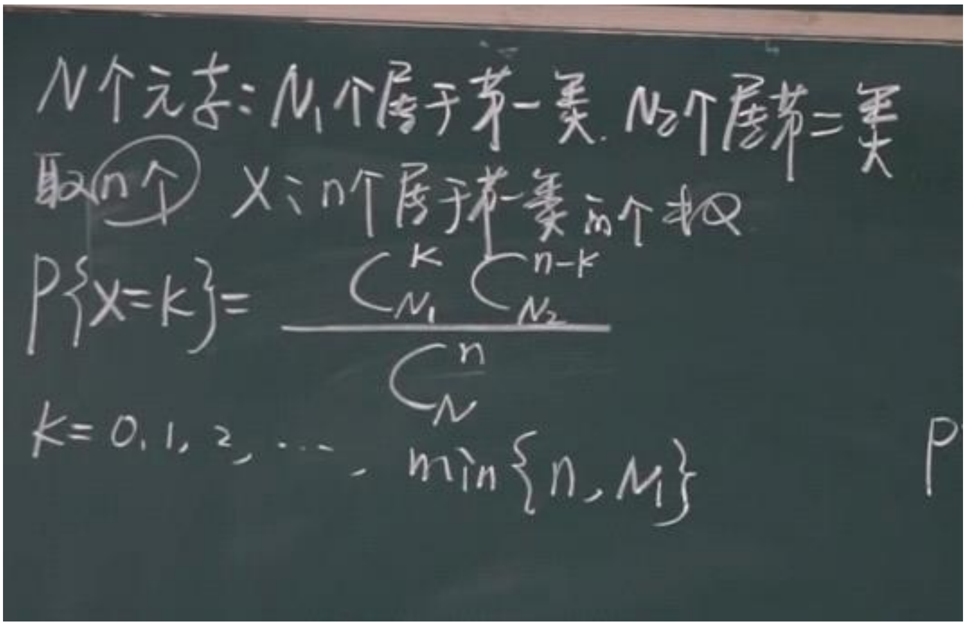


超几何分布

2024年1月18日　　9:26



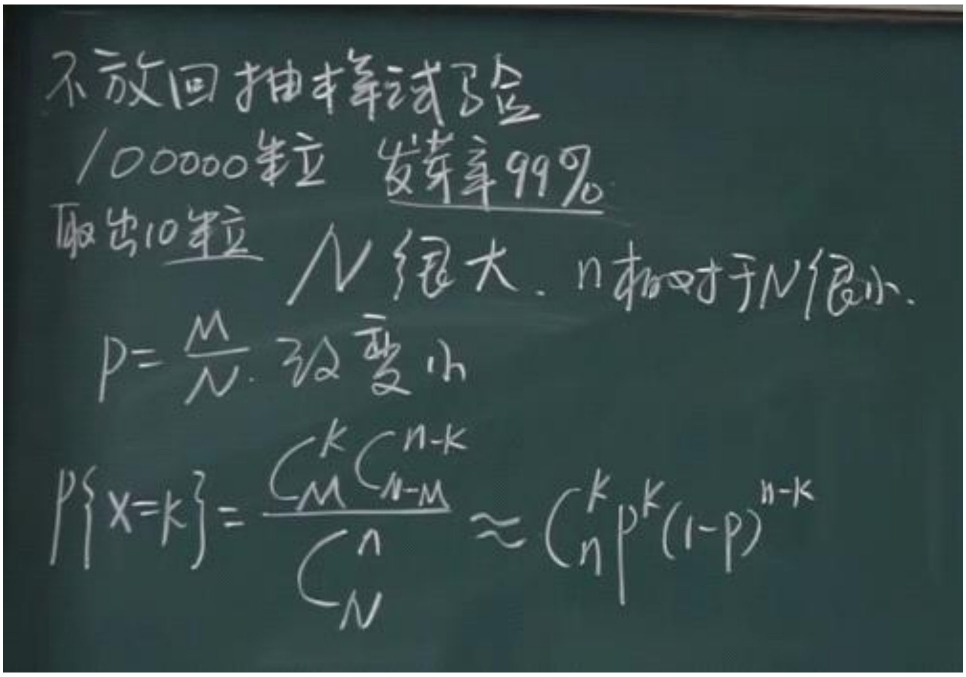
超几何分布定义



N≤N1

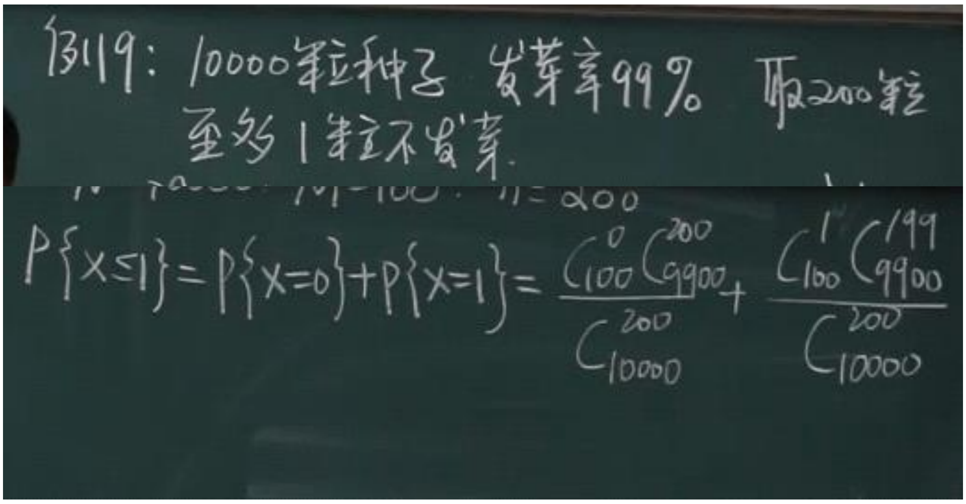
超几何分布明显的特征，分为两类

超几何分布可以描述不放回抽样的实验

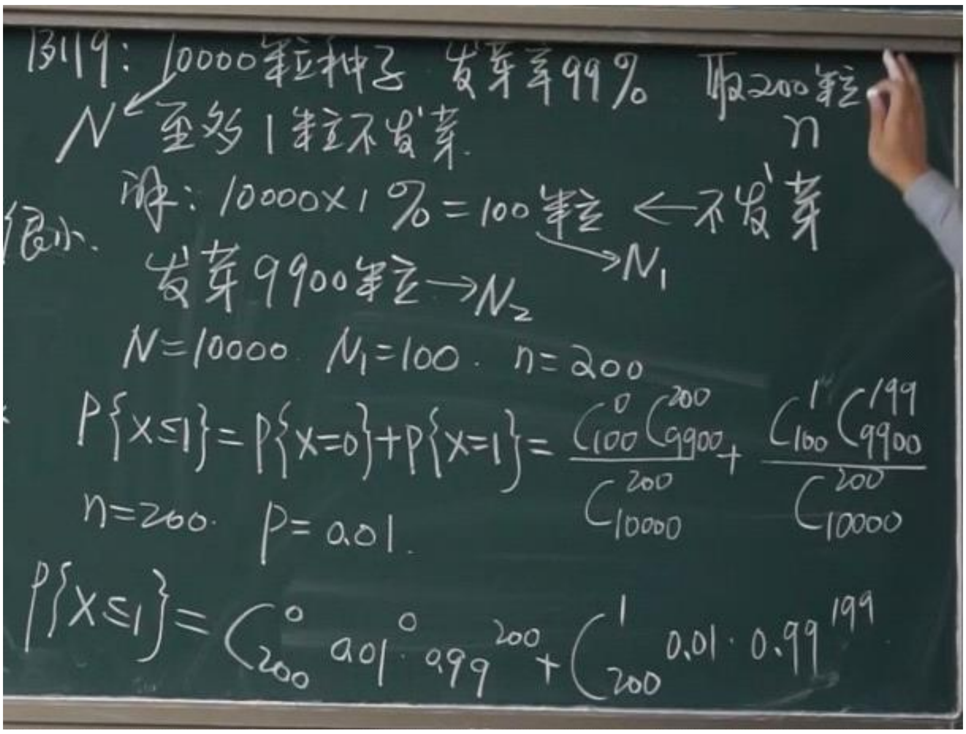


近似地用二项分布来计算

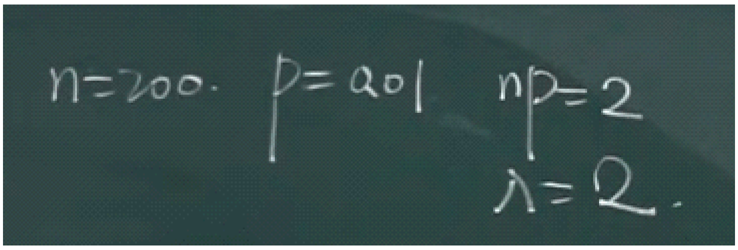
例题9

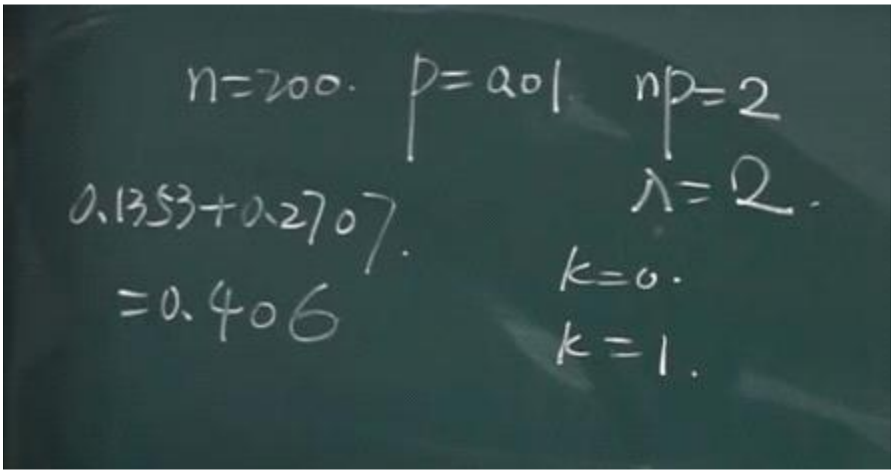


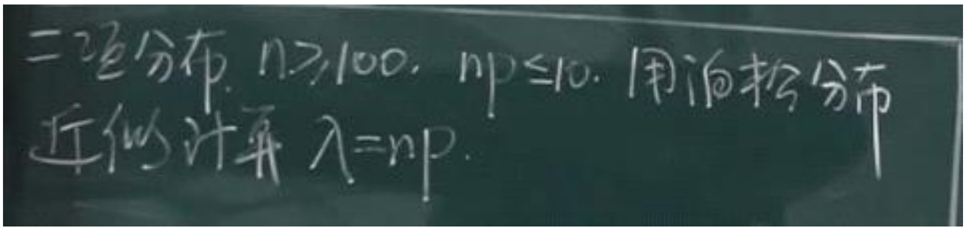
超几何分布如上，难计算，用二项分布替代



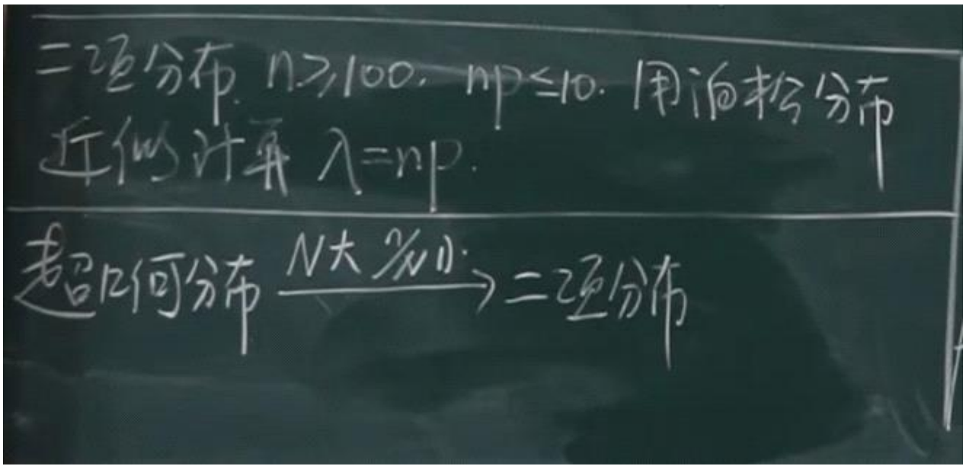
二项分布也难算，用泊松分布近似





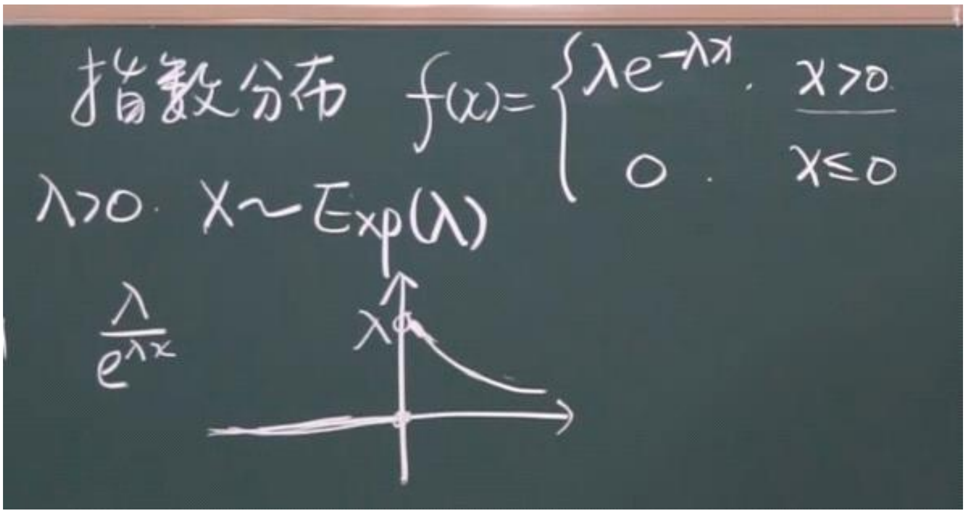


n≥100，np≤10,用泊松分布

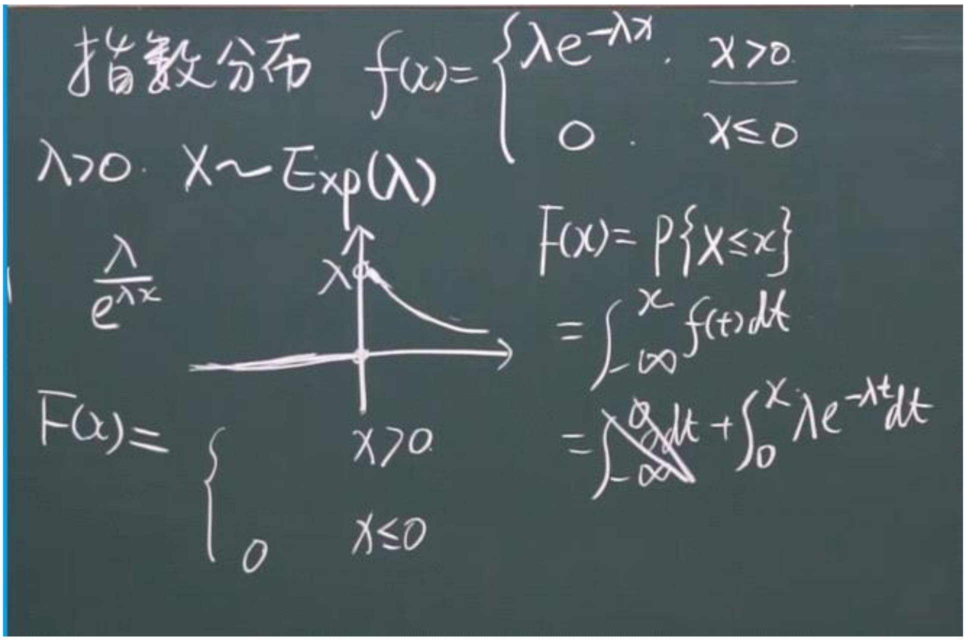


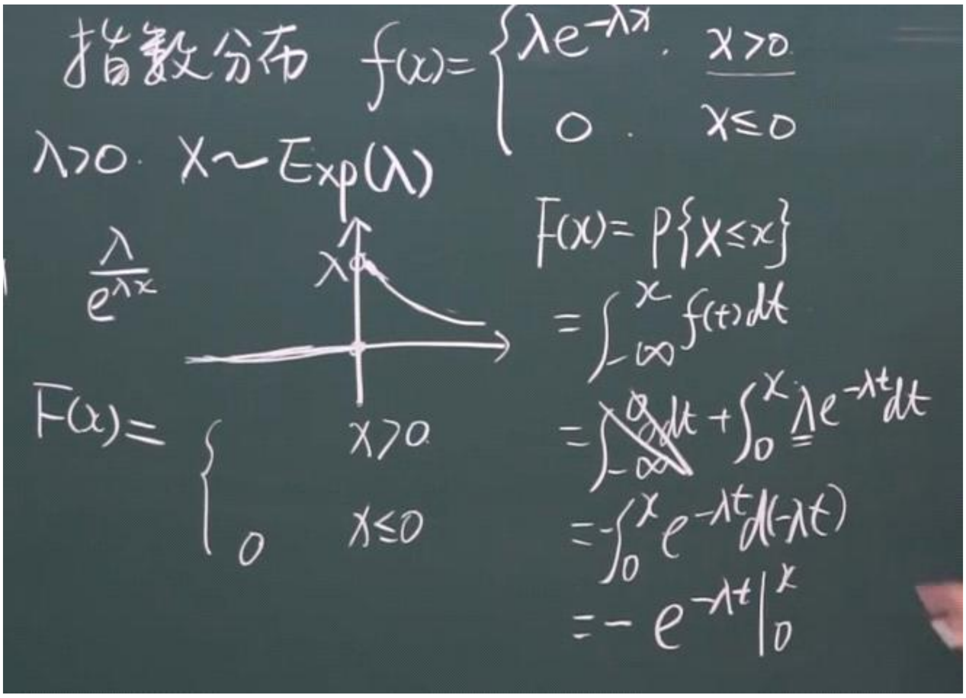
指数分布

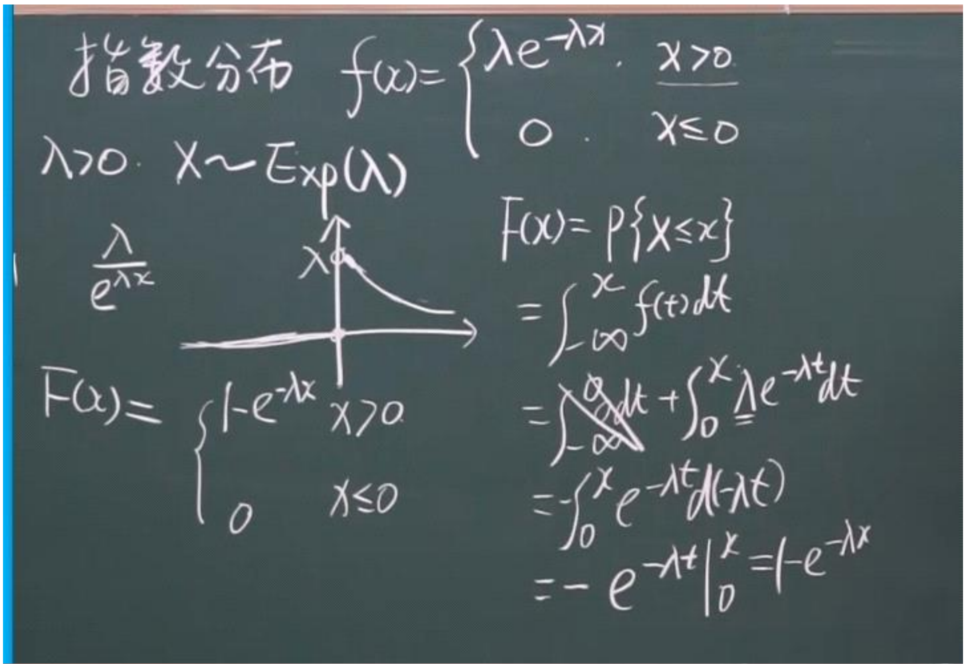
2024年1月18日 11:08

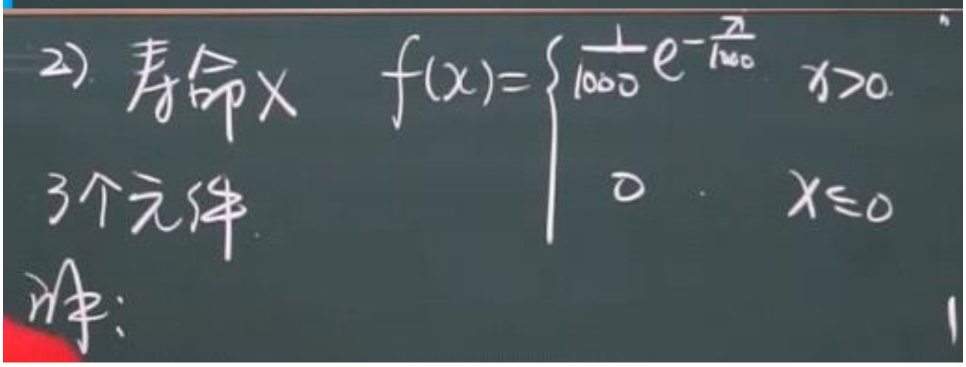


求分布函数



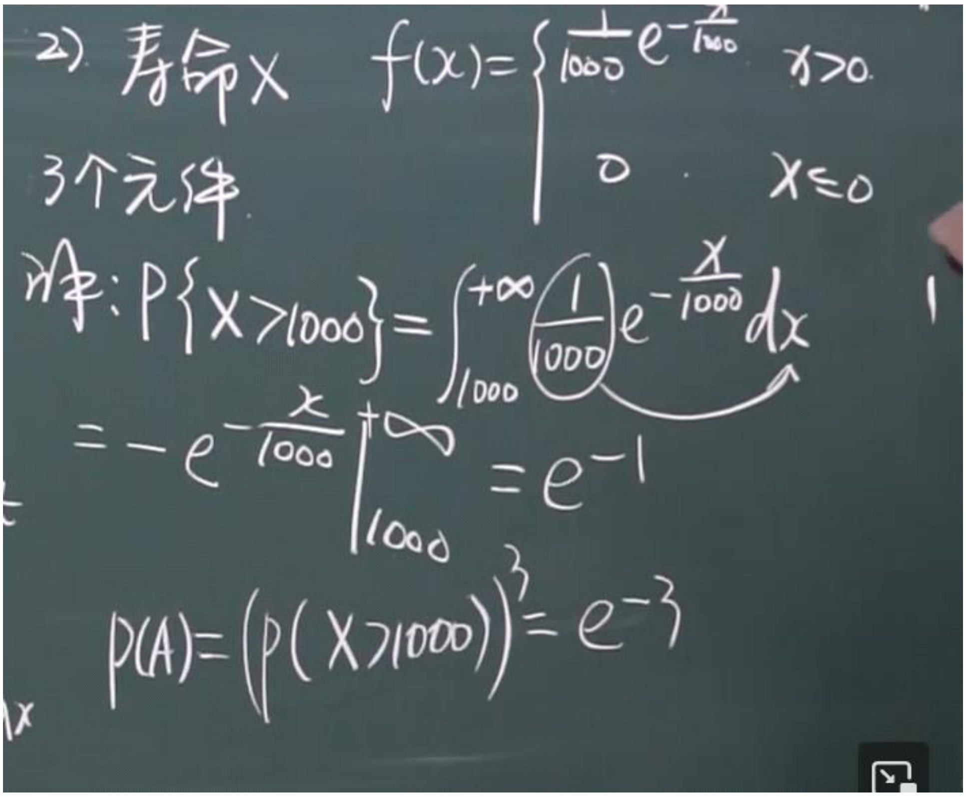


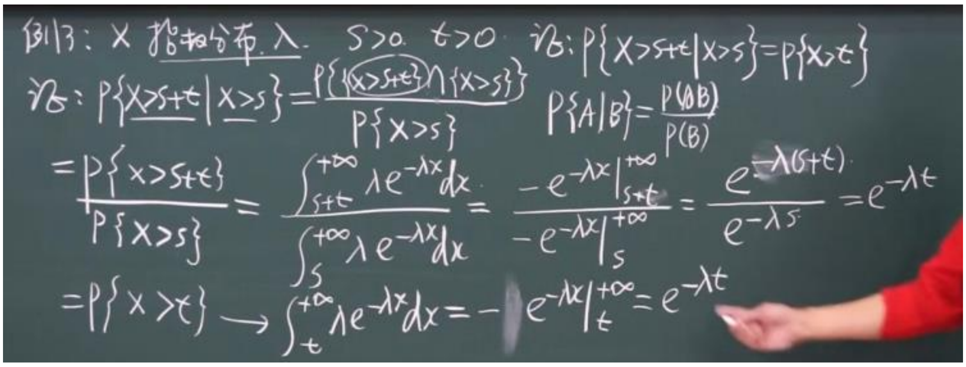




机器的寿命x，x服从密度函数f（x）,机器靠3个元件运转，每个元件都不能坏，求这个机器工作1000小时以上的概率

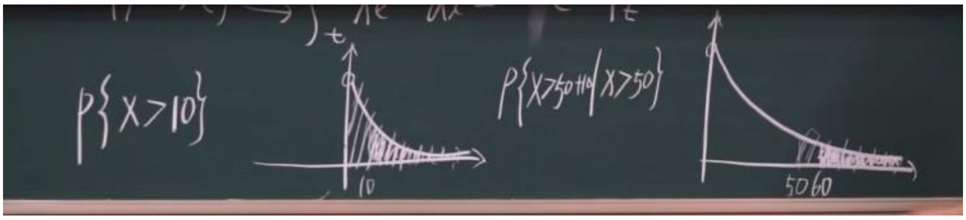
解题思路：先求一个元件工作1000小时以上的概率





一个东西用10年以上的概率P X>=10

例题：一个东西已经用了50年，再用10年的概率

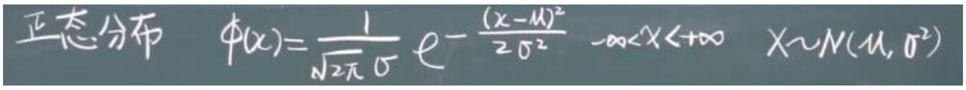


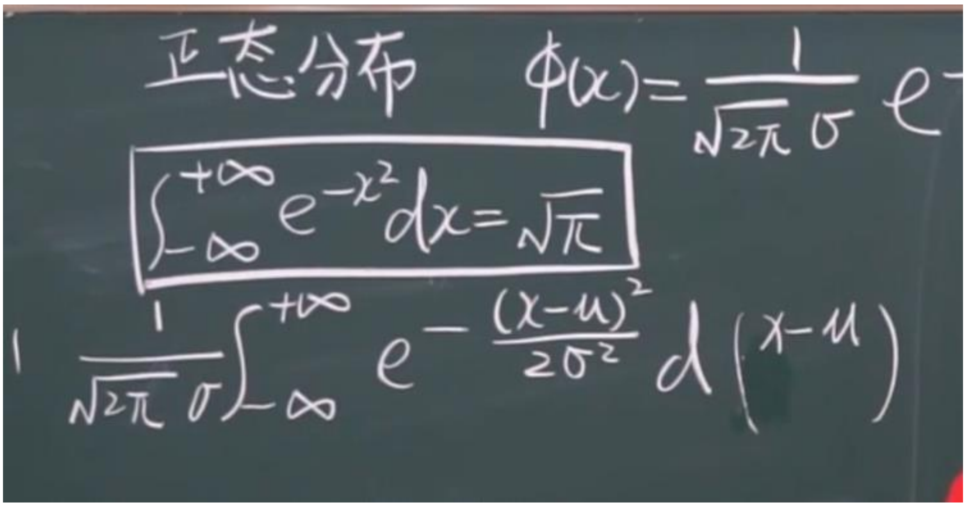
无记忆性证明

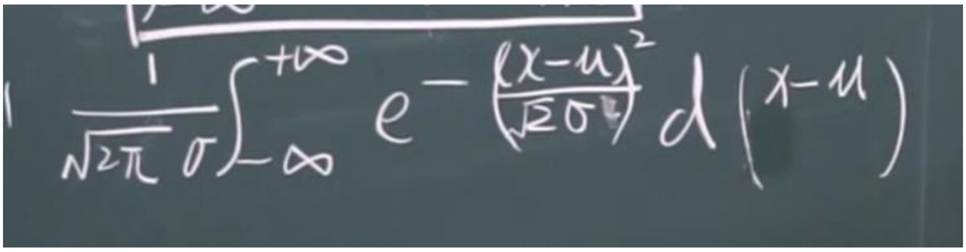
正态分布

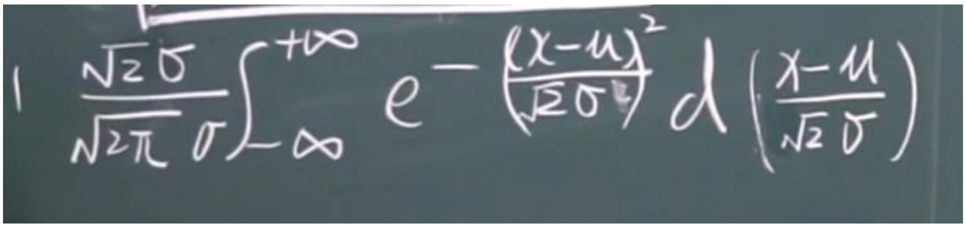
2024年1月18日 14:38

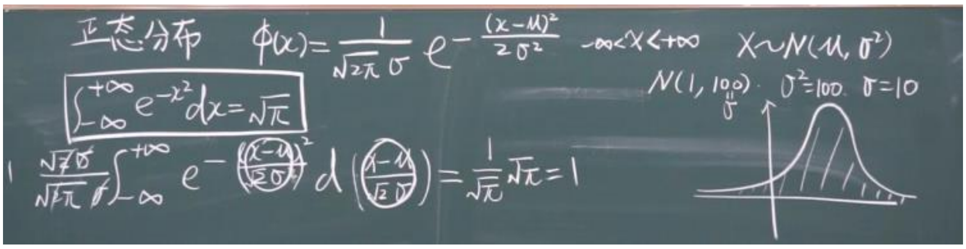
x服从密度函数

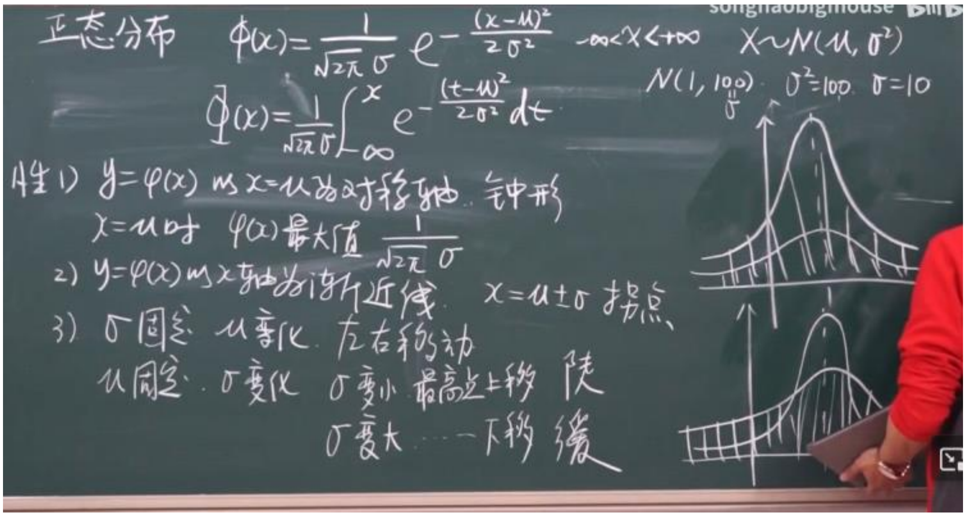








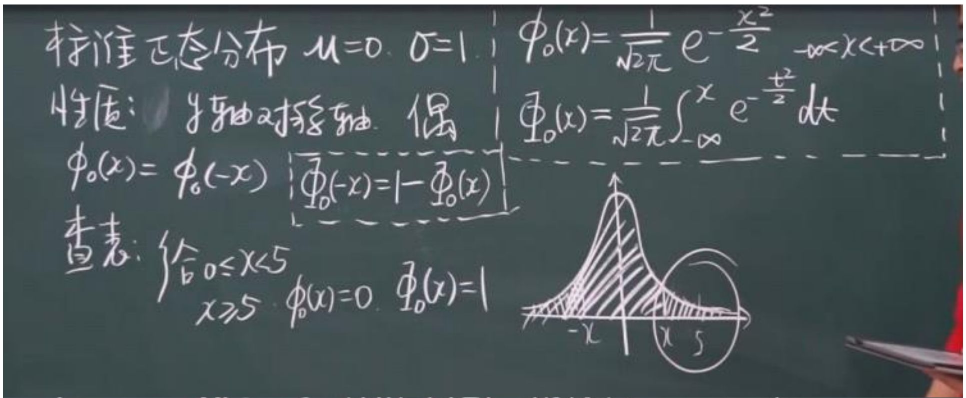


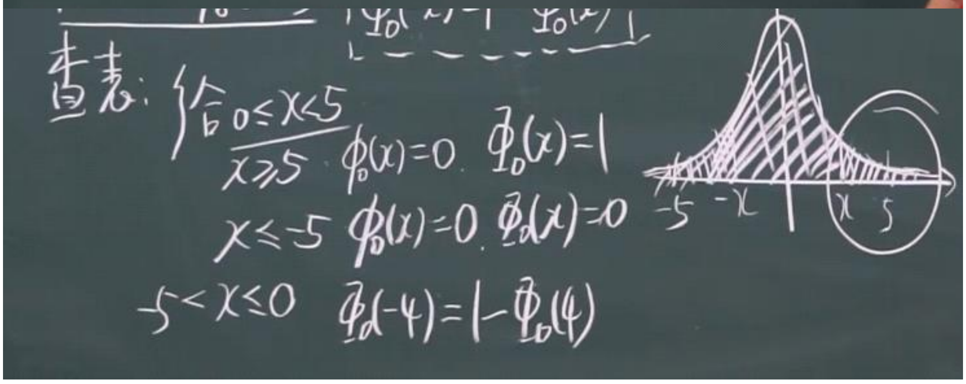


标准正态分布公式

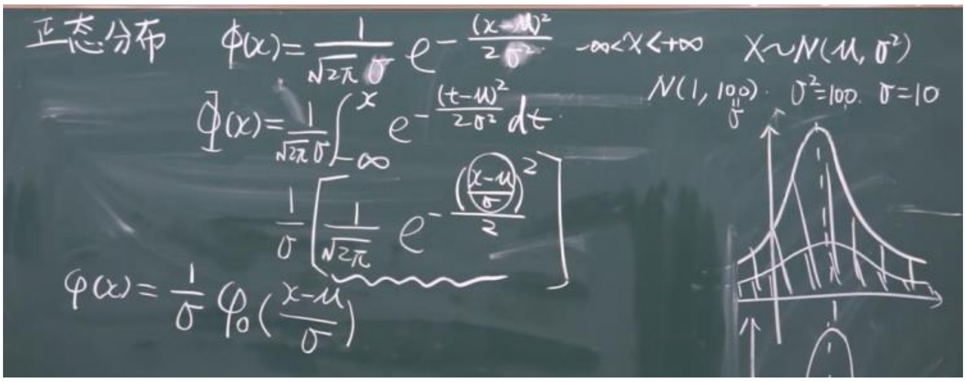
上密度函数

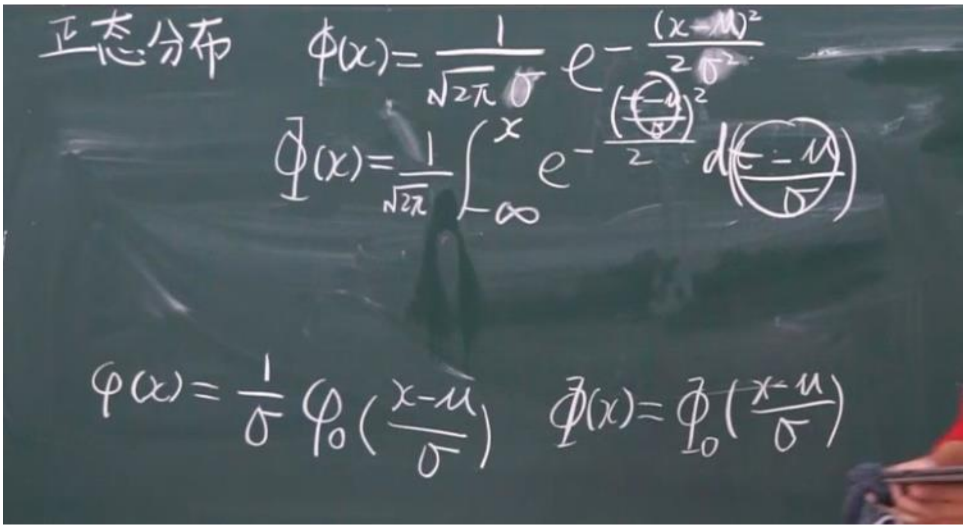
下分布函数





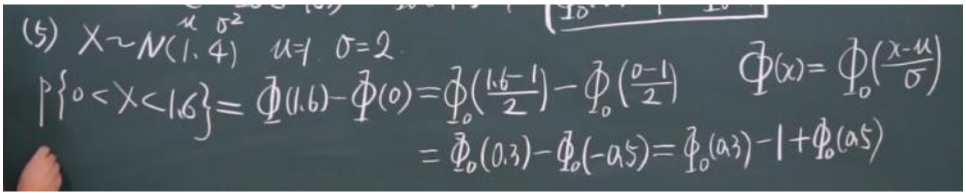
一般正态分布转化成标准正态分布



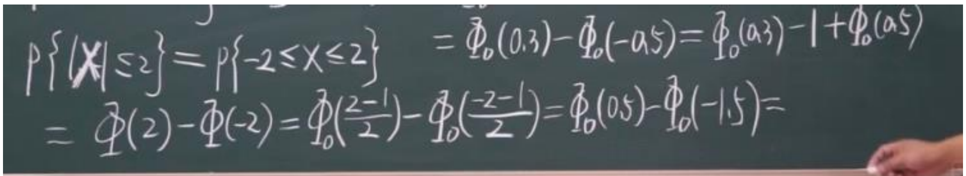


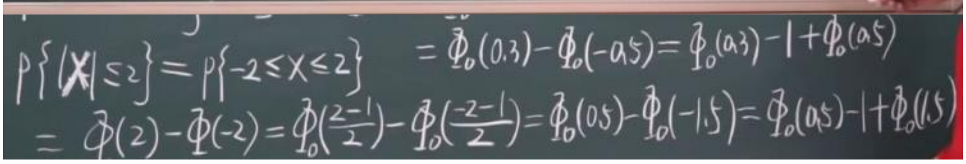
角标加0是标准正态分布

例题:一般正态分布求概率



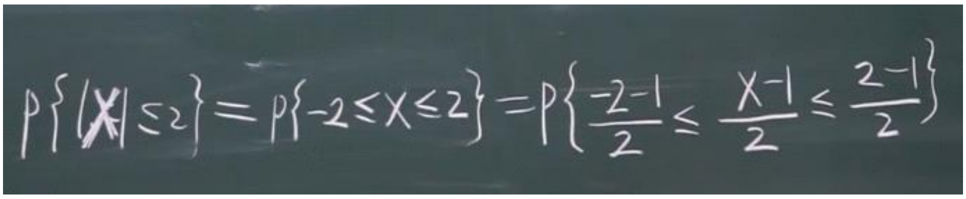
要转成标准正态分布



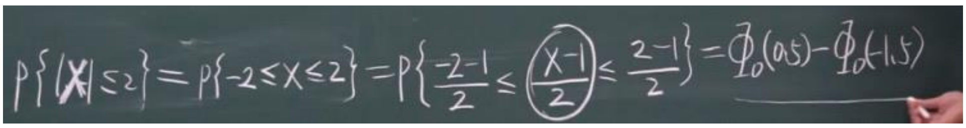


解法2

不等式两侧同时减相同的数，乘正数依然成立

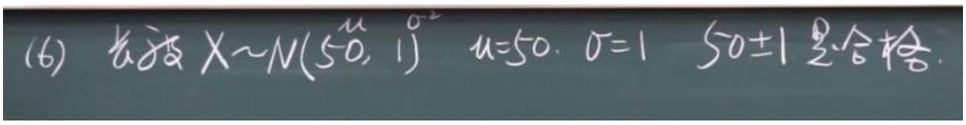


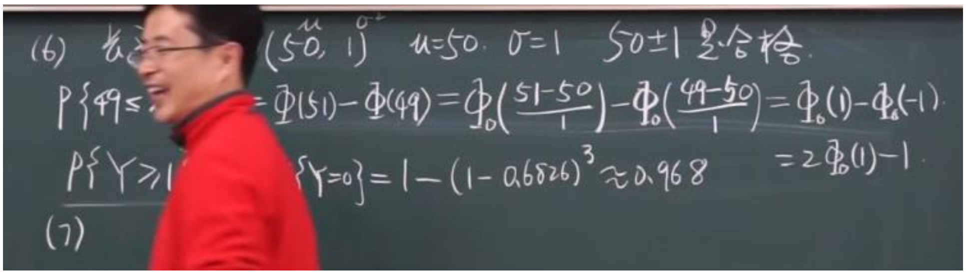
直接化成标准正态分布

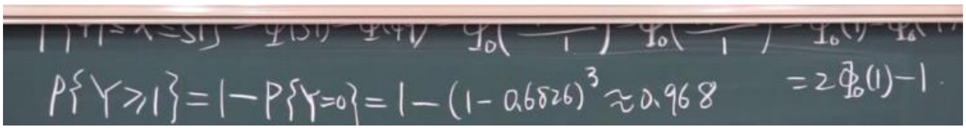


例题2

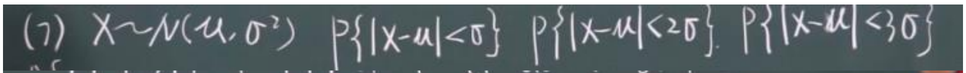
零件长度，1.问合格概率2.重复求3次，至少有一个是合格的

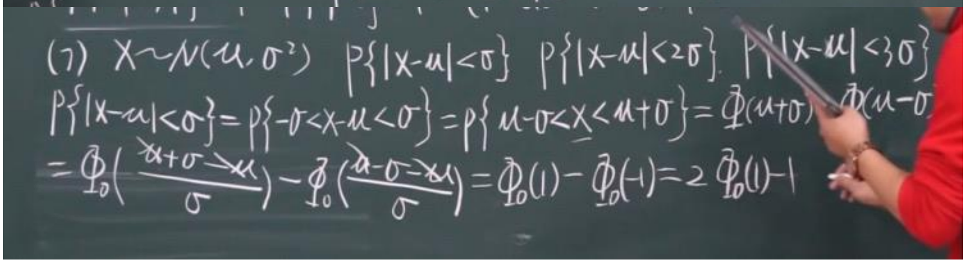


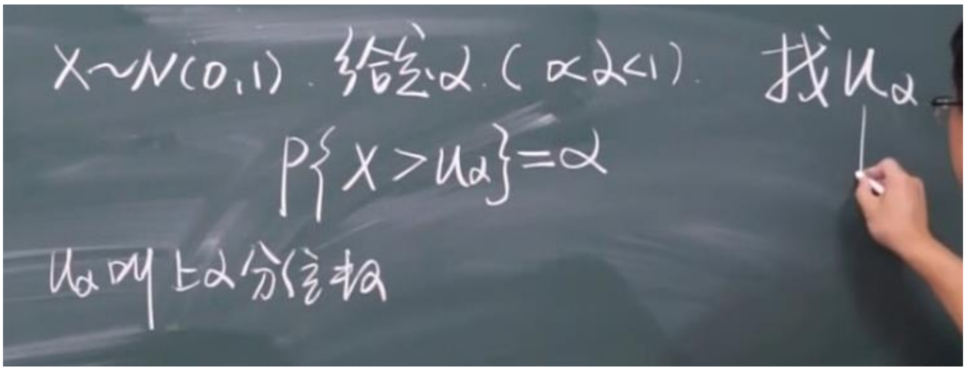

(6)
$\mu=50 \quad \sigma=1 \quad 50\pm1$ 是合格
$=\Phi(51)-\Phi(49)=\Phi_0\left(\frac{51-50}{1}\right)-\Phi_0\left(\frac{49-50}{1}\right)=\Phi_0(1)-\Phi_0(-1)$
$=1-(1-0.6826)^3\approx0.968$
$=2\Phi_0(1)-1$
(7)

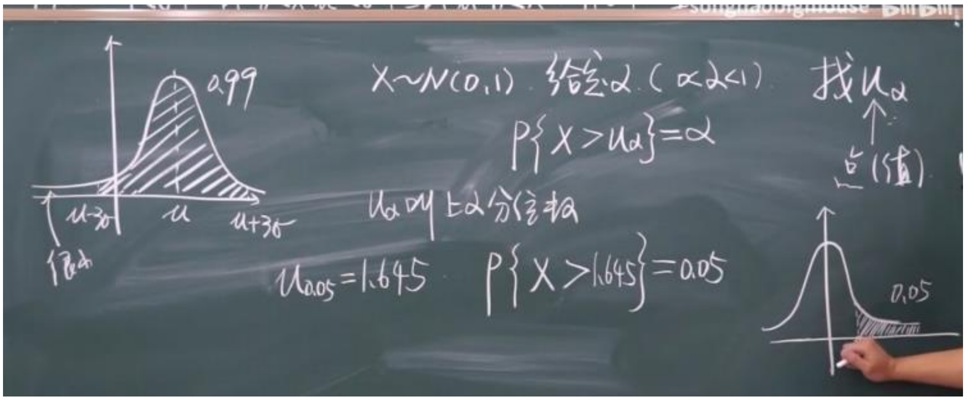

$P\{Y\geq1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-0.6826)^3\approx0.968$
$=2\Phi_0(1)-1$

例题3

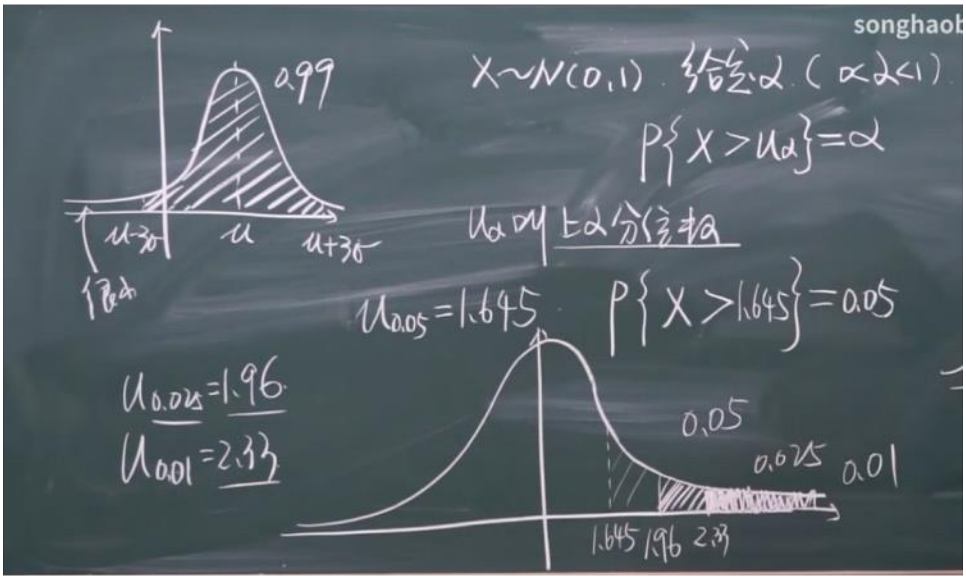

(7) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ $P\{|X-\mu|<2\sigma\}$ $P\{|X-\mu|<3\sigma\}$


(7) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ $P\{|X-\mu|<2\sigma\}$
$P\{|X-\mu|<\sigma\}=P\{-\sigma<X-\mu<\sigma\}=P\{\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\}=\Phi(\mu+\sigma)$
$=\Phi_0(1)-\Phi_0(-1)=2\Phi_0(1)-1$


$X\sim N(0,1)$ 给定α ($0<\alpha<1$) 找u_α
$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$
u_α叫上α分位数


0.99
$X\sim N(0,1)$ 给定α ($0<\alpha<1$) 找u_α
$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$
点(值)
u_α叫上α分位数
$\mu-3\sigma$
μ
$\mu+3\sigma$
$u_{0.05}=1.645$ $P\{X>1.645\}=0.05$
0.05

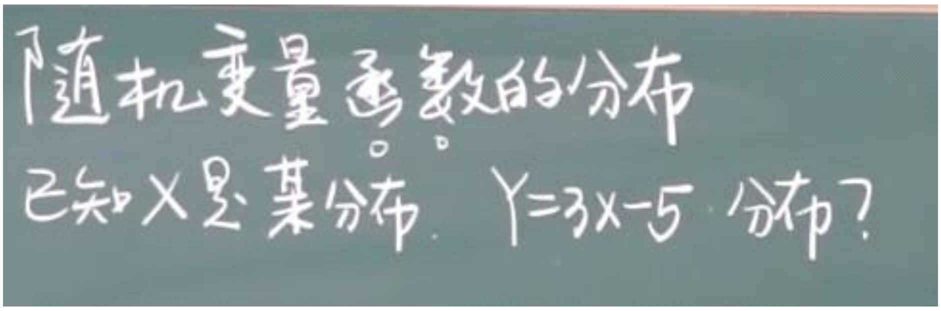
置信区间初导入

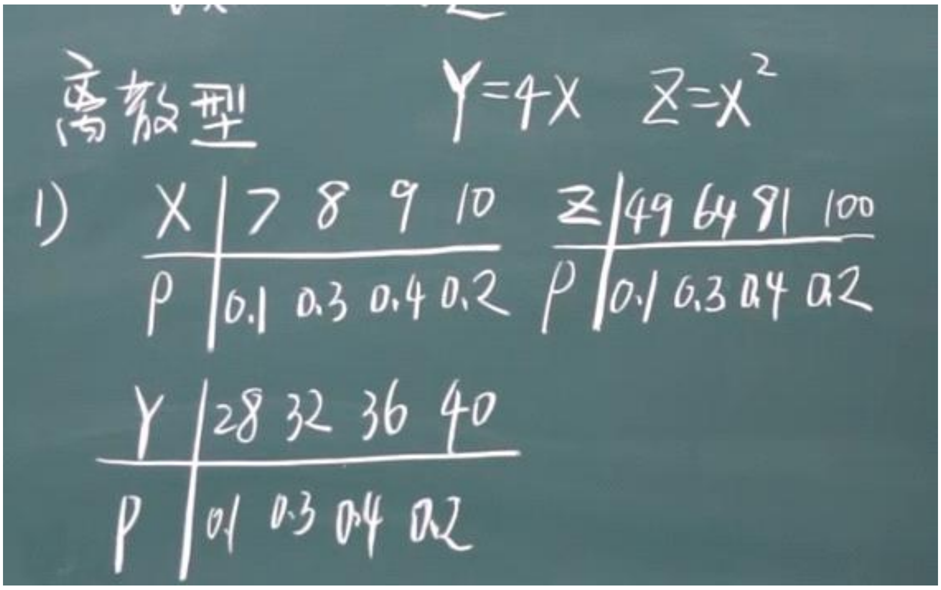

songhaob
$X \sim N(0,1)$ 给定 α ($\alpha < 1$)
$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$
u_α 叫上 α 分位数
$u_{0.05} = 1.645$
$P\{X > 1.645\} = 0.05$
$u_{0.025} = 1.96$
$u_{0.01} = 2.33$
0.99
0.05
0.025
0.01
1.645
1.96
2.33

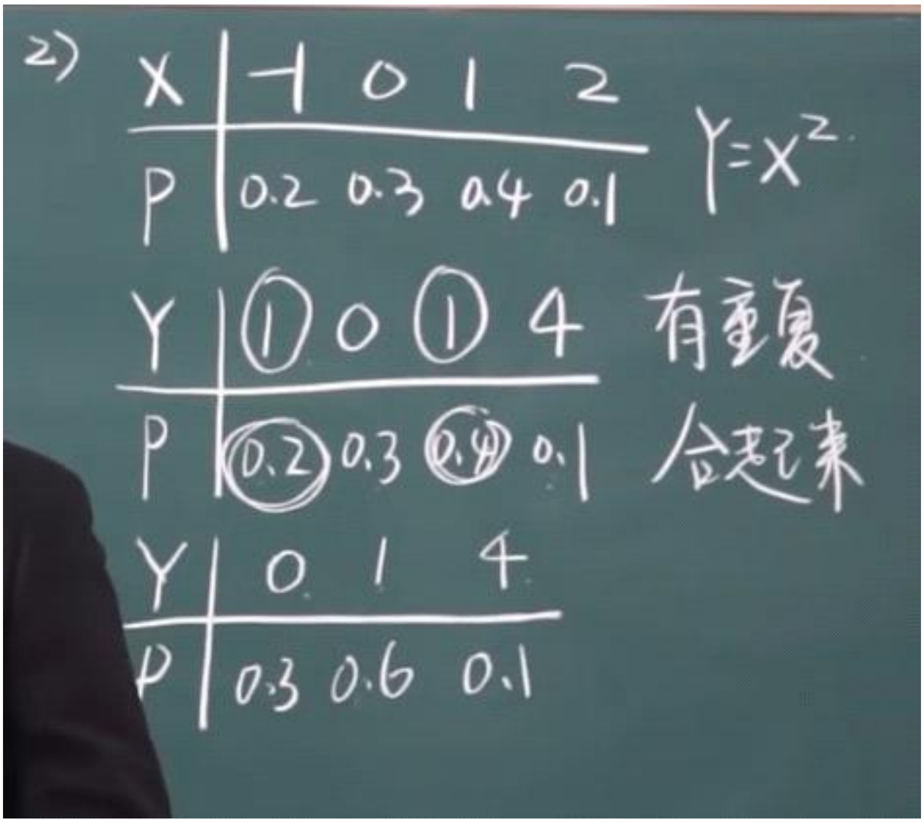
随机变量函数的分布（离散型）

2024年1月19日 9:51

已知X的分布，求这个函数构造出的Y的分布





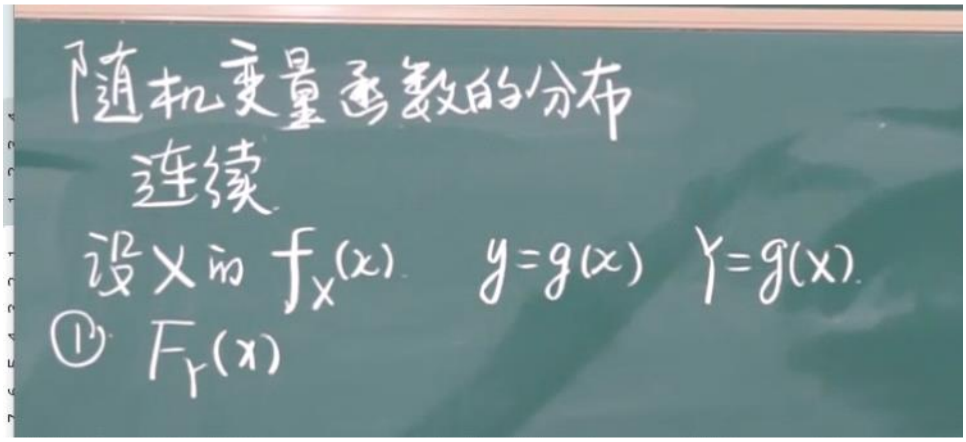


随机变量函数的分布（连续型）

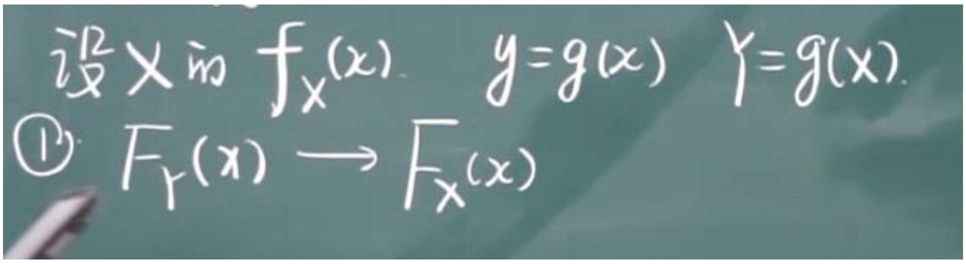
2024年1月19日 10:02

设X的密度函数

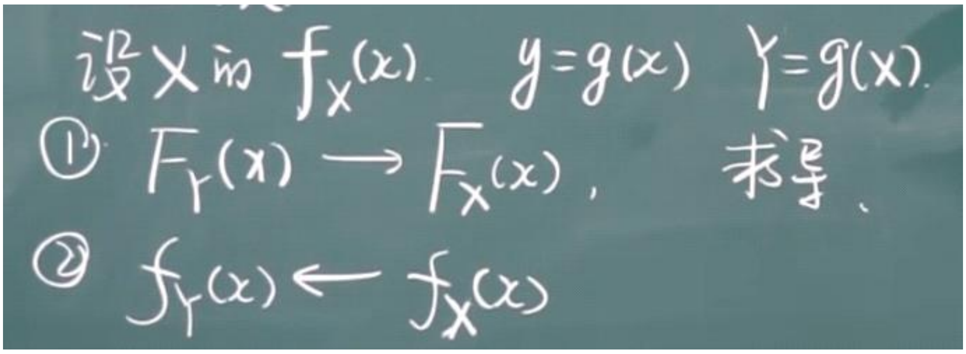
已知X的密度函数，构造



解题思路：1.已知Y的分布函数，构造成X的分布函数

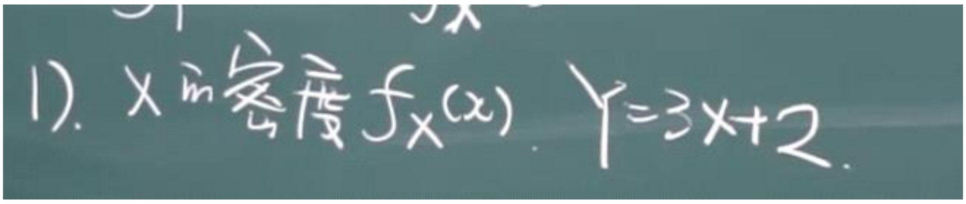


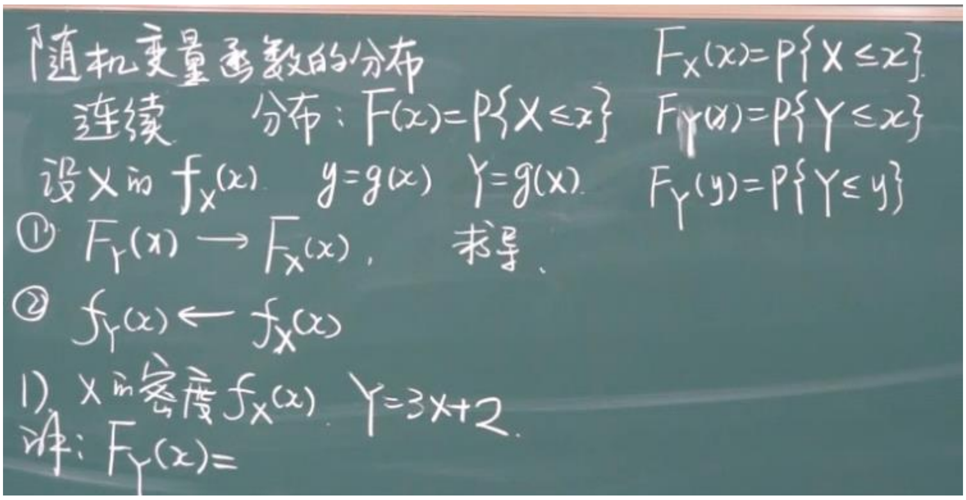
2.对两边同时求导



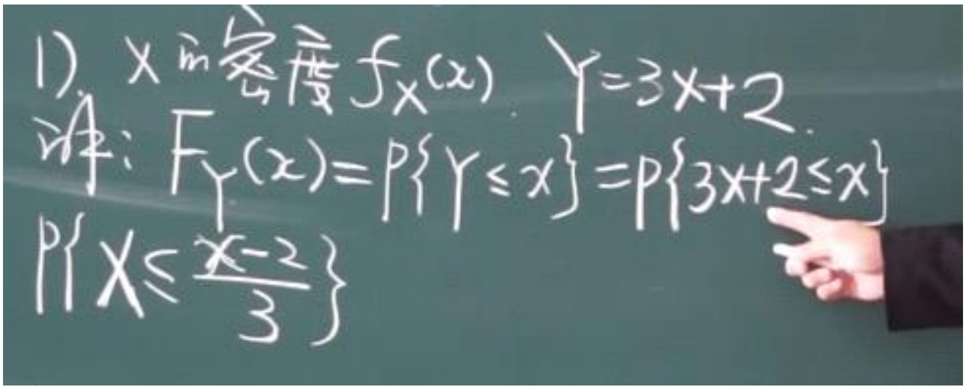
例题1

求Y的密度函数

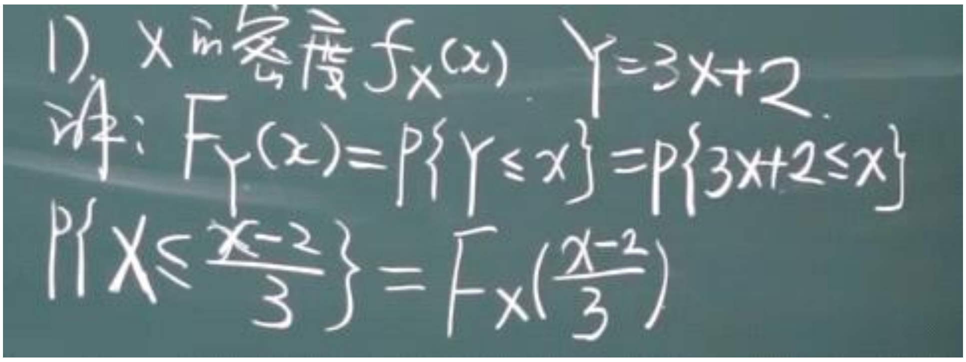




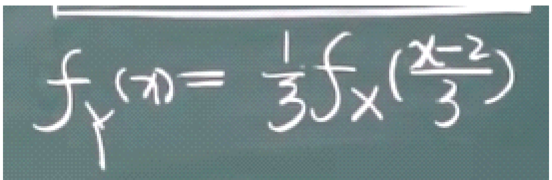
理解右上角的分布函数

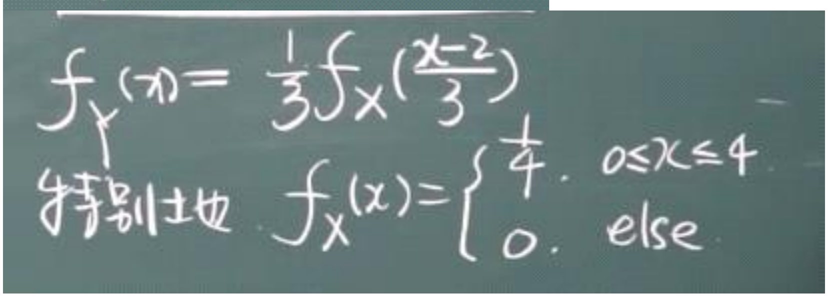


X大小写分明白，要把大写的X露出来

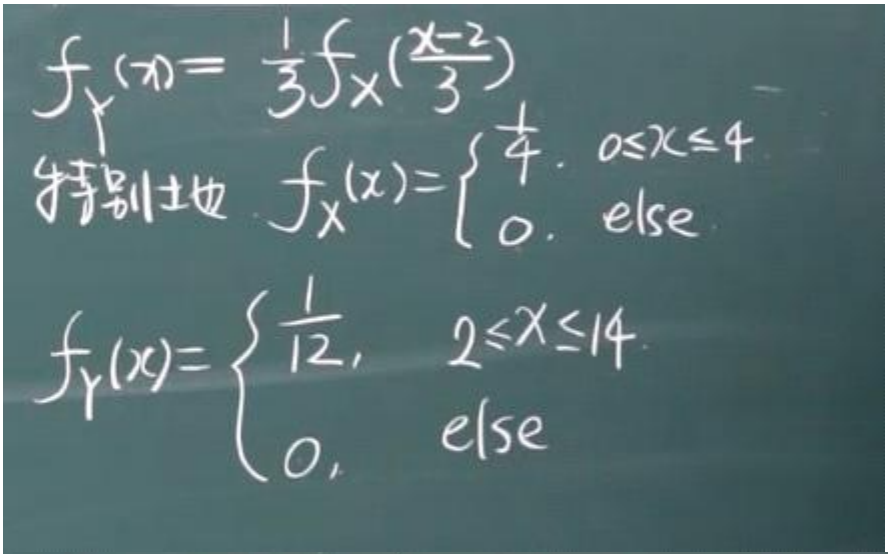


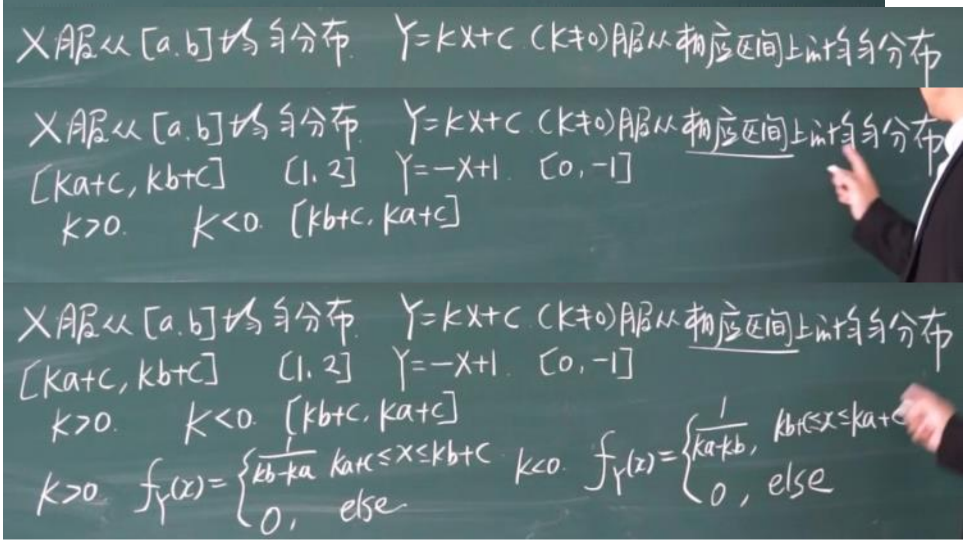
达到第一步，将Y的分布函数变成X的分布函数，再对X求导，分布函数求导就是密度函数，复合函数求导



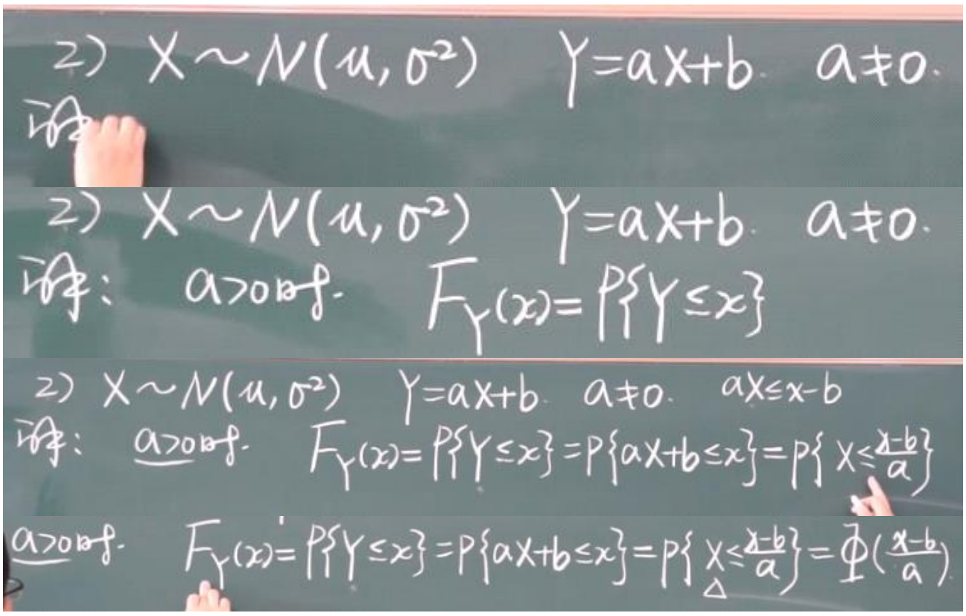


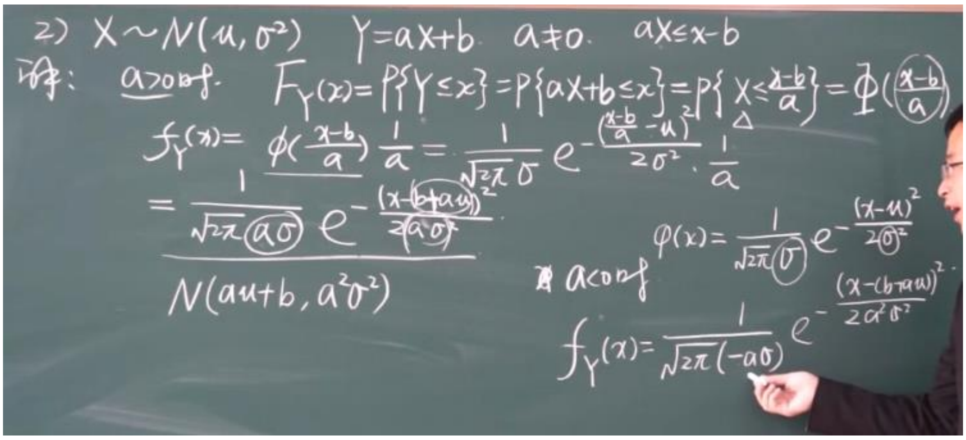
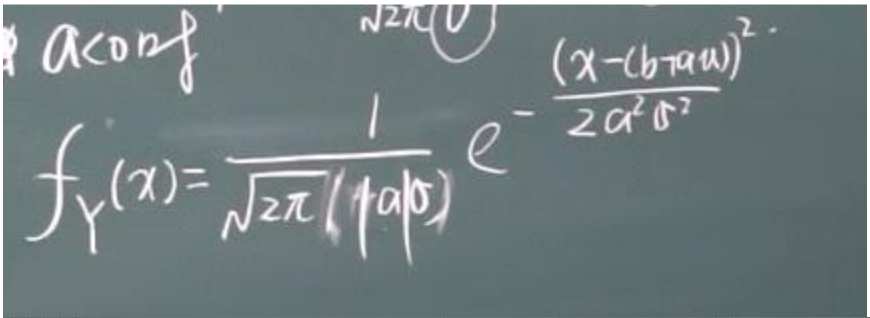
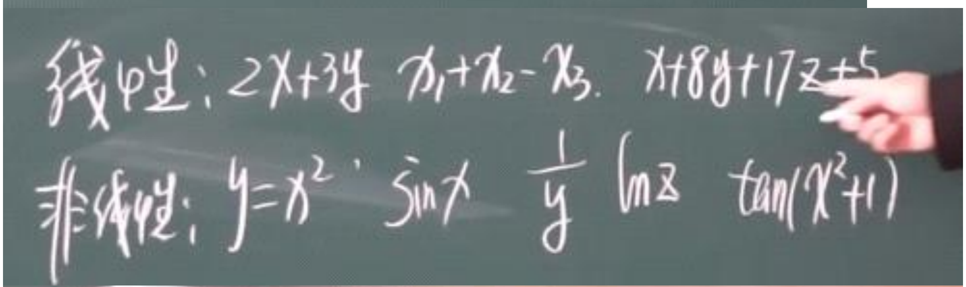
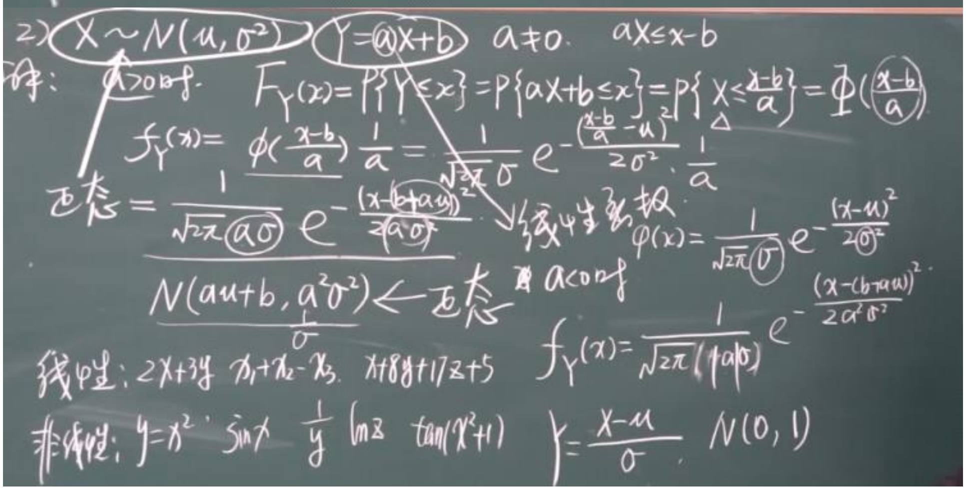
这是一个均匀分布



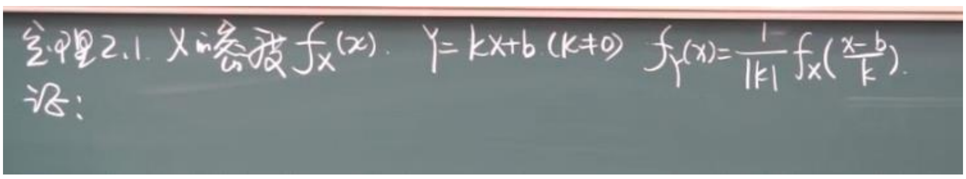


例题2 已知x服从正态分布，求Y的分布函数并求导




2) X ~ N(u, σ²) Y=aX+b a≠0 aX≤x−b
解: a>0时 F_Y(x)=P{Y≤x}=P{aX+b≤x}=P{X≤(x−b)/a}=Φ((x−b)/a)
f_Y(x)= φ((x−b)/a) 1/a = 1/(√2π σ) e^{−((x−b)/a −u)²/(2σ²)} · 1/a
= 1/(√2π aσ) e^{−(x−(b+au))²/(2(aσ)²)}
N(au+b, a²σ²)
φ(x)= 1/(√2π σ) e^{−(x−u)²/(2σ²)}
a<0时
f_Y(x)= 1/(√2π (−aσ)) e^{−(x−(b+au))²/(2a²σ²)}

a<0时
f_Y(x)= 1/(√2π (|a|σ)) e^{−(x−(b+au))²/(2a²σ²)}

线性: 2X+3y x₁+x₂−x₃. X+8y+17z+5
非线性: y=x² sinx 1/y lnz tan(x²+1)

2) X ~ N(u, σ²) Y=aX+b a≠0 aX≤x−b
解: a>0时 F_Y(x)=P{Y≤x}=P{aX+b≤x}=P{X≤(x−b)/a}=Φ((x−b)/a)
f_Y(x)= φ((x−b)/a) 1/a = 1/(√2π σ) e^{−((x−b)/a −u)²/(2σ²)} · 1/a
正态 = 1/(√2π aσ) e^{−(x−(b+au))²/(2(aσ)²)} 线性函数
N(au+b, a²σ²) ← 正态
φ(x)= 1/(√2π σ) e^{−(x−u)²/(2σ²)}
a<0时
f_Y(x)= 1/(√2π (|a|σ)) e^{−(x−(b+au))²/(2a²σ²)}
线性: 2X+3y x₁+x₂−x₃. X+8y+17z+5
非线性: y=x² sinx 1/y lnz tan(x²+1) Y=(X−u)/σ N(0,1)

定理


定理2.1 X的密度f_X(x). Y=kX+b (k≠0) f_Y(x)= 1/|k| f_X((x−b)/k).
证:

定理2.1 X的密度 $f_X(x)$，$Y=kX+b\ (k\neq 0)$，$f_Y(x)=\frac{1}{|k|}f_X\left(\frac{x-b}{k}\right)$

证：$k<0$，$F_Y(x)=P\{Y\le x\}=P\{kX+b\le x\}=P\{X\ge \frac{x-b}{k}\}=1-P\{X<\frac{x-b}{k}\}$

$=1-F_X\left(\frac{x-b}{k}\right)$

$f_Y(x)=\frac{1}{|k|}f_X\left(\frac{x-b}{k}\right)$

例题3

(3). $X\sim N(0,1)$ $Y=X^2$

解：$x\le 0$时 $F_Y(x)=$

(3). $X\sim N(0,1)$ $Y=X^2$

解：$x\le 0$时 $F_Y(x)=P\{Y\le x\}=P\{X^2\le x\}=0$

(3). $X\sim N(0,1)$ $Y=X^2$

解：$x<0$时 $F_Y(x)=P\{Y\le x\}=P\{X^2\le x\}=0$

$x\ge 0$时 $F_Y(x)=P\{Y\le x\}=P\{X^2\le x\}=P\{-\sqrt{x}\le X\le \sqrt{x}\}=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$=2\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

两边求导，右边是变上限积分求导

变上限积分求导的三种形式

1、公式法

$$\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)dt\right]'=f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x)$$

$=2\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$f_Y(x)=\cancel{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\cancel{\frac12}x^{-\frac12}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac12}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

这就是卡方分布

例题4

(4) $X \quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & 0<x<e-1 \\ 0. & \text{else} \end{cases}$

(4) $X \quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & 0<x<e-1 \\ 0. & \text{else} \end{cases} \quad Y=\sqrt{X} \quad P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

解：$x<0$时，$F_Y(x)=P\{Y\le x\}=P\{\sqrt{X}\le x\}=0$

$x\geq 0$时 $\cdots\cdots P\{X\le x^2\}=\int_{-\infty}^{x^2} f(t)\,dt$

$=\cancel{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}+\int_{0}^{x^2} f(t)\,dt \quad \begin{cases} 1 & x^2\geq e-1 \\ \ln(1+x^2), & 0\le x^2<e-1 \end{cases}$

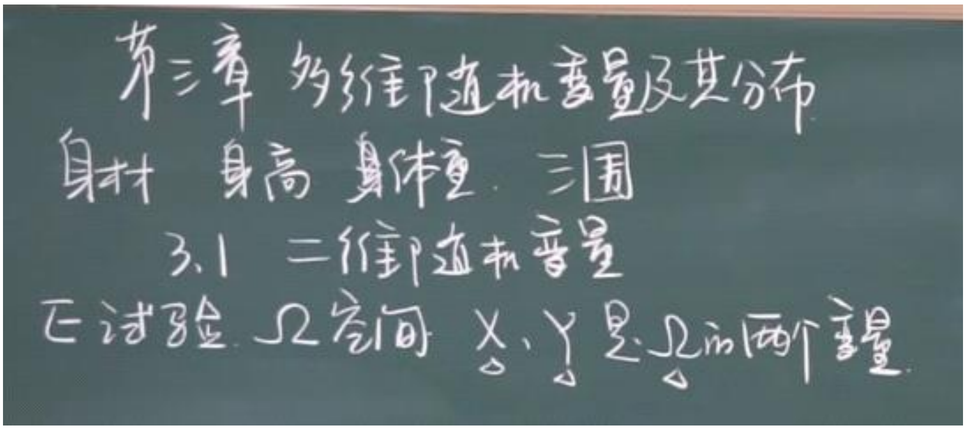
$\int_0^{x^2}\frac{1}{t+1}\,dt=\ln(t+1)\Big|_0^{x^2}$
$=\ln(1+x^2)$

$$F_Y(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \ln(1+x^2). & 0\le x<\sqrt{e-1} \\ 1 & x\geq\sqrt{e-1} \end{cases}$$

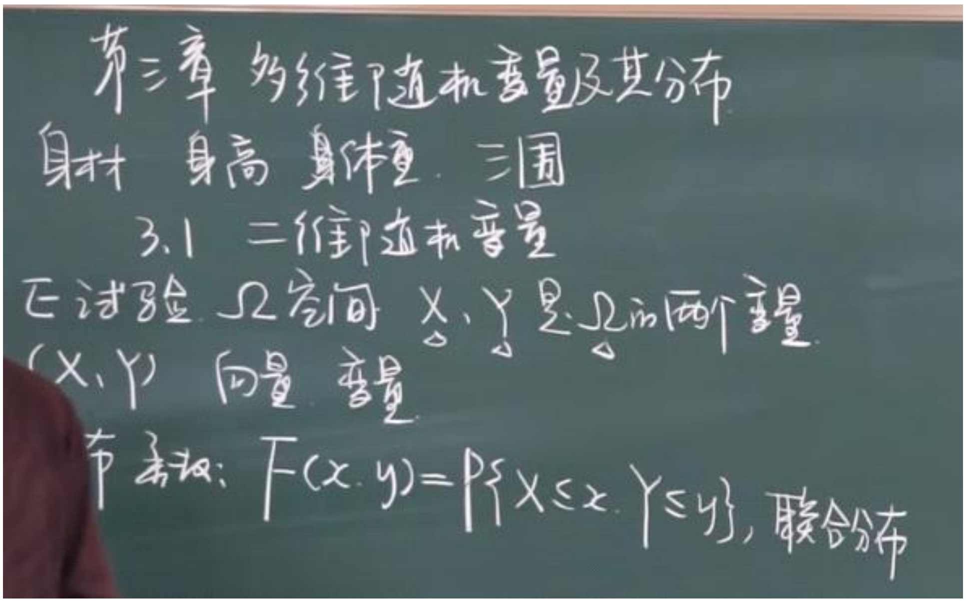
$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2}. & 0\le x<\sqrt{e-1}. \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

二维随机变量及其分布函数

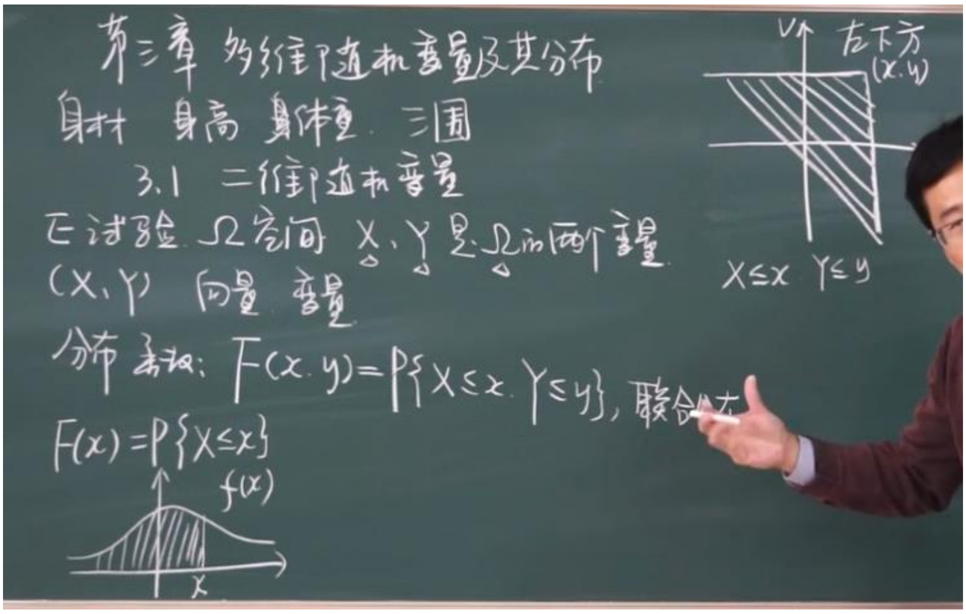
2024年1月21日　　10:19

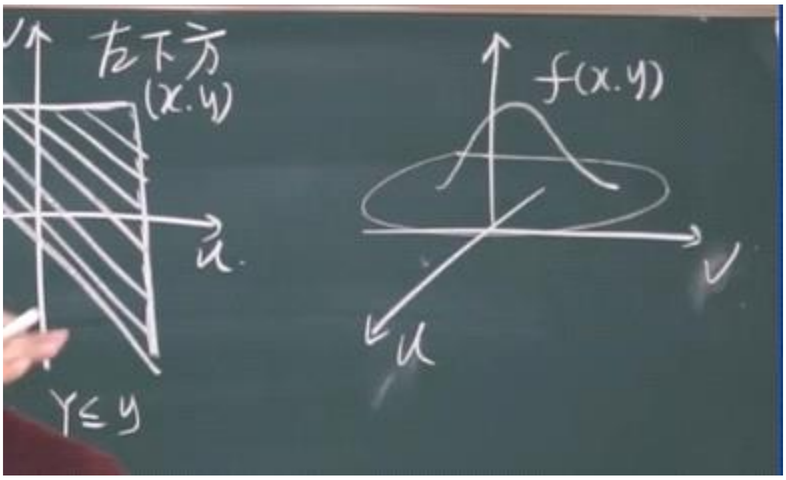


X、y是同一样本空间Ω的两个变量



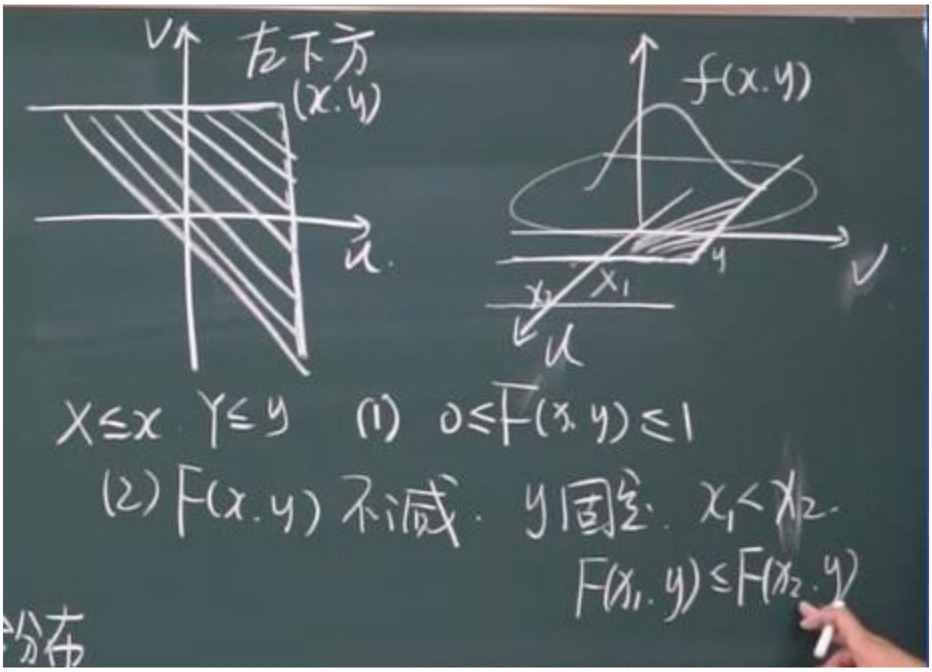
X,Y共同控制的联合分布函数



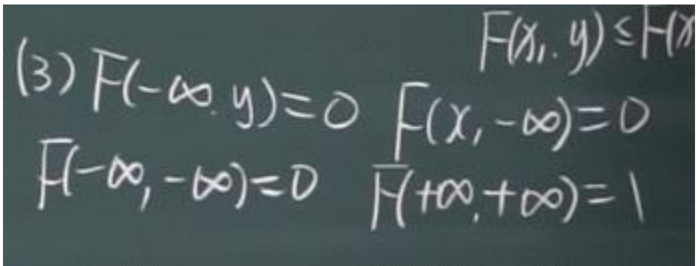


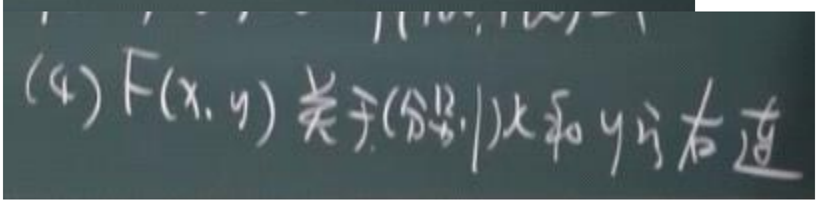
帽子性质

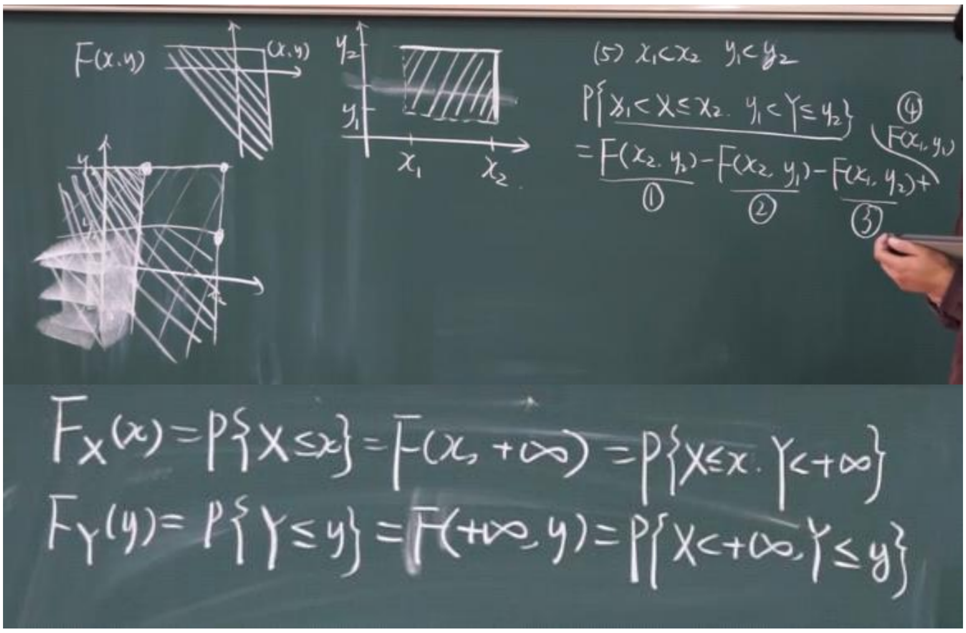
二维随机变量分布函数的性质



F（x,y）是x,y的不减函数



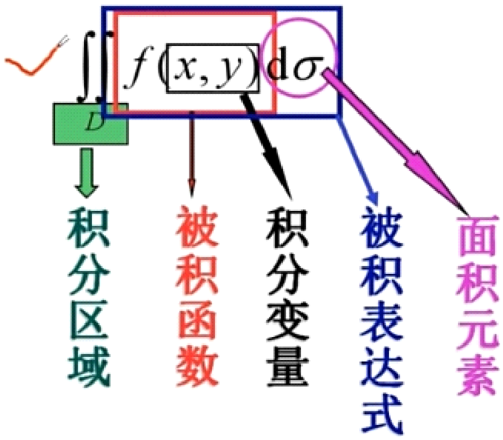



F(x,y)
(x,y)
(5) x1<x2 y1<y2
P{x1<X≤x2, y1<Y≤y2}
=F(x2,y2)-F(x2,y1)-F(x1,y2)+F(x1,y1)
FX(x)=P{X≤x}=F(x,+∞)=P{X≤x, Y<+∞}
FY(y)=P{Y≤y}=F(+∞,y)=P{X<+∞, Y≤y}

二重积分概念

2024年1月21日 10:37

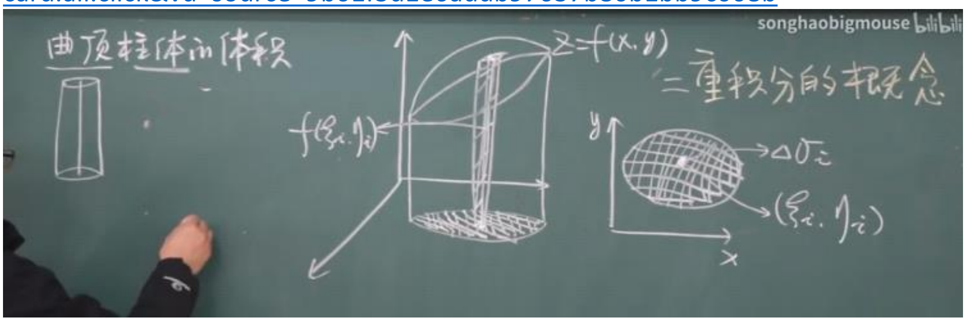
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

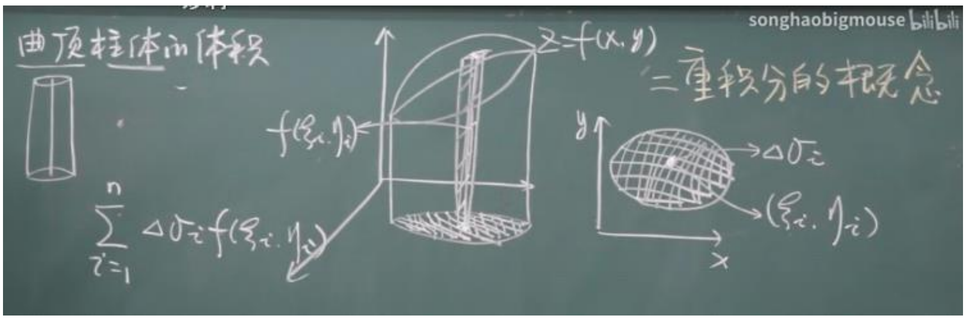


几何含义：

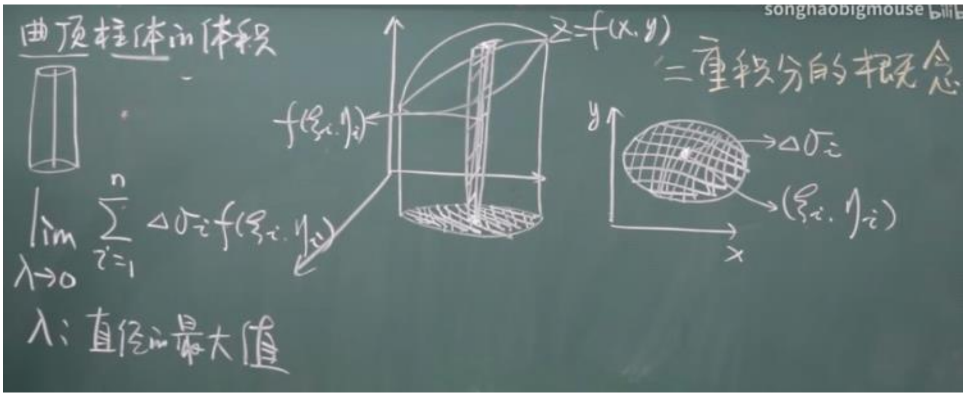
底面积为D，顶面为$z=f(x,y)$的曲顶柱体的体积。

https://www.bilibili.com/video/BV1Bt41187ZF/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=9b01f3d1e6addb97637b80b1bb9c008b



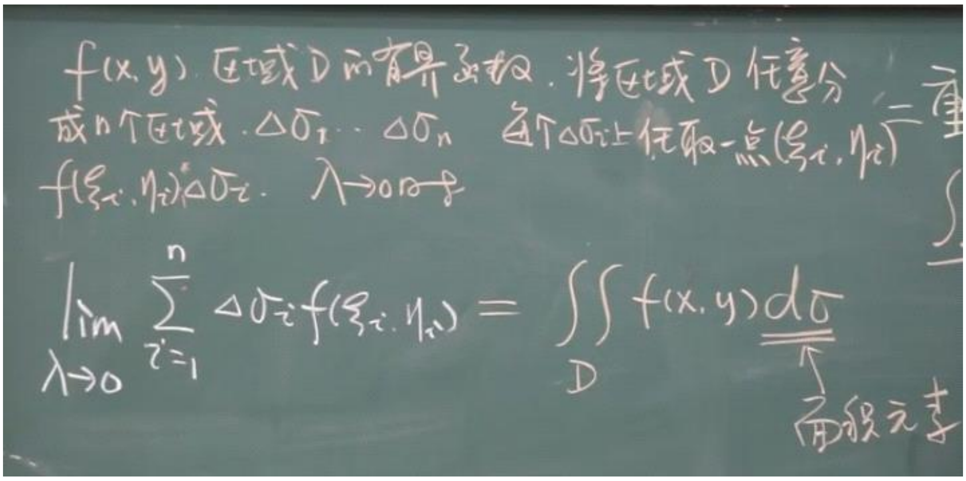


体积微分

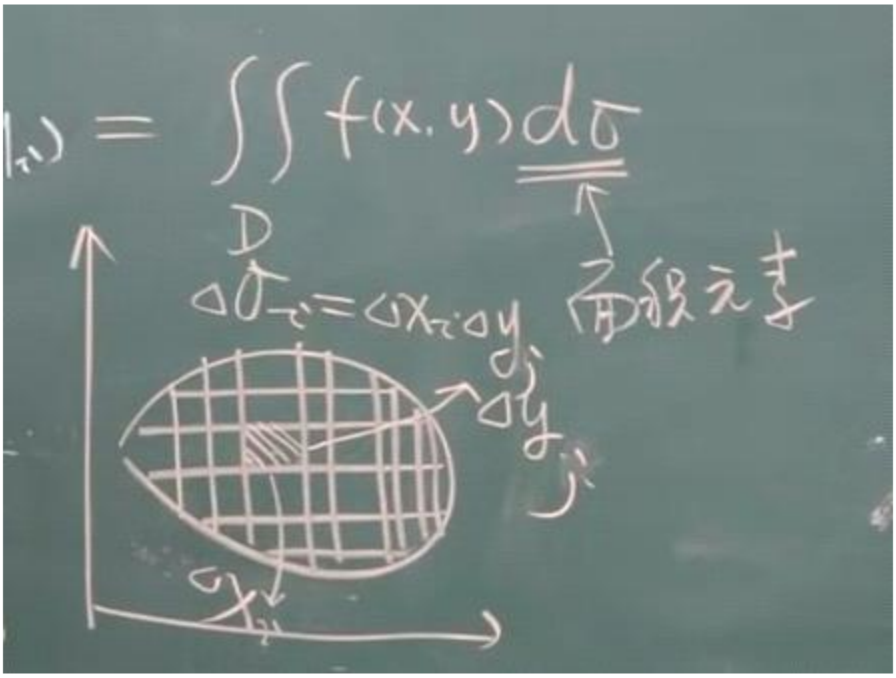


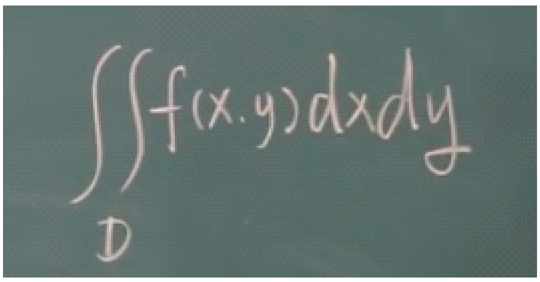
λ小区间直径的最大值，直径是小区间任意两点之间的最大距离

二重积分的定义

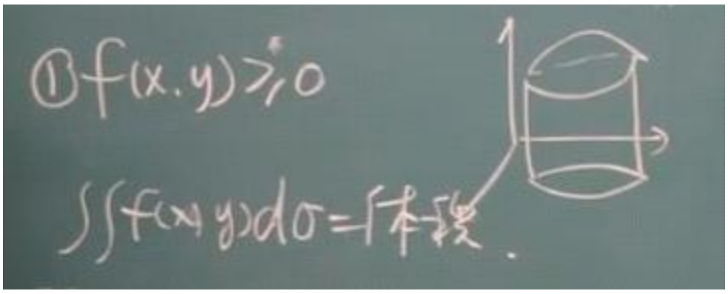


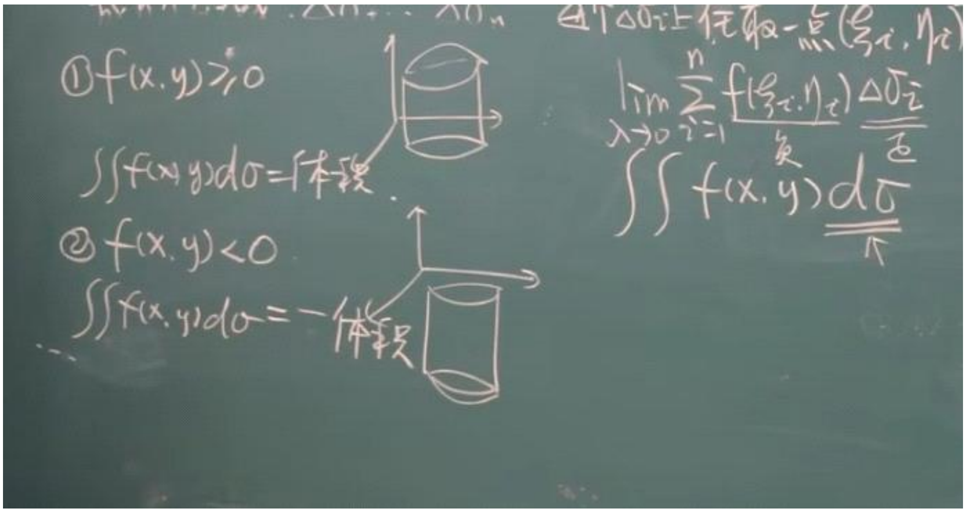
积分区域和定义域两回事，注意区分





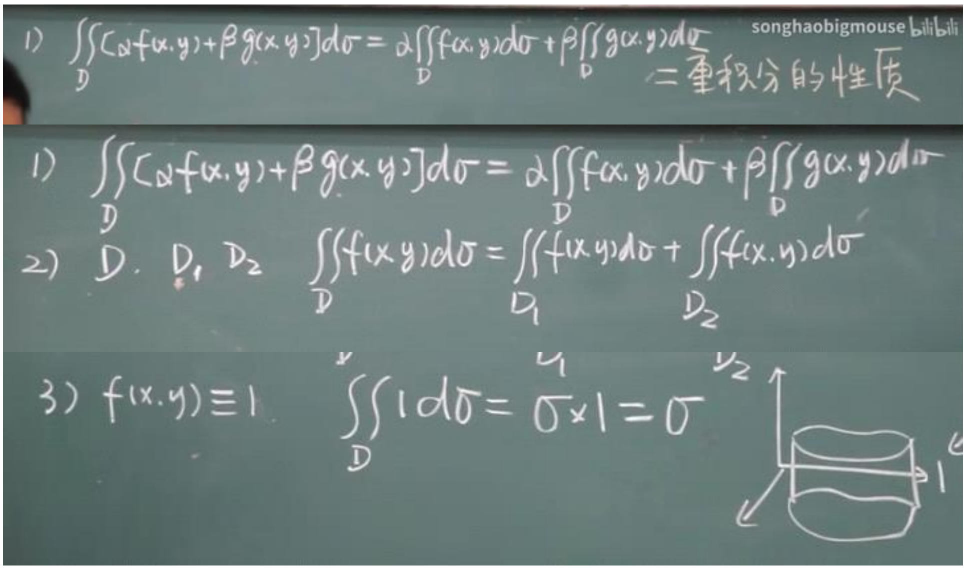
直角坐标系下求二重积分

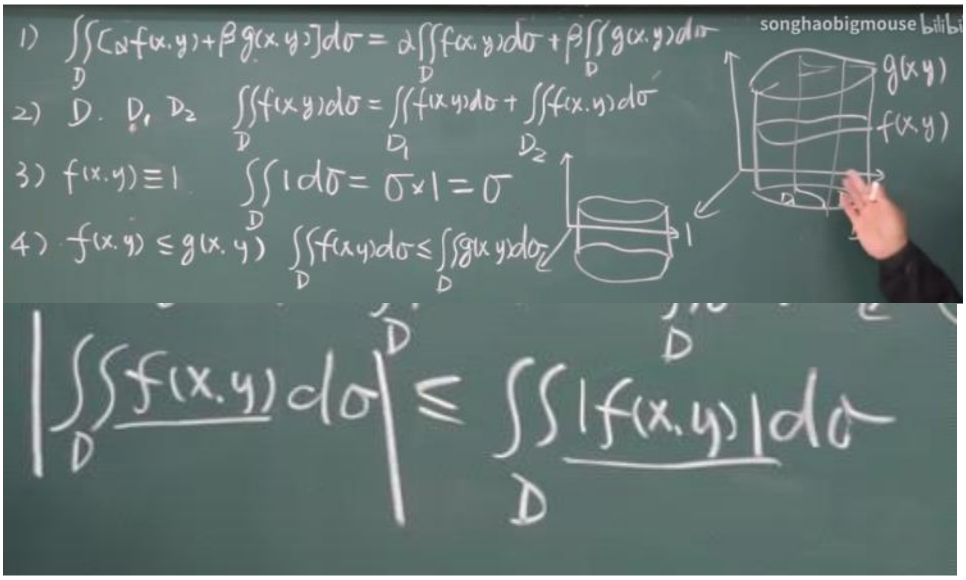




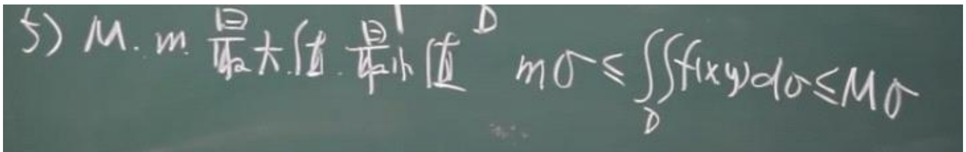
二重积分性质

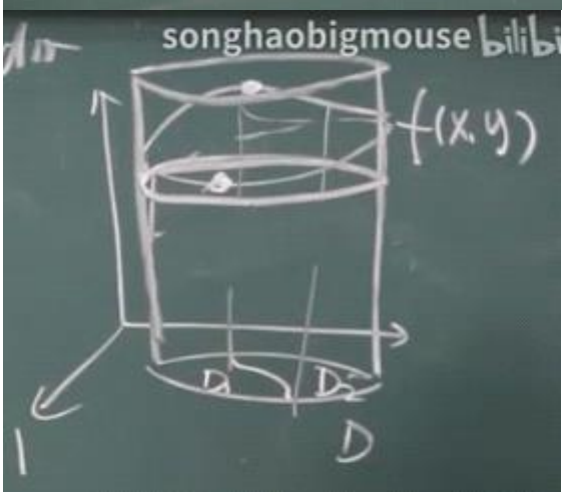
2024年1月21日 11:10

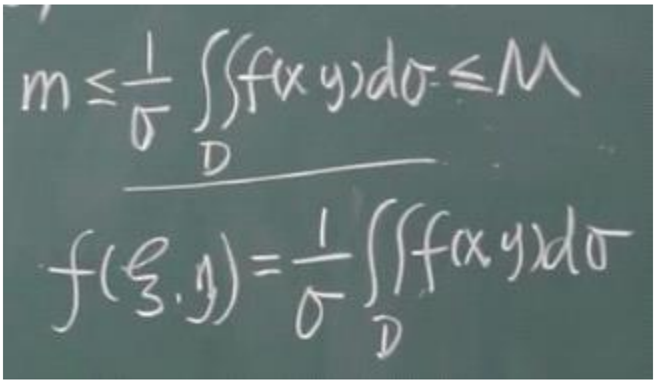


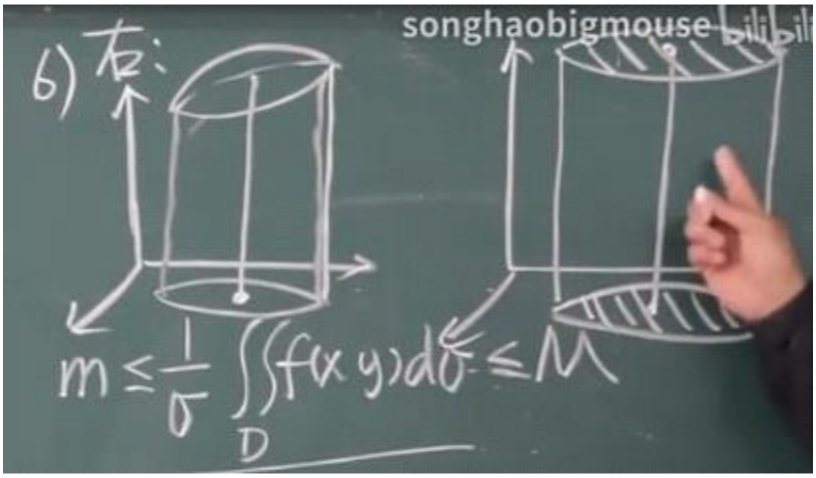


5）f(x,y)的最大值M最小值m,则有





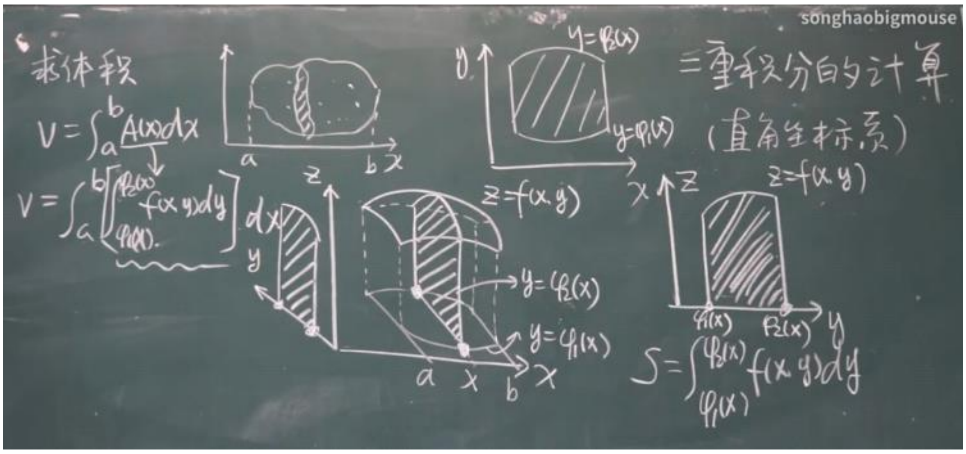




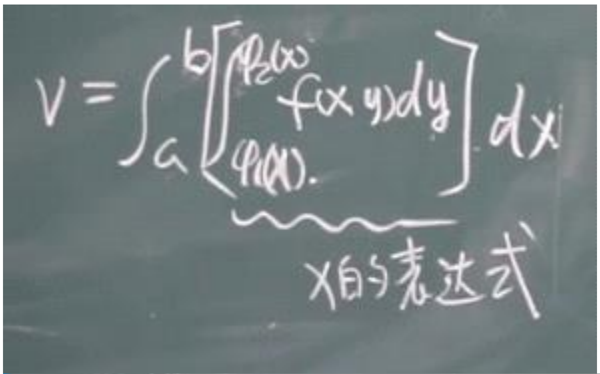
一定可以找到一点，这一点平顶柱体的体积等于原先曲顶柱体的体积

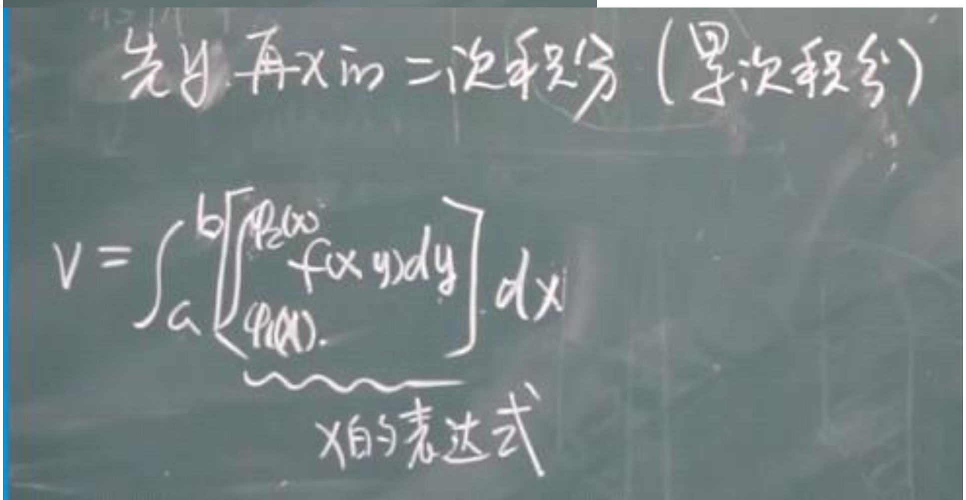
二重积分的计算（直角坐标）

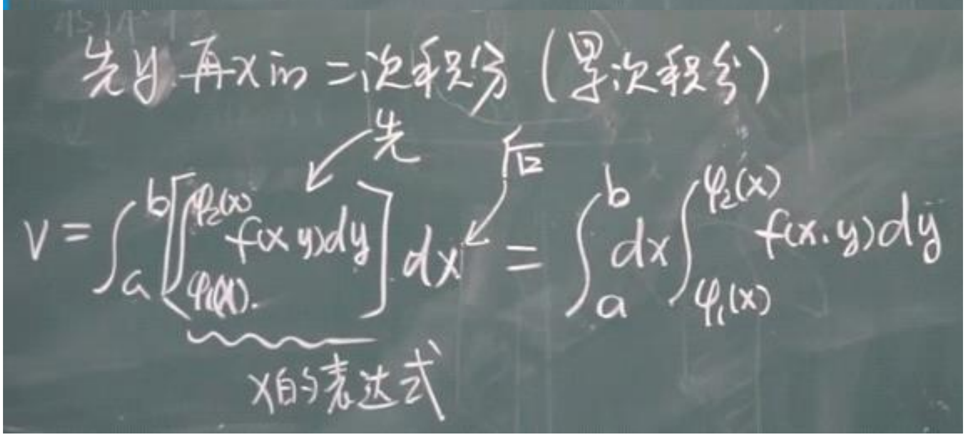
2024年1月21日 11:48

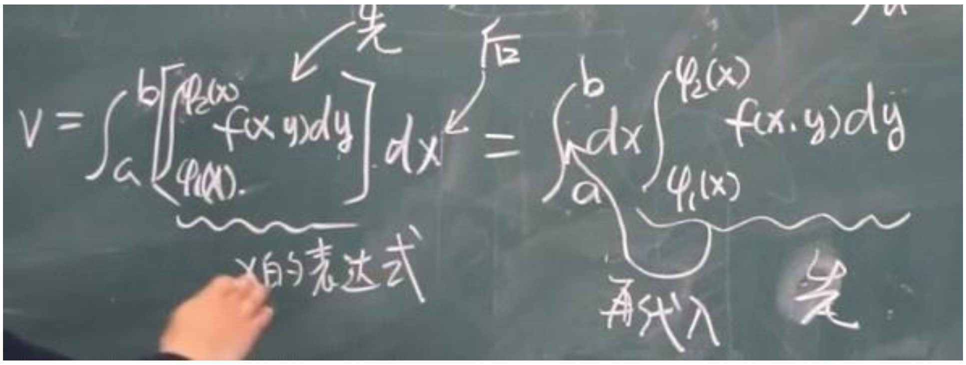


这个公式其实隐含一种条件，就是X被固定住了

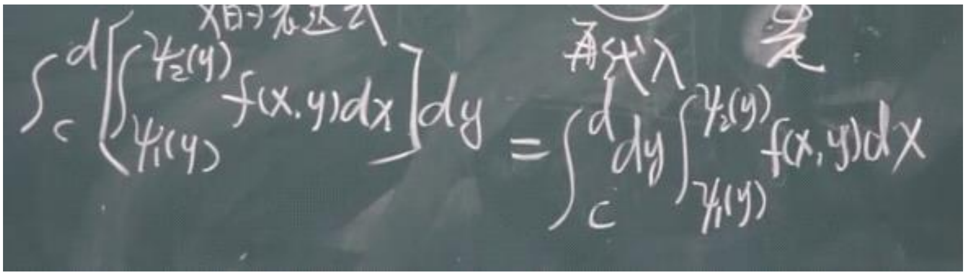








先对y积分，算出来后再对x积分



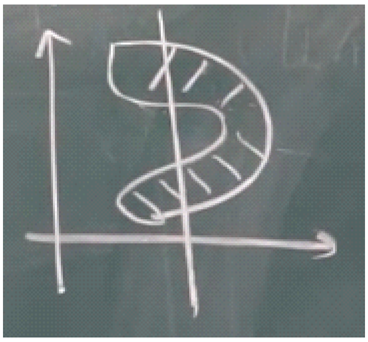
一样的

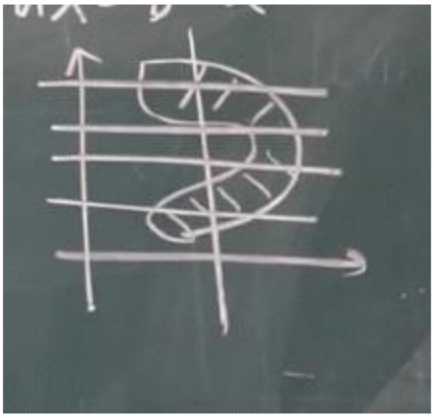
解题思路

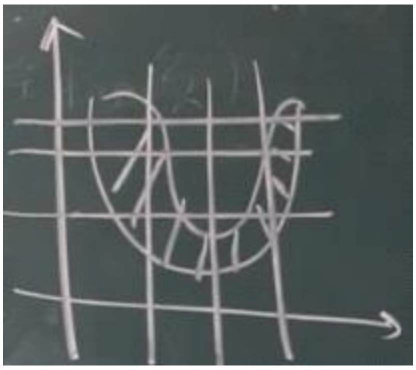
1.画出积分区域（xoy平面）

2.确定是对x积分还是对y积分

判断用x还是用y

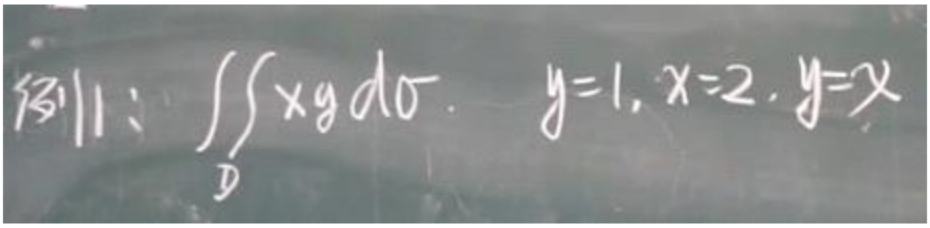

用垂直于x轴的线去切，不能超过两个交点，上图超过两个交点就不能用x，必须用y


垂直于y轴的去切，只有两个

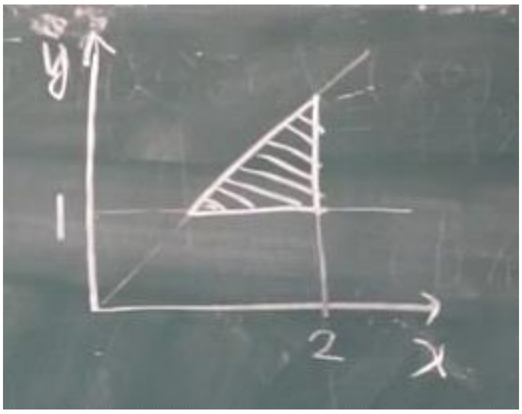


这种用y就不行，必须用x

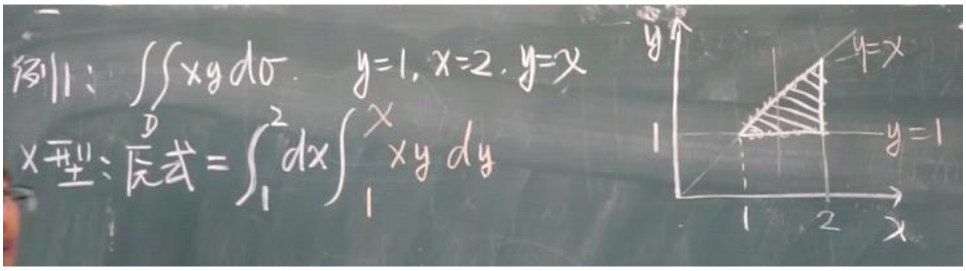
例1



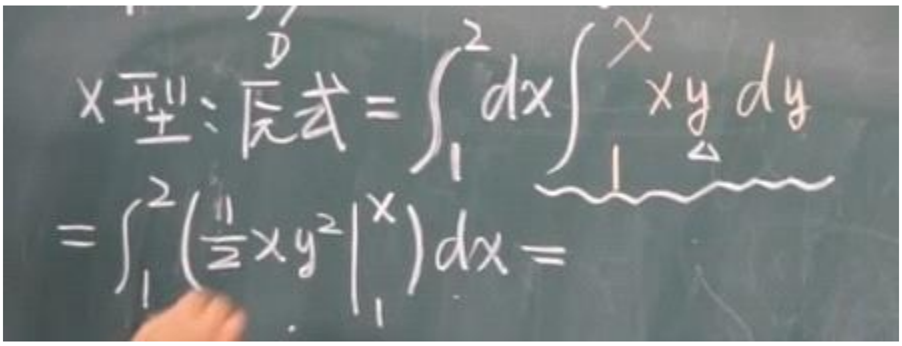
解题思路：1.先画积分区域



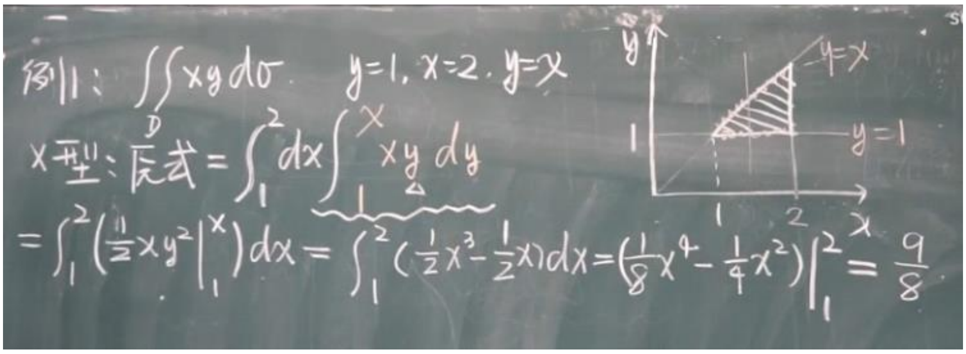
2.看用x还是用y，不管用x还是y都是两个交点，应该是两个都行



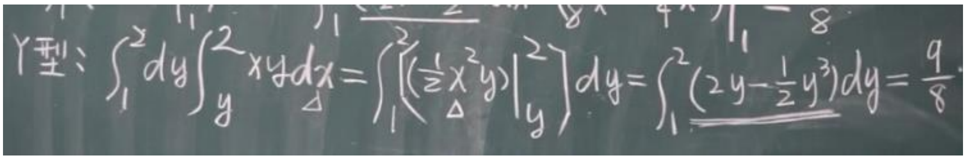
先求后面的，此时将x看作常数

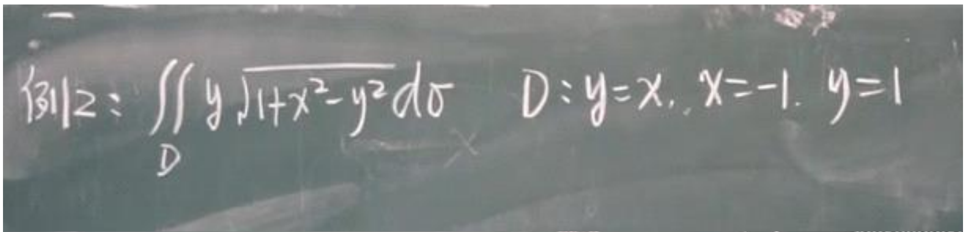


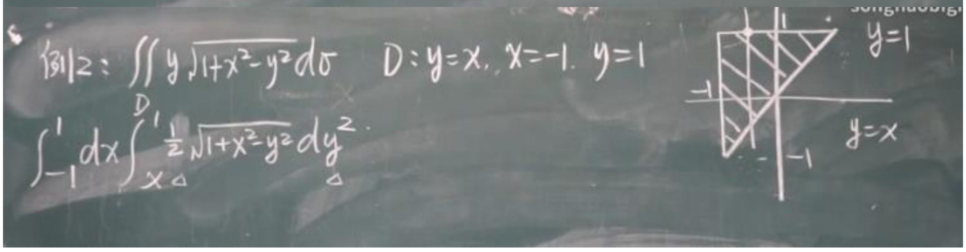
注意此时的x是代入y



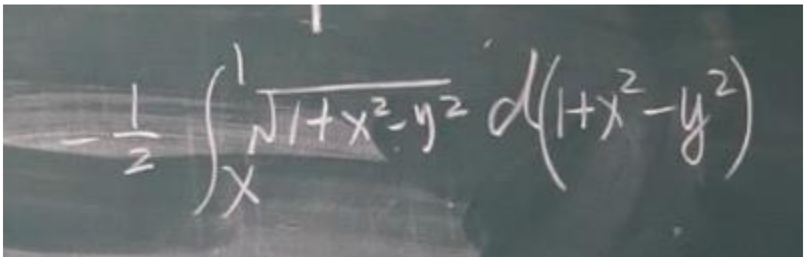
换成对y积分

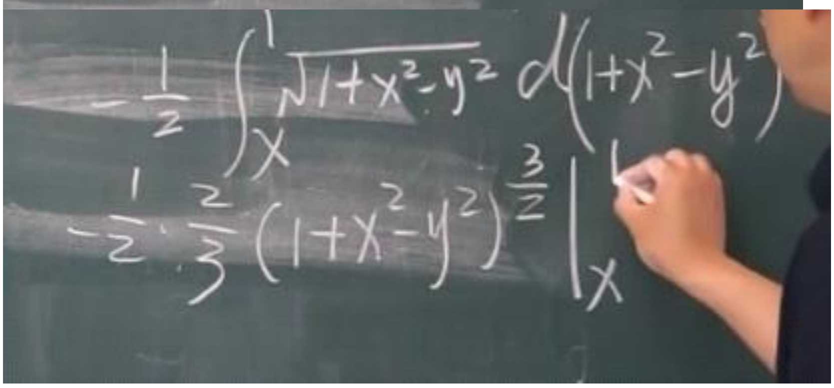






此时x是常数





$$-\frac{1}{2}\int_x^1 \sqrt{1+x^2-y^2}\, d(1+x^2-y^2)$$

$$-\frac{1}{3}(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_x^1$$

$$-\frac{1}{3}(x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$$

$$|x|^3$$

例2：$\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma$　$D: y=x,\ x=-1,\ y=1$

$$\int_{-1}^1 dx\int_x^1 \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-y^2}\,dy^2 = -\frac{1}{3}\int_{-1}^1(|x|^3-1)dx =$$

$$-\frac{2}{3}\int_0^1(x^3-1)dx=\frac{1}{2}$$

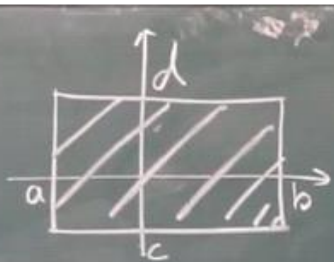
第2种解法对y求积分

$$\int_{-1}^1 dy\int_{-1}^y y\sqrt{1+x^2-y^2}\,dx = \int_{-1}^1 y\,dy\int_{-1}^y \sqrt{1+x^2-y^2}\,dx$$

特殊情况长方形区域

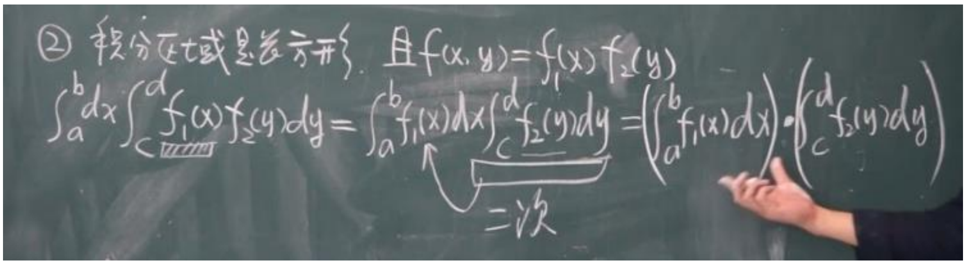
① 积分区域是长方形

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$



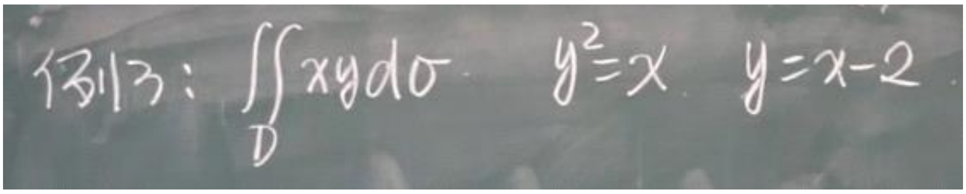
② 积分区域是长方形，且 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$

$$\int_a^b dx\int_c^d f_1(x)f_2(y)\,dy = \int_a^b f_1(x)\,dx\int_c^d f_2(y)\,dy = \int_a^b f_1(x)\,dx\cdot\int_c^d f_2(y)\,dy$$

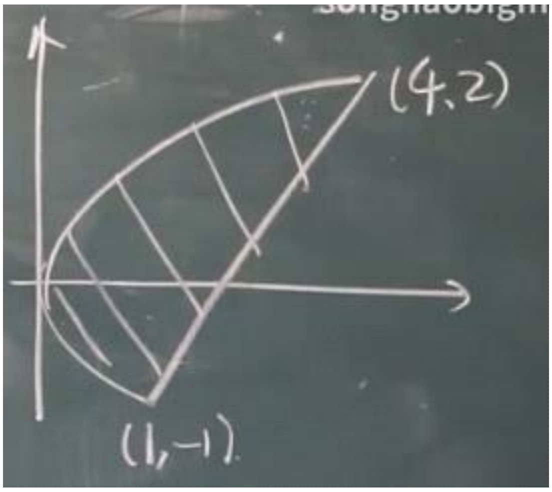


二重积分是必须先积后面的，再求前面的

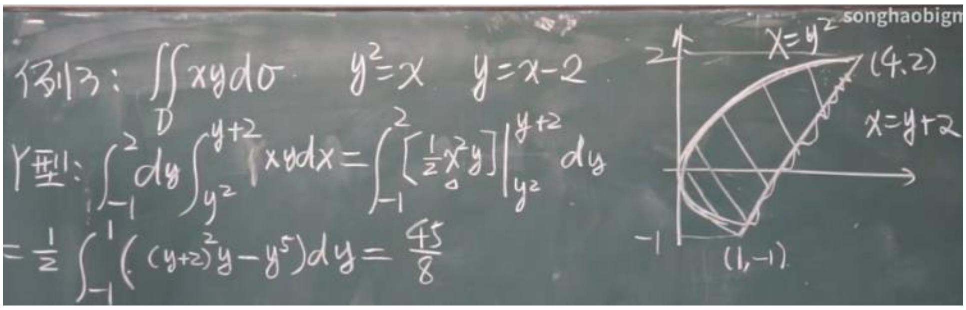
例3



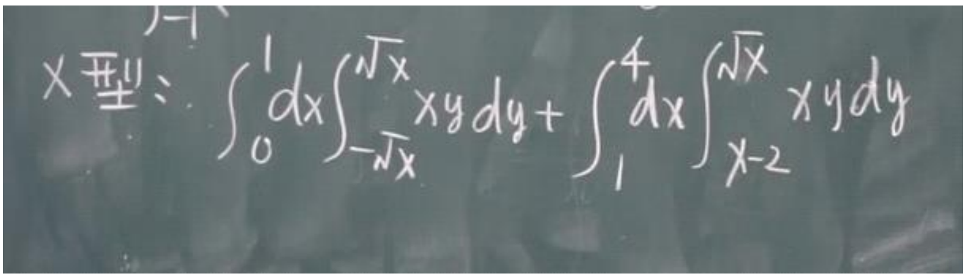
1.画图，求交点

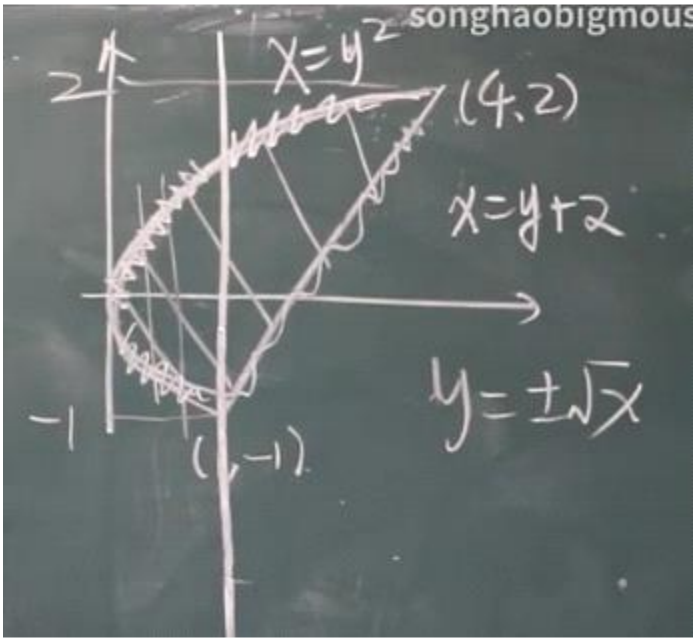


按y形区域来做



如果按x来做，须分成两部分



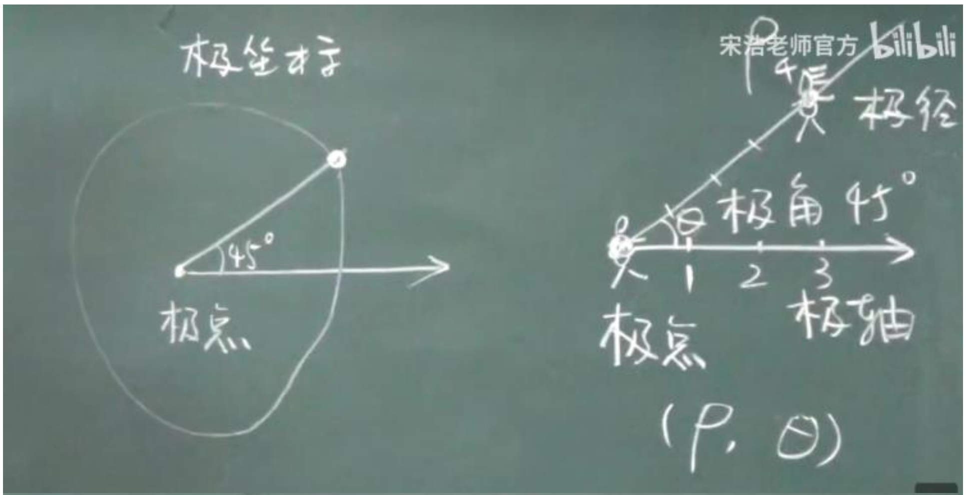


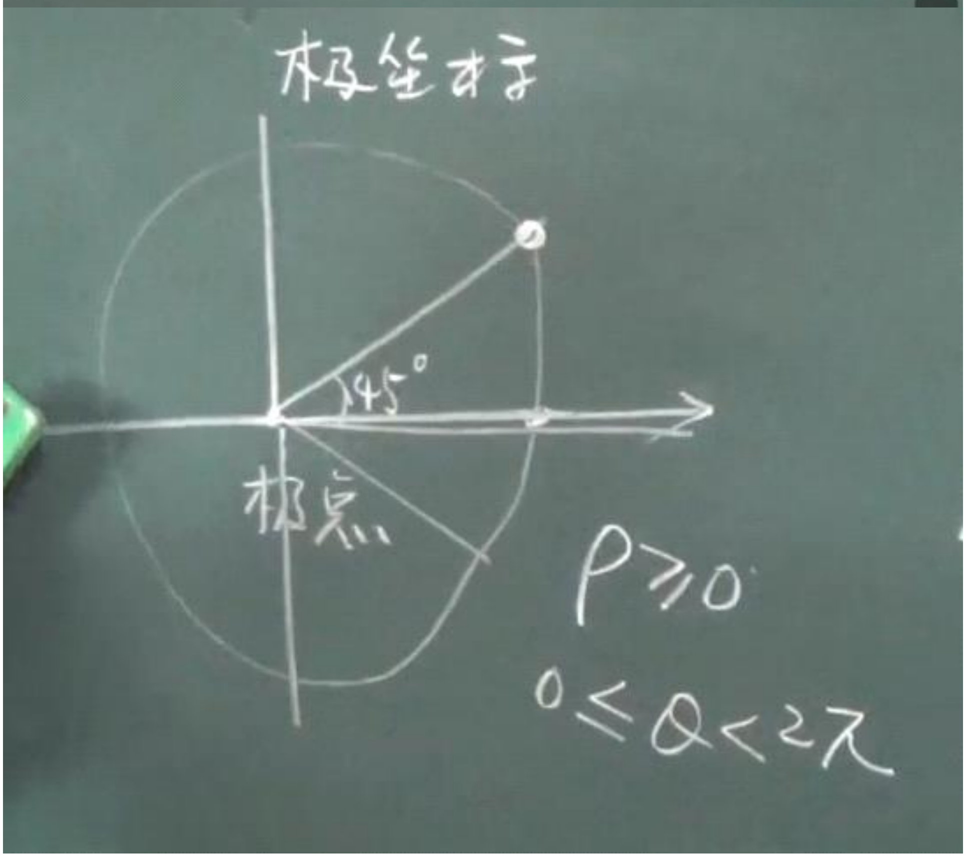
例5两个直交的圆柱体

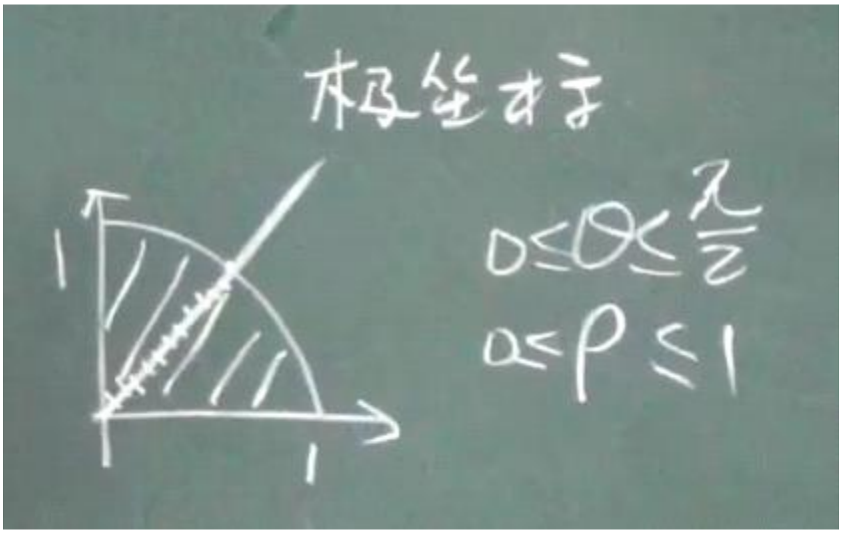
二重积分的计算（极坐标系）

2024年1月26日　17:27

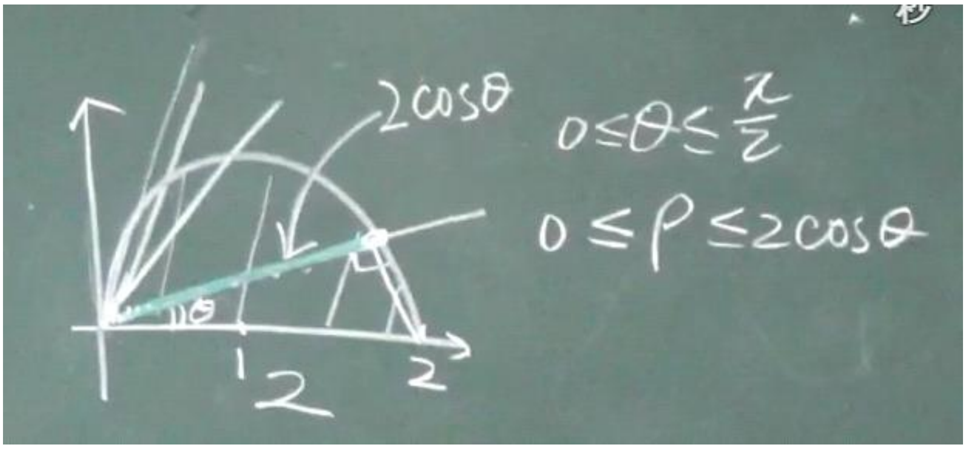
什么是极坐标系

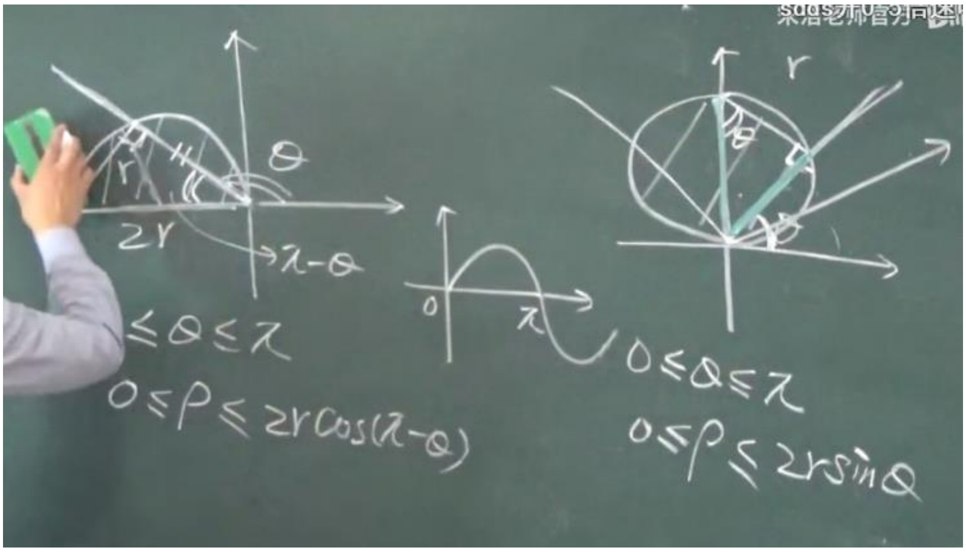


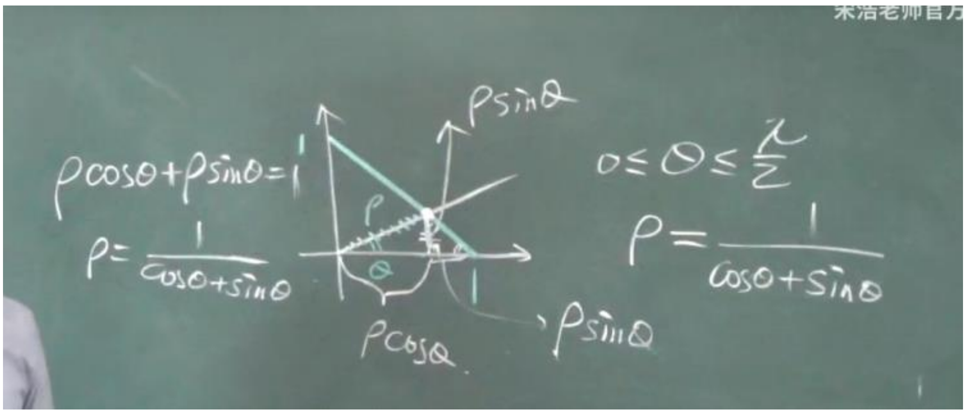




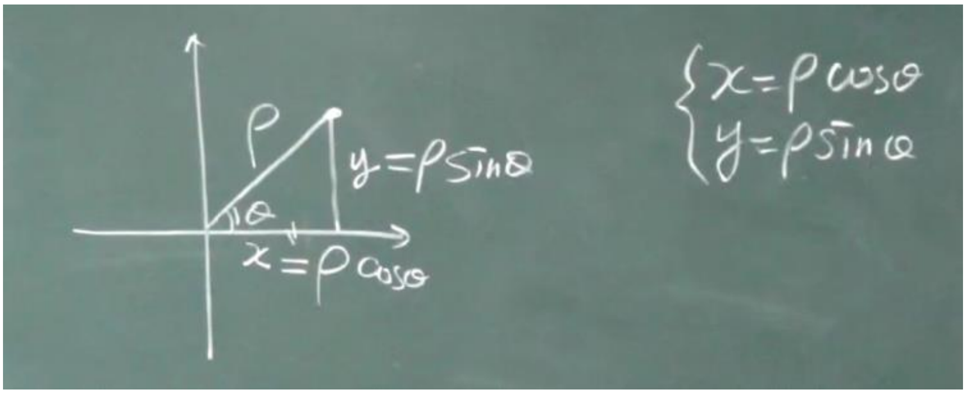
半圆用极坐标系怎么表示

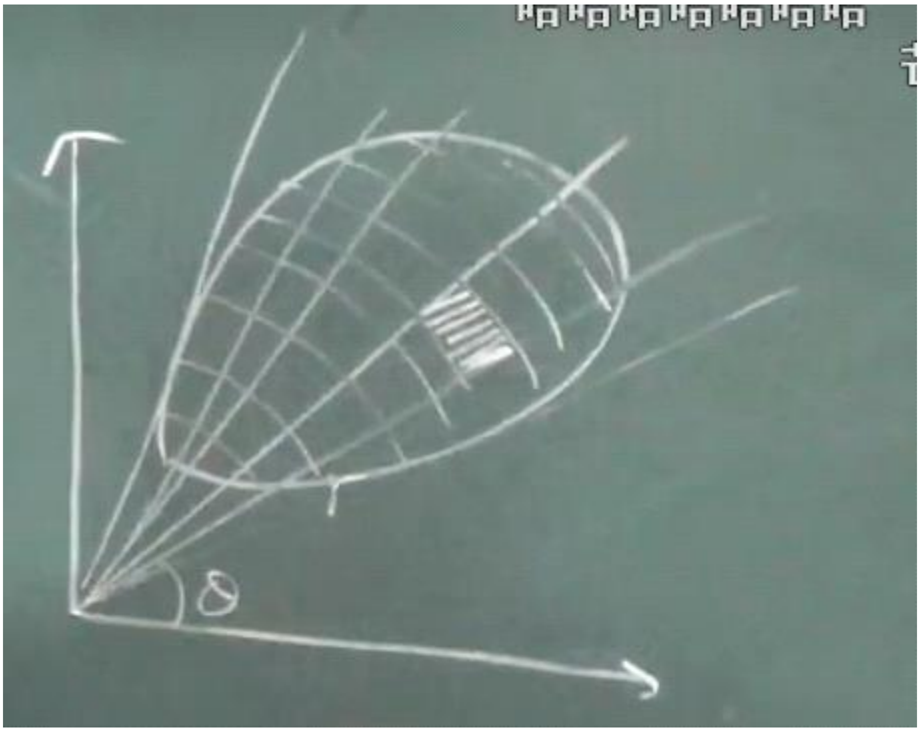




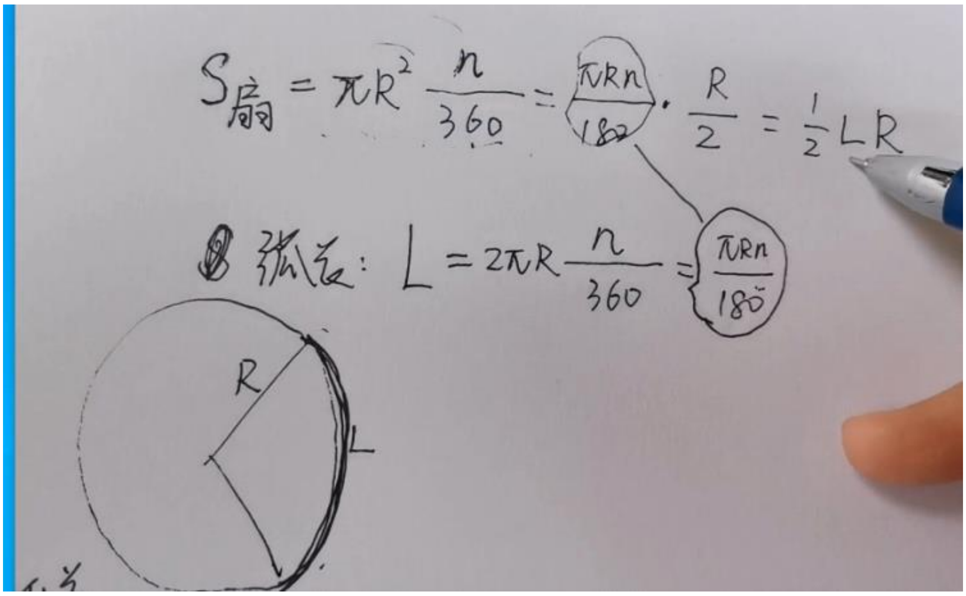


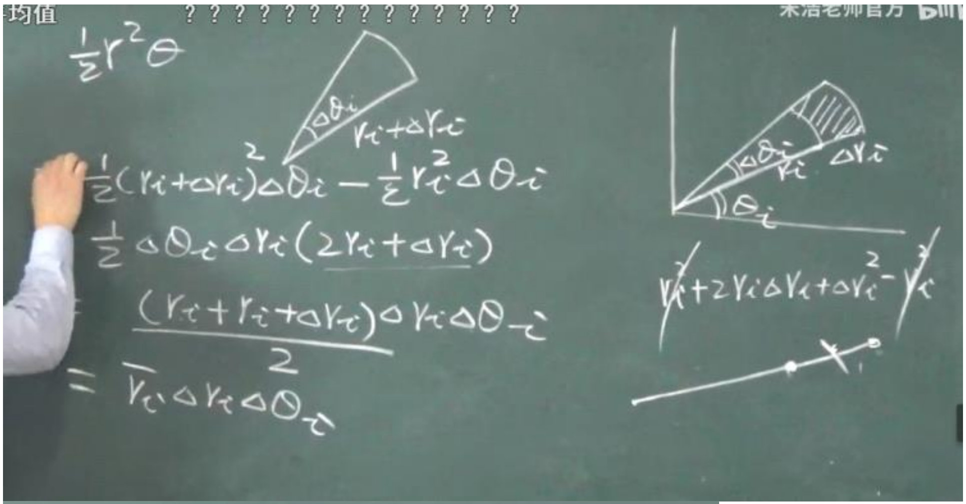
直角坐标和极坐标系之间的关系

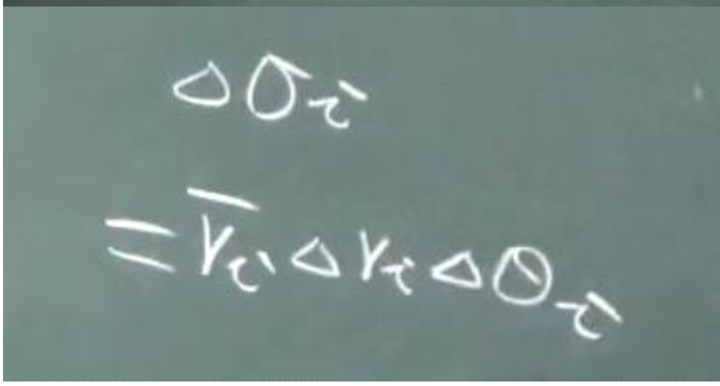




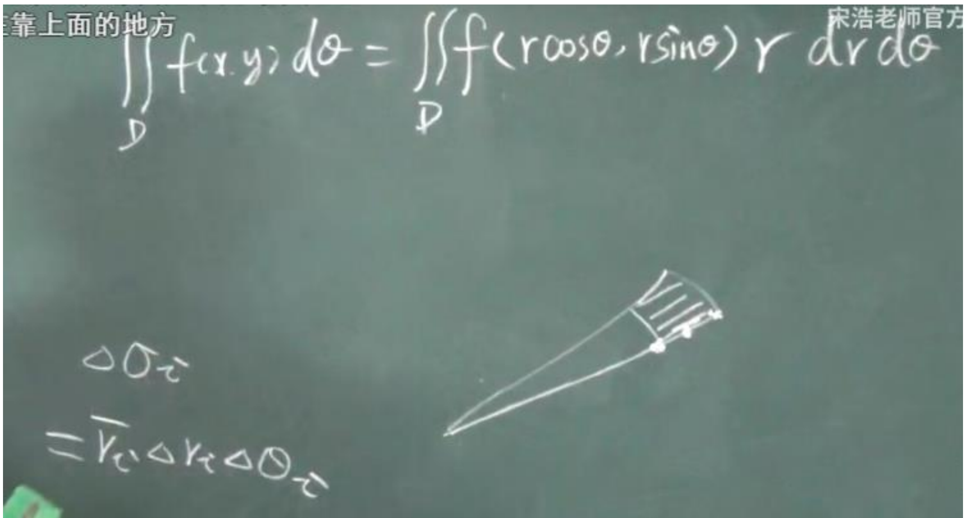
扇形区域求面积

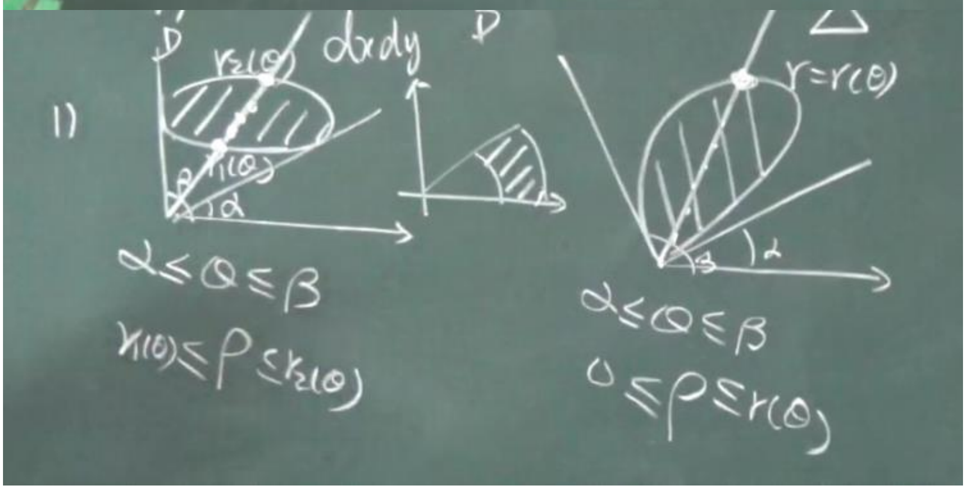


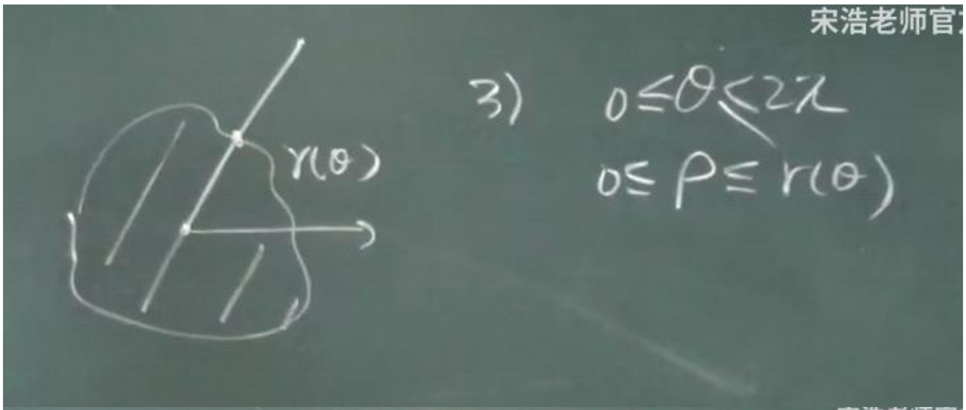




这个积分区域无限小时，均值趋近于0







1) $\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$

$= \int_\alpha^\beta d\theta \underbrace{\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr}_{先}$

3) $0\le\theta\le 2\pi$

$0\le r\le r(\theta)$

解题思路

1) 区域用 r、θ

（扫描）

2) $x = r\cos\theta$

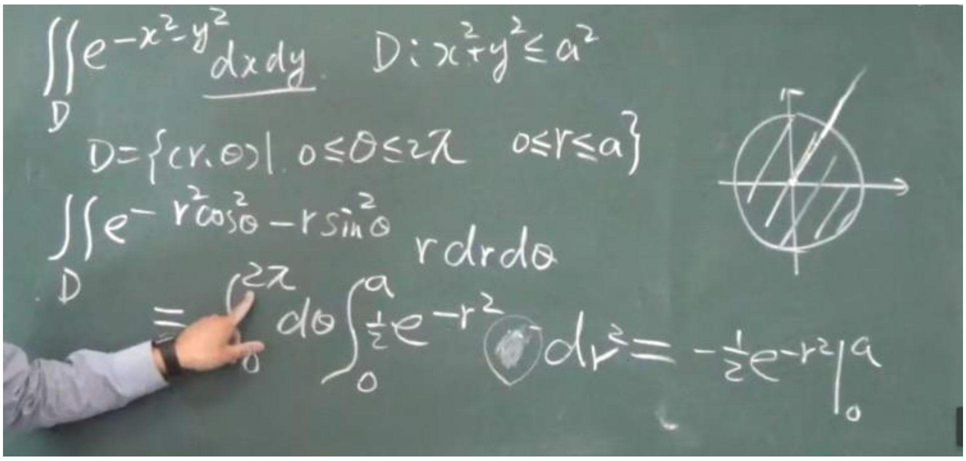
$y = r\sin\theta$

$dxdy = \underset{\triangle}{r}\,dr\,d\theta$

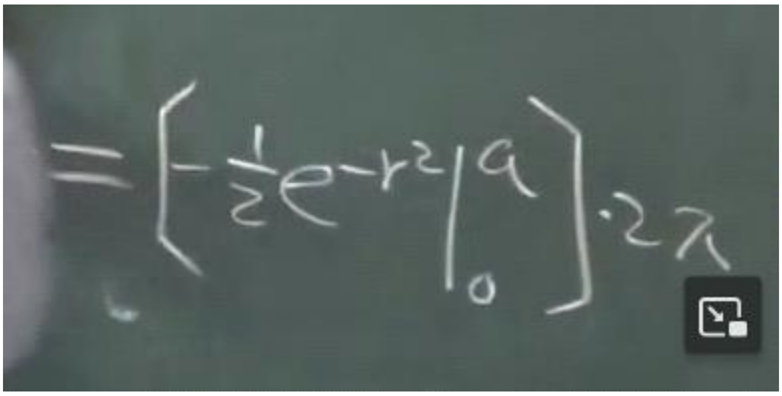
3) $\int_\alpha^\beta d\theta \int_{\_\_}^{\_\_} \_\_\_\_\_\_ \, r\,dr$

例题1

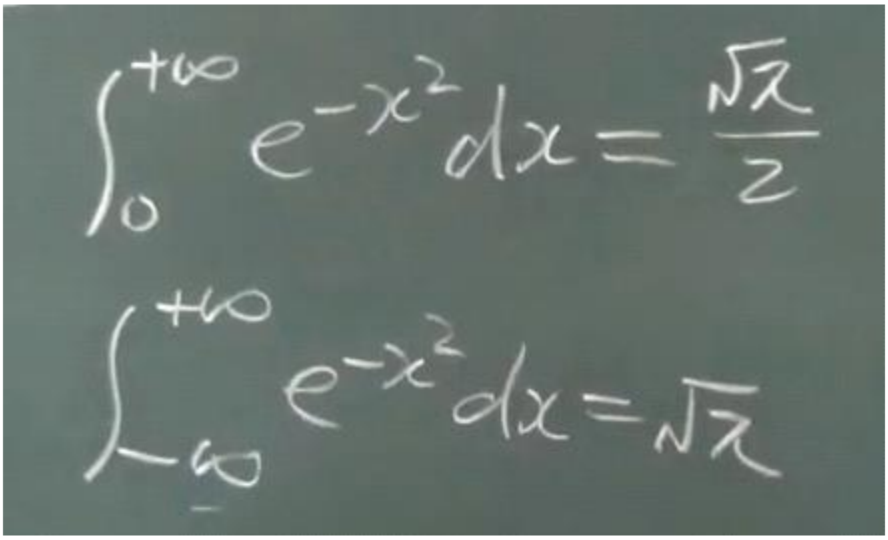
$\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$ $D: x^2+y^2\le a^2$



$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ $D: x^2+y^2\le a^2$
$D=\{(r,\theta)\mid 0\le\theta\le 2\pi \quad 0\le r\le a\}$
$\iint\limits_D e^{-r^2\cos^2\theta-r\sin^2\theta}\, r\,dr\,d\theta$
$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \frac{1}{2}e^{-r^2}dr^2=-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^a$

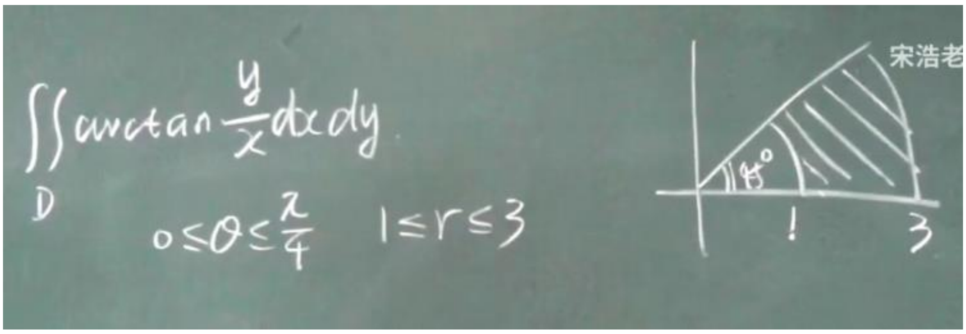


$=\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^a\right]\cdot 2\pi$

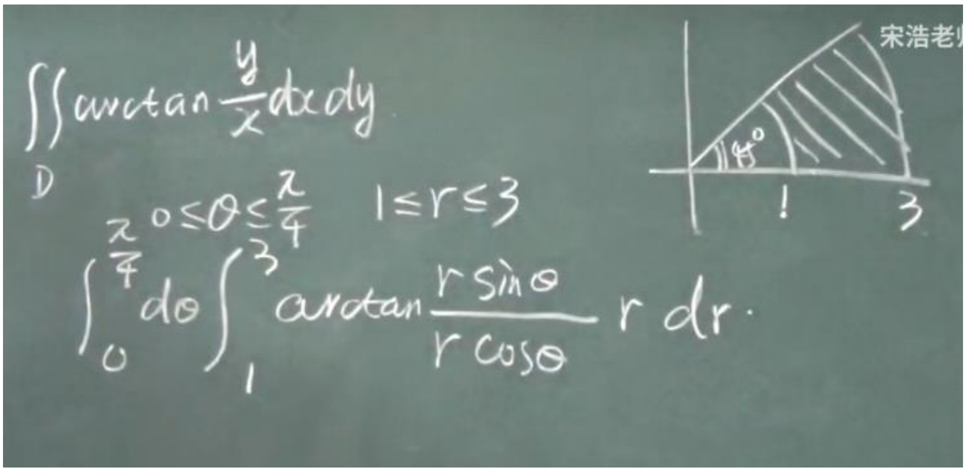


$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

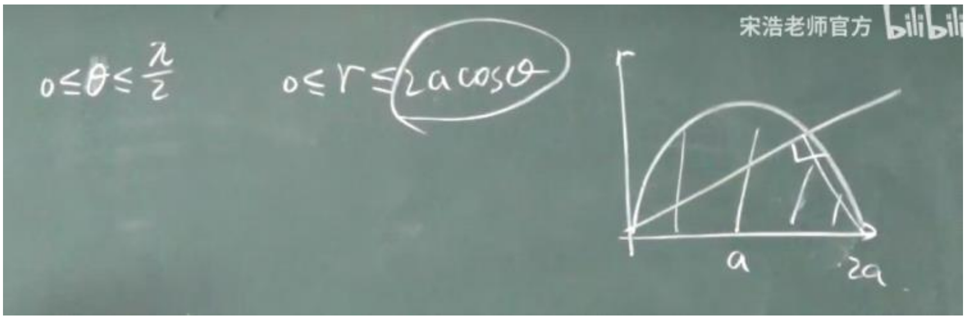
先记住

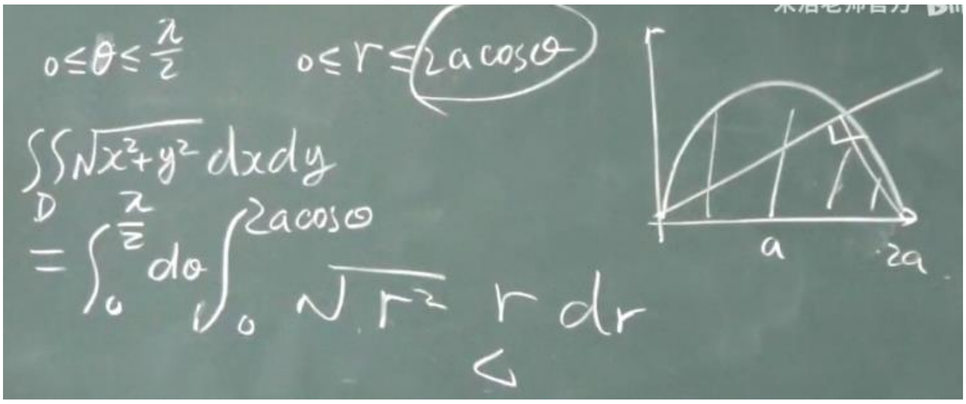


$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy$
$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ $1\le r\le 3$
45°
1
3
宋浩老

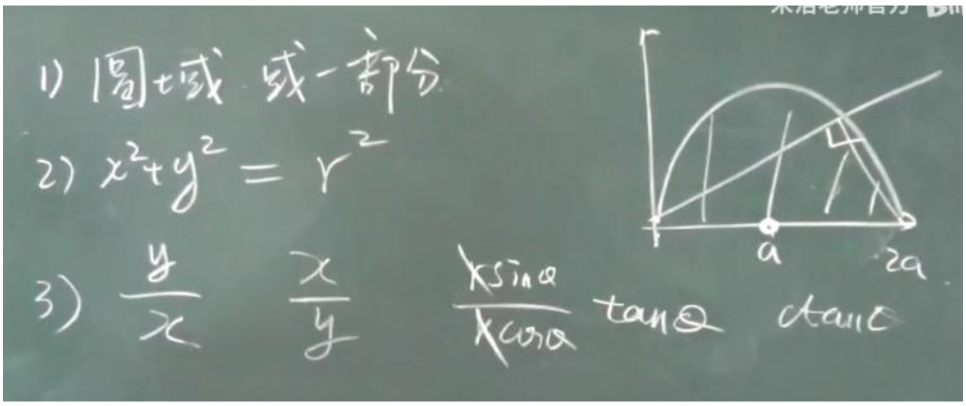


arctan (tanx) =x





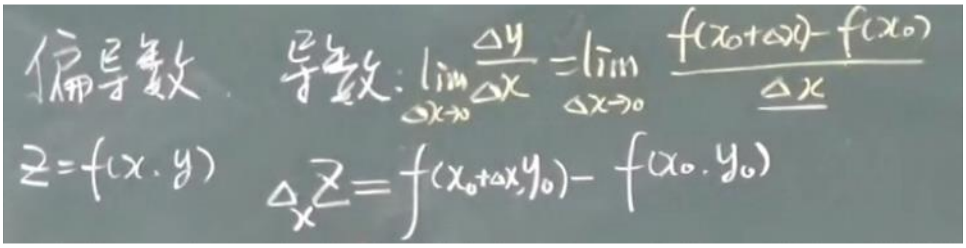
什么时候用极坐标?



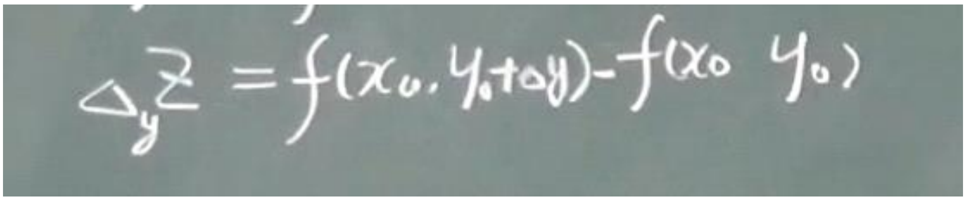
偏导

2024年1月27日 17:05

偏改变量，由某一个变化引起的变化

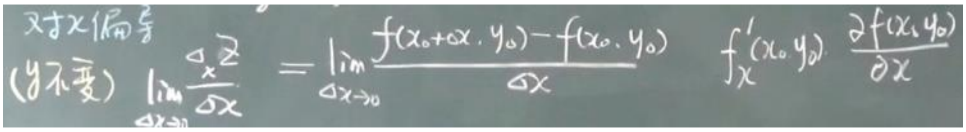


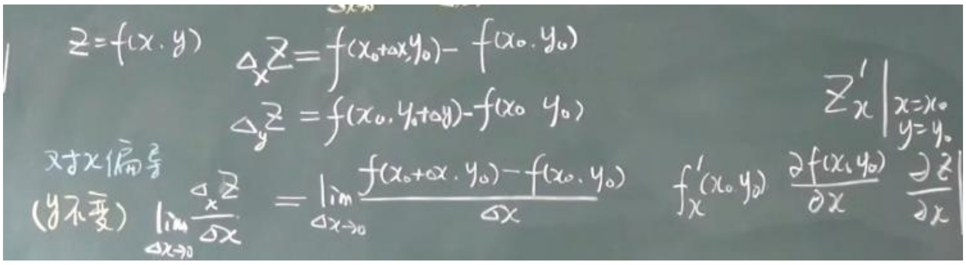
此时假定y不变

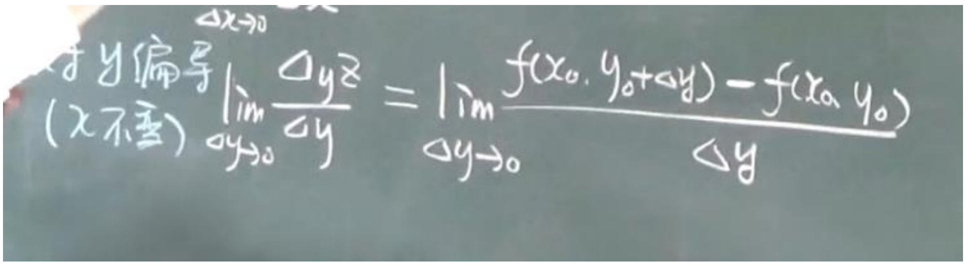


此时假定x不变

对x的偏导数







偏导的规则：求x的偏导时，把y看作常数

求y的偏导，把x看作常数

f'_x y常数

f'_y x常数

2) $f(x.y)=e^{xy}+x^2y$

$f'_x(x.y)=ye^{xy}+2xy$

$f'_y(x.y)=xe^{xy}+x^2$

1) $f(x.y)=x^3+2x^2y-y^3$

求在（1.3）处的偏导数

1) $f(x.y)=x^3+2x^2y-y^3$

$f'_x(x.y)=3x^2+4xy$

$f'_y(x.y)=2x^2-3y^2$

1.求出x y的偏导

2.把1，3代入

1) $f(x,y)=x^3+2x^2y-y^3$

$f'_x(x,y)=3x^2+4xy$

$f'_y(x,y)=2x^2-3y^2$

$f'_x(1,3)=15$. $f'_y(1,3)=-25$

3) $z=x^y$ $\quad (x^3)'=3x^{3-1}$

$z'_x=yx^{y-1}$ $\quad (2^y)'=2^y$

$z'_y=x^y\ln x$

3) $z=x^{y}$

$$u=x^{y^{z}}$$

$$x^{(y^{z})}$$

三个变量求偏导

$$u=\sin(x+y^2-e^z)$$

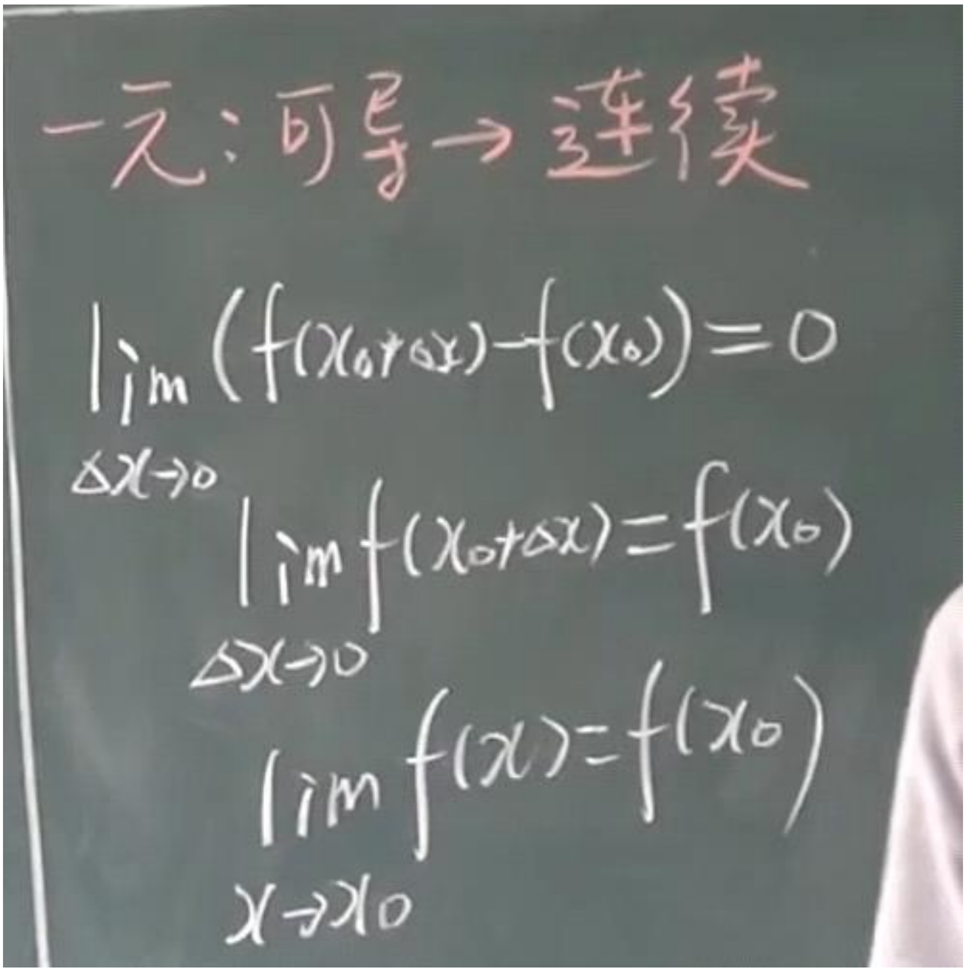
多元变量求偏导一样的，对所求函数之外的都看作常数

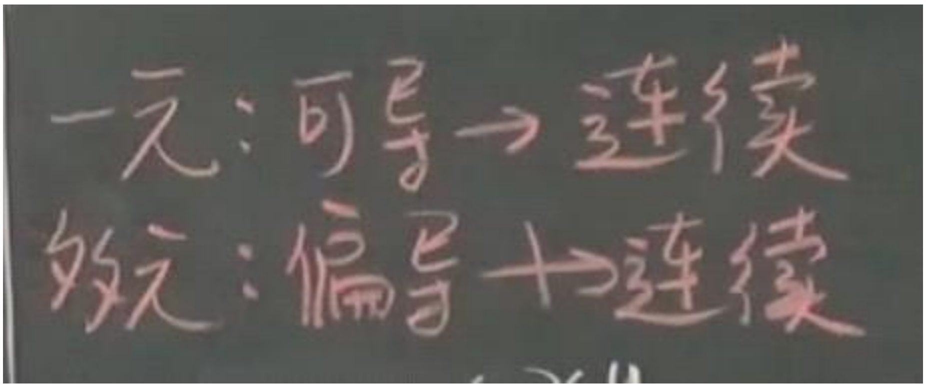
$u=\sin(x+y^2-e^z)$ 三元.

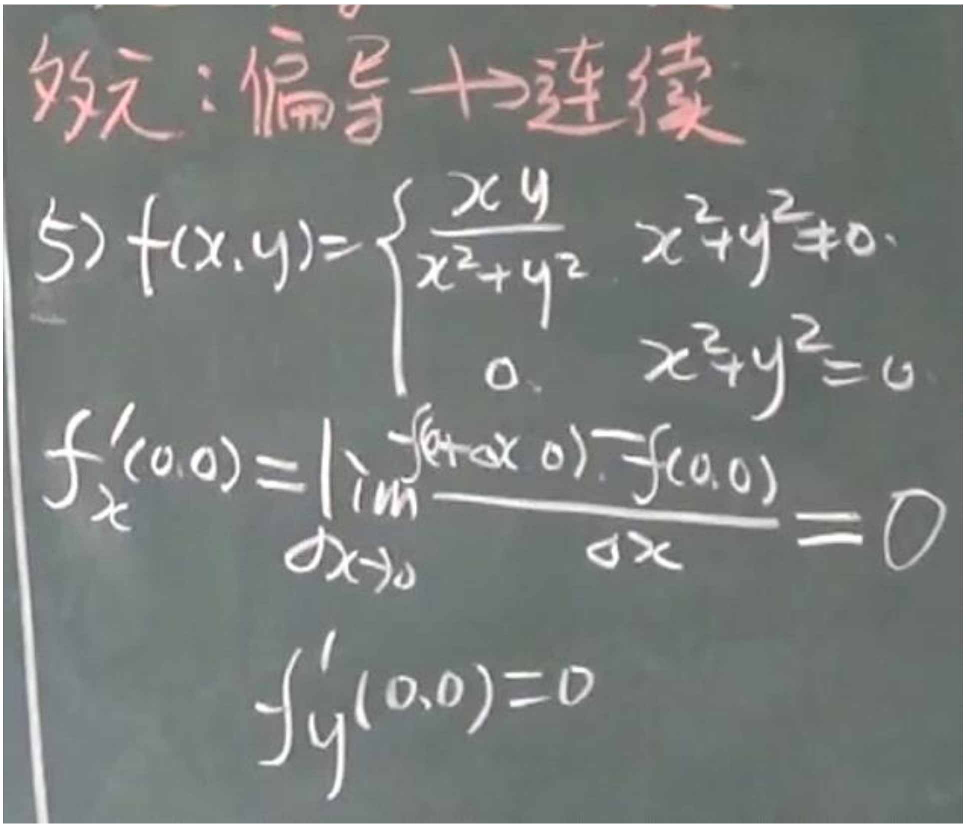
$$u'_x= \cos(x+y^2-e^z)$$

$$u'_y=2y\cos(x+y^2-e^z)$$

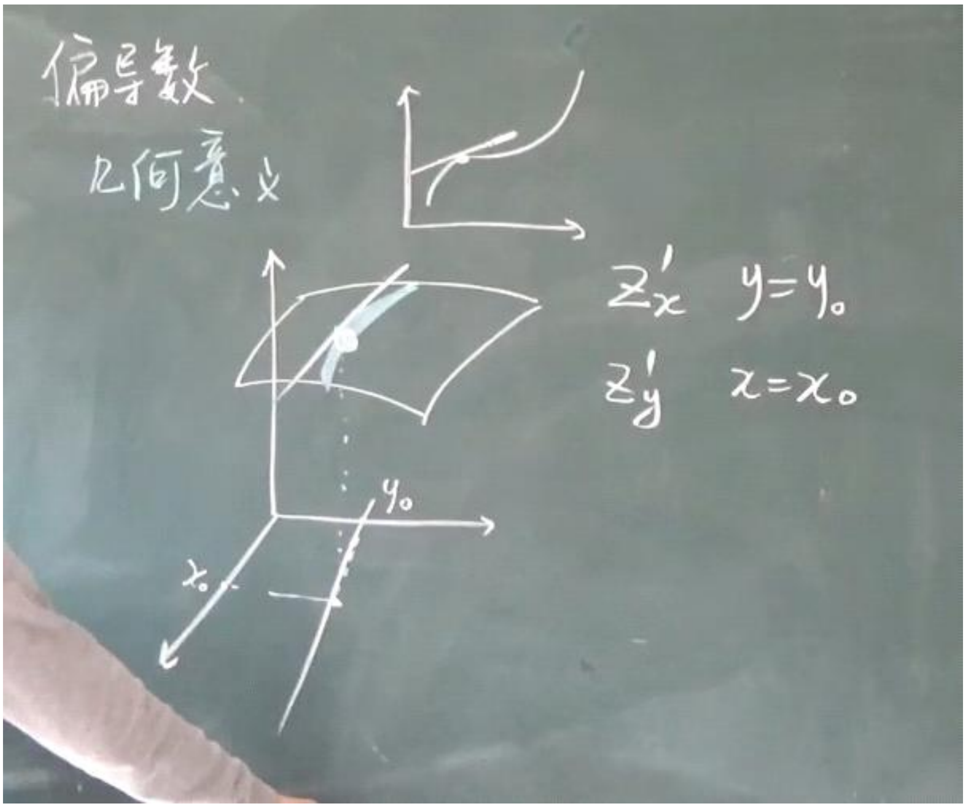
$$u'_z=-e^z\cos(x+y^2-e^z)$$


一元：可导→连续
$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$
$\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$
$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

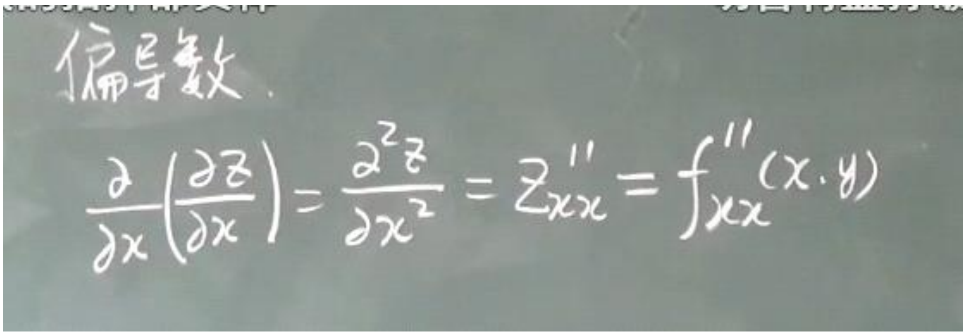

一元：可导→连续
多元：偏导↛连续



偏导是存在的，但未必是连续的



二阶偏导 高阶偏导



eg4 $z=\int_{x}^{x^2+y^2} e^t\,dt$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. 高阶偏导数 先从低阶开始.

$$z=\int_a^{x^2+y^2} e^t\,dt-\int_a^{x} e^t\,dt$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}-e^x=2x\cdot e^{x^2+y^2}-e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(2xe^{x^2+y^2}-e^x\right)}{\partial x}=2e^{x^2+y^2}+2xe^{x^2+y^2}\cdot 2x-e^x$$
$$=(4x^2+2)e^{x^2+y^2}-e^x$$

eg4 $z=\int_{x}^{x^2+y^2} e^t\,dt$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. 高阶偏导数 先从低阶开始.

$$z=\int_a^{x^2+y^2} e^t\,dt-\int_a^{x} e^t\,dt$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}-e^x=2x\cdot e^{x^2+y^2}-e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(2xe^{x^2+y^2}-e^x\right)}{\partial x}=2e^{x^2+y^2}+2xe^{x^2+y^2}\cdot 2x-e^x=(4x^2+2)e^{x^2+y^2}-e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(2xe^{x^2+y^2}-e^x\right)}{\partial y}=2x\cdot e^{x^2+y^2}\cdot 2y-0$$
$$=4xye^{x^2+y^2}$$

eg5 ☆ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$ 求 $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$ 分段点 ⇒ 定义求偏导.

$$f''_{xy}(0,0)=\left.\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$
$$f''_{yx}(0,0)=\left.\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}\right|_{(0,0)}$$

eg5 ☆ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$ 求 $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$ 分段点 ⇒ 定义求偏导.

$$f''_{xy}(0,0)=\left.\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$
$$f''_{yx}(0,0)=\left.\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}\right|_{(0,0)}$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,0+\Delta y)-f'_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{-(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4}-0}{\Delta y}=-1$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_y(0+\Delta x,0)-f'_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^5}{(\Delta x)^4}-0}{\Delta x}=1$$

二重积分的换元法（雅可比行列式）

2024年1月29日 16:37

***三、二重积分换元法**

定理: 设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续, 变换:

$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$

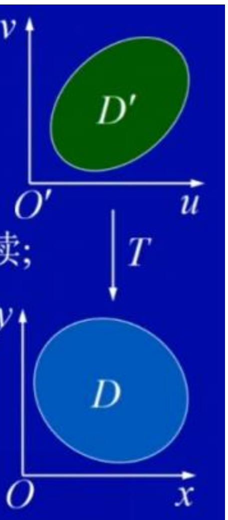
满足 (1) $x(u,v)$, $y(u,v)$ 在 D' 上一阶导数连续;

(2) 在 D' 上 雅可比行列式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0;$$

(3) 变换 $T: D' \to D$ 是一一对应的,

则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$



$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

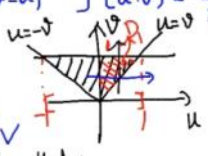
$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

竖线表示绝对值

$D_{uv} = \{(u,v) \mid v \le 1,\ u+v \ge 0,\ v-u \ge 0\}$ $\quad \boxed{d\sigma = J_{(u,v)}\,dudv}$ $\quad d\sigma = dxdy = \boxed{rdrd\theta}$

1.设 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x+y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$ 求 $I = \iint_D \left(\sin\frac{x-y}{x+y} + \cos\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$ $\quad dxdy = J\,dudv$

解: $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(v-u) \end{cases}$ $\quad J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$



原式 $= \frac{1}{2}\iint_{D_{uv}} \left(\sin\frac{u}{v} + \cos\frac{u}{v}\right) dudv$ $\quad 0$

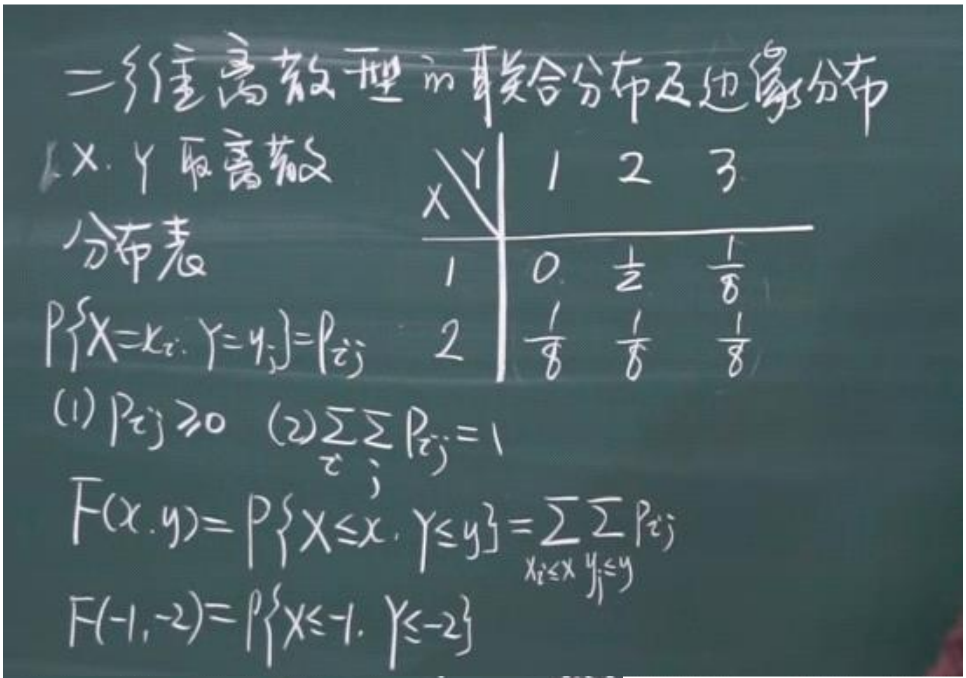
$\neq \int_0^1 du \int_u^1 \cos\frac{u}{v}\, dv$

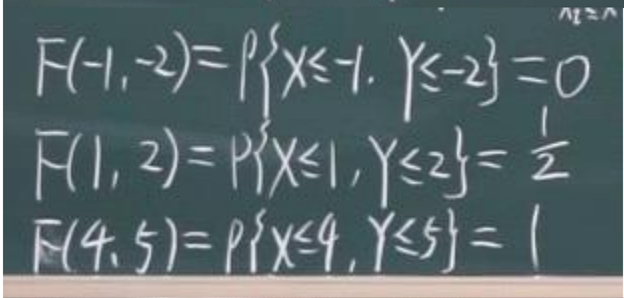
$= \iint_{D_1} \cos\frac{u}{v}\, dudv = \int_0^1 dv \int_0^v \cos\frac{u}{v}\, du$

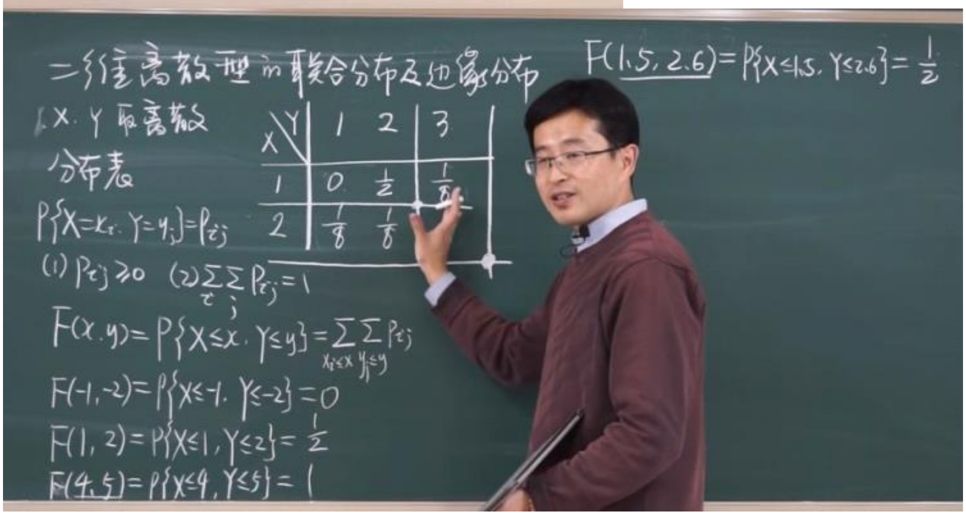
$= \int_0^1 v \cdot \sin\frac{u}{v}\Big|_0^v\, dv = \sin 1 \int_0^1 v\, dv = \frac{1}{2}\sin 1$

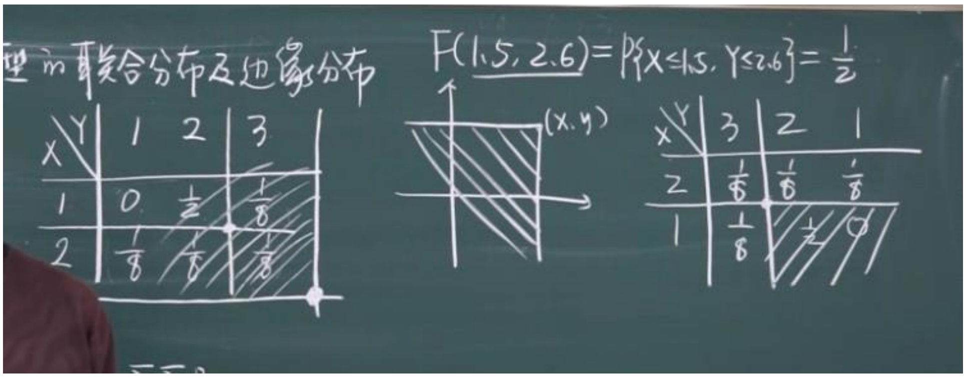
二维离散型的联合分布和边缘分布

2024年1月22日　　18:56



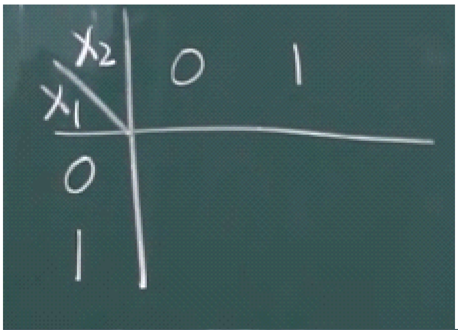


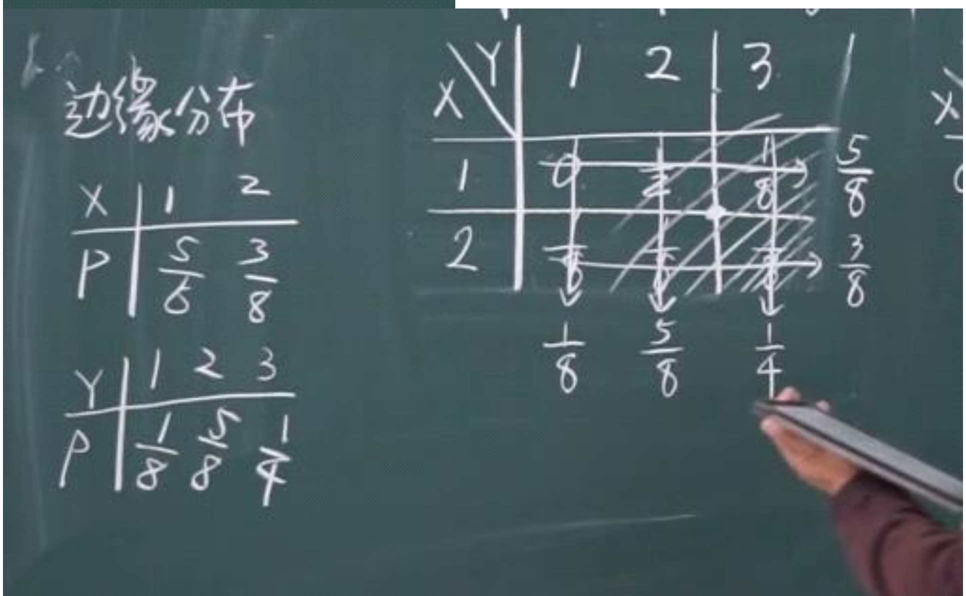


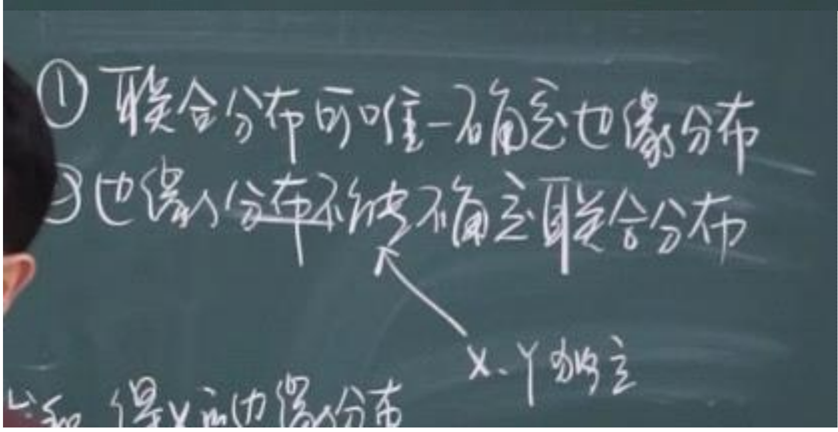


上方还是下方 取决于数值递增还是递减

第一个变量一定竖着，第二个变量一定横着

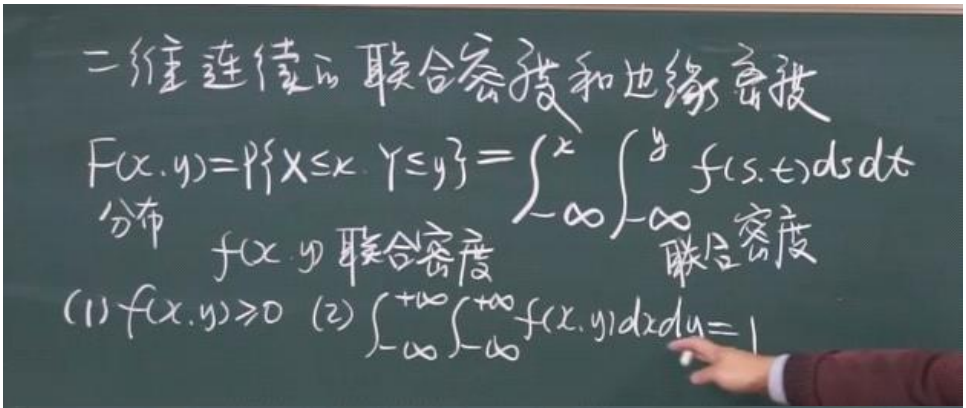


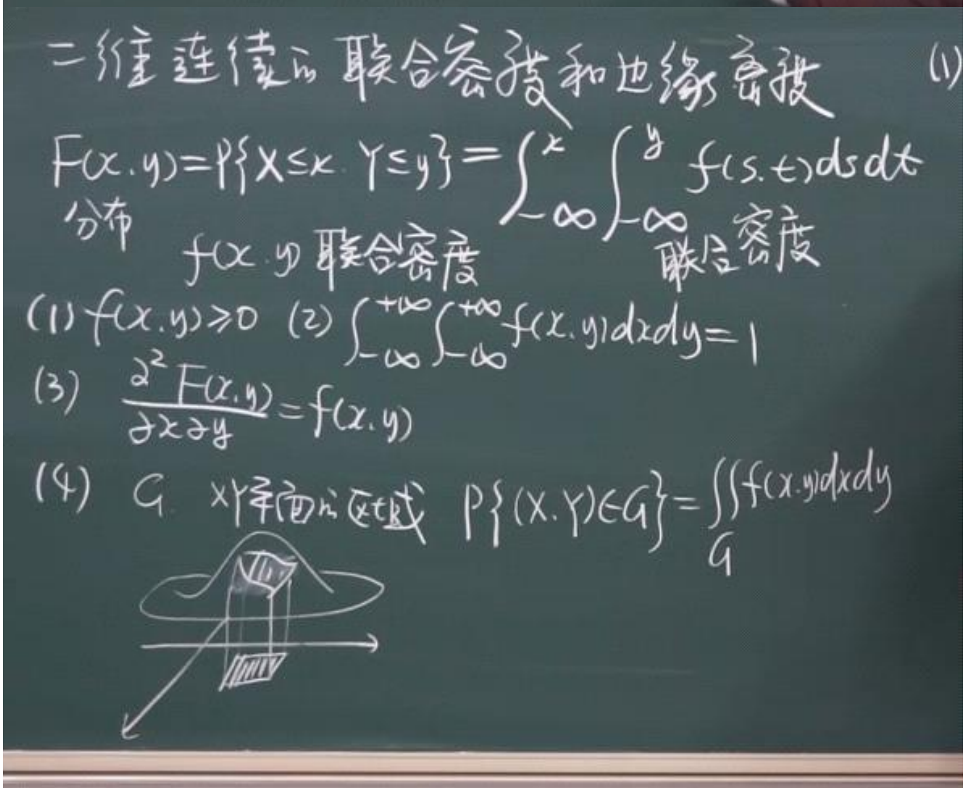


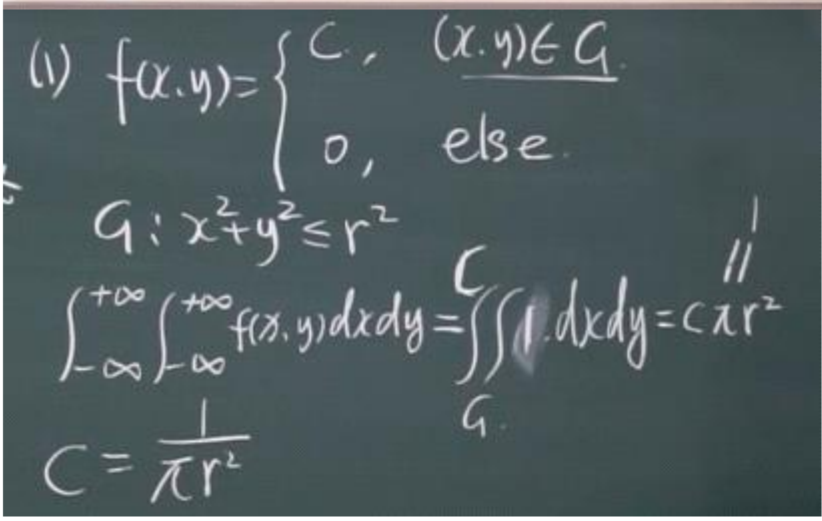


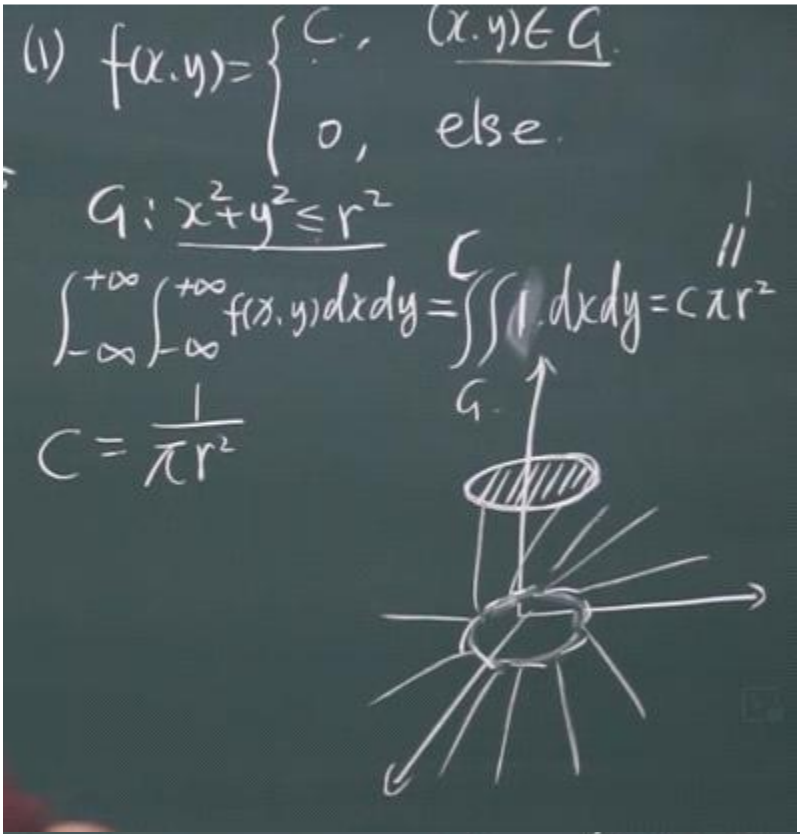
二维连续的联合密度和边缘密度

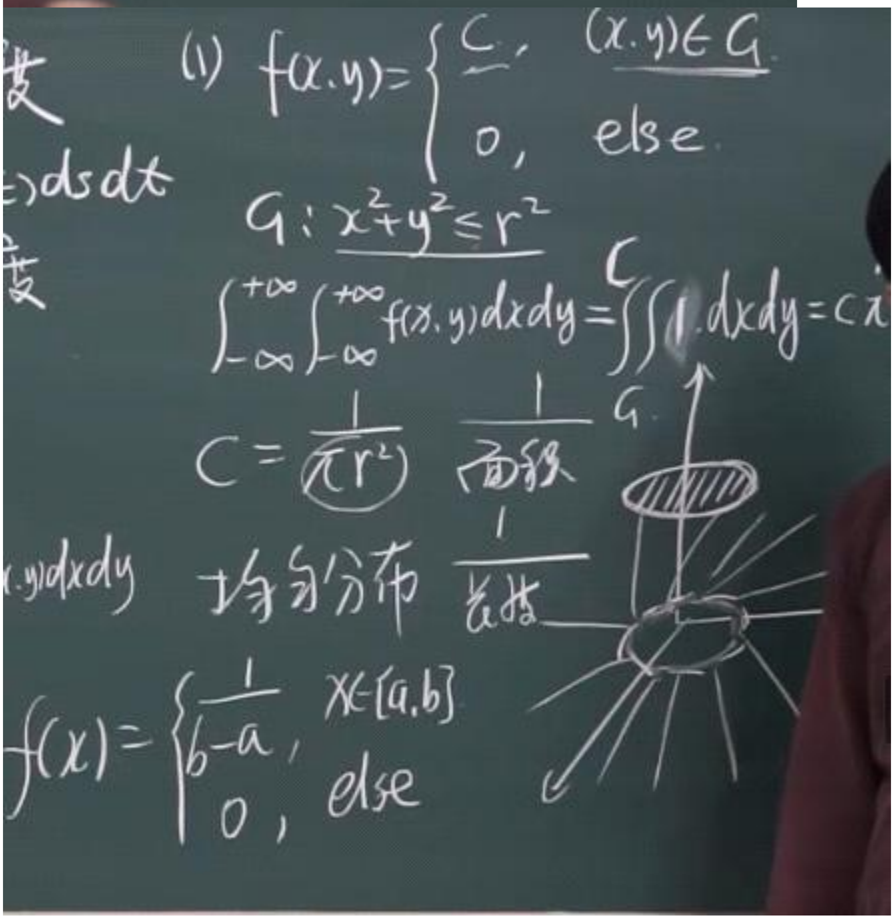
2024年1月22日 19:21



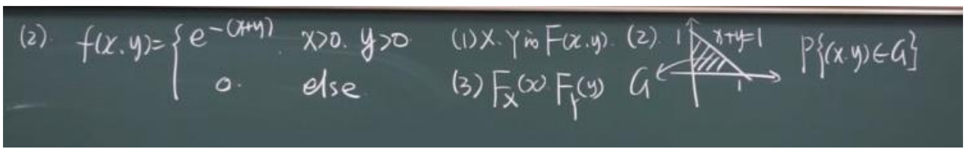


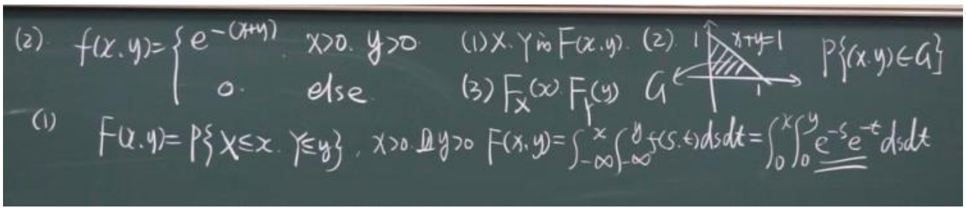




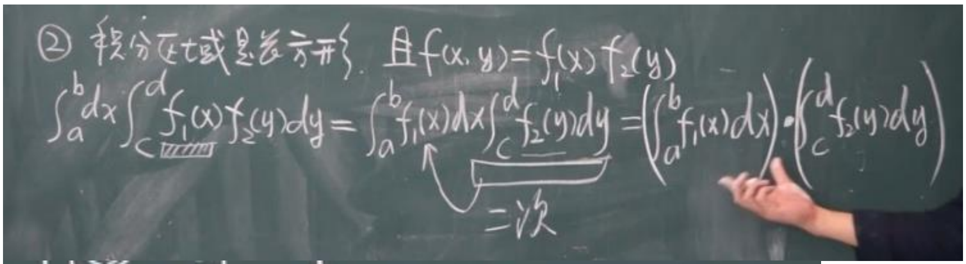


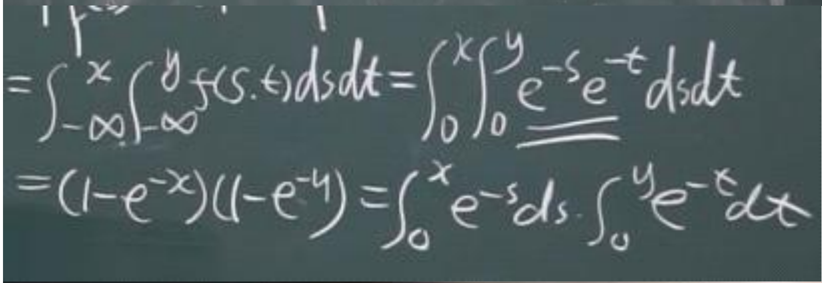
一维均匀分布是长度的倒数，二维均匀分布是面积的导数

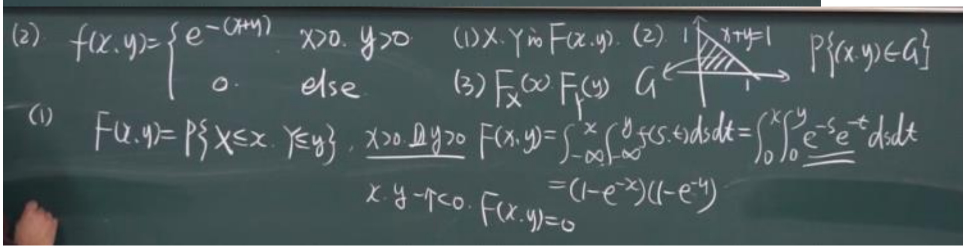




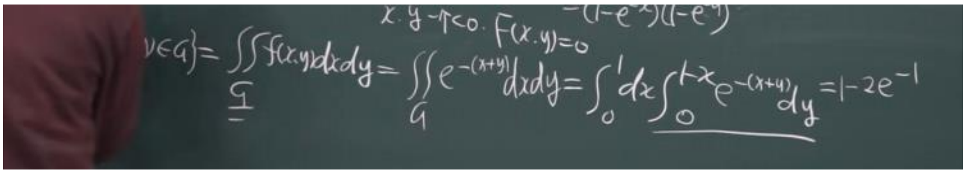
见二重积分的计算性质



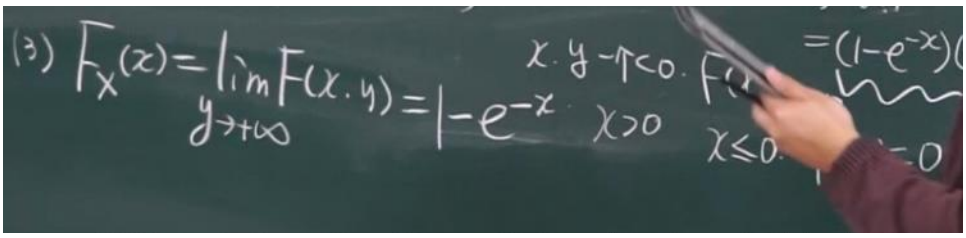




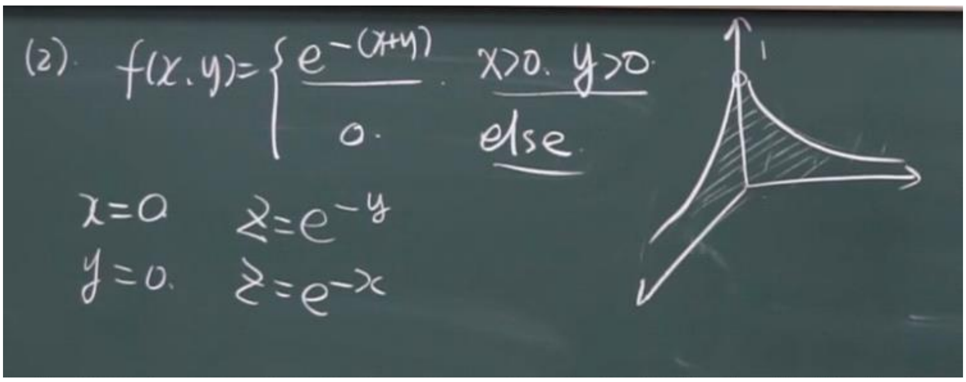
（2）x+y=1，构造出的面积如图所示，问（x,y）属于G的概率



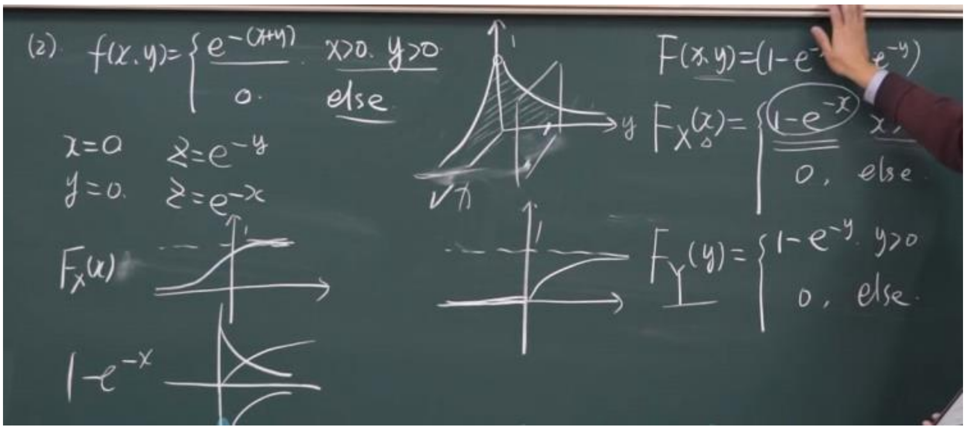
(3)求边缘分布



这个密度函数的图像是什么样的

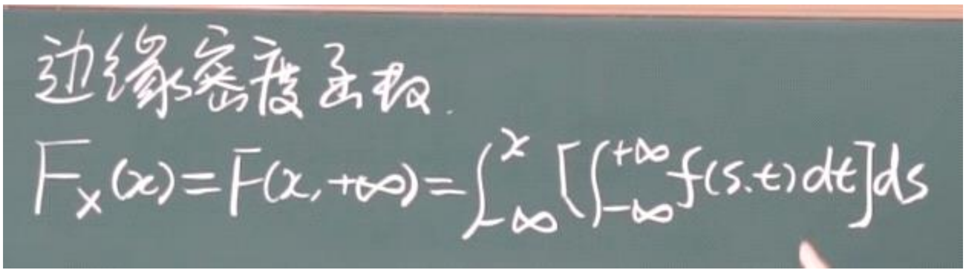


边缘分布的图像是什么样的

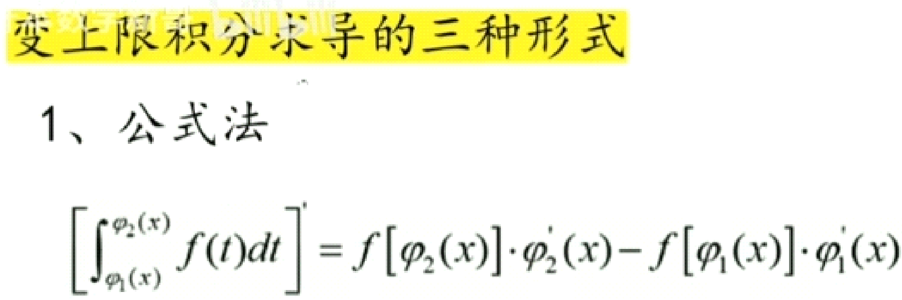

(2). f(x.y)= { e^{-(x+y)} x>0. y>0
0. else
x=0 z=e^{-y}
y=0. z=e^{-x}
F_X(x)
1-e^{-x}
F_X(x)= { 1-e^{-x}
0, else
F_Y(y)= { 1-e^{-y} y>0
0, else

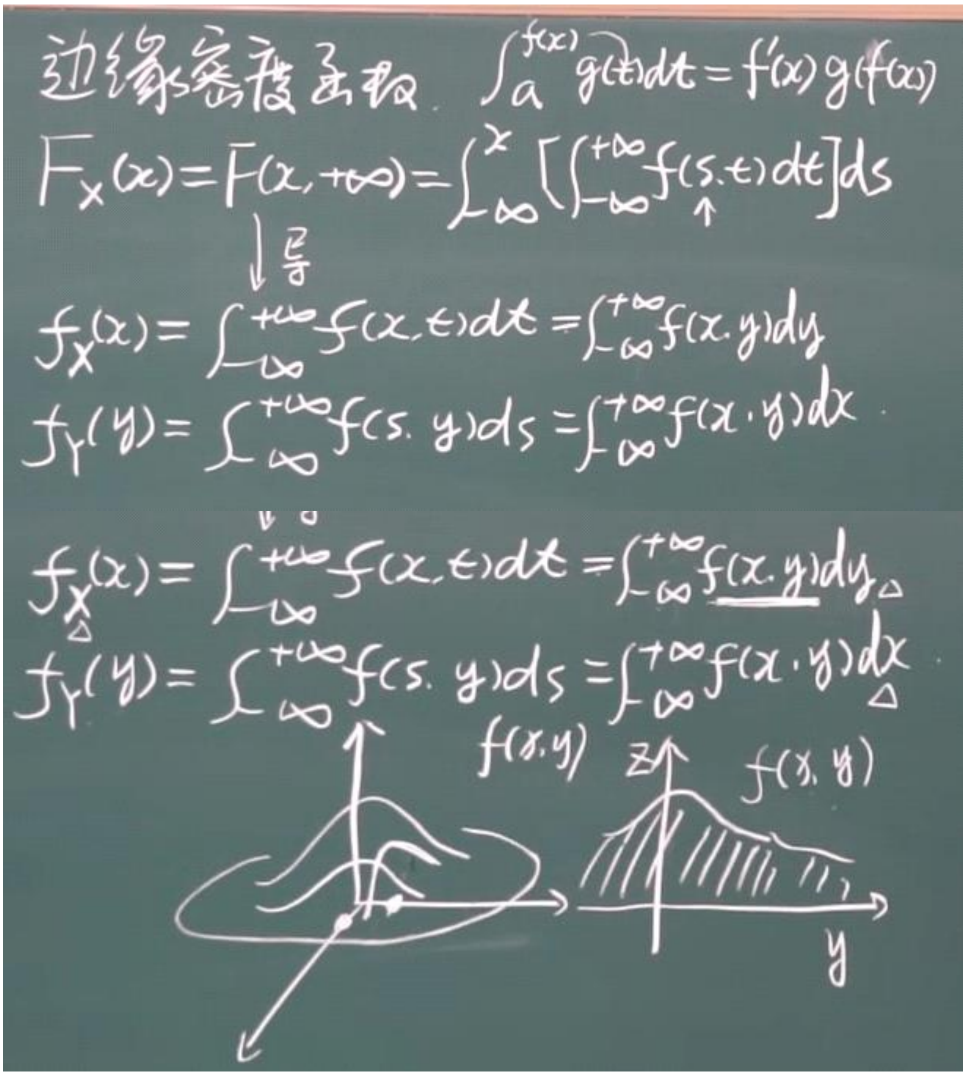
二维随机变量的边缘密度函数

2024年1月23日 19:50



变上限求导





(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$ 求 $f_X(x)\ f_Y(y)$

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$ 求 $f_X(x)\ f_Y(y)$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}dy=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}\arctan y\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}dx=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

显然有，联合密度等于边缘密度相乘 独立的时候

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$ 求 $f_X(x)\ f_Y(y)$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$ 求 $f_X(x)\ f_Y(y)$

$y^2\le r^2-x^2\quad -\sqrt{r^2-x^2}\le y\le\sqrt{r^2-x^2}$

解：$|x|\le r$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\dfrac{1}{\pi r^2}dy=\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}$

$|x|>r$ 时，$f_X(x)=0$

$|x|>r$ 时，$f_X(x)=0$ $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|\le r.\\ 0, & \text{else}.\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & |y|\le r\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2(x+y-2xy), & 0\le x,\ y\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

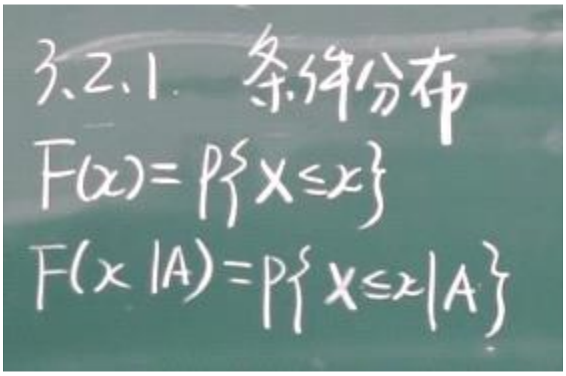
① $0\le x\le 1$ $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^1 2(x+y-2xy)\,dy$

$$=2\left(xy+\frac{y^2}{2}-xy^2\right)\Big|_0^1=2\left(\cancel{x}+\frac{1}{2}-\cancel{x}\right)=1$$

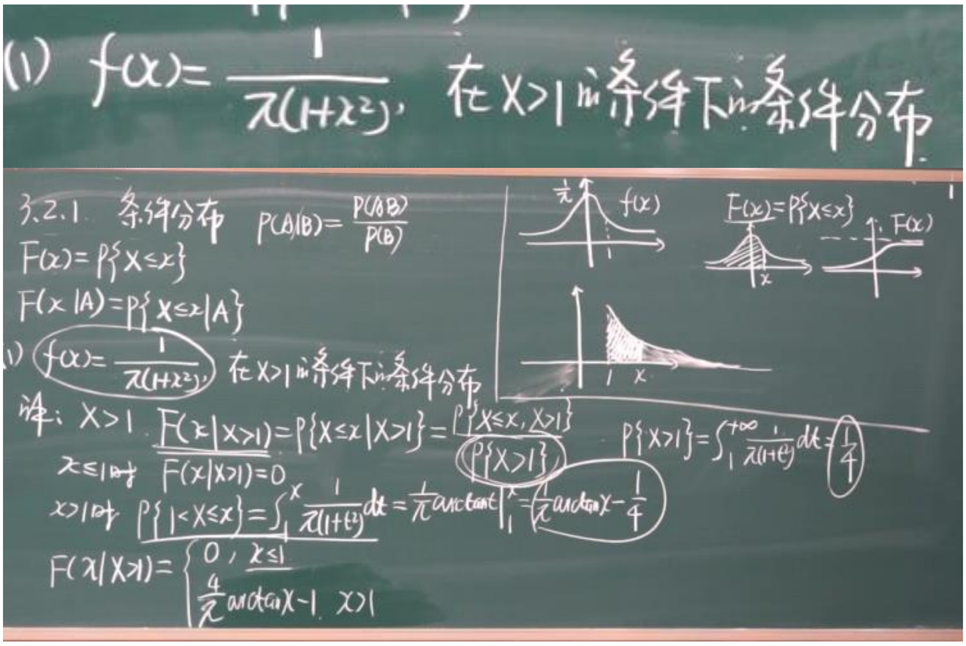
else $f_X(x)=0$.

条件分布

2024年1月24日　18:39

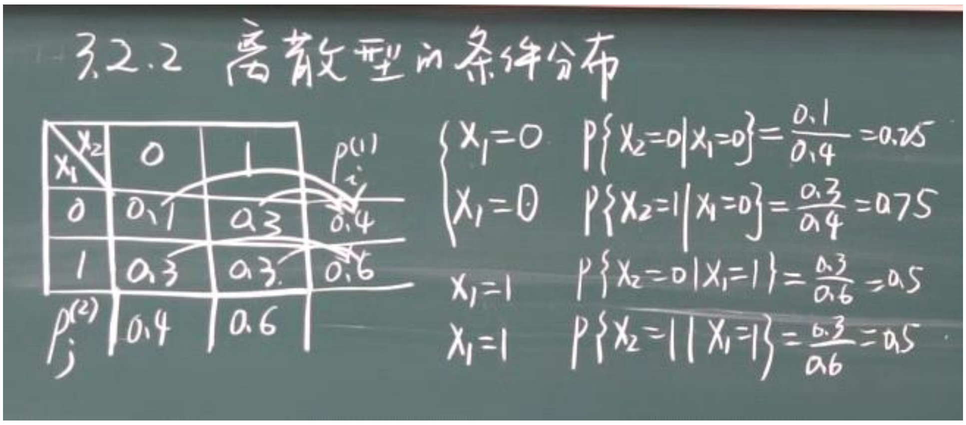


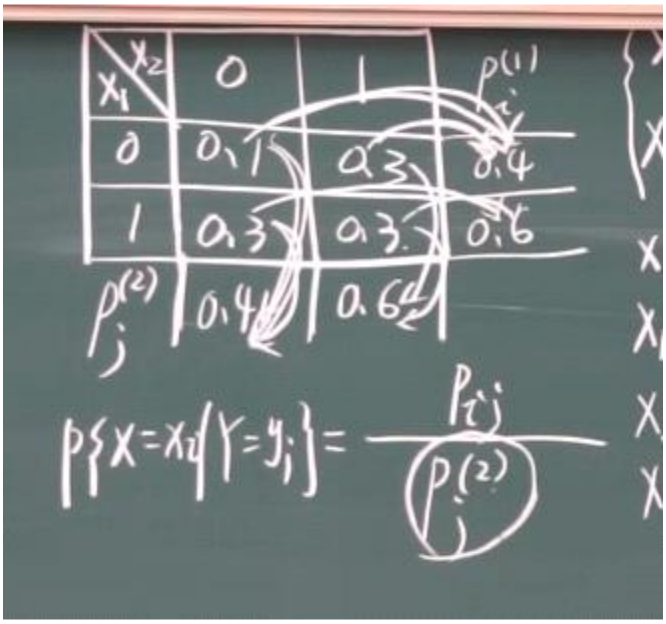
在已经发生A的情况下,X≤x的概率



离散型的条件分布

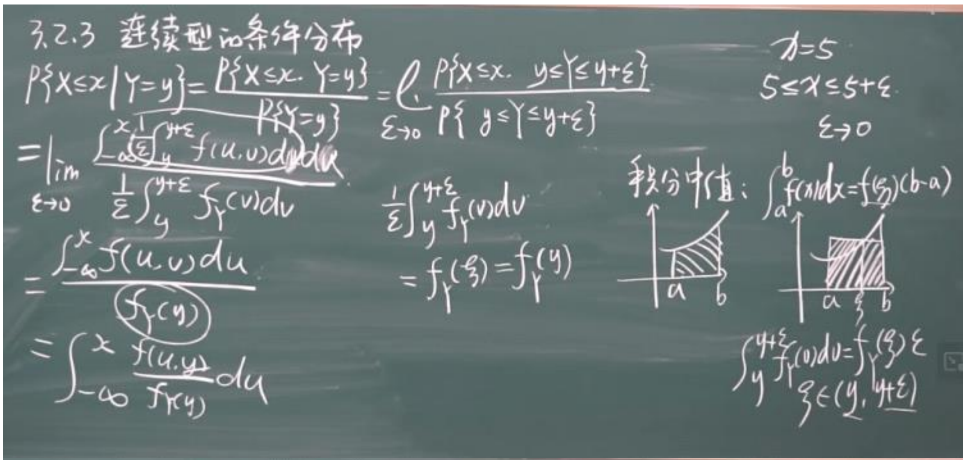
2024年1月24日 19:01

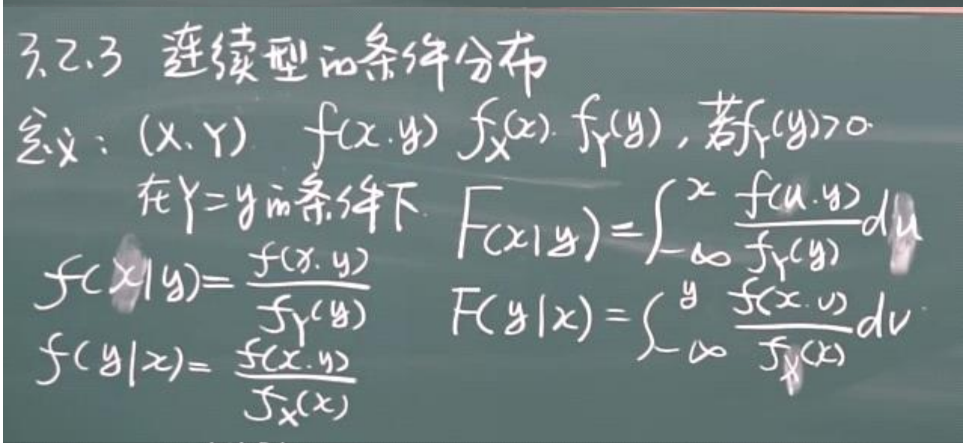


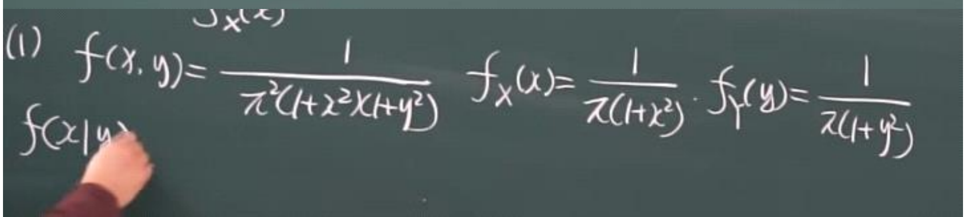


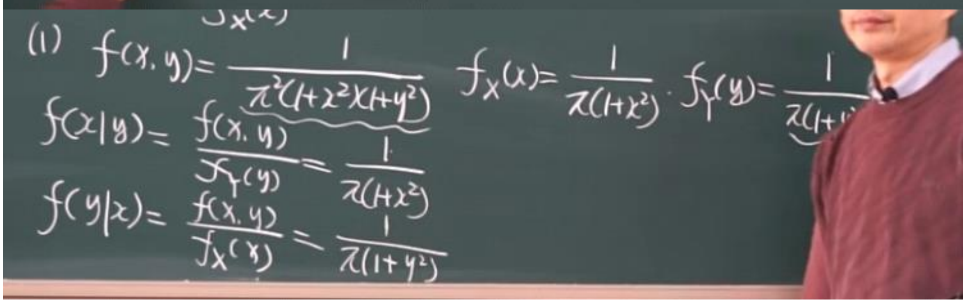
连续型随机变量的条件分布

2024年1月24日 19:09

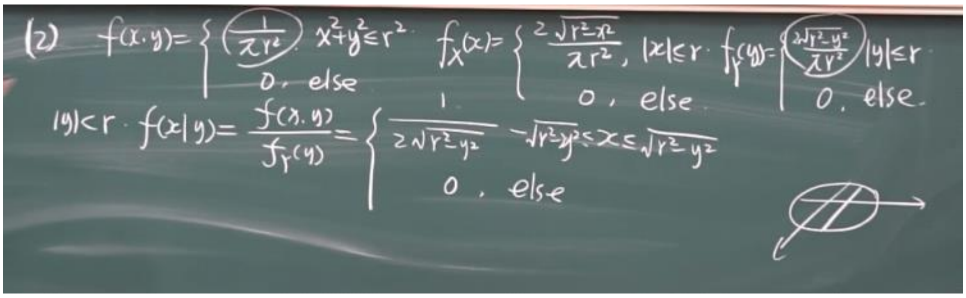




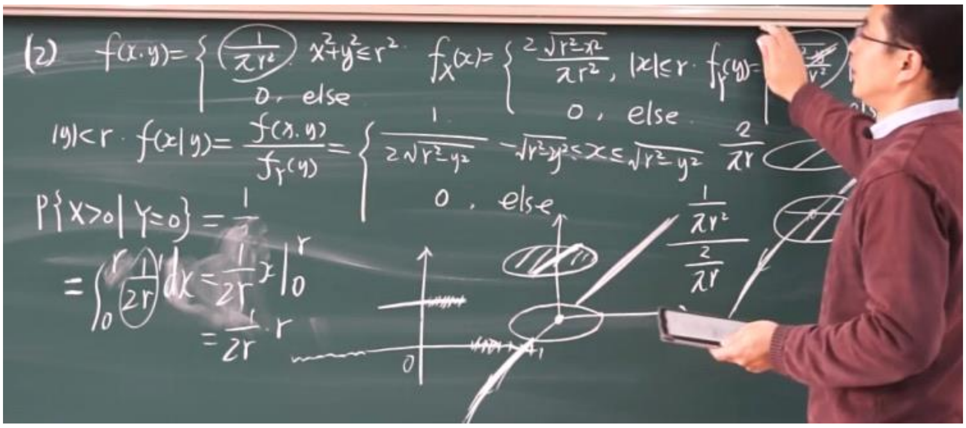




相互独立不受影响



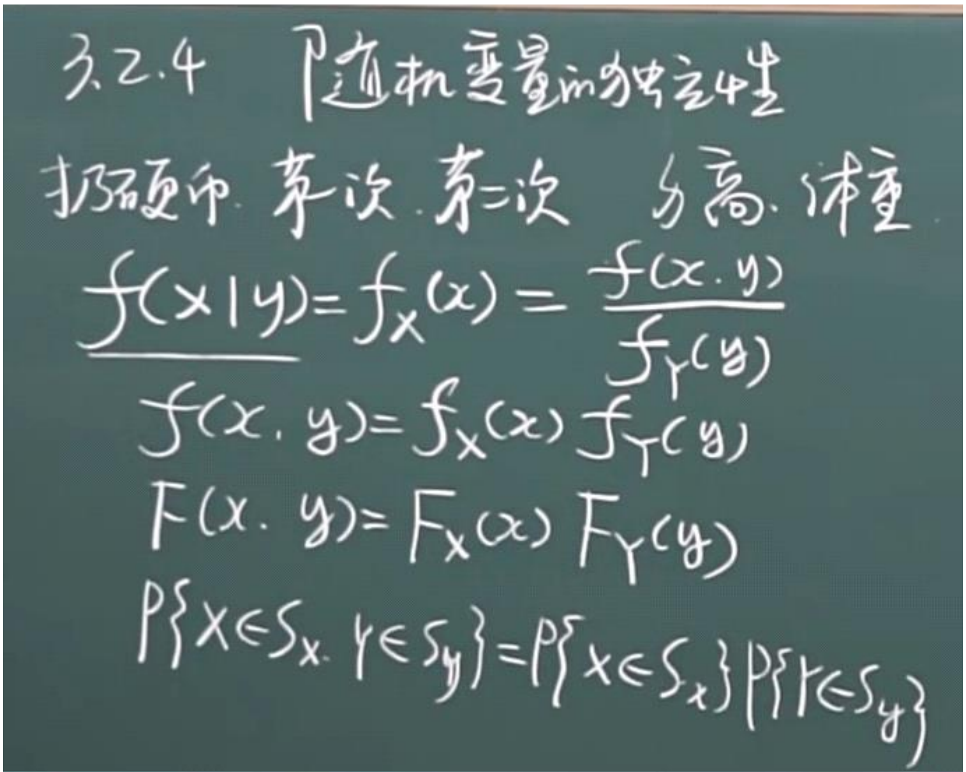
注意此时x的取值，此时y给定,x也随之变化

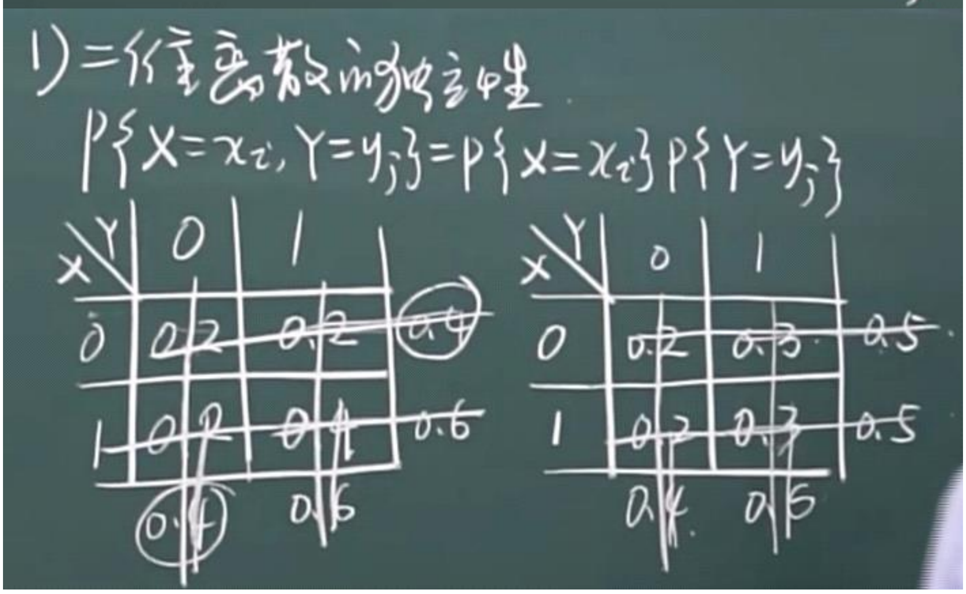

(2) f(x,y) = { 1/(πr²), x²+y² ≤ r²; 0, else
f_X(x) = { 2√(r²−x²)/(πr²), |x| ≤ r; 0, else
|y| < r, f(x|y) = f(x,y)/f_Y(y) = { 1/(2√(r²−y²)), −√(r²−y²) ≤ x ≤ √(r²−y²); 0, else
P{X>0 | Y=0} =
= ∫₀^r 1/(2r) dx = 1/(2r) x |₀^r
= 1/(2r) · r
else

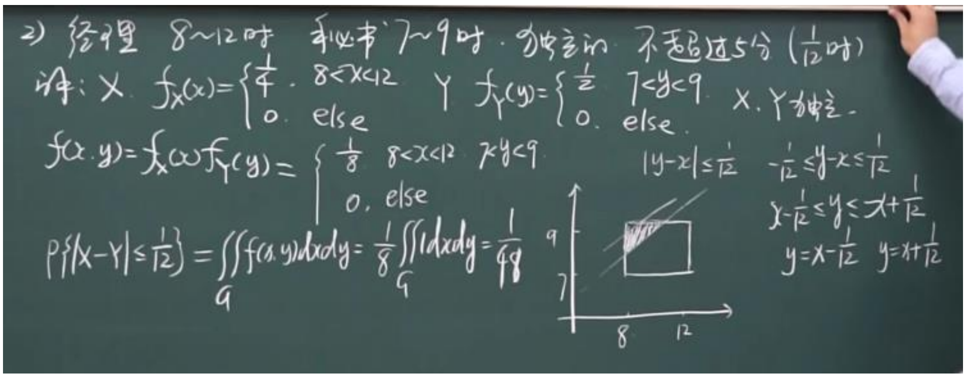
随机变量的独立性

2024年1月26日 8:46

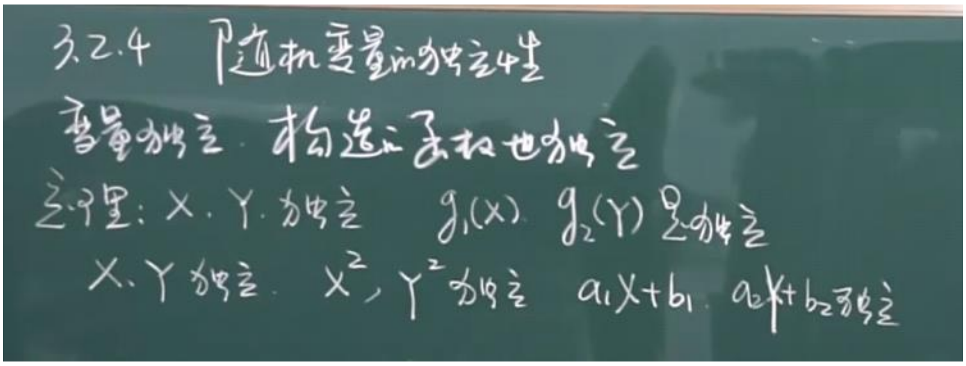
判断独立的条件，联合密度等于边缘密度相乘；联合分布等于边缘分布相乘





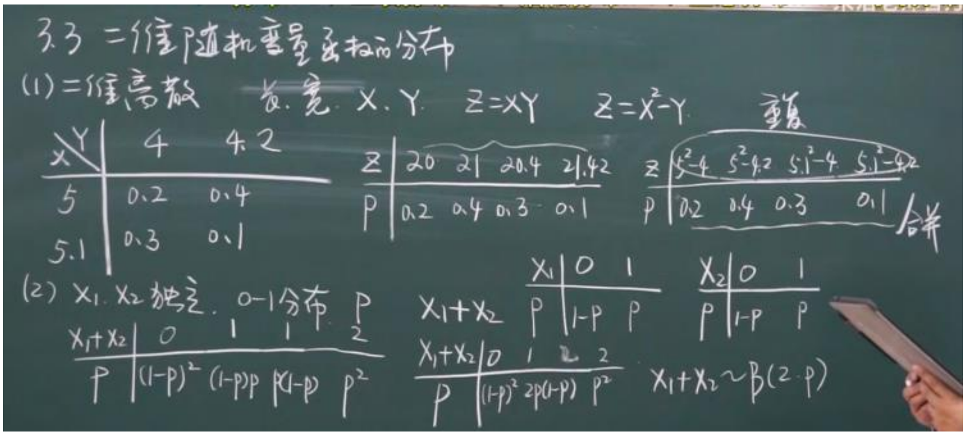


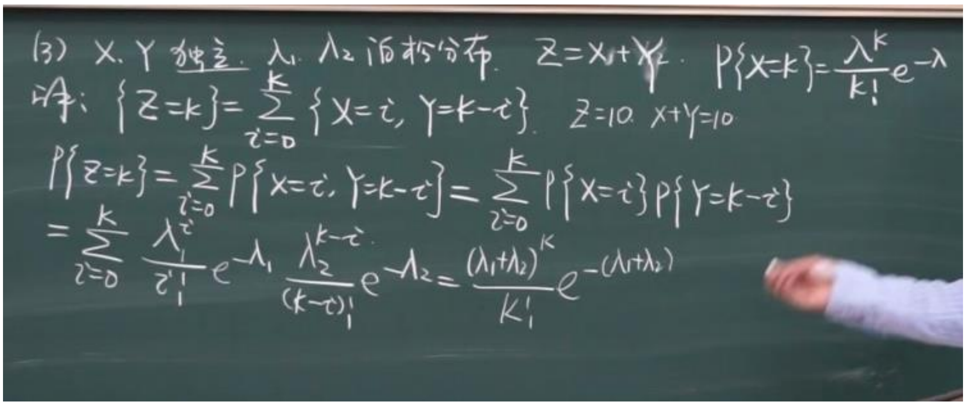
独立的随机变量，构造的函数也独立


3.2.4 随机变量的独立性
变量独立 构造的函数也独立
定理: X、Y 独立 g1(X) g2(Y) 是独立
X、Y 独立 X2、Y2 独立 a1X+b1 a2Y+b2 独立

二维离散型随机变量函数的分布

2024年1月26日 14:39

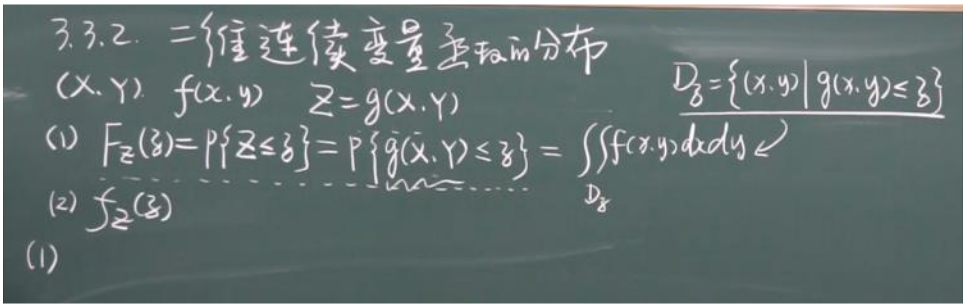




泊松分布具有可加性

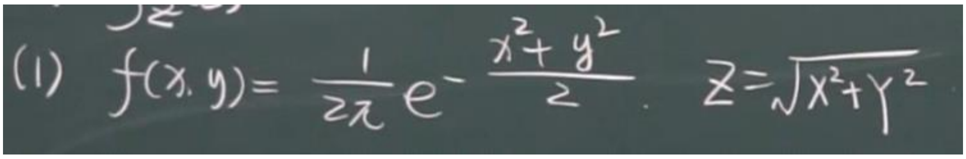
二维连续型随机变量函数的分布

2024年1月26日 15:50



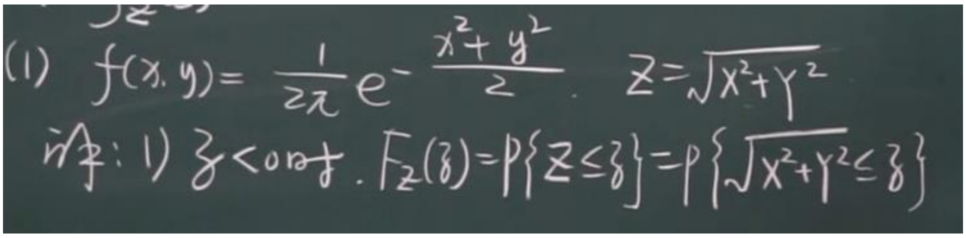
Z由X Y构造而成

先求分布再求密度

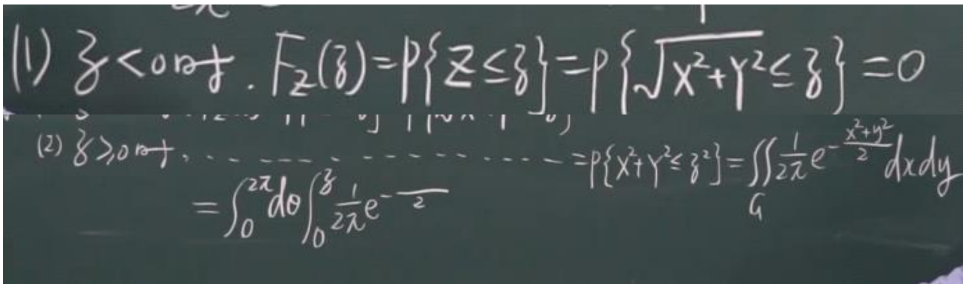


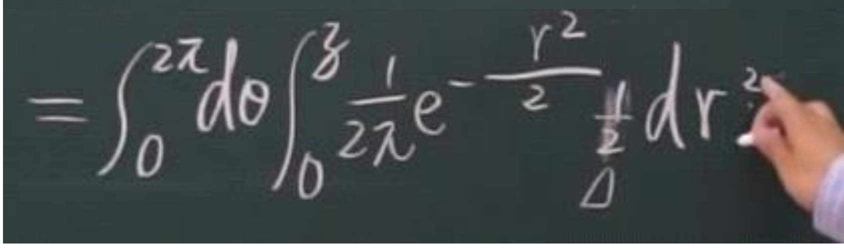
已知f(x,y)求Z的密度函数

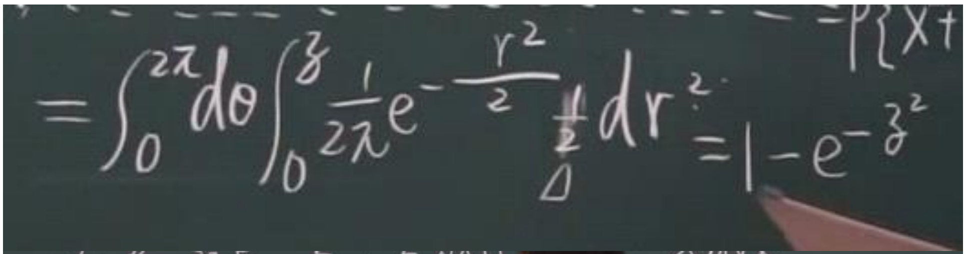
变量函数，重要的是分段 看到根号要分段

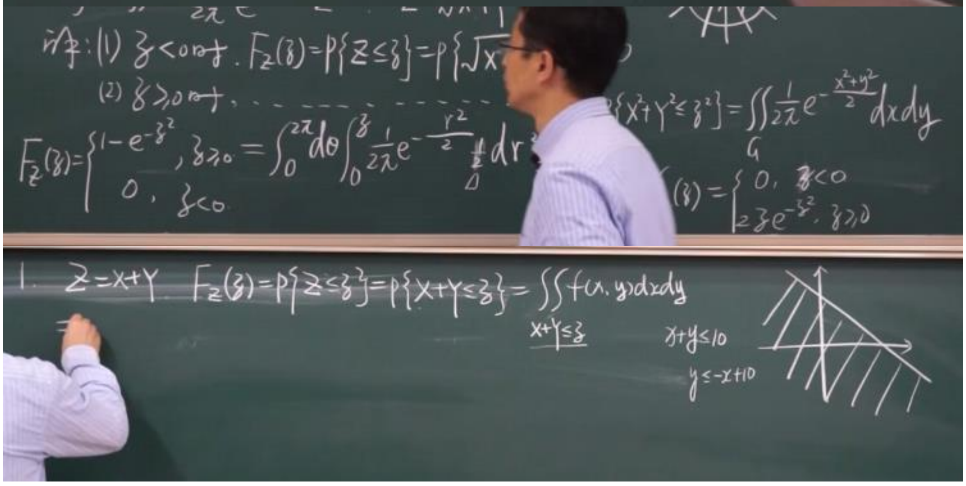


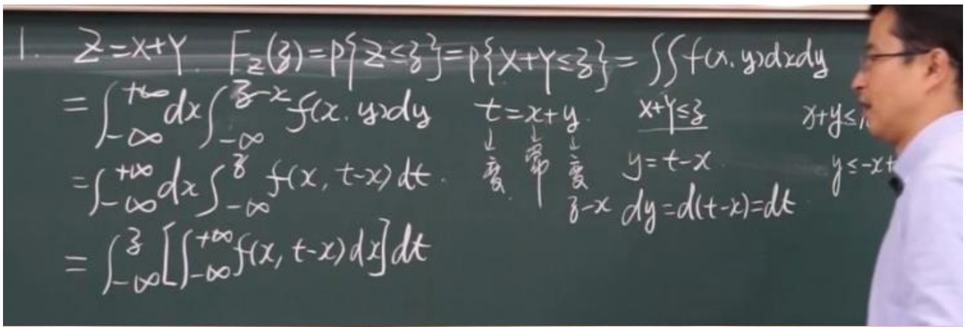
分段时首先考虑联合密度的分段，本题联合密度无分段，再从函数本身考虑分段

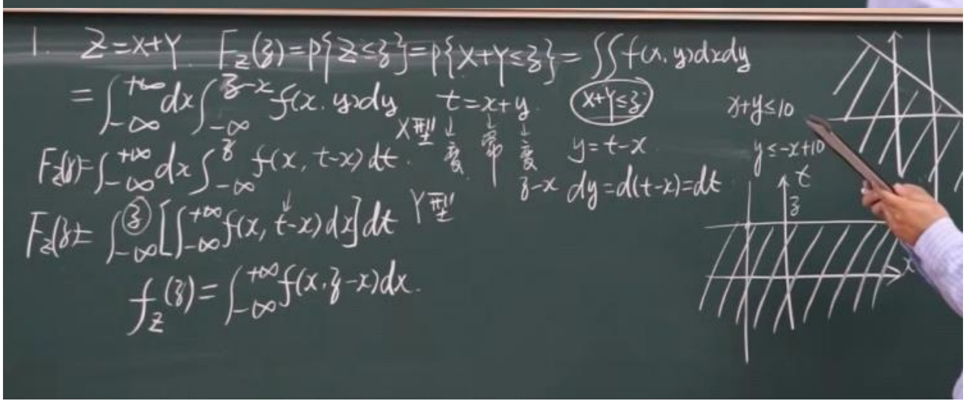




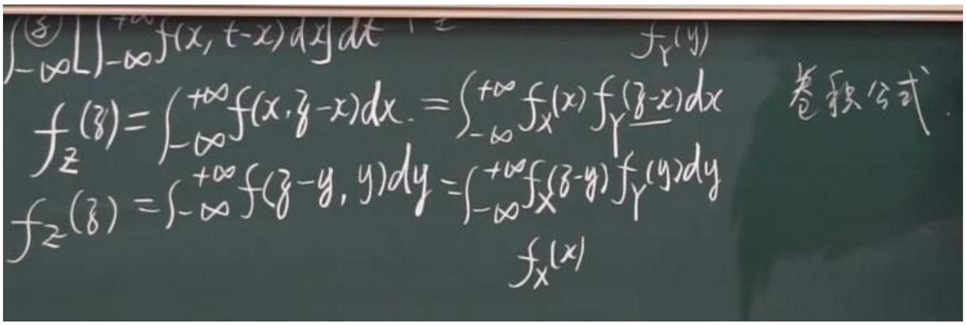




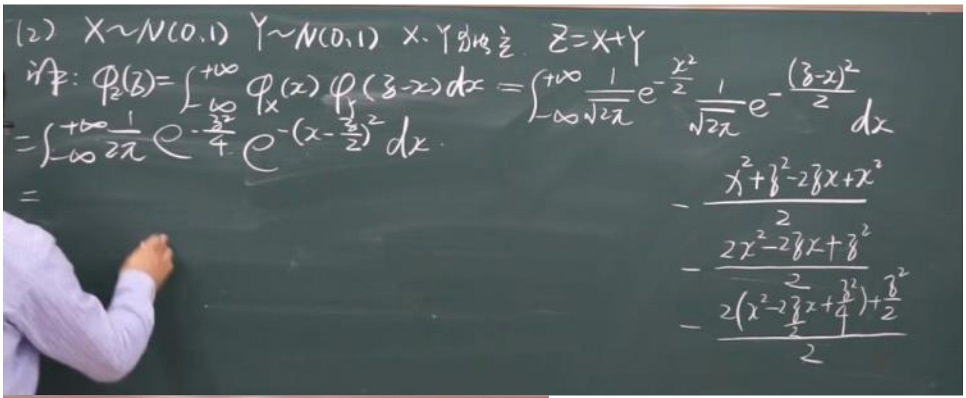


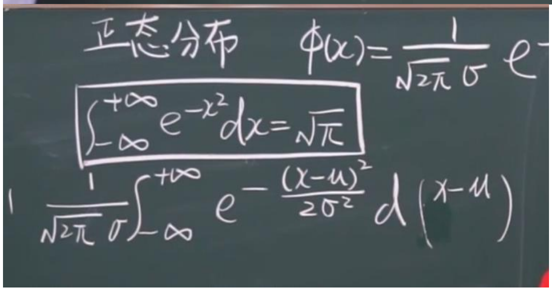


如果是独立的话，还可以拆成下面，卷积公式

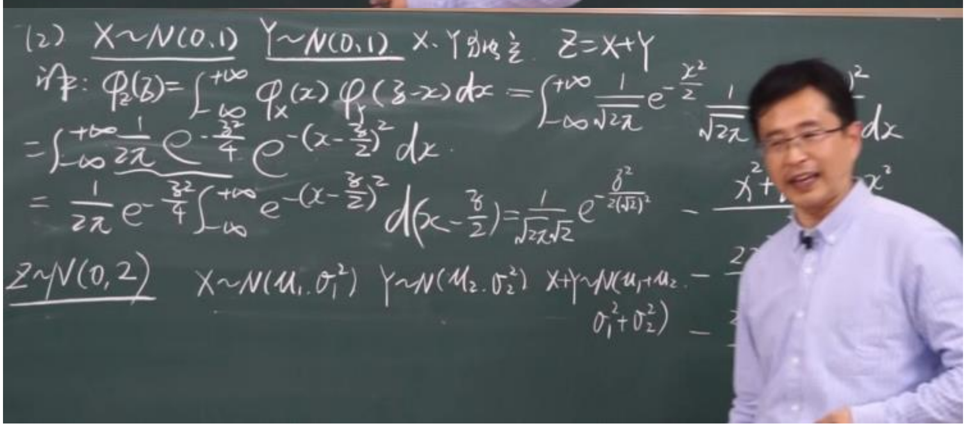


X是标准正态分布，Y是标准正态分布，X、Y是独立的（才可以用卷积公式）

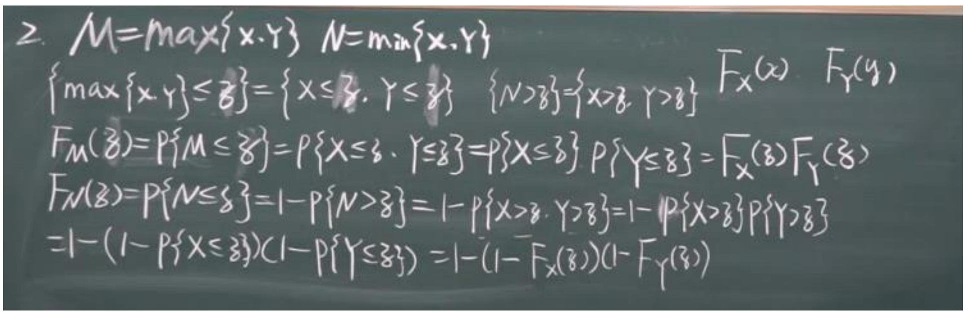

(2) X~N(0,1) Y~N(0,1) X、Y独立 Z=X+Y
解: φ_Z(z)=∫_{-∞}^{+∞} φ_X(x) φ_Y(z-x) dx = ∫_{-∞}^{+∞} 1/√(2π) e^{-x²/2} 1/√(2π) e^{-(z-x)²/2} dx
=∫_{-∞}^{+∞} 1/(2π) e^{-z²/4} e^{-(x-z/2)²} dx
=
-(x²+z²-2zx+x²)/2
-(2x²-2zx+z²)/2
-(2(x²-2(z/2)x+z²/4)+z²/2)/2

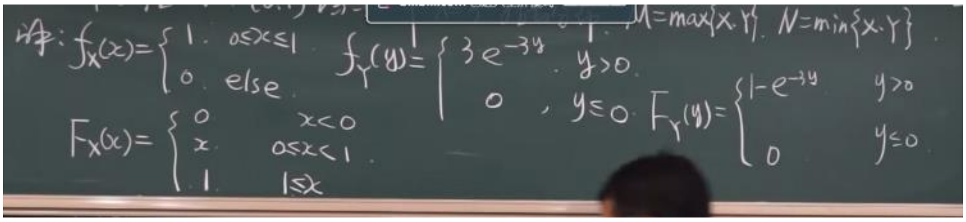

正态分布 φ(x)=1/(√(2π)σ) e
∫_{-∞}^{+∞} e^{-x²} dx=√π
1/(√(2π)σ) ∫_{-∞}^{+∞} e^{-(x-μ)²/(2σ²)} d(x-μ)


(2) X~N(0,1) Y~N(0,1) X、Y独立 Z=X+Y
Z~N(0,2)


(2) X~N(0,1) Y~N(0,1) X、Y独立 Z=X+Y
解: φ_Z(z)=∫_{-∞}^{+∞} φ_X(x) φ_Y(z-x) dx
=∫_{-∞}^{+∞} 1/(2π) e^{-z²/4} e^{-(x-z/2)²} dx
= 1/(2π) e^{-z²/4} ∫_{-∞}^{+∞} e^{-(x-z/2)²} d(x-z/2) = 1/(√(2π)√2) e^{-z²/(2(√2)²)}
Z~N(0,2) X~N(μ₁,σ₁²) Y~N(μ₂,σ₂²) X+Y~N(μ₁+μ₂, σ₁²+σ₂²)

X、Y独立


2. M=max{X,Y} N=min{X,Y}
{max{X,Y}≤z}={X≤z, Y≤z} {N>z}={X>z, Y>z} F_X(x) F_Y(y)
F_M(z)=P{M≤z}=P{X≤z, Y≤z}=P{X≤z}P{Y≤z}=F_X(z)F_Y(z)
F_N(z)=P{N≤z}=1-P{N>z}=1-P{X>z, Y>z}=1-P{X>z}P{Y>z}
=1-(1-P{X≤z})(1-P{Y≤z})=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))


M=max{X,Y}, N=min{X,Y}
解: $f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$
$f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y} & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$
$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-3y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$
$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\end{cases}$