

# 期望值

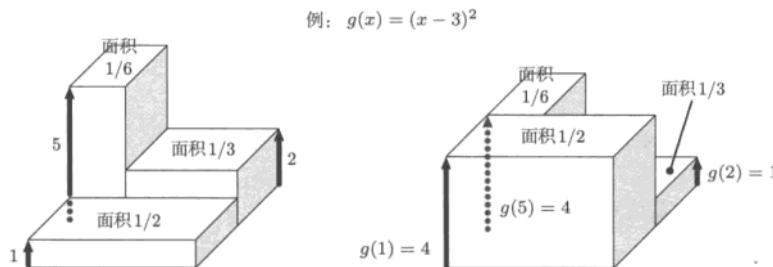
2024年1月15日 9:41

## 期望值的定义

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_k k P(X = k) \\ E[g(X)] &= \sum_k g(k) P(X = k) \quad (g \text{ 表示某种函数}) \end{aligned}$$

前者表示的正是式3.1的计算方式，后者也非常直观，其含义如下。

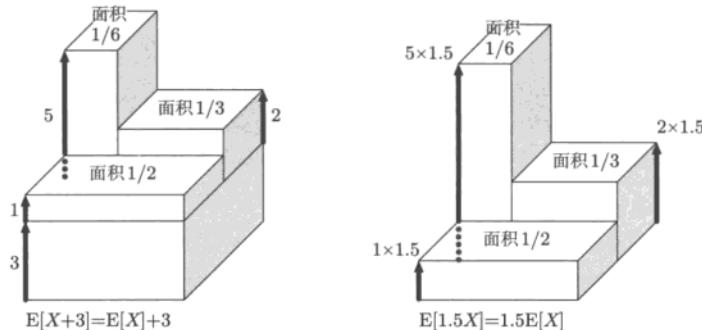
对于  $\Omega$  上的各点  $\omega$ ，以  $g(X(\omega))$  为高作图，得到的块状体的体积就是期望值  $E[g(X)]$ 。



## 期望值的性质

$$E[X + c] = E[X] + c \quad \text{全国的高度同时增加3米后，体积也会增加3(立方米)}$$

$$E[cX] = cE[X] \quad \text{全国的高度同时提高至原来的1.5倍后，体积也是原来的1.5倍}$$



类似地，我们从该图不难看出，对于随机变量  $X$  与  $Y$ ，和的期望值等于期望值之和。

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

对于常量  $c$  的期望值  $E[c]$ ，我们可以将其理解为“值为  $c$  的概率为 1 的随机变量”(参见 P20 脚注①) 的期望值。于是显然  $E[c] = c$ 。

## 如果 $X$ 和 $Y$ 独立

同理可知，除了这种情况，下面的式子同样成立。

$$\text{如果 } X \text{ 与 } Y \text{ 独立，} \text{ 则 } E[XY] = E[X]E[Y]$$

# 方差和标准差

2024年1月15日 9:50

## 方差的定义

### 方差即“期望值离散程度”的期望值

设随机变量  $X$  的期望值  $E[X] = \mu$ 。习惯上，随机值  $X$  以大写字母表示，它的期望值  $\mu$  是一个定值，因此用小写字母表示。

由于  $X$  是一个随机变量，因此即使它的期望值为  $\mu$ ，也不表示它的值就一定等于  $\mu$ 。为此，我们需要计算它的实际取值  $x$  与  $\mu$  的差距。测量（或者说定义这种偏差）的方式有很多。 $|x - \mu|$  可能是最为直观的方法，但落实到具体计算时，绝对值的存在会带来诸多不便（有时问题不得不分情况讨论，或是由于对应的曲线包含折角而无法微分等）。于是，人们通常使用偏差的平方  $(x - \mu)^2$  而非绝对值来解决这个问题。

- 如果  $X$  的取值正好为  $\mu$ ， $(x - \mu)^2 = 0$
- 否则  $(x - \mu)^2 > 0$
- 且  $x$  与  $\mu$  的偏差越大， $(x - \mu)^2$  的值也越大。

这些性质非常符合离散程度的定义。

在确定了标准之后，我们就可以以此测量具体的离散程度。不过，由于  $X$  是一个随机值，直接计算  $(X - \mu)^2$  得到的也将是一个随机值，而我们希望得到的是一种数值固定的指标，因此需要进一步计算它的期望值  $E[(X - \mu)^2]$ ，来消除其中的随机性。用这种方式得到的“离散程度的期望值”称为方差（variance），记为  $V[X]$  或  $\text{Var}[X]$ 。

$$V[X] \equiv E[(X - \mu)^2] \quad \text{其中 } \mu \equiv E[X]$$

再多强调一次， $X$  是随机值， $E[X]$  与  $V[X]$  是固定值。请读者明确区分两者。

根据定义，方差必然非负。

$$V[X] \geq 0$$

这是因为  $E[\cdots]$  中的  $(X - \mu)^2 \geq 0$  始终成立。

## 标准差的定义

请读者再回忆一下方差的定义。

$$E[X] \equiv E[(X - \mu)^2] \quad \text{其中 } \mu \equiv E[X]$$

需要注意的是，该式使用的是随机变量  $X$  与  $\mu$  的差的平方。例如，假设  $X$  表示飞行距离 [m]，方差  $V[X]$  表示的就是距离之差的平方的期望值 [ $m^2$ ]。如果表示的是长度，方差  $V[X]$  表示的就不是长度，而是长度的平方。两者无法直接比较的原因正在于此。

① 这是个有问题的转盘，它的取值概率并不均等。大部分值都在50附近，很少出现大幅偏差。

我们可以通过平方根运算将它还原成长度。诸如此类的方差的平方根称为标准差 (standard deviation)，通常记为  $\sigma$  或  $s$  ①。

$$\sigma \equiv \sqrt{V[X]}$$

在统计学相关图书中“记方差为  $\sigma^2$ ”的表述十分常见，于是标准差的记法也沿用了这一习惯。

如果  $X$  表示长度，其方差就表示长度的平方，标准差则同样表示长度。例如，之前图 3.6 中纵轴的信息其实没有价值。长度与长度的平方是不同的单位，含义也完全不同，无法放到一起比较。标准差就不存在这个问题，可以在同一根轴上比较。期望值  $\mu$  与  $\mu \pm \sigma$  的示意图如图 3.7 所示。通过该图中的标准差  $\sigma$ ，我们就可以大致了解到数值的离散程度。

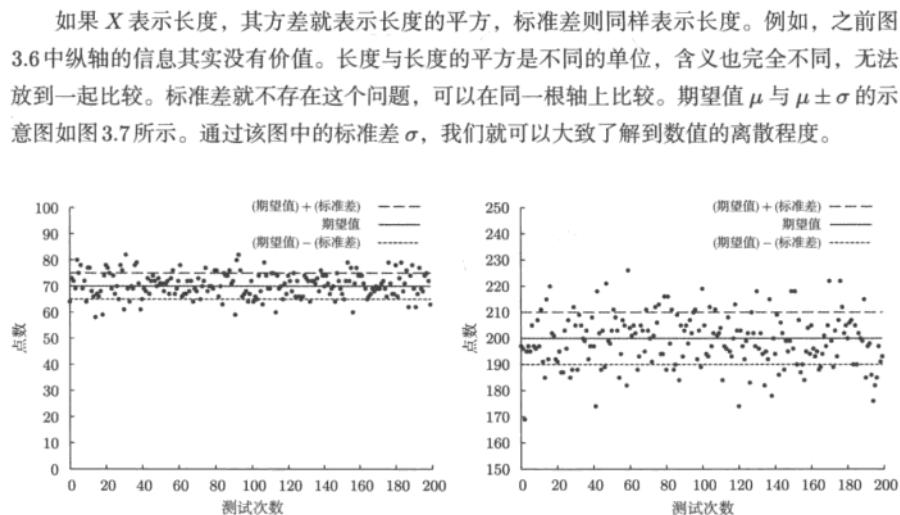


图 3.7 转盘的点数、期望值与标准差。图中，每次转动的点数以圆点表示，期望值  $\mu$  及  $\mu \pm \sigma$  以横线表示。左侧是方差为 25 的转盘 (标准差  $\sigma = \sqrt{25} = 5$ )，右侧是方差为 100 的转盘 (标准差  $\sigma = \sqrt{100} = 10$ )

# 常量的加法、乘法及标准化

2024年1月15日 10:07

接下来，我们将讲解方差与标准差的性质。与期望值一样，我们首先来看一下它们的计算。请读者考虑随机变量  $X$  与某一常量  $c$  相加及相乘的情况。

$$Y \equiv X + c$$

$$Z \equiv cX$$

$Y$  与  $Z$  依然是随机变量。它们的方差如下。

$$V[Y] = V[X + c] = V[X] \quad \dots \text{增加常量 } c \text{ 后，方差不变}$$

$$V[Z] = V[cX] = c^2 V[X] \quad \dots \text{乘以常量 } c \text{ 后，方差将变为原来的 } c^2 \text{ 倍}$$

换言之，它们的标准差有以下性质

- 在加上常量  $c$  之后，标准差不变
- 在乘上常量  $c$  之后，标准差扩大至原来的  $|c|$  倍<sup>①</sup>

①  $-3X$  的标准差是  $X$  的标准差的  $\sqrt{(-3)^2}$  倍，即 3 倍，而不是  $(-3)$  倍。

## 答案

设  $E[X] \equiv \mu$ ，我们将得到  $E[Y] = \mu + c$  与  $E[Z] = c\mu$ 。于是有以下结果。

$$V[Y] = E[(Y - (\mu + c))^2] = E[(X + c) - (\mu + c)]^2 = E[(X - \mu)^2] = V[X]$$

$$V[Z] = E[(Z - c\mu)^2] = E[(cX - c\mu)^2] = E[c^2(X - \mu)^2] = c^2 E[(X - \mu)^2] = c^2 V[X]$$

根据上述性质，我们能够通过转换随机变量  $X$  来获得需要的期望值与方差。现设  $E[X] = \mu$ ， $V[X] = \sigma^2 > 0$ ，此时只要令  $W \equiv \frac{X - \mu}{\sigma}$ ，就能得到  $E[W] = 0$  且  $V[W] = 1$ 。这种将期望值化为 0，方差化为 1 的转换处理称为标准化（或称归一化）。本书将在 4.6.2 节、4.6.3 节、5.1.3 节及 8.1.2 节中进一步讨论标准化。作为惯例，在对收集到的不同类型的数据进行正式处理前，我们通常需要对它们分别做标准化处理。例如，我们会在比较难易度不同的考试的成绩时引入偏差值，这本质上也是一种标准化。

## 练习题 3.8

试证明上述转换可以得到  $E[W] = 0$  且  $V[W] = 1$ 。

## 答案

$$E[W] = E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{E[X - \mu]}{\sigma} = \frac{E[X] - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$$

$$V[W] = V\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{V[X - \mu]}{\sigma^2} = \frac{V[X]}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

# 各项独立时，和的方差等于方差的和

2024年1月15日 10:32

## 3.4.5 各项独立时，和的方差等于方差的和

如果  $X$  与  $Y$  独立，则  $V[X+Y] = V[X] + V[Y]$  成立。

我们可以借助之前学习的期望值的性质来证明这点，如下所示。

设  $E[X] = \mu$ ,  $E[Y] = \nu$  ①:

$$\begin{aligned} V[X+Y] &= E\left[\left((X+Y) - (\mu+\nu)\right)^2\right] = E\left[\left((X-\mu)+(Y-\nu)\right)^2\right] \\ &= E\left[(X-\mu)^2 + (Y-\nu)^2 + 2(X-\mu)(Y-\nu)\right] \\ &= E[(X-\mu)^2] + E[(Y-\nu)^2] + E[2(X-\mu)(Y-\nu)] \\ &= V[X] + V[Y] + 2E[(X-\mu)(Y-\nu)] \end{aligned}$$

由于此处  $X$  与  $Y$  独立，因此  $X-\mu$  与  $Y-\nu$  也独立（参见 2.5.3 节）。又由于递等式最后一行的后半部分值为 0，因此  $V[X+Y] = V[X] + V[Y]$  成立。

$$2E[(X-\mu)(Y-\nu)] = 2E[X-\mu]E[Y-\nu] = 2(\mu-\mu)(\nu-\nu) = 0 \quad (3.2)$$

对于多个随机变量的情况，结论依然相同。例如，如果  $X, Y$  与  $Z$  独立，则  $V[X+Y+Z] = V[X] + V[Y] + V[Z]$  成立。

## 求二项分布 $B(n, p)$ 的方差

### 练习题 3.10

试求二项分布  $B(n, p)$  的方差。

### 答案

假设我们有独立的随机变量  $Z_1, \dots, Z_n$ ，它们取值为 1 的概率为  $p$ ，取值为 0 的概率  $q \equiv 1 - p$ 。这些随机变量之和  $X \equiv Z_1 + \dots + Z_n$ ，并遵从二项分布  $B(n, p)$ （参见 3.2 节）。我们可以根据独立性得到它的方差。

$$V[X] = V[Z_1] + \dots + V[Z_n]$$

且根据定义，我们可以像下面这样计算个别的方差。

$$V[Z_t] = E[(Z_t - p)^2] = (1-p)^2p + (0-p)^2q = q^2p + p^2q = pq(q+p) = pq, \quad (t = 1, \dots, n)$$

综上， $B(n, p)$  的方差  $V[X] = npq = np(1-p)$ 。

请读者务必记住上述结论基于独立的前提。如果随机变量不独立，方差就不一定能做简单的加法。举个极端的例子，如果  $Y = X$ ，方差就无法直接相加。

$$\begin{cases} V[X+Y] = V[X+X] = V[2X] = 4V[X] \\ V[X] + V[Y] = V[X] + V[X] = 2V[X] \end{cases}$$

其中， $E$  表示期望， $\mu$  是  $Z_t$  的均值。

对于伯努利随机变量  $Z_t$ ，其取值为 0 或 1，且每次取 1 的概率为  $p$ ，取 0 的概率为  $q = 1 - p$ 。

因此， $Z_t$  的均值为  $\mu = p$ 。

将  $\mu = p$  带入方差的计算公式中，我们得到：

$$V[Z_t] = E[(Z_t - p)^2]$$

$$= E[Z_t^2 - 2pZ_t + p^2]$$

现在我们要来计算  $E[Z_t^2]$  和  $E[2pZ_t]$ ：

对于  $E[Z_t^2]$ ：

当  $Z_t = 1$  时， $E[Z_t^2] = E[1] = 1$

$$E[X] = \sum_k kP(X = k)$$

$$E[g(X)] = \sum_k g(k)P(X = k) \quad (g \text{ 表示某种函数})$$

前者表示的正是式 3.1 的计算方式，后者也非常直观，其含义如下。

对于  $E[Z_t^2]$ :

当  $Z_t = 1$  时,  $E[Z_t^2] = E[1] = 1$

当  $Z_t = 0$  时,  $E[Z_t^2] = E[0] = 0$

所以,  $E[Z_t^2] = 1 \times p + 0 \times q = p$

对于  $E[2pZ_t]$ :

当  $Z_t = 1$  时,  $E[2pZ_t] = 2p \times p = 2p^2$

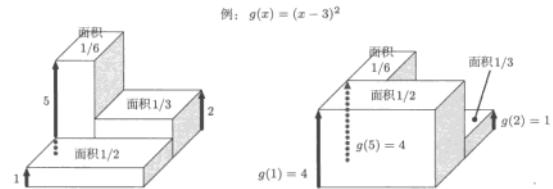
当  $Z_t = 0$  时,  $E[2pZ_t] = 2p \times q = 0$

所以,  $E[2pZ_t] = 2p^2 \times p + 0 \times q = 2p^3$

$$E[g(X)] = \sum_k g(k)P(X=k) \quad (g \text{ 表示某种函数})$$

前者表示的正是式3.1的计算方式, 后者也非常直观, 其含义如下。

对于  $\Omega$  上的各点  $\omega$ , 以  $g(X(\omega))$  为高作图, 得到的块状体的体积就是期望值  $E[g(X)]$ 。



将这些值代入方差的计算公式中, 我们得到:

将这些值代入方差的计算公式中, 我们得到:

$$V[Z_t] = E[(Z_t - p)^2]$$

$$= E[Z_t^2 - 2pZ_t + p^2]$$

$$= p - 2p^3 + p^2$$

$$= (1-p)^2p + (0-p)^2q$$

# 平方的期望值与方差

2024年1月15日 11:17

## 3.4.6 平方的期望值与方差

本节中，我们再介绍一条使用起来比较方便的公式。

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

其中，等式右侧的  $E[X]^2$  表示  $(E[X])^2$ 。这条公式也可以改写为以下形式，便于读者理解。

$$E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2 \quad \text{其中 } \mu \equiv E[X], \sigma^2 \equiv V[X]$$

也就是说， $X$  的平方的期望值等于  $X$  的期望值的平方加上  $X$  的方差。请读者注意不要混淆  $E[X^2]$  与  $E[X]^2$ ，两者并不相同。举个极端的例子，如图 3.12 所示，即使期望值  $E[X] = 0$ ，只要方差不为 0， $E[X^2]$  就不会取到 0 值<sup>①</sup>。只要记住这点，就不会将两者混淆。

### 练习题 3.12

当  $E[X] = \mu$  且  $V[X] = \sigma^2$  时，试证明对于取值恒定的常量  $a$ ，以下等式成立。

$$E[(X - a)^2] = (\mu - a)^2 + \sigma^2$$

### 答案

设  $Y \equiv X - a$ ，则有

$$\begin{aligned} E[(X - a)^2] &= E[Y^2] = E[Y]^2 + V[Y] = E[X - a]^2 + V[X - a] = (E[X] - a)^2 + V[X] \\ &= (\mu - a)^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

# 大数定律

2024年1月15日 16:03

## 3.5.3 大数定律

我们总结一下前几节得到的结论。对于遵从i.i.d.的随机变量  $X_1, \dots, X_n$ ，它们的平均

118 第3章 离散值的概率分布

值  $Z$  定义如下。

$$Z_n \equiv \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad (\text{为明确表示这是 } n \text{ 个随机变量的平均值，我们为 } Z \text{ 添加了下标})$$

我们可以进一步计算  $Z$  的期望值与方差。

$$E[Z_n] = \mu \quad \dots \dots \text{它的期望值与原来相同}$$

$$V[Z_n] = \frac{\sigma^2}{n} \quad \dots \dots \text{它的方差是原来的 } \frac{1}{n} \text{ (标准差则是原来的 } \frac{1}{\sqrt{n}} \text{)}$$

该平均值的期望值与方差显示，如果可以无限增大，方差  $V[Z_n]$  则可以无限减小并趋近于0。

$$V[Z_n] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

读者应该还记得，方差为零表示不含随机性。简单来讲，如果随机变量的个数  $n$  无限增加，它们的平均值将逐渐收敛于  $\mu$ 。这就是所谓的大数定律。

## 3.5.2 平均值的期望值与平均值的方差

接下来，我们将讨论平均值与期望值之间的区别。对于随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，它们的平均值  $Z$  定义如下<sup>①</sup>。

$$Z \equiv \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

由于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  都是随机值，因此由它们计算得到的  $Z$  仍然是一个随机值。事实上，在之前的实验中，每次得到的平均值也各不相同。由于平均值仅仅是所有数值之和除以个数后得到的结果，因此自然有以下结论。

- 恒定值的平均值仍然是恒定值
- 随机值的平均值仍然是随机值

另一方面，期望值是通过横向计算不同平行世界而求得的恒定值。对于本例中的随机变量  $Z$ ，它的期望值是各个期望值的平均，如下所示。

$$\begin{aligned} E[Z] &= E\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{E[X_1 + X_2 + \dots + X_n]}{n} \\ &= \frac{E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]}{n} \end{aligned}$$

又由于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  遵从 i.i.d.，因此它们自然都与期望值（设为  $\mu$ ）相同。于是，我们可以得到随机变量  $Z$  的期望值。

$$E[Z] = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$Z$  的期望值与每个单独的期望值一致，这也符合我们预期的结果。

既然已经求得了期望值，我们顺便再计算一下  $Z$  的方差。

$$V[Z] = V\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{V[X_1 + X_2 + \dots + X_n]}{n^2} \quad \left(\text{除以 } n \text{ 后方差为 } \frac{1}{n^2}\right)$$

此时，如果  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立，如下关系成立。

$$V[Z] = \frac{V[X_1] + V[X_2] + \dots + V[X_n]}{n^2} \quad (\text{如果独立，和的方差就等于方差的和})$$

进一步讲，当  $X_1, X_2, \dots, X_n$  遵从 i.i.d. 时，方差显然相同，于是得到以下结果。

$$V[Z] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

# 对数

2024年1月16日 8:59

一派同 我爱一哥 Thank you 一哥牛逼 666 666 呵，洋人  
降13: 18 来了来了 一哥yyds 听我说谢谢你 真的会谢。  
贾工大附中打卡 呵，洋人 真的会谢。  
结果更难了

$$a^x = M \quad x = \log_a M$$

对数的真数  
↓  
对数的底数

$$\log_a M + \log_a N = \log_a (MN)$$

$$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

$$\log_a M^n = n \log_a M \quad (\text{推广形式: } \log_a M^m = \frac{m}{n} \log_a M)$$

$$a^{\log_a m} = m$$

$c > 0 \wedge c \neq 1$

换底公式:  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$  (特别地, 当  $c = b$  时,  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_{10} x = \lg x \\ \log_e x = \ln x \end{array} \right.$$

# 不定积分

2024年1月18日 16:05

## 不定积分的基本积分公式

基本积分公式：

- 1)  $\int a dx = C \quad \int k dx = kx + C$
- 2)  $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1) \quad 3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- 4)  $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad 5) \int e^x dx = e^x + C \quad \int e^x = e^x$
- 6)  $\int \sin x dx = -\cos x + C \quad 7) \int \cos x dx = \sin x + C$
- 8)  $\int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad 9) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
- 10)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad 11) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
- 12)  $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \quad 13) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

## 积分法 (第一积分换元法)

4.2 积分法 换元(-=) 分部

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int 2x \cos x^2 dx = \int (\cos x^2) 2x dx$$
$$\int \cos u du = \sin u + C$$
$$\int \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C$$
$$dx^2 = 2x dx$$
$$dy = f'(x) dx$$

4.2 积分法 换元(-=) 分部

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int 2x \cos x^2 dx = \int (\cos x^2) 2x dx$$
$$\int \sin u du = -\cos u + C$$
$$\int \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C$$
$$2x dx$$
$$f'(x) dx$$

关键：1. 把d前头的某一项挪到d后头 2. 凑基本积分公式

凑积分积分公式

凑积分法

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x)$$

$$= \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C$$

$$1) \int \overbrace{3 \cos 3x}^{\text{d}u} dx = \int \cos 3x d(3x) = \sin(3x) + C$$

$$1) \int \overbrace{3 \cos 3x}^{\text{d}u} dx = \int \cos 3x d(3x) = \sin(3x) + C$$

$$2) \int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x+2} 3 dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x+2} d(3x+2)$$

$$\int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \ln|3x+2|$$

d里面的项可以任意加减常数

$$6) \int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{1}{1+\ln x} d(\ln x + 1) = \ln|\ln x + 1| + C$$

$$6) \int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{1}{1+\ln x} d(\ln x + 1) = \ln|\ln x + 1| + C \quad \text{凑}$$

$$7) \int e^x \sqrt{1-e^x} dx = \int \sqrt{1-e^x} d(1-e^x) = -\frac{2}{3}(1-e^x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$8) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{1}{a^2} \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$8) \int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \tan^3 x \sec^2 x dx = \int \tan^3 x d(\tan x) = \frac{1}{4} \tan^4 x + C$$

$$9) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{1}{a} \frac{dx/a}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

# 一. 找原函数

$f(x) \rightarrow \text{找 } F(x), \text{ 使 } F'(x) = f(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \checkmark$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \checkmark$$

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a)$$

①  $\int k dx = kx + C$  ( $k$  为常数);

②  $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C (\mu \neq -1);$

③  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

④  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C;$

⑤  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

⑥  $\int \cos x dx = \sin x + C;$

⑦  $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

⑧  $\int \sec^2 x dx = \tan x + C;$

⑨  $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$

⑩  $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$

⑪  $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$

⑫  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

⑬  $\int e^x dx = e^x + C;$

⑭  $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C;$

⑮  $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C.$

《高等数学轻松学》

(第3版) P96

《考研数学这十年》

(2024版) P39

$$\int [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx \pm k_2 \int g(x) dx$$



# 离散型随机变量及其概率分布

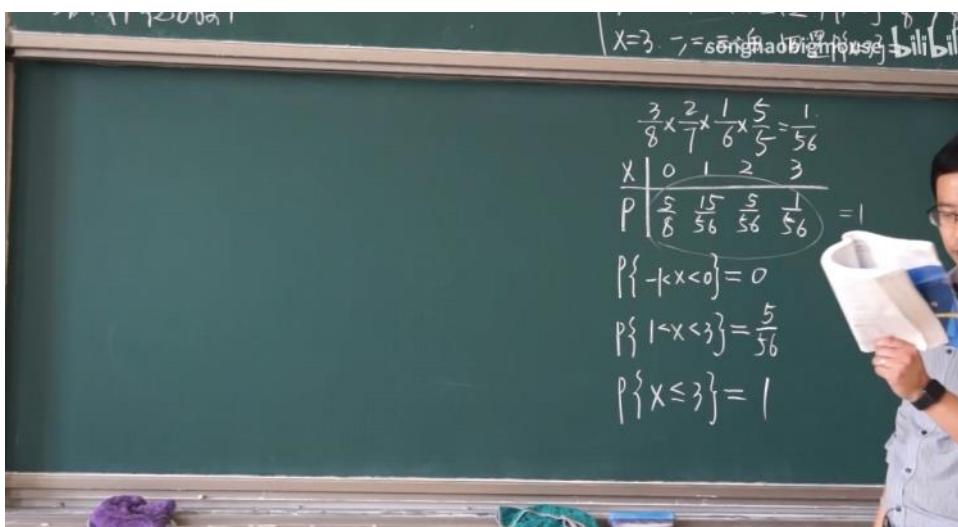
2024年1月16日 15:28

大写X表示变量

小写x表示取值

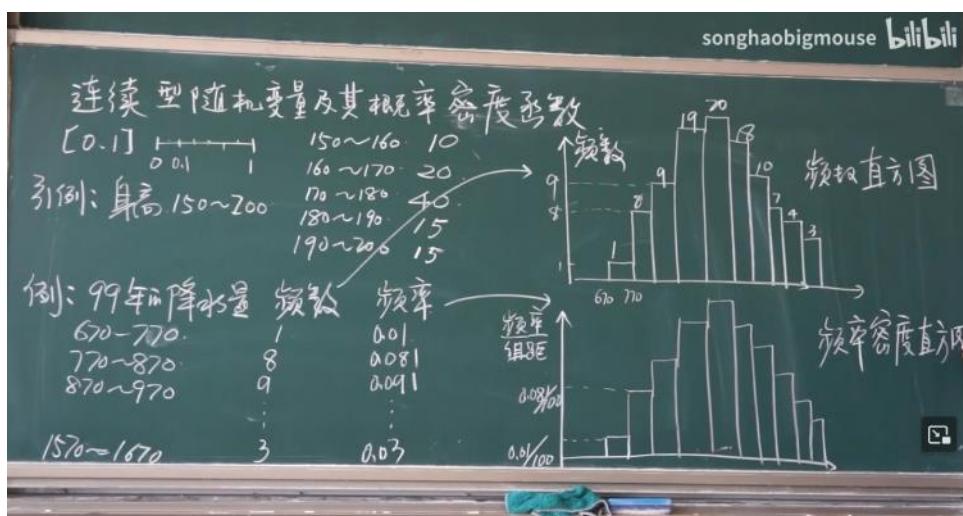
高斯型随机变量及其概率分布

X	1, 2, 3, 4, 5, 6	P	1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6
X	1, 0	P	1/2, 1/2
$X$ 的所有取值 $x_k (k=1, 2, \dots)$	$y=2x+1$	分布表	
$P\{X=x_k\}=p_k$ 独立事件 (逆). 各成互斥事件	$y=2x+1$	$\sum p_k=1$	
$\uparrow$ $\frac{1}{6}$ $1, 2, 3, 4, 5, 6$	$\uparrow$ $\frac{1}{2}$ $0, 1$	$\text{① } p_k \geq 0 \quad \text{② } \sum p_k = 1$	
			$\begin{array}{ c c c c c c } \hline X & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \dots \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \dots \\ \hline \end{array}$
			<p>例 1: 5 黑 3 白, 每次抽一个不放回 直到取到黑为止 <math>X</math> 为取到的数目 <math>P\{-1 &lt; X &lt; 0\}, P\{1 &lt; X &lt; 3\}, P\{X \leq 3\}</math> <math>X=0 \quad P\{X=0\} = \frac{5}{8} \quad X=1 \quad -; \text{白} = \text{黑} = \frac{5}{56}</math> <math>P\{X=1\} = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}</math> <math>X=2, -; \text{白}, \text{三; 黑} \quad P\{X=2\} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6}</math></p>



# 连续型随机变量及其概率密度函数

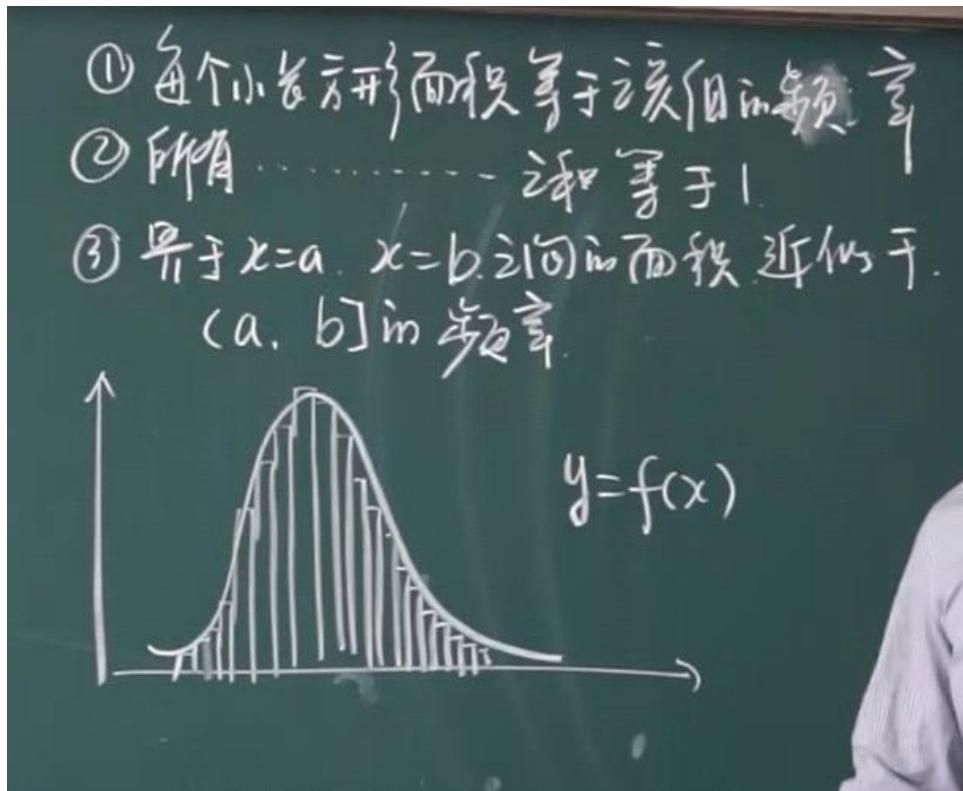
2024年1月16日 17:18



频率密度直方图 纵轴 频率/组距

1. 每个小方形的面积等于该组的概率
2. 所有的小方形面积之和等于1
3. 介于  $x=a$ 、 $x=b$  之间的面积等于频率

概率分布密度函数



定义非负可积  $f(x)$ ,  $f(x) \geq 0$  对于  $a \leq b$  都有

定义：非负可积  $f(x)$ ,  $f(x) \geq 0$   $a \leq b$ .

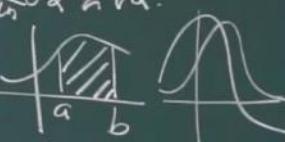
$$P\{a < x \leq b\} = \int_a^b f(x) dx$$

$X$ : 连续,  $f(x)$  概率分布密度函数.

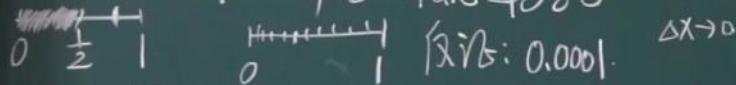
定义：非负可积  $f(x)$ ,  $f(x) \geq 0$   $a \leq b$ .

$$P\{a < x \leq b\} = \int_a^b f(x) dx$$

$X$ : 连续,  $f(x)$  概率分布密度函数.

①  $f(x) \geq 0$  ②  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$  

③ 连续变量取个别值的概率为0



$$0 \leq P\{X = x_0\} \leq P\{\underline{x_0 - \Delta x} < X \leq \overline{x_0}\} = \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0} f(x) dx \rightarrow 0$$

连续型 端点无所谓

连续, 端点无所谓

$$P\{a \leq X \leq b\} = P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X < b\} = P\{a < X < b\}$$

$$P\{X < a\} = P\{X \leq a\}$$

$$\rightarrow P\{X > a\} = P\{X \geq a\}$$

概率为0的事件未必是不可能事件

概率为1的事件未必是必然事件

(0, 1) 开区间  $P=1$  但是也有可能扔到端点

## 连续型随机变量及其概率密度函数

$$\text{例2: } f(x) = \begin{cases} kx+1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{求 } k. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

## 连续型随机变量及其概率密度函数

$$\text{例2: } f(x) = \begin{cases} kx+1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{求 } k. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^2 (kx+1) dx = 1$$

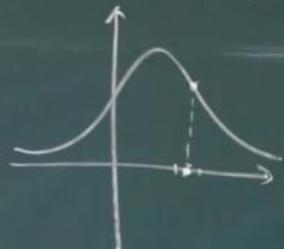
$$k = -\frac{1}{2}.$$

连续型随机变量概率密度函数的原始定义: a到b的概率是从a到b求积分

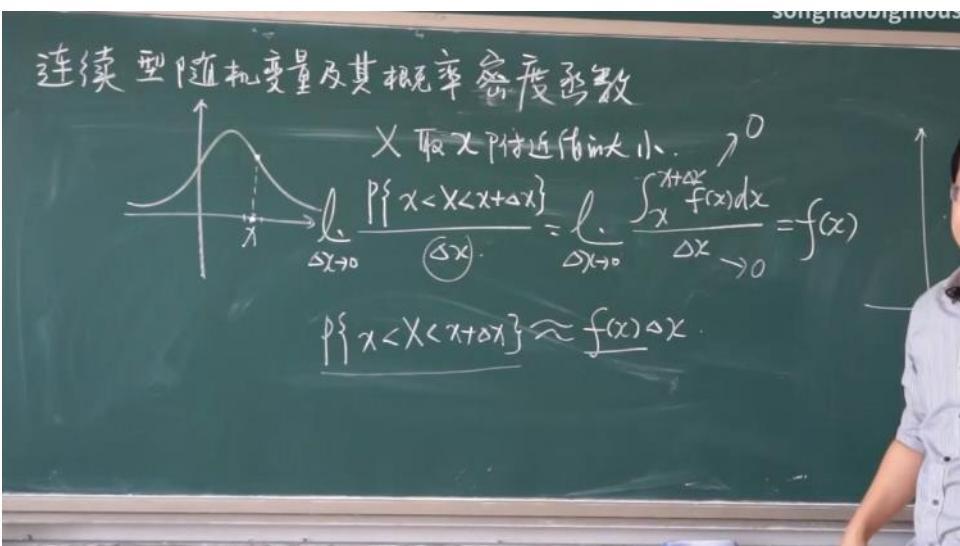
$$P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx$$

有没有等于号无所谓

## 连续型随机变量及其概率密度函数

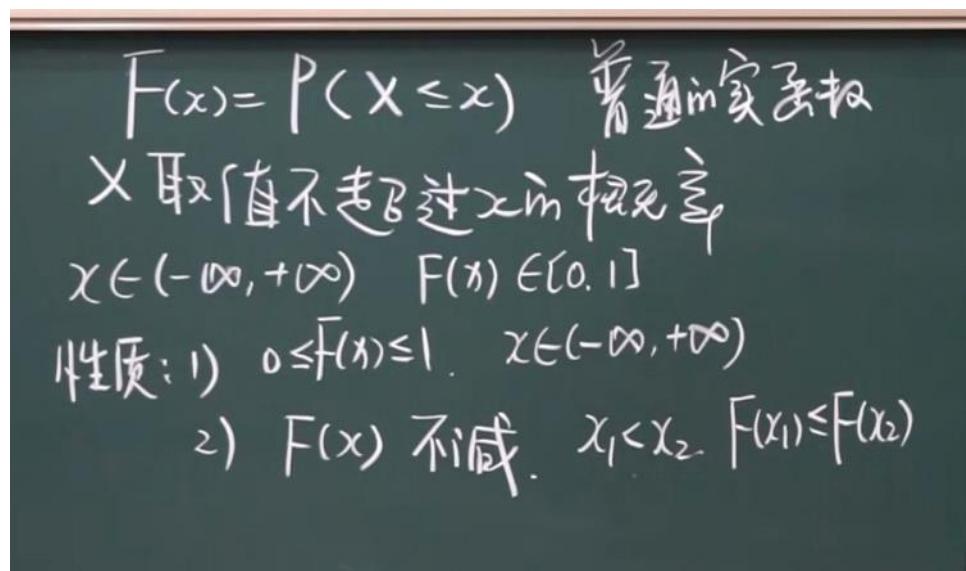
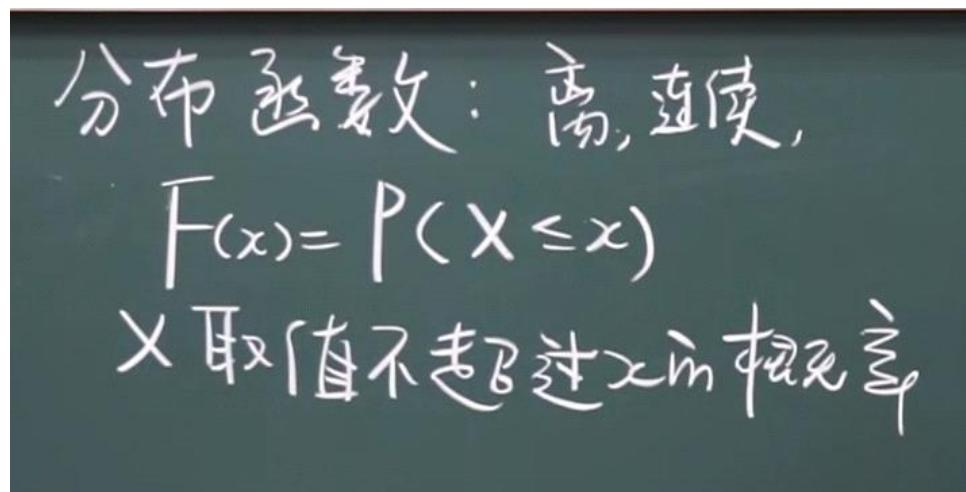


$X$  取  $x$  附近值的大小.

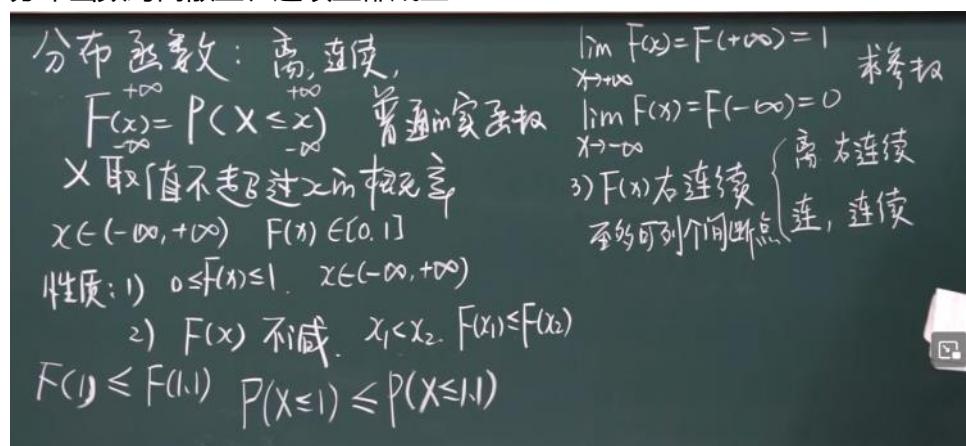


# 分布函数的定义

2024年1月16日 19:35



分布函数对离散型、连续型都成立



$\lim_{x \rightarrow -\infty}$

3)  $F(x)$  右连续 离右连续  
 至多可列个间断点 连, 连续

(2)  $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$

什么是右连续, 从右边逼近a, 得到 $F(a)$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P\{X \leq x\} \\
 P\{X \leq a\} &= F(a) \\
 P\{X > a\} &= 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a) \\
 P\{a < X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a) \\
 P\{X = a\} &= F(a) - F(a-0)
 \end{aligned}$$

第四条:  $F(a)$  是负无穷到a,  $F(a-0)$  是逼近a的左极限, 相减得到a点的概率

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P\{X \leq x\} \\
 P\{X \leq a\} &= F(a) \\
 P\{X > a\} &= 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a) \\
 P\{a < X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a) \\
 P\{X = a\} &= F(a) - F(a-0) \\
 P\{a \leq X \leq b\} &= F(b) - F(a-0) \\
 P\{X < a\} &= F(a-0) \quad P\{X \geq a\} = 1 - F(a-0)
 \end{aligned}$$

# 离散型的分布函数

2024年1月17日 14:00

例题1

$$\text{例11: } F(x) = \begin{cases} \alpha - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$  未 a.

$$\text{例11: } F(x) = \begin{cases} \alpha - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$  未 a.

$$\begin{aligned} F(-\infty) &= 0 = 0 \\ F(+\infty) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \alpha - \frac{1}{e^{\lambda x}} \right) = \alpha = 1 \end{aligned}$$

例题2

离散型随机变量求分布函数

$$\text{例12: } \begin{array}{c|ccc} X & -1 & 2 & 3 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \quad F(x) = P(X \leq x)$$

$$\text{解: } x < -1 \quad F(x) = P(X \leq x) = 0$$

$$-1 \leq x < 2 \quad F(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$$

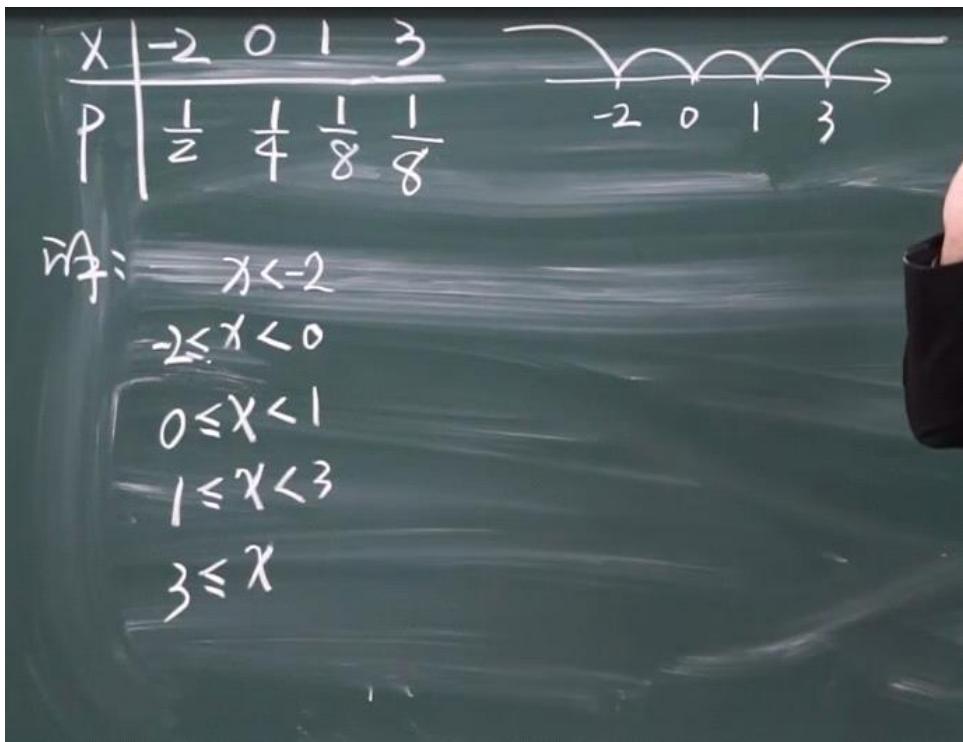
$$2 \leq x < 3 \quad F(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{5}{6}$$

$$3 \leq x \quad F(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

写出函数表达式

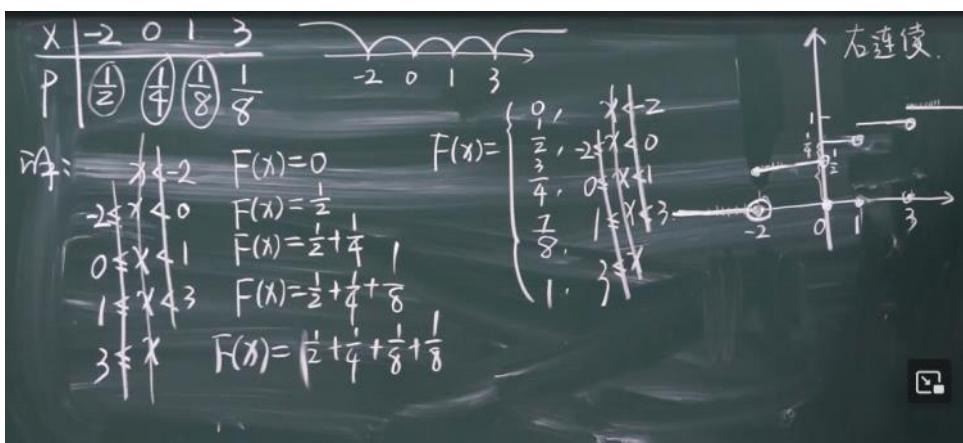
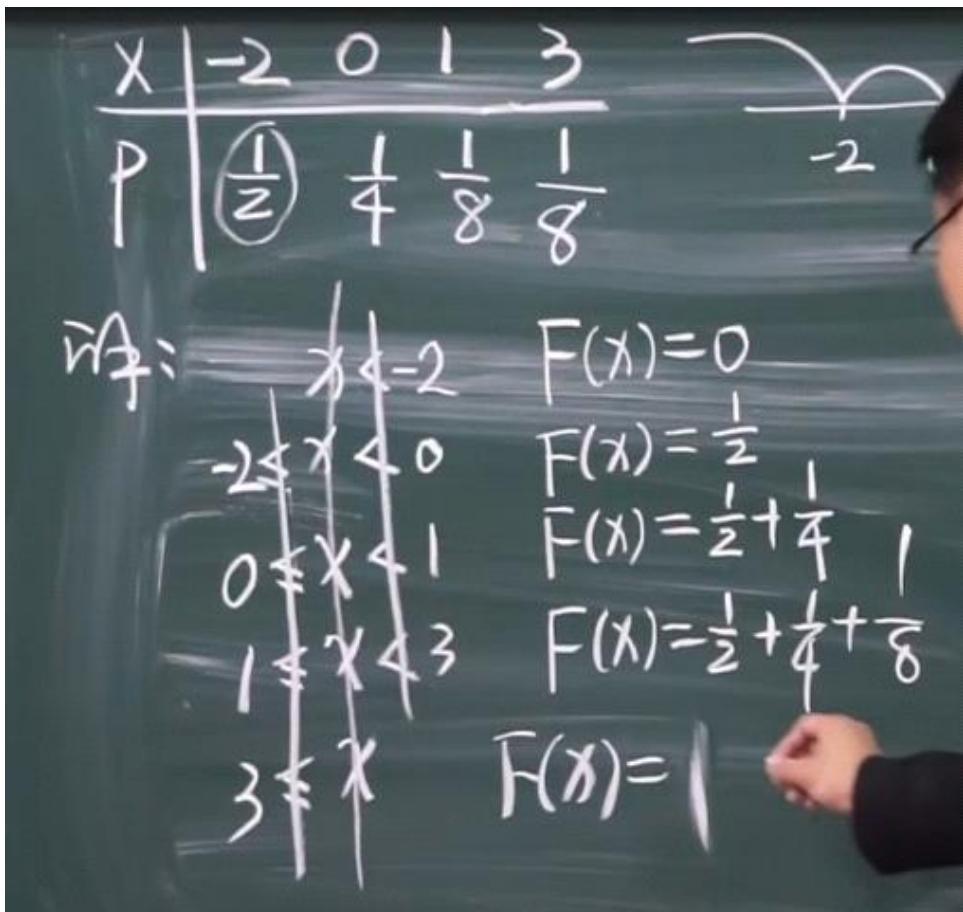
例2:	$X$	-1	2	3	$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$
	$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

例3



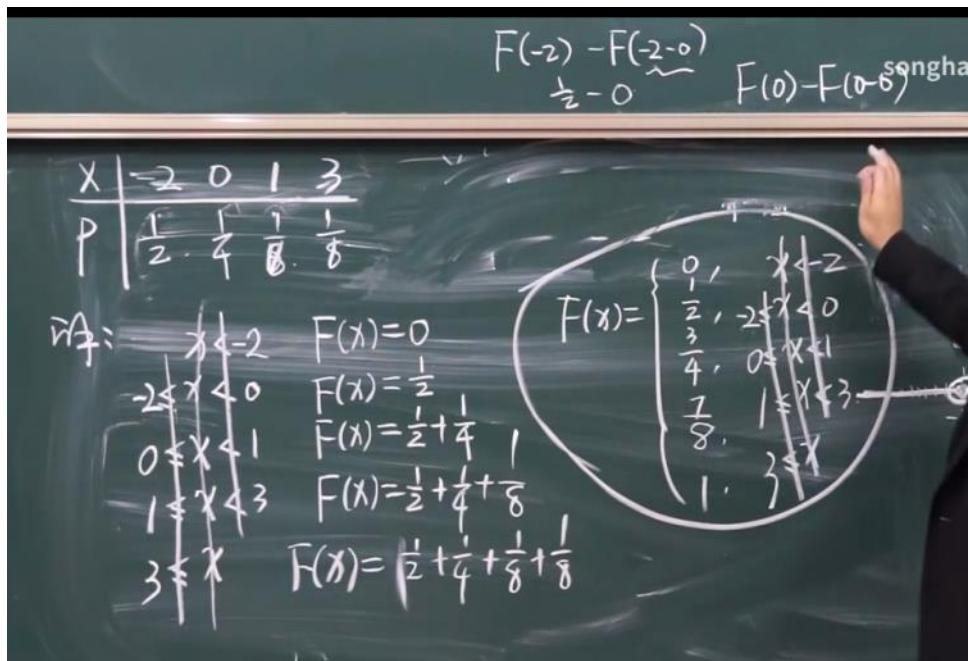
四个断点分成五个部分

第一段一定等于0，最后一段肯定等于1



是右连续不是左连续

由分布函数求概率函数



每一个点上的取值，就是每个点跳多高

# 连续型的分布函数

2024年1月17日 15:22

分布  $\rightarrow$  概率  
间断点  $x_k$  是  $X$  的值  
 $P\{X=x_k\} = F(x_k) - F(x_k-0)$   
 例 3:  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  bilibili  
连续  $F'(x) = f(x)$

$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

例 4:

$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt$   
连续  $F'(x) = f(x)$

$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其他 } x < 0 \text{ 或 } x > 2 \end{cases}$

例 4:  $x < 0$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

$0 \leq x < 2$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x (-\frac{1}{2}t + 1) dt = -\frac{1}{4}x^2 + x$

$x \geq 2$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^2 (-\frac{1}{2}t + 1) dt + \int_2^x 0 dt = 1$

$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt$   
连续  $F'(x) = f(x)$

例题5

例题5:  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ Ax^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

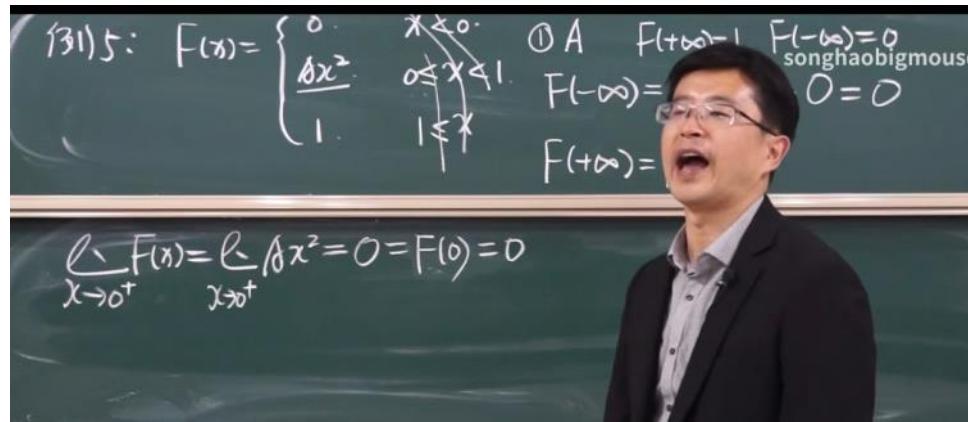
求常数A

正无穷和负无穷都求不出来

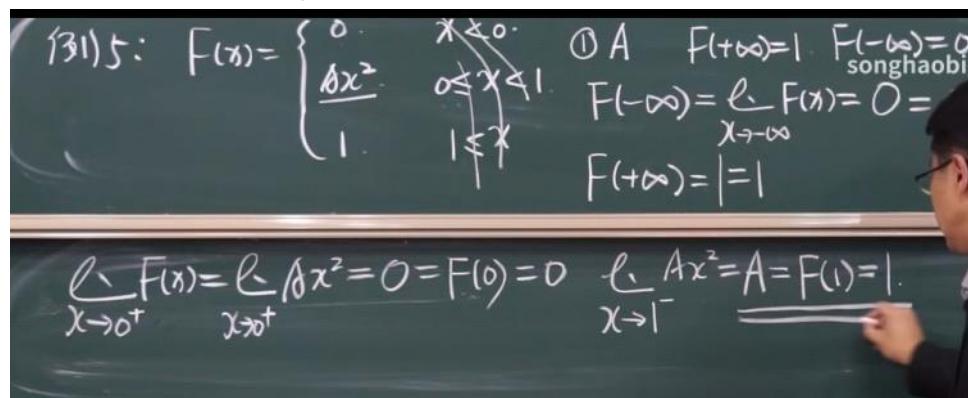
例题5:  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ Ax^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

① A  $F(+\infty) = 1$   $F(-\infty) = 0$   
 $F(-\infty) = 0$   $F(x) = 0 = 0$   
 $F(+\infty) = 1 = 1$

所以只能考虑从x的间断点0和1入手



从0入手，这道题也做不出来



因为是连续函数

例题6

$$2). f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad 3) P\{0.3 < X < 0.7\}$$

求  $P(0.3 < X < 0.7)$

$$2). f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad 3) P\{0.3 < X < 0.7\} = \overline{F(0.7) - F(0.3)} = \overline{\int_{-0}^{0.7} f(t) dt - \int_{-0}^{0.3} f(t) dt}$$

连续的不考虑端点

0.4

# 0-1分布

2024年1月17日

16:55

x只能取0和1

常见分布

0-1分布

X	1	0
P	P	1-P

$$P\{X=k\} = P^k (1-P)^{1-k}$$

# 几何分布

2024年1月17日 17:09

$P(A) = p$  第  $K$  次首次发生, 前  $K-1$  次未发生

几何分布

$P(A) = p$  第  $K$  次首次发生, 前  $K-1$  次未发生

$$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p$$

几何分布

$P(A) = p$  第  $K$  次首次发生, 前  $K-1$  次未发生

$$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p \quad k=1, 2, 3, \dots$$

例: 猜中  $0.6$ .  $X$ : 直到命中目标的次数

$$P\{X=k\} = 0.4^{k-1} 0.6 \quad k=1, 2, 3, \dots$$

# 二项分布

2024年1月17日 17:14

$P(A) = P$  n次试验, 发生了K次

0-1分布是特殊的二项分布

二项分布

$$P(A) = P \cdot n \text{ 次试验发生 } k \text{ 次}$$
$$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$
$$X \sim B(n, p) \quad C_n^0 C_n^1$$
$$n=1 \text{ 时} \quad P\{X=k\} = \cancel{C_n^k} p^k (1-p)^{1-k} \quad k=0, 1$$

例13: 报警器 报警 0.8, 问 99% 报警

$X$ : 台数(报警)  $n$ : 安装台数  $X \sim B(n, 0.8)$

$$0.99 \leq P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - C_n^0 0.2^n = 1 - 0.2^n$$

$$1 - 0.2^n \geq 0.99 \quad 0.01 \geq 0.2^n \quad \ln 0.01 \geq n \ln 0.2$$

songhaobigmouse bili bili

例题

例4: 每台机床维修  $P=0.01$ .

1) 1个人看20台 2) 3人看80台

不能及时维修的概率

1)  $n=20, P=0.01$  修的台数

$$\begin{aligned} P\{X>1\} &= 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} \\ &= 1 - \binom{0}{20} 0.99^{20} - \binom{1}{20} 0.01 \times 0.99^{19} \\ &\approx 0.0169. \end{aligned}$$

2)  $n=80, P=0.01$

$$\begin{aligned} P\{X>3\} &= 1 - P\{X=0\} = P\{X=1\} - P\{X=2\} - P\{X=3\} \\ &\approx 0.0087 \end{aligned}$$

# 泊松分布 (茆世松P85)

2024年1月17日 19:08

泊松分布

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k=0,1,2,3,\dots$$
$$\lambda > 0. \quad X \sim P(\lambda)$$

泊松分布查表

二项分布  $n \geq 100$ ,  $np \leq 10$ , 可以用泊松分布

例5: 电话台 用户呼次  $X \sim P(3)$   $\lambda=3$ .  
不超过5次

例5: 电话台 用户呼次  $X \sim P(3)$   $\lambda=3$ .  
不超过5次

解:  $X \sim P(3)$ ,  $\lambda=3$

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{3^k}{k!} e^{-3} \quad k=0,1,2,\dots$$
$$P\{X \leq 5\} = \sum_{k=0}^{5} P\{X=k\} = 0.916$$

例6: 汽车部有1000个用户. 每户10万元  
每户提20%的极差是0.006.

$$10 \times 0.2 = 2 \text{万元}$$

1,2, ... 汽车部的押金是95%以上的极差

$\lambda=3$ . 例16: 汽车部有1000个用户 每户10万元  
 每户提20%的提现率是0.006  $\lambda=6$   
 $10 \times 0.2 = 2$  万元  $n=1000$   $p=0.006$   $np=6$   
 $\lambda = 0, 1, 2, \dots$  准备多少钱包含95%以上的提现率  
 解:  $X$ : 提钱的用户数  $X \sim B(1000, 0.006)$   
 现金2元  $P\{2X \leq x\} \geq 0.95$   
 $P\{X \leq \frac{x}{2}\} \geq 0.95$   $\sum_{k=0}^{\frac{x}{2}} \frac{6^k}{k!} e^{-6} \geq 0.95$   $\frac{x}{2} \geq 10$   $x \geq 20$

问: 应该准备多少钱, 保证95%以上的用户提款的要求

2X提款用户提的款, x准备的钱

例17: 发病率  $\frac{1}{1000}$  单位5000人  
 至少2人得病的概率.  
 问

例17: 发病率  $\frac{1}{1000}$  单位5000人  
 至少2人得病的概率.  $n=5000$   $np=5$   
 解:  $X$ : 得病人数  $X \sim B(5000, \frac{1}{1000})$   
 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\}$   
 $= 1 - 0.006738 - 0.03369$   
 $= 0.959572$

# 超几何分布

2024年1月18日 9:26

超几何分布

100学生，男60人，女40人，取10人

$X$ : 取10人中男生人数

$P\{X=k\} = \frac{\binom{60}{k} \binom{40}{10-k}}{\binom{100}{10}}$

$k=0, 1, 2, \dots, 10$

		100人	
		男60人	女40人
		k人	10-k人

超几何分布定义

$N$ 个元素： $N_1$ 个属于第1类， $N_2$ 个属于第2类

取 $n$ 个  $X$ :  $n$ 个属于第1类的个数

$P\{X=k\} = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$k=0, 1, 2, \dots, \min\{n, N_1\}$

$N \leq N_1$

超几何分布明显的特征，分为两类

超几何分布可以描述不放回抽样的实验

不放回抽样试验

100000 粒 立发芽率 99%

取出 10 粒  $N$  很大,  $n$  相对于  $N$  很小.

$P = \frac{M}{N}$ , 3 变小

$$P\{X=k\} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k}$$

近似地用二项分布来计算

例题 9

13119: 10000 粒种子 发芽率 99% 取 200 粒  
至多 1 粒不发芽.

$$P\{X \leq 1\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} = \frac{\binom{0}{100} \binom{200}{9900}}{\binom{200}{10000}} + \frac{\binom{1}{100} \binom{199}{9900}}{\binom{200}{10000}}$$

超几何分布如上, 难计算, 用二项分布替代

13119: 10000 粒种子 发芽率 99% 取 200 粒  
 $N$  至多 1 粒不发芽.  $n$

解:  $10000 \times 1\% = 100$  粒  $\leftarrow$  不发芽  
发芽 9900 粒  $\rightarrow N_1$

$$N = 10000, N_1 = 100, n = 200$$

$$P\{X \leq 1\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} = \frac{\binom{0}{100} \binom{200}{9900}}{\binom{200}{10000}} + \frac{\binom{1}{100} \binom{199}{9900}}{\binom{200}{10000}}$$

$$n = 200, P = 0.01$$

$$P\{X \leq 1\} = \binom{0}{200} 0.01^0 \cdot 0.99^{200} + \binom{1}{200} 0.01 \cdot 0.99^{199}$$

二项分布也难算，用泊松分布近似

$$n=200, p=0.01, np=2, \lambda=2.$$

$$0.1353 + 0.2707, \lambda=2, k=0, k=1, \\ = 0.406$$

二项分布  $n \geq 100, np \leq 10$  用泊松分布  
近似计算  $\lambda = np$

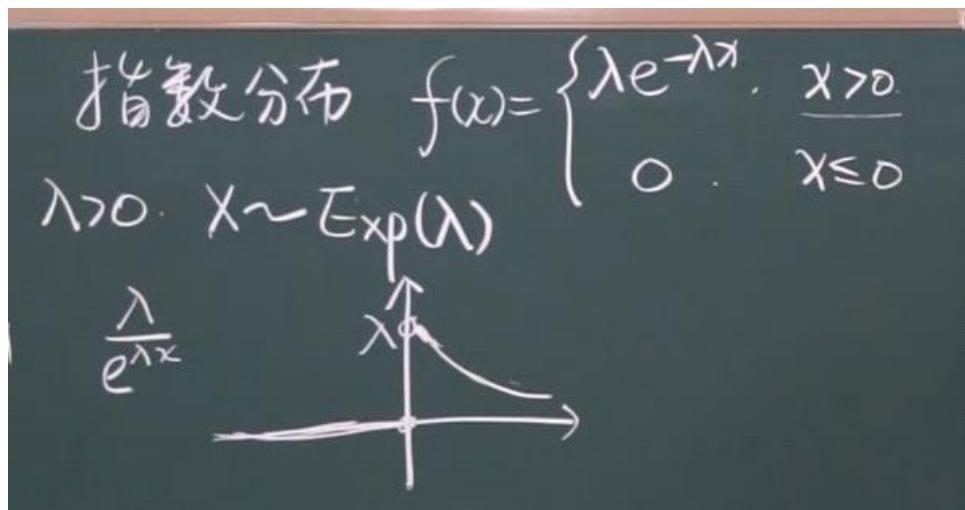
$n \geq 100, np \leq 10$  用泊松分布

二项分布  $n \geq 100, np \leq 10$  用泊松分布  
近似计算  $\lambda = np$

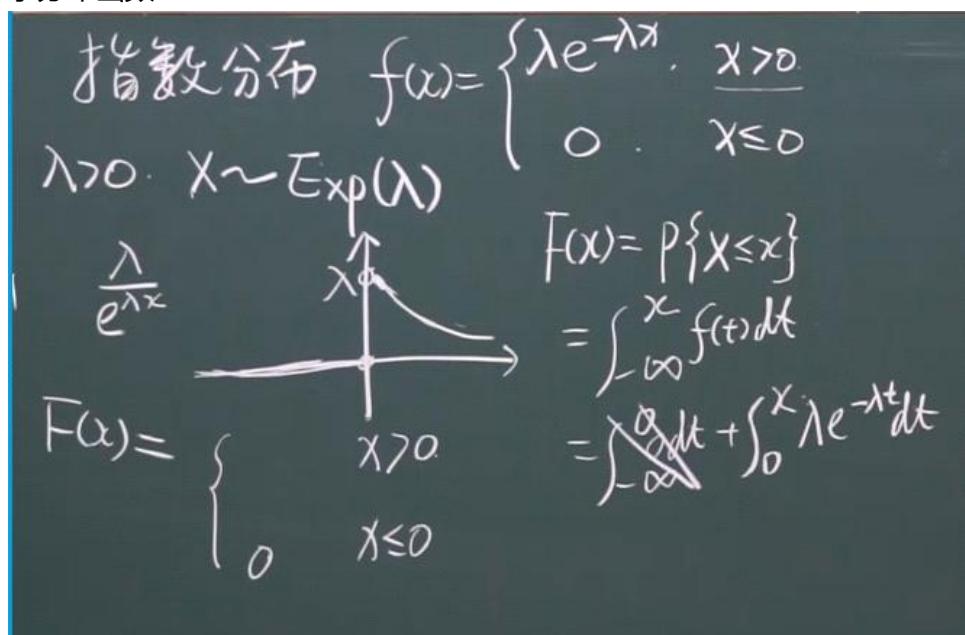
超几何分布  $\frac{N \times \%}{N + \%} \rightarrow$  二项分布

# 指数分布

2024年1月18日 11:08



求分布函数



指數分布  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

$\lambda > 0, X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$\frac{\lambda}{e^{\lambda x}}$

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$

$F(x) = P\{X \leq x\}$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \cancel{\int_{-\infty}^0 dt} + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= -\int_0^x e^{-\lambda t} d(-\lambda t) \\ &= -e^{-\lambda t} \Big|_0^x \end{aligned}$$

指數分布  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

$\lambda > 0, X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$\frac{\lambda}{e^{\lambda x}}$

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$

$F(x) = P\{X \leq x\}$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \cancel{\int_{-\infty}^0 dt} + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= -\int_0^x e^{-\lambda t} d(-\lambda t) \\ &= -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

2) 寿命  $X$   $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

3个元件

解:

机器的寿命  $x$ ,  $x$  服从密度函数  $f(x)$ , 机器靠3个元件运转, 每个元件都不能坏, 求这个机器工作1000小时以上的概率

解题思路: 先求一个元件工作1000小时以上的概率

2) 寿命  $X$   $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$   
 3个元件

证:  $P\{X > 1000\} = \int_{1000}^{+\infty} \left(\frac{1}{1000}\right) e^{-\frac{x}{1000}} dx$   
 $= -e^{-\frac{x}{1000}} \Big|_{1000}^{+\infty} = e^{-1}$

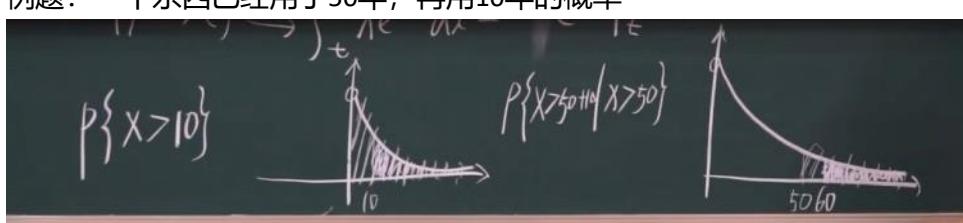
$P(A) = (P(X > 1000))^3 = e^{-3}$

□

例3:  $X$  指数分布.  $s > 0, t > 0$  证:  $P\{X > s+t | X > s\} = P\{X > t\}$   
 $P\{X > s+t | X > s\} = \frac{P\{(X > s+t) \cap \{X > s\}\}}{P\{X > s\}} P\{A | B\} = \frac{P(AB)}{P(B)}$   
 $= \frac{P\{X > s+t\}}{P\{X > s\}} = \frac{\int_{s+t}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_s^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{-e^{-\lambda x} \Big|_{s+t}^{+\infty}}{-e^{-\lambda x} \Big|_s^{+\infty}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$   
 $= P\{X > t\} \rightarrow \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_t^{+\infty} = e^{-\lambda t}$

一个东西用10年以上的概率  $P\{X > 10\}$

例题: 一个东西已经用了50年, 再用10年的概率



无记忆性证明

# 正态分布

2024年1月18日 14:38

x服从密度函数

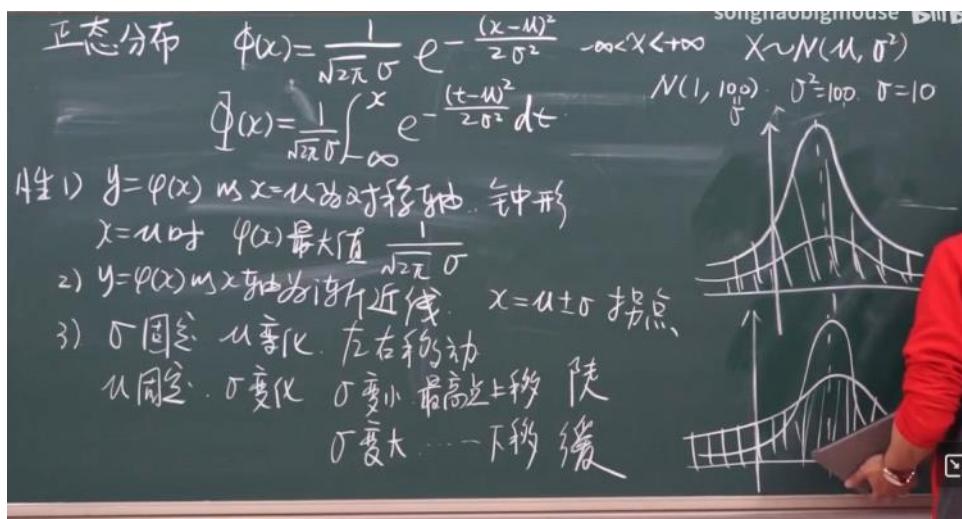
$$\text{正态分布 } \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned} \text{正态分布 } \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}} \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d(x-\mu) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

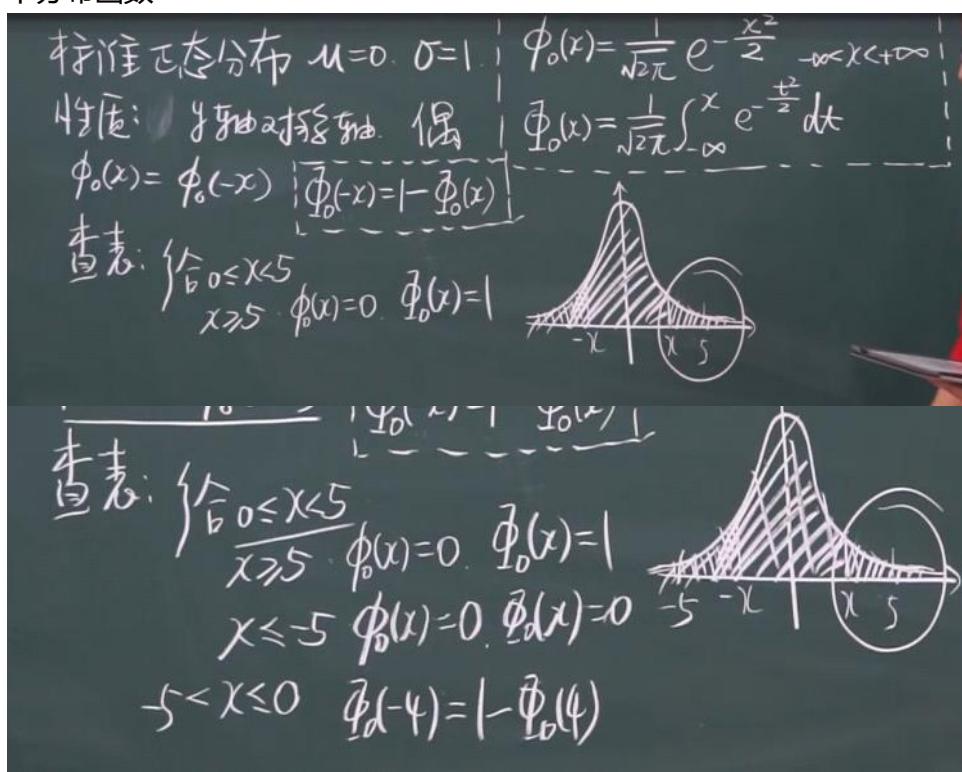
$$\begin{aligned} \text{正态分布 } \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ &\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}} \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1 \end{aligned}$$



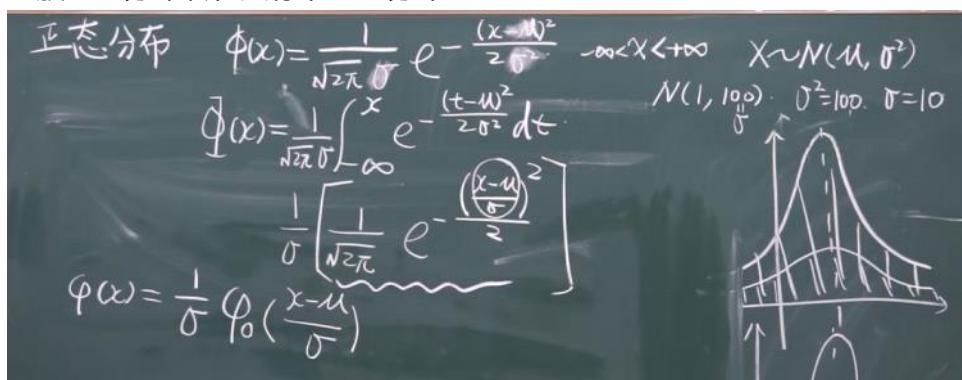
标准正态分布公式

上密度函数

下分布函数



一般正态分布转化成标准正态分布



正态分布  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \Phi(x) = \Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

角标加0是标准正态分布

例题:一般正态分布求概率

(5)  $X \sim N(1.4, 0.2^2)$   $\mu=1.4$ ,  $\sigma=0.2$

$$\begin{aligned} P\{|X| \leq 2\} &= P\{-2 \leq X \leq 2\} = \Phi_0\left(\frac{1.6-1.4}{0.2}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-1.4}{0.2}\right) = \Phi_0(1) - \Phi_0(-3) = \Phi_0(1) - 1 + \Phi_0(3) \end{aligned}$$

要转成标准正态分布

$$\begin{aligned} P\{|X| \leq 2\} &= P\{-2 \leq X \leq 2\} = \Phi_0(1) - \Phi_0(-3) = \Phi_0(1) - 1 + \Phi_0(3) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi_0\left(\frac{2-1.4}{0.2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-2-1.4}{0.2}\right) = \Phi_0(0.5) - \Phi_0(-1.5) = \\ P\{|X| \leq 2\} &= P\{-2 \leq X \leq 2\} = \Phi_0(1) - \Phi_0(-3) = \Phi_0(1) - 1 + \Phi_0(3) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi_0\left(\frac{2-1.4}{0.2}\right) - \Phi_0\left(\frac{-2-1.4}{0.2}\right) = \Phi_0(0.5) - \Phi_0(-1.5) = \Phi_0(0.5) - 1 + \Phi_0(1.5) \end{aligned}$$

解法2

不等式两侧同时减相同的数, 乘正数依然成立

$$P\{|X| \leq 2\} = P\{-2 \leq X \leq 2\} = P\left\{-\frac{2-1.4}{0.2} \leq \frac{X-1.4}{0.2} \leq \frac{2-1.4}{0.2}\right\}$$

直接化成标准正态分布

$$P\{|X| \leq 2\} = P\{-2 \leq X \leq 2\} = P\left\{-\frac{2-1.4}{0.2} \leq \frac{X-1.4}{0.2} \leq \frac{2-1.4}{0.2}\right\} = \Phi_0(0.5) - \Phi_0(-1.5)$$

例题2

零件长度, 1.问合格概率2.重复求3次, 至少有一个是合格的

(6) 长度  $X \sim N(50, 1)$   $\mu=50$ ,  $\sigma=1$   $50 \pm 1$  是合格的

(6)  $Y \sim N(50, 1)$   $\mu=50, \sigma=1$   $50 \pm 1$  合格

$$P\{49 \leq Y \leq 51\} = \Phi(51) - \Phi(49) = \Phi\left(\frac{51-50}{1}\right) - \Phi\left(\frac{49-50}{1}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y \leq 0\} = 1 - (1 - 0.6826)^3 \approx 0.968 = 2\Phi(1) - 1$$

(7)

$$P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y \leq 0\} = 1 - (1 - 0.6826)^3 \approx 0.968 = 2\Phi(1) - 1$$

例題3

$$(7) X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad P\{|X-\mu| < \sigma\} \quad P\{|X-\mu| < 2\sigma\} \quad P\{|X-\mu| < 3\sigma\}$$

$$(7) X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad P\{|X-\mu| < \sigma\} \quad P\{|X-\mu| < 2\sigma\} \quad P\{|X-\mu| < 3\sigma\}$$

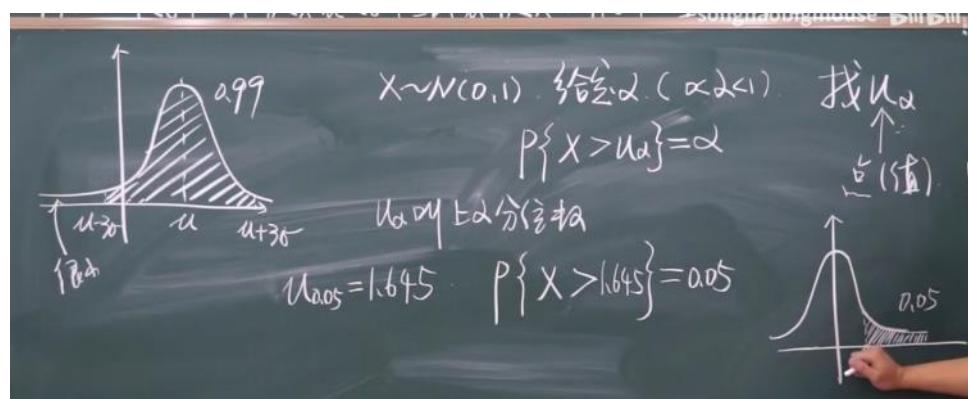
$$P\{|X-\mu| < \sigma\} = P\{-\sigma < X-\mu < \sigma\} = P\{\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\} = \Phi(\mu+\sigma) - \Phi(\mu-\sigma)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$$

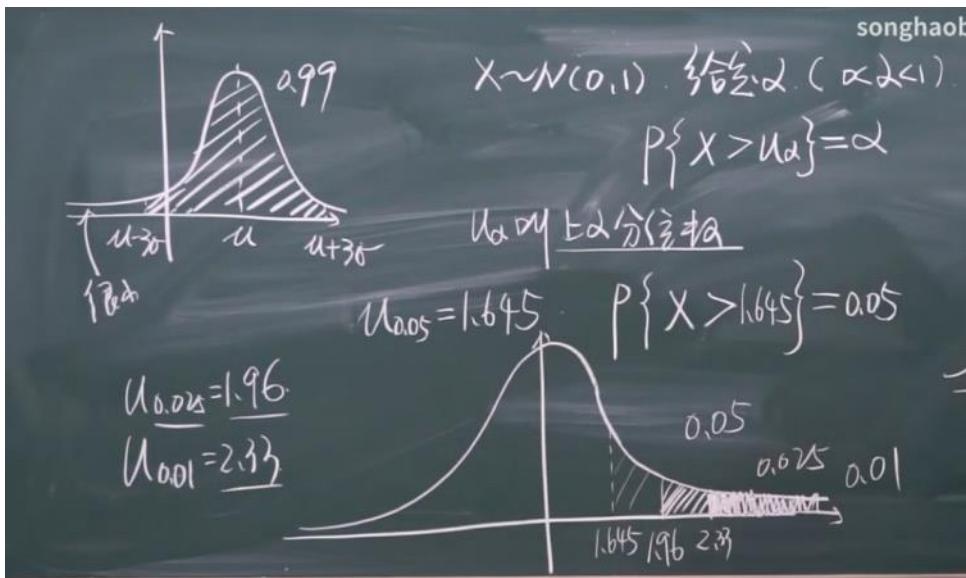
$X \sim N(0, 1)$  給定  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 找  $u_\alpha$

$$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$$

$u_\alpha$  由上分位數



置信区间初导入



# 随机变量函数的分布 (离散型)

2024年1月19日 9:51

已知X的分布, 求这个函数构造出的Y的分布

随机变量函数的分布  
已知X是某分布.  $Y=3X-5$  分布?

离散型  $Y=4X$   $Z=X^2$

1) 
$$\begin{array}{c|cccc} X & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline P & 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} Z & 49 & 64 & 81 & 100 \\ \hline P & 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{array}$$
  
$$\begin{array}{c|cccc} Y & 28 & 32 & 36 & 40 \\ \hline P & 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{array}$$

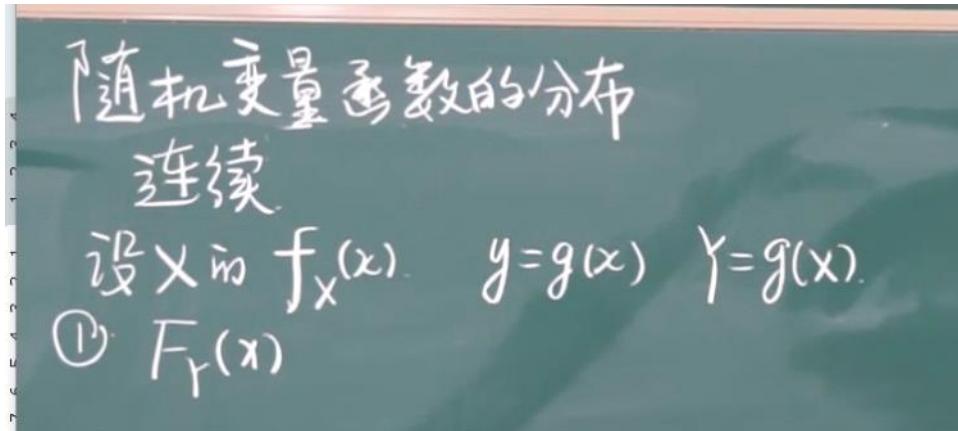
2) 
$$\begin{array}{c|cccc} X & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \end{array} \quad Y=X^2$$
  
$$\begin{array}{c|cccc} Y & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline P & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \end{array}$$
 有重复  
$$\begin{array}{c|cccc} Y & 0 & 1 & 4 \\ \hline P & 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{array}$$
 合起来

# 随机变量函数的分布 (连续型)

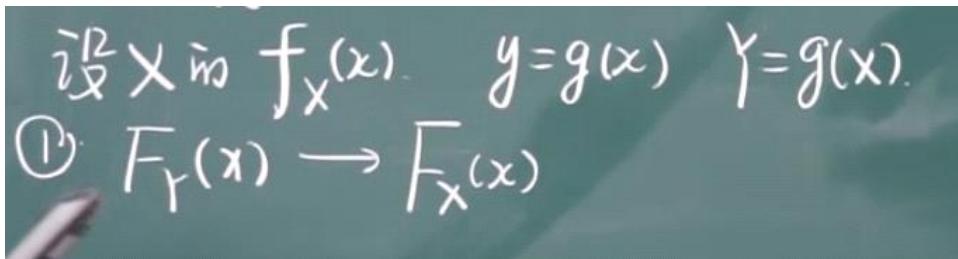
2024年1月19日 10:02

设 $X$ 的密度函数

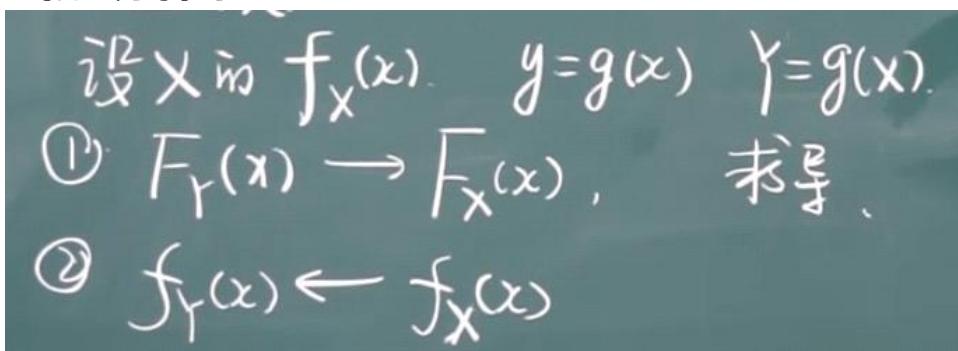
已知 $X$ 的密度函数, 构造



解题思路: 1. 已知 $Y$ 的分布函数, 构造成 $X$ 的分布函数

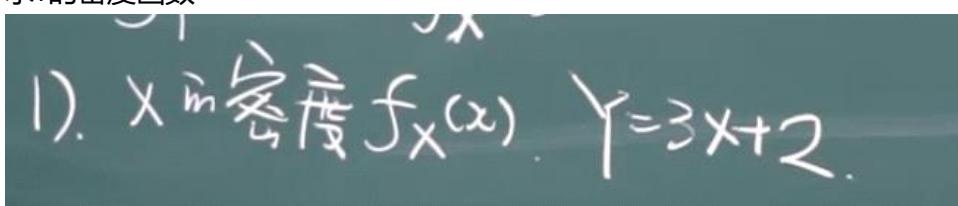


2. 对两边同时求导



例题1

求 $Y$ 的密度函数



随机变量函数的分布  $F_X(x) = P\{X \leq x\}$   
 连续分布:  $F(x) = P\{X \leq x\}$   $F_Y(x) = P\{Y \leq x\}$   
 设  $X$  的  $f_X(x)$   $y = g(x)$   $Y = g(x)$   $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$

①  $F_Y(x) \rightarrow F_X(x)$ , 求导  
 ②  $f_Y(x) \leftarrow f_X(x)$   
 1)  $X$  的密度  $f_X(x)$   $Y = 3x + 2$   
 2)  $F_Y(x) =$

理解右上角的分布函数

1)  $X$  的密度  $f_X(x)$   $Y = 3x + 2$   
 2)  $F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{3x + 2 \leq x\}$   
 $P\{X \leq \frac{x-2}{3}\}$

$X$  大小写分明白, 要把大写的  $X$  露出来

1)  $X$  的密度  $f_X(x)$   $Y = 3x + 2$   
 2)  $F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{3x + 2 \leq x\}$   
 $P\{X \leq \frac{x-2}{3}\} = F_X\left(\frac{x-2}{3}\right)$

达到第一步, 将  $Y$  的分布函数变成  $X$  的分布函数, 再对  $x$  求导, 分布函数求导就是密度函数, 复合函数求导

$\overline{f_Y(x) = \frac{1}{3}f_X\left(\frac{x-2}{3}\right)}$

$\overline{f_Y(x) = \frac{1}{3}f_X\left(\frac{x-2}{3}\right)}$

特别地  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

这是一个均匀分布

$$f_Y(x) = \frac{1}{3} f_X\left(\frac{x-2}{3}\right)$$

特别地  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}, & 2 \leq x \leq 14 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$X$  服从  $[a, b]$  上的均匀分布  $Y = kx + c$  ( $k \neq 0$ ) 服从 相应区间 上的均匀分布

$$X \text{ 服从 } [a, b] \text{ 上的均匀分布 } Y = kx + c \text{ ( $k \neq 0$ ) 服从 } \begin{cases} [ka+c, kb+c] & [1, 2] \\ [0, -1] & [-x+1] \end{cases}$$

$k > 0$   $k < 0$   $[kb+c, ka+c]$

$X$  服从  $[a, b]$  上的均匀分布  $Y = kx + c$  ( $k \neq 0$ ) 服从 相应区间 上的均匀分布

$$[ka+c, kb+c] \quad [1, 2] \quad Y = -x+1 \quad [0, -1]$$

$$k > 0 \quad k < 0 \quad [kb+c, ka+c]$$

$$k > 0 \quad f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{kb-ka}, & ka+c \leq x \leq kb+c \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$k < 0 \quad f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{kb-ka}, & kb+c \leq x \leq ka+c \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

例题2 已知  $x$  服从正态分布, 求  $y$  的分布函数并求导

$$2) X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad Y = ax + b \quad a \neq 0.$$

解

$$2) X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad Y = ax + b \quad a \neq 0.$$

$$\text{解: } a > 0 \text{ 时. } F_Y(x) = P\{Y \leq x\}$$

$$2) X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad Y = ax + b \quad a \neq 0 \quad ax \leq x - b$$

$$\text{解: } a > 0 \text{ 时. } F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{ax + b \leq x\} = P\left\{X \leq \frac{x-b}{a}\right\}$$

$$a > 0 \text{ 时. } F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{ax + b \leq x\} = P\left\{X \leq \frac{x-b}{a}\right\} = \Phi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

2)  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$   $Y = aX + b$ ,  $a \neq 0$ ,  $aX \leq x - b$

解:  $\underline{a > 0 \text{ 时}} \quad F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{aX + b \leq x\} = P\left\{X \leq \frac{x-b}{a}\right\} = \Phi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma)} \frac{\phi\left(\frac{x-b}{a}\right)}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma)} e^{-\frac{(x-b-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma)} e^{-\frac{(x-b-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \underline{a < 0 \text{ 时}} \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma)} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-\sigma)} e^{-\frac{(x-b-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\underline{a < 0 \text{ 时}} \quad \frac{\sqrt{2\pi}(\sigma)}{1} e^{-\frac{(x-b-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(|a|\sigma)} e^{-\frac{(x-b-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

线性:  $2X + 3Y \sim N_1 + N_2 - N_3$ ,  $X + 8Y + 17Z \sim$

非线性:  $y = x^2 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{y} \ln z \cdot \tan(x^2 + 1)$

2)  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ( $Y = aX + b$ )  $a \neq 0$ ,  $aX \leq x - b$

解:  $\underline{a > 0 \text{ 时}} \quad F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{aX + b \leq x\} = P\left\{X \leq \frac{x-b}{a}\right\} = \Phi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma)} \frac{\phi\left(\frac{x-b}{a}\right)}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma)} e^{-\frac{(x-b-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma)} e^{-\frac{(x-b-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \underline{\text{线性}} \quad \underline{\text{非线性}} \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma)} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \leftarrow \underline{\text{线性}} \quad \underline{a < 0 \text{ 时}} \quad f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(|a|\sigma)} e^{-\frac{(x-b-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

线性:  $2X + 3Y \sim N_1 + N_2 - N_3$ ,  $X + 8Y + 17Z \sim$

非线性:  $y = x^2 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{y} \ln z \cdot \tan(x^2 + 1) \quad y = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

定理

定理2.1  $X$  的密度  $f_X(x)$ ,  $Y = kX + b$  ( $k \neq 0$ )  $f_Y(x) = \frac{1}{|k|} f_X\left(\frac{x-b}{k}\right)$

证:

定理2.1  $X$  的密度  $f_X(x)$ ,  $Y = kx + b$  ( $k \neq 0$ )  $f_Y(x) = \frac{1}{|k|} f_X\left(\frac{x-b}{k}\right)$

证:  $k > 0$ ,  $F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{kx + b \leq x\} = P\{x \geq \frac{x-b}{k}\} = 1 - P\{x \leq \frac{x-b}{k}\}$

$= 1 - F_X\left(\frac{x-b}{k}\right)$

$f_Y(x) = \frac{1}{|k|} f_X\left(\frac{x-b}{k}\right)$

例题3

(3).  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y = X^2$

证:  $X \leq 0$  时  $F_Y(x) =$

(3).  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y = X^2$

证:  $X \leq 0$  时  $F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{X^2 \leq x\} = 0$

$X > 0$  时  $F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{X^2 \leq x\} = P\{-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\} = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$= 2 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

两边求导, 右边是变上限积分求导

### 变上限积分求导的三种形式

#### 1、公式法

$$\left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt \right] = f[\varphi_2(x)] \cdot \varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)] \cdot \varphi_1'(x)$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

这就是卡方分布

例题4

$$(4) X \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & 0 < x < e-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$(4) X \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & 0 < x < e-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad Y = \sqrt{X} \quad P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

$$\text{若 } X < 0 \text{ 时, } F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{\sqrt{X} \leq x\} = 0.$$

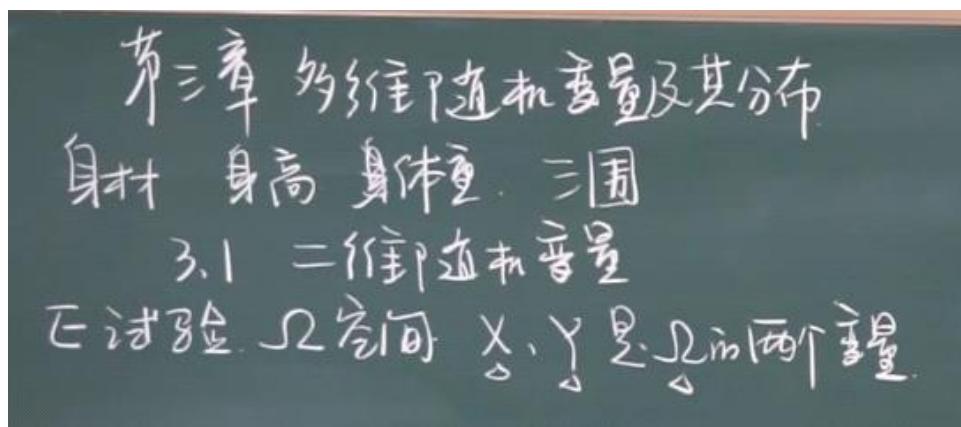
$$\begin{aligned} & \text{若 } X \geq 0 \text{ 时, } P\{X \leq x^2\} = \int_{-\infty}^{x^2} f(t) dt \\ & = \int_{-\infty}^0 \cancel{f(t) dt} + \int_0^{x^2} f(t) dt \quad \begin{cases} 1 & x^2 \geq e-1 \\ 0 & x^2 < e-1 \end{cases} \\ & \int_0^{x^2} \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1) \Big|_0^{x^2} \quad \begin{cases} \ln(1+x^2) & 0 \leq x^2 < e-1 \\ 0 & x^2 \geq e-1 \end{cases} \\ & = \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \ln(1+x^2) & 0 \leq x < \sqrt{e-1} \\ 1 & x \geq \sqrt{e-1} \end{cases}$$

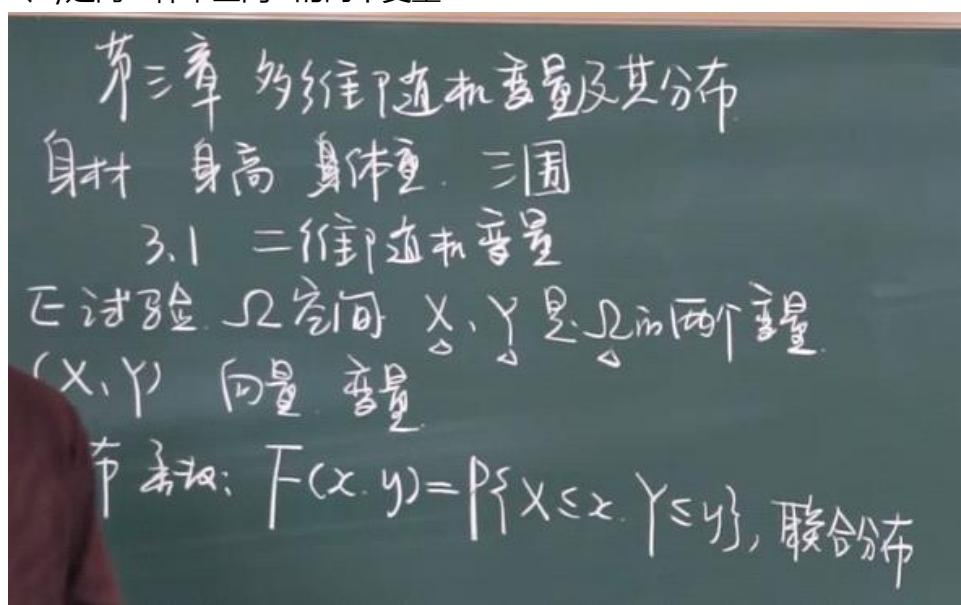
$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2}, & 0 \leq x < \sqrt{e-1} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

# 二维随机变量及其分布函数

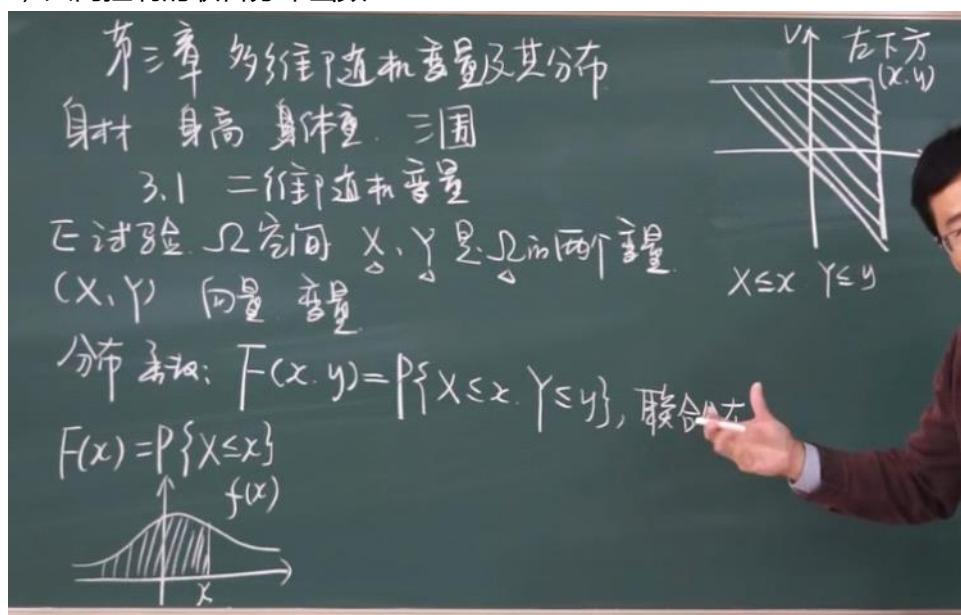
2024年1月21日 10:19

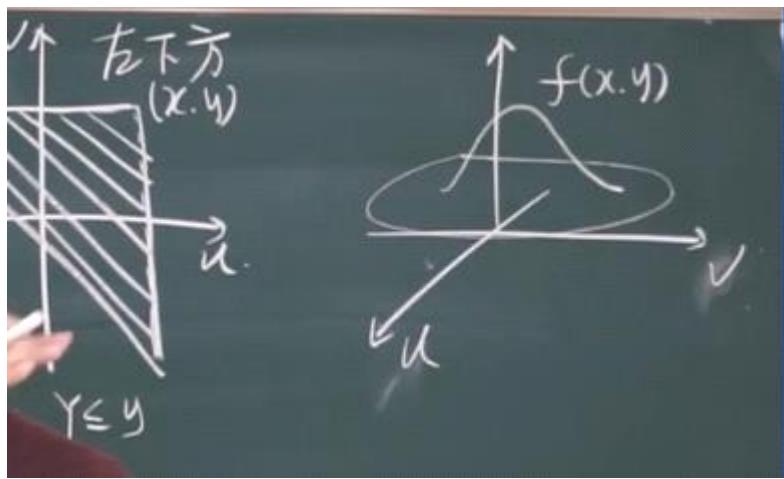


X, Y 是同一样本空间  $\Omega$  的两个变量



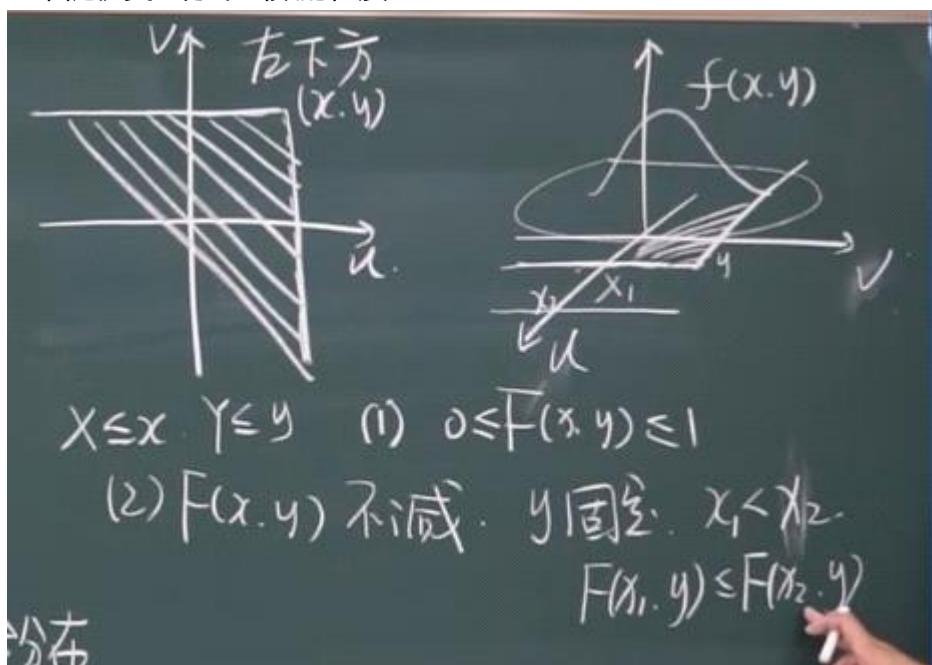
X, Y 共同控制的联合分布函数



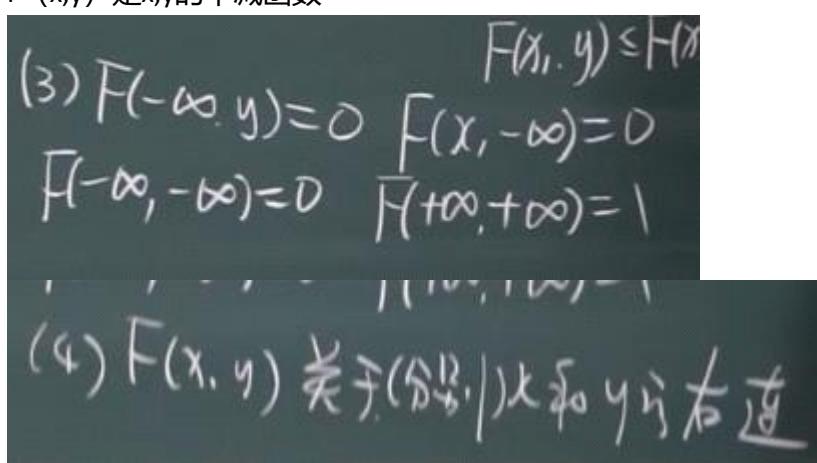


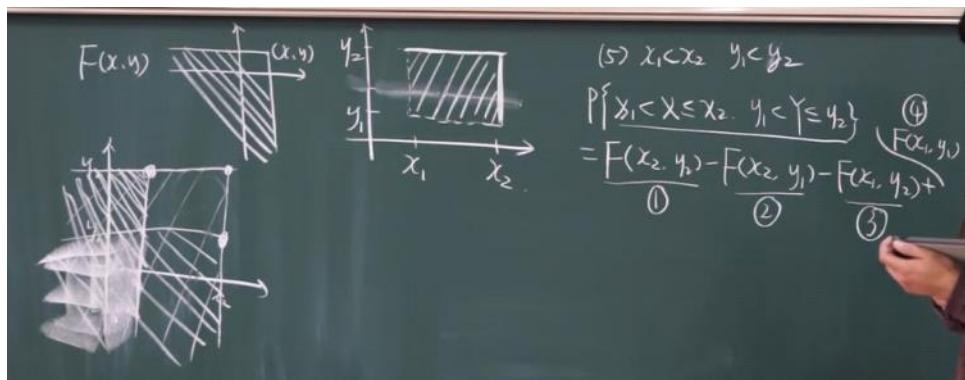
帽子性质

二维随机变量分布函数的性质



$F(x, y)$  是  $x, y$  的不减函数





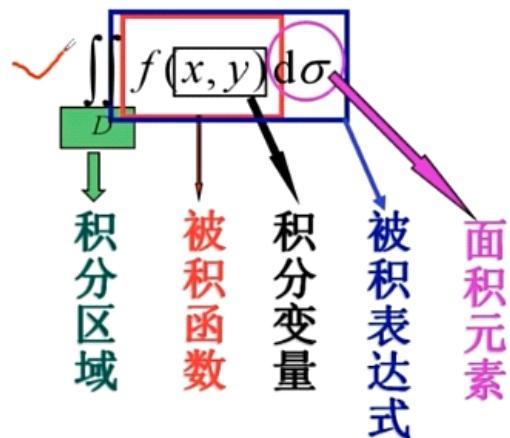
$$\begin{aligned}
 & (5) \quad x_1 < x_2, \quad y_1 < y_2 \\
 & P\{x_1 < X \leq x_2, \quad y_1 < Y \leq y_2\} = \frac{F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)}{1} \quad (4) \\
 & \quad (2) \quad (3) \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= P\{X \leq x\} = F(x, +\infty) = P\{X \leq x, Y < +\infty\} \\
 F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = F(+\infty, y) = P\{X < +\infty, Y \leq y\}
 \end{aligned}$$

# 二重积分概念

2024年1月21日 10:37

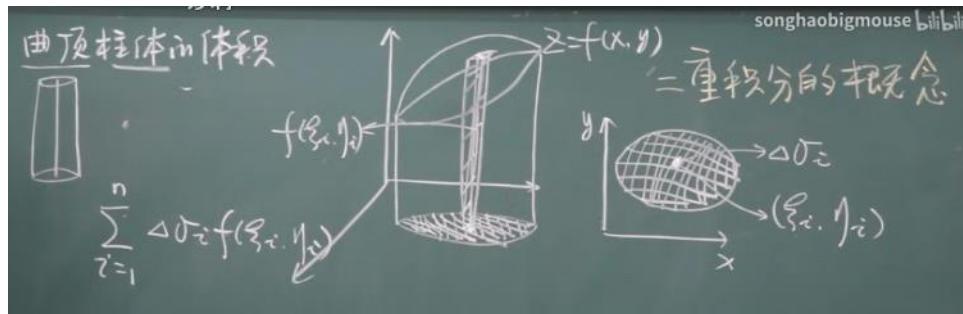
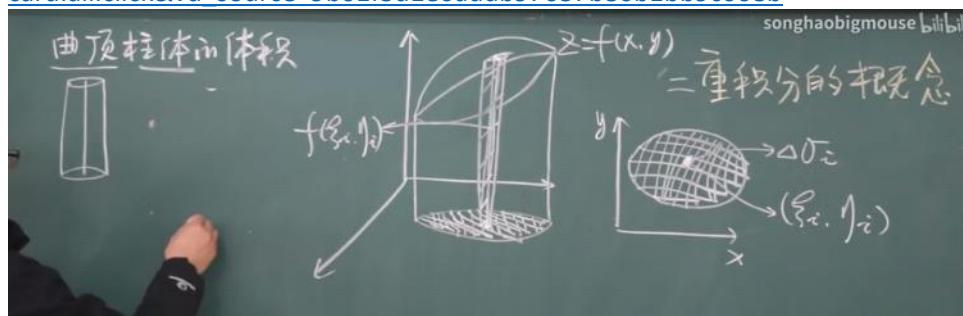
$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$



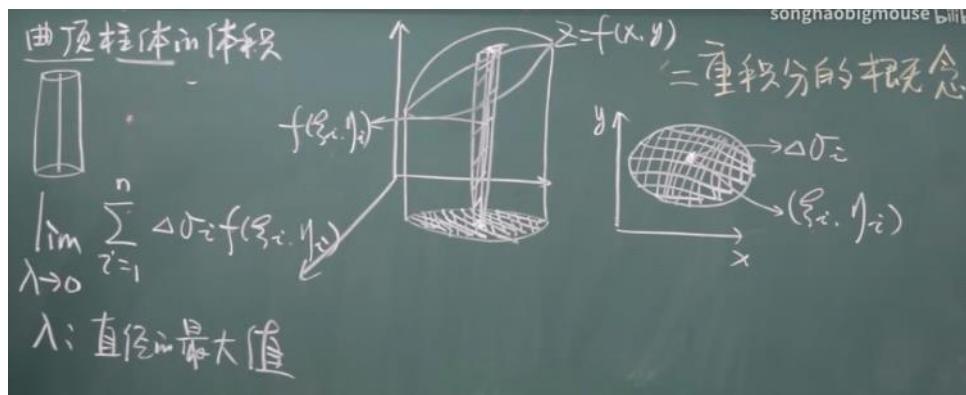
几何含义：

底面积为  $D$ ，顶面为  $z=f(x, y)$  的曲顶柱体的体积。

[https://www.bilibili.com/video/BV1Bt41187ZF/?spm\\_id\\_from=333.337.search-card.all.click&vd\\_source=9b01f3d1e6addb97637b80b1bb9c008b](https://www.bilibili.com/video/BV1Bt41187ZF/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click&vd_source=9b01f3d1e6addb97637b80b1bb9c008b)

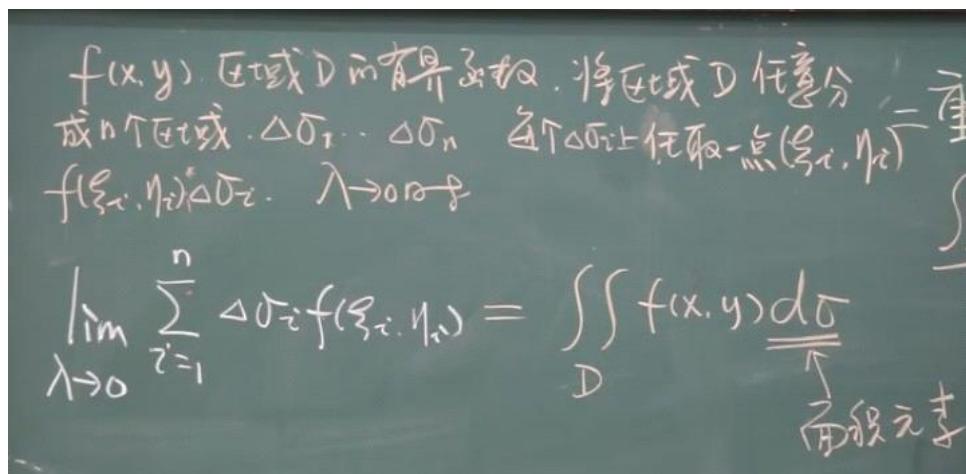


体积微分

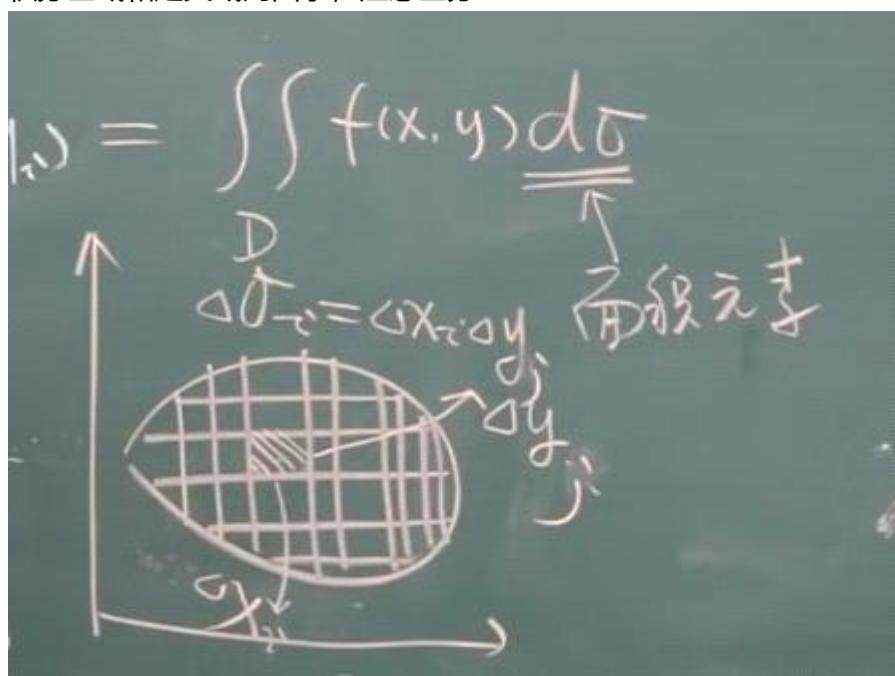


$\lambda$  小区间直径的最大值, 直径是小区间任意两点之间的最大距离

二重积分的定义



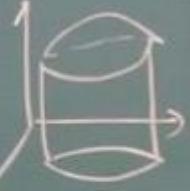
积分区域和定义域两回事, 注意区分



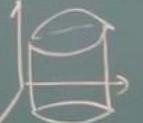
$$\iint_D f(x, y) dxdy$$

直角坐标系下求二重积分

①  $f(x, y) \geq 0$


$$\iint f(x, y) d\sigma = \text{体积}$$

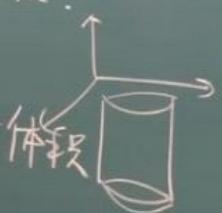
①  $f(x, y) \geq 0$



在  $\Delta\sigma$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$
$$\iint f(x, y) d\sigma = \text{体积}$$

②  $f(x, y) < 0$


$$\iint f(x, y) d\sigma = -\text{体积}$$

# 二重积分性质

2024年1月21日 11:10

1)  $\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$  songhaobigmouse bilibili  
二重积分的性质

2)  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$

3)  $f(x, y) \equiv 1 \quad \iint_D 1 d\sigma = \sigma \times 1 = \sigma$

1)  $\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$  songhaobigmouse bilibili

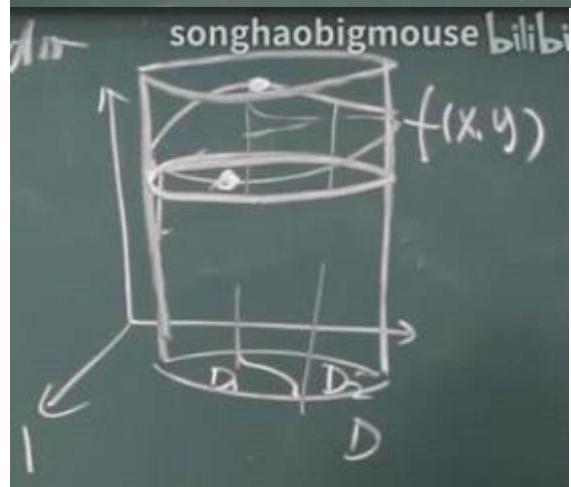
2)  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$

3)  $f(x, y) \equiv 1 \quad \iint_D 1 d\sigma = \sigma \times 1 = \sigma$

4)  $f(x, y) \leq g(x, y) \quad \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$

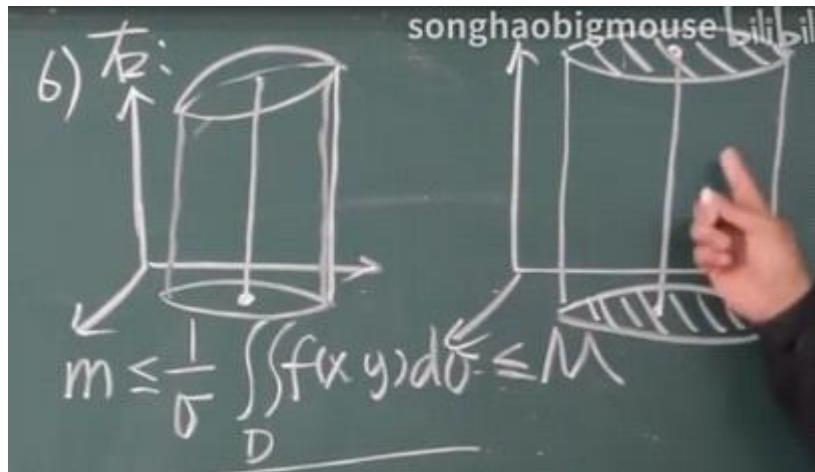
5)  $f(x, y)$ 的最大值  $M$  最小值  $m$ , 则有

5)  $M \cdot \sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq m \sigma$



$$m \leq \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M$$

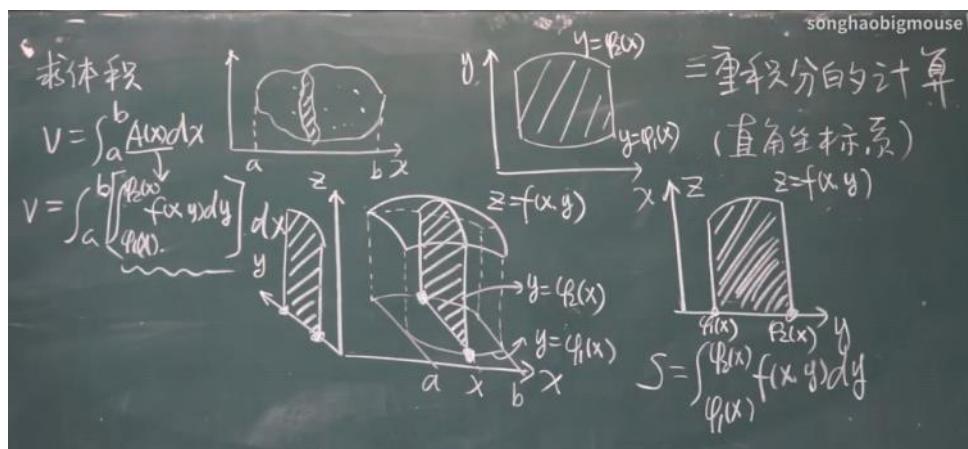
$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma$$



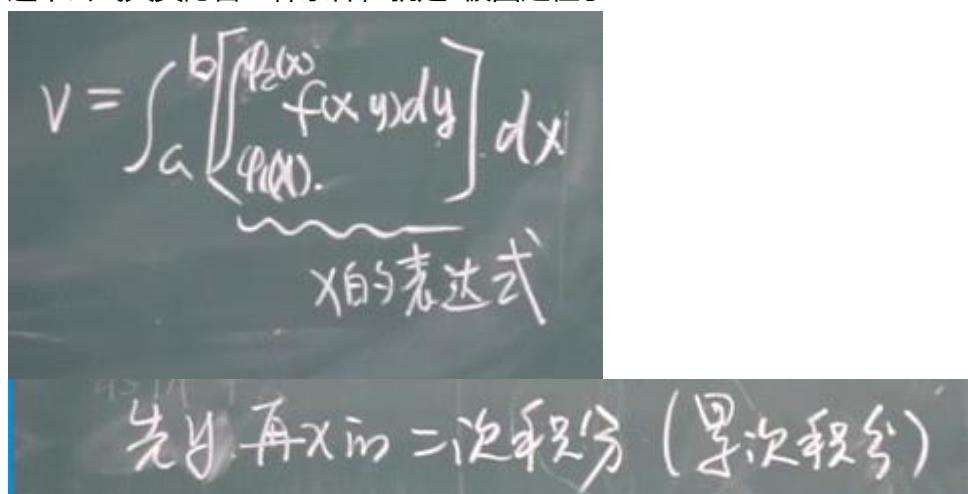
一定可以找到一点，这一点平顶柱体的体积等于原先曲顶柱体的体积

# 二重积分的计算 (直角坐标)

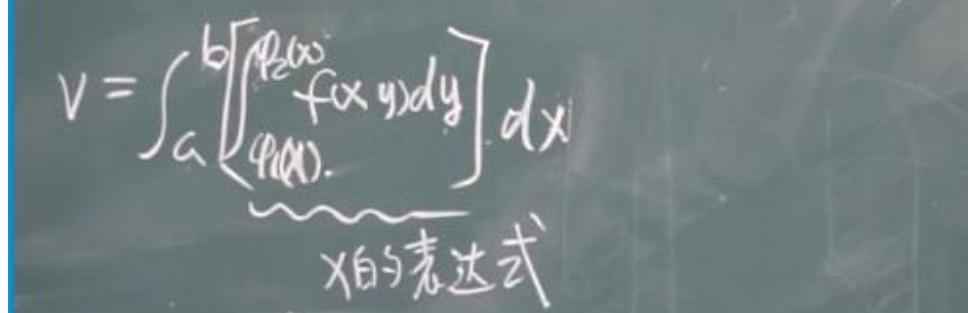
2024年1月21日 11:48



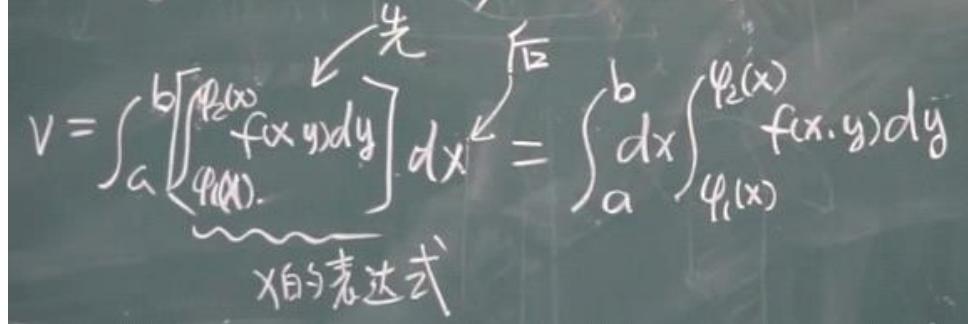
这个公式其实隐含一种条件，就是x被固定住了



先y再x的二重积分 (累次积分)



先y再x的二重积分 (累次积分)



$$V = \int_a^b \left[ \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

先  
后  
X的表达式  
是

先对y积分，算出来后再对x积分

$$\int_C d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy = \int_C dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

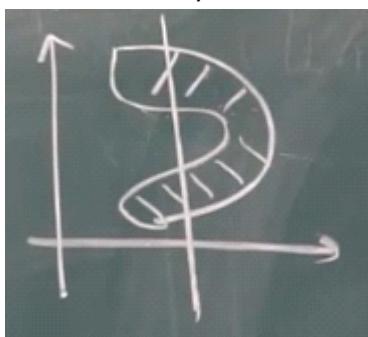
再代入  
是

一样的

解题思路

1. 画出积分区域 (xoy平面)
2. 确定是对x积分还是对y积分

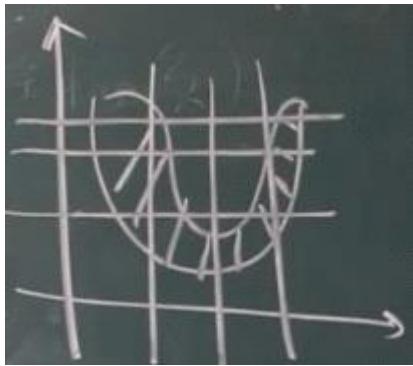
判断用x还是用y



用垂直于x轴的线去切，不能超过两个交点，上图超过两个交点就不能用x，必须用y



垂直于y轴的去切，只有两个

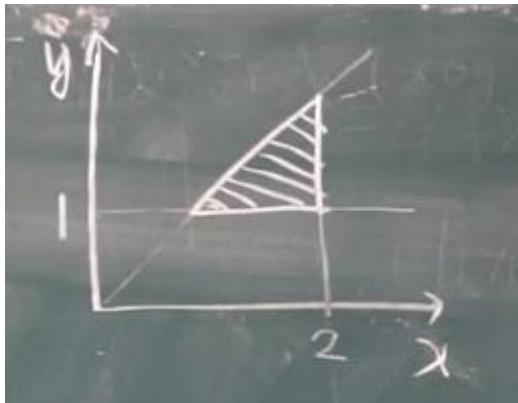


这种用y就不行，必须用x

例1

$$\text{例1: } \iint_D xy \, d\sigma. \quad y=1, x=2, y=x$$

解题思路：1.先画积分区域



2.看用x还是用y，不管用x还是y都是两个交点，应该是两个都行

$$\text{例1: } \iint_D xy \, d\sigma. \quad y=1, x=2, y=x$$

$x$ 型:  $\bar{x}$ 式  $= \int_1^2 dx \int_1^x xy \, dy$

先求后面的，此时将x看作常数

$$\begin{aligned} x\text{型: } \bar{x} &= \int_1^2 dx \int_1^x xy \, dy \\ &= \int_1^2 \left( \frac{1}{2}xy^2 \Big|_1^x \right) dx = \end{aligned}$$

注意此时的x是代入y

例11:  $\iint_D xy \, d\sigma$ .  $y=1, x=2, y=x$

X型:  $\int_1^2 dx \int_1^x xy \, dy$

$$= \int_1^2 \left( \frac{1}{2}xy^2 \Big|_1^x \right) dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x \right) dx = \left( \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{9}{8}$$

换成对y积分

Y型:  $\int_1^2 dy \int_y^2 xy \, dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{2}x^2 y \Big|_y^2 \right) dy = \int_1^2 (2y - \frac{1}{2}y^3) dy = \frac{9}{8}$

例12:  $\iint_D y \sqrt{1+x^2-y^2} \, d\sigma$   $D: y=x, x=-1, y=1$

例12:  $\iint_D y \sqrt{1+x^2-y^2} \, d\sigma$   $D: y=x, x=-1, y=1$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x \wedge 0}^1 \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2-y^2} dy$$

此时x是常数

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_x^1 \sqrt{1+x^2-y^2} dy \Big|_{y=x}^y \\
 & -\frac{1}{2} \int_x^1 \sqrt{1+x^2-y^2} dy \Big|_{y=-x}^y \\
 & -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_x^1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} d\left(1+x^2-y^2\right) \\
 & = \frac{1}{3} \left(1+x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 \\
 & = \frac{1}{3} \left(x^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \\
 & = \frac{1}{3} |x|^3
 \end{aligned}$$

例12:  $\iint_D y \sqrt{1+x^2-y^2} d\sigma$   $D: y=x, x=-1, y=1$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 dx \int_{x \wedge -1}^1 \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2-y^2} dy^2 = -\frac{1}{3} \int_{-1}^1 (|x|^3 - 1) dx = \\
 & -\frac{2}{3} \int_0^1 (x^3 - 1) dx = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

第2种解法对y求积分

$$\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^y y \sqrt{1+x^2-y^2} dx = \int_{-1}^1 y dy \underbrace{\int_{-1}^y \sqrt{1+x^2-y^2} dx}_{\text{对x求积分}}$$

特殊情况长方形区域

① 积分区域为长方形

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \\
 & = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx
 \end{aligned}$$

② 积分区域是长方形, 且  $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$

$$\int_a^b dx \int_c^d f_1(x) f_2(y) dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy$$

$$\text{② 积分区域是长方形} \quad \text{且 } f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

$$\int_a^b dx \int_c^d f_1(x) f_2(y) dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy = \left( \int_a^b f_1(x) dx \right) \cdot \left( \int_c^d f_2(y) dy \right)$$

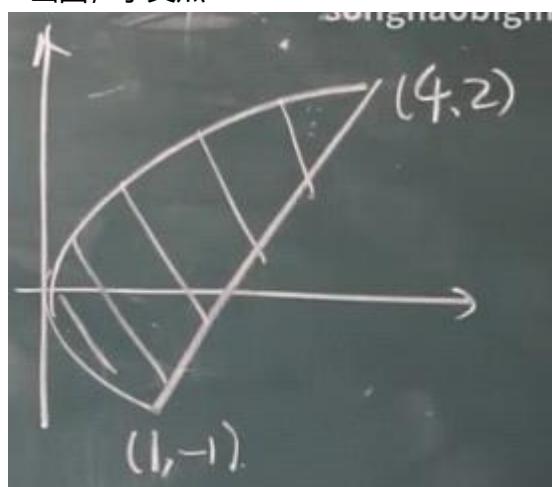
二次

二重积分是必须先积后面的，再求前面的

例3

例3:  $\iint_D xy d\sigma$   $y^2 = x$   $y = x - 2$

1. 画图，求交点

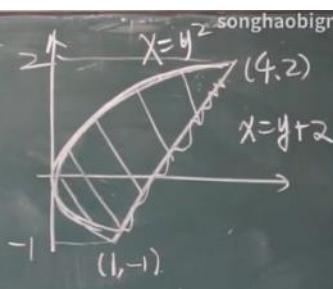


按y形区域来做

例3:  $\iint_D xy d\sigma$   $y^2 = x$   $y = x - 2$

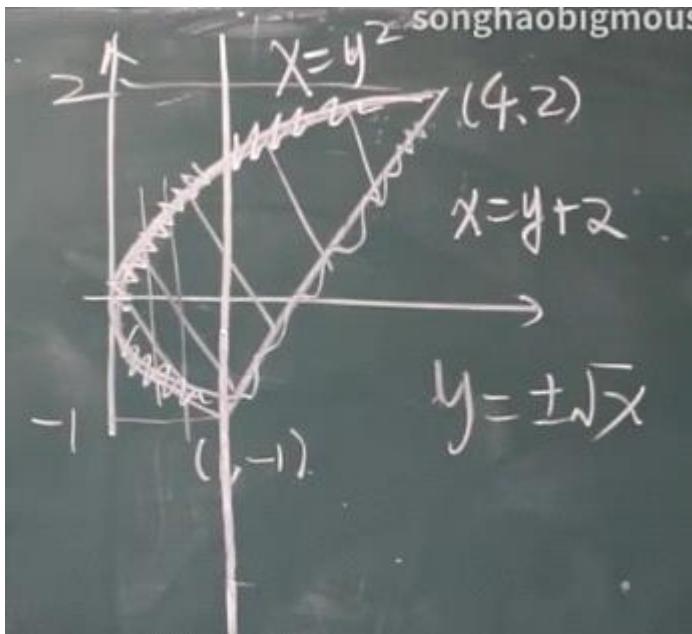
Y型:  $\int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx = \int_{-1}^2 \left[ \frac{1}{2}x^2y \right] \Big|_{y^2}^{y+2} dy$

 $= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 ((y+2)^2 y - y^5) dy = \frac{45}{8}$



如果按x来做，须分成两部分

X型:  $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy dy$

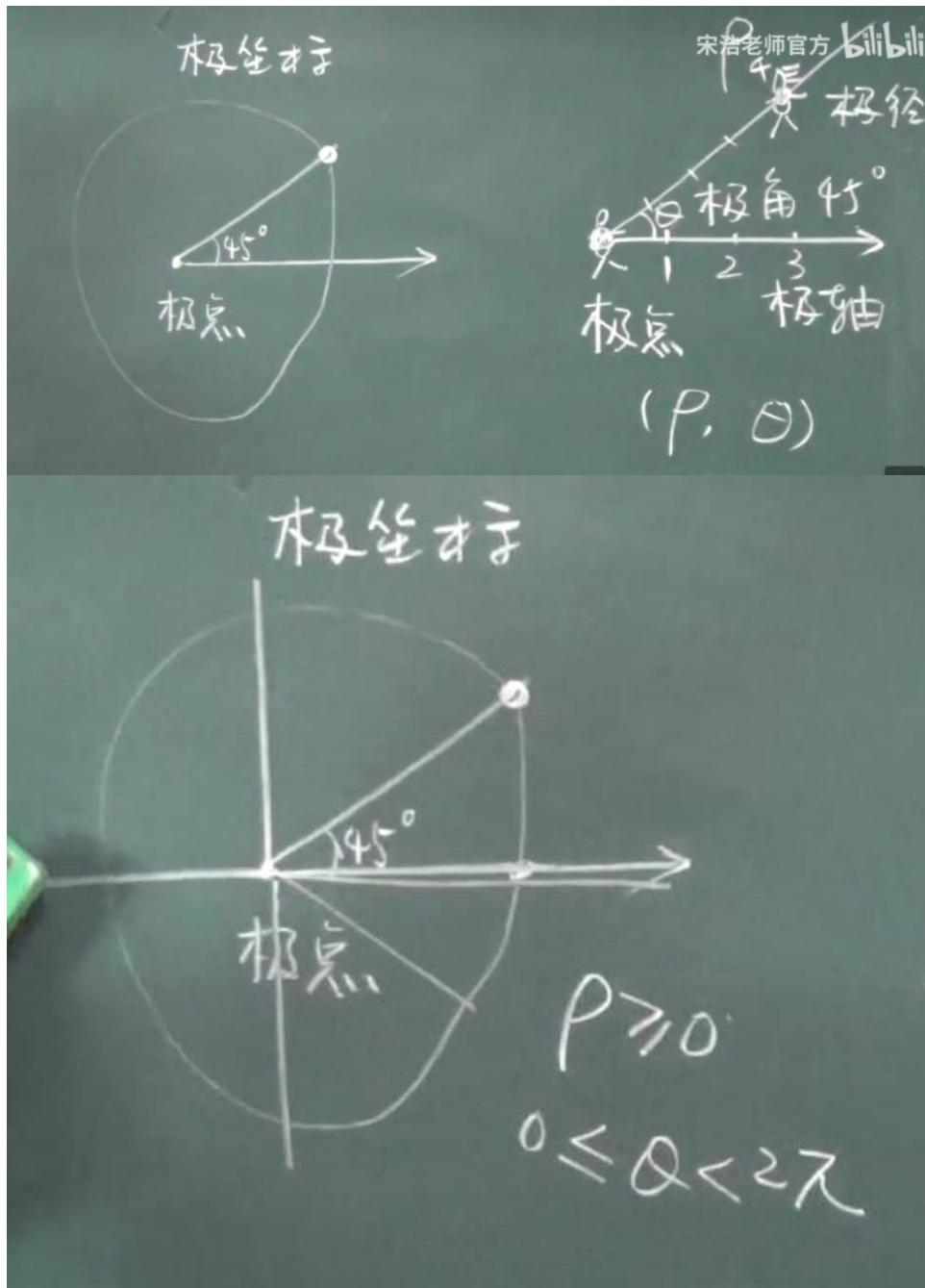


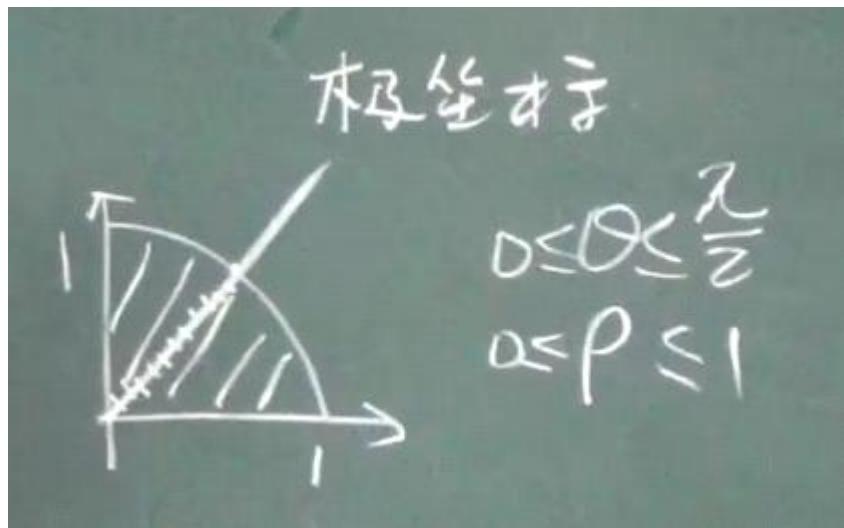
例5两个直交的圆柱体

# 二重积分的计算 (极坐标系)

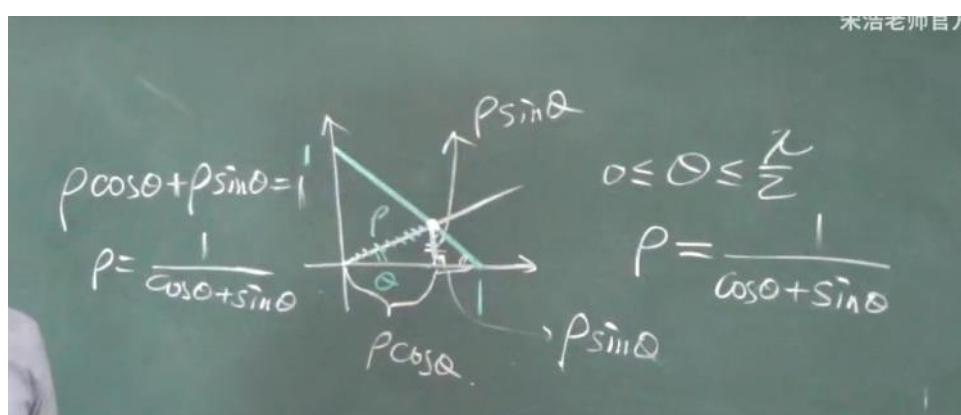
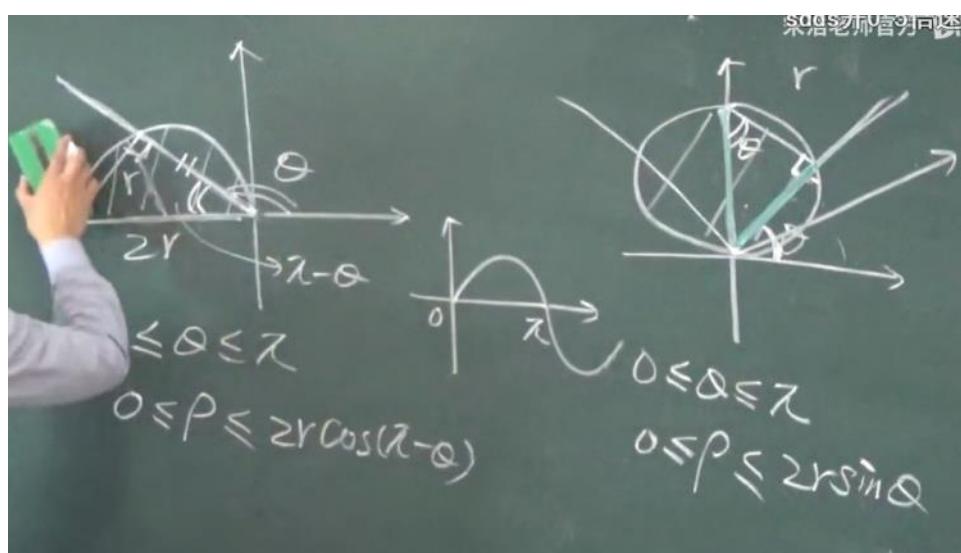
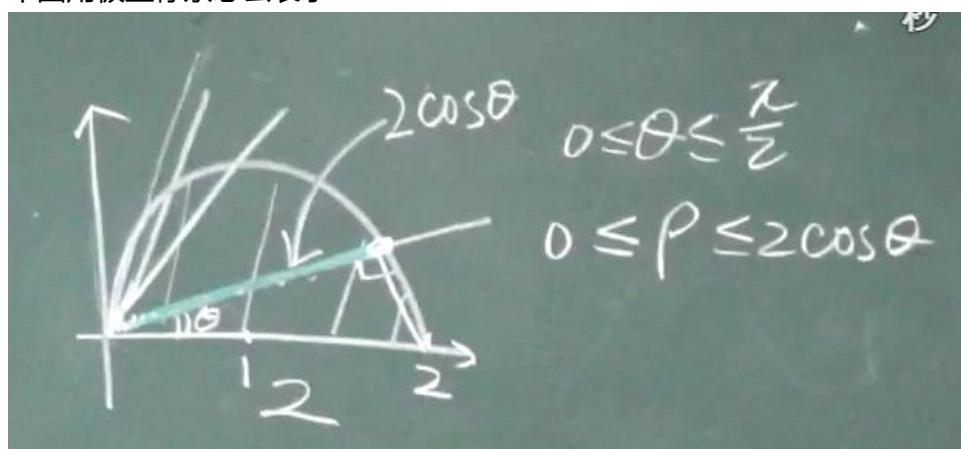
2024年1月26日 17:27

什么是极坐标系

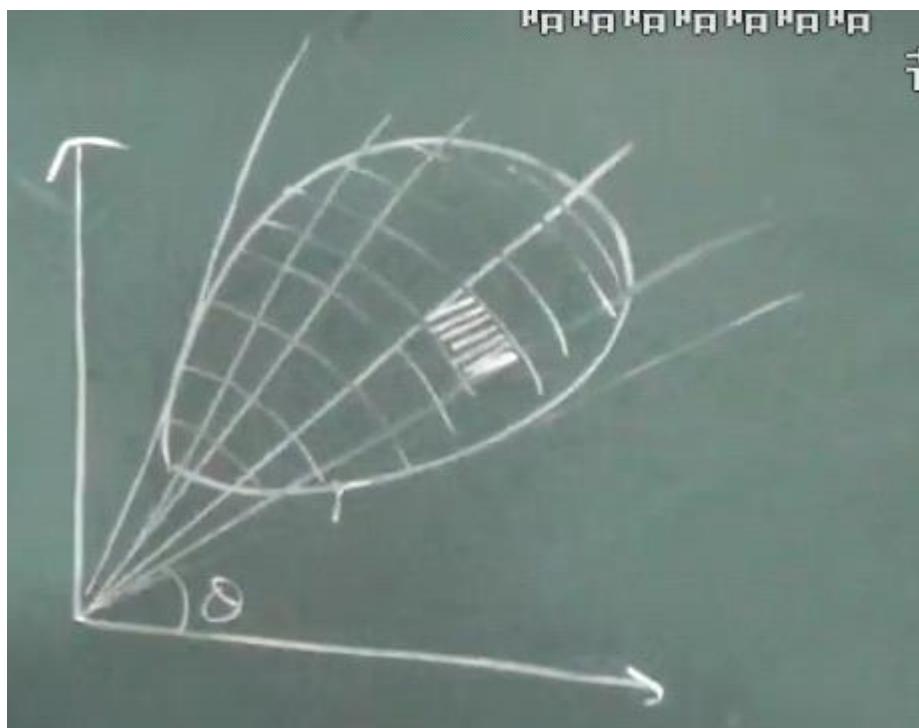
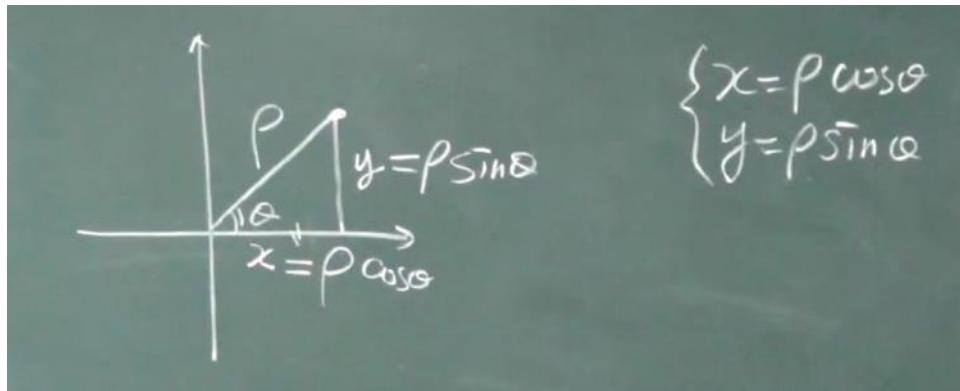




半圆用极坐标系怎么表示



直角坐标和极坐标系之间的关系



扇形区域求面积

$$S_{\text{扇}} = \pi R^2 \cdot \frac{n}{360} = \frac{\pi R n}{180} \cdot \frac{R}{2} = \frac{1}{2} L R$$

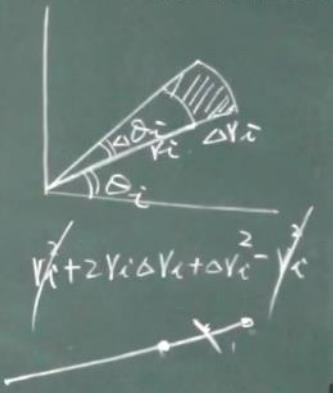
$$\text{弧长: } L = 2\pi R \cdot \frac{n}{360} = \frac{\pi R n}{180}$$

均值

$$\frac{1}{2}r^2\theta$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2 \Delta \theta_i - \frac{1}{2}r_i^2 \Delta \theta_i \\ & \frac{1}{2} \Delta \theta_i \Delta r_i (2r_i + \Delta r_i) \\ & = \frac{(r_i + r_i + \Delta r_i) \Delta r_i \Delta \theta_i}{r_i \Delta r_i \Delta \theta_i} \end{aligned}$$

宋浩老师官方



$$\Delta \theta_i$$

$$= \bar{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_i$$

这个积分区域无限小时，均值趋近于0

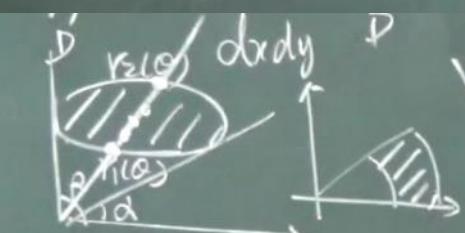
靠上面的地方

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$\Delta \theta_i$$

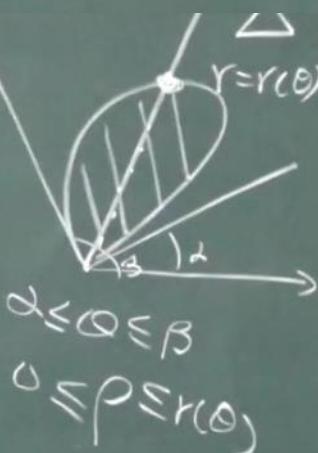
$$= \bar{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_i$$

II



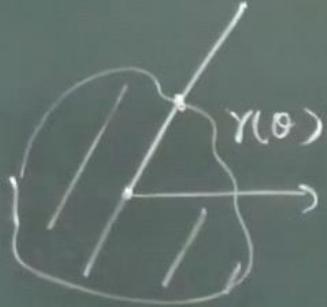
$$\alpha \leq \theta \leq \beta$$

$$r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$$



$$\alpha \leq \theta \leq \beta$$

$$0 \leq r \leq r(\theta)$$



$$3) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq r(\theta)$$

$$1) \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \underbrace{\int_{r(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr}_{\text{差}}$$

$$3) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq r(\theta)$$

解题思路

1) 区域用  $r, \theta$   
(极坐标)

$$2) \quad x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta$$

$$dx dy = r dr d\theta$$

$$3) \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr$$

例题1

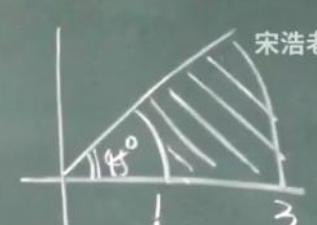
$$\iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad D: x^2+y^2 \leq a^2 \\
 D &= \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a\} \\
 & \iint_D e^{-r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r e^{-r^2} dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^a
 \end{aligned}$$


$$= \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^a \right] \cdot 2\pi \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

先记住

$$\begin{aligned}
 & \iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy, \quad D: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 1 \leq r \leq 3 \\
 & \text{宋浩老师}
 \end{aligned}$$


宋浩老师

$$\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy$$

$D: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 1 \leq r \leq 3$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^3 \arctan \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} r dr$$

$\arctan(\tan x) = x$

宋浩老师官方 bilibili

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2a \cos \theta$$

宋浩老师官方 bilibili

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2a \cos \theta$$

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{r^2} r dr$$

什么时候用极坐标?

宋浩老师官方 bilibili

- 1) 圆或圆的一部分
- 2)  $x^2 + y^2 = r^2$
- 3)  $\frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta}, \tan \theta, \sec \theta$

# 偏导

2024年1月27日 17:05

偏改变量，由某一个变化引起的变化

$$\begin{aligned} \text{偏导数} & \quad \text{导数: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ z = f(x, y) & \quad \Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

此时假定y不变

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

此时假定x不变

对x的偏导数

$$\begin{aligned} \text{对 } x \text{ 的偏导数} & \quad (y \text{ 不变}) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f'_x(x_0, y_0) \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = f(x, y) & \quad \Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \\ \Delta_y z & = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ \text{对 } x \text{ 的偏导数} & \quad (y \text{ 不变}) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f'_x(x_0, y_0) \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} \quad z'_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{对 } y \text{ 的偏导数} & \quad (x \text{ 不变}) \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f'_y(x_0, y_0) \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

偏导的规则：求x的偏导时，把y看作常数

求y的偏导，把x看作常数

$$f'_x \quad y \text{ 常数}$$

$$f'_y \quad x \text{ 常数}$$

$$2) f(x,y) = e^{xy} + x^2 y$$

$$f'_x(x,y) = y e^{xy} + 2xy$$

$$f'_y(x,y) = x e^{xy} + x^2$$

$$1) f(x,y) = x^3 + 2x^2y - y^3$$

求在 (1.3) 处的偏导数

$$1) f(x,y) = x^3 + 2x^2y - y^3$$

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 4xy$$

$$f'_y(x,y) = 2x^2 - 3y^2$$

1.求出x y的偏导

2.把1, 3代入

$$1) f(x, y) = x^3 + 2x^2y - y^3$$

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 4xy$$

$$f'_y(x, y) = 2x^2 - 3y^2$$

$$f'_x(1, 3) = 15, f'_y(1, 3) = -25$$

$$3) z = x^y \quad (x^y)' = yx^{y-1}$$

$$z'_x = yx^{y-1} \quad (z^y)' = z^y \ln z$$

$$z'_y = x^y \ln x$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad z &= x^y \\
 u &= x^y \\
 &\quad x(y^z)
 \end{aligned}$$

三个变量求偏导

$$u = \sin(x + y^2 - e^z)$$

多元变量求偏导一样的，对所求函数之外的都看作常数

$$u = \sin(x + y^2 - e^z) \equiv \bar{u}$$

$$u'_x = \cos(x + y^2 - e^z)$$

$$u'_y = 2y \cos(x + y^2 - e^z)$$

$$u'_z = -e^z \cos(x + y^2 - e^z)$$

一元：可导  $\rightarrow$  连续

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$x \rightarrow x_0$$

一元：可导  $\rightarrow$  连续

多元：偏导  $\rightarrow$  连续

多元：偏导  $\rightarrow$  连续

$$5) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = 0$$

偏导是存在的，但未必是连续的

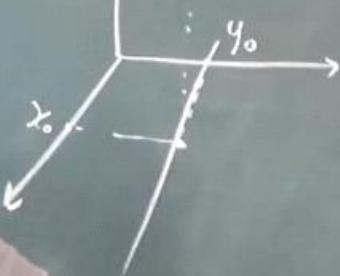
偏导数

几何意义



$$z'_x \quad y=y_0$$

$$z'_y \quad x=x_0$$



二阶偏导 高阶偏导

偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y)$$

$$eg_4 \quad z = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt, \text{ 所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{高阶偏导数从低阶开始.}$$

$$z = \int_a^{x^2+y^2} e^t dt - \int_a^x e^t dt$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} - e^x = 2x \cdot e^{x^2+y^2} - e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x} = \frac{\partial(2x e^{x^2+y^2} - e^x)}{\partial x} = 2e^{x^2+y^2} + 2x^2 e^{x^2+y^2} \cdot 2x - e^x \\ = (4x^2+2) e^{x^2+y^2} - e^x$$

$$eg_4 \quad z = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt, \text{ 所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{高阶偏导数从低阶开始.}$$

$$z = \int_a^{x^2+y^2} e^t dt - \int_a^x e^t dt$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} - e^x = 2x \cdot e^{x^2+y^2} - e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x} = \frac{\partial(2x e^{x^2+y^2} - e^x)}{\partial x} = 2e^{x^2+y^2} + 2x^2 e^{x^2+y^2} \cdot 2x - e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} = \frac{\partial(2x e^{x^2+y^2} - e^x)}{\partial y} = (4x^2+2) e^{x^2+y^2} - e^x \\ = 2x \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2y - 0 \\ = 4x^2 y e^{x^2+y^2}$$

$$eg_5. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & (x^2 + y^2 \neq 0) \\ 0 & (x^2 + y^2 = 0) \end{cases} \quad \text{求 } f''_{xy}(0, 0), f''_{yx}(0, 0) \quad \text{分段点} \Rightarrow \text{定义域偏导.}$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y} \Big|_{(0, 0)}$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x} \Big|_{(0, 0)}$$

$$eg_5. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & (x^2 + y^2 \neq 0) \\ 0 & (x^2 + y^2 = 0) \end{cases} \quad \text{分段点} \Rightarrow \text{定义域偏导.}$$

$$f'_{x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y} \Big|_{(0, 0)}$$

$$f'_{y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x} \Big|_{(0, 0)}$$

$$f'_{x}(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^3 - 3x^2y)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} & (x^2 + y^2 \neq 0) \\ 0 & (x^2 + y^2 = 0) \end{cases}$$

$$f'_{y}(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^3 - 3x^2y)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} & (x^2 + y^2 \neq 0) \\ 0 & (x^2 + y^2 = 0) \end{cases}$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_{x}(0, 0 + \Delta y) - f'_{x}(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{-6y^5}{(x^2 + y^2)^2} - 0}{\Delta y} = -1$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_{y}(0 + \Delta x, 0) - f'_{y}(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{6x^5}{(x^2 + y^2)^2} - 0}{\Delta x} = 1$$

# 二重积分的换元法 (雅可比行列式)

2024年1月29日 16:37

\*三、二重积分换元法

定理: 设  $f(x, y)$  在闭域  $D$  上连续, 变换:

$$T: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} (u, v) \in D' \rightarrow D$$

满足 (1)  $x(u, v), y(u, v)$  在  $D'$  上一阶导数连续;

(2) 在  $D'$  上 雅可比行列式

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0;$$

(3) 变换  $T: D' \rightarrow D$  是一一对应的,

则  $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

竖线表示绝对值

高数答疑张老师

1. 设  $D_{xy} = \{(x, y) | x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$  求  $I = \iint_D \left( \sin \frac{x-y}{x+y} + \cos \frac{x-y}{x+y} \right) dx dy$

$\therefore \begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(v-u) \end{cases}$

$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\iint_D = \iint_{D_{uv}} \left( \sin \frac{u}{v} + \cos \frac{u}{v} \right) du dv$

$\iint_{D_{uv}} = \int_0^1 \int_0^{1-u} \left( \sin \frac{u}{v} + \cos \frac{u}{v} \right) du dv$

$= \int_0^1 v \cdot \sin \frac{u}{v} \Big|_0^{1-u} dv = \int_0^1 v \cdot \sin \frac{1-u}{v} dv = \int_0^1 v \cdot \sin \frac{1}{v} - v \cdot \cos \frac{1}{v} dv = \frac{1}{2} \sin 1 - \frac{1}{2} \cos 1$

## 二维离散型的联合分布和边缘分布

2024年1月22日 18:56

二维离散型的联合分布及边缘分布

$X, Y$  取离散分布

$$\begin{array}{c|ccc} & Y & 1 & 2 & 3 \\ \hline X & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \hline 2 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P_{ij}$

(1)  $P_{ij} \geq 0$  (2)  $\sum \sum P_{ij} = 1$

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P_{ij}$$
$$F(-1, -2) = P\{X \leq -1, Y \leq -2\} = 0$$
$$F(1, 2) = P\{X \leq 1, Y \leq 2\} = \frac{1}{2}$$
$$F(4, 5) = P\{X \leq 4, Y \leq 5\} = 1$$

二维离散型的联合分布及边缘分布

$F(1.5, 2.6) = P\{X \leq 1.5, Y \leq 2.6\} = \frac{1}{2}$

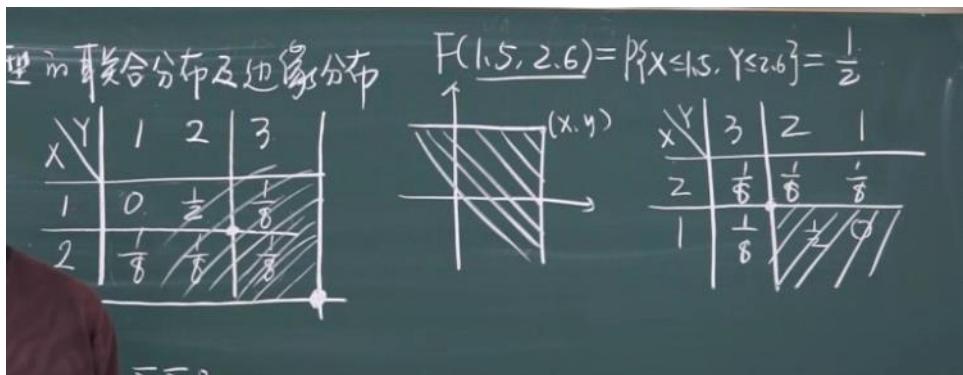
$X, Y$  取离散分布

$$\begin{array}{c|ccc} & Y & 1 & 2 & 3 \\ \hline X & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \hline 2 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P_{ij}$

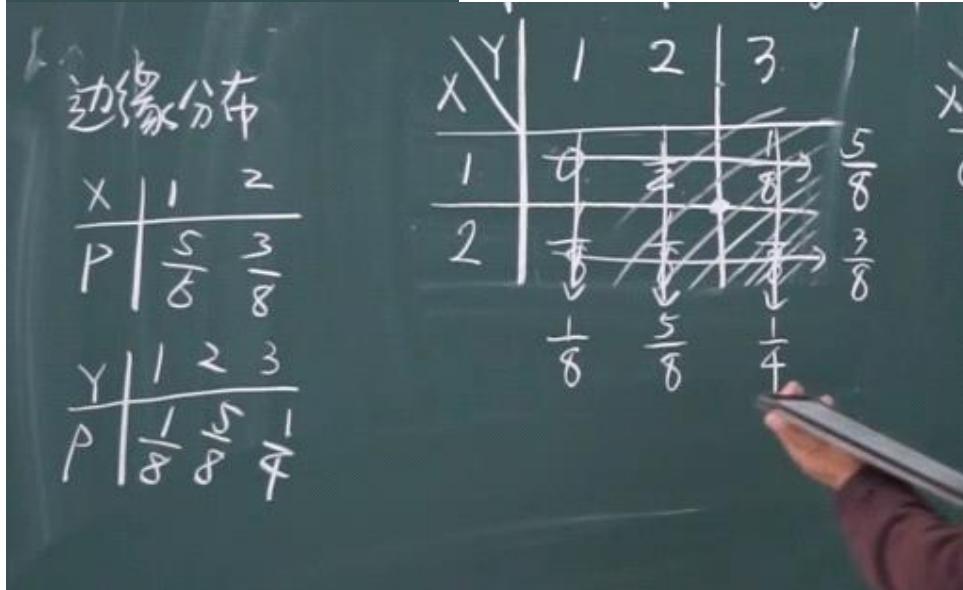
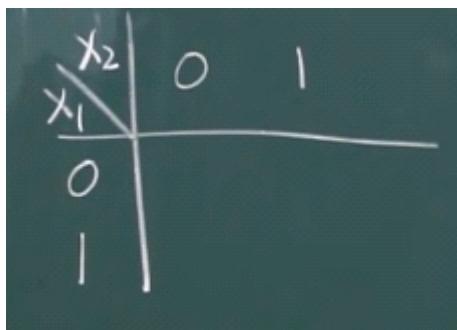
(1)  $P_{ij} \geq 0$  (2)  $\sum \sum P_{ij} = 1$

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P_{ij}$$
$$F(-1, -2) = P\{X \leq -1, Y \leq -2\} = 0$$
$$F(1, 2) = P\{X \leq 1, Y \leq 2\} = \frac{1}{2}$$
$$F(4, 5) = P\{X \leq 4, Y \leq 5\} = 1$$



上方还是下方 取决于数值递增还是递减

第一个变量一定竖着, 第二个变量一定横着



① 联合分布  $\Rightarrow$  两个边缘分布  
 ② 边缘分布  $\Rightarrow$  两个联合分布  
 $\hookrightarrow$   $X, Y$  的独立性

## 二维连续的联合密度和边缘密度

2024年1月22日 19:21

二维连续的联合密度和边缘密度

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) ds dt$$

分布  $f(x, y)$  联合密度  $f$  联合密度

$$(1) f(x, y) \geq 0 \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

二维连续的联合密度和边缘密度 (1)

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) ds dt$$

分布  $f(x, y)$  联合密度  $f$  联合密度

$$(1) f(x, y) \geq 0 \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$(3) \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

$$(4) G \text{ 为平面区域 } P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$$

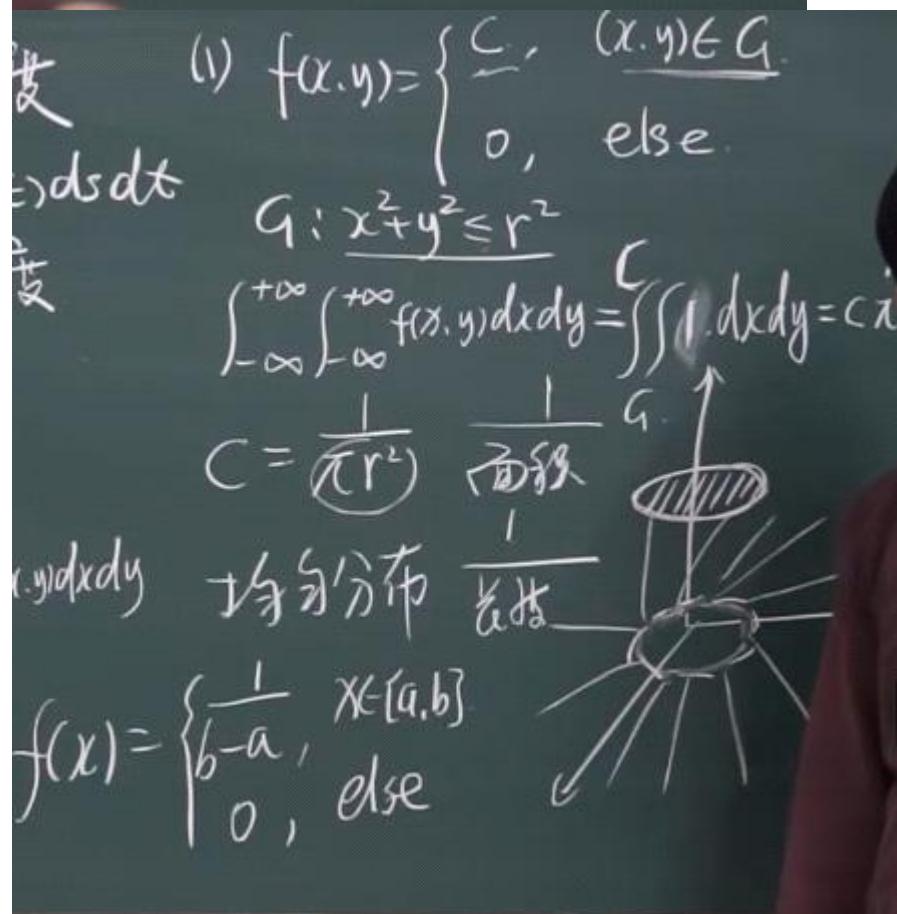
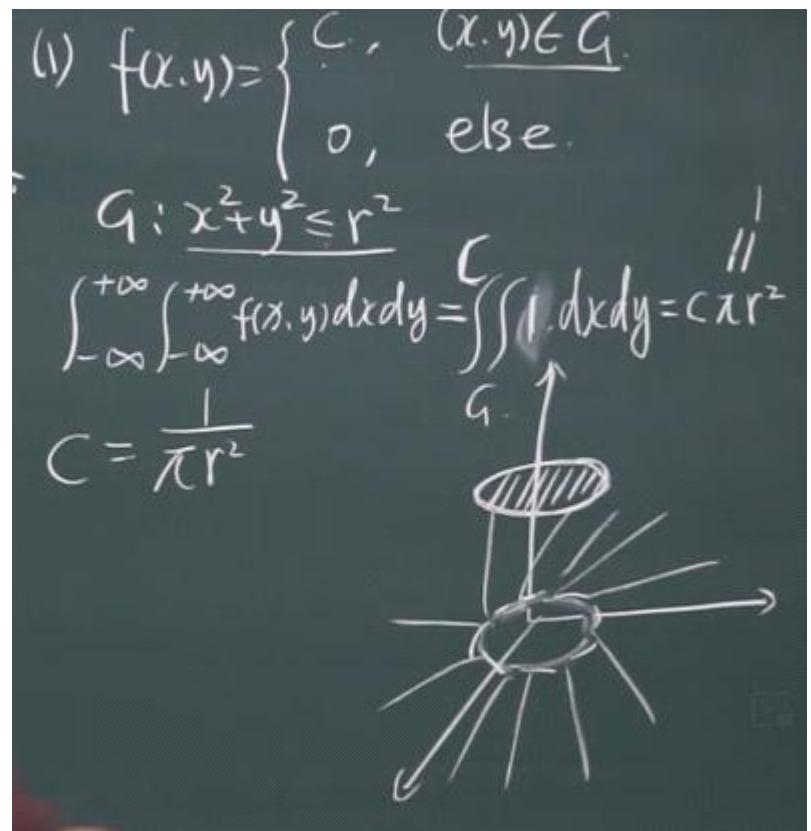


$$(1) f(x, y) = \begin{cases} C, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$G: x^2 + y^2 \leq r^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy = C \pi r^2$$

$$C = \frac{1}{\pi r^2}$$



一维均匀分布是长度的倒数，二维均匀分布是面积的倒数

(2)  $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

(1)  $X, Y \sim F(x, y)$  (2)  $\begin{array}{c} \uparrow \\ x+y=1 \end{array}$  (3)  $F_X(x) F_Y(y)$   $G \leftarrow$   $P\{(x, y) \in G\}$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1) X, Y \sim F(x, y) \quad (2) \text{P}\{(x, y) \in G\}$$

$$(1) F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, \quad x > 0, y > 0 \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-(s+t)} ds dt = \int_0^x \int_0^y e^{-s-t} ds dt$$

见二重积分的计算性质

$$(2) \text{积分区域是长方形} \quad \text{且 } f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

$$\int_a^b dx \int_c^d f_1(x) f_2(y) dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy = \left( \int_a^b f_1(x) dx \right) \cdot \left( \int_c^d f_2(y) dy \right)$$

$$= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-(s+t)} ds dt = \int_0^x \int_0^y e^{-s-t} ds dt$$

$$= (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) = \int_0^x e^{-s} ds \cdot \int_0^y e^{-t} dt$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1) X, Y \sim F(x, y) \quad (2) \text{P}\{(x, y) \in G\}$$

$$(1) F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, \quad x > 0, y > 0 \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-(s+t)} ds dt = \int_0^x \int_0^y e^{-s-t} ds dt$$

$$x, y \rightarrow 0, \quad F(x, y) = 0 = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$$

(2)  $x+y=1$ , 构造出的面积如图所示, 问  $(x, y)$  属于  $G$  的概率

$$V \in G = \iint_G f(x, y) dx dy = \iint_G e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{-(x+y)} dy = 1 - 2e^{-1}$$

(3) 求边缘分布

$$(3) F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

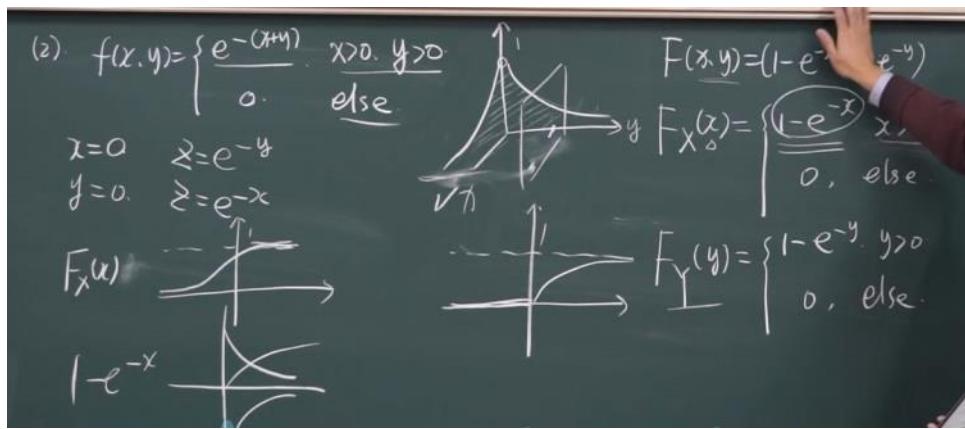
这个密度函数的图像是什么样的

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x=0 \quad z = e^{-y}$$

$$y=0 \quad z = e^{-x}$$

边缘分布的图像是什么样的



# 二维随机变量的边缘密度函数

2024年1月23日 19:50

边缘密度函数

$$F_x(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, t) dt \right] ds$$

变上限求导

变上限积分求导的三种形式

## 1、公式法

$$\left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt \right]' = f[\varphi_2(x)] \cdot \varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)] \cdot \varphi_1'(x)$$

边缘密度函数  $\int_a^{f(x)} g(t) dt = f'(x) g(f(x))$

$$F_x(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, t) dt \right] ds$$

↓  
等

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, y) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, y) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$



$$(3) f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} \stackrel{!}{=} f_X(x) f_Y(y)$$

$$(3) f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} \stackrel{!}{=} f_X(x) f_Y(y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} dy = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \arctan y \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} dx = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

显然有，联合密度等于边缘密度相乘 独立的时候

$$(4) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} \cdot x^2 + y^2 \leq r^2 & \stackrel{!}{=} f_X(x) f_Y(y) \\ 0, \text{ else} & \end{cases}$$

$$(4) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} \cdot x^2 + y^2 \leq r^2 & \stackrel{!}{=} f_X(x) f_Y(y) \\ 0, \text{ else} & y^2 \leq r^2 - x^2 \quad -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \end{cases}$$

解： $|x| \leq r$  时  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{1}{\pi r^2} dy = \frac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2}$

$|x| > r$  时  $f_X(x) = 0$

$|x| > r$  时  $f_X(x) = 0$   $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2}, & |x| \leq r \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & |y| \leq r \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x+y-2xy), & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ①. \quad 0 \leq x \leq 1. \quad f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 2(x+y-2xy) dy \\ &= 2 \left( xy + \frac{y^2}{2} - xy^2 \right) \Big|_0^1 = 2 \left( x + \frac{1}{2} - x \right) = x + \frac{1}{2} \\ \text{else} \quad f_X(x) &= 0. \end{aligned}$$

## 条件分布

2024年1月24日 18:39

3.2.1 条件分布

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$
$$F(x|A) = P\{X \leq x|A\}$$

在已经发生A的情况下,  $X \leq x$  的概率

(1)  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ , 在  $X > 1$  的条件下, 条件分布

3.2.1 条件分布  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$
$$F(x|A) = P\{X \leq x|A\}$$

(1)  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$  在  $X > 1$  的条件下, 条件分布

解:  $X > 1$   $F(x|x > 1) = P\{X \leq x | X > 1\} = \frac{P\{X \leq x, X > 1\}}{P\{X > 1\}} = \frac{P\{X > 1\}}{P\{X > 1\}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi}$

$x \leq 1$  时  $F(x|x > 1) = 0$

$x > 1$  时  $P\{1 < X \leq x\} = \int_1^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_1^x = \frac{1}{\pi} \arctan x - \frac{1}{4}$

$$F(x|x > 1) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{\pi} \arctan x - \frac{1}{4}, & x > 1 \end{cases}$$

## 离散型的条件分布

2024年1月24日 19:01

3.2.2 离散型的条件分布

$x_1$	0	1	$P_i^{(1)}$
0	0.1	0.3	0.4
1	0.3	0.3	0.6
$P_j^{(2)}$	0.4	0.6	

$$\begin{cases} x_1=0 & P\{x_2=0|x_1=0\} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 \\ x_1=0 & P\{x_2=1|x_1=0\} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75 \\ x_1=1 & P\{x_2=0|x_1=1\} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5 \\ x_1=1 & P\{x_2=1|x_1=1\} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5 \end{cases}$$

$x_1$	0	1	$P_i^{(1)}$
0	0.1	0.3	0.4
1	0.3	0.3	0.6
$P_j^{(2)}$	0.4	0.6	

$$P\{X=x_i|Y=y_j\} = \frac{P_{ij}}{P_j^{(2)}}$$

# 连续型随机变量的条件分布

2024年1月24日 19:09

3.2.3 连续型的条件分布

$$\begin{aligned}
 P\{X \leq x | Y = y\} &= P\{X \leq x, Y = y\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\{X \leq x, Y \leq y + \varepsilon\} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^x \int_{y+\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(u, v) du dv}{\int_{-\infty}^y f_Y(v) dv} \quad x = 5 \\
 &= \frac{1}{\int_{-\infty}^y f_Y(v) dv} \int_{y+\varepsilon}^{y+\varepsilon} f_Y(v) dv \quad \text{积分中值: } \int_a^b f(x) dx = f(\bar{x})(b-a) \\
 &= \frac{1}{f_Y(y)} \quad = f_Y(y) = f_Y(y) \\
 &= \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dy \quad \int_y^{y+\varepsilon} f_Y(u) du = f_Y(y) \varepsilon
 \end{aligned}$$

## 3.2.3 连续型的条件分布

定义:  $(X, Y)$   $f(x, y)$   $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$ , 若  $f_Y(y) > 0$ .

在  $Y = y$  的条件下  $F(x|y) = \int_{-\infty}^x \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} du$

$$\begin{aligned}
 f(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\
 f(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)}
 \end{aligned}$$

(1)  $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$   $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ,  $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$

(1)  $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$   $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ,  $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$

$$\begin{aligned}
 f(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \\
 f(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}
 \end{aligned}$$

相互独立不受影响

(2)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$   $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x| \leq r \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ ,  $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & |y| \leq r \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 f(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & -\sqrt{r^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2-y^2} \\ 0, & \text{else} \end{cases}
 \end{aligned}$$

注意此时  $x$  的取值, 此时  $y$  给定,  $x$  也随之变化

$$(2) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} & x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0, \text{ else} & \end{cases} \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2}, & |x| \leq r \\ 0, \text{ else} & \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & -\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2} \\ 0, \text{ else} & \end{cases}$$

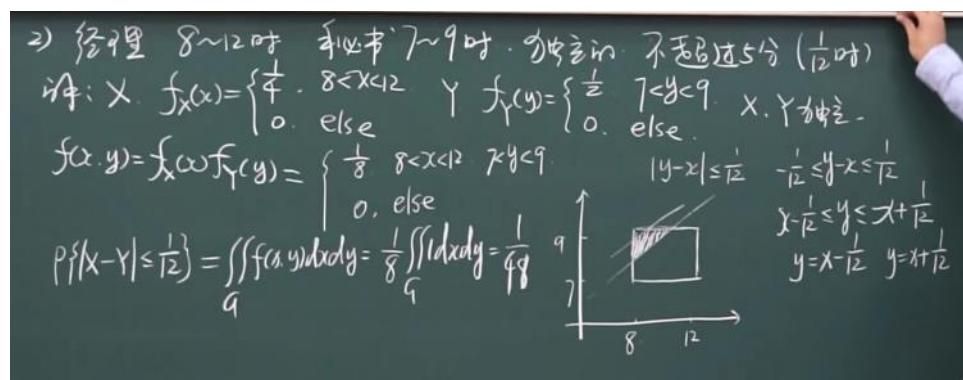
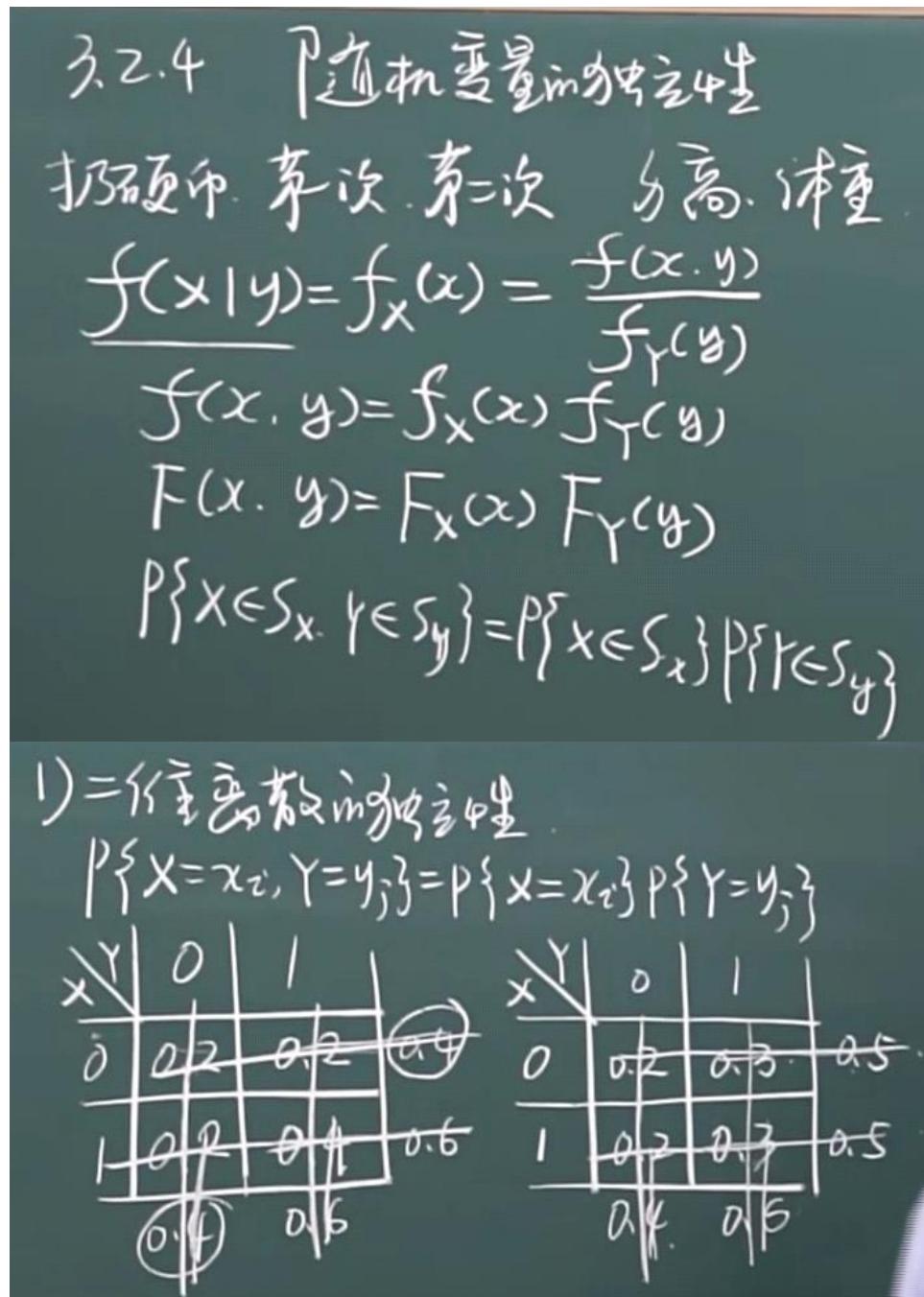
$$P\{X > 0 | Y = 0\} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2r} & 0 \leq x \leq r \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$= \int_0^r \frac{1}{2r} dx = \frac{1}{2r} x \Big|_0^r = \frac{1}{2r} r = \frac{1}{2}$$

# 随机变量的独立性

2024年1月26日 8:46

判断独立的条件，联合密度等于边缘密度相乘；联合分布等于边缘分布相乘



独立的随机变量，构造的函数也独立

### 3.2.4 随机变量的独立性

变量独立，输出随机数也独立

这里： $X, Y$  独立  $g_1(X), g_2(Y)$  也独立

$X, Y$  独立  $X^2, Y^2$  也独立  $a_1X+b_1, a_2X+b_2$  也独立

# 二维离散型随机变量函数的分布

2024年1月26日 14:39

3.3 二维随机变量函数的分布

(1) 二维高斯 分布  $X, Y$   $Z = XY$   $Z = X^2 - Y$   $Z = X^2 + Y^2$

$X \backslash Y$	4	4.2
5	0.2	0.4
5.1	0.3	0.1

$Z$	20	21	20.4	21.42
$P$	0.2	0.4	0.3	0.1

$Z$	$5^2 - 4$	$5^2 - 4.2$	$5.1^2 - 4$	$5.1^2 - 4.2$
$P$	0.2	0.4	0.3	0.1

(2)  $X_1, X_2$  独立  $0-1$  分布  $P$

$X_1 + X_2$	0	1	2	
$P$	$(1-p)^2$	$(1-p)p$	$p(1-p)$	$p^2$

$X_1 + X_2$	0	1	2
$P$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	$p^2$

$X_1 + X_2 \sim B(2-p)$

(3)  $X, Y$  独立  $\lambda_1, \lambda_2$  泊松分布  $Z = X + Y$   $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$P\{Z=k\} = \sum_{i=0}^k P\{X=i, Y=k-i\} = \sum_{i=0}^k P\{X=i\} P\{Y=k-i\}$

$= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$

泊松分布具有可加性

# 二维连续型随机变量函数的分布

2024年1月26日 15:50

3.3.2. 二维连续型随机变量的分布

$(X, Y)$   $f(x, y)$   $Z = g(X, Y)$

$$D_Z = \{(x, y) \mid g(x, y) \leq z\}$$

$$(1) F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = \iint_{D_Z} f(x, y) dx dy$$

$$(2) f_Z(z)$$

(1)

$Z$ 由 $X, Y$ 构造而成

先求分布再求密度

$$(1) f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad Z = \sqrt{x^2+y^2}$$

已知 $f(x, y)$ 求 $Z$ 的密度函数

变量函数，重要的是分段 看到根号要分段

$$(1) f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad Z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\text{若 } z < 0 \text{ 时. } F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\sqrt{x^2+y^2} \leq z\}$$

分段时首先考虑联合密度的分段，本题联合密度无分段，再从函数本身考虑分段

$$(1) z < 0 \text{ 时. } F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\sqrt{x^2+y^2} \leq z\} = 0$$

$$(2) z \geq 0 \text{ 时. } = P\{x^2+y^2 \leq z^2\} = \iint_{D_Z} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr$$

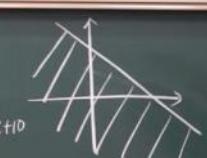
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{1}{2} dr r^2 = -e^{-\frac{r^2}{2}}$$

解: (1)  $z < 0$  时,  $F_z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\sqrt{X+Y} \leq z\}$

(2)  $z \geq 0$  时,  $F_z(z) = \iint_{\{X^2+Y^2 \leq z^2\}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}} dxdy$

$$F_z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z^2}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

1.  $Z = X+Y$   $F_z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dxdy$



1.  $Z = X+Y$   $F_z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dxdy$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \quad t = x+y \quad x+y \leq z \quad x+y \leq t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, t-x) dt \quad y = t-x \quad y \leq -x+t$$

$$= \int_{-\infty}^z \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x) dx \right] dt$$

1.  $Z = X+Y$   $F_z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dxdy$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \quad t = x+y \quad x+y \leq z \quad x+y \leq t$$

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, t-x) dt \quad y = t-x \quad y \leq -x+t$$

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^z \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x) dx \right] dt \quad Y \text{型}$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$


如果是独立的话, 还可以拆成下面, 卷积公式

$$\int_{-\infty}^{(z)} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x) dx \right] dt$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \quad \text{卷积公式}$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

$$f_X(x)$$

X是标准正态分布, Y是标准正态分布, X、Y是独立的 (才可以用卷积公式)

$$\begin{aligned}
 (2) \quad X \sim N(0,1) \quad Y \sim N(0,1) \quad X, Y \text{ 独立} \quad Z = X+Y \\
 \text{证: } \varphi_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x) \varphi_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx \\
 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx \\
 = \frac{x^2 + z^2 - 2zx + z^2}{2} \\
 = \frac{2x^2 - 2zx + z^2}{2} \\
 = \frac{2(x^2 - \frac{z}{2}x + \frac{z^2}{4}) + \frac{z^2}{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{正态分布} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\
 \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}} \\
 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d(x-\mu)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad X \sim N(0,1) \quad Y \sim N(0,1) \quad X, Y \text{ 独立} \quad Z = X+Y \\
 \text{证: } \varphi_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x) \varphi_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx \\
 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2(1+1)}} = \frac{x^2 + z^2 - 2zx + z^2}{2} \\
 = \frac{2x^2 - 2zx + z^2}{2} \\
 = \frac{2(x^2 - \frac{z}{2}x + \frac{z^2}{4}) + \frac{z^2}{2}}{2} \\
 Z \sim N(0, 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad X \sim N(0,1) \quad Y \sim N(0,1) \quad X, Y \text{ 独立} \quad Z = X+Y \\
 \text{证: } \varphi_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x) \varphi_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx \\
 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2(1+1)}} = \frac{x^2 + z^2 - 2zx + z^2}{2} \\
 = \frac{2x^2 - 2zx + z^2}{2} \\
 Z \sim N(0, 2) \quad X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \quad X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \frac{2\sigma^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}
 \end{aligned}$$

X, Y 独立

$$\begin{aligned}
 2. \quad M = \max\{X, Y\} \quad N = \min\{X, Y\} \\
 \{ \max\{X, Y\} \leq z \} = \{ X \leq z, Y \leq z \} = \{ N \geq z \} = \{ X > z, Y > z \} \quad F_X(x), F_Y(y) \\
 F_M(z) = P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = P\{X \leq z\} P\{Y \leq z\} = F_X(z) F_Y(z) \\
 F_N(z) = P\{N \leq z\} = 1 - P\{N > z\} = 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - P\{X > z\} P\{Y > z\} \\
 = 1 - (1 - P\{X \leq z\})(1 - P\{Y \leq z\}) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))
 \end{aligned}$$

$$\text{解: } f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad M = \max\{X, Y\}, \quad N = \min\{X, Y\}$$
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-3y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$