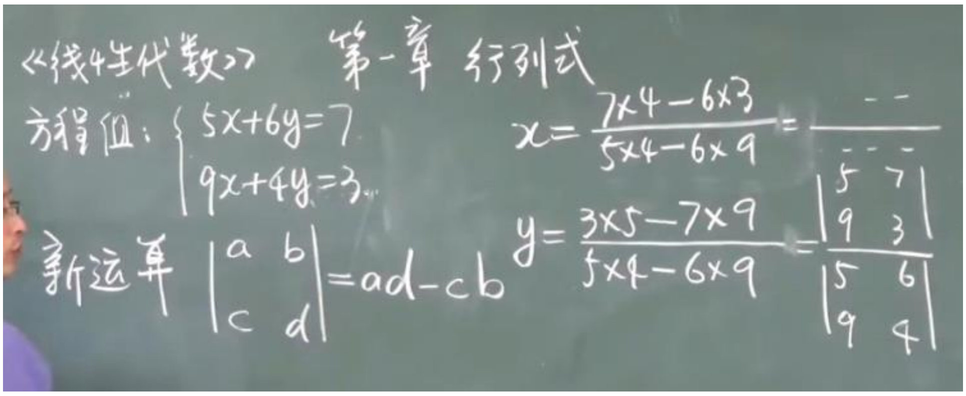
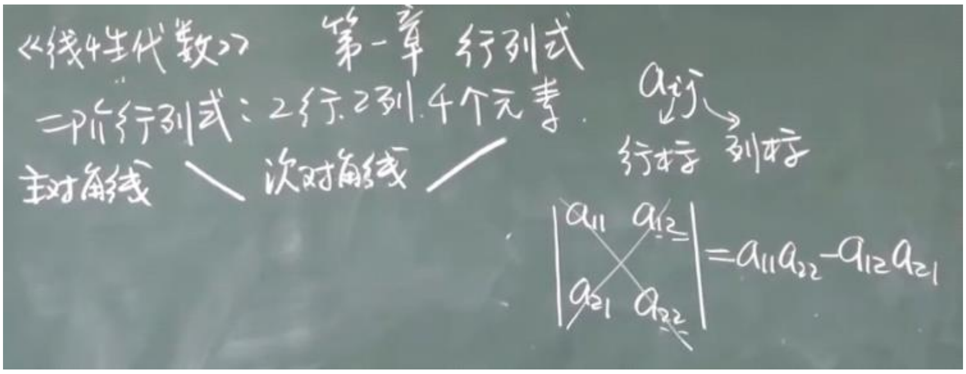
二阶三阶行列式

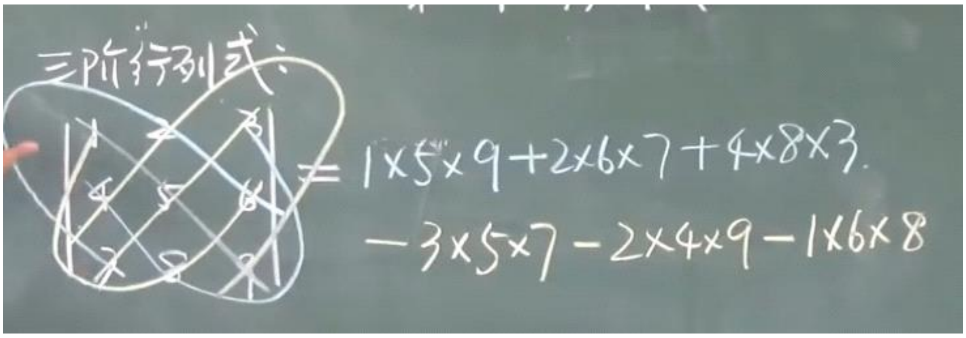
2024年1月27日　　19:45



二阶行列式

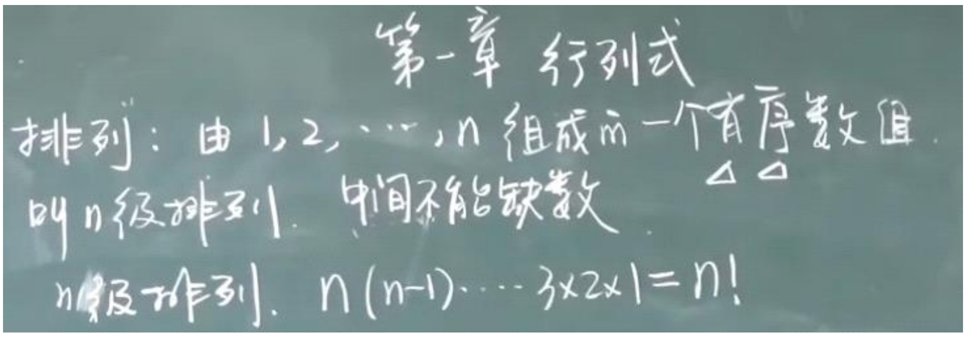


三阶行列式

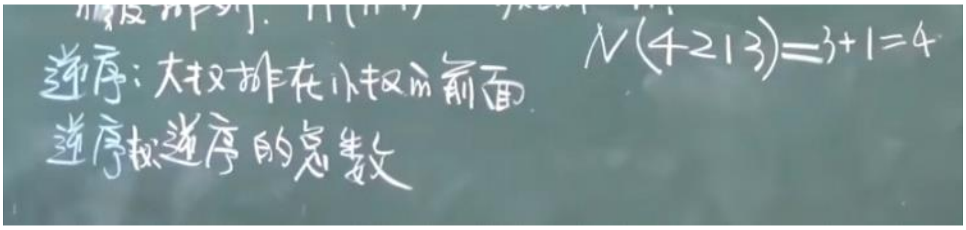


每次连都是3个数

n级排列

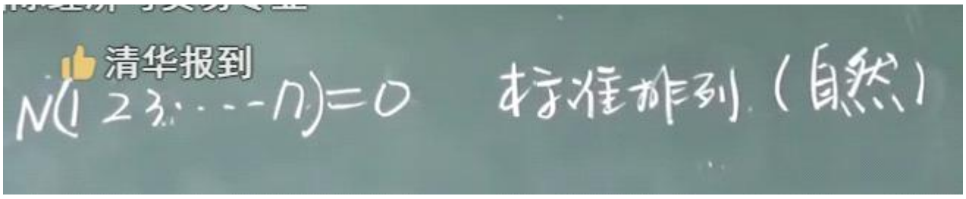


逆序数，用N表示

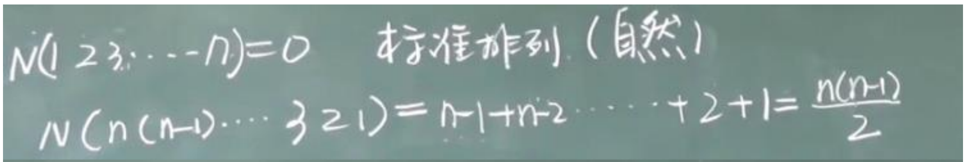


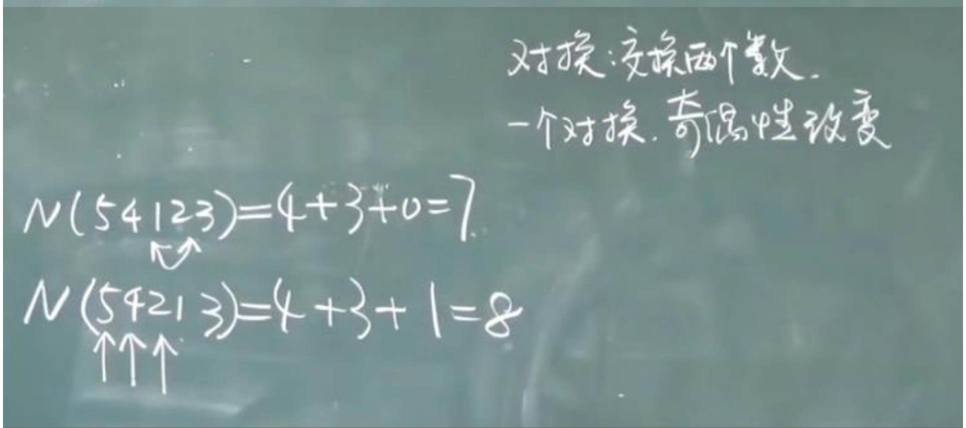
奇排列 逆序数是奇数就是奇排列

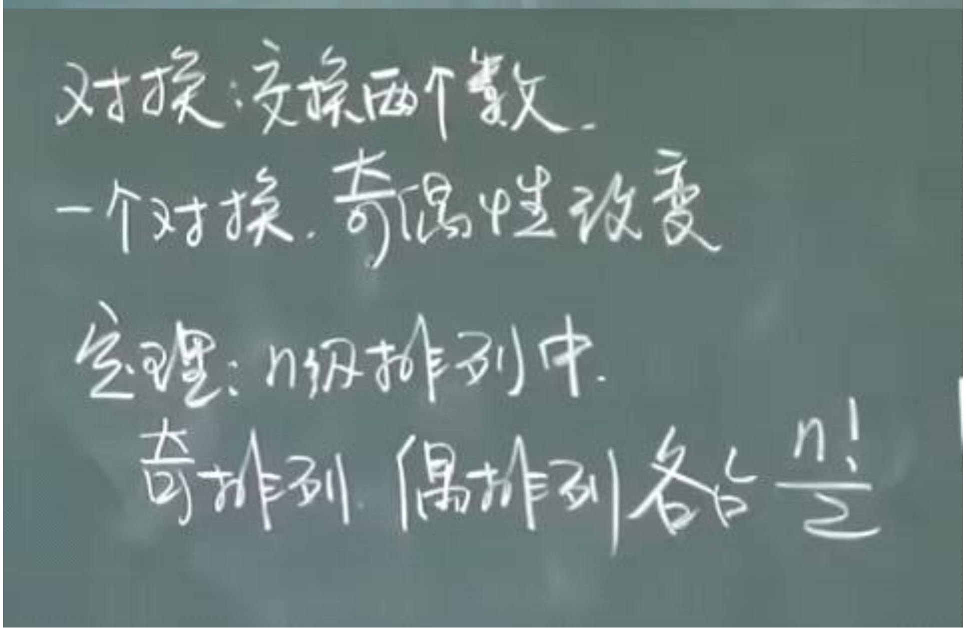
逆序数是偶数就是偶排列



如果一个排列，逆序数为0，称为标准排列

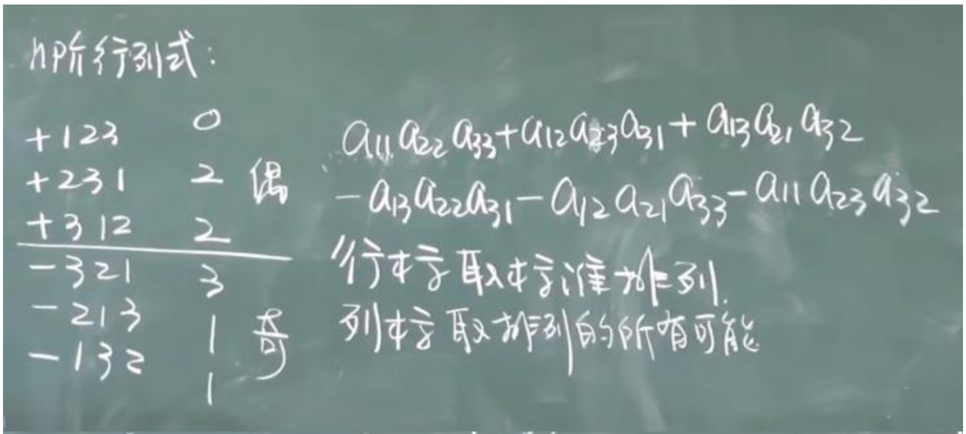


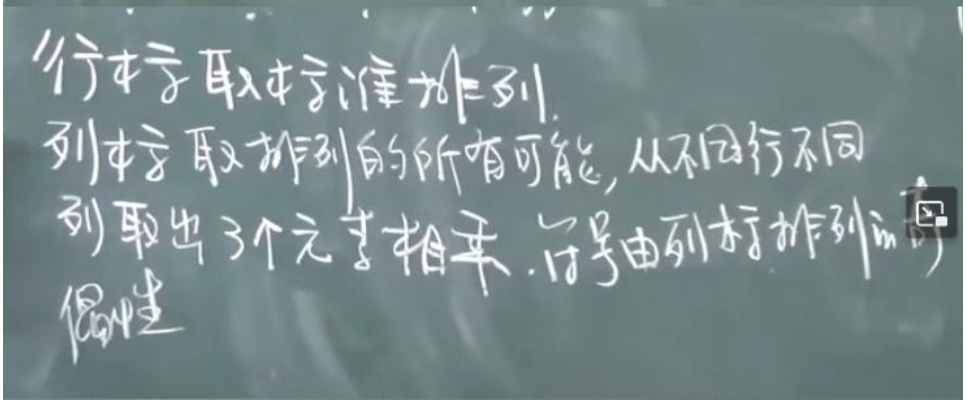


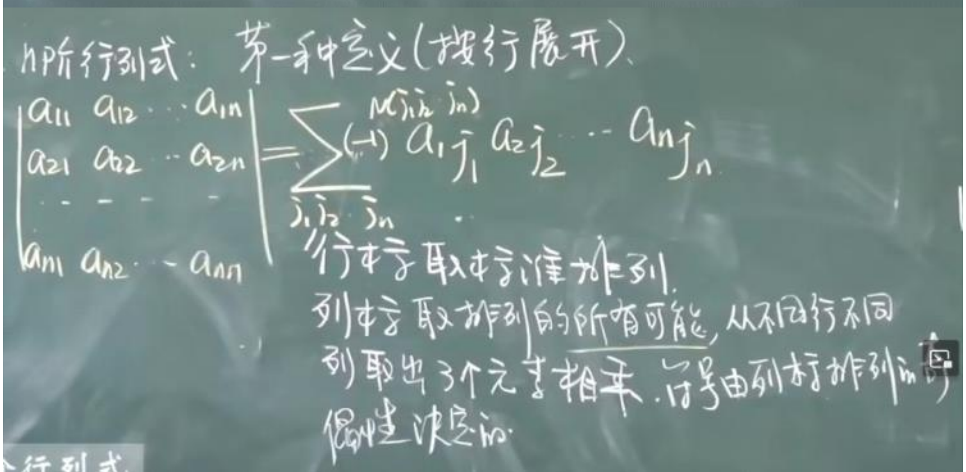


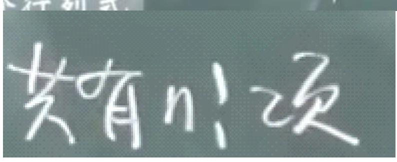
n阶行列式

2024年1月27日 21:06

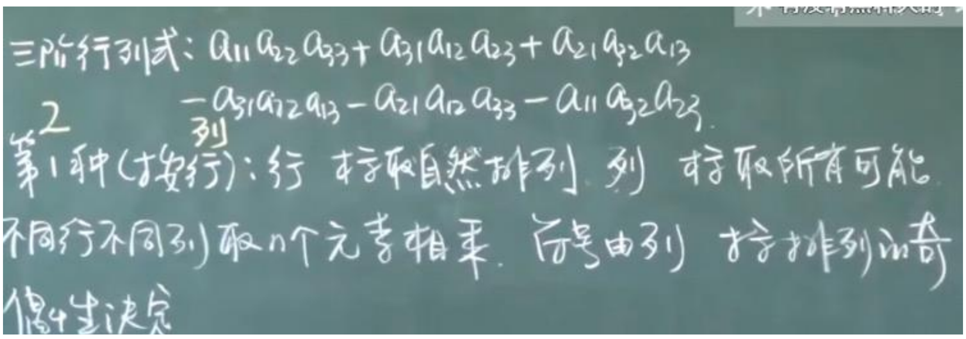


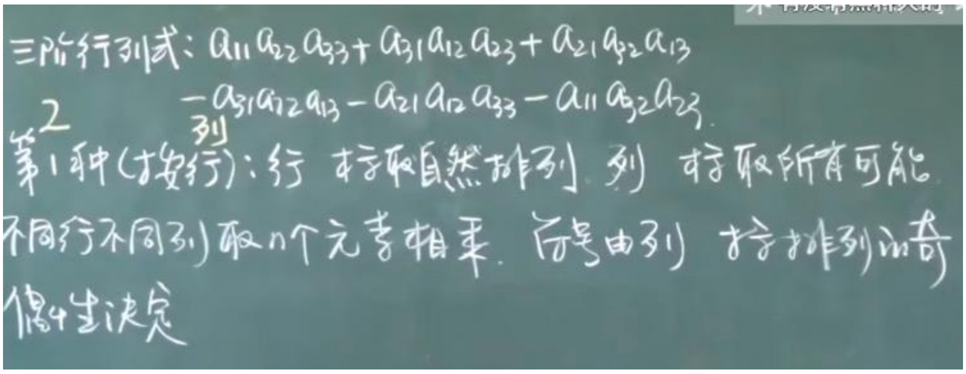




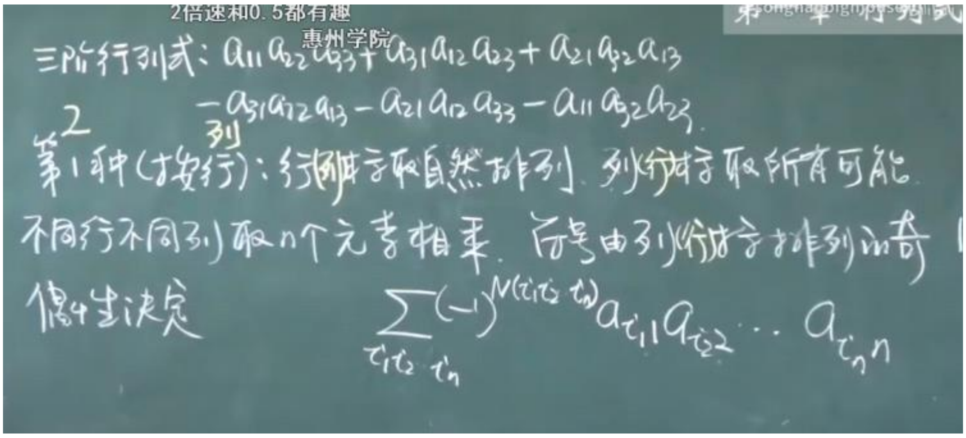


第一种定义，按行展开

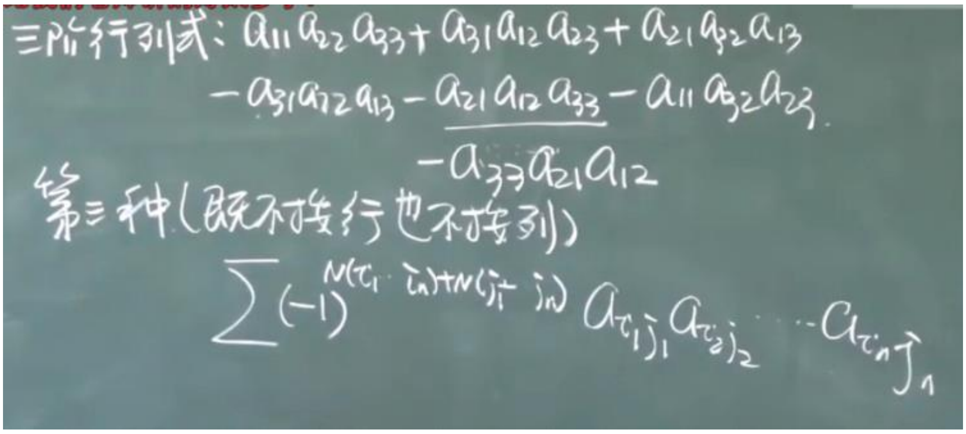




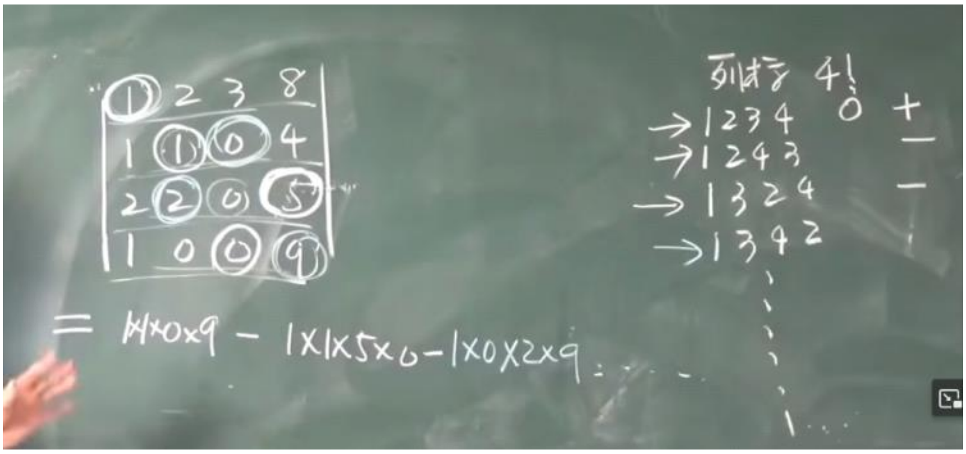
第二种定义，按列展开

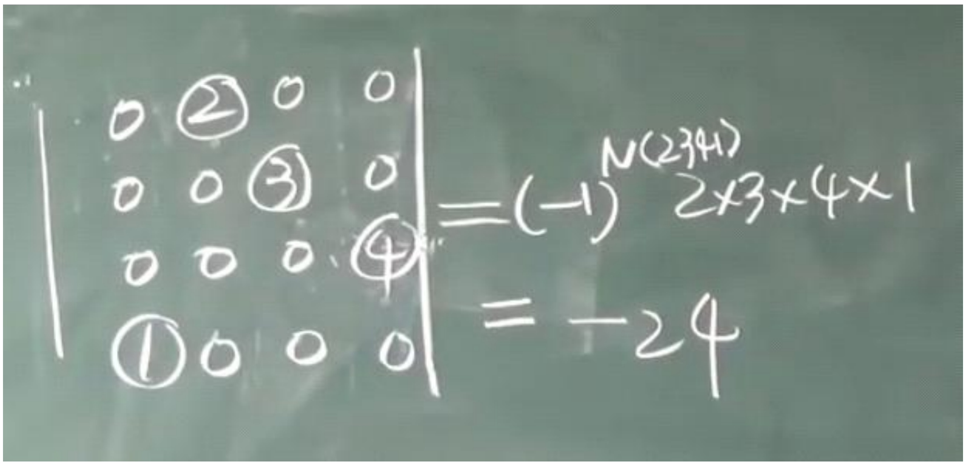


第三种定义，既不按行也不按列，符号由行和列相加得到的逆序数决定

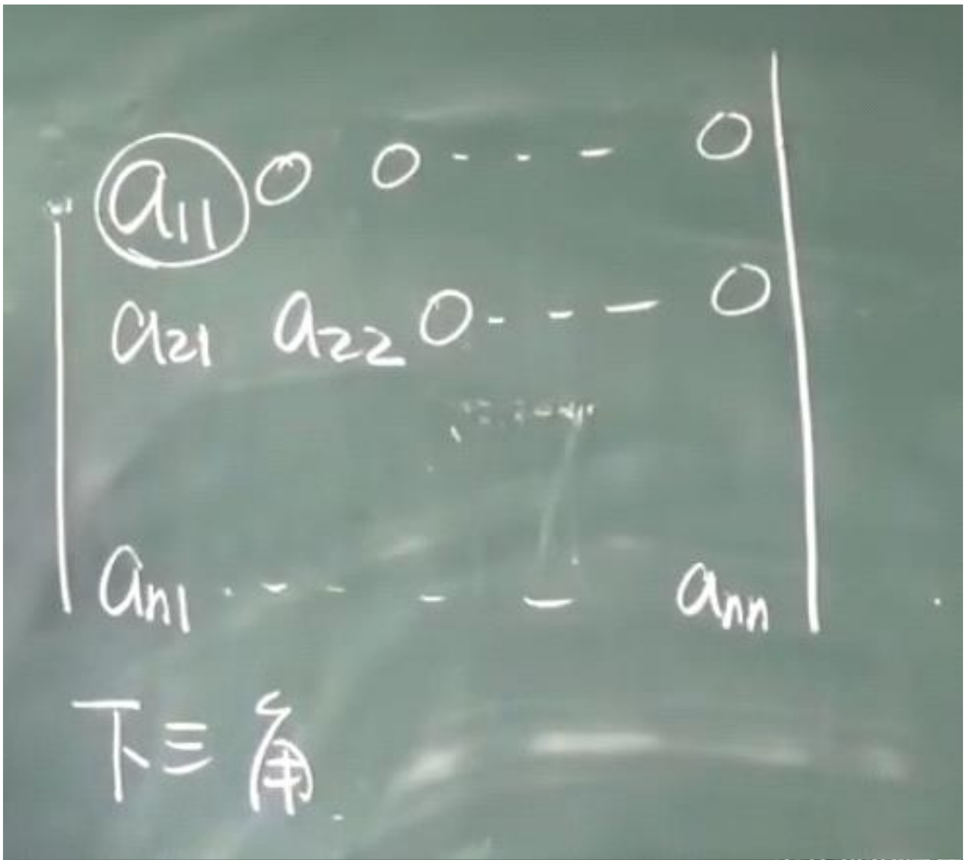


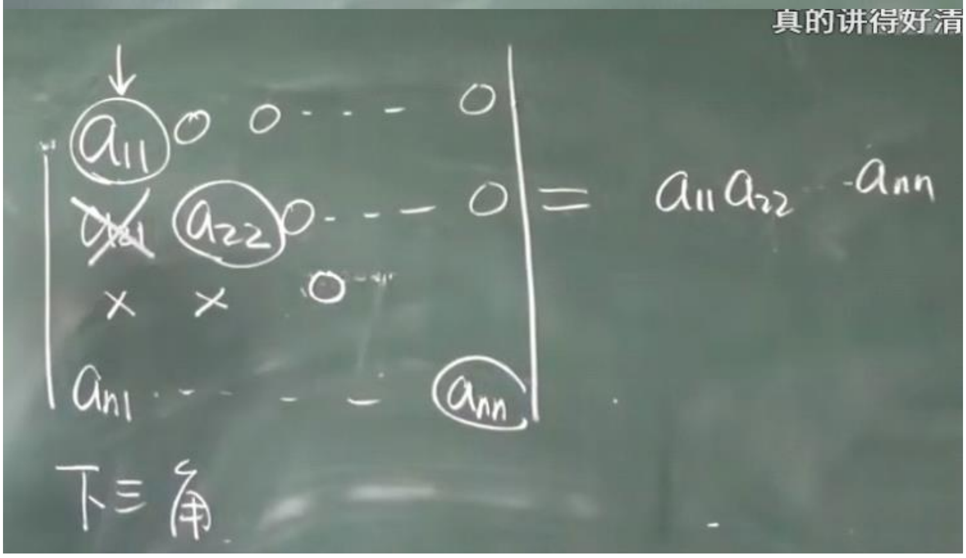
D表示行列式

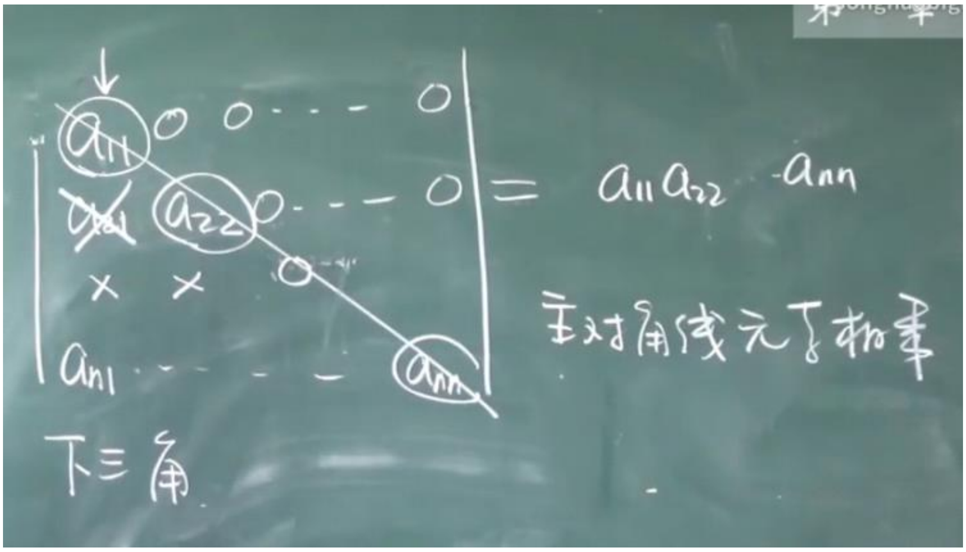




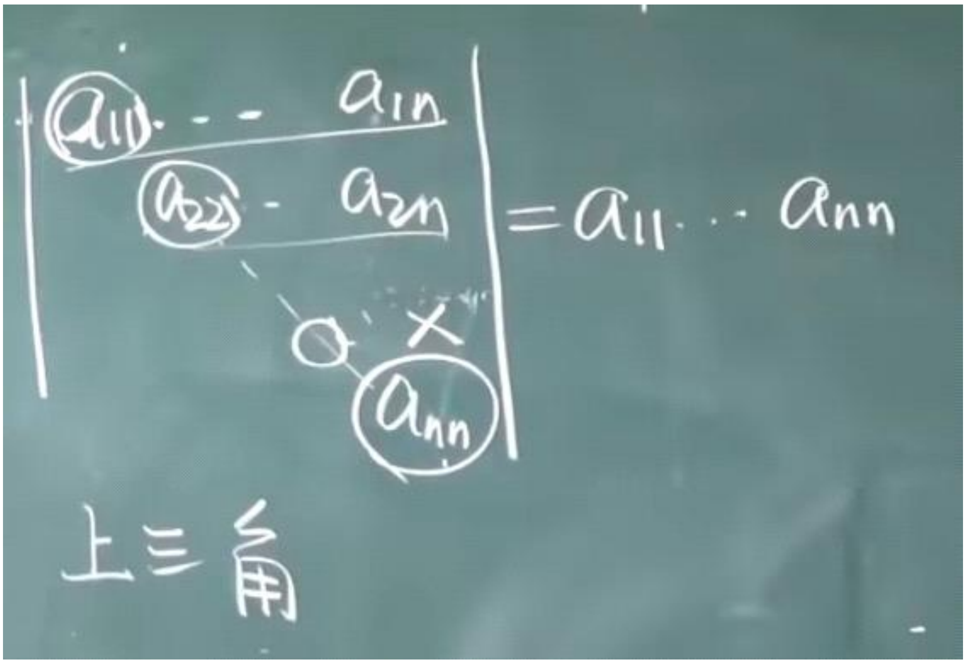
下三角行列式 等于主对角线元素相乘



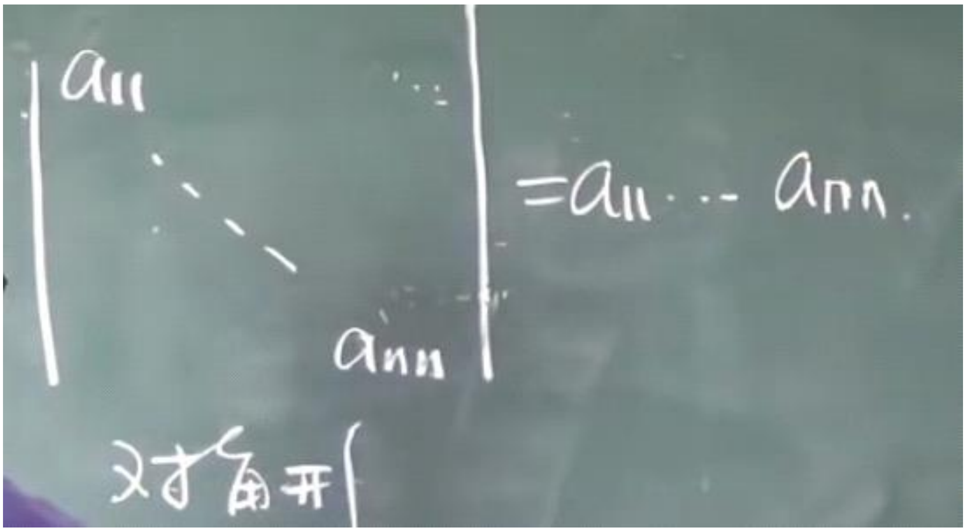


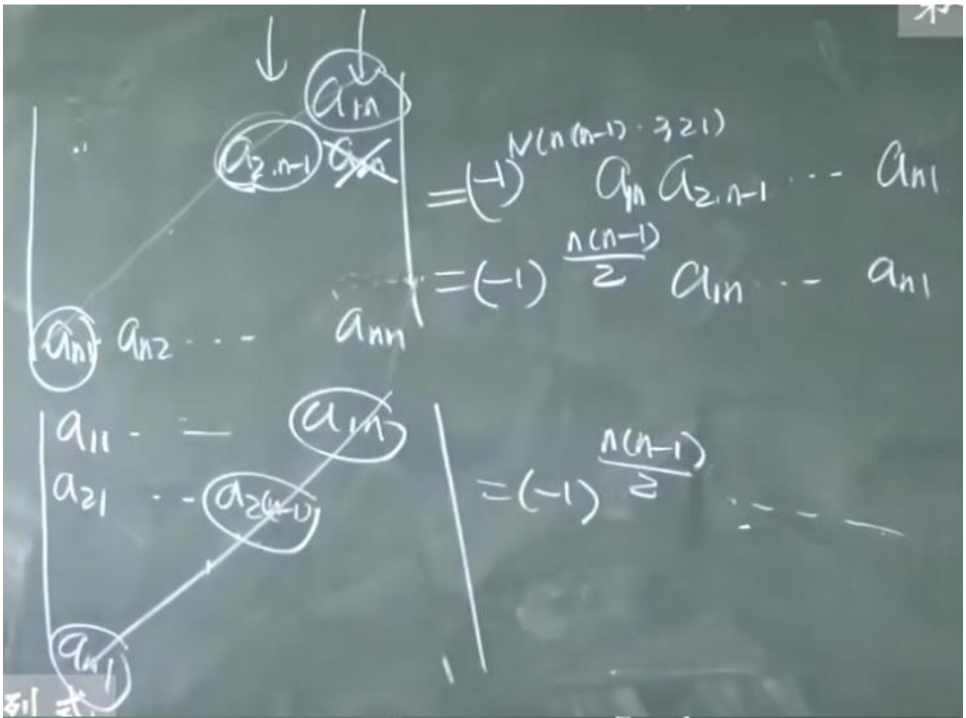


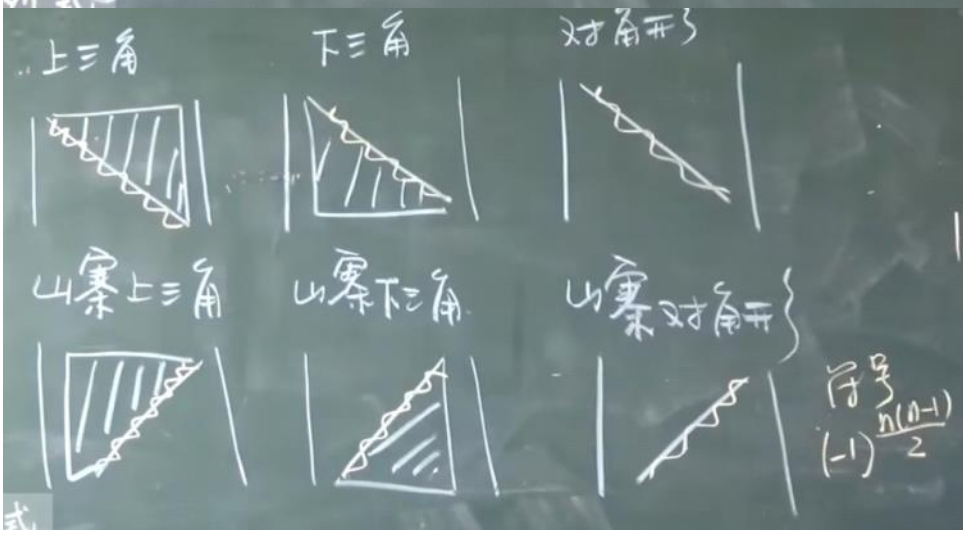
上三角行列式（正着取但是倒着理解）



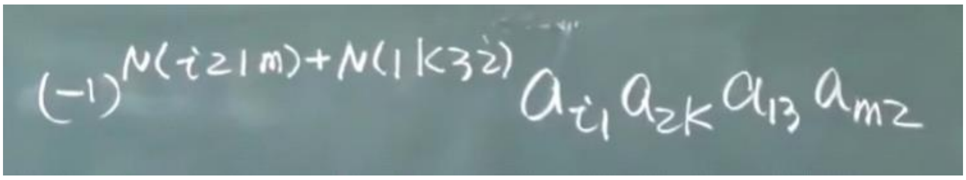
对角型行列式





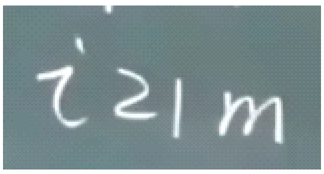


例题



行列式中的一项，求ikm取何值，前边的符号是多少

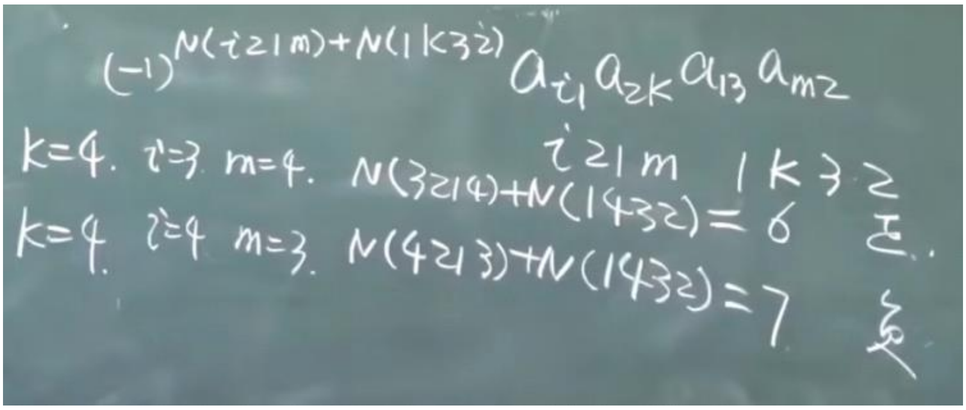
行标



列标

都不是标准排列，说明是第三种定义

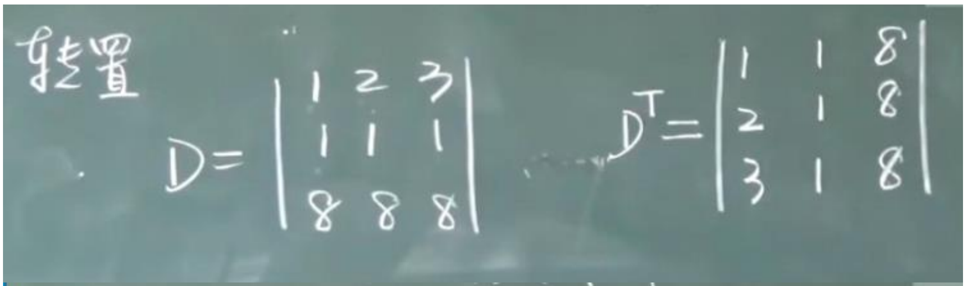
k肯定等于4； i，m是3或4

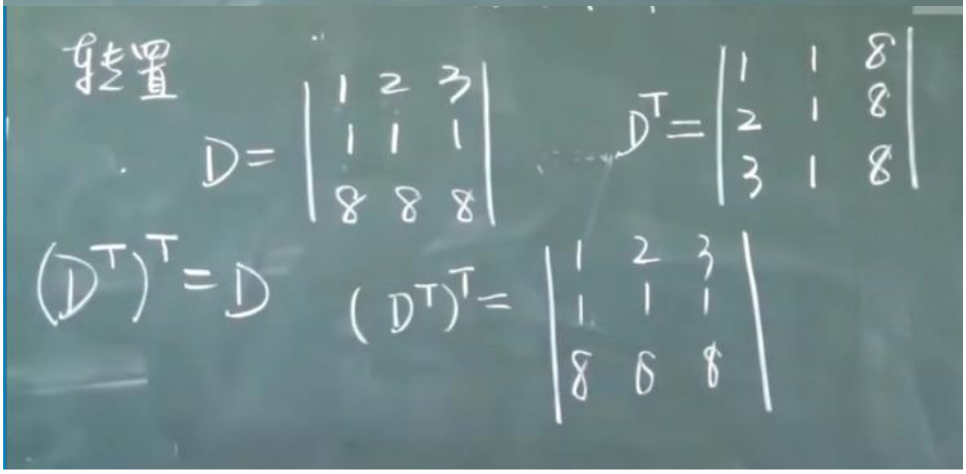


行列式的性质

2024年1月28日　11:44

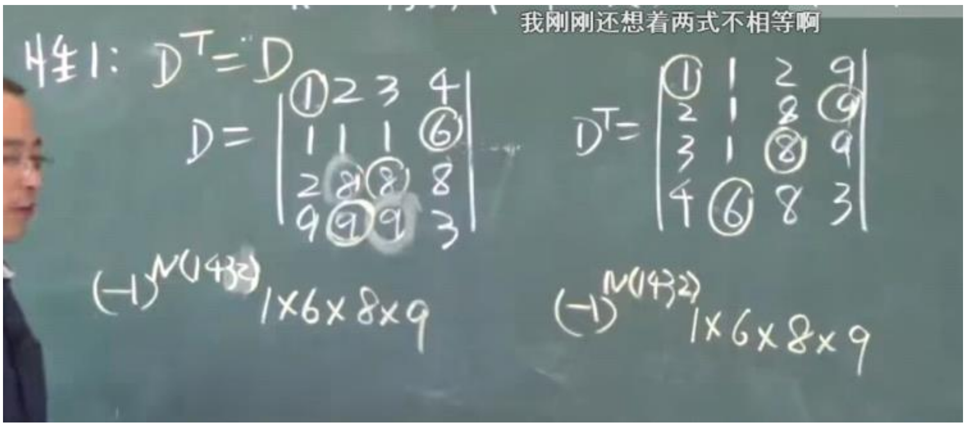
转置行列式



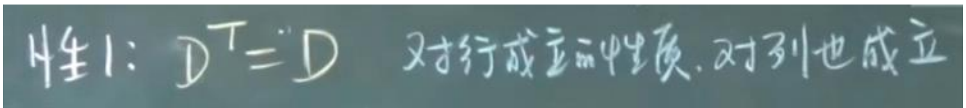


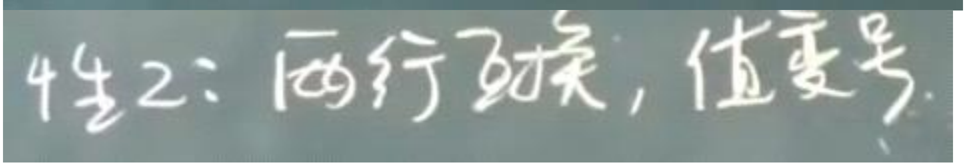
转两次就回去了

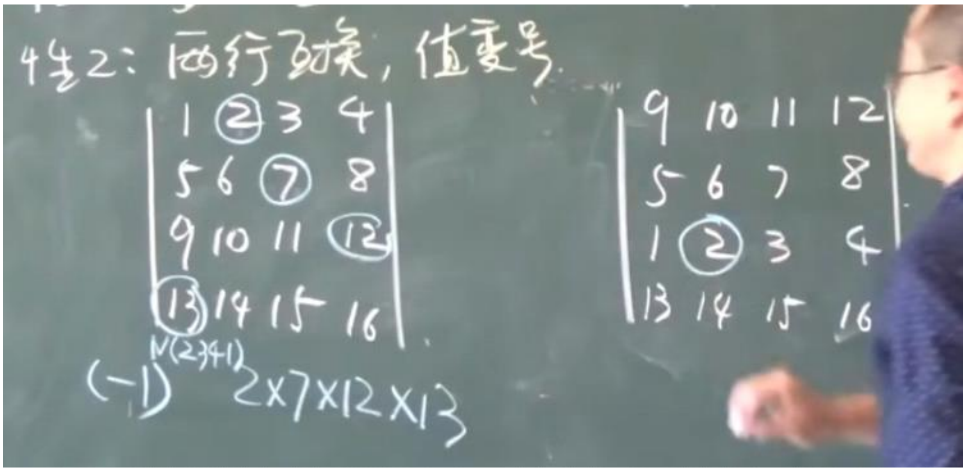
性质1：转置的值和原行列式相等



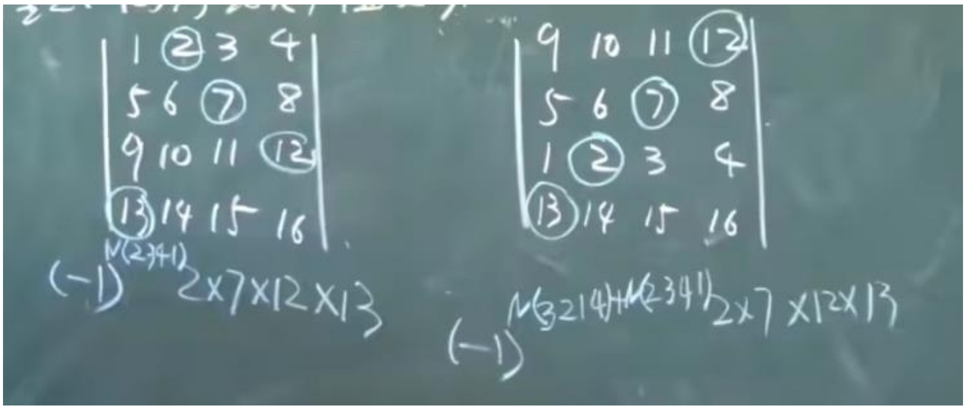
24项里的每一项都相等



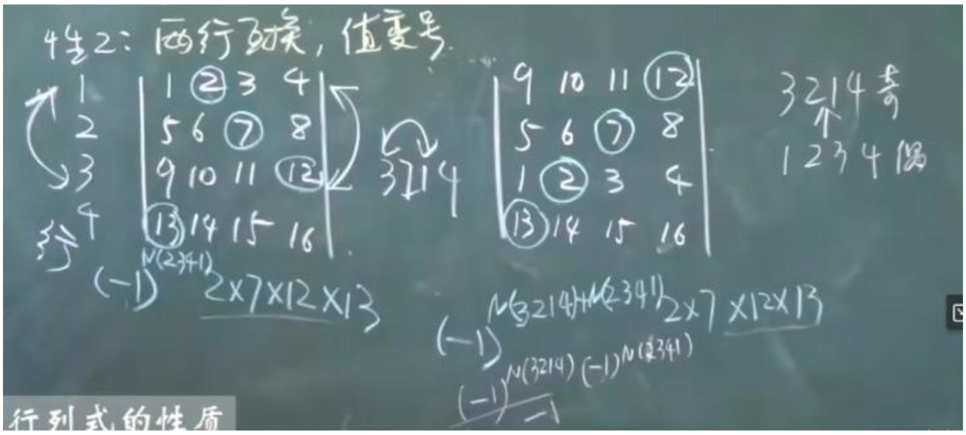




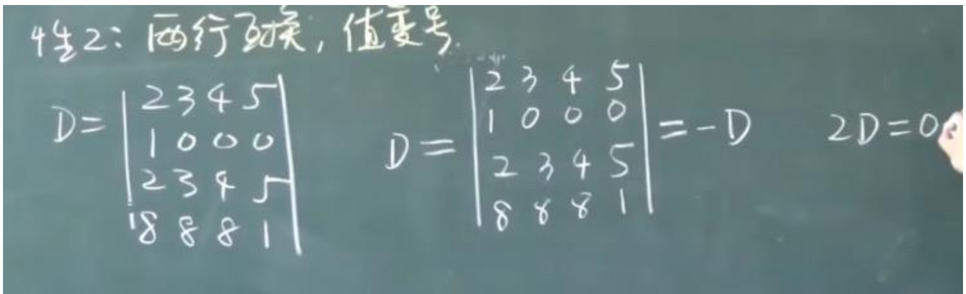
以左边为例，按行取，行标取1，2，3，4，所以列标先看第一行对应的列，即2，3，4，1

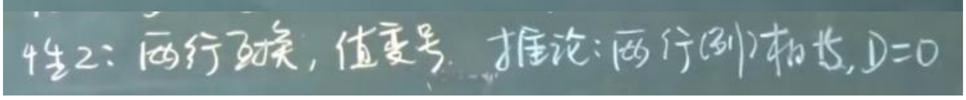


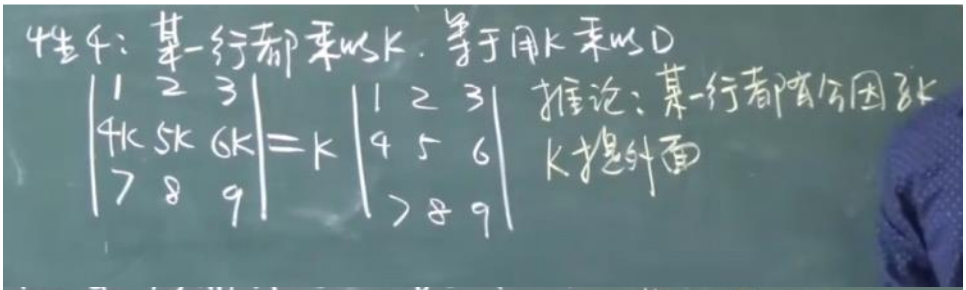
右边的行列式如果也取2*7*12*13 行标就是3，2，1，4 列标是2，3，4，1是第三种定义

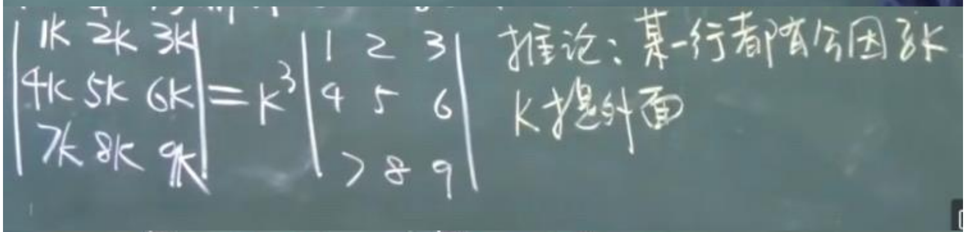


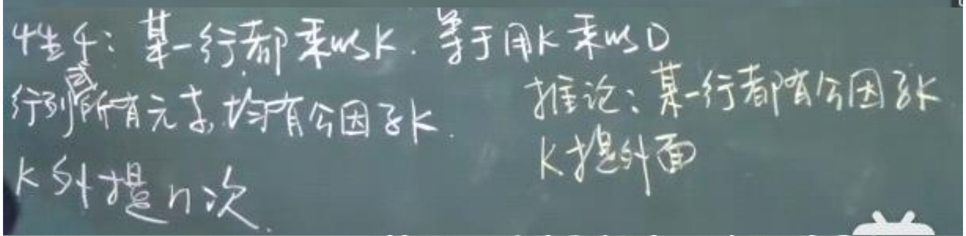
笼统理解：列标一样，两行互换，行标变了，多了一个负号

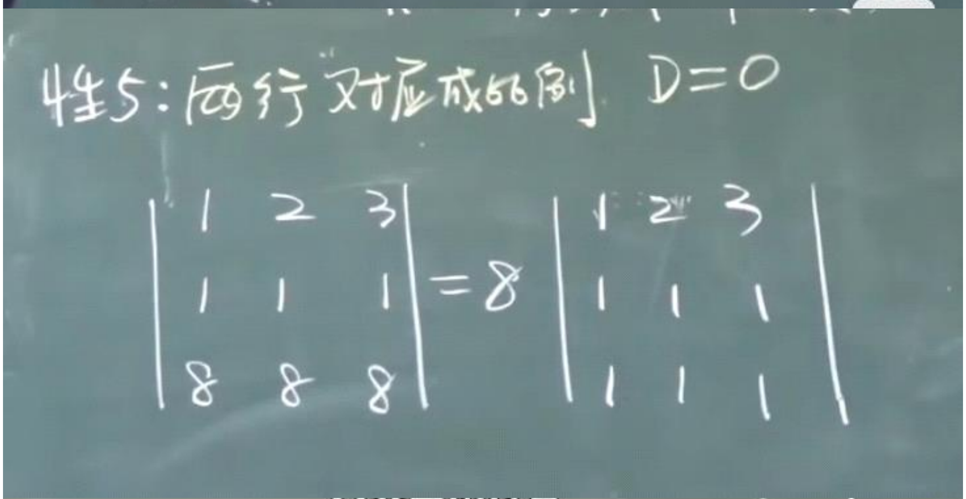


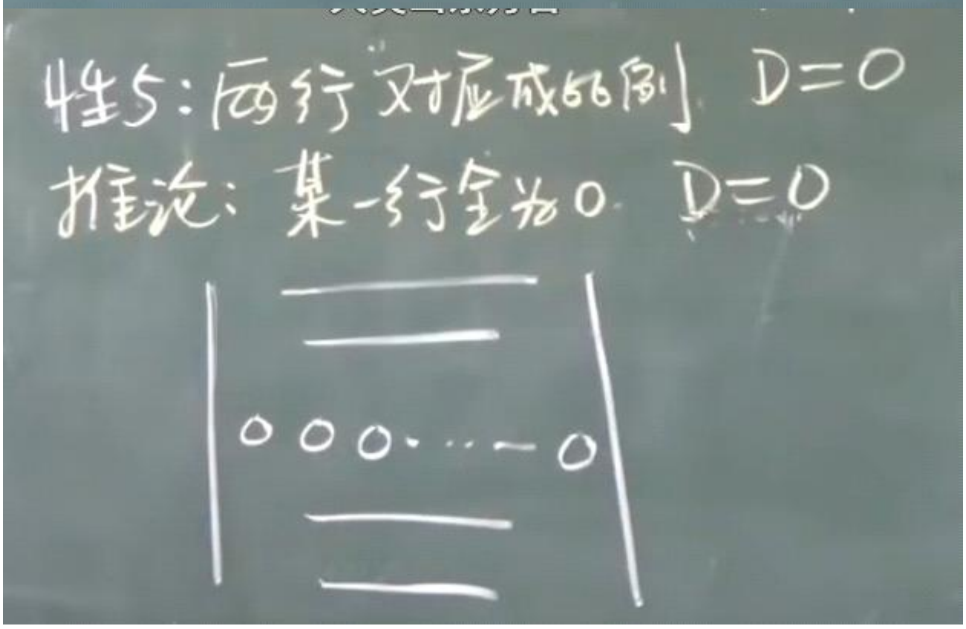








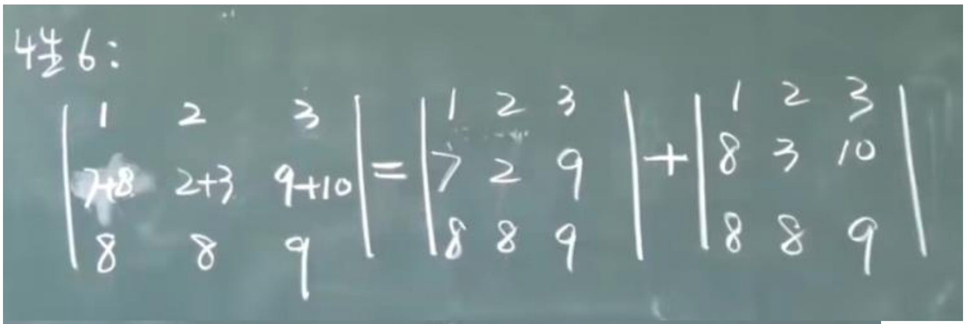


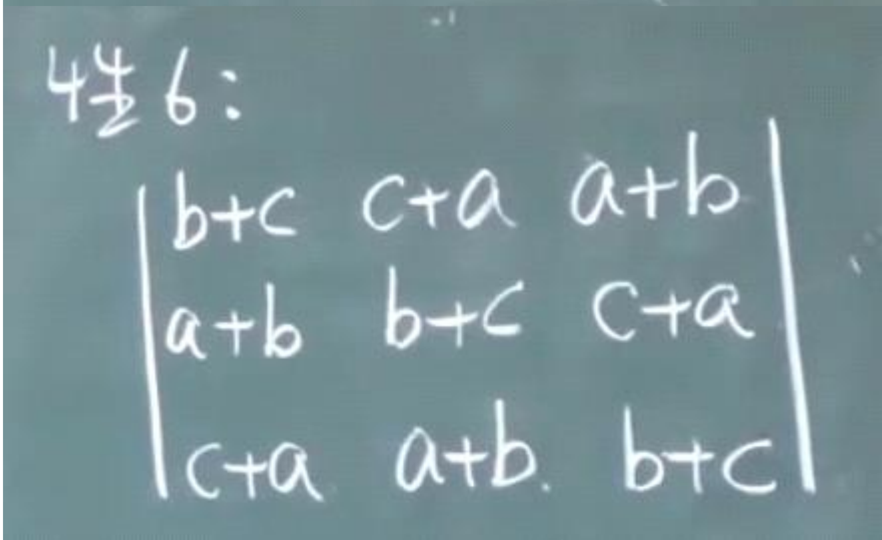


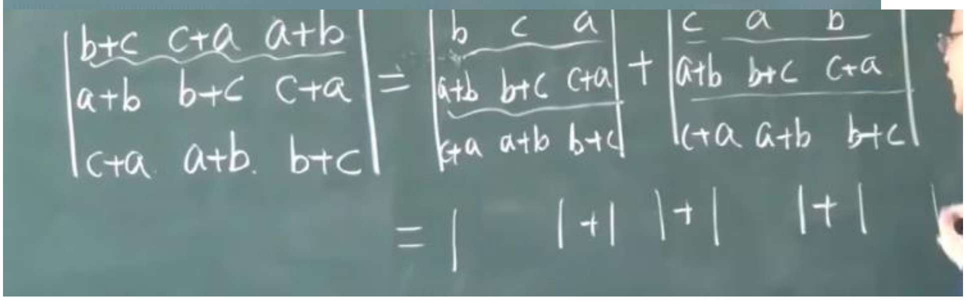
按公因子0来理解，把统一的0提外面

按定义理解，这一行必须得取一个数，怎么取都是0

性质6：每一行都是两个数相加，是和的那行分开，其余行不变

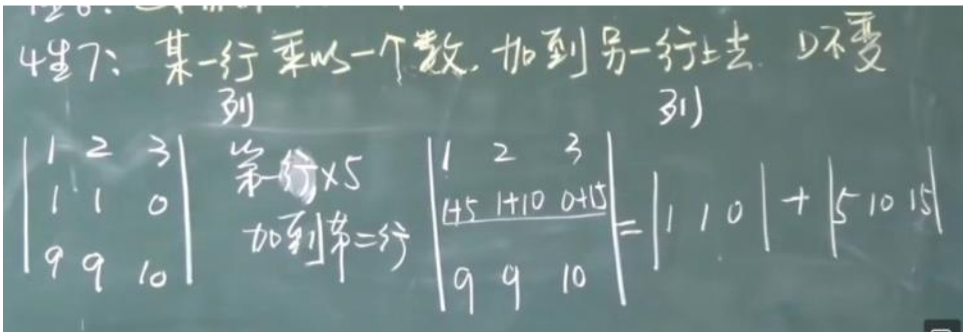


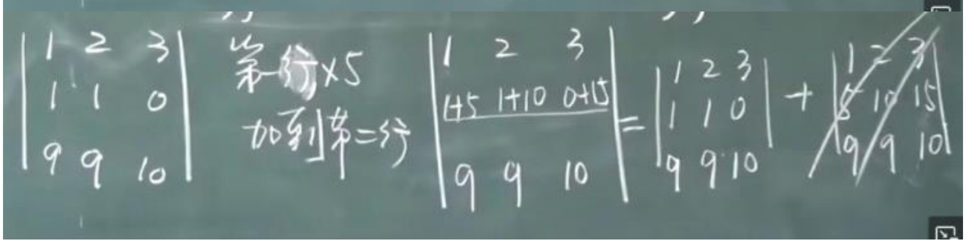




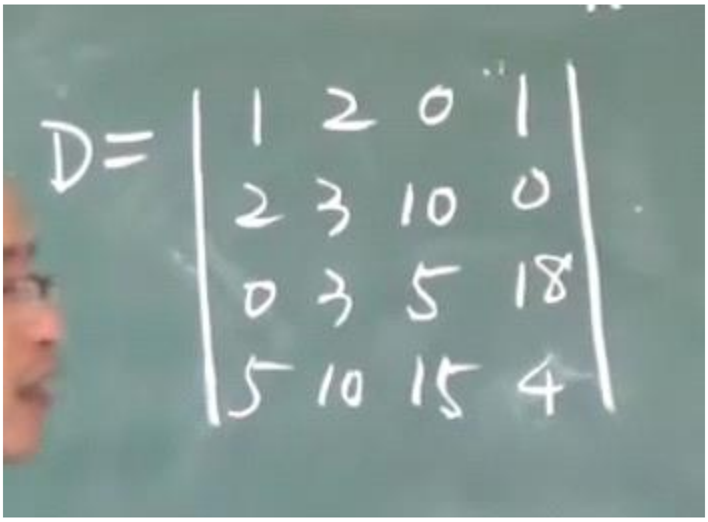
一共拆出8个

某一行乘以一个数，乘的结果加到另一行上去，行列值不变

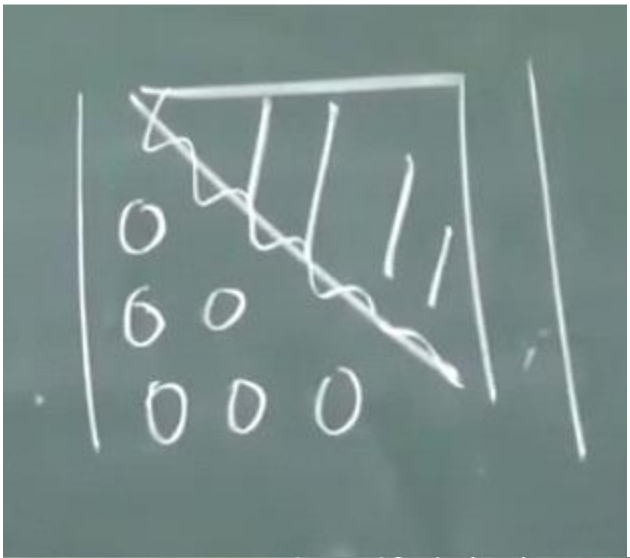


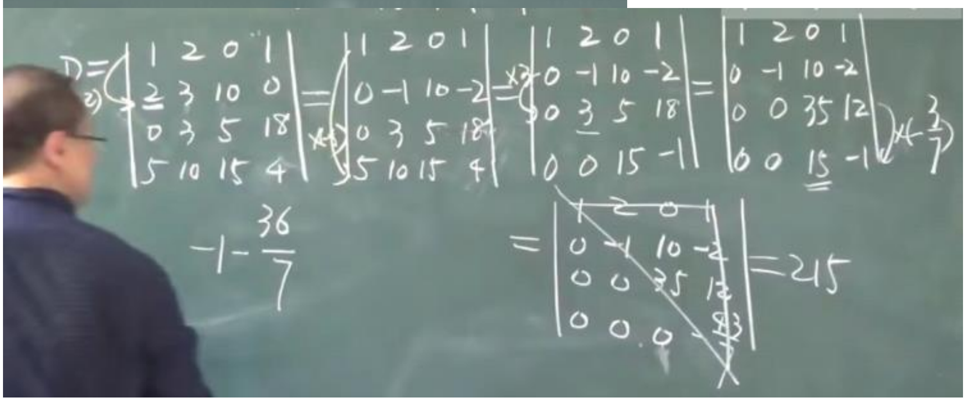


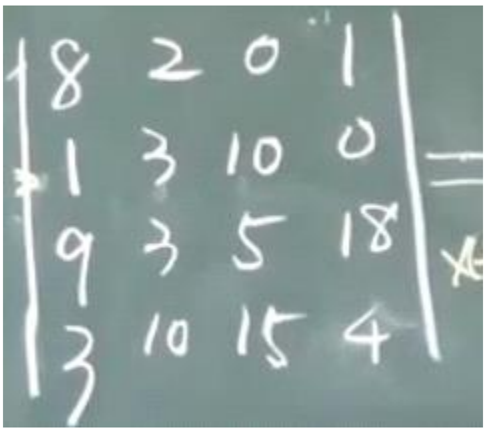
例题

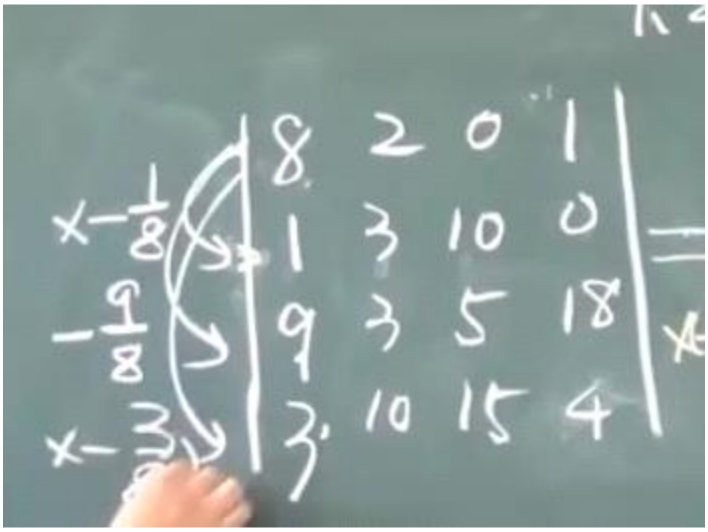


解题思路：化成上三角行列式，把下面的化成0

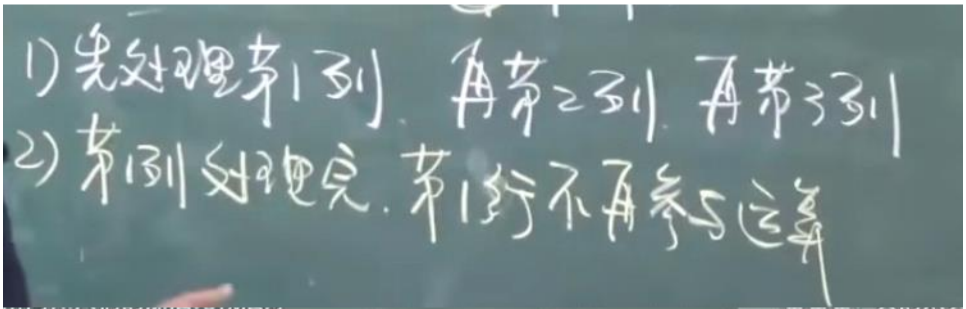


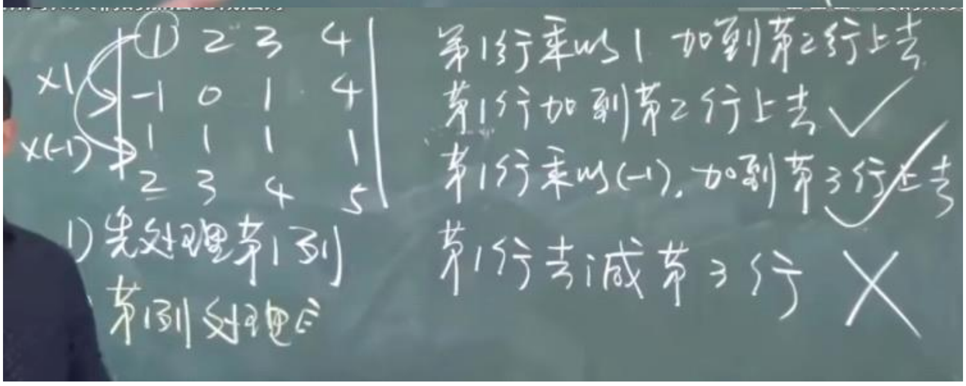






先把1换到第1行，但是记住行列式要变号





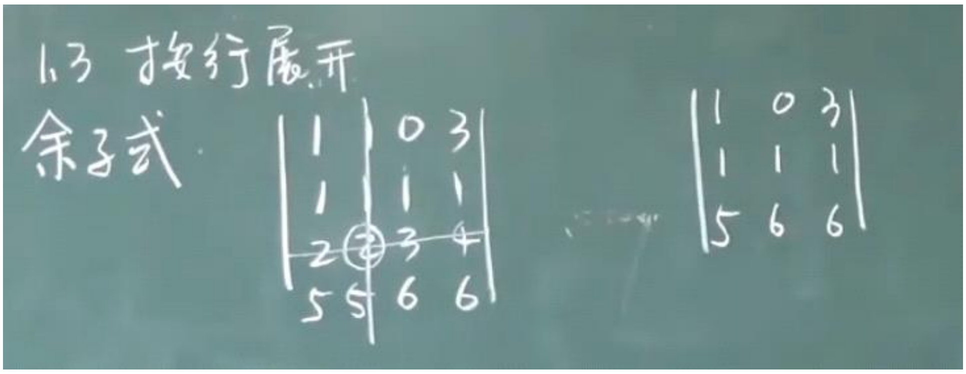
第1行加到第2行上

行列式按行展开

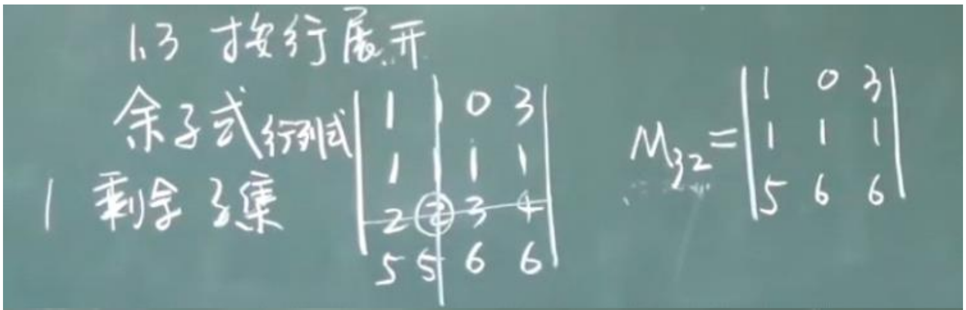
2024年1月28日 16:36

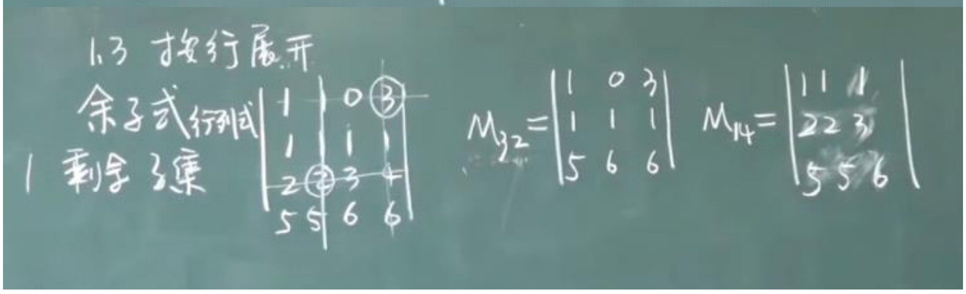
余子式

所在数的行和列去掉，剩下的按原来的排好，叫2的余子式

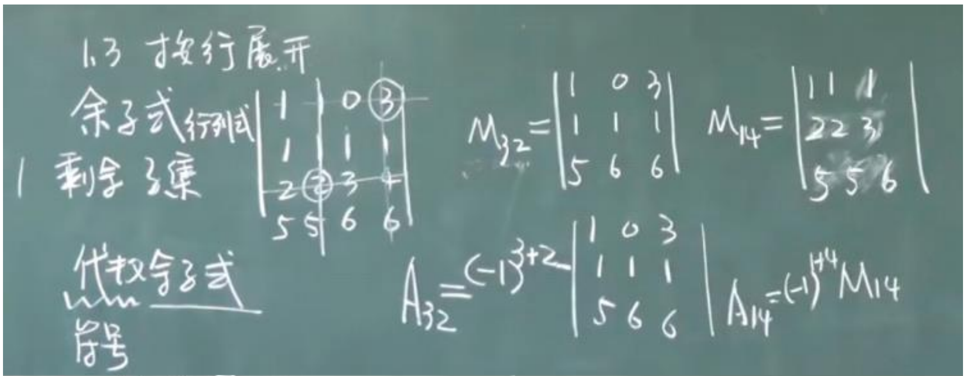


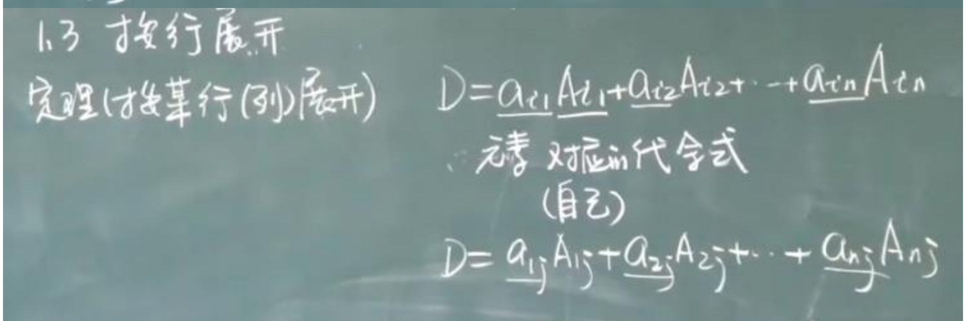
记做M32

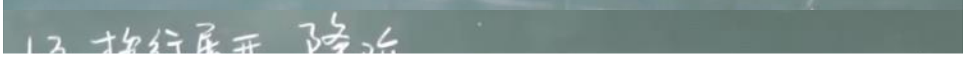




代数余子式







1.3 按行展开 降阶

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\2&3&5\end{vmatrix} = 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\3&5\end{vmatrix} + 1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&0\\2&5\end{vmatrix} + 2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}$$

1.3 按行展开 1) 降阶 2) 选0多的行(列)展开

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\2&3&5\end{vmatrix} = 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\3&5\end{vmatrix} + 1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&0\\2&5\end{vmatrix} + 2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}$$

0×

0√

$$=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}$$

1.3 按行展开 1) 降阶 2) 选0多的行(列)展开

$D=\sum$某行元素×自己的代余子

1 定理(异乘变零) 某行元素与另一行元素的代余式乘积之和$=0$

1.3 按行展开

$$\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&0&8&9\\2&5&5&4\\9&9&9&10\end{vmatrix}$$

用第四行元素与第1行元素的代余式

1.3 按行展开

$$\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&0&8&9\\2&5&5&4\\9&9&9&10\end{vmatrix}$$

A_{11} A_{12} A_{13} A_{14}

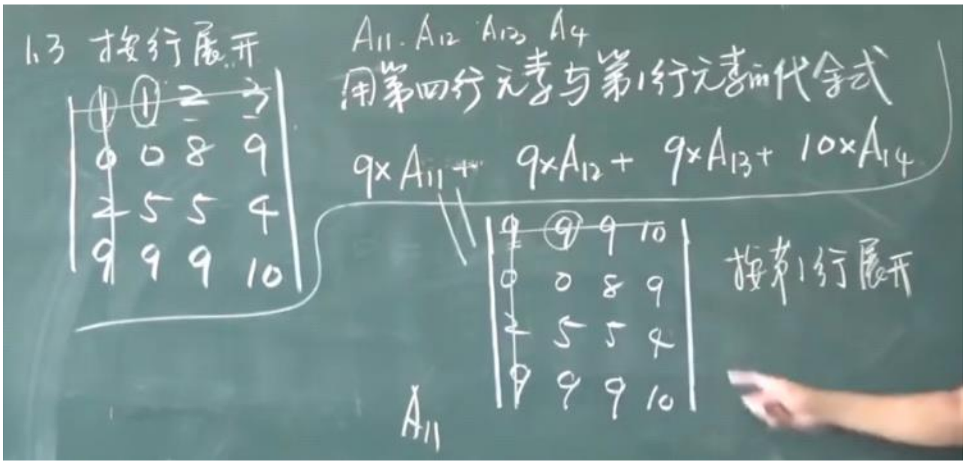
用第四行元素与第1行元素的代余式

$$9\times A_{11}+9\times A_{12}+9\times A_{13}+10\times A_{14}$$

$$\begin{vmatrix}9&9&9&10\\0&0&8&9\\2&5&5&4\\9&9&9&10\end{vmatrix}$$

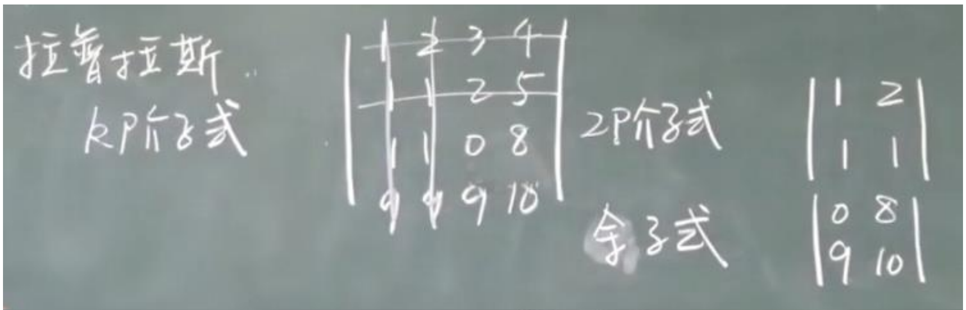
按第1行展开

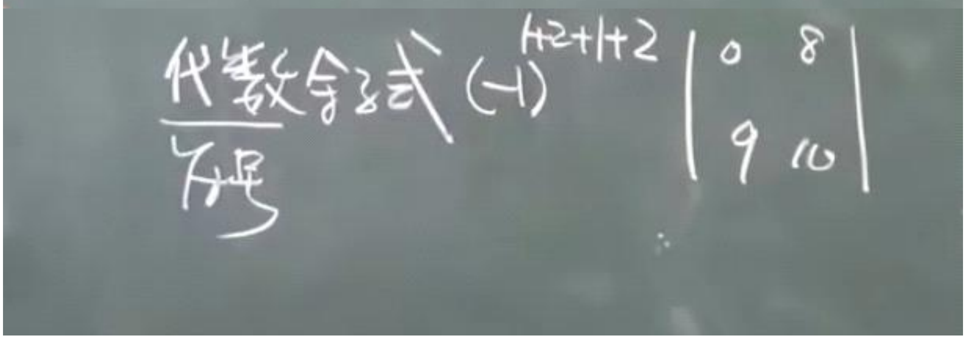
A_{11}



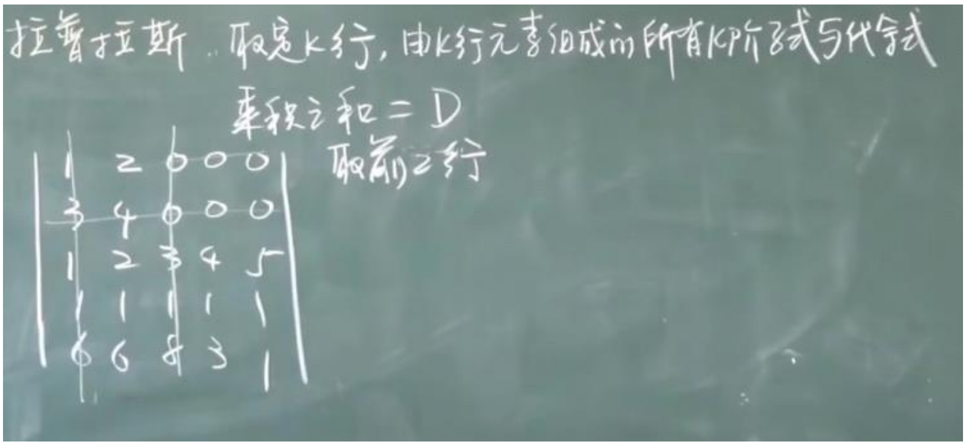
拉普拉斯定理

K阶子式



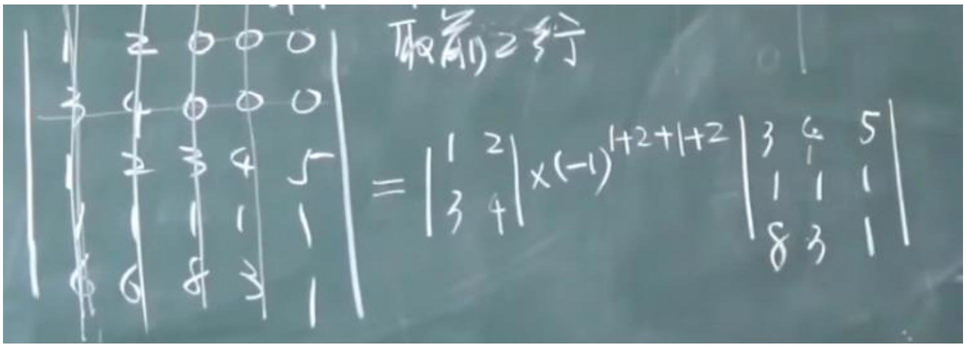


取的是第1行、第2行、第1列、第2列



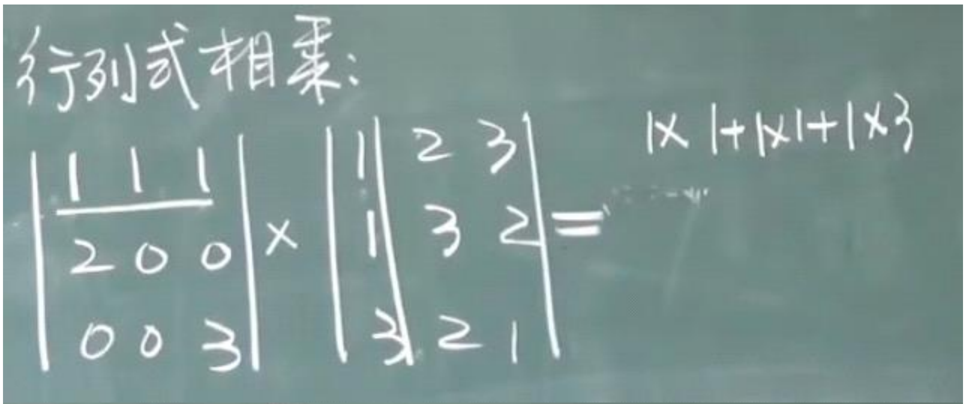
取前两行，也要取两列，列的可能有C_5^2种可能。假定取第1列和第3列

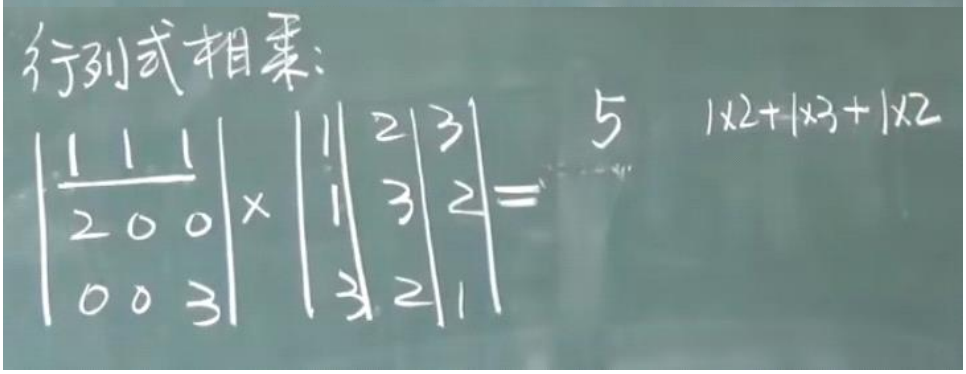
只有取前两列不会得到0，所以只算前两列就可以了，特殊情况用拉普拉斯定理简单。



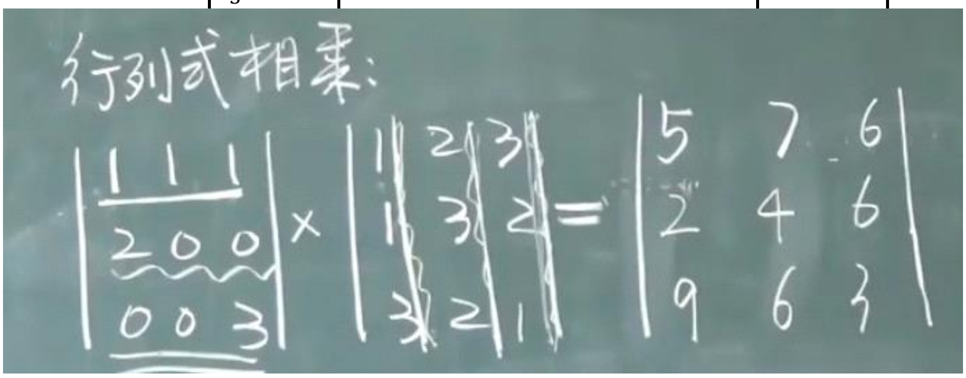
行列式相乘（只适用于同阶行列式）

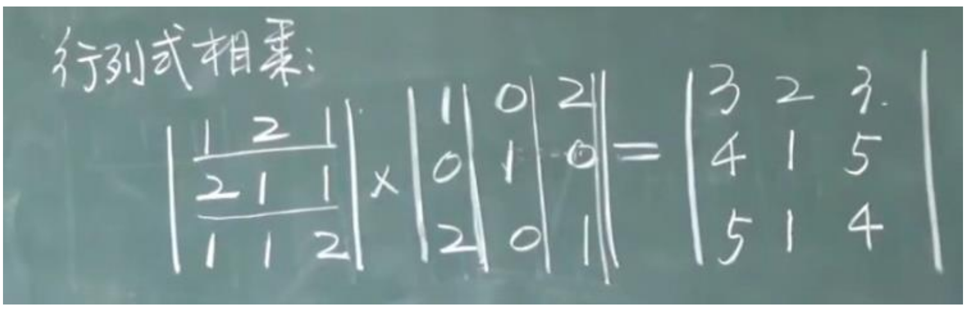
元素对应先相乘再相加





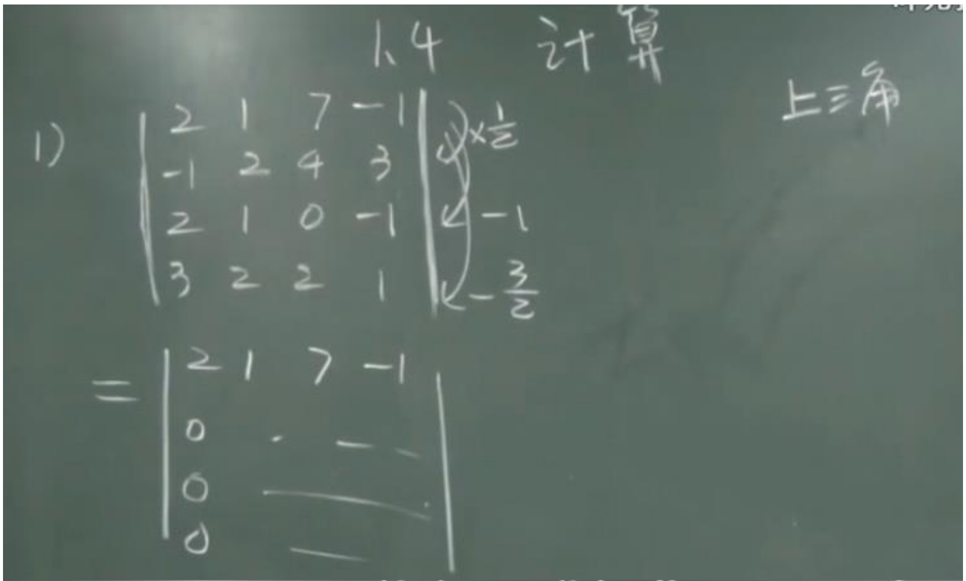
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad > \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = C_1 \begin{vmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

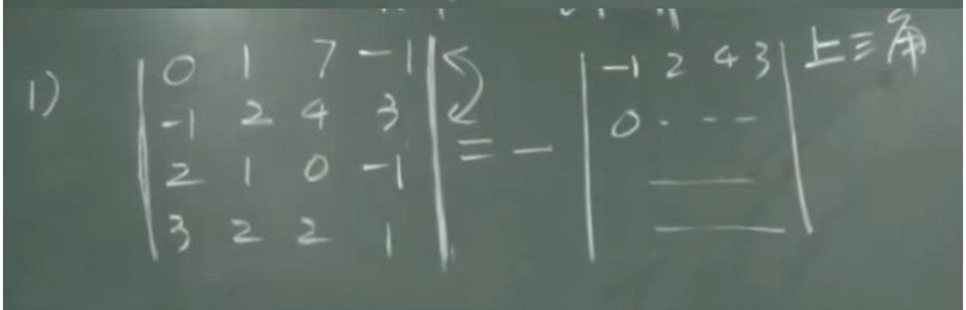


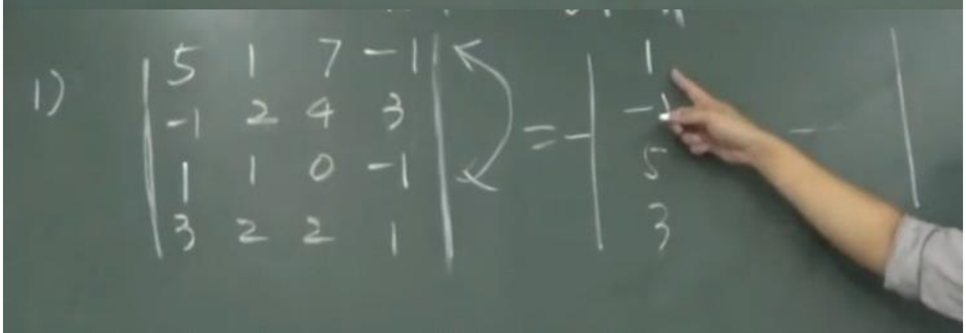


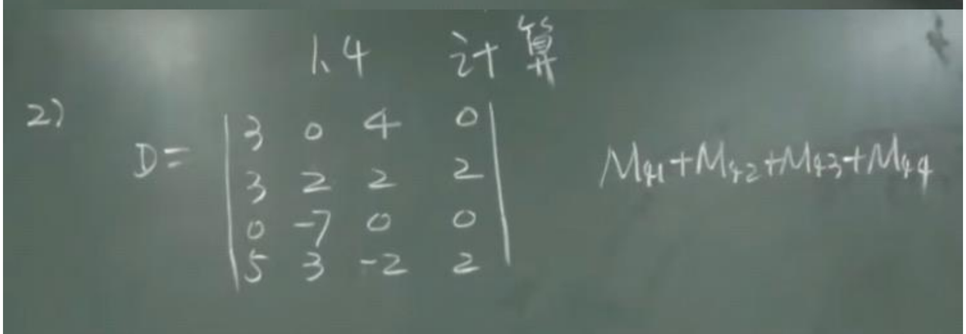
行列式的计算（一）

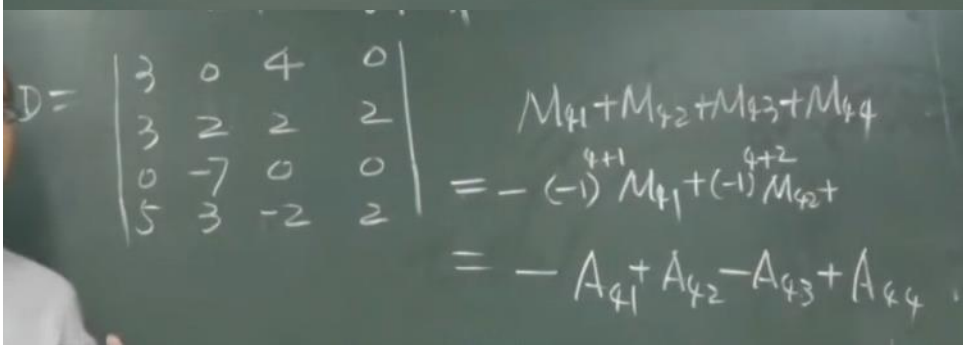
2024年1月28日 19:49

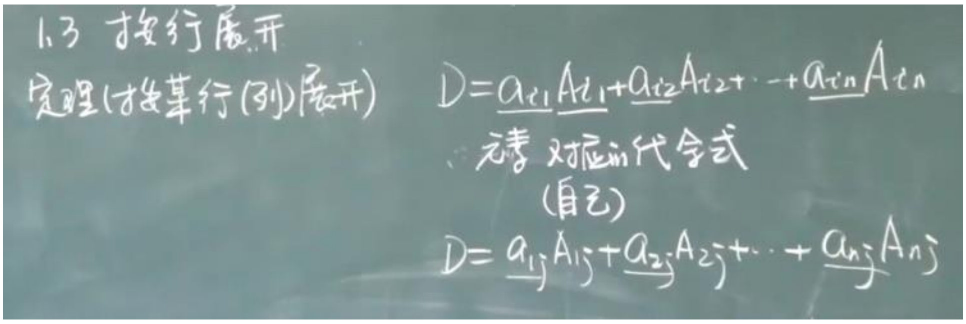




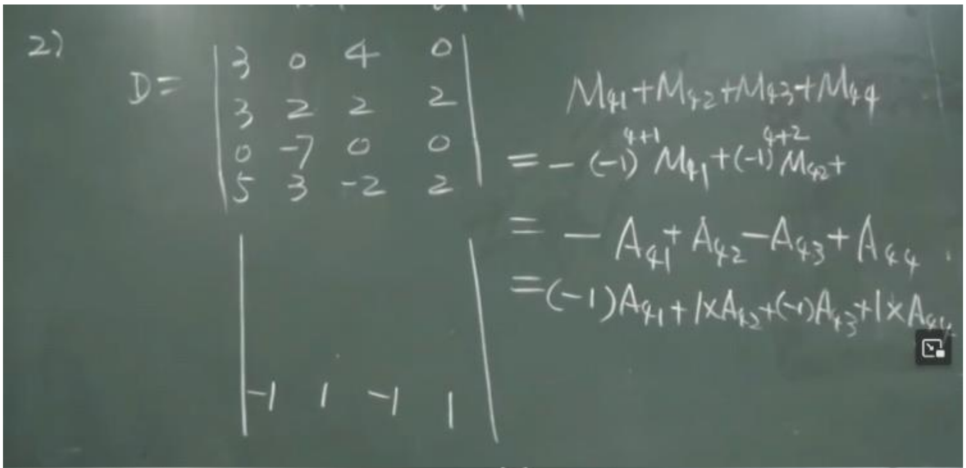


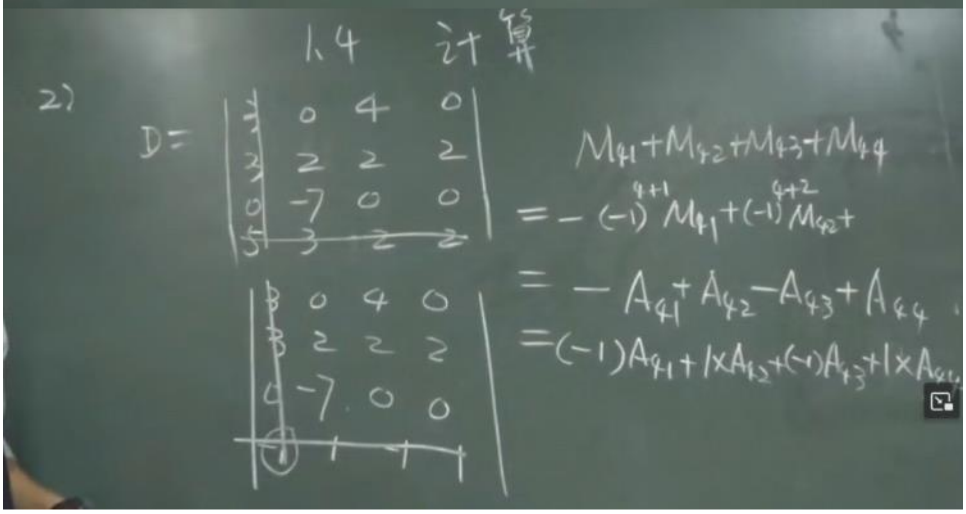




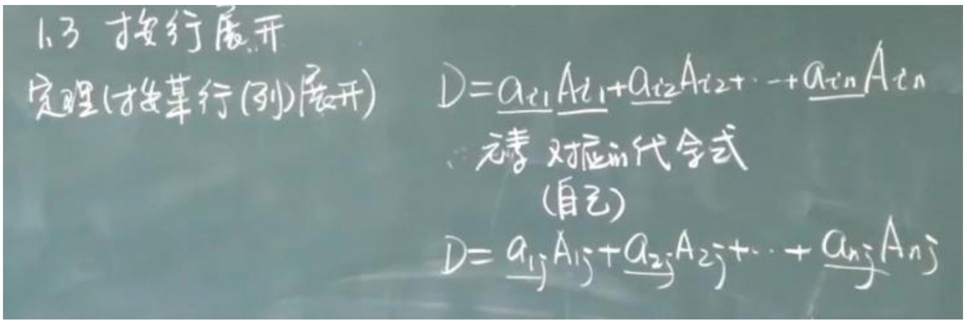


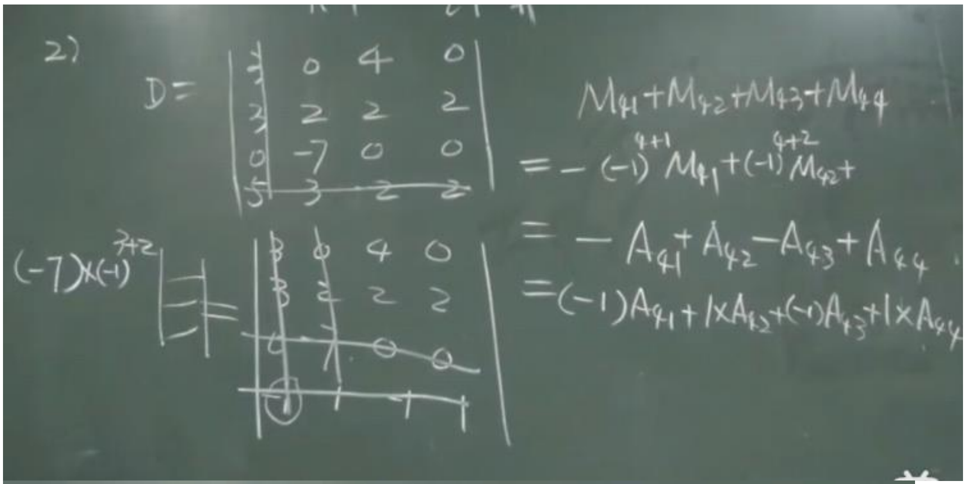
按行展开 行列式的值=某一行元素×对应的代数余子式

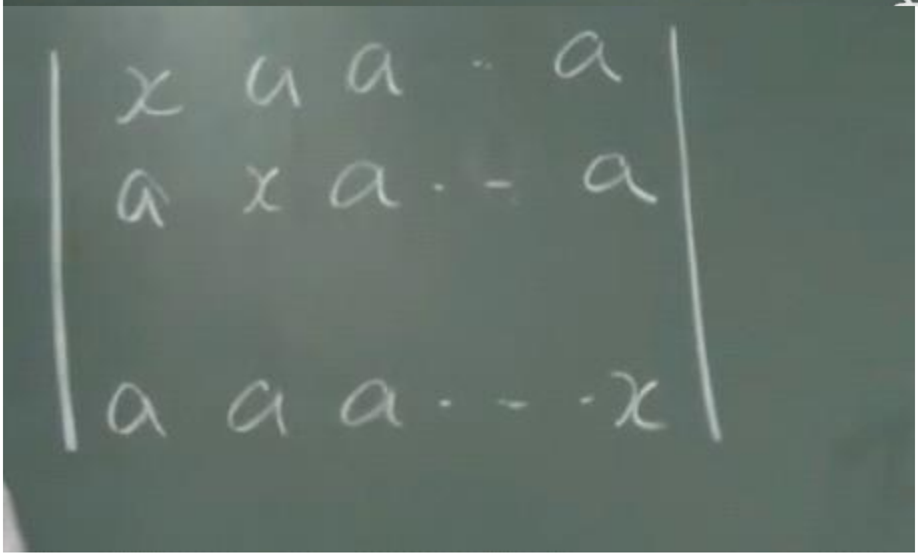




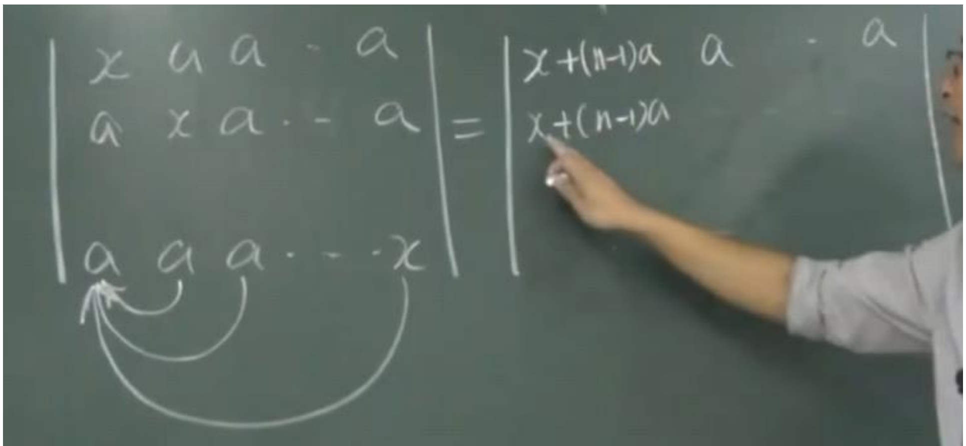
第3行3个0，按第3行展开

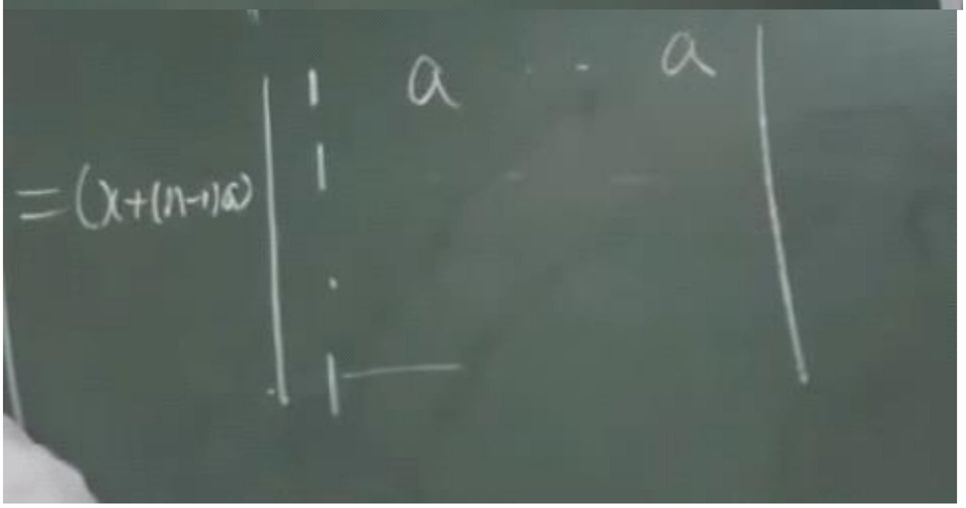




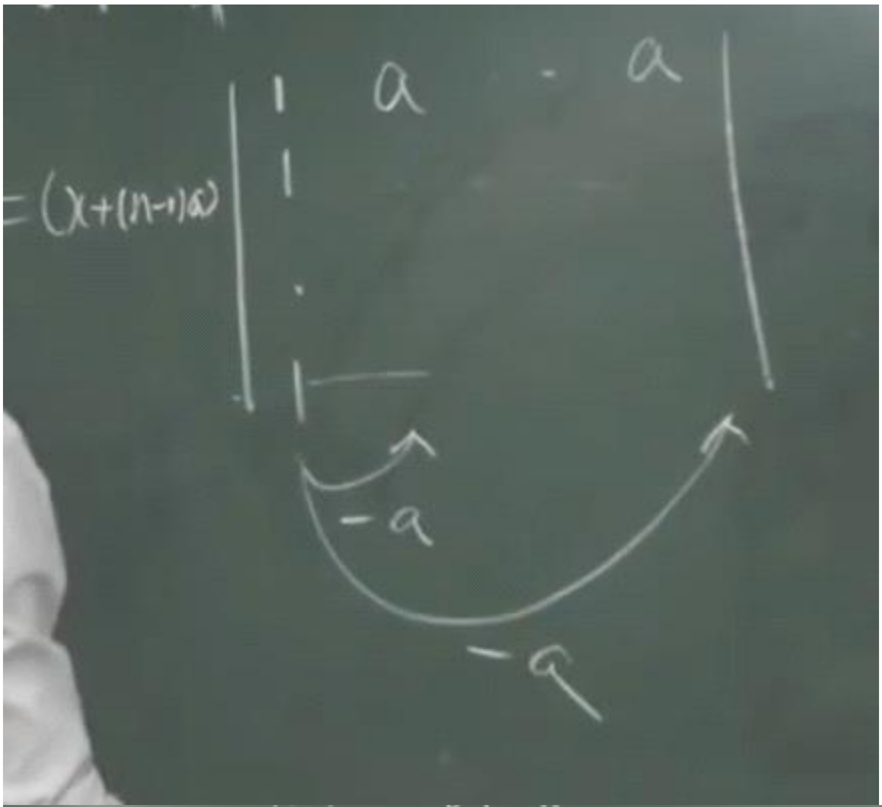


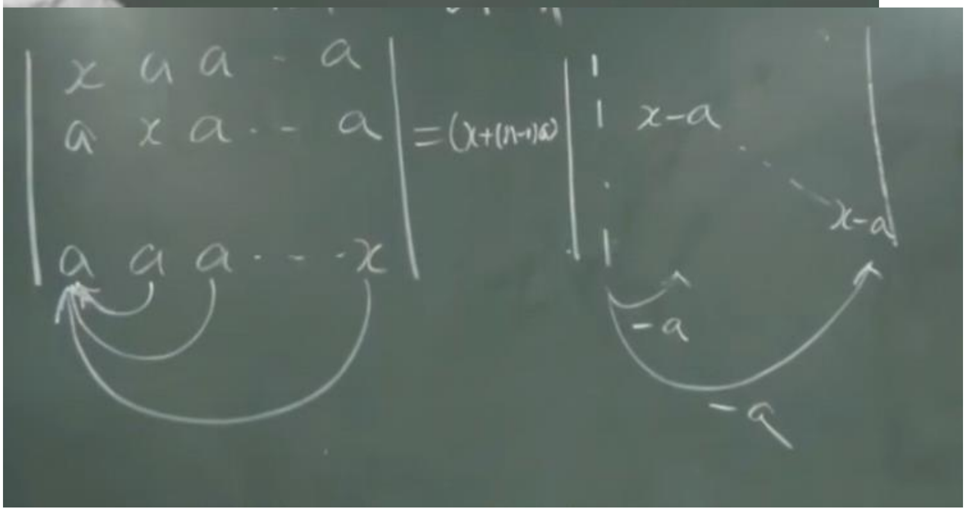
根据性质7每一列乘以1往上一列加，行列式不变，以此类推从最后一列加到第一列

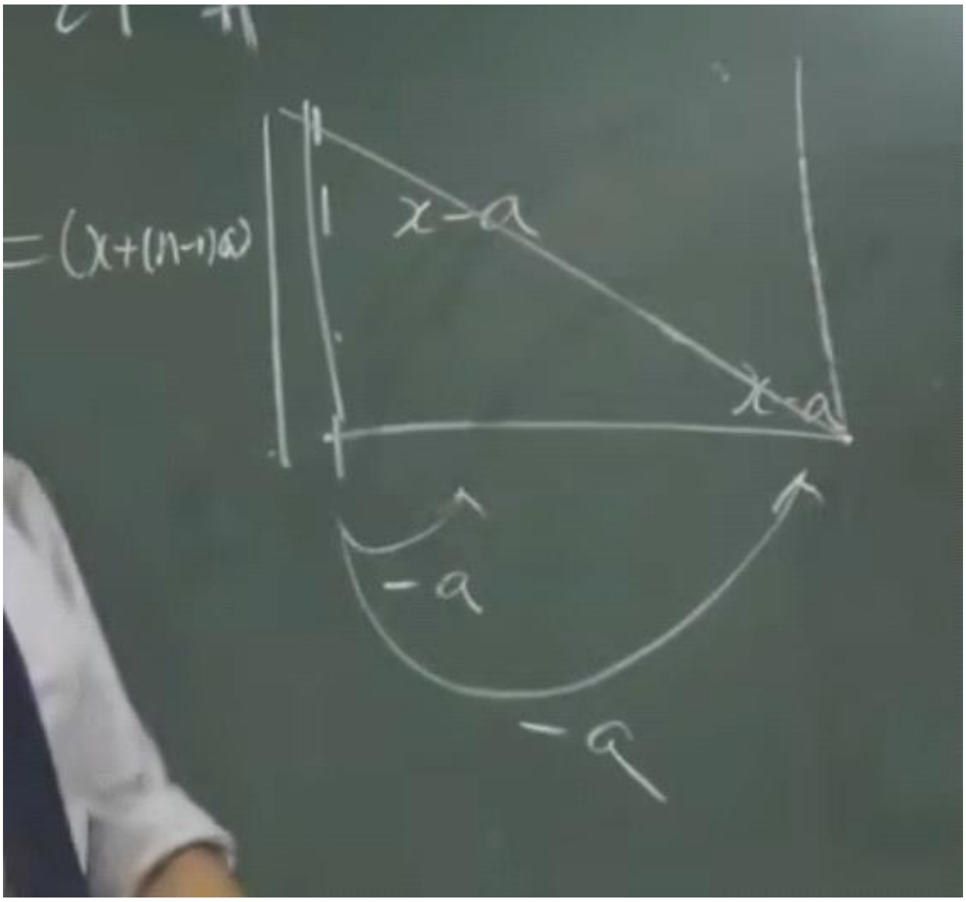




公因子提出来



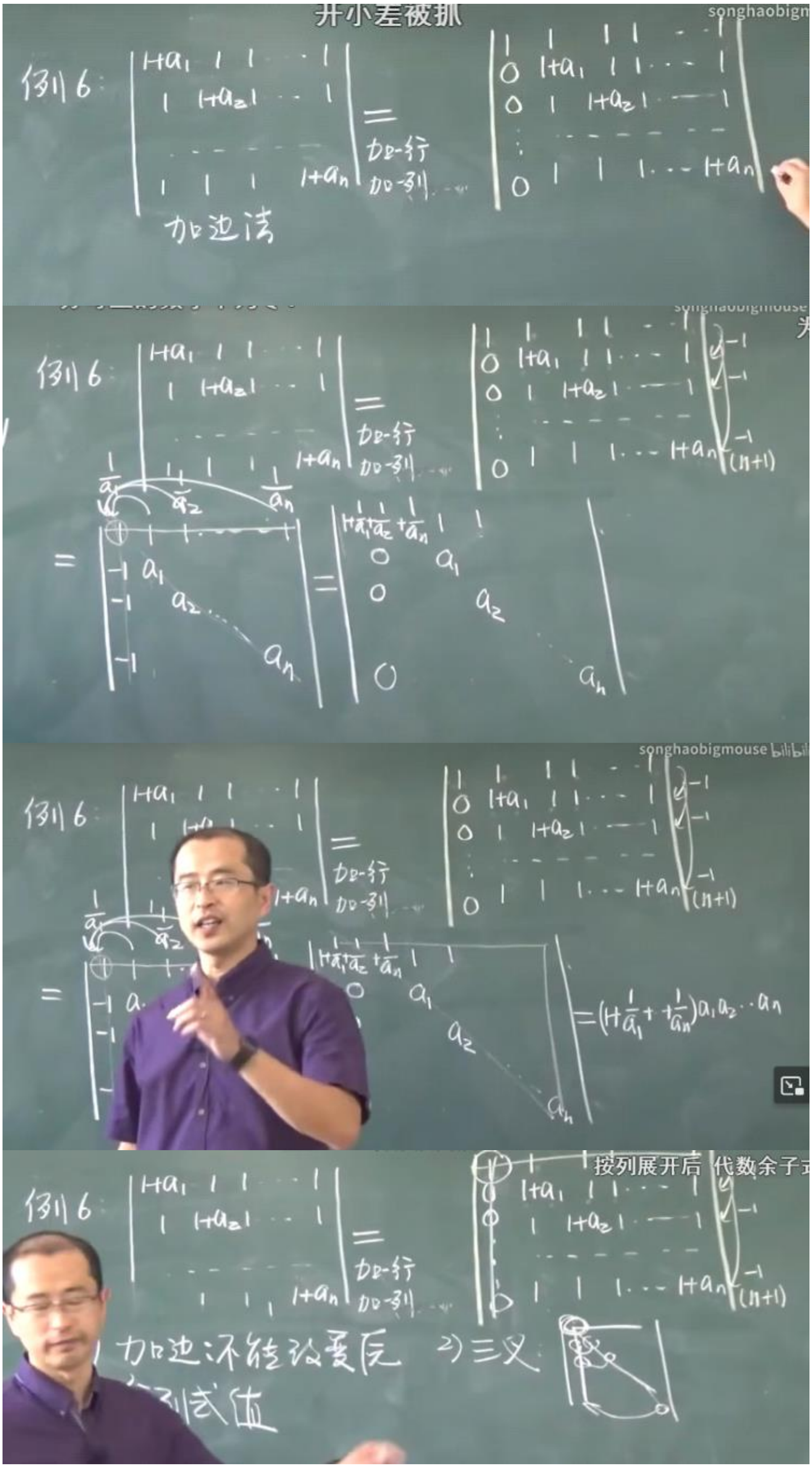




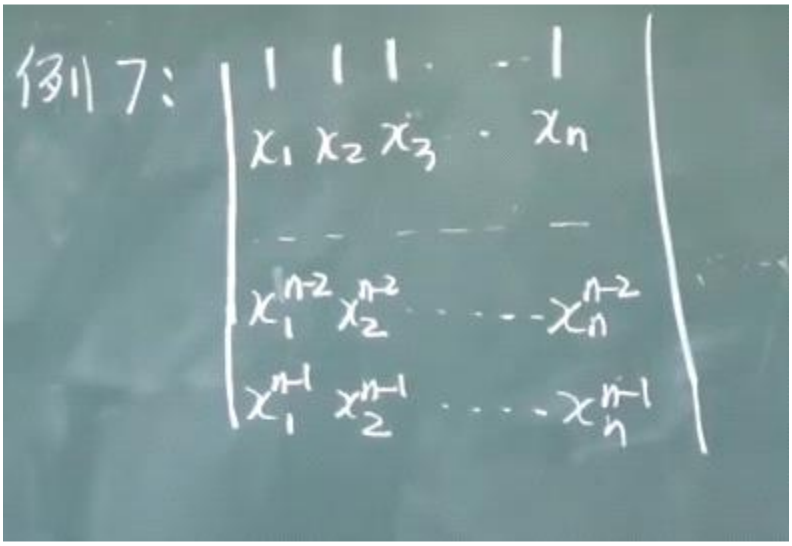
下三角就变成主对角线元素相乘

行列式的计算（二）

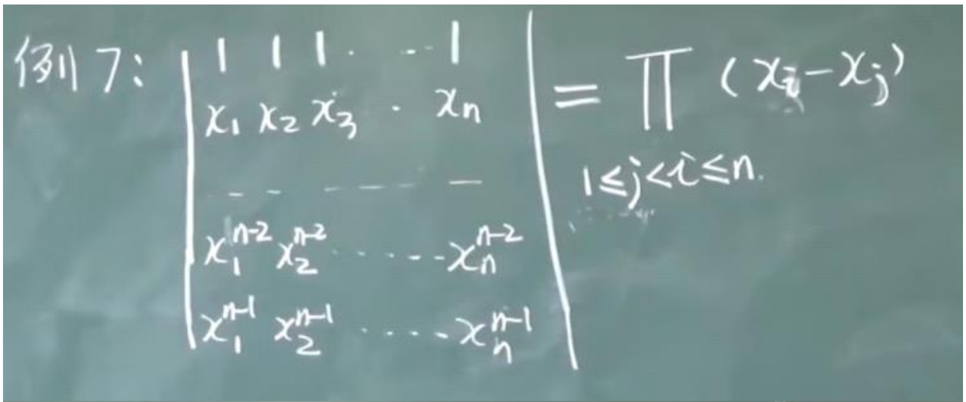
2024年1月28日　20:27

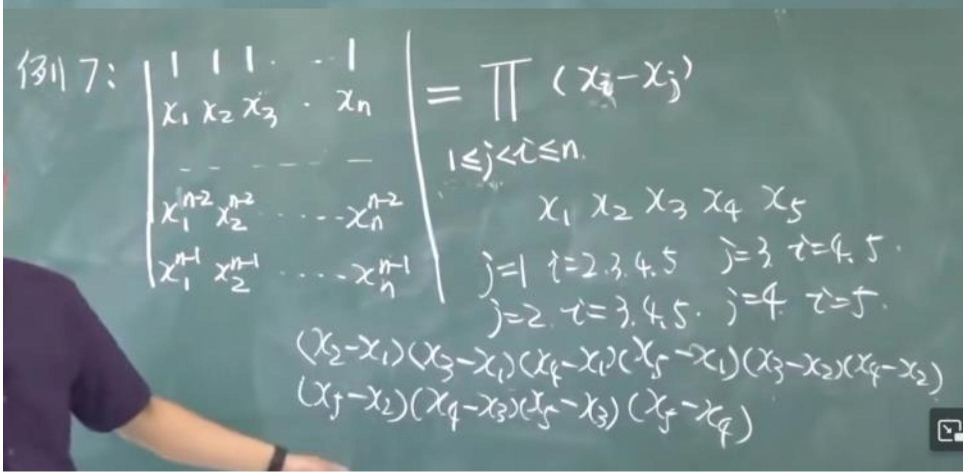


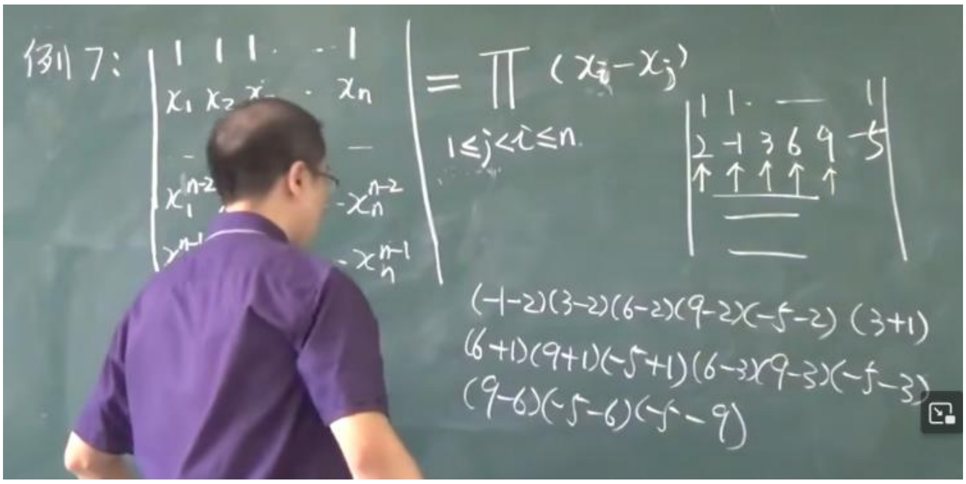
例7范德蒙德行列式


例7:

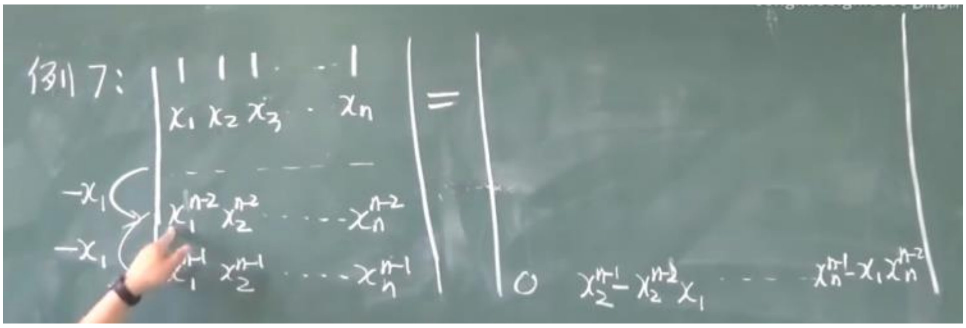
连乘符号

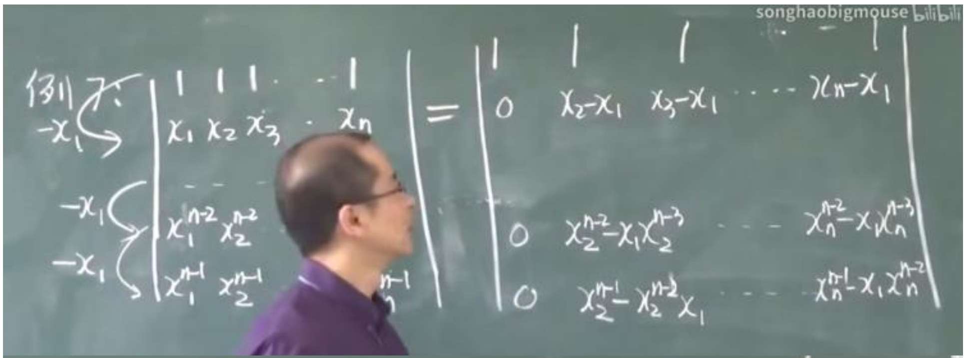

例7:
$= \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$

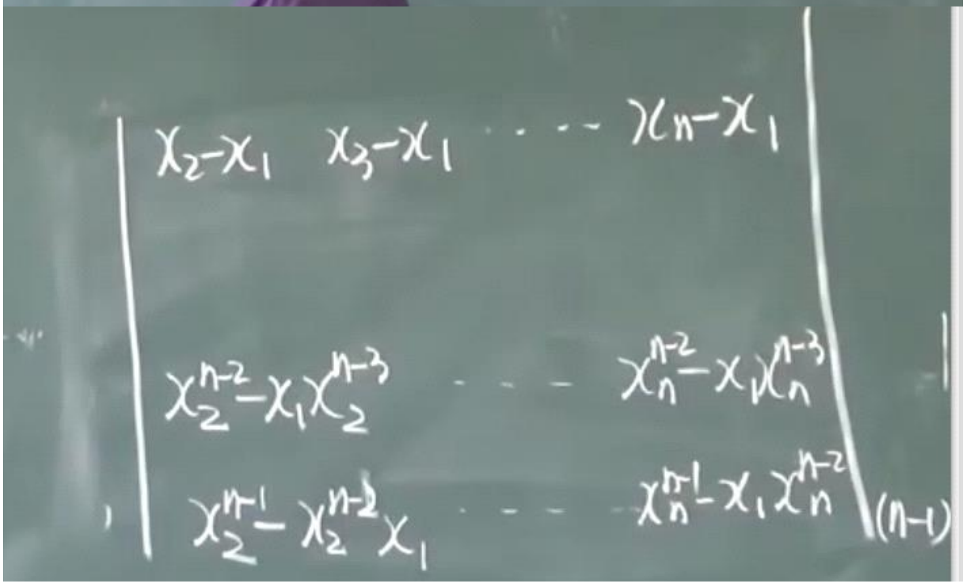

例7:
$= \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$
$j=1\ i=2,3,4,5\quad j=3\ i=4,5$
$j=2\ i=3,4,5\quad j=4\ i=5$
$(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_5-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)$
$(x_5-x_2)(x_4-x_3)(x_5-x_3)(x_5-x_4)$

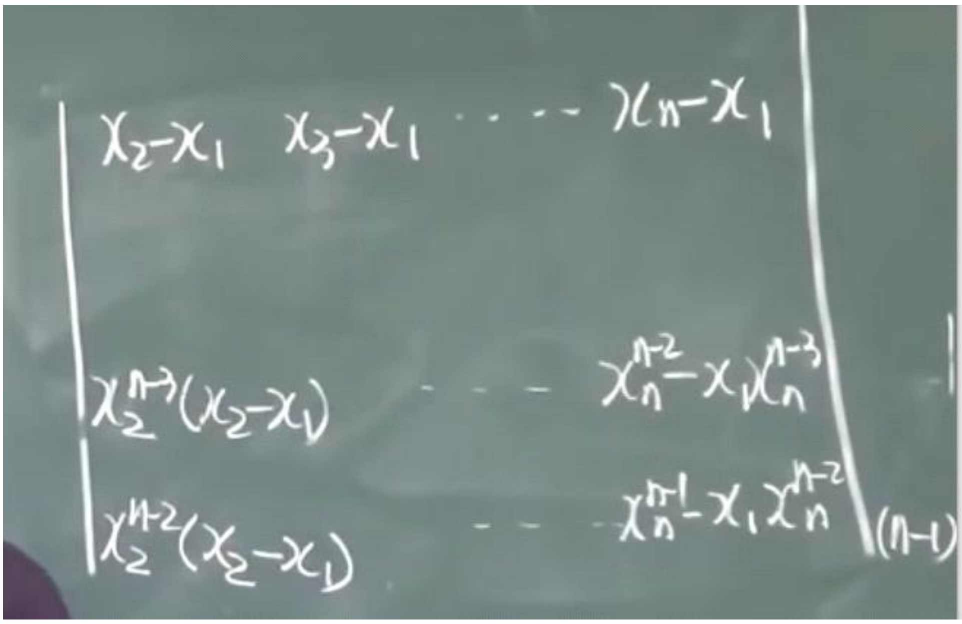

例7:
$= \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$
$2\ -1\ 3\ 6\ 9\ -5$
$(-1-2)(3-2)(6-2)(9-2)(-5-2)(3+1)$
$(6+1)(9+1)(-5+1)(6-3)(9-3)(-5-3)$
$(9-6)(-5-6)(-5-9)$

证明过程

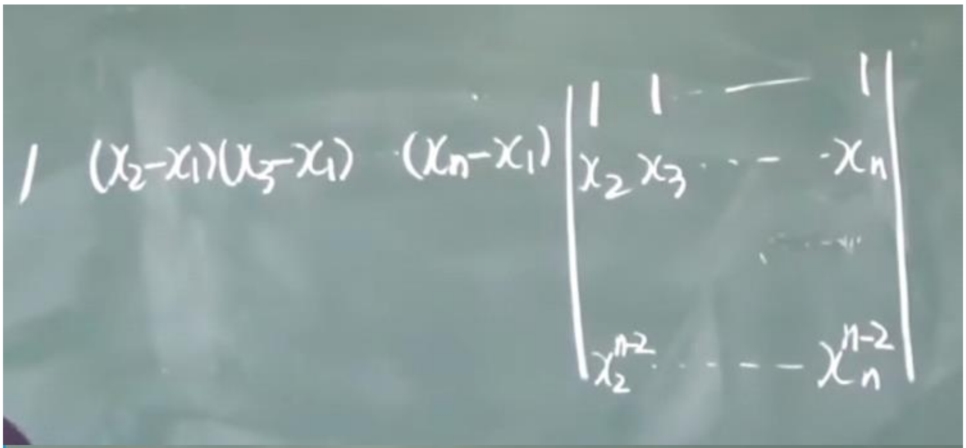


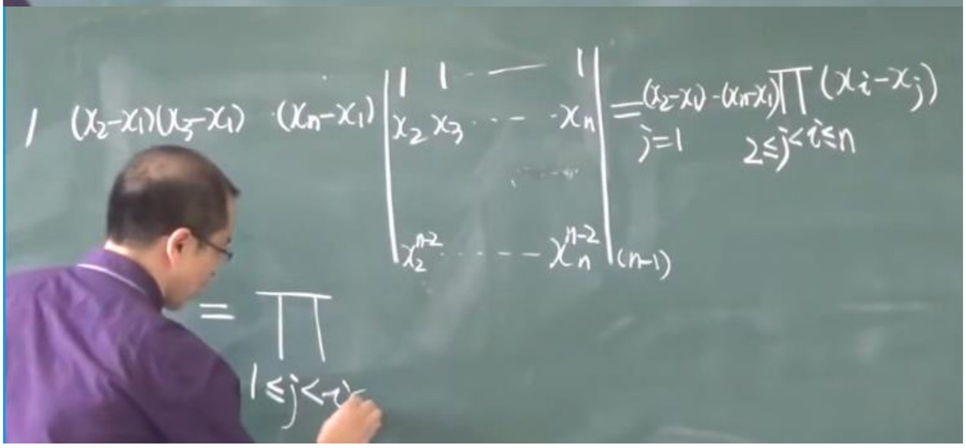




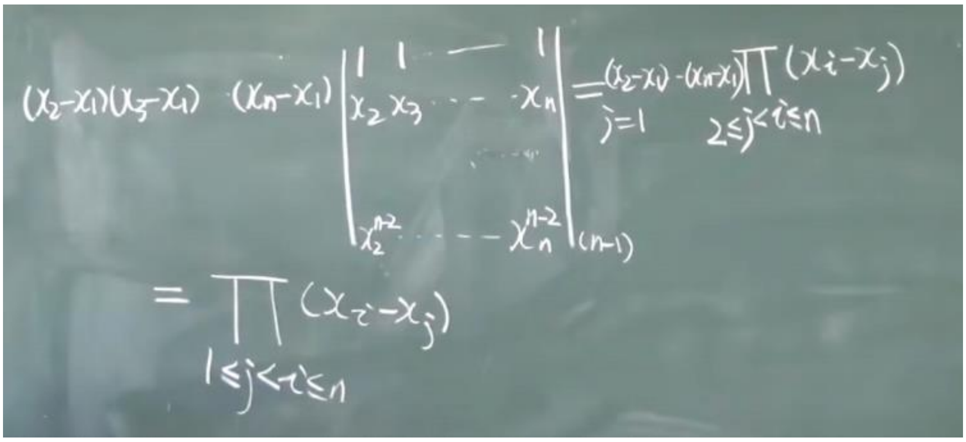


提公因子出来

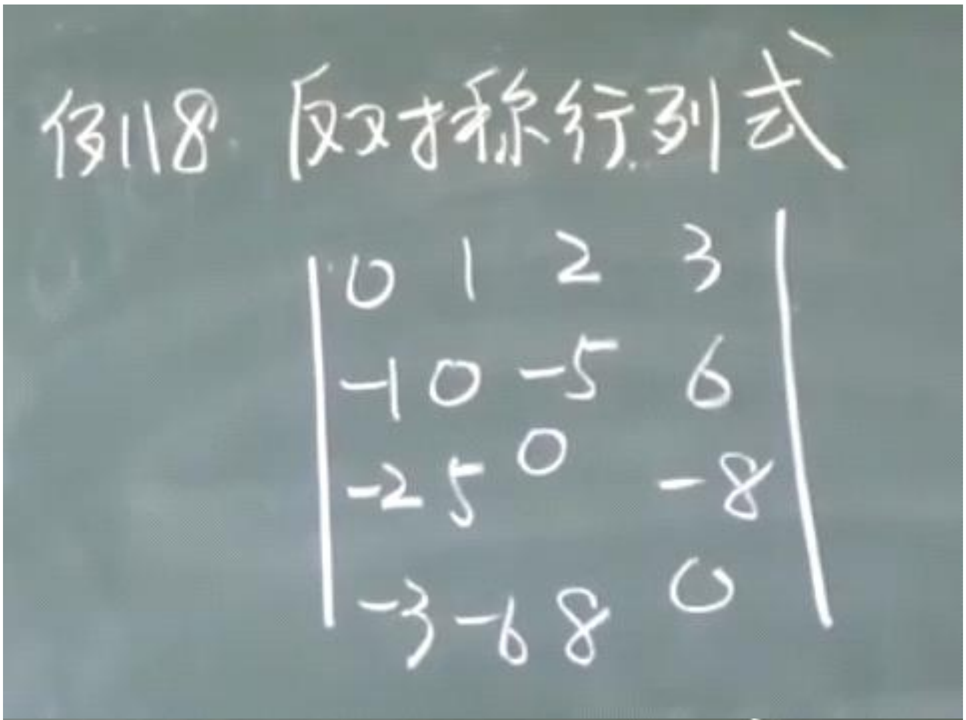


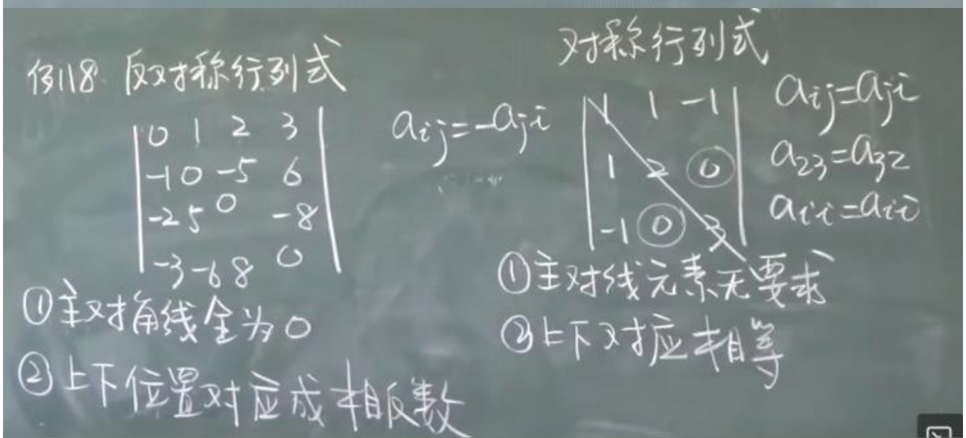


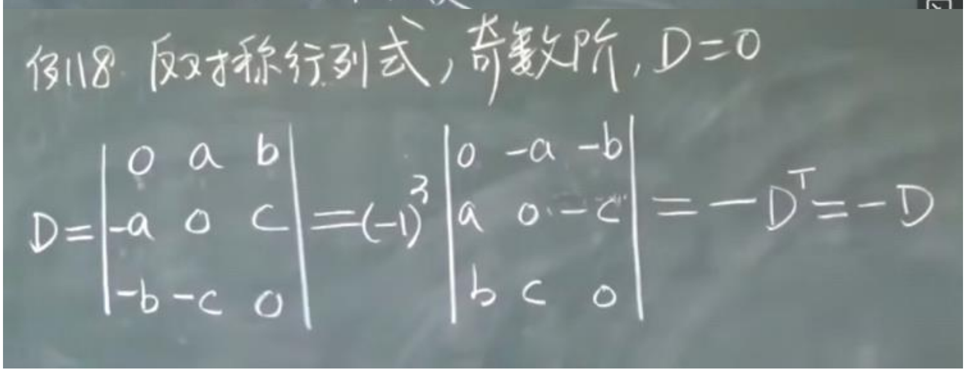
这里是数学归纳法，先假设n阶范德蒙德行列式成立，然后推出n-1阶也成立，再由n=2时成立，递推可证



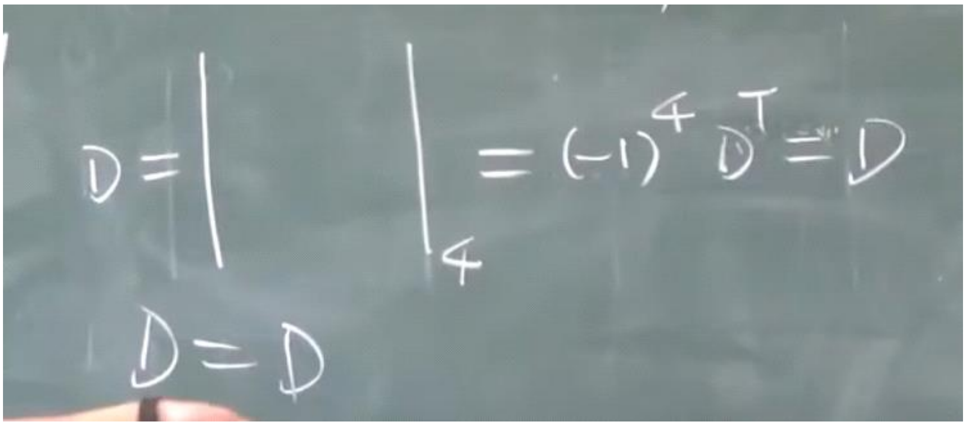
例8反对称行列式


例118 反对称行列式
0 1 2 3
-1 0 -5 6
-2 5 0 -8
-3 -6 8 0


例118 反对称行列式
0 1 2 3
-1 0 -5 6
-2 5 0 -8
-3 -6 8 0
$a_{ij}=-a_{ji}$
①主对角线全为0
②上下位置对应成相反数
对称行列式
1 1 -1
1 2 0
-1 0 3
$a_{ij}=a_{ji}$
$a_{23}=a_{32}$
$a_{ii}=a_{ii}$
①主对角线元素无要求
②上下对应相等


例118 反对称行列式，奇数阶，D=0
$D=\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}0&-a&-b\\a&0&-c\\b&c&0\end{vmatrix}=-D^T=-D$

偶数阶的没有任何意义

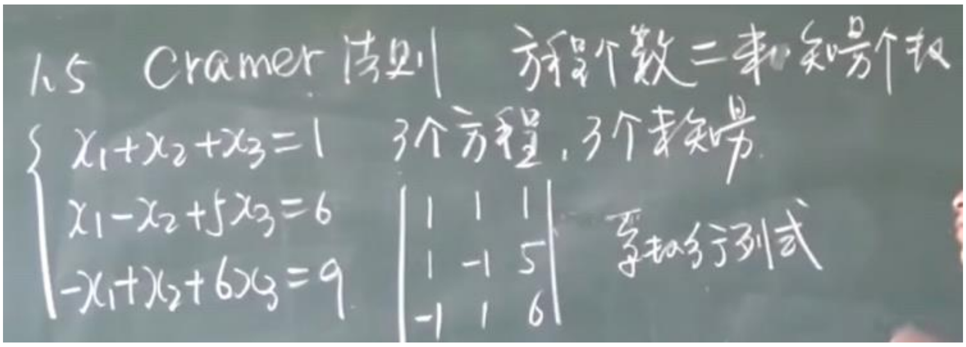

$D=\begin{vmatrix}\ \end{vmatrix}_4=(-1)^4D^T=D$
$D=D$

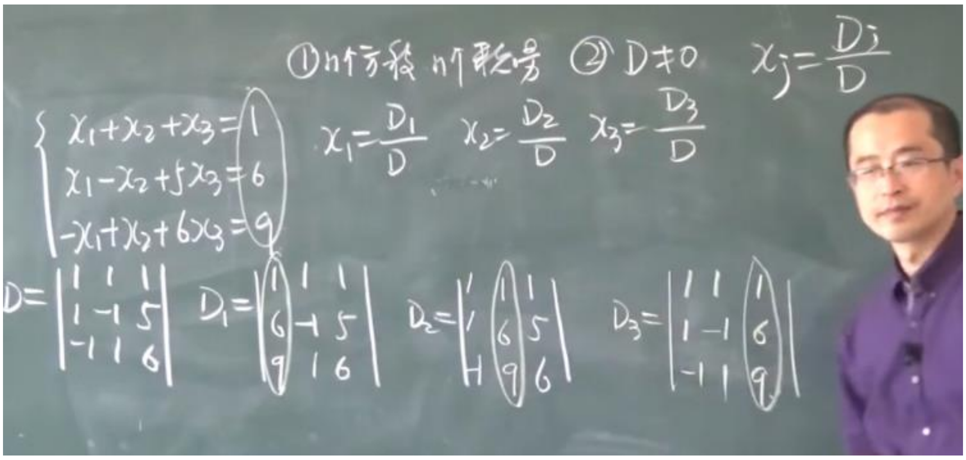
克莱姆法则

2024年1月29日 15:51

只适用于方程个数等于未知量个数的时候

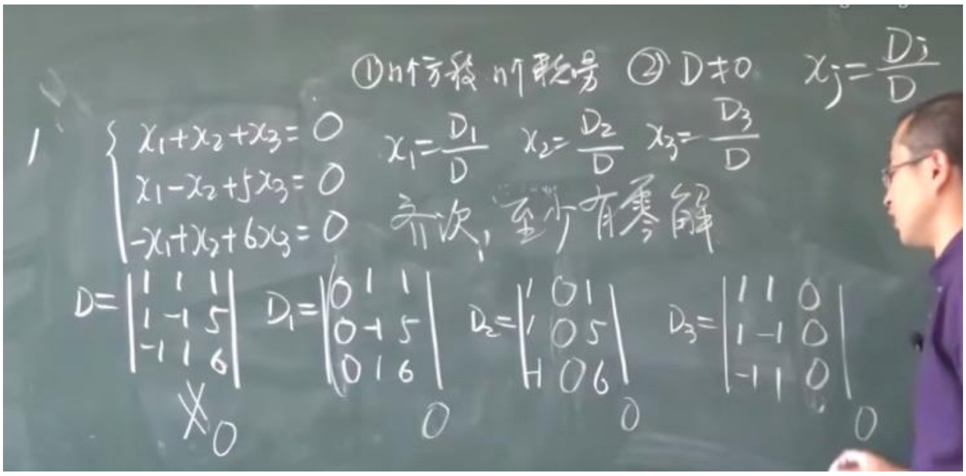
系数行列式



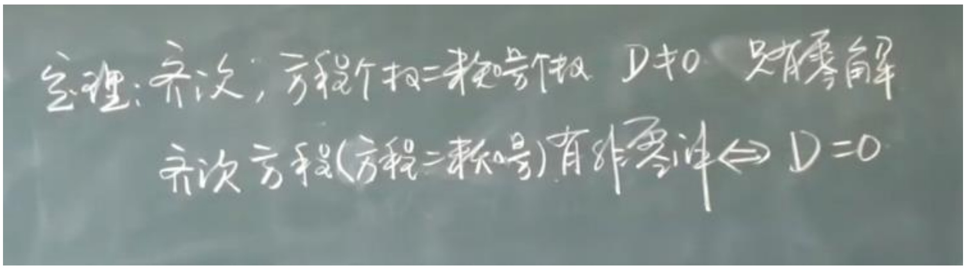


计算量很大，一般不用

齐次线性方程组（右边都等于0的方程组）D1、D2、D3都等于0，则X1、X2、X3都等于0

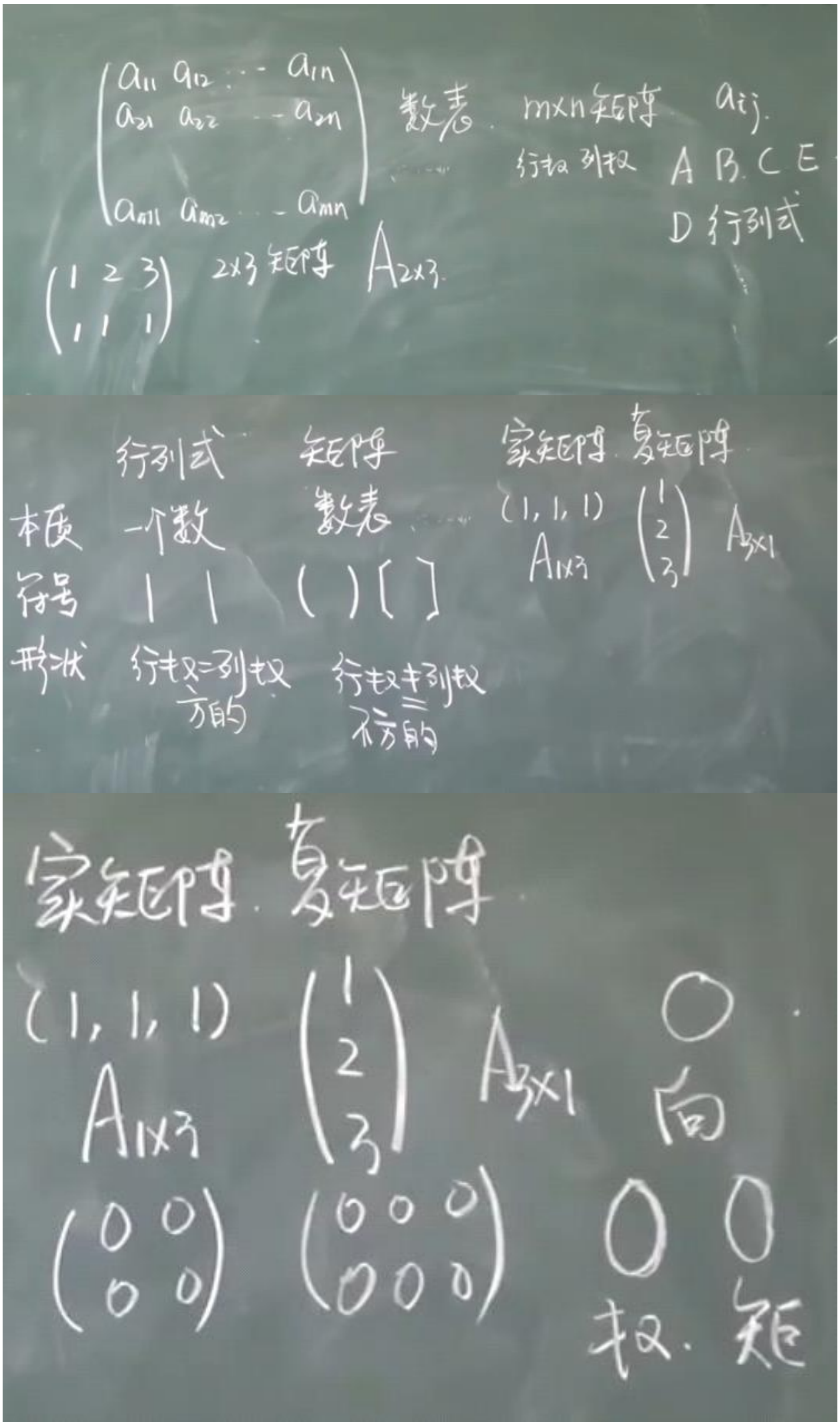


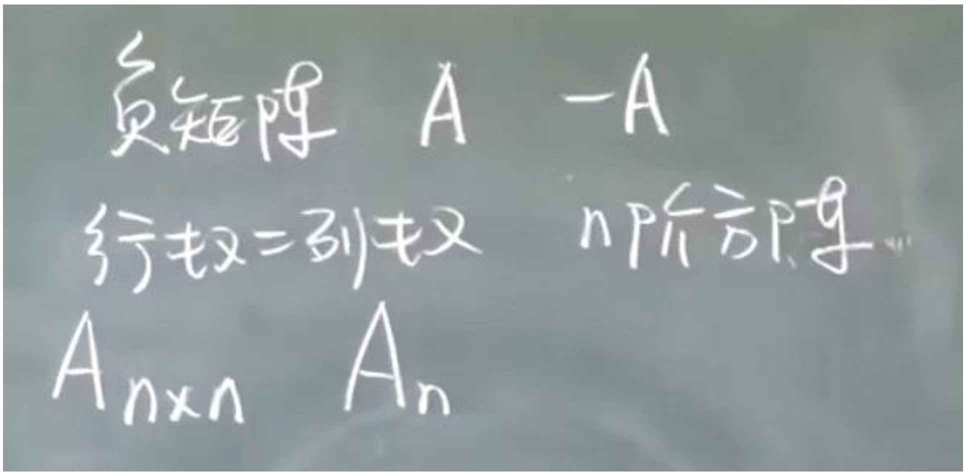
（行列式若有一行或一列为0，则行列式为0）



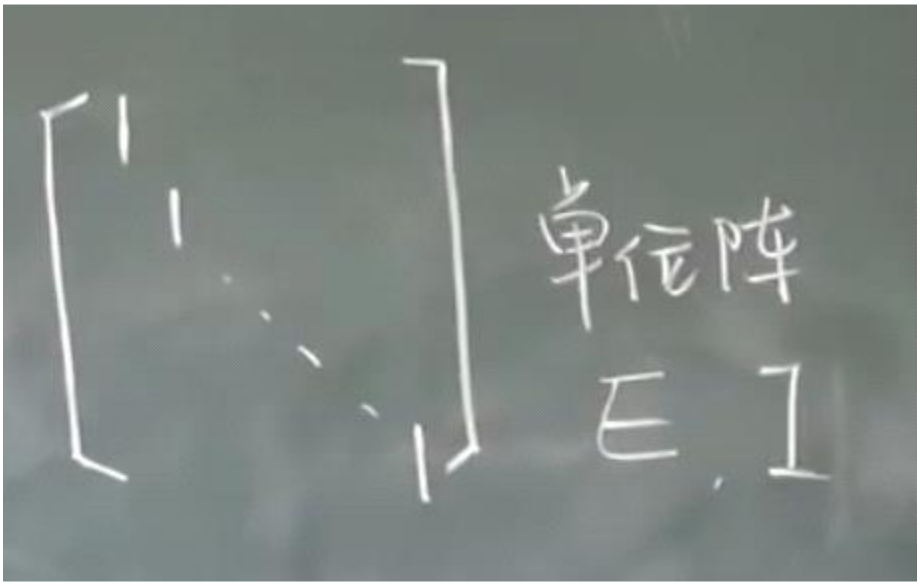
矩阵概念

2024年1月30日 8:51

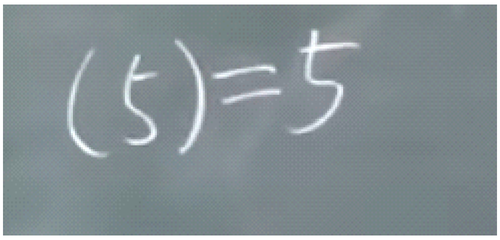




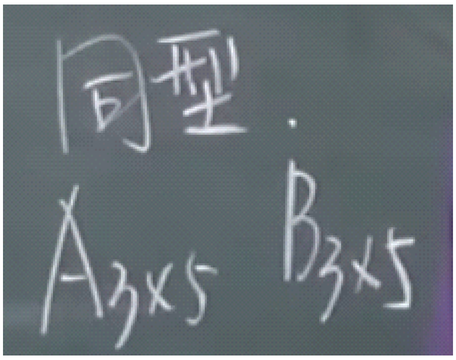
单位阵E，I



只有对角线是1，空着的地方是0，称为单位阵



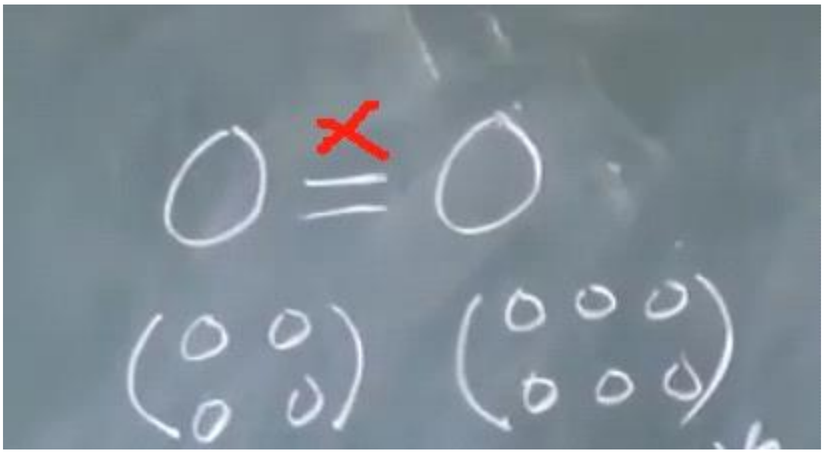
同型矩阵，比如都是3行5列



同型矩阵，如果元素相等，则两个矩阵相等

矩阵相等的前提是同型矩阵

两个零矩阵不一定相等

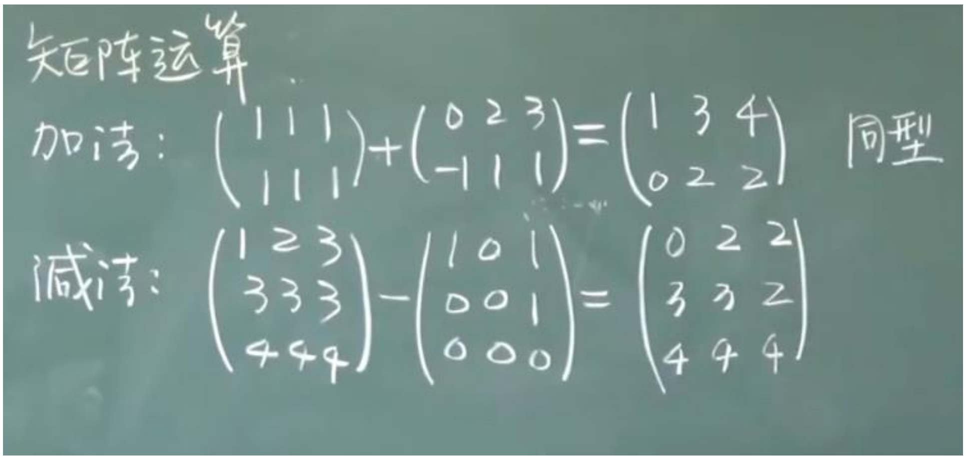


方阵才说主次对角线

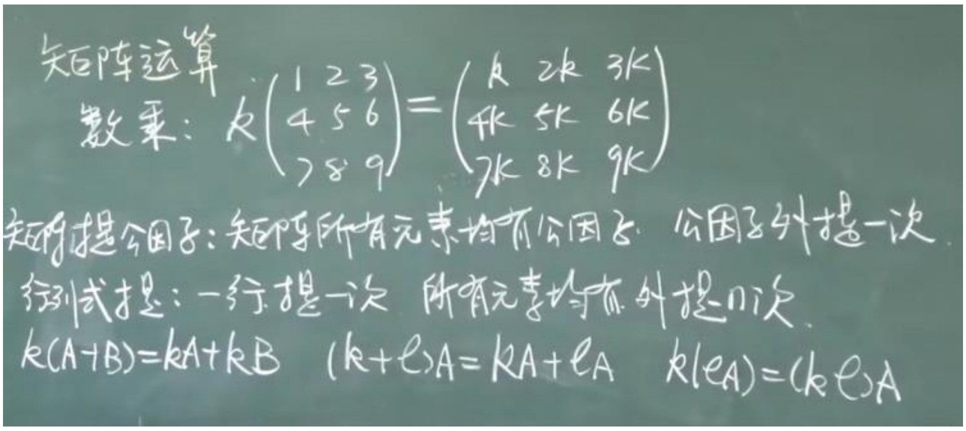
矩阵运算（一）

2024年1月30日　9:13

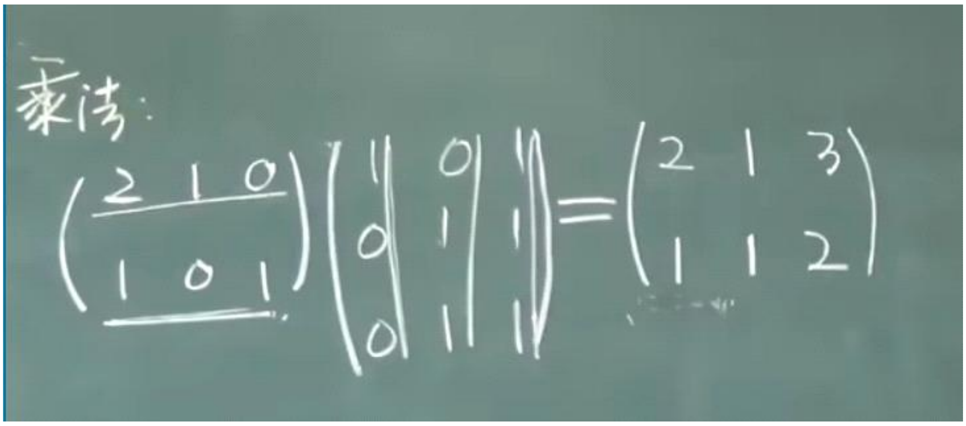
矩阵相加相减，必须是同型矩阵



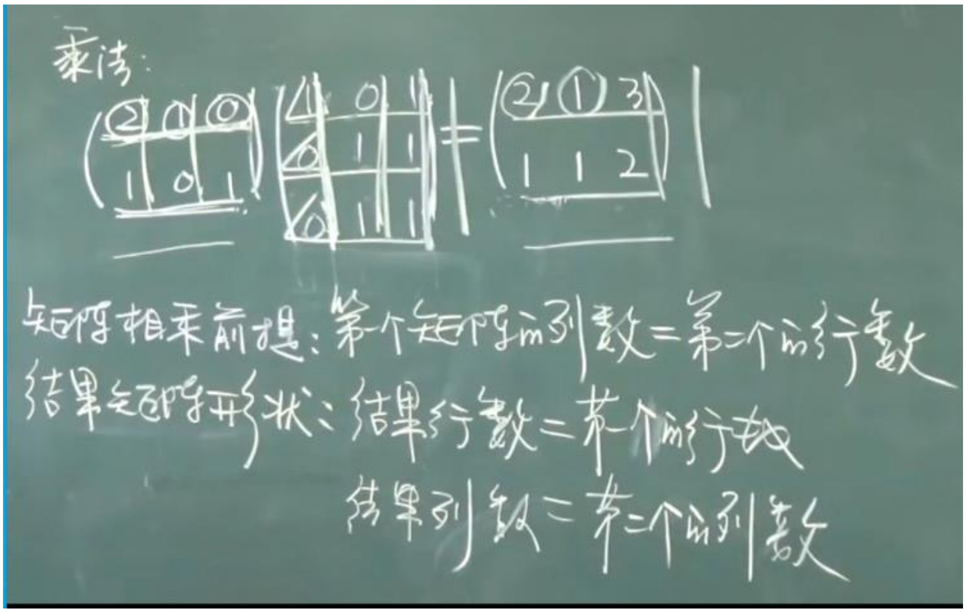
矩阵数乘，提公因子和行列式比较



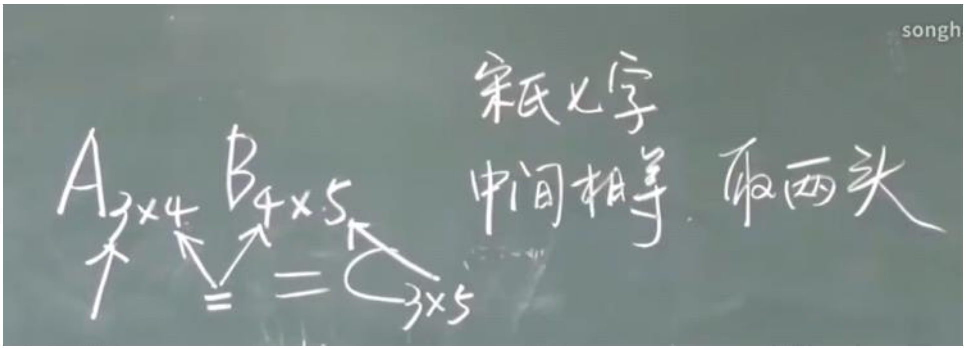
矩阵乘法

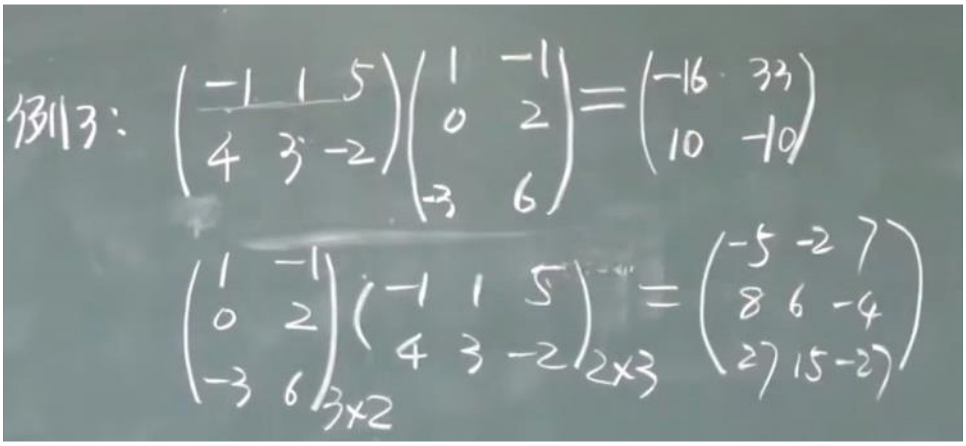


和行列式相乘一样



宋氏七字 中间相等取两头





设A为：

| a11 a12 a13 |
| a21 a22 a23 |

设B为：

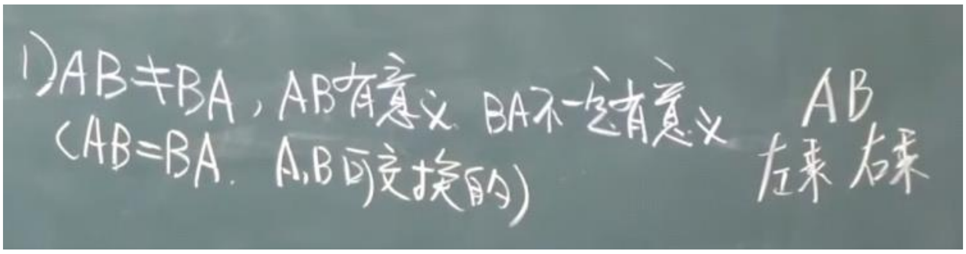
| b11 b12 |
| b21 b22 |
| b31 b32 |

那么，A与B相乘得到的结果矩阵C是一个2x2矩阵，其元素计算如下：

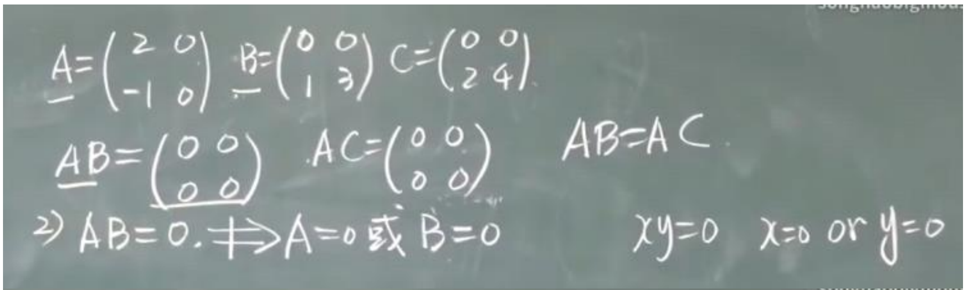
C11 = a11b11 + a12b21 + a13b31
C12 = a11b12 + a12b22 + a13b32

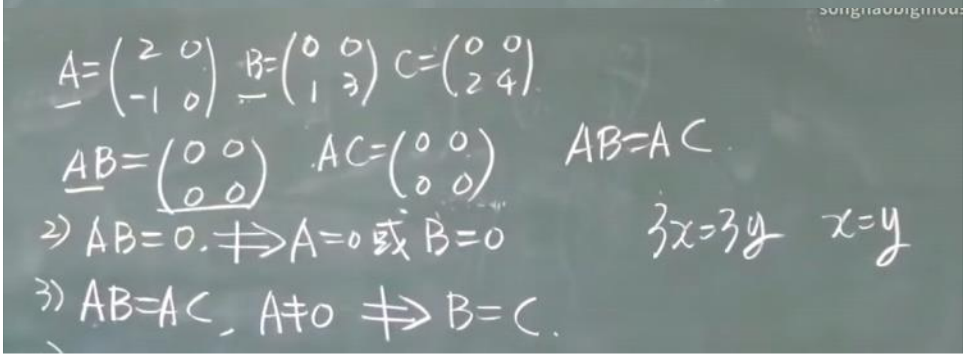
C21 = a21b11 + a22b21 + a23b31
C22 = a21b12 + a22b22 + a23b32

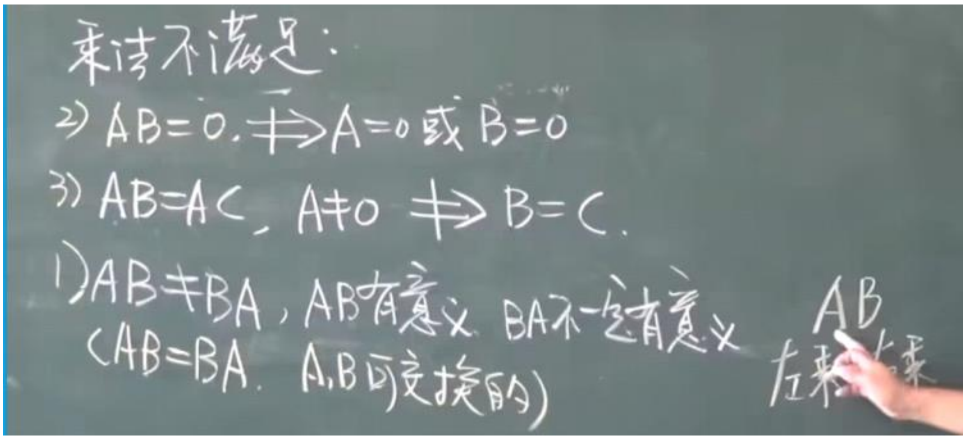
AB不等于BA



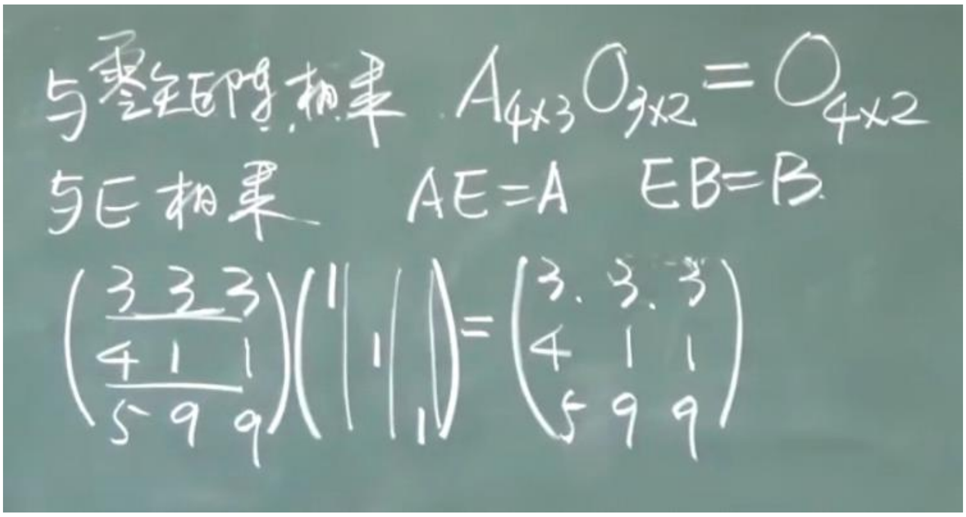
和数字运算不同

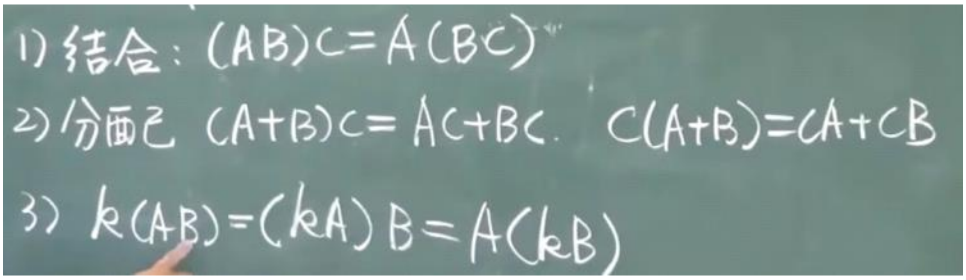




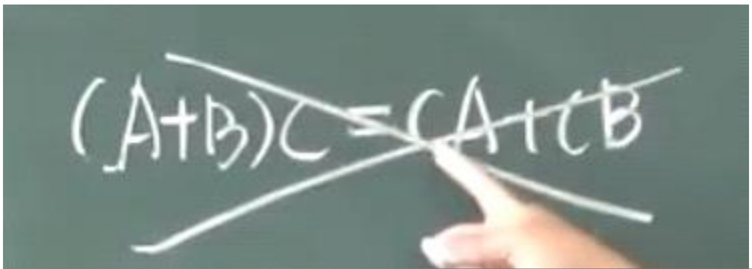


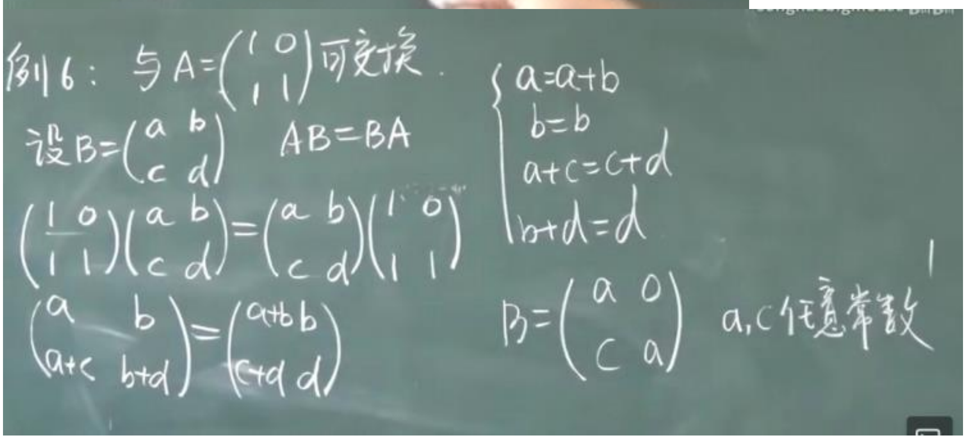
与单位阵相乘，仍等于其本身

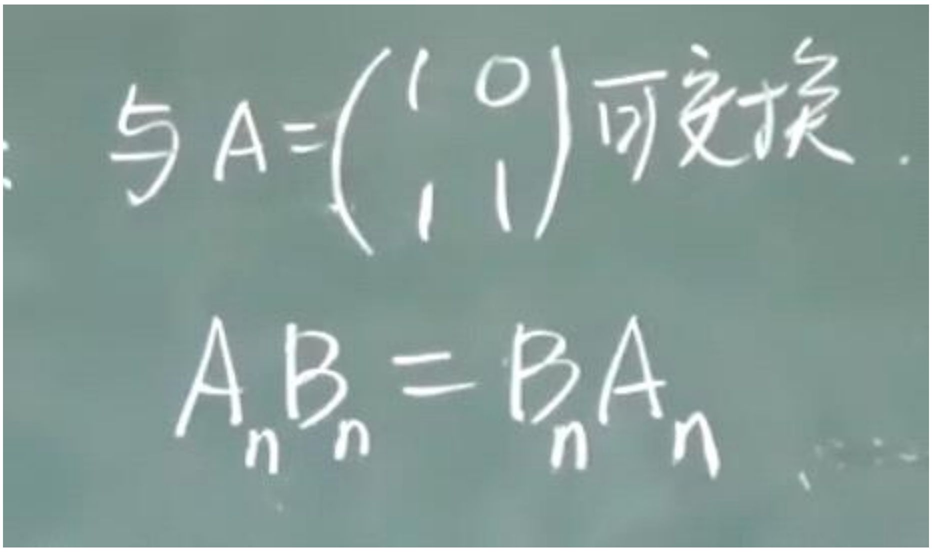




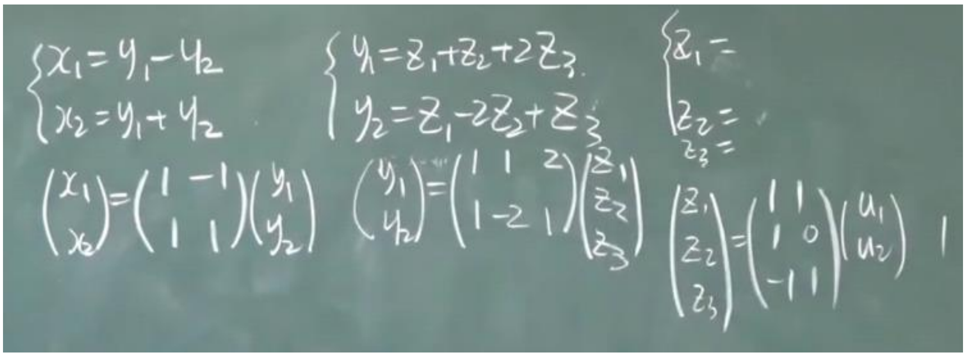
矩阵乘法的左右顺序不变







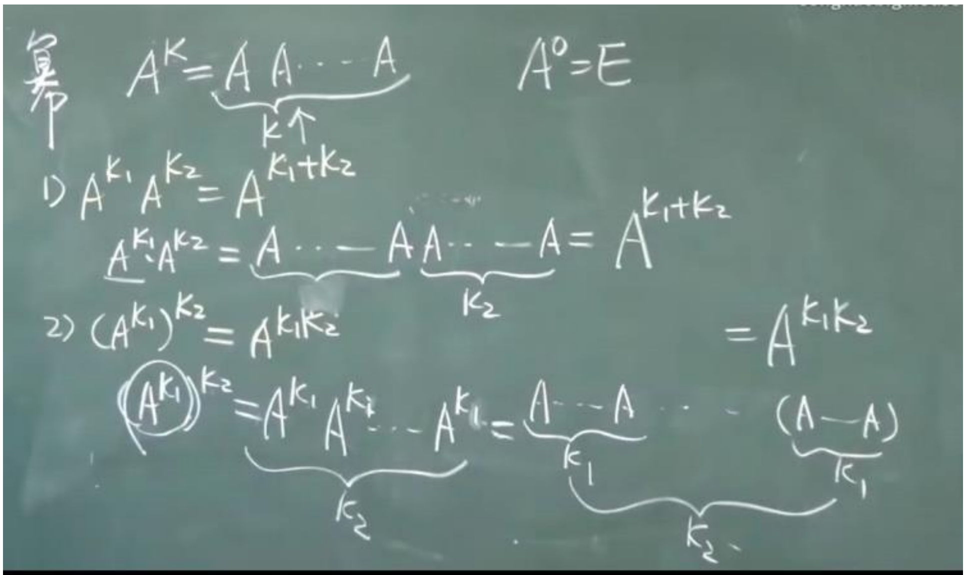
可交换矩阵条件，必须是方阵，同阶矩阵

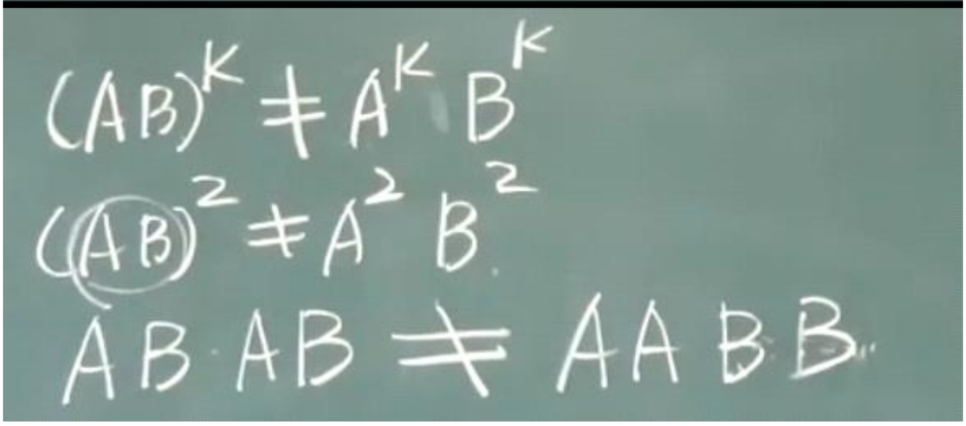


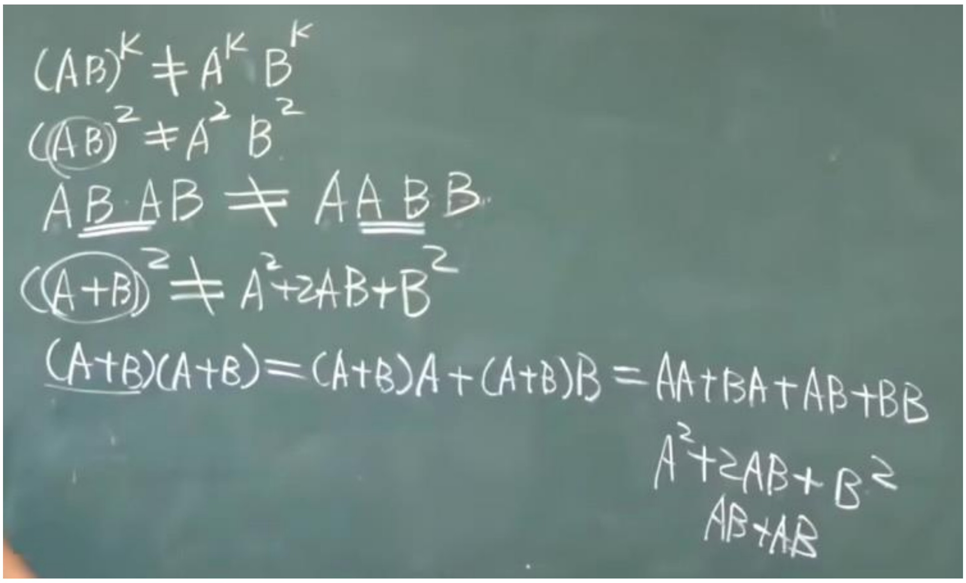
矩阵运算（二）

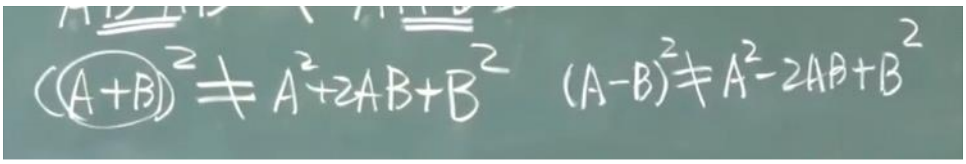
2024年1月30日　　10:41

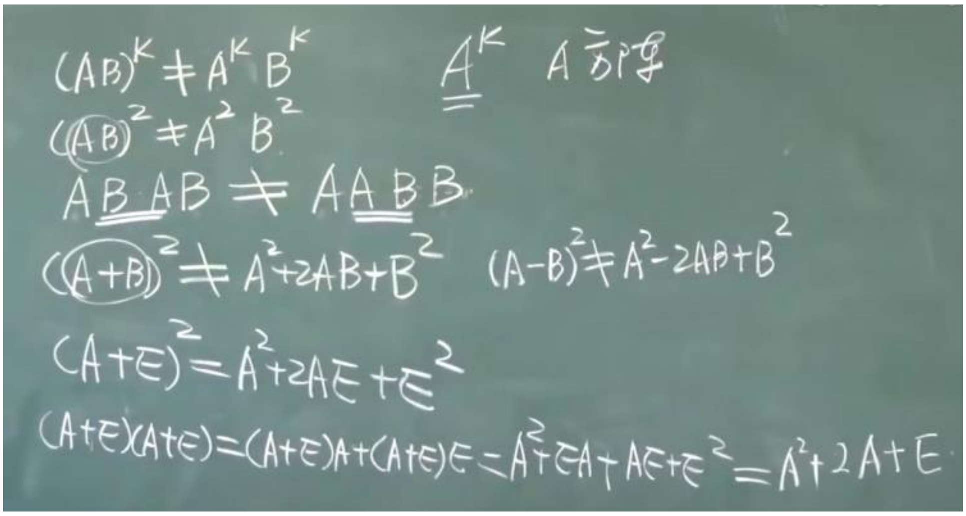
矩阵幂运算 求幂运算必须是方阵 才能连续相乘

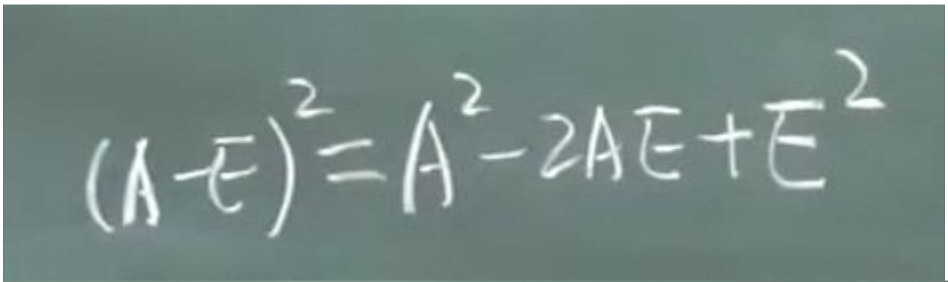


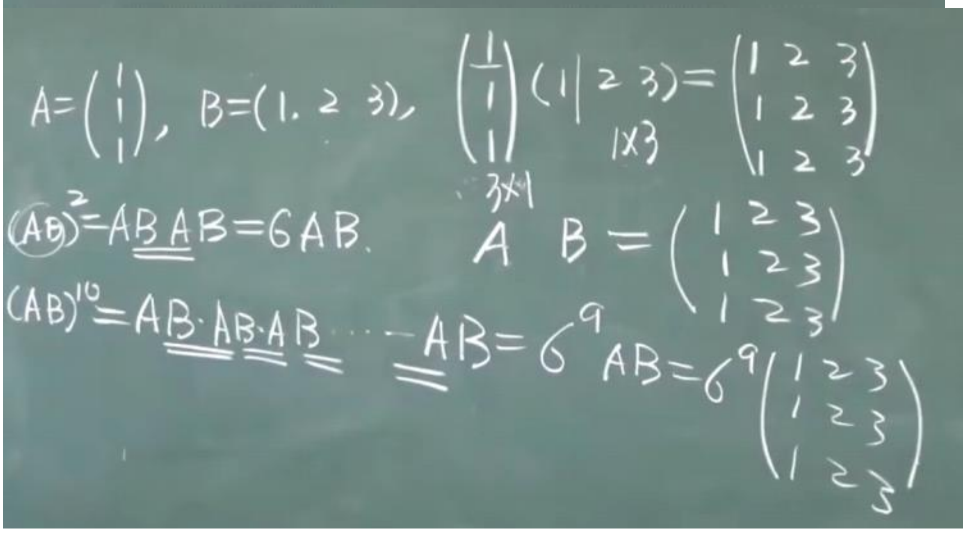






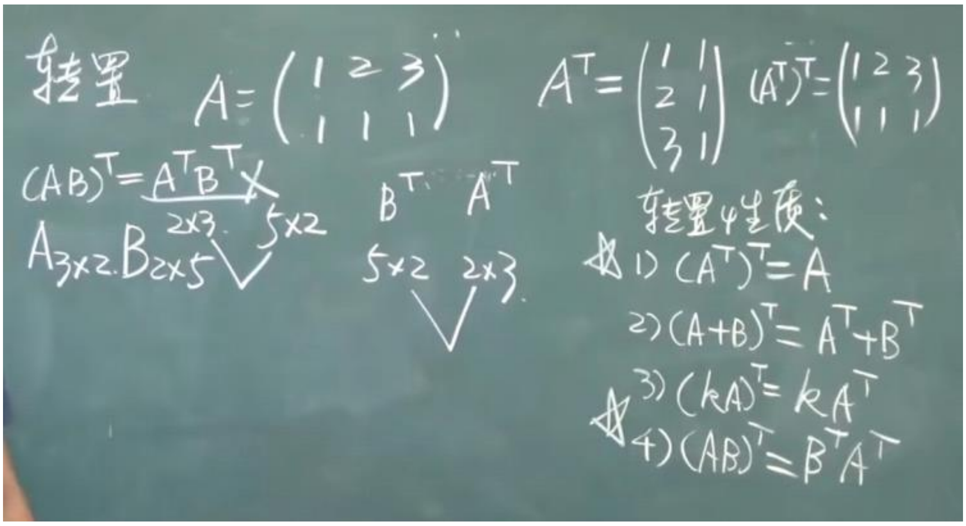






高次幂分开之后再抵消

矩阵的转置



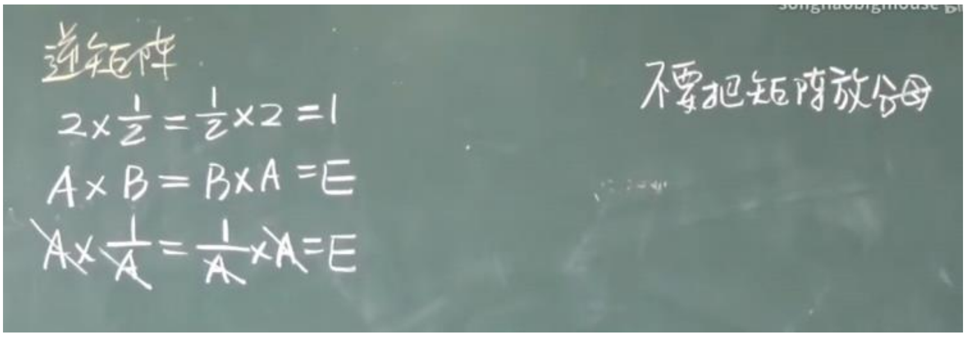
$$(A_1A_2A_3A_4)^T = A_4^T A_3^T A_2^T A_1^T$$

$$(A+B+C)^T = A^T + B^T + C^T$$

矩阵的行列式

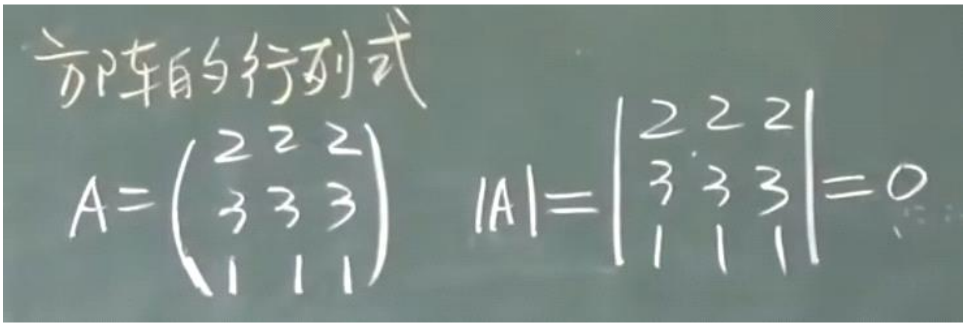
2024年1月30日　　12:40

不能把矩阵放在分母上

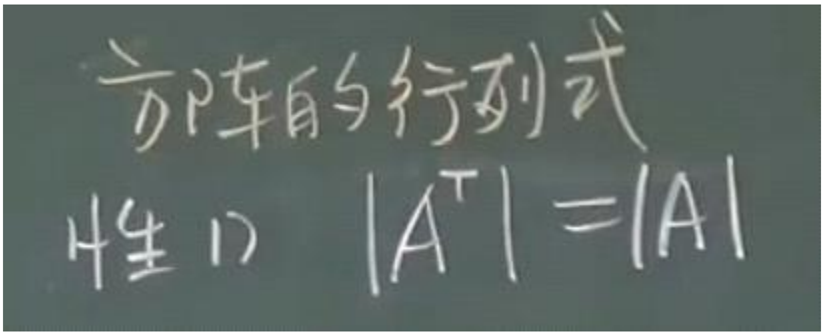


方阵的行列式

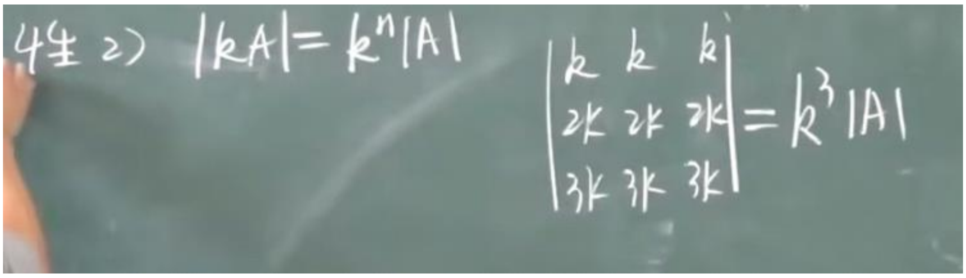
将方阵转成行列式



画竖线代表取行列式



方阵的行列式，转置后值不变



例1 1. A 5阶 $|A|=3$

1). $|-A| = (-1)^5 |A| = -3$.

五阶所以提五次

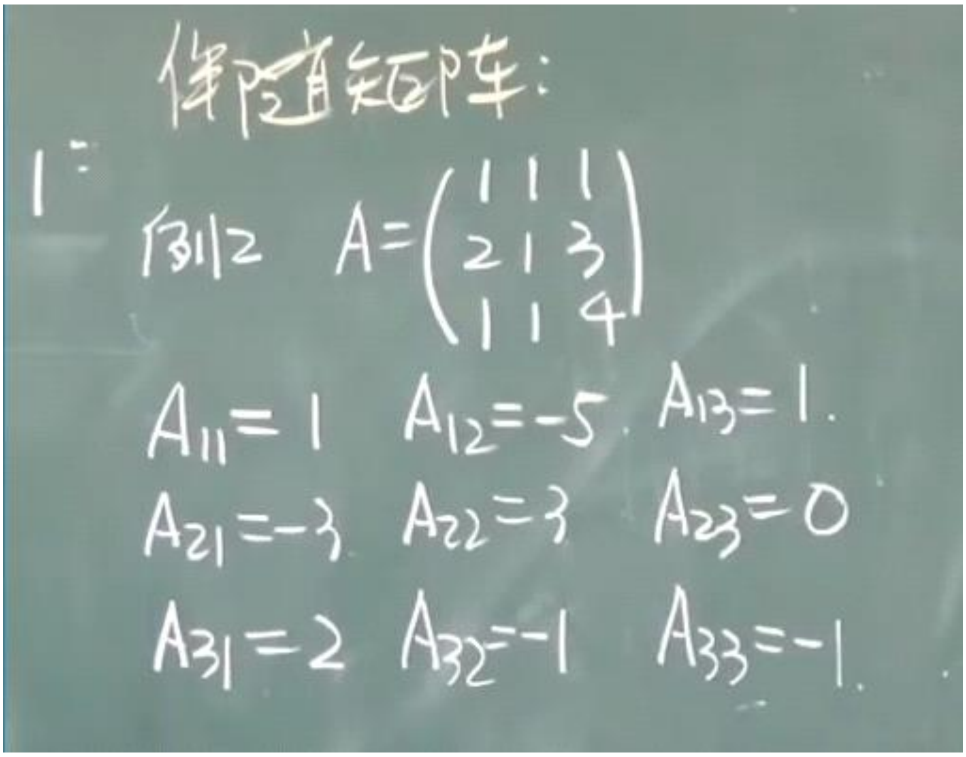
2) $|2A^T| = 2^5 |A^T| = 2^5 \times 3$

$$||A|A| = |3A| = 3^5 |A| = 3^6$$

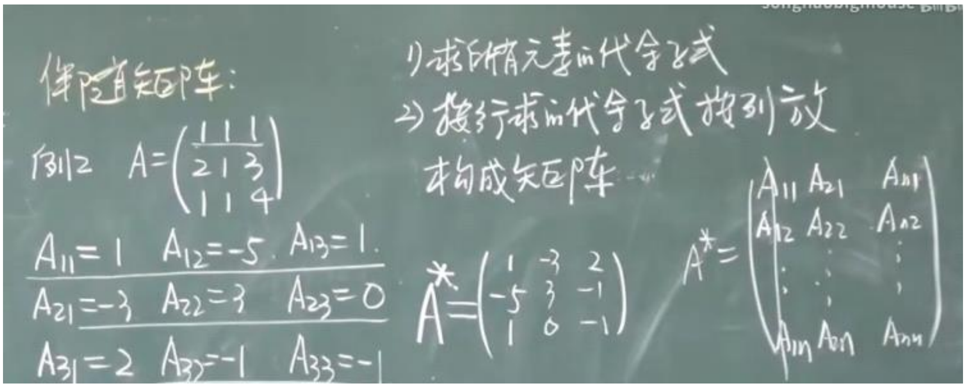
伴随矩阵

2024年1月30日 19:32

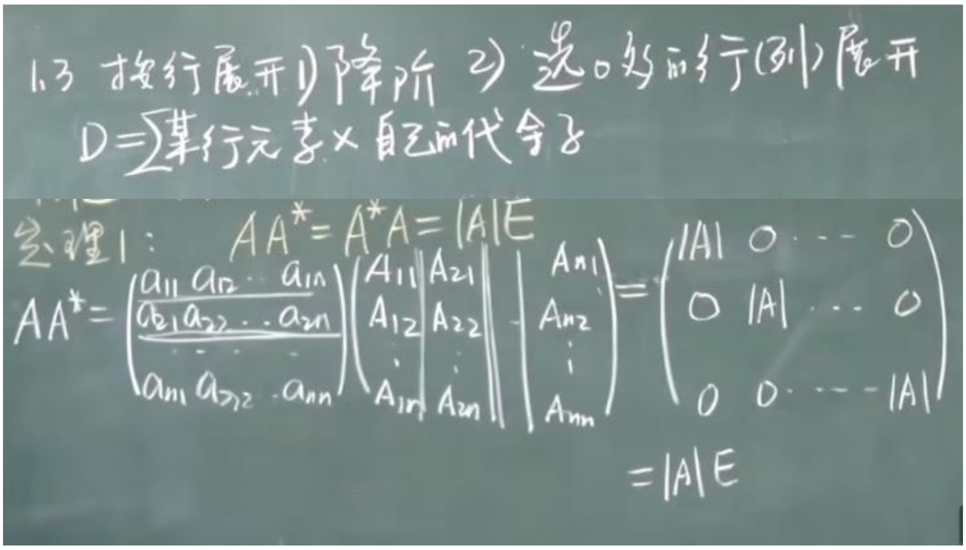
只有方阵才有伴随矩阵，任意方阵都有伴随矩阵



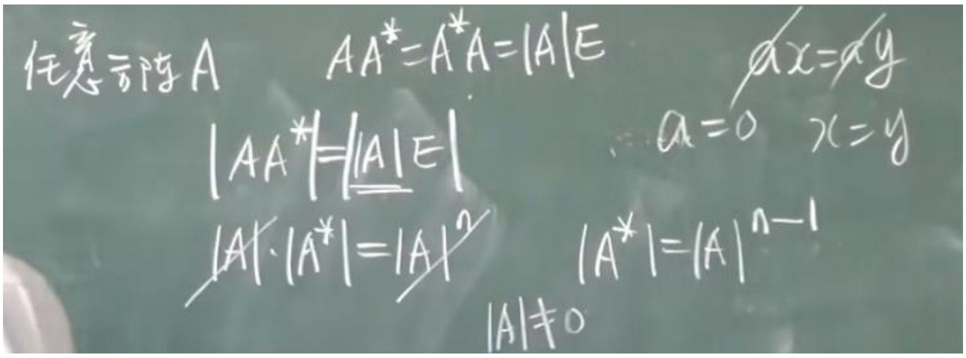
以上是代数余子式



按行求按列放

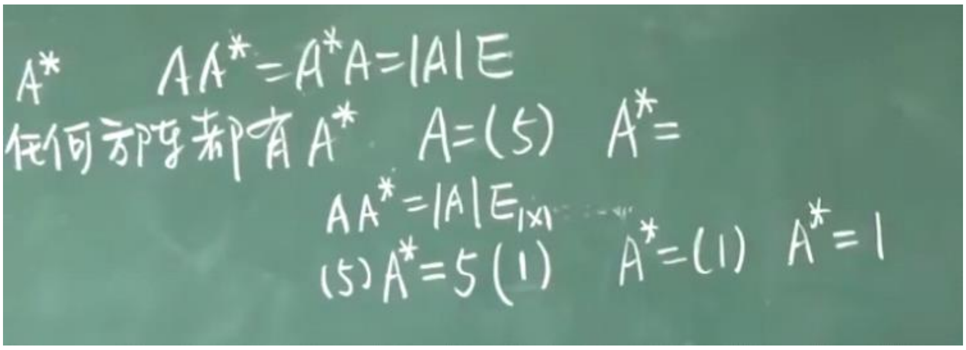


对任一方阵都成立



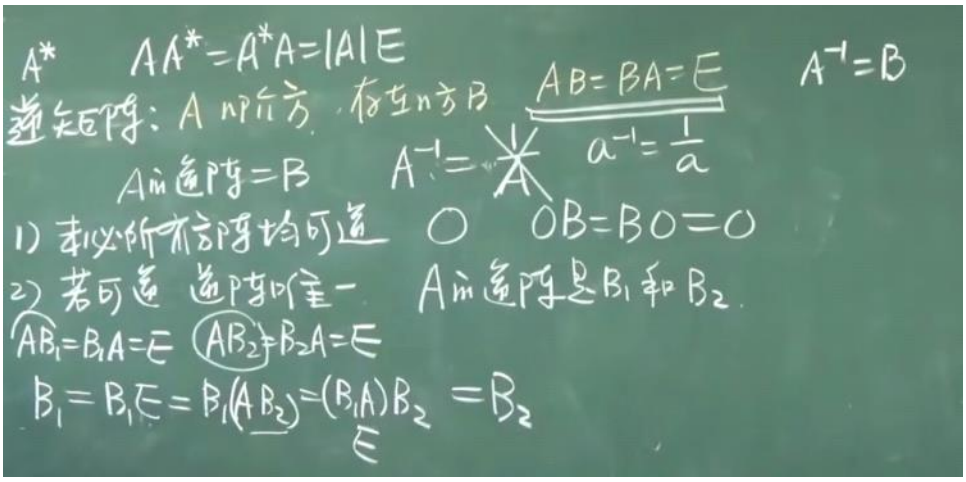
其实|A|=0也成立

对任意方阵都成立



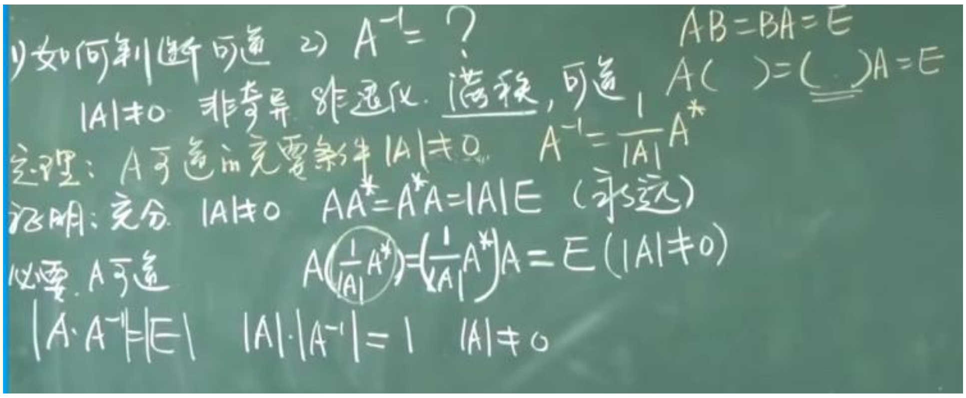
逆矩阵

2024年1月30日 19:58



必须是方阵才有逆矩阵，不一定所有方阵都有逆矩阵，比如说0矩阵

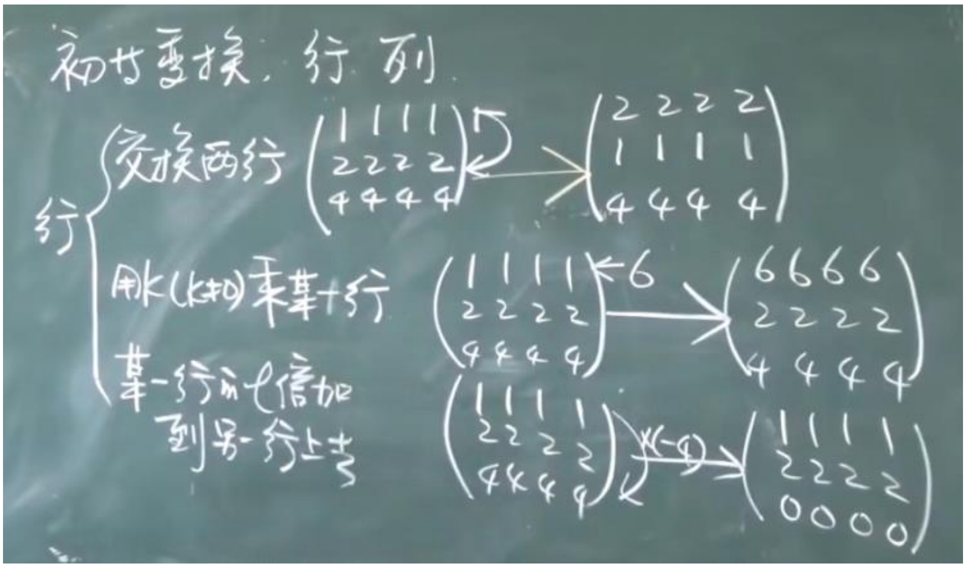
逆矩阵必定唯一



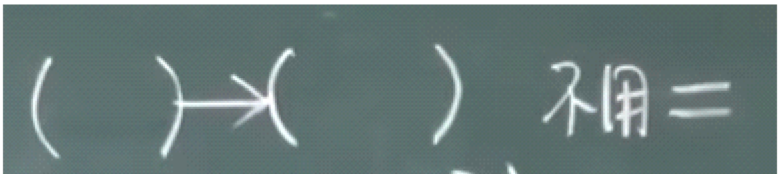
初等变化（一）

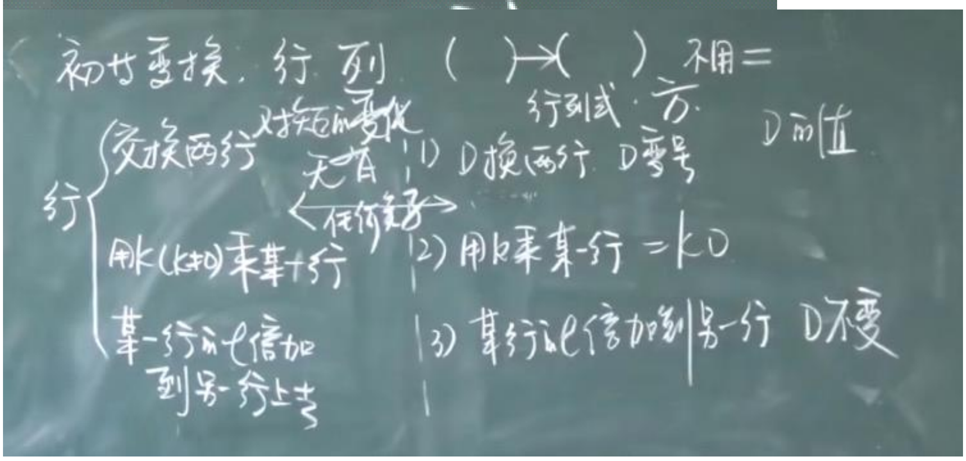
2024年1月30日　　20:23

初等变化 行、列

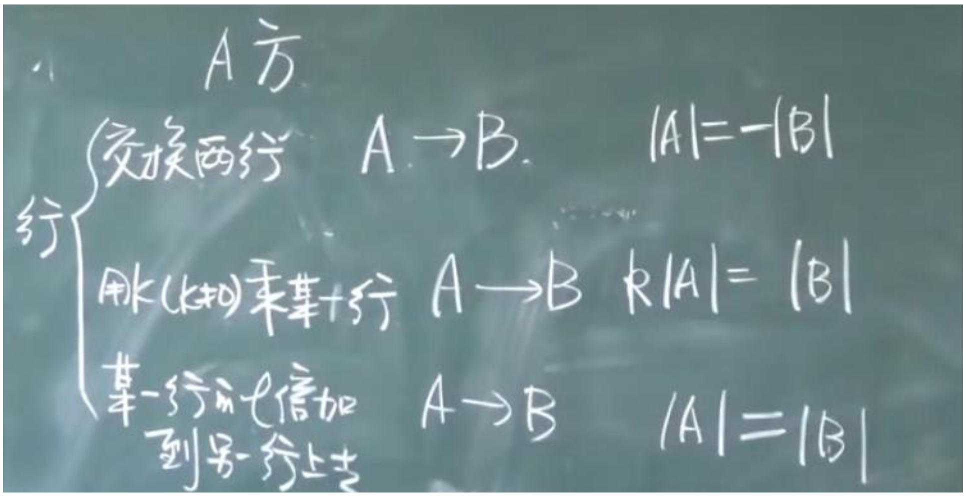


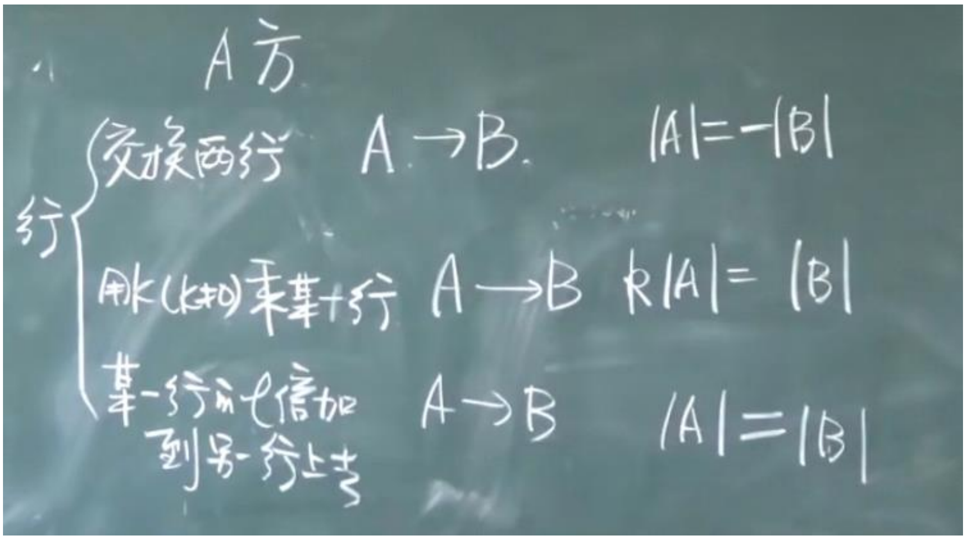
初等变化 用箭头，不用等号





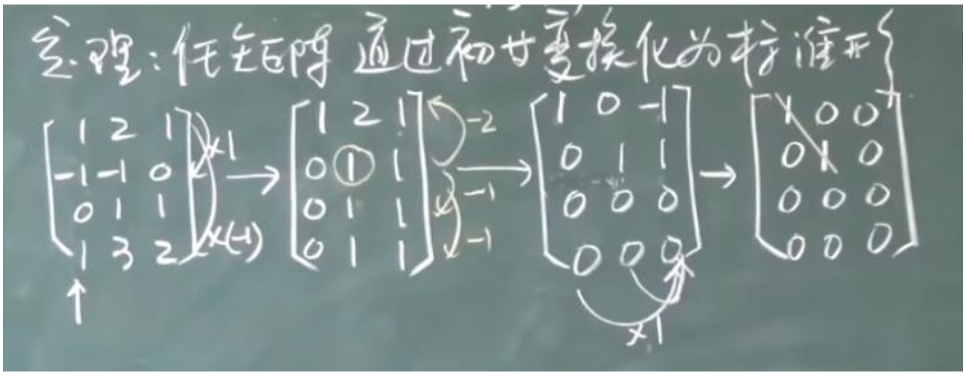
矩阵的初等变化和行列式的变化没有任何关系



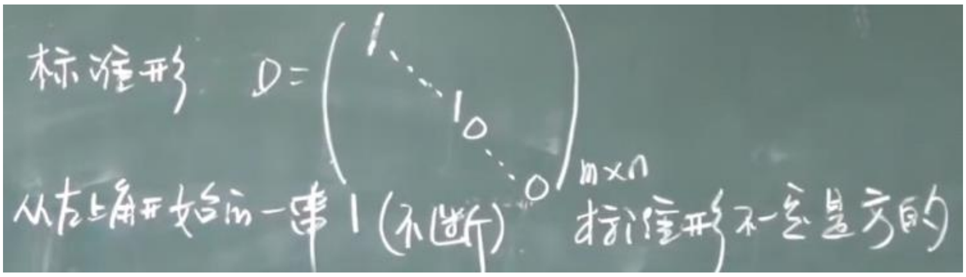


A是方阵，和行列式的值有关系

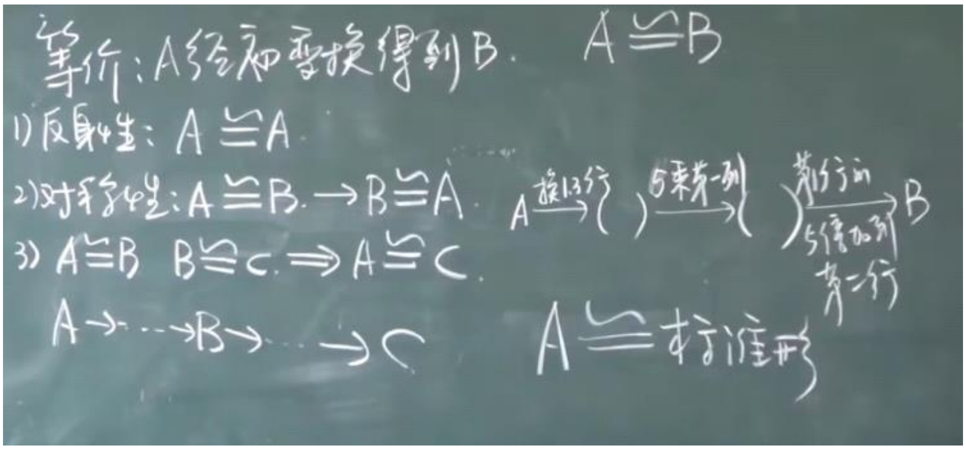
任意矩阵通过初等变化可以变化为标准形



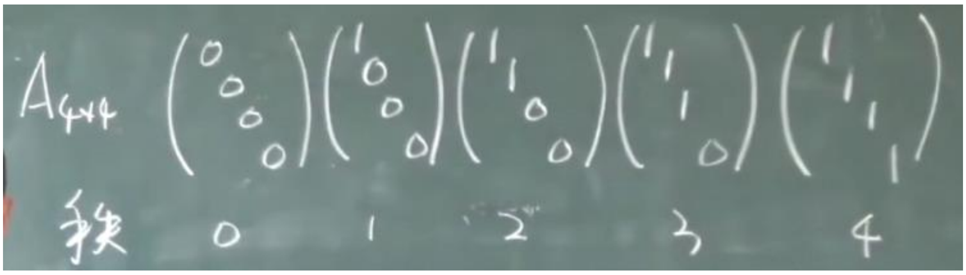
标准形矩阵D



等价矩阵



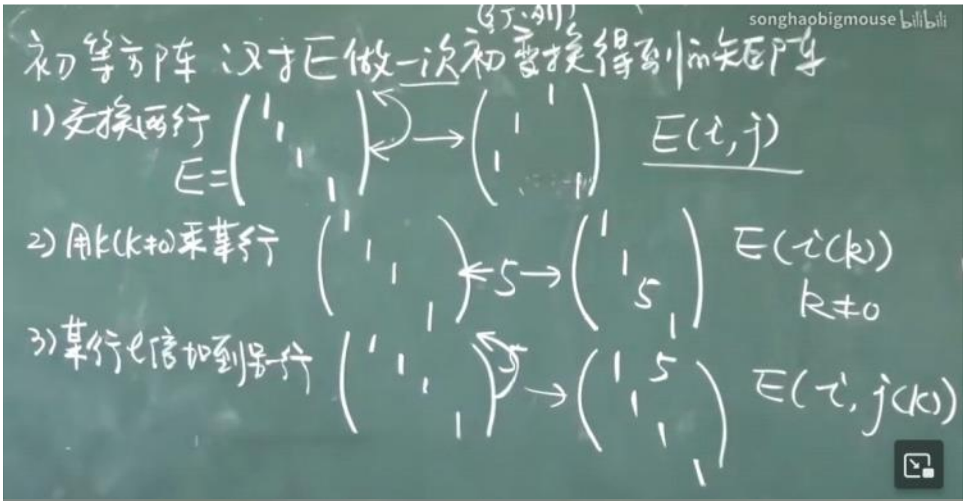
4×4的矩阵，通过各种初等变化，总是可以得到这些标准形矩阵

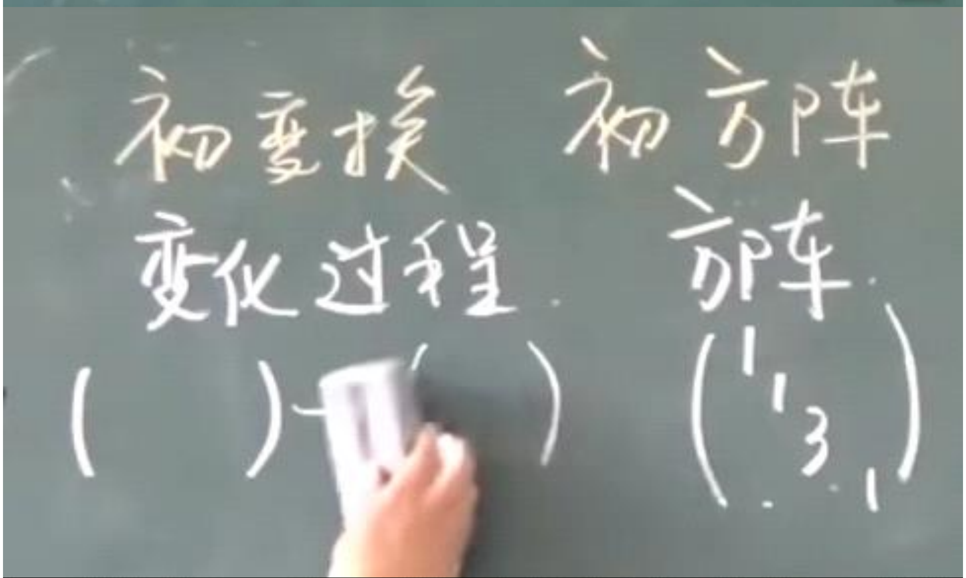

$A_{4\times4}$
秩 0 1 2 3 4

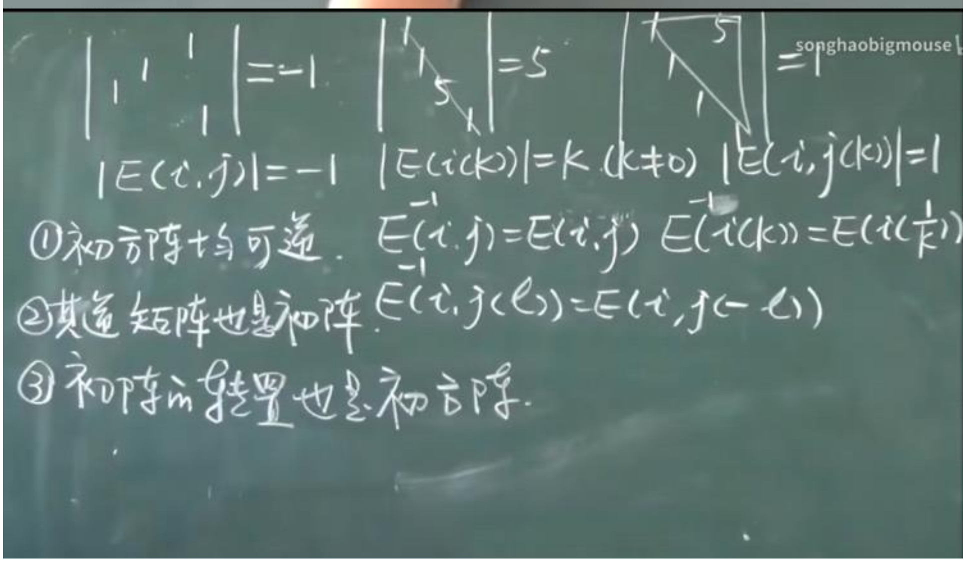
初等变化（二）

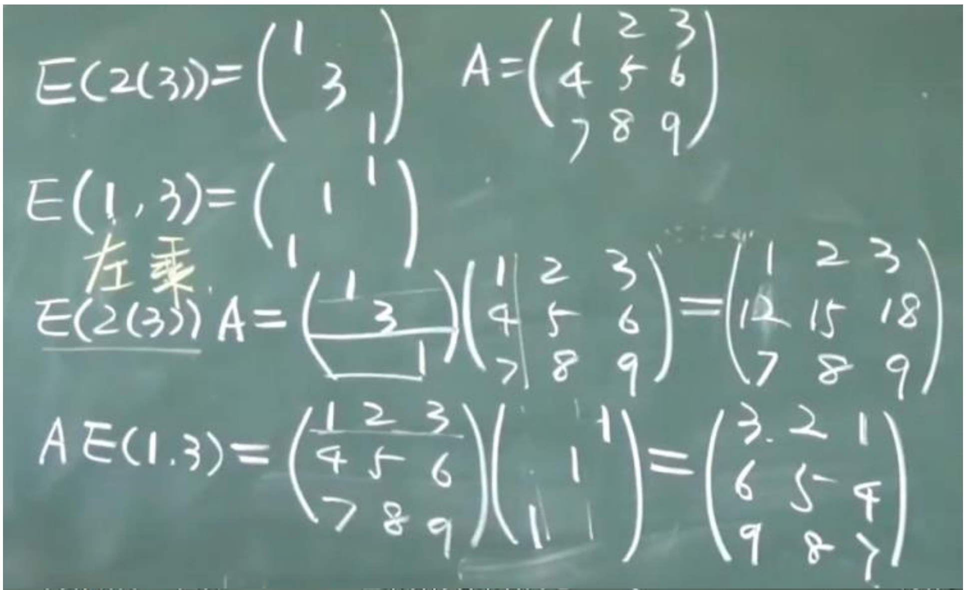
2024年1月31日　16:42

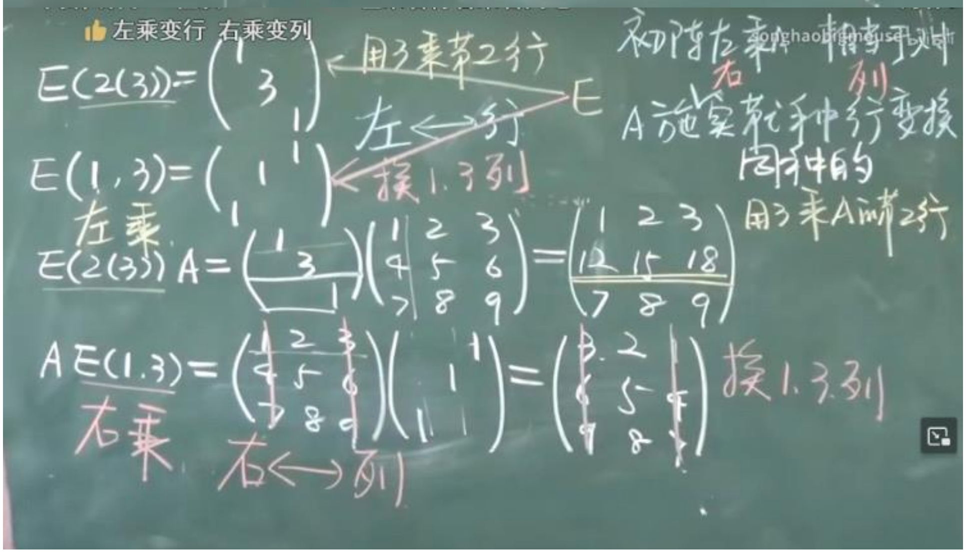
初等方阵



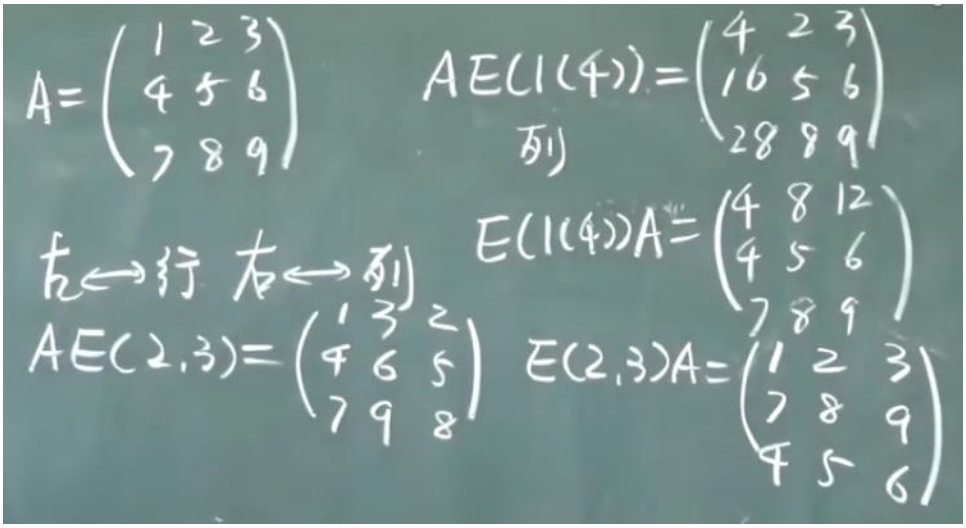





E(2(3))=
A=
E(1,3)=
左乘
E(2(3))A=
AE(1.3)=

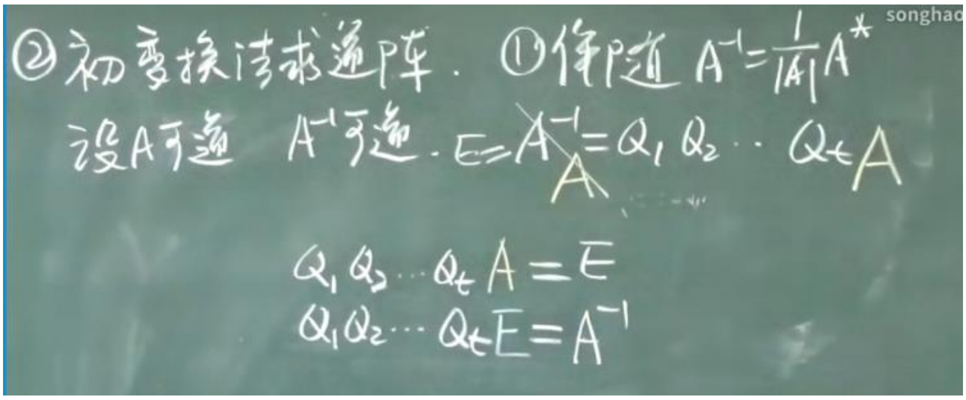

左乘变行 右乘变列
E(2(3))=
用3乘第2行
E
左↔行
E(1,3)=
换1.3列
左乘
E(2(3))A=
AE(1.3)=
换1.3.列
右乘
右↔列

左乘变行 右乘变列

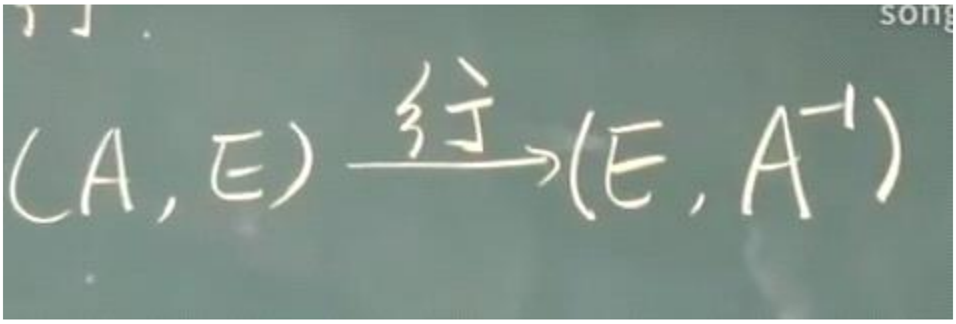

A=
AE(1(4))=
列
E(1(4))A=
左↔行 右↔列
AE(2,3)=
E(2,3)A=

初等变化（三）

2024年1月31日　20:37

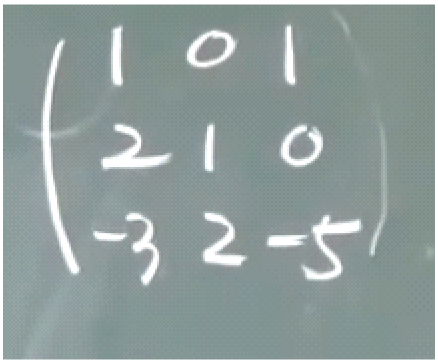


初等行变化求逆矩阵

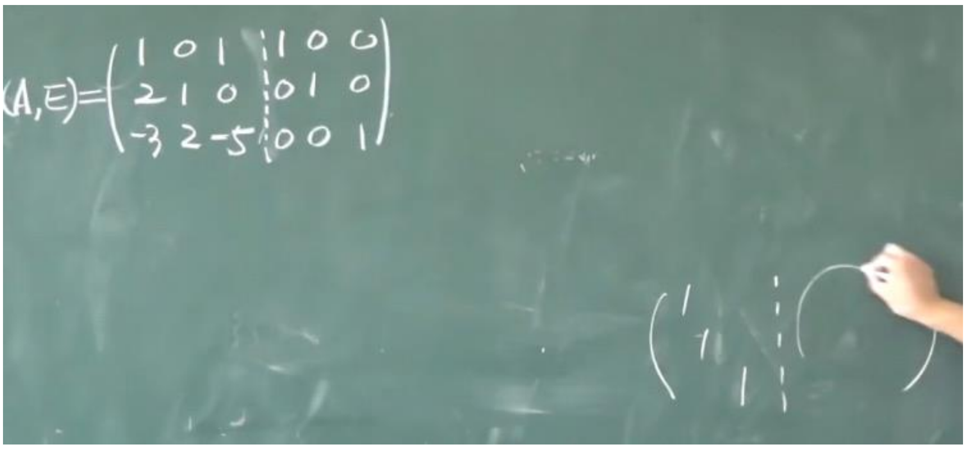


对A和E只做初等行变换，就会得到E和A的逆矩阵

求该方阵的逆矩阵



最终的目的



$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-3&2&-5&0&0&1\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&2&-2&3&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&2&7&-2&1\end{pmatrix}$$

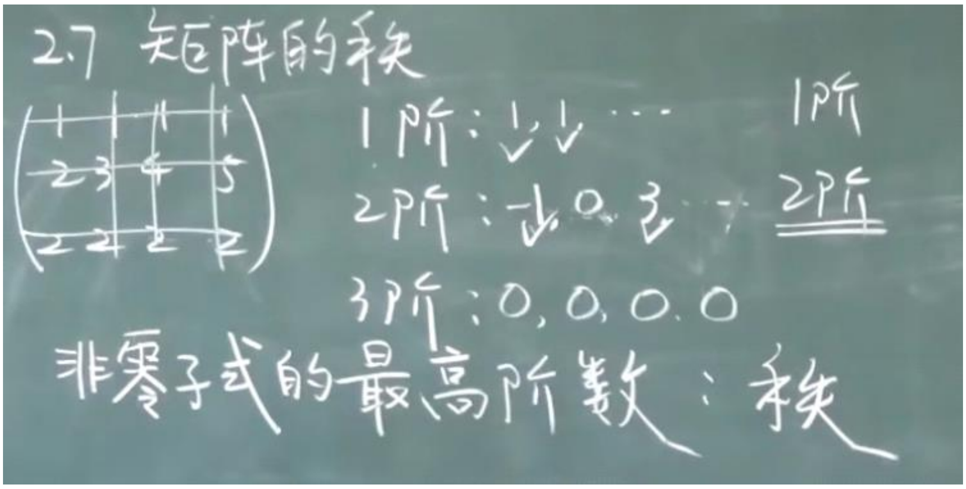
$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&2&7&-2&1\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&5&-1&1\\0&0&1&\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\quad A^{-1}=(\equiv)$$

注1) 先第1列，再2列，再3列

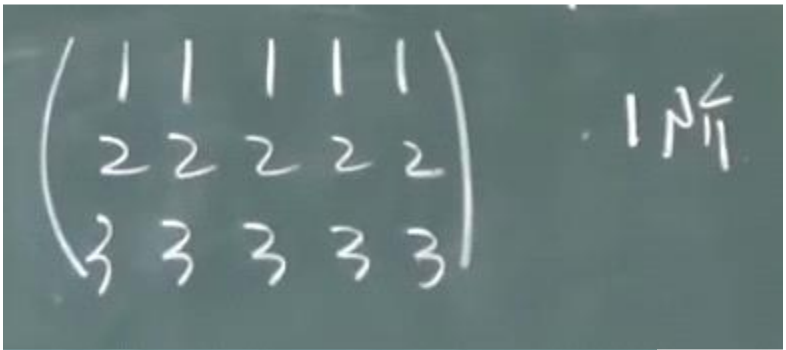
注2) 写整行，对整行操作

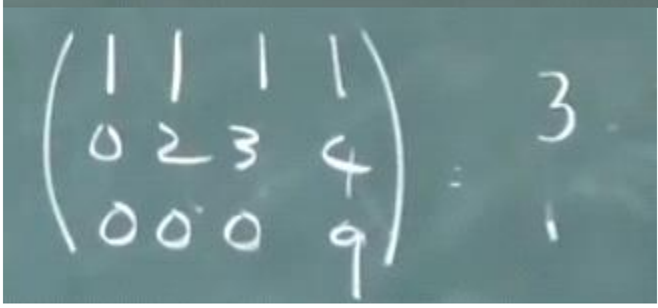
矩阵的秩

2024年1月31日 21:08

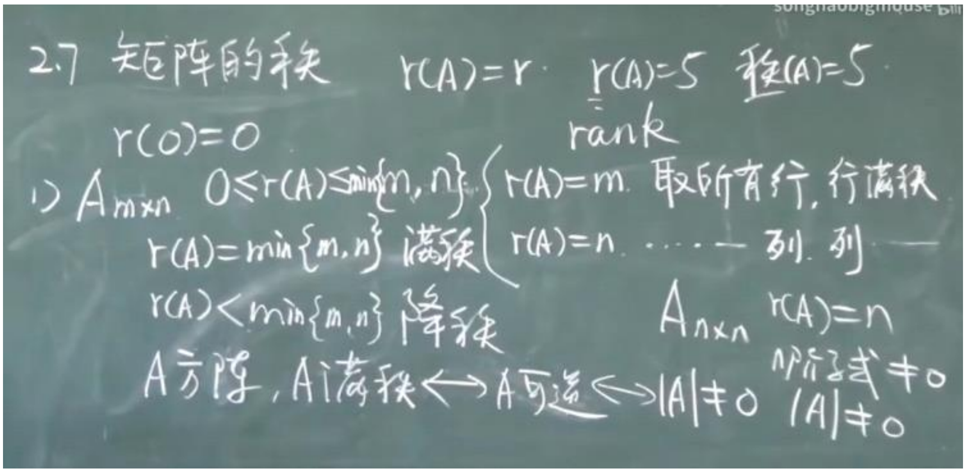


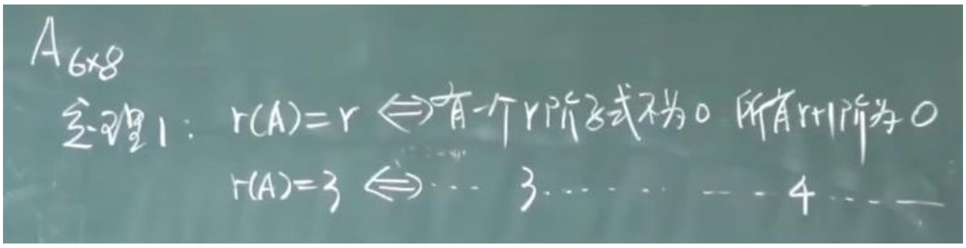
秩：非零子式的最高阶数



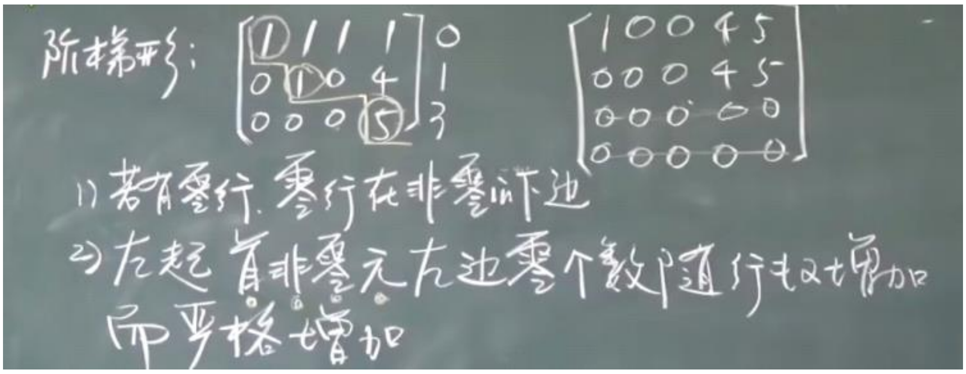


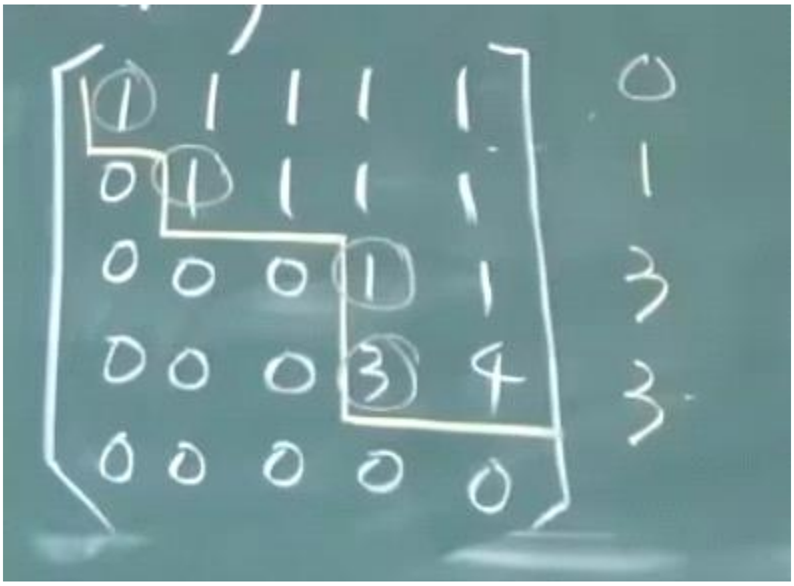
满秩 行满秩 列满秩 降秩





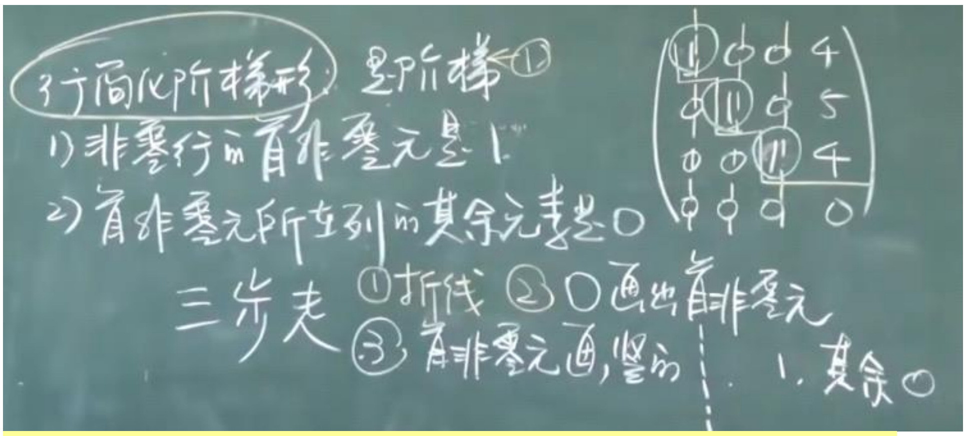
阶梯形矩阵



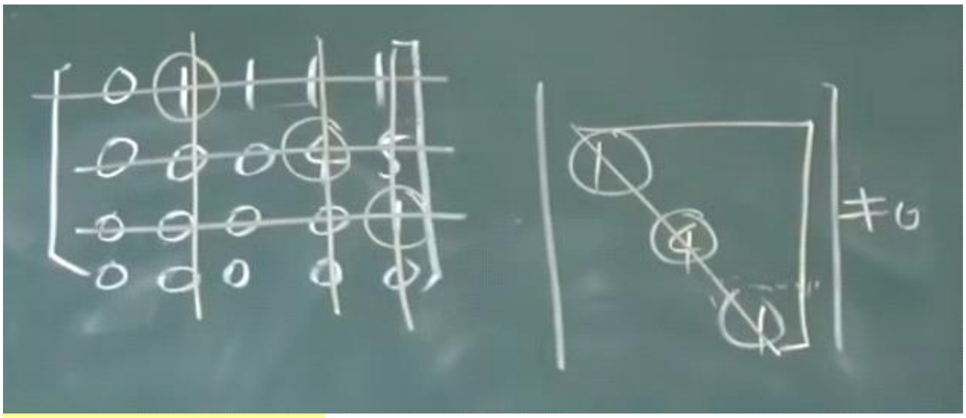


没有严格增加所以不算阶梯形，横线可跨多个数，纵线不可跨多个数

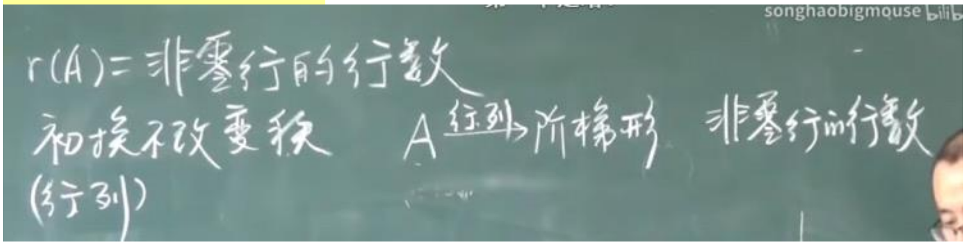
行简化阶梯形：是阶梯形



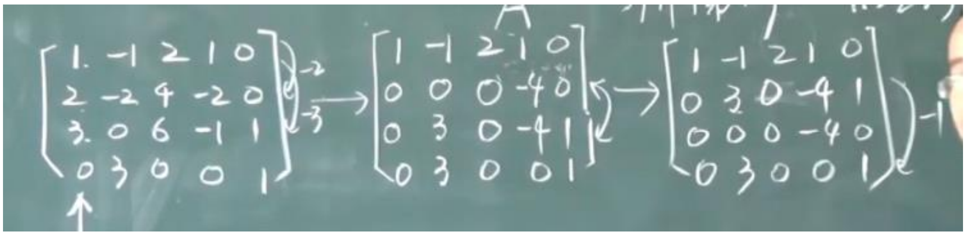
阶梯形矩阵的秩等于首非零元个数，阶梯形矩阵的秩等于非0行的行数

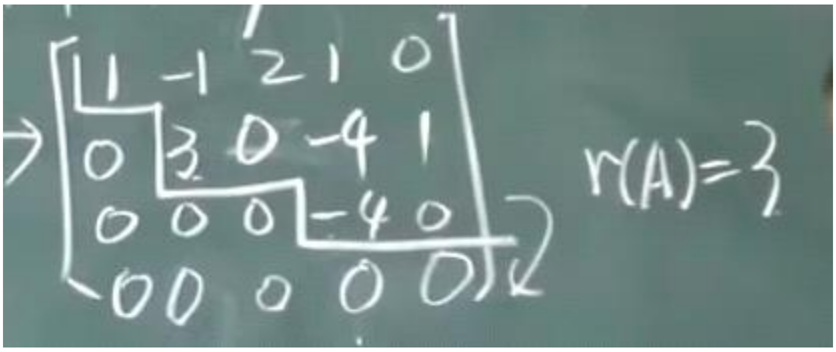


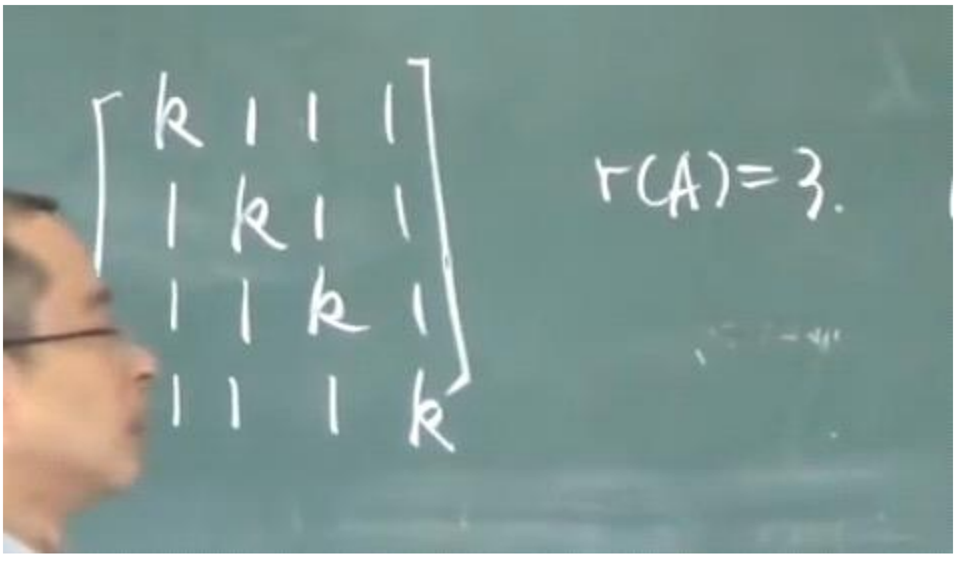
初等变化不改变矩阵的秩



解题思路：先处理第一列

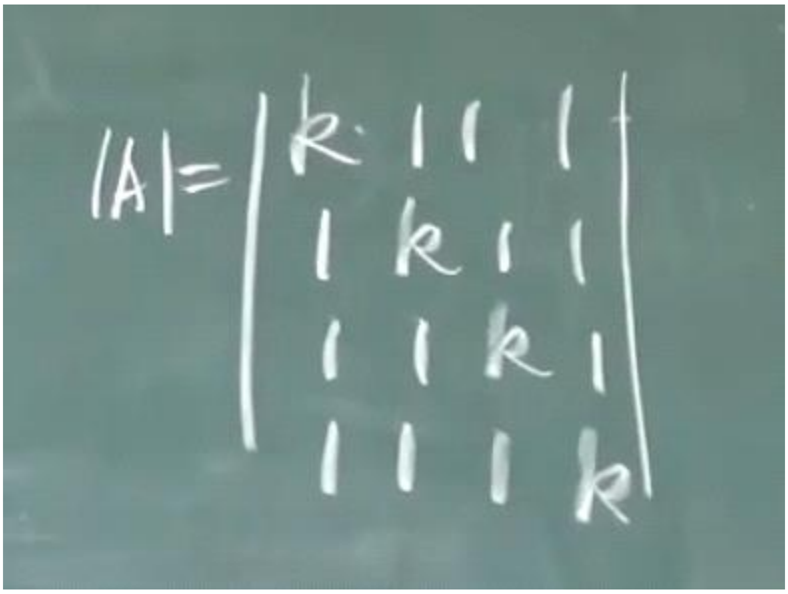


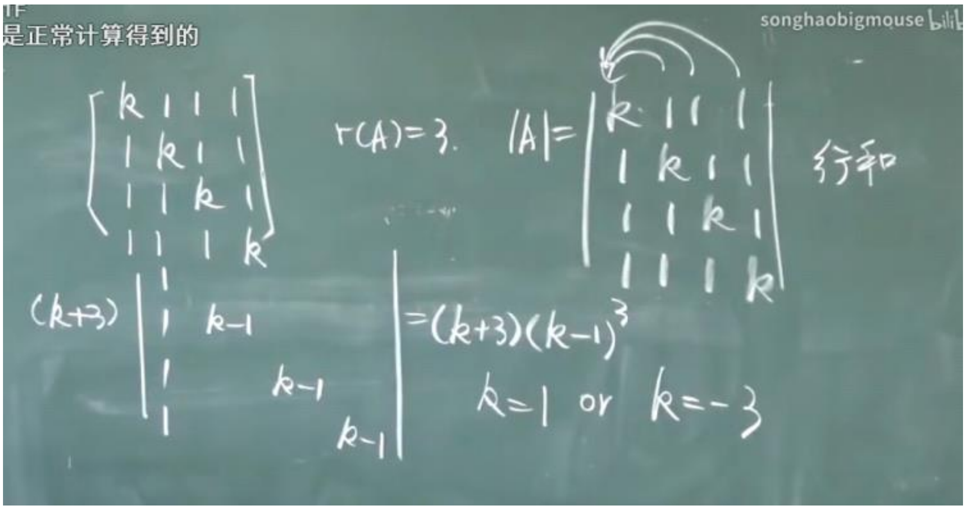




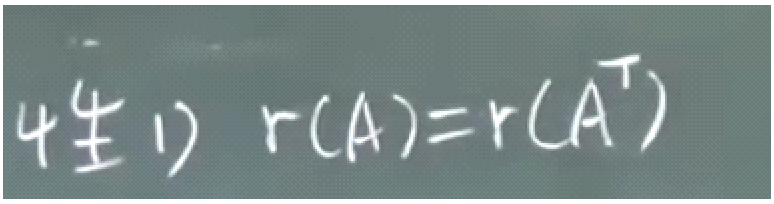
已知该矩阵的秩为3

说明该矩阵的4阶行列式为0

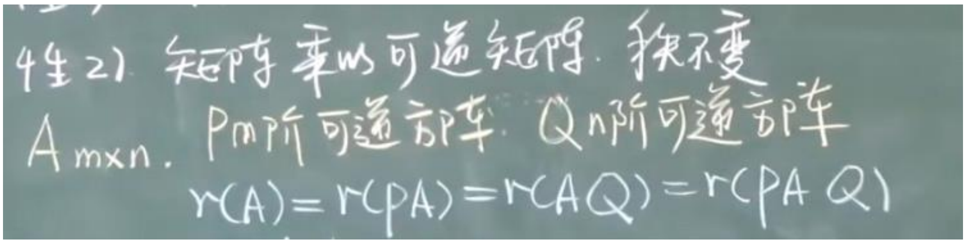




带回原题看下，k=1，秩为1，所以k=-3



行列式转置，秩不变

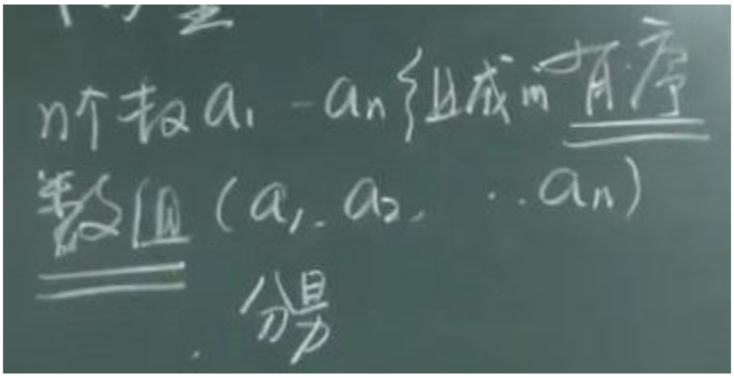


左乘可逆矩阵，右乘可逆矩阵，左右都乘可逆矩阵，秩不变

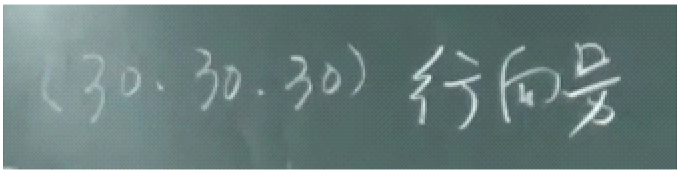
n维向量及其运算

2024年2月1日 20:25

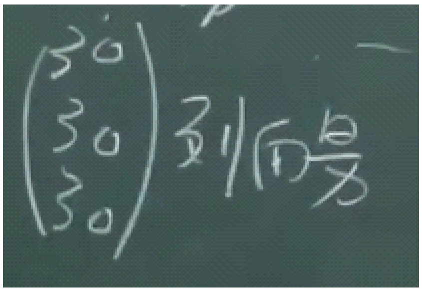
向量vector



有几个分量维数就是几



行向量

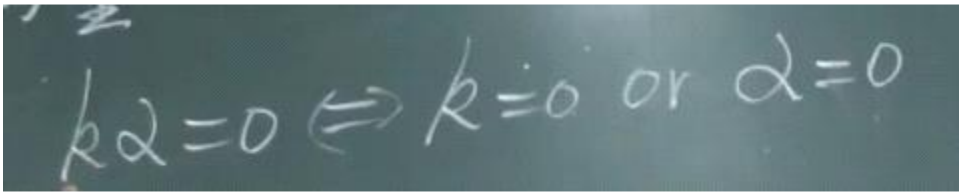


列向量

分量全是0的向量被称为0向量

两个向量相等：设两个n维向量，如果它的对应分量都相等，就叫两个向量相等。必须是同维向量。

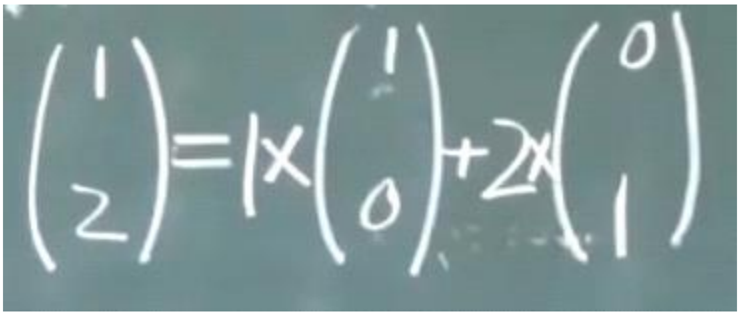
同维向量才能相加



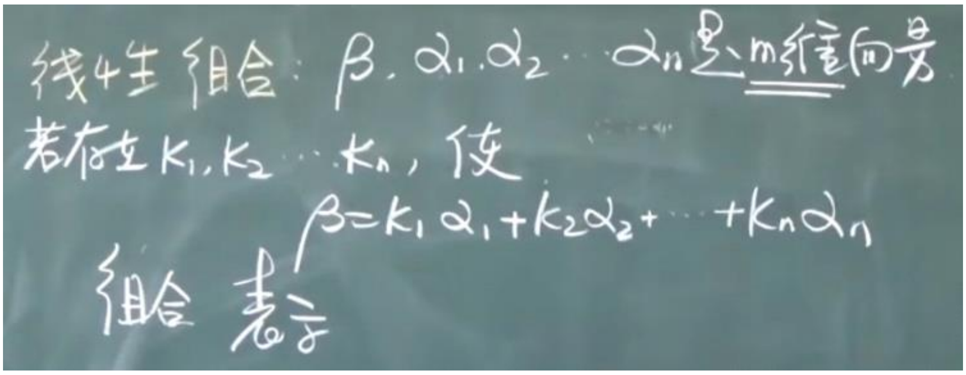
k是数，α是向量

向量间的线性关系（一）

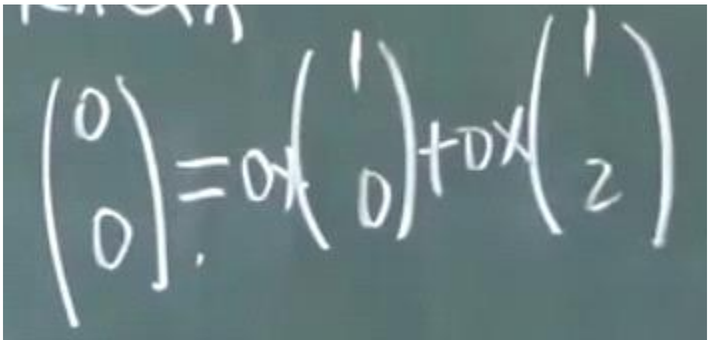
2024年2月1日　20:43

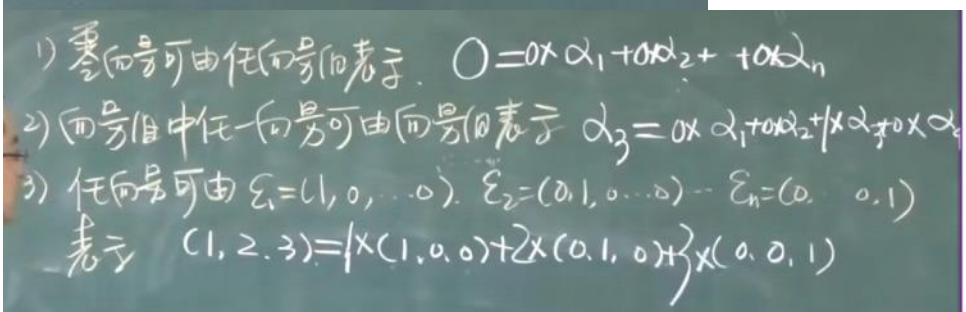


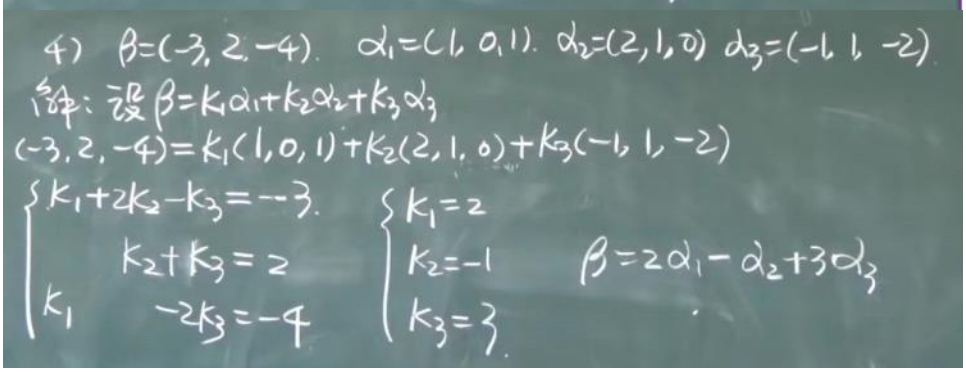
线性组合 线性表示，线性表示系数可以为0

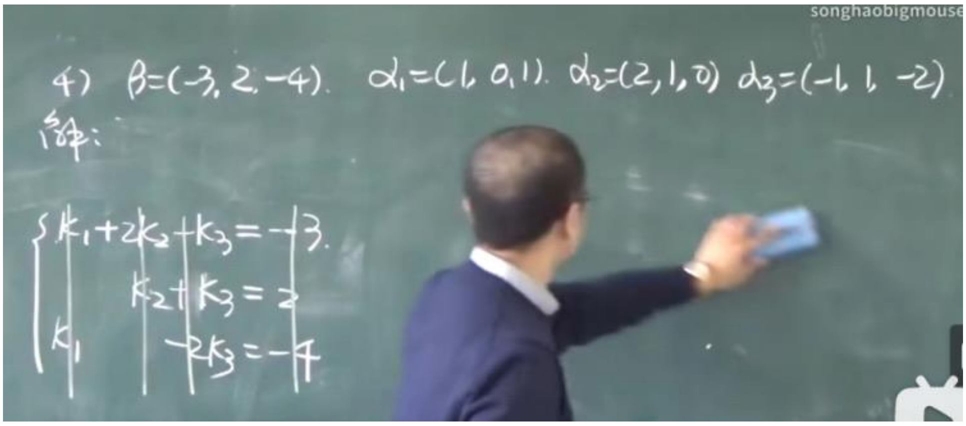


K1,k2组合系数，系数可以全取0

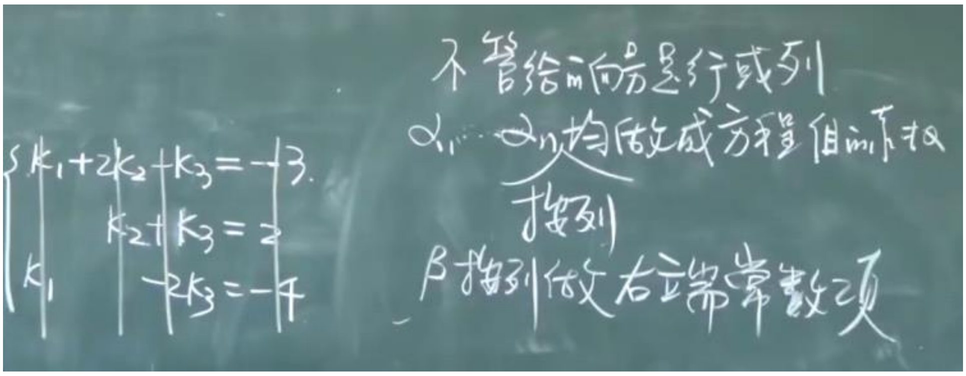






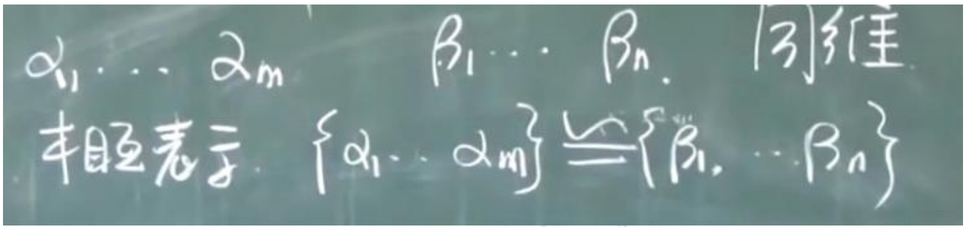


按列做成系数



向量组的等价

两个（同维）向量组可以相互线性表示，就是等价



定义 3 设有两个向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 及 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$，若 B 组中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示. 若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示，则称这两个向量组等价.

把向量组 A 和 B 所构成的矩阵依次记作 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 和 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$，向量组 B 能由向量组 A 线性表示，即对每个向量 $\boldsymbol{b}_j(j=1,2,\cdots,l)$ 存在数 $k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{mj}$，使

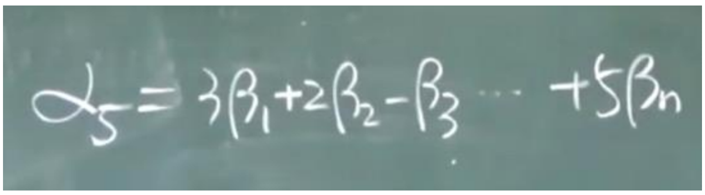
$$\boldsymbol{b}_j=k_{1j}\boldsymbol{a}_1+k_{2j}\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_{mj}\boldsymbol{a}_m=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix},$$

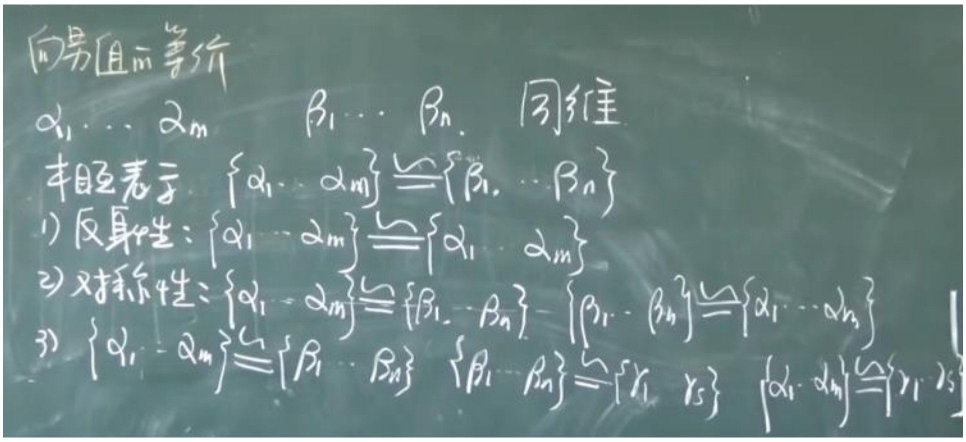
从而

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1l}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ml}\end{pmatrix},$$

这里，矩阵 $\boldsymbol{K}_{m\times l}=(k_{ij})$ 称为这一线性表示的系数矩阵.

比如



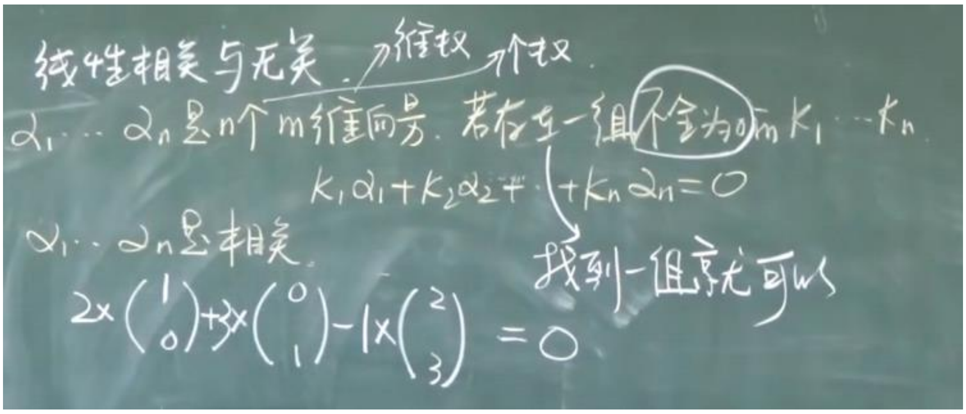

向量组的等价
$\alpha_1 \cdots \alpha_m$ $\beta_1 \cdots \beta_n$ 同维
相互表示 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\} \cong \{\beta_1 \cdots \beta_n\}$
1) 反身性：$\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\} \cong \{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}$
2) 对称性：$\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\} \cong \{\beta_1 \cdots \beta_n\}$ $\{\beta_1 \cdots \beta_n\} \cong \{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}$
3) $\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\} \cong \{\beta_1 \cdots \beta_n\}$ $\{\beta_1 \cdots \beta_n\} \cong \{\gamma_1 \cdots \gamma_s\}$ $\{\alpha_1 \cdots \alpha_m\} \cong \{\gamma_1 \cdots \gamma_s\}$

向量组的线性关系（二）

2024年2月2日　　17:06

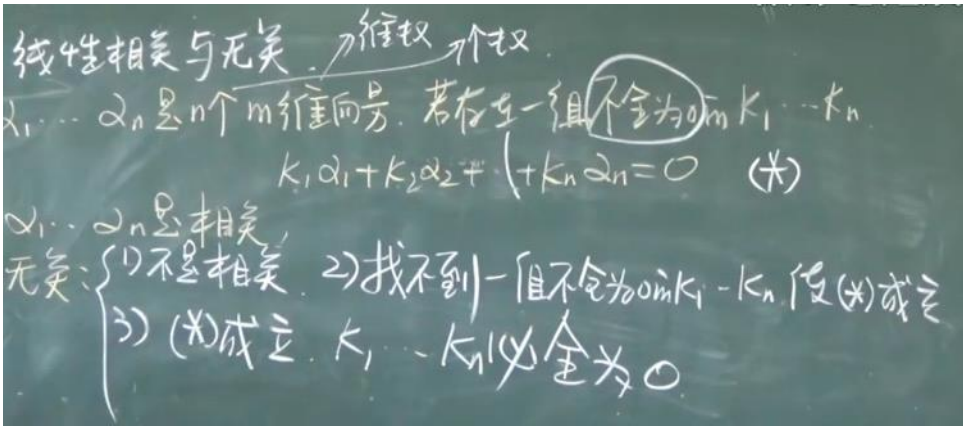
线性相关和线性无关

向量的维数和向量组的个数

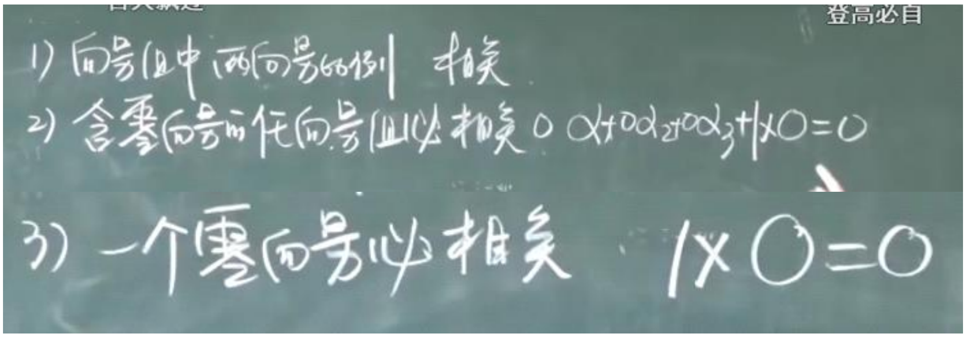


线性相关 不全为0 找到1组就可以

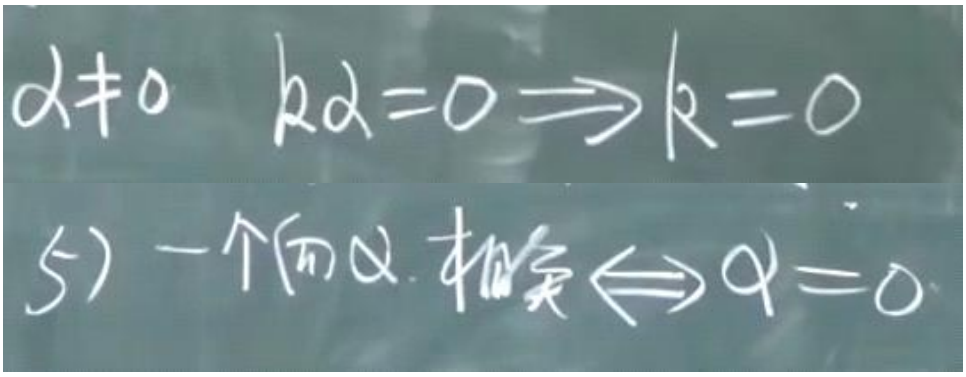
线性无关

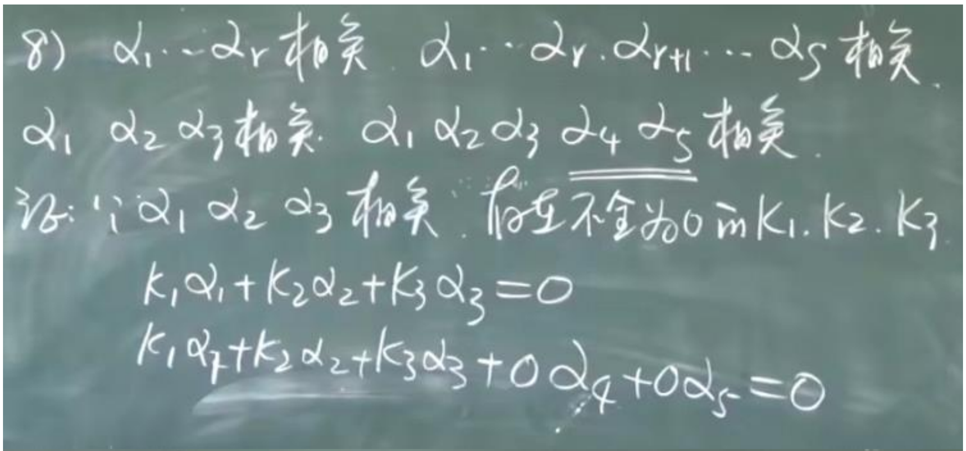


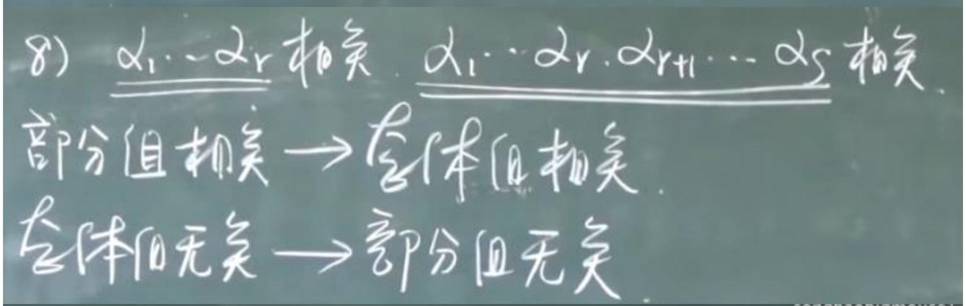
向量组中任意两向量成比例，一定线性相关

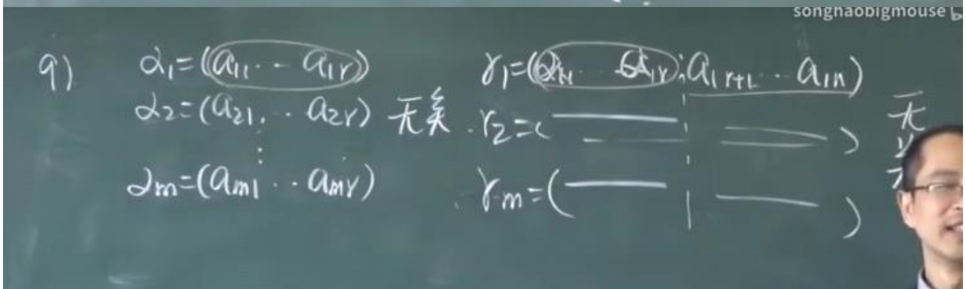


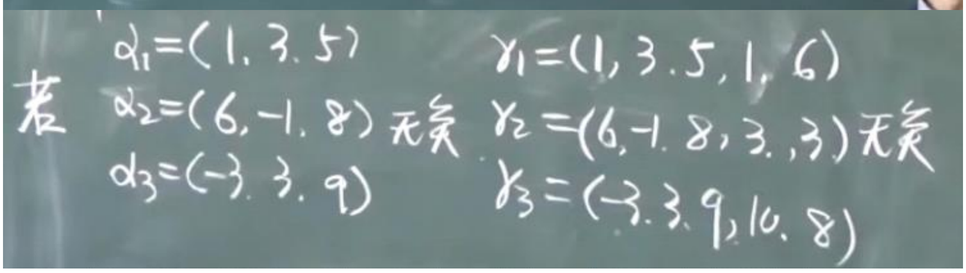
4）一个非零向量必须线性无关

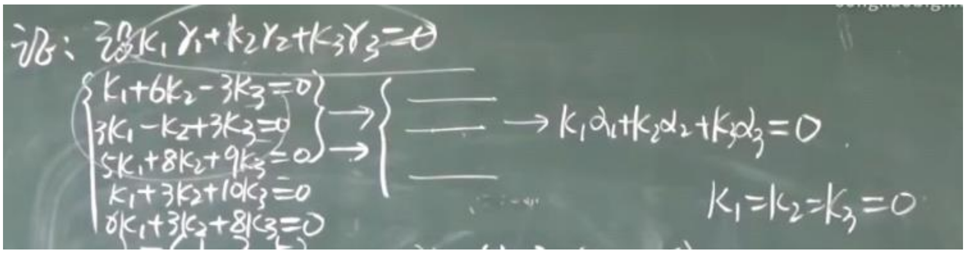






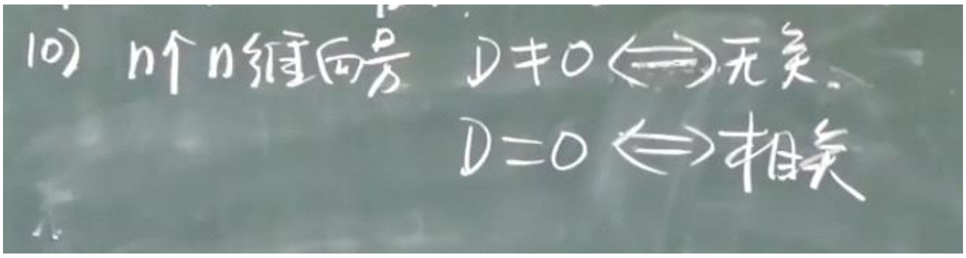




若相关，则五个方程都得成立，但前三个已经不成立了


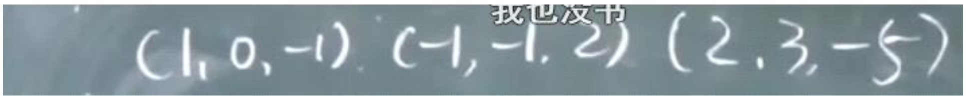
狗尾续貂定理
线性无关的向量组的每个向量按相同位置随意增加一些分量得到的高维向量（接长向量组）依然线性无关；
线性相关的向量组截断向量也线性相关。

（向量的个数等于向量的维数）n个n维向量，构成的行列式D≠0，那么线性无关。（克莱姆法则）

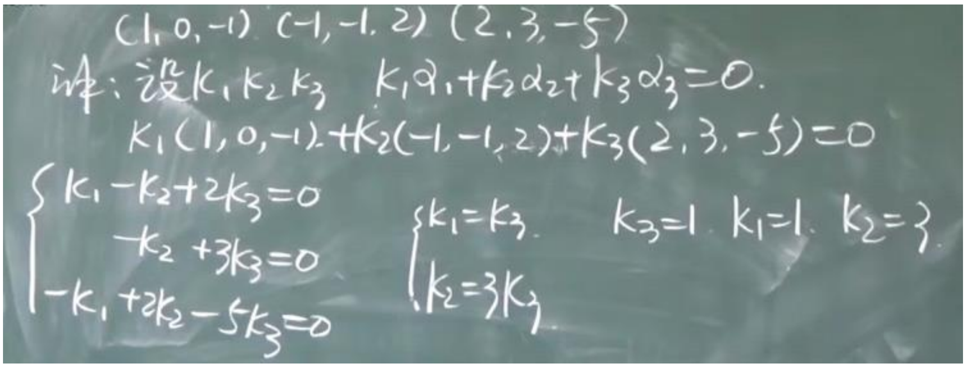


当D等于0时就不能用克拉默法则，此时齐次线性方程组得到的就是非零解，故系数不全为0，因而线性相关

可简单的想，如果D=0，行列式中有成比例的行，成比例则行向量相关



这三个向量是线性相关还是线性无关



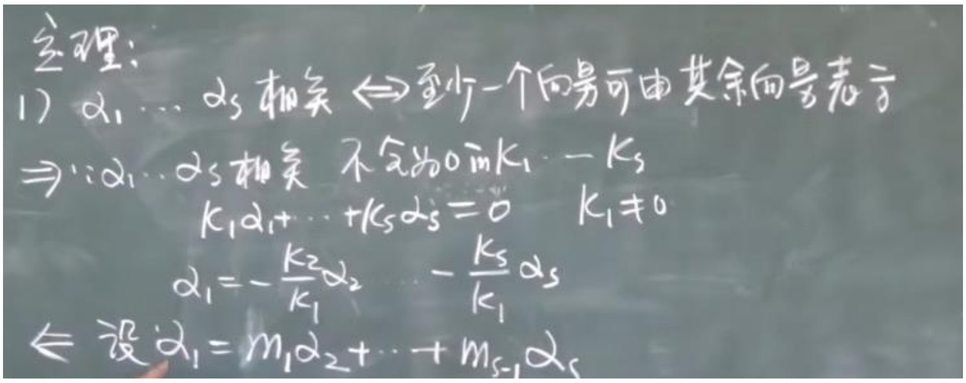
不管行向量还是列向量都做成列

线性相关有非零解

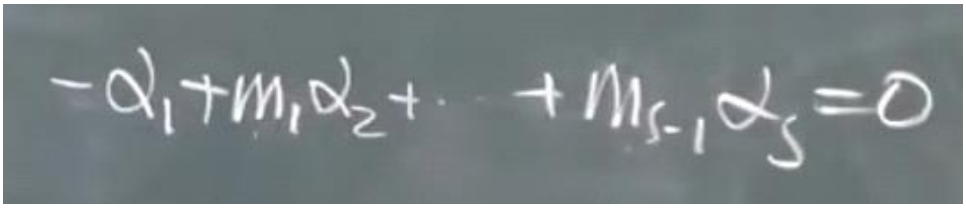
线性无关只有零解

线性相关线性无关

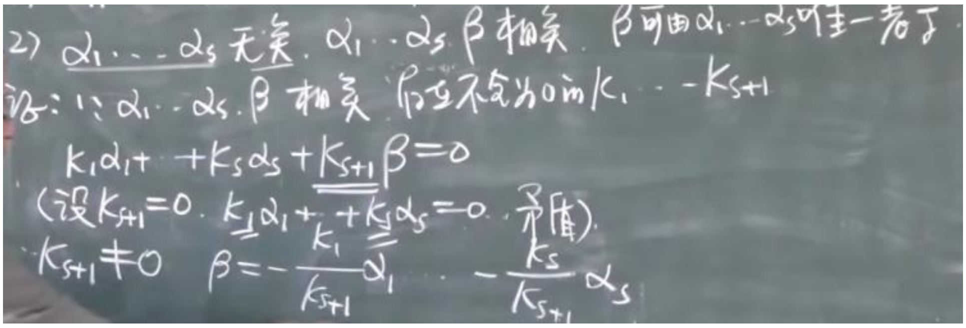
2024年2月4日　　9:03



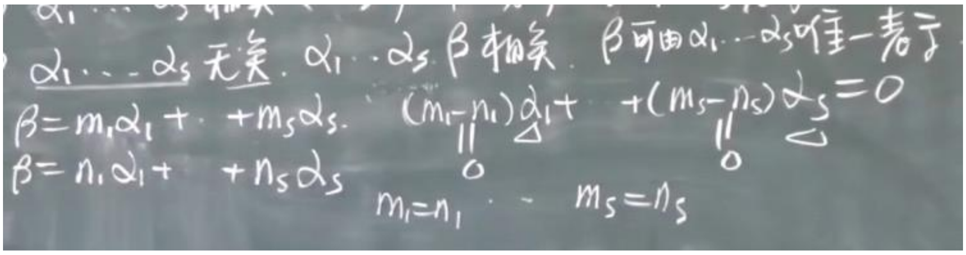
线性表示，系数可以为0



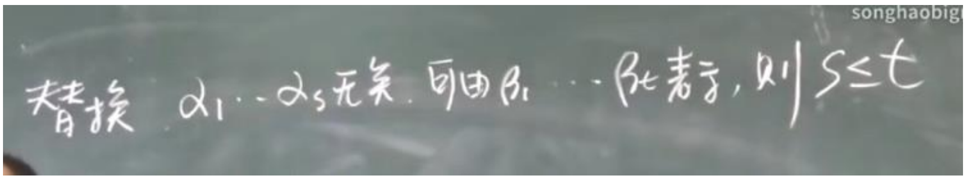
不管后面的值怎么取，存在α_1系数不为0，所以线性相关



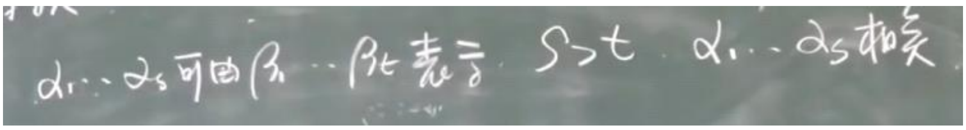
证明唯一性，假设有两个值存在



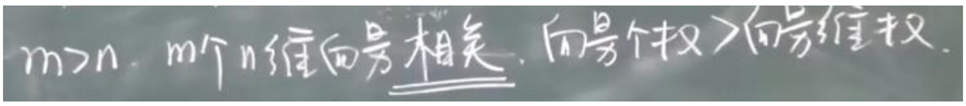
替换定理



s的个数小于t的个数



逆否命题：向量的个数大于向量的维数，这个向量组一定线性相关

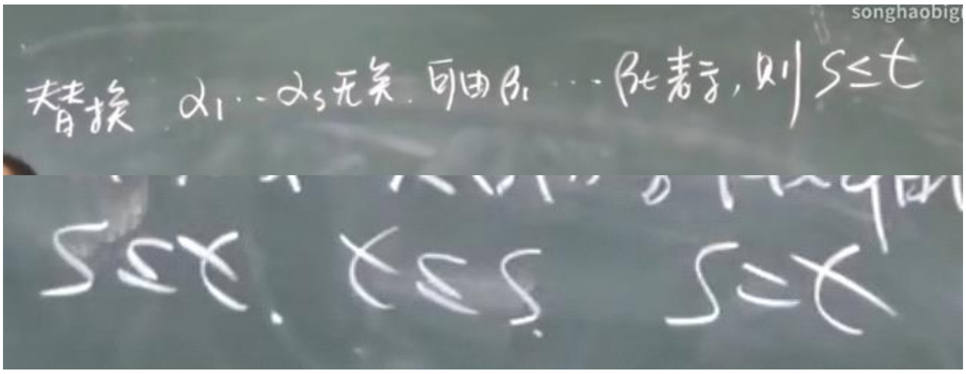


（方程个数小于未知数个数，方程无法有效限制未知数的取值，导致有无穷多解
未知数和方程个数相等的齐次方程，齐次方程等号后面都是零，所以所有解也都是零
向量个数大于维数时，就相当于未知数的个数大于方程个数，这样的方程组是没有唯一解的）

n+1个n维向量一定线性相关

n维坐标系只需要n个不为0的分量就可以表示任意分量

推论：两个等价的线性无关组含向量个数相同（反证一下，假设有三个儿子四个爸爸，儿子之间无关，爸爸之间也无关那么每个爸爸可以表示其儿子，那还差一个爸爸与其他儿子无血缘关系不能表示，所有只能有三个爸爸，三个爸爸对应三个儿子）

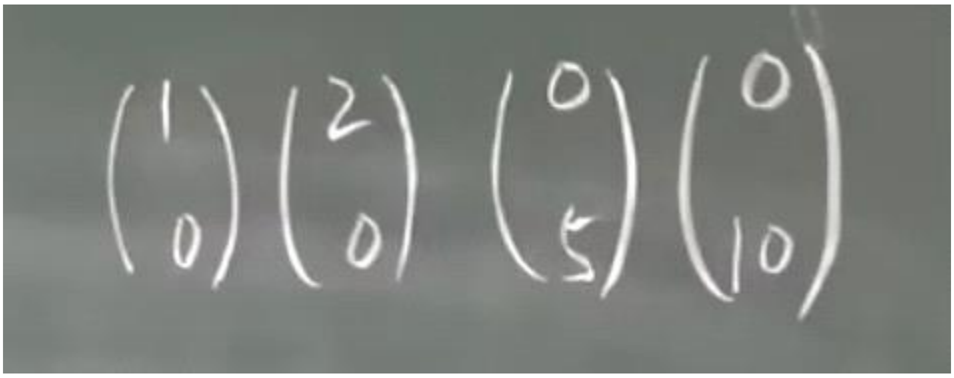


若存在两个等价的线性无关向量组，则两者所含的向量个数相同

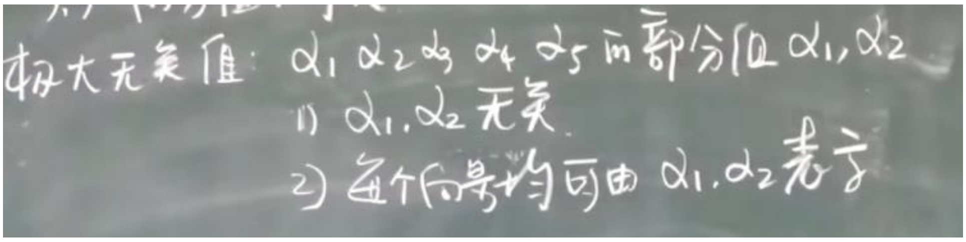
向量组的秩（一）

2024年2月4日　10:47

极大线性无关组



向量组，1、2；5、10分别成比例，所以分别留一个向量就能把其他的所有向量都表示出来



向量组的部分向量，比如α_1、α_2，这两个向量组线性无关

这个向量组的每个向量均可由α_1、α_2线性表示

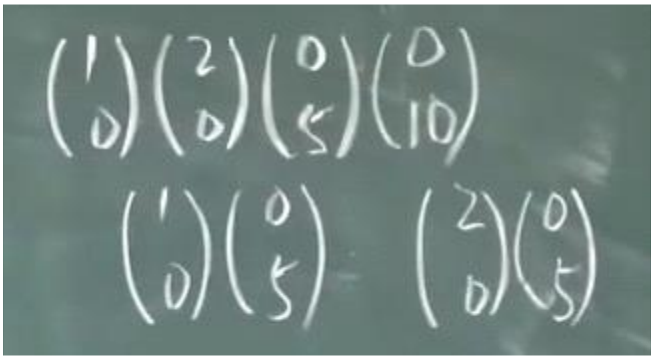
那么α_1、α_2就是这个向量组的极大线性无关组，简称极大无关组

1）α_1和α_2是线性无关的

2）找线性无关的向量组的向量的个数是最大的

（就是说，在这个向量组里，只能最多找到两个无关的向量，如果再出现第三个，那么这三个就相关了）

一个向量组的极大无关组不唯一，但是向量个数一定是一样的



任意两个极大无关组，含向量个数相同

1)全是零的向量组，无极大无关组

2)线性无关向量组的极大无关组是其本身

3)任何向量组均与其极大无关组等价（等价就是可以线性表示）

向量组的秩：其极大无关组含有向量的个数

向量组的秩：极大无关组含向量个数．$r(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)$

矩阵的秩：非零子式的最高阶数

注1）$0\le r(\alpha_1\cdots\alpha_s)\le\min\{$向量的个数，维数$\}$

0向量的话就是0

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\9\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\8\\1\end{pmatrix}$$
$$\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\alpha_5$$

这组向量组顶多3个极大无关组

原因：n+1个n维向量一定线性相关，所以4个3维向量一定线性相关，最多只可能3个3维向量线性无关

（个人的拙见：向量组的秩实际上就是阶数。极大无关组是无关的，4个3维必相关，不符）

2）$\alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关 $\Longleftrightarrow r=s$.

3）…… 相关 $\Longleftrightarrow r<s$.

定理：$\alpha_1\cdots\alpha_s$ 可由 $\beta_1\cdots\beta_t$ 表示，$r(\alpha_1\cdots\alpha_s)\le r(\beta_1\cdots\beta_t)$

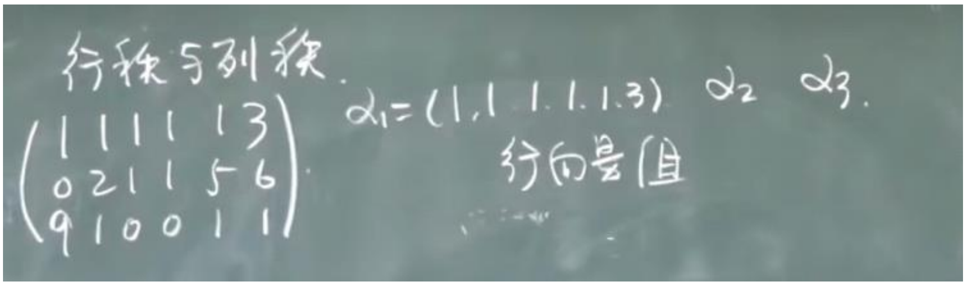
（从空间的角度理解，高维可以表示低维，但是低维表示不了高维，比如平面直角坐标系表示不了三维立体图形，但是空间直角坐标系里却可以表示二维的平面）

定量：若两个向量组等价，那么他们的秩相等，反之有相等的秩，不一定等价

（等价就是能相互表达，肯定共面，所以秩显然相等）

向量组的秩（二）

2024年2月4日 19:27

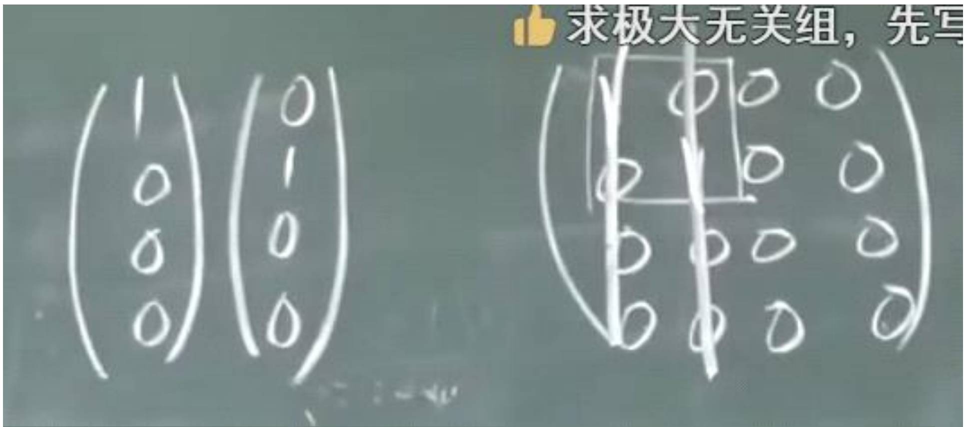


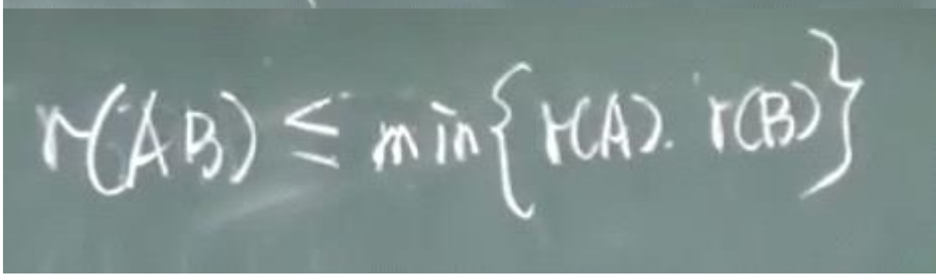
行向量组的秩就叫行秩

列向量组的秩就叫列秩

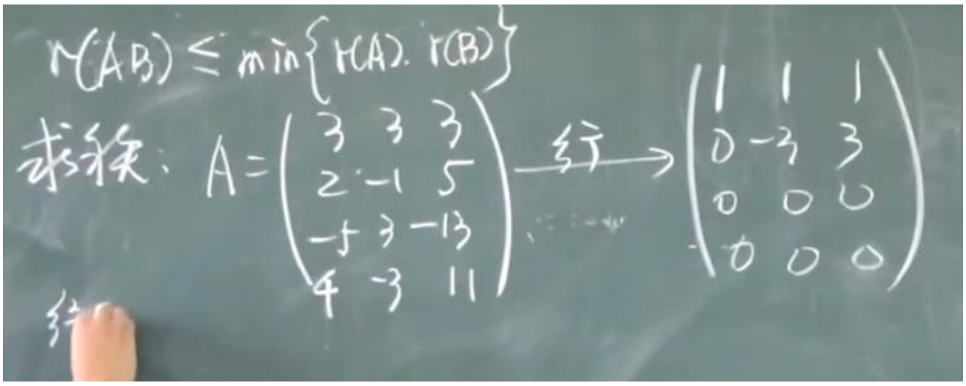
显然在上面这个例子，行秩和列秩都≤3

行秩=列秩=R(A)矩阵的秩

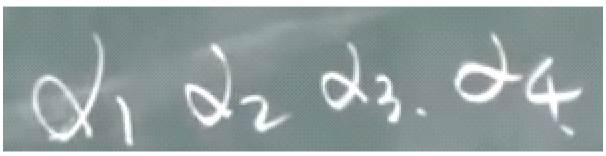




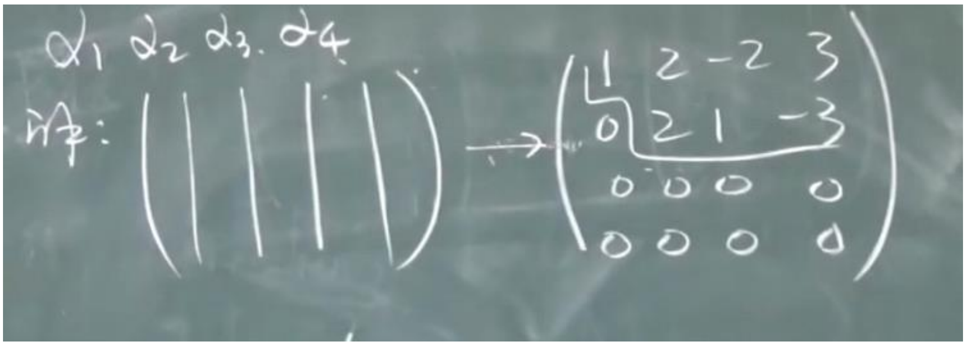
求矩阵的行秩和列秩



求向量组的秩，并判断是否线性相关



的秩



由此秩=2

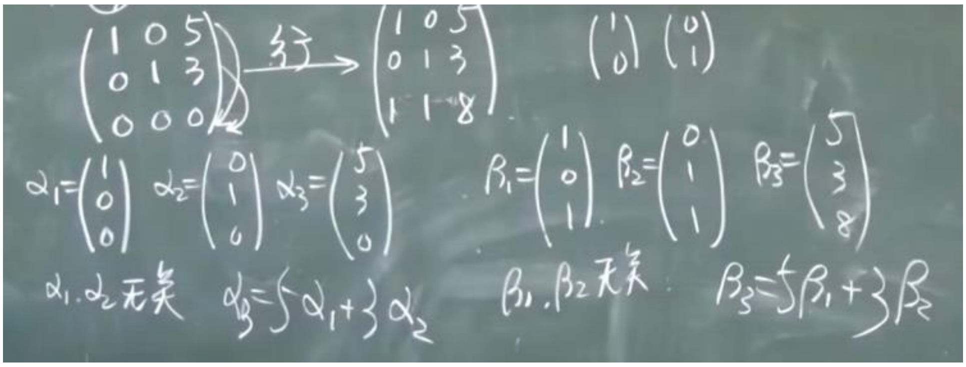
秩小于向量组的个数，所以线性相关

（可以直接记住，秩小于向量数，相关；秩等于向量组，无关；

一个线性无关的向量组，其极大无关组就是它本身）

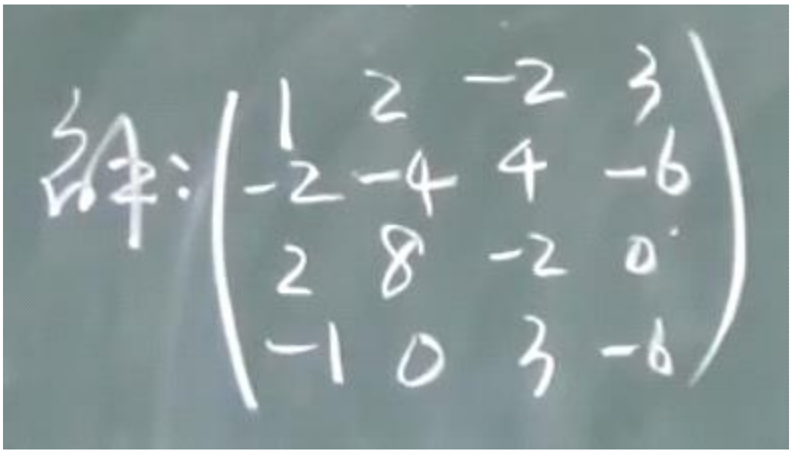
求向量组a1,a2,a3,a4的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组来表示所有其余向量

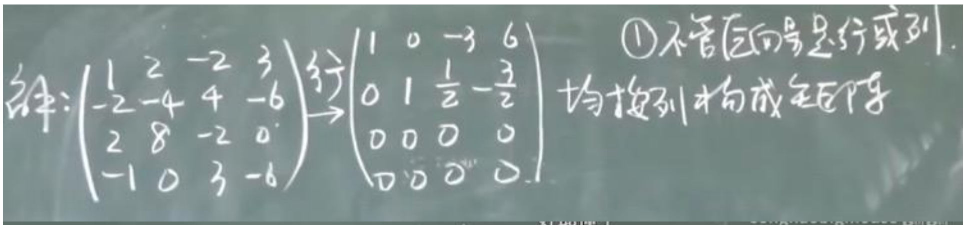
定理：对矩阵a仅做初等行变换，化成矩阵b，那么矩阵a的列向量组同矩阵b的列向量组，有完全相同的线性关系。（初等行变化不改变矩阵列向量组的线性关系）

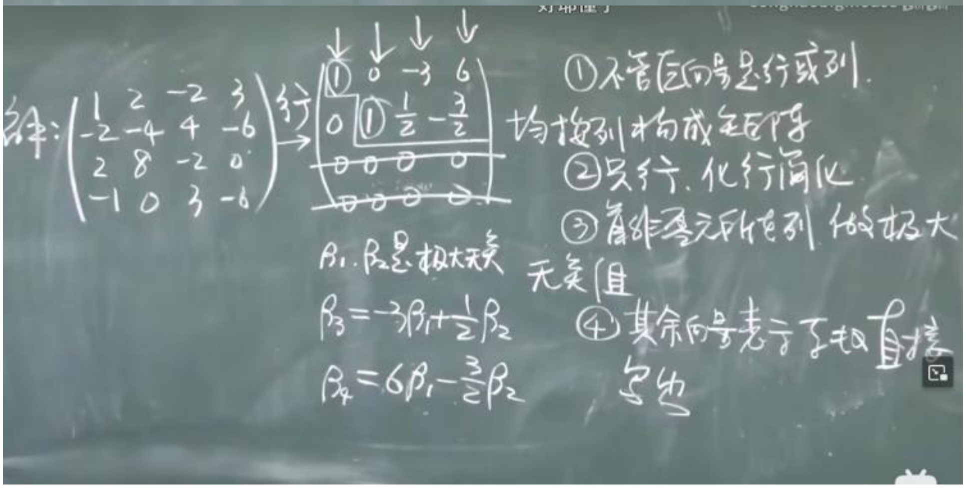


求α_1、α_2、α_3、α_4的一个极大线性无关组，并给出其余向量用该极大线性无关组表示的线性表达式

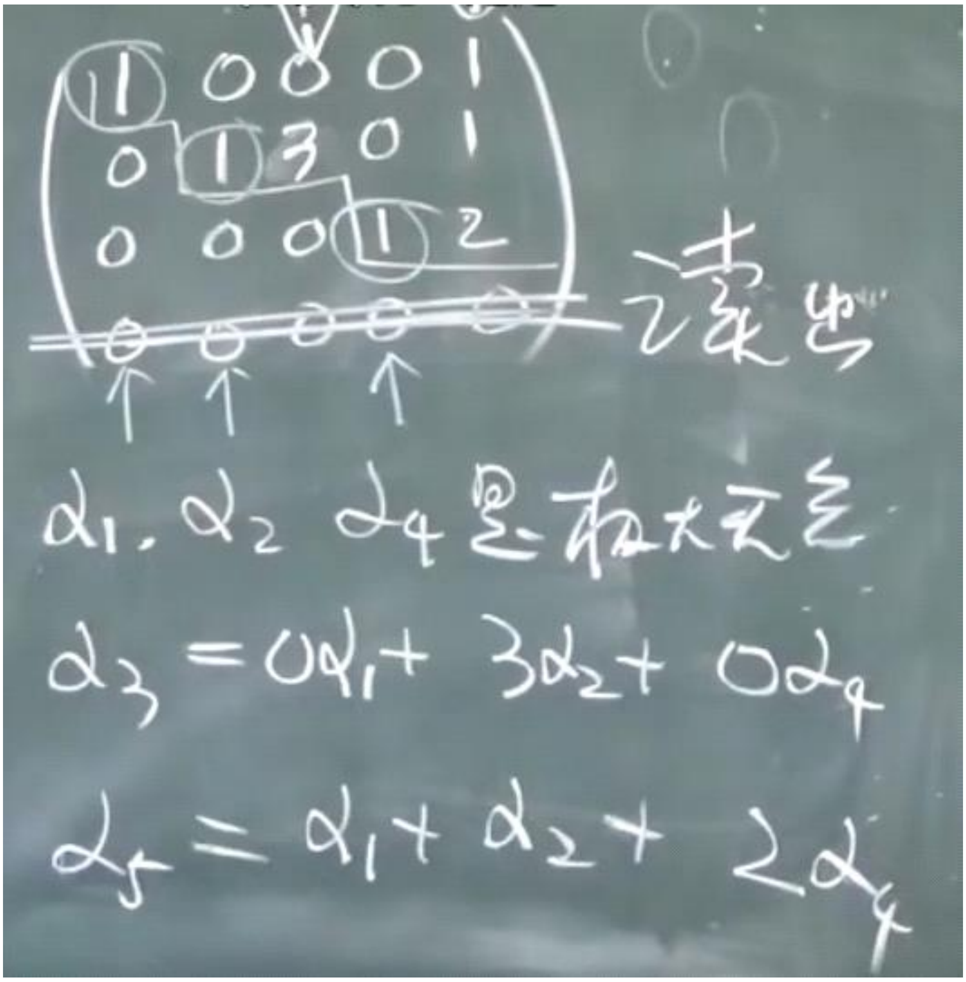
1.向量组按列构成矩阵







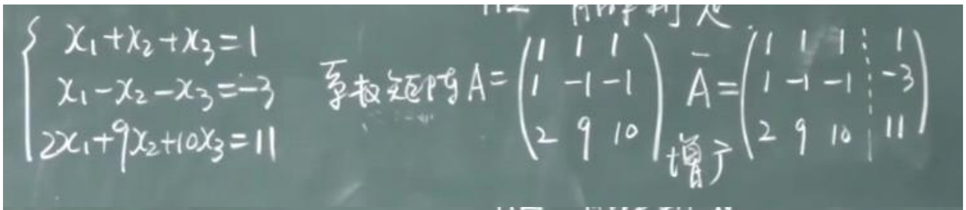
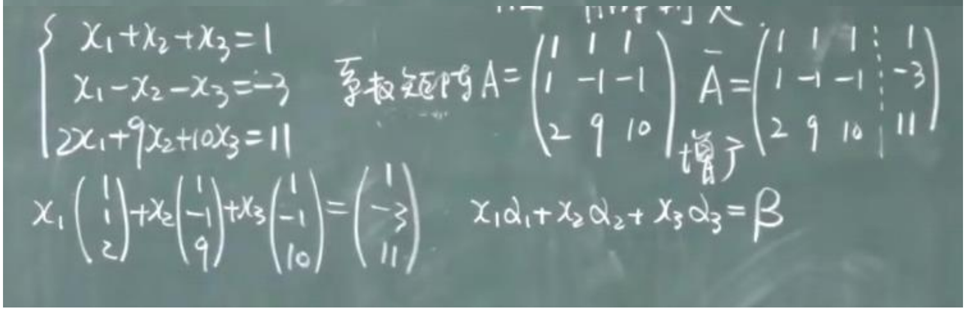
极大线性无关组可能不止一个，可能存在多个等价的极大线性无关组，这里取了前两个，因为方便表示



线性方程组有解判断

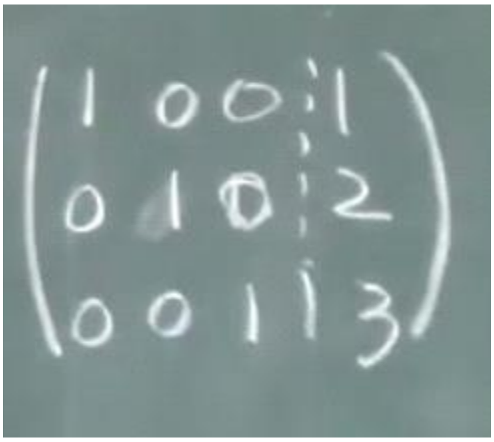
2024年2月5日 9:03

增广系数矩阵

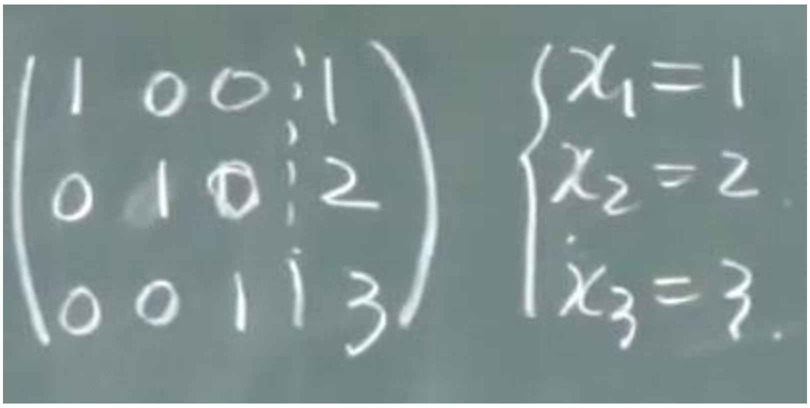



对增光系数矩阵做初等行变换

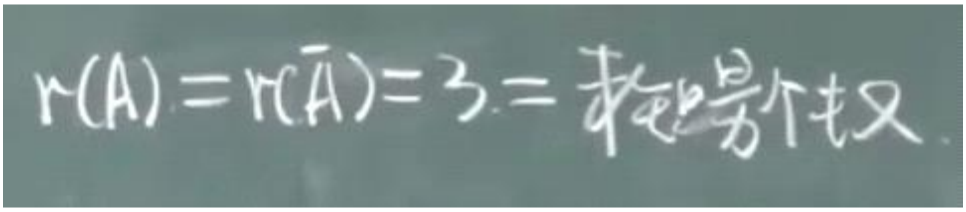
1.假设化的结果是这个样子



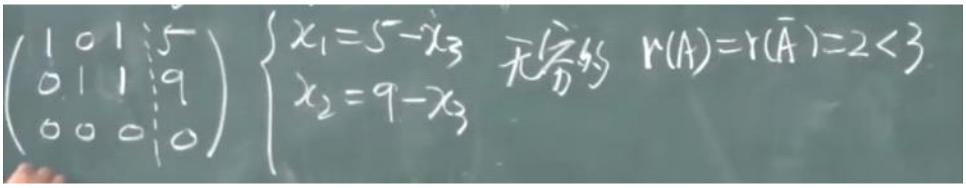
此时x是只有唯一的解



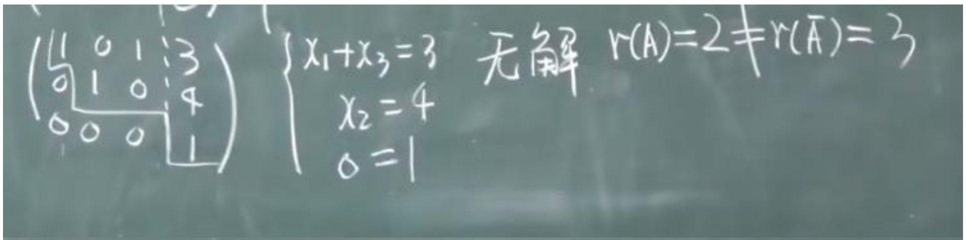
此时，矩阵的秩=增光系数矩阵的秩=未知量个数

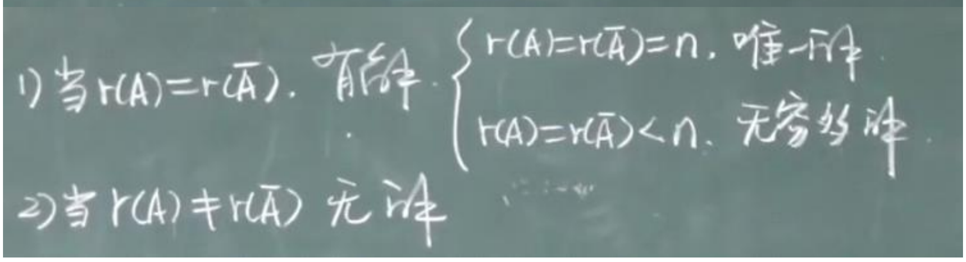


2.假设结果是这个样子

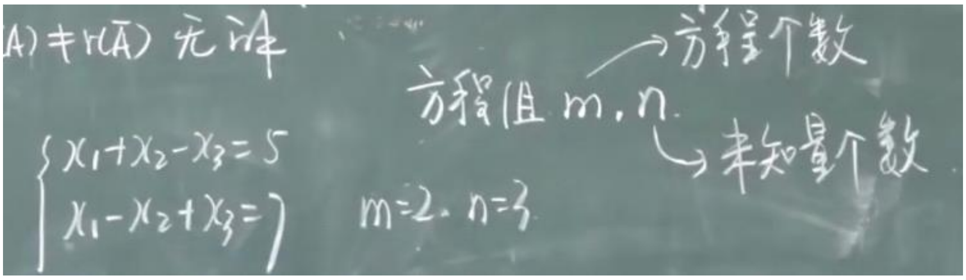


3.假设是这个样子





判断方程组是否有解

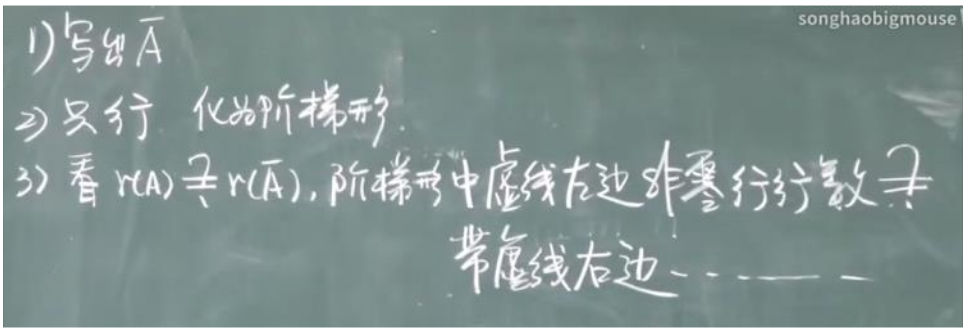


怎么判断秩相不相等

1）写出增广系数矩阵

2）只做初等行变换，化出阶梯形

3）看矩阵的秩和增广系数矩阵是否相等，虚线左边非零行的行数和带虚线右边非零行的行数

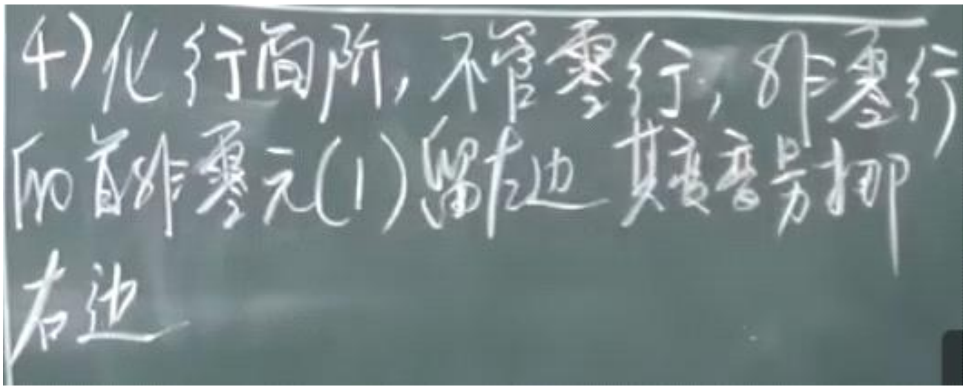


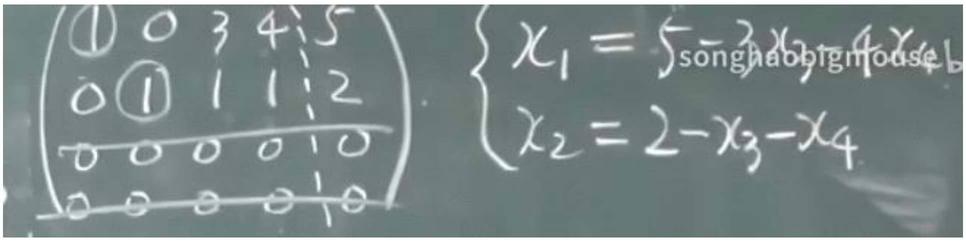
相等并且等于未知量个数，有唯一解

相等并且小于未知量个数，无穷解

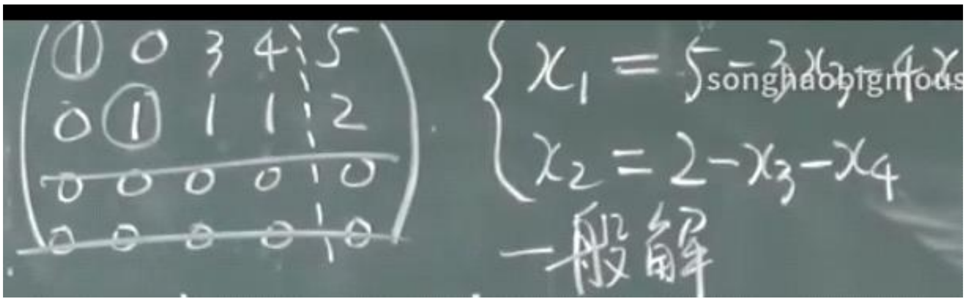
不相等，无解

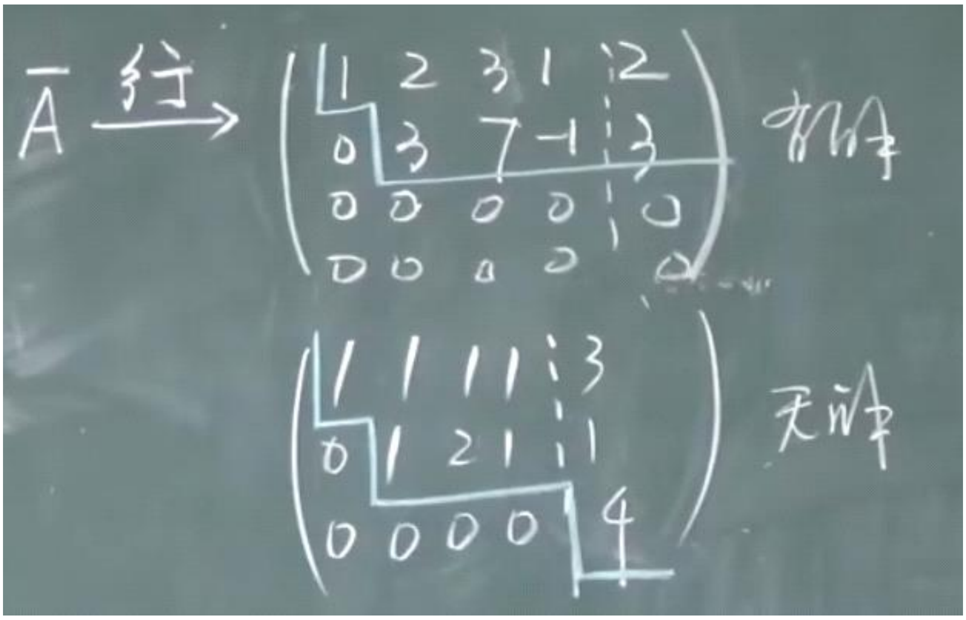
4）化为行简化阶梯形



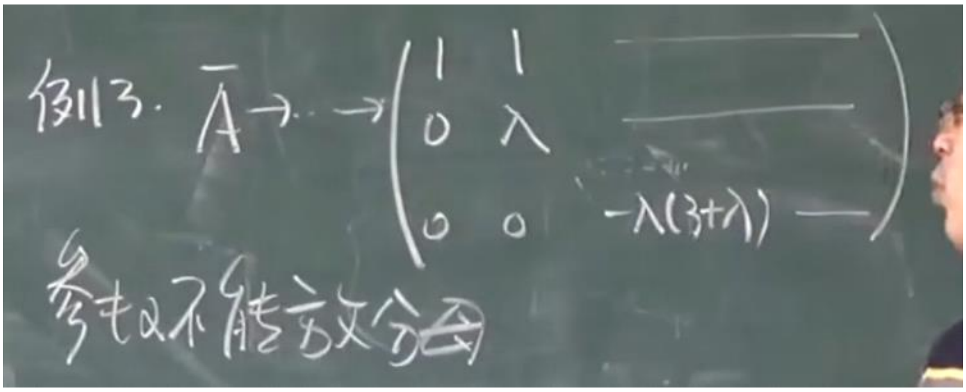


一般解





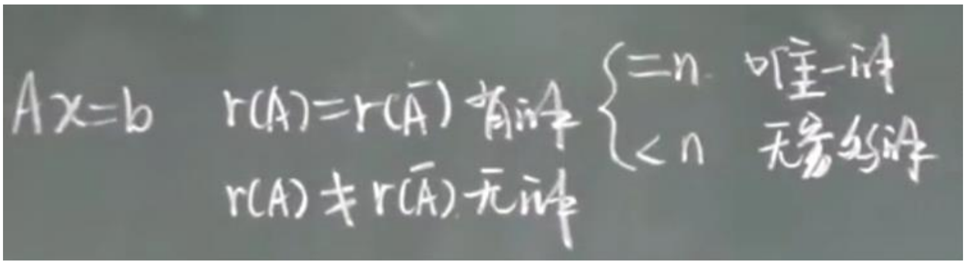
带参数的，参数不能放分母上


例13. $\bar{A} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & \lambda & & \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & \end{pmatrix}$
参数不能放分母

齐次方程组的解

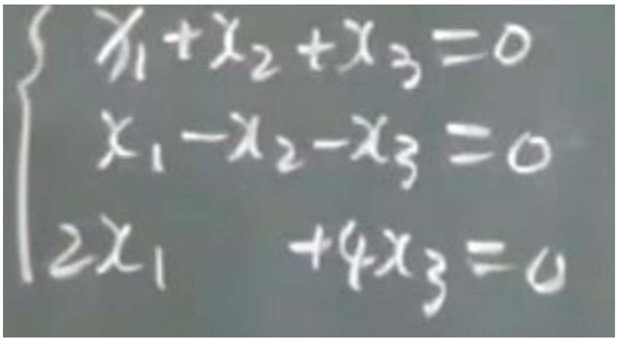
2024年2月5日　　10:26

本章在书P96

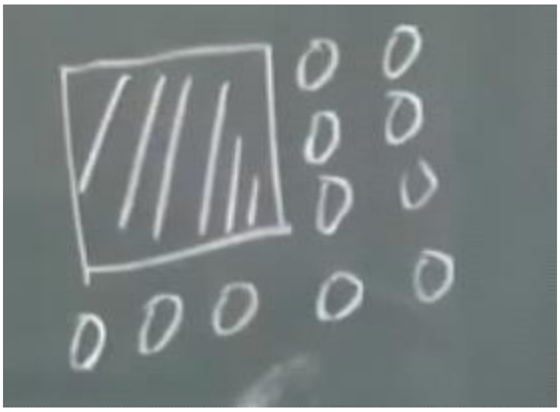


n是未知量个数

等号右边都是0就是齐次线性方程组

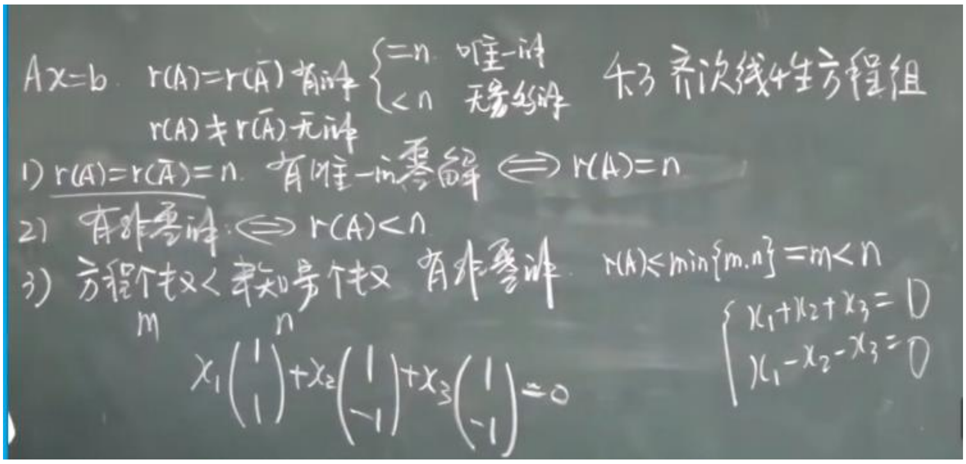


齐次线性方程组一定有解（大不了取0），说明齐次线性方程组的矩阵和增广系数矩阵的秩一定相等



（因为，加多少行多少列0矩阵的秩都不会变

矩阵的秩是非零子式的最高阶数）

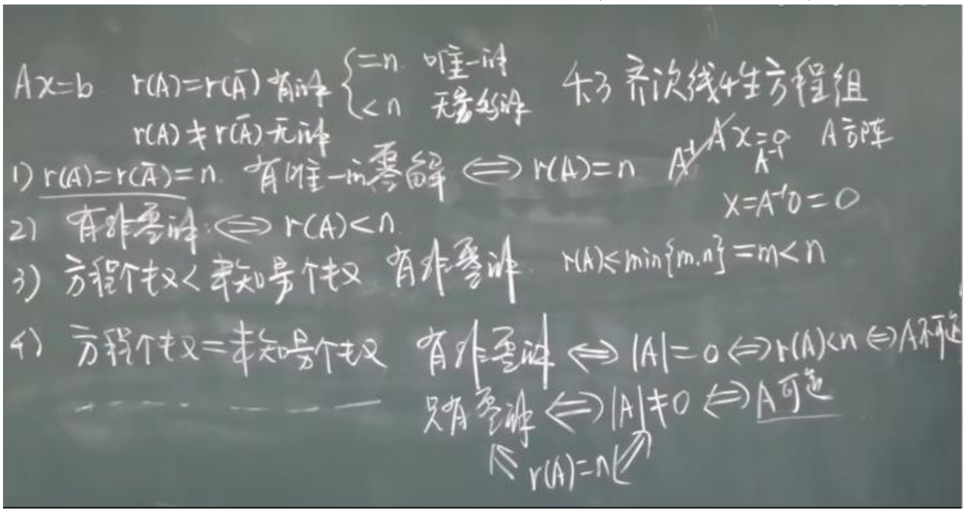


3）相当于向量组的个数(未知数个数n)大于维数(m)时一定线性相关(有非零解)，特别地n+1个n维向量一定线性相关。

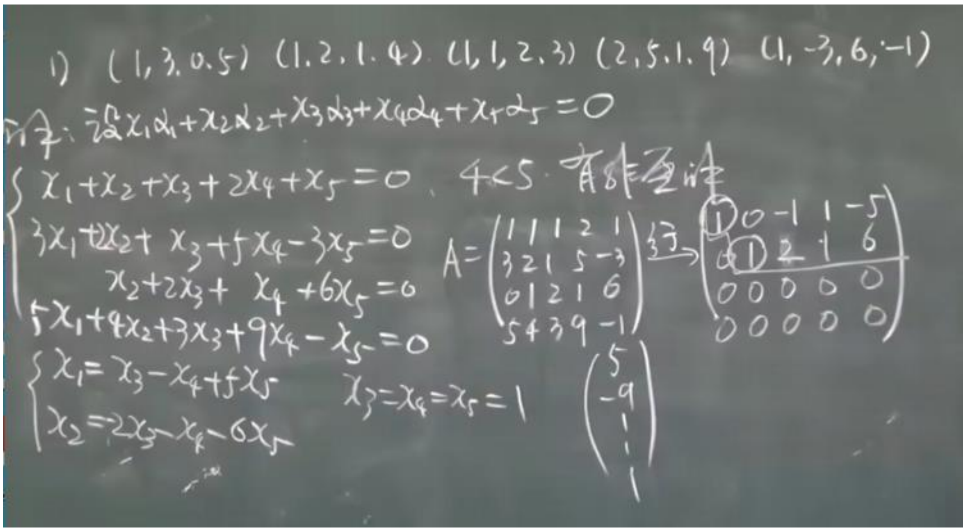
4）方程个数=未知数个数，有非零解，相当于$|A|$(*系数行列式的值*) $=0$

（有非零解，说明$r(A) < n$，*即矩阵的秩小于阶数，整个矩阵的值必为0*，简单理解矩阵的值等于0一定不是满秩，所以有非0解）

方程个数=未知数个数，只有零解，相当于$|A|$(*系数行列式的值*) $\neq 0$



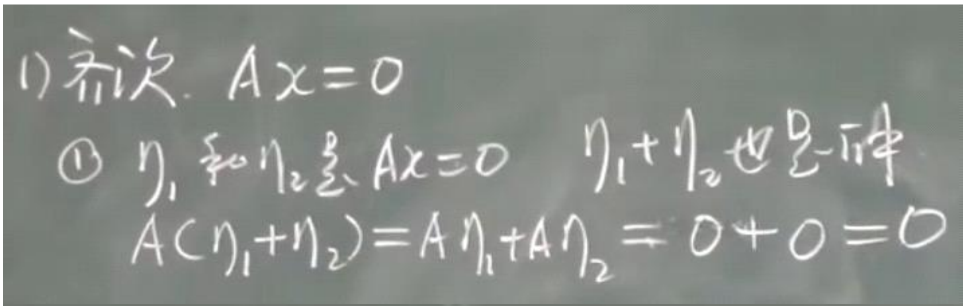
例题：判断以下向量是否线性相关，如果相关，写出系数

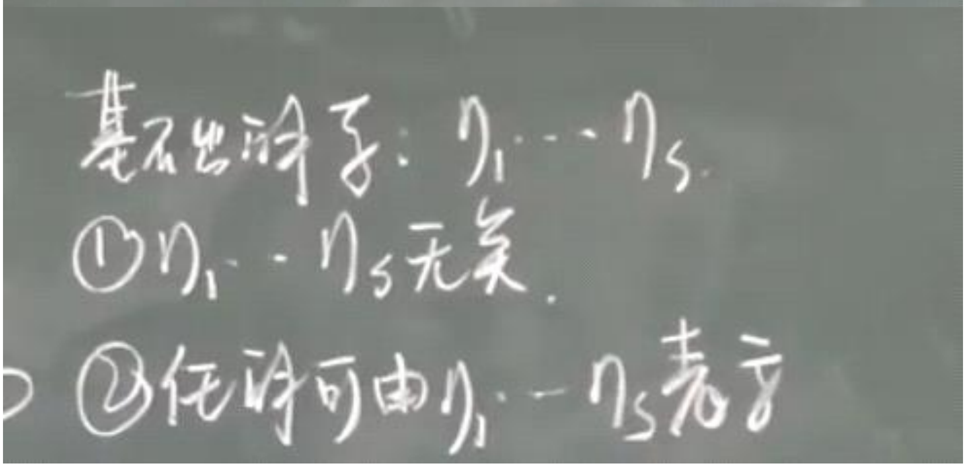


无穷多解，随便取一组

方程组解的结构（一）

2024年2月5日　　14:16



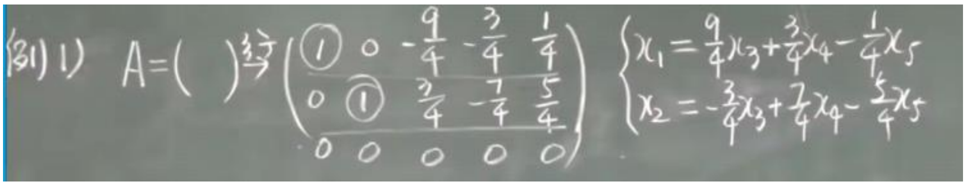


基础解系

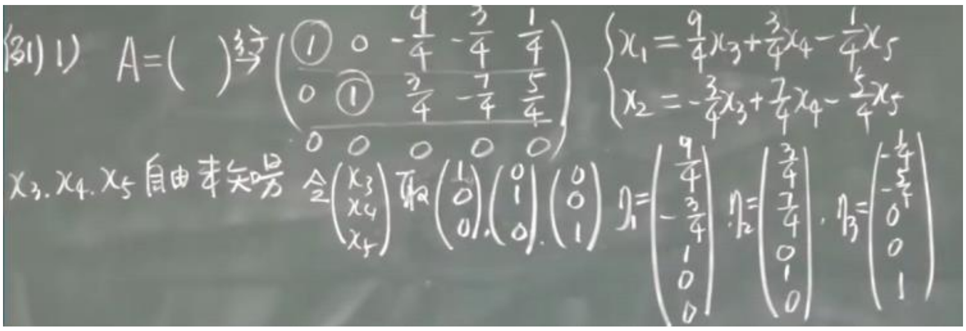
1）$\eta_1 \cdots \eta_s$*线性无关*

2）任意解可由$\eta_1 \cdots \eta_s$*中的一部分表示*

基础解系就是极大线性无关组

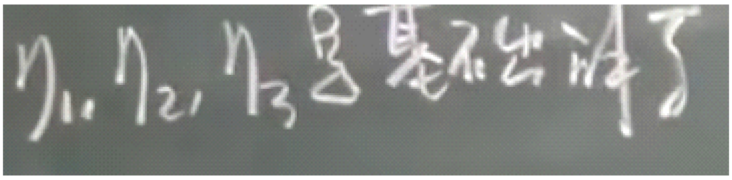


等号右边是自由未知量



（表面：三个自由未知量所以取三个

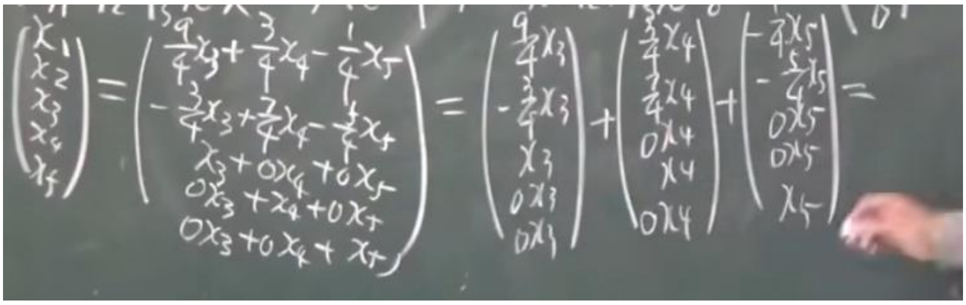
实际：为了得到基础解系一定得是向量组的满秩否则不是极大无关组，这个时候上面的非自由未知量不管，一定得让下面的自由未知量的部分可以适用接长向量定理所以一定得满秩）



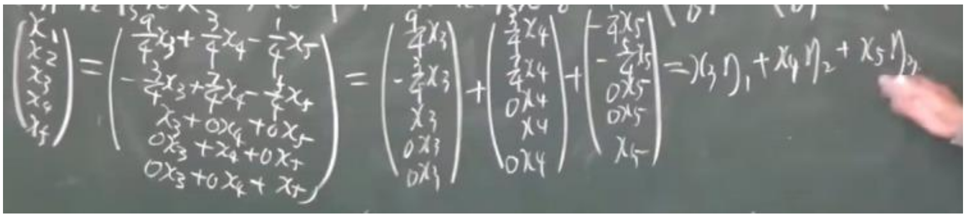
证1）$\eta_1 \cdots \eta_s$*线性无关*

狗尾续貂定理 无关向量组的接长向量组也线性无关

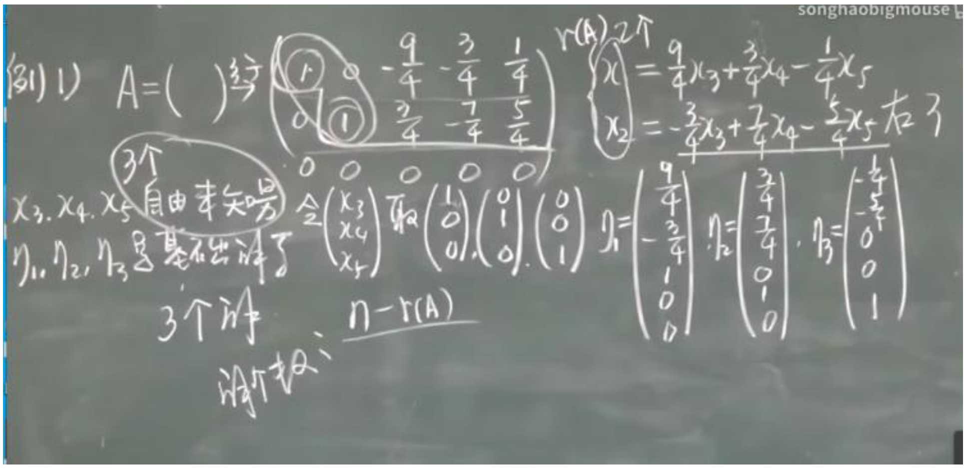
2）任意解可以由$\eta_1 \cdots \eta_s$*中的一部分表示*

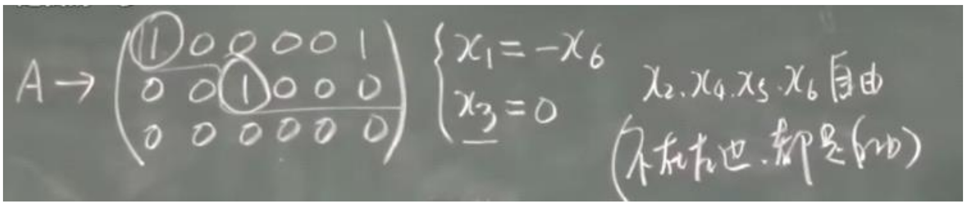


向量相加等于对应分量相加



解的个数





$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_6 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

x_2, x_4, x_5, x_6 自由

(不标出也，都是自由)

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$ 取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$