

第二十三·合作博弈·效率、公平与团体理性

hoochanlon

August 6, 2023

1 塔木德的妇女部婚卷

《塔木德·妇女部·婚卷》名富翁在婚书中向他的三位妻子许诺，死后将给A老婆100个金币，B老婆200个金币，C老婆300个金币。可是富翁死后人们发现他的遗产根本不到600个金币，那么三位妻子应怎么分配这位富翁的遗产呢？

拉比的具体裁决方案：

- 只有100金币时，平均分配法 $100/3, 100/3, 100/3$ 。
- 只有200金币时，神奇分配法50, 75, 75。
- 只有300金币时，按比例分配法50, 100, 150。

遗产分配需要满足的原则：

- 仅分割有争议财产，无争议财产不需要分割。
- 宣称拥有更多财产权利的一方，其最终所得不少于宣称拥有较少财产权利一方。
- 财产争议者超过两人时，将所有争议者按照其诉求金额排序，最小者自成一组，剩下所有争议者另成一组，争议财产在两组间公平分配。

这样分遗产的意义，当资源匮乏的时候能够保住弱势方的利益，当资源充足的时候，又有利于体现所有者的意愿。从而起到了兼顾的作用。根据这个原则，我们可以推导出任意遗产的分配结果：

- 若 $N \leq 150$ ，ABC各得 $N/3$ 。
- 若 $150 < N \leq 250$ ，A得50，B和C各得 $(N-50)/2$ 。
- 若 $250 < N \leq 350$ ，A得50，B得100，C得到 $N-150$ 。
- 若 $350 < N \leq 500$ ，A得50，B得 $(N/2)-75$ ，C得 $(N/2)+25$ 。
- 若 $500 < N < 600$ ，A得 $(N/2)-200$ ，B得 $(N/4)+50$ ，C得 $(N/4)+150$ 。
- 若 $N \geq 600$ ，A得 $N/6$ ，B得 $N/3$ ，C得 $N/2$ 。

2 合作博弈和非合作博弈

2.1 合作博弈和非合作博弈区别

合作博弈与非合作博弈，两者的主要区别在于人们的行为互相作用时，当事人是否达成一个具有约束力的协议，如果有，就是合作博弈；没有，就是非合作博弈。非合作博弈模型强调的是个体理性，以个体利益最大化为原则；合作博弈强调的是群体理性，以实现群体利益最大化为目标。

2.2 合作博弈和非合作博弈联系

非合作博弈是参与者无法选择协调相互之间的策略选择的博弈，当其他参与者会对我的策略选择做出最优反应时，什么才是我的最佳策略选择。合作博弈是参与者可以协调相互之间策略选择的博弈，合作博弈主要解决如果参与者的策略可以相互协调，那么什么样的选择才会带来整体利益最大化。

一般而言，承诺不可信，相互的协议就不可能达成，得到的往往是非合作博弈解。如果承诺可信，相互之间能达成有约束力的协议，得到的往往合作博弈解。由此，通过一个有约束力的协议，可以将非合作博弈转化为合作博弈，把原本不能实现的合作方案得以实现，每个参与者的收益都能得到提高，从而实现群体利益最大化。

2.3 合作博弈的基本概念

在合作博弈中，有许多不同于非合作博弈的概念体系，合作博弈的核心是参与人如何结盟，以及如何分配通过结盟产生的新增收益。每个参与者都能按照自己的利益和其他参与者组成一个小集团，彼此合作以谋求更大的利益。

设：参与人为 $1-N$ ， S 为参与人的一个集合， $S \subseteq N$ ， $S \neq \emptyset$ ， $S \neq N$ ， $S \neq \{i\}$ ， $i \in N$ 。合作博弈的结果必须是帕累托改进，博弈各方的利益都有所增加，或至少有一部分参与者的利益有所增加，另一部分参与者利益不受损失。

合作博弈必须能够产生出一种合作的剩余，那么至于合作剩余在各方怎么分配，取决于博弈各方的力量对比和制度设计。合作设计的分配，它既是合作的结果，又是达成合作的前提条件，因此更大联盟的总收益一定是大于较小联盟的收益。合作博弈强调群体理性，强调效率、公平和正义，要想强调群体利益最大化，就需要建立一个描述群体理性的特征函数。

给定一个 N 个参与人的合作博弈，特征函数 v 是从所有不同联盟（共 2^N 个）到一个实数集的映射。

$v(S)$ 是 N 中的联盟 S 和其他联盟 $(N-S)$ 的最大期望收益，称为联盟 S 的特征函数。

特征函数是研究合作博弈的基础，决定特征函数的过程实际上就是分析合作博弈的过程。

3 合作博弈的分析框架

非合作的博弈是纯粹个体之间的博弈，合作博弈是联盟之间的博弈，单个个体也被认为是联盟的一种，所以合作博弈也可以分析个体之间的博弈。特征函数是某个联盟与其他联盟博弈时所获得的最大收益，这是某个联盟是否与其他参与者结盟的决策基础。更大联盟的建立一定不能让参与联盟的人吃亏，合作收益可以在参与者之间自由转移（可转移效用）。

在合作博弈中参与者的收益转让是与协议联系在一起的，联盟成员一般用支付货币的方式，来弥补参与者放弃单人联盟或其他联盟形式的预期损失（旁支付）。在允许旁支付的条件下，在确保每个参与者至少获得非合作博弈收益的基础上，那些能使总收益达到最大值的所有合作博弈联盟，构成合作博弈的解。如果存在两种或两种以上的有效配置方案时，那么所有的有效解的集合构成的解集（全部有效）的帕累托最优的联盟结构和收益分配方式的集合，参与者至少能够获得非合作博弈下的收益。

合作博弈中的核（包含所有使团体中的任何成员，都不能从联盟重组中获益的配置方案）。合作博弈的核可以是任意的，也可以一种或多种联盟结构，而没有核的联盟结构，我们称作“空核博弈”。合作博弈的解集由全部有效策略组合与旁支付构成，旁支付保证每个参与者都不会因为合作而降低收益，许多博弈的解集往往包含多个有效解。核是不被占优的联盟组成（联盟成员无法因为离开联盟而组建新联盟获利）。

对每个参与者贡献进行利益分配并没有统一标准，因为这涉及对公平性、公正性的价值判断。

1. 先考虑A联盟和BC联盟博弈。
2. 再考虑B联盟和AC联盟，C联盟和AB联盟的博弈。
3. 求出ABC大联盟的特征函数。
4. 找解集。
5. 找核。
6. 对每个参与者的贡献进行分析，作为利益分配的标准。

在合作博弈中，这种边际生产力就可以理解为一个参与者的最后上车者价值（当参与者作为最后一个加入联盟时对联盟的新增价值）。不过最后上车者价值并不能描述参与者的贡献度。因此就有了夏普利值。夏普利值用于衡量合作博弈总收入的贡献，并以此进行利益分配。按照某种生产要素对财富的边际贡献来分配，这是最有效率的。

一个博弈的夏普利值被定义为他在所有可能加入联盟的次序下，对联盟边际贡献的平均值，对于N个参与者的合作博弈，夏普利值的计算公式如下：

表23.1 不同联盟创造的价值

| 联盟 | 价值 |
|-----|-----|
| A | 80 |
| B | 100 |
| C | 60 |
| AB | 250 |
| AC | 300 |
| BC | 360 |
| ABC | 500 |

表23.2 不同联盟顺序的边际贡献值

| 联盟顺序 | A的贡献 | B的贡献 | C的贡献 |
|------|------|------|------|
| ABC | 80 | 120 | 300 |
| ACB | 80 | 200 | 220 |
| BAC | 100 | 100 | 300 |
| BCA | 140 | 100 | 260 |
| CAB | 240 | 200 | 60 |
| CBA | 140 | 300 | 60 |
| 合计 | 780 | 1020 | 1200 |
| 夏普利值 | 130 | 170 | 200 |

$$\phi_i(n, v) = \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq N \setminus i} \binom{n-1}{|S|} [v(S \cup i) - v(S)]$$

通过夏普利值，我们可以发现一个人本身的能力，并不能很好体现出他对团体的贡献，需要通过计算其对团体的边际贡献，才能更好的来评价他

对团队的价值。为什么用最好上车者价值来计算一个人对团队的贡献，这是因为当一个人威胁要离开团队的时候，其可以从团队获取的最大利益，那就是他的最后上车价值。

大公司往往通过扩大经营规模，创造出很高的总价值，但每个人的这个最后上车价值却不高，那么这样的话，大公司就不会为了挽留某个员工，而付出太大代价，每个员工离开，几乎都不会影响组织的正常运行，因为离开会降低其预期收入（店大欺客，客大欺店）。