26-1 DSL 정규 세션

Math for ML

- ☐ 본 과제는 학회 정규 세션「Linear Algebra」,「Basic Statistics」및「Math for ML」일부 내용을 다루며, 개념의 이해와 실제 활용 사례에 대한 이해를 돕기 위해 기획되었습니다. 평가를 위한 것이 아니므로, 주어진 힌트를 적극 활용하시고 학회원 간 토론, Slack의 질의응답을 활용하여 해결해주십시오. 단, 답안 표절은 금지합니다.
- ☐ 2/11 (수) 23시 59분까지 Github 에 PDF 파일 하나로 제출해주십시오. Github에 제출하는 방법을 모른다면 학술부장 혹은 과제 질의응답을 위한 오픈채팅방을 활용해주십시오.

문제 1 선형대수 기초 (Linear Algebra Basic)

1. $Ax = b$의 동치 조건

$n \times n$ 정사각행렬 A에 대하여 다음 조건들은 동치(equivalent)입니다.

(a) 행렬 A는 가역적(invertible)이다.

(b) 임의의 $n \times 1$ 벡터 b에 대하여 방정식 $Ax = b$는 유일한 해를 갖는다.

(c) 동차 방정식(Homogeneous equation) $Ax = 0$은 오직 자명한 해(trivial solution, $x = 0$)만을 갖는다.

1-1. 다음과 같은 삼변수 함수 $f(x, y, z)$가 주어져 있습니다.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 1.5z^2 + xy + yz + zx$$

(1) 이 함수의 헤시안 행렬(Hessian Matrix) A를 구하고 PD(Positive Definite), PSD, ND, NSD 중 무엇인지 판별하시오.

$$A = \begin{bmatrix} \nabla f_x \\ \nabla f_y \\ \nabla f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla(2x+y+z) \\ \nabla(2y+x+z) \\ \nabla(3z+y+x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ \lambda-1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\dots\ \lambda = 1,\ 3 \pm \sqrt{2}.\ > 0 \dots$ PD.

(2) 위에서 구한 행렬 A의 역행렬 A^{-1}을 계산하시오.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

(3) 만약 특정 상수 k에 대해 함수의 항 xy가 kxy로 변하여 $\det(A) = 0$이 된다면, 조건 (b)는 여전히 성립하는가? 그 이유를 행렬식(determinant)과 관련지어 설명하시오.

det(A)가 0이면 역행렬의 존재 × 이므로 동치조건에 의해 조건 (b)는 성립×.

1-2. (Optional)

(1) (a), (b), (c) 세 조건들이 동치임을 증명하시오.

(2) 행렬 A가 가역적이라고 가정할 때, 임의의 b에 대하여 $Ax = b$를 만족하는 해 x가 항상 존재함을 대수적으로 유도하여 증명하고 해당 증명의 의미를 서술하시오.

문제 2　　특이값 분해 (SVD)

특이값 분해(SVD)는 대각화와 달리 모든 크기의 행렬에 대해 적용이 가능하며, 그 계산 과정은 다음과 같습니다.

> 1) 항상 대칭 행렬을 이루는 두 행렬 B^TB, BB^T 를 계산하고, 이들의 고유값을 계산해 특이값 σ와 고유 벡터를 통해 직교대각화하여 $B^TB = VDV^T, BB^T = UDU^T$ 를 구합니다.
>
> 2) 0이 아닌 특이값들을 내림차순으로 나열하여 Σ를 구성하고, 이들을 모두 활용해 $A = U\Sigma V^T$ 를 구합니다.

다음 행렬 B에 특이값 분해를 적용하였을 때 나오는 행렬 U, Σ, V^T 를 각각 구하시오.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B^TB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 이 행렬의 고유값은 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$.

즉, 특이값은 $\sqrt{2}, 1$.

따라서 $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\lambda_1 = 2$일 때 norm 1인 고유벡터 $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 1$일 때 norm 1인 고유벡터 $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 0$일 때 norm 1인 고유벡터 $v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$.

$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

문제 3 Convex Sets & Functions

3-1. Convex Set

1. 다음 집합들이 Convex set인지 증명하시오.

$$C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\right\}$$ ~ Half space 여서 Convex.

$$C_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \leq 1\right\}$$ ~ convex함.

$$C_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq e^x\right\}$$ ~ $g(x)=e^x$, $g''(x)=e^x>0$이서 convex함.

2. 함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 convex function일 때, f의 epigraph인 집합 S가 convex set임을 보이시오.

$$S = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}$$

$f(\theta x_1+(1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1)+(1-\theta)f(x_2)$ 성립하므로 $t_\theta \geq f(x_\theta)$ $\Rightarrow$ $(x_\theta, t_\theta) \in S$.

3-2. Convex Function

1. Convex 함수의 합성

   $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$가 실수 값을 갖는 함수라고 합시다.

   (a) 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 convex일 때, $f(x) + g(x)$ 또한 convex임을 보이시오.

   h라 하면 h역시 convex함.

   (b) A와 b가 호환되는 크기의 행렬과 벡터라고 합시다. $f(x)$가 convex라면 $f(Ax + b)$ 또한 convex임을 보이시오.

   g라 하면 g역시 convex.

2. Convex Optimization

   또 다른 함수 $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$를 고려해 봅시다.

$$f(x) = \|Ax - b\|^2.$$

   오직 convex 함수의 정의만을 사용하여, $f(x)$가 $x \in \mathbf{R}^d$에서 convex임을 보이시오.

$$f(\theta x_1+(1-\theta)x_2) \leq (\theta|Ax_1-b| + (1-\theta)|Ax_2-b|)^2$$

즉, $f(x)$는 $x \in \mathbb{R}^d$에서 convex.

문제 4 정보이론 (Information Theory)

4-1. Entropy

확률분포 $p(x, y)$ 가 다음과 같이 주어졌다고 합시다.

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

다음 값들을 구하시오.

(a) $H(X), H(Y)$.

$= -\left(\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3}\right)$

(b) $H(X \mid Y), H(Y \mid X)$.

$\frac{2}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times 0 = \frac{2}{3}$.

(c) $H(X, Y)$.

$\log_2 3 \approx 1.585$

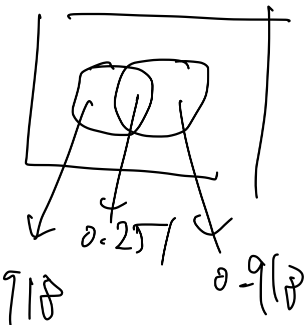
(d) $H(Y) - H(Y \mid X)$.

$0.918 - 0.667 = 0.251$

(e) $I(X; Y)$.

$0.918 - 0.667 = 0.251$

(f) (a)부터 (e)까지 구한 양(quantity)들을 벤 다이어그램으로 나타내시오.



4-2. KL-divergence

(a) $D(q\|p) = D(p\|q)$ 가 성립하지 않는 반례를 제시하시오.

$p = \{0.1, 0.9\}$, $q = \{0.5, 0.5\}$에서 $D(p\|q) \neq D(q\|p)$.

(b) $D(p\|q) \geq 0$ 임을 보이시오. (Hint : Jensen's Inequality)

$D(p\|q) \geq -\log(1) = 0$.

따라서 $D(p\|q) \geq 0$.

Reference

- Elements of Information Theory (2nd Ed.), T. M. Cover & J. A. Thomas
- Convex Optimization for ML, Prof. Changho Suh

Data Science Lab
담당자: 14 기 박창용, 어희정, 여준호
qkrckddyd0@yonsei.ac.kr
heejung.uh@gmail.com
asap03153@gmail.com