기수 : 15기 이름 : 이준민

26-1 DSL 정규 세션

Math for ML

- ☐ 본 과제는 학회 정규 세션 「Linear Algebra」, 「Basic Statistics」 및 「Math for ML」 일부 내용을 다루며, 개념의 이해와 실제 활용 사례에 대한 이해를 돕기 위해 기획되었습니다. 평가를 위한 것이 아니므로, 주어진 힌트를 적극 활용하시고 학회원 간 토론, Slack의 질의응답을 활용하여 해결해주십시오. 단, 답안 표절은 금지합니다.
- ☐ 2/11 (수) 23시 59분까지 Github 에 PDF 파일 하나로 제출해주십시오. Github에 제출하는 방법을 모른다면 학술부장 혹은 과제 질의응답을 위한 오픈채팅방을 활용해주십시오.

문제 1 선형대수 기초 (Linear Algebra Basic)

1. $Ax = b$의 동치 조건

$n \times n$ 정사각행렬 A에 대하여 다음 조건들은 동치(equivalent)입니다.

(a) 행렬 A는 가역적(invertible)이다.

(b) 임의의 $n \times 1$ 벡터 b에 대하여 방정식 $Ax = b$는 유일한 해를 갖는다.

(c) 동차 방정식(Homogeneous equation) $Ax = 0$은 오직 자명한 해(trivial solution, $x = 0$)만을 갖는다.

1-1. 다음과 같은 삼변수 함수 $f(x, y, z)$가 주어져 있습니다.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 1.5z^2 + xy + yz + zx$$

(1) 이 함수의 헤시안 행렬(Hessian Matrix) A를 구하고 PD(Positive Definite), PSD, ND, NSD 중 무엇인지 판별하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$D_1 = 2 > 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$

$D_3 = \det(A) = 7 > 0$

PD

(2) 위에서 구한 행렬 A의 역행렬 A^{-1}을 계산하시오.

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(3) 만약 특정 상수 k에 대해 함수의 항 xy가 kxy로 변하여 $\det(A) = 0$이 된다면, 조건 (b)는 여전히 성립하는가? 그 이유를 행렬식(determinant)과 관련지어 설명하시오.

$\det(A) = 0$이면 A는 비가역적. $\Rightarrow$ $Ax = b$가 모든 b에 대해 유일해를 갖지않음

$\rightarrow$ 조건 (b) 성립하지 않음

1-2. (Optional)

(1) (a), (b), (c) 세 조건들이 동치임을 증명하시오.

(2) 행렬 A가 가역적이라고 가정할 때, 임의의 b에 대하여 $Ax = b$를 만족하는 해 x가 항상 존재함을 대수적으로 유도하여 증명하고 해당 증명의 의미를 서술하시오.

기수 : 이름 :

문제 2 특이값 분해 (SVD)

특이값 분해(SVD)는 대각화와 달리 모든 크기의 행렬에 대해 적용이 가능하며, 그 계산 과정은 다음과 같습니다.

1) 항상 대칭 행렬을 이루는 두 행렬 B^TB, BB^T 를 계산하고, 이들의 고유값을 계산해 특이값 σ와 고유 벡터를 통해 직교대각화하여 $B^TB = VDV^T, BB^T = UDU^T$ 를 구합니다.
2) 0이 아닌 특이값들을 내림차순으로 나열하여 Σ를 구성하고, 이들을 모두 활용해 $A = U\Sigma V^T$ 를 구합니다.

다음 행렬 B에 특이값 분해를 적용하였을 때 나오는 행렬 U, Σ, V^T 를 각각 구하시오.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

① 특이값

$BB^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

고유값 : 2, 1 $\rightarrow$ 특이값 : $\sigma_1 = \sqrt{2}$, $\sigma_2 = 1$

② U

$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

④ Σ

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

③ V

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$

$v_2 = (0, 0, 1)^T$

$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$

$V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$

문제 3 Convex Sets & Functions

3-1. Convex Set

1. 다음 집합들이 Convex set인지 증명하시오.

C_1 선형부등식 집합.
$\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2)$
선형성 때문에 Convex

C_2 $\|x\|_1 = \sum |x_i|$
절댓값은 convex.
합도 convex.
→ $\|x\|_1$ 도 convex

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \leq 1\}$$
$$C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq e^x\}$$

C_3 $y \geq e^x$
e^x는 convex.
convex 함수의 epigraph는 convex

2. 함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 convex function일 때, f의 epigraph인 집합 S가 convex set임을 보이시오.

$$S = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}$$

f가 convex이면 $t_1 \geq f(x_1)$, $t_2 \geq f(x_2)$ $\Rightarrow$ $\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2$
$\geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$
따라서 Convex set

3-2. Convex Function

1. Convex 함수의 합성

$f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$가 실수 값을 갖는 함수라고 합시다.

(a) 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 convex일 때, $f(x) + g(x)$ 또한 convex임을 보이시오.

$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. g도 동일 → 합도 Convex

(b) A와 b가 호환되는 크기의 행렬과 벡터라고 합시다. $f(x)$가 convex라면 $f(Ax + b)$ 또한 convex 임을 보이시오.

$f(Ax+b)$
선형변환은 convex 보존 → convex

2. Convex Optimization

또 다른 함수 $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$를 고려해 봅시다.

$$f(x) = \|Ax - b\|^2.$$

오직 convex 함수의 정의만을 사용하여, $f(x)$가 $x \in \mathbf{R}^d$에서 convex임을 보이시오.

노름의 정의:

$\|\lambda u + (1-\lambda) v\| \leq \lambda \|u\| + (1-\lambda) \|v\|$

$u = Ax_1 - b$, $v = Ax_2 - b$ 대입하면 Convex

기수 : 이름 :

문제 4 정보이론 (Information Theory)

4-1. Entropy

확률분포 $p(x, y)$ 가 다음과 같이 주어졌다고 합시다.

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

다음 값들을 구하시오.

(a) $H(X), H(Y)$. $H(X) = 1.$ $H(Y) \approx 0.918$

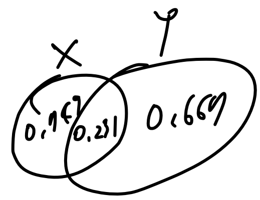
(b) $H(X \mid Y), H(Y \mid X)$. $H(X|Y) = 2/3.$ $H(Y|X) = 2/3$

(c) $H(X, Y)$. $H(X,Y) = \log_2 3 \approx 1.585$

(d) $H(Y) - H(Y \mid X)$. $= 0.918 - 0.667 \approx 0.251$

(e) $I(X; Y)$. $= 0.251$

(f) (a)부터 (e)까지 구한 양(quantity)들을 벤 다이어그램으로 나타내시오.



4-2. KL-divergence

(a) $D(q\|p) = D(p\|q)$ 가 성립하지 않는 반례를 제시하시오. $p = (0.9, 0.1)$, $q = (0.5, 0.5)$

$D(p\|q) \neq D(q\|p)$

(b) $D(p\|q) \geq 0$ 임을 보이시오. (Hint : Jensen's Inequality)

$$D(p\|q) = \sum p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$$

등호는 $p=q$ 일때만

Reference

- Elements of Information Theory (2nd Ed.), T. M. Cover & J. A. Thomas
- Convex Optimization for ML, Prof. Changho Suh

Data Science Lab

담당자: 14 기 박창용, 어희정, 여준호

qkrckddyd0@yonsei.ac.kr

heejung.uh@gmail.com

asap03153@gmail.com