26-1 DSL 정규 세션

Math for ML

- ☐ 본 과제는 학회 정규 세션「Linear Algebra」,「Basic Statistics」및「Math for ML」일부 내용을 다루며, 개념의 이해와 실제 활용 사례에 대한 이해를 돕기 위해 기획되었습니다. 평가를 위한 것이 아니므로, 주어진 힌트를 적극 활용하시고 학회원 간 토론, Slack의 질의응답을 활용하여 해결해주십시오. 단, 답안 표절은 금지합니다.
- ☐ 2/11 (수) 23시 59분까지 Github 에 PDF 파일 하나로 제출해주십시오. Github에 제출하는 방법을 모른다면 학술부장 혹은 과제 질의응답을 위한 오픈채팅방을 활용해주십시오.

문제 1 선형대수 기초 (Linear Algebra Basic)

1. $Ax = b$의 동치 조건

$n \times n$ 정사각행렬 A에 대하여 다음 조건들은 동치(equivalent)입니다.

(a) 행렬 A는 가역적(invertible)이다.

(b) 임의의 $n \times 1$ 벡터 b에 대하여 방정식 $Ax = b$는 유일한 해를 갖는다.

(c) 동차 방정식(Homogeneous equation) $Ax = 0$은 오직 자명한 해(trivial solution, $x = 0$)만을 갖는다.

1-1. 다음과 같은 삼변수 함수 $f(x, y, z)$가 주어져 있습니다.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 1.5z^2 + xy + yz + zx$$

(1) 이 함수의 헤시안 행렬(Hessian Matrix) A를 구하고 PD(Positive Definite), PSD, ND, NSD 중 무엇인지 판별하시오.

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 3 > 0$, $D_3 = 10 - 2 - 1 = 7 > 0$

$\therefore$ PD

(2) 위에서 구한 행렬 A의 역행렬 A^{-1}을 계산하시오.

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) 만약 특정 상수 k에 대해 함수의 항 xy가 kxy로 변하여 $\det(A) = 0$이 된다면, 조건 (b)는 여전히 성립하는가? 그 이유를 행렬식(determinant)과 관련지어 설명하시오.

no because A^{-1} doesn't exist

1-2. (Optional)

(1) (a), (b), (c) 세 조건들이 동치임을 증명하시오.

(2) 행렬 A가 가역적이라고 가정할 때, 임의의 b에 대하여 $Ax = b$를 만족하는 해 x가 항상 존재함을 대수적으로 유도하여 증명하고 해당 증명의 의미를 서술하시오.

$x = A^{-1}b$

문제 2 특이값 분해 (SVD)

특이값 분해(SVD)는 대각화와 달리 모든 크기의 행렬에 대해 적용이 가능하며, 그 계산 과정은 다음과 같습니다.

1) 항상 대칭 행렬을 이루는 두 행렬 B^TB, BB^T를 계산하고, 이들의 고유값을 계산해 특이값 σ와 고유벡터를 통해 직교대각화하여 $B^TB = VDV^T, BB^T = UDU^T$를 구합니다.
2) 0이 아닌 특이값들을 내림차순으로 나열하여 Σ를 구성하고, 이들을 모두 활용해 $A = U\Sigma V^T$를 구합니다.

다음 행렬 B에 특이값 분해를 적용하였을 때 나오는 행렬 U, Σ, V^T를 각각 구하시오.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \qquad \sigma_1 = \sqrt{2}, \quad \sigma_2 = 1$$

$$U = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\Sigma = \begin{matrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} B^T u_i$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{1} \quad " \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 \perp v_1, v_2 \rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V^T = \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{matrix}$$

기수 : 이름 :

문제 3 Convex Sets & Functions

C_2 △ inequality

$\|\lambda u+(1-\lambda)v\|_1 \le \lambda\|u\|_1+(1-\lambda)\|v\|_1$

$\le \lambda(1)+(1-\lambda)(1)=1$

3-1. Convex Set

1. 다음 집합들이 Convex set인지 증명하시오.

C_1

$\lambda(x_u+y_u)+(1-\lambda)(x_v+y_v)$

$\le \lambda(1)+(1-\lambda)(1)=1$

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le 1\}$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \le 1\}$$
$$C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge e^x\}$$

convex

$y'=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2 \ge \lambda e^{x_1}+(1-\lambda)e^{x_2} \ge e^{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}$

2. 함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 convex function일 때, f의 epigraph인 집합 S가 convex set임을 보이시오.

$$S = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \ge f(x)\}$$

$(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in S$

(x',t'). $t'=\lambda t_1+(1-\lambda)t_2 \ge \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

$\ge f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=f(x')$

↑ f convex

3-2. Convex Function

1. Convex 함수의 합성

$f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$가 실수 값을 갖는 함수라고 합시다.

(a) 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 convex일 때, $f(x)+g(x)$ 또한 convex임을 보이시오.

$=\lambda(f+g)(x)+(1-\lambda)(f+g)(y)$

$(f+g)(\lambda x+(1-\lambda)y) = f(\lambda x+(1-\lambda)y)+g(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\} + \{\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\}$

(b) A와 b가 호환되는 크기의 행렬과 벡터라고 합시다. $f(x)$가 convex라면 $f(Ax+b)$ 또한 convex임을 보이시오.

$=h(x)$

$h(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(\lambda(Ax+b)+(1-\lambda)(Ay+b)) \le \lambda f(Ax+b)+(1-\lambda)f(Ay+b)$

↑ f convex

$=\lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$

2. Convex Optimization

또 다른 함수 $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$를 고려해 봅시다.

$$f(x) = \|Ax - b\|^2.$$

오직 convex 함수의 정의만을 사용하여, $f(x)$가 $x \in \mathbf{R}^d$에서 convex임을 보이시오.

$u=Ax-b,\ v=Ay-b$

$\|\lambda u+(1-\lambda)v\|^2 \le \lambda\|u\|^2+(1-\lambda)\|v\|^2$

RHS − LHS $= \lambda(1-\lambda)\|u\|^2+\lambda(1-\lambda)\|v\|^2-2\lambda(1-\lambda)\langle u,v\rangle$

$= \lambda(1-\lambda)\|u-v\|^2$

≥ 0

문제 4　정보이론 (Information Theory)

4-1. Entropy

확률분포 $p(x, y)$가 다음과 같이 주어졌다고 합시다.

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

다음 값들을 구하시오.

(a) $H(X) = H(Y)$. $= -\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} = \log_2 3 - \frac{2}{3}$

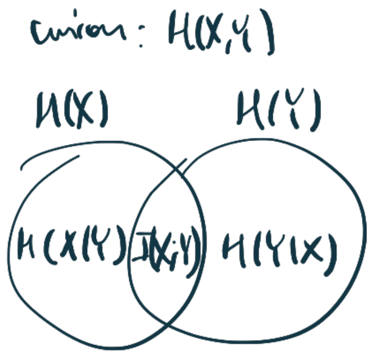
(b) $H(X \mid Y), H(Y \mid X)$. $H(X|Y) = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$, $H(Y|X) = \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{2}{3}$

(c) $H(X, Y)$. $= -3\cdot\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} = \log_2 3$

(d) $H(Y) - H(Y \mid X)$. $= \log_2 3 - \frac{4}{3}$

(e) $I(X; Y)$. $= H(Y) - H(Y|X) = \log_2 3 - \frac{4}{3}$

(f) (a)부터 (e)까지 구한 양(quantity)들을 벤 다이어그램으로 나타내시오.



4-2. KL-divergence

(a) $D(q\|p) = D(p\|q)$가 성립하지 않는 반례를 제시하시오. $p = [.5, .5]$, $q = [.25, .75]$

$.5\lg 2 + .5\lg\frac{2}{3} \neq .25\lg .5 + .75\lg 1.5$

(b) $D(p\|q) \geq 0$임을 보이시오. (Hint : Jensen's Inequality)

$$= \sum p(x)\lg\frac{p(x)}{q(x)} = -\sum p(x)\lg\frac{q(x)}{p(x)} = -E_p\left[\lg\frac{q(X)}{p(X)}\right] \geq -\lg\left(E_p\left[\frac{q(X)}{p(X)}\right]\right)$$

$$= -\lg\left(\sum p(x)\frac{q(x)}{p(x)}\right)$$

$$= -\lg\left(\sum q(x)\right)$$

$$= -\lg 1 = 0$$

Reference

- Elements of Information Theory (2nd Ed.), T. M. Cover & J. A. Thomas
- Convex Optimization for ML, Prof. Changho Suh

Data Science Lab

담당자: 14 기 박창용, 어희정, 여준호

qkrckddyd0@yonsei.ac.kr

heejung.uh@gmail.com

asap03153@gmail.com