אלגברה לינארית 1 - 20109
פתרון לממ"ן 14 - 2021ג

שאלה 1

א. נוכיח שההעתקה $T:\mathbf{R}_n[x]\to\mathbf{R}_n[x]$ המוגדרת על-ידי $T(p(x))=xp'(x)+2p(x)$ הינה לינארית. תחילה, נעיר שלכל $p(x)\in\mathbf{R}_n[x]$, $\deg p(x)\le n-1$ ולכן $\deg p'(x)\le n-2$ ו- $\deg(xp'(x))\le n-1$, ולכן $T(p(x))\in\mathbf{R}_n[x]$.

יהיו $p(x),q(x)\in\mathbf{R}_n[x]$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$. נראה שמתקיים:

$T(\alpha p(x)+\beta q(x))=\alpha T(p(x))+\beta T(q(x))$.

לפי הגדרת T :

$$\begin{aligned}T((\alpha p+\beta q)(x))&=x(\alpha p+\beta q)'(x)+2(\alpha p+\beta q)(x)\\&=x(\alpha p'(x)+\beta q'(x))+2\alpha p(x)+2\beta q(x)\\&=\alpha xp'(x)+2\alpha p(x)+\beta xq'(x)+2\beta q(x)\\&=\alpha T(p(x))+\beta T(q(x))\end{aligned}$$

ונסיק ממשפט 9.1.3 שההעתקה T לינארית.

ב. ההעתקה $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ המוגדרת ע"י $T(x,y)=(2x-|y|,3x,y)$ אינה לינארית מפני שלמשל היא לא מקיימת את התנאי $T(\alpha(x,y))=\alpha T(x,y)$, להלן דוגמה שמראה זאת:

$T(0,-1)=(-1,0,-1)$ ו- $T(0,1)=(-1,0,1)$ ולכן $T(0,1)\ne -T(0,1)$.

ג. נוכיח שההעתקה $T:M_{n\times n}^{\mathbf{R}}\to M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ המוגדרת ע"י $T(X)=X^2-X$ אינה לינארית. למשל, נראה שהיא לא שומרת על הכפל בסקלר:

נקבע $\alpha=2$ ו- $X=I_n$. אז $T(2I_n)=4I_n-2I_n=2I_n$ אך $2T(I_n)=0$.

שאלה 2

נתונה העתקה לינארית $T:M_{2\times 2}(\mathbf{R})\to\mathbf{R}_3[x]$ המוגדרת על- ידי:

$$(*)\quad T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-d)x^2+(b+c)x+5a-5d$$

א. **נמצא בסיס ל-** $\operatorname{Im}T$. מהנתון (*) נקבל: $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-d)(x^2+5)+(b+c)x$

ולכן $\operatorname{Im}T\subseteq Sp\{x^2+5,x\}$. מאידך, $T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=x^2+5$ ו- $T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=x$, לכן

$\{x^2+5,x\}\subseteq\operatorname{Im}T$ ומשאלה 7.5.16 נסיק כי $Sp\{x^2+5,x\}\subseteq\operatorname{Im}T$.

לסיכום, $\operatorname{Im}T=Sp\{x^2+5,x\}$.

מאחר והקבוצה $\{x^2+x\}$ פורשת את $\operatorname{Im}T$ והיא בלתי תלויה לינארית (כי הפולינומים האלה לא פרופורציונליים) היא בסיס ל- $\operatorname{Im}T$. נובע מכך ש- $\dim(\operatorname{Im}T)=2$.

נמצא בסיס ל- $\ker T$. ממשפט 9.6.1, מתקבל מיד $\dim\ker T=2$.

תהי $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ב- $M_{2\times2}(\mathbf{R})$. אז:

$$A\in\ker T \Leftrightarrow T(A)=\mathbf{0} \Leftrightarrow a=d \text{ וגם } c=-b \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

לכן $\ker T=Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\ker T$ ומכיוון שמספר וקטוריה שווה לממדו של $\ker T$, היא בסיס ל- $\ker T$.

ב. לא מתקיים $M_{2\times2}(\mathbf{R})=\ker T+\operatorname{Im}T$ וגם לא $M_{2\times2}(\mathbf{R})=\ker T\oplus\operatorname{Im}T$ כי $\operatorname{Im}T$ אינו תת-מרחב של $M_{2\times2}(\mathbf{R})$.

ג. 1. תהי $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_{2\times2}(\mathbf{R})$. נבדוק האם $A^2\in\ker T$, כלומר האם היא מהצורה $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. מתקבל ש- $A^2=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$, איברי A^2 מהצורה הנדרשת ולכן $A^2\in\ker T$.

2. יהי $p(x)\in\operatorname{Im}T$. $\operatorname{Im}T$ הוא תת-מרחב של $\mathbf{R}_3[x]$ ולכן סגור לצרופים לינאריים.

לכן $q(x)=p(x)+3x^2+2x+5\in\operatorname{Im}T$ אם ורק אם $p(x)-q(x)\in\operatorname{Im}T$, כלומר אם ורק אם $3x^2+2x+5\in\operatorname{Im}T$. נבדוק זאת: $3x^2+2x+5\in\operatorname{Im}T$ אם ורק אם מתקיים

$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=3x^2+2x+5$, עבור $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, מה ששקול למערכת $\begin{cases} a-d=3 \\ b+c=2 \\ 5a-5d=5 \end{cases}$.

מתקבלת סתירה מהמשוואות הראשונה והשלישית. לכן לא קיימת מטריצה כזו, ומכך נובע כי $3x^2+2x+5\notin\operatorname{Im}T$ ולכן $q(x)\notin\operatorname{Im}T$.

שאלה 3

תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית המקיימת $T^2=0$.

א. יהי $w\in\operatorname{Im}T$. נוכיח כי $w\in\ker T$. מכיוון ש- $w\in\operatorname{Im}T$, קיים $v\in V$ כך ש- $w=T(v)$.

אז: $T(w)=T(T(v))=T^2(v)\underset{T^2=0}{=}0$ ולכן $w\in\ker T$ ומכאן ההכלה $\operatorname{Im}T\subseteq\ker T$.

מהעובדה $\operatorname{Im}T\subseteq\ker T$, נובע כי $\dim\operatorname{Im}T\le\dim\ker T$.

מצד שני, ידוע ש- $\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = n$ (משפט 9.6.1).

לכן $n = \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T \le \dim \ker T + \dim \ker T = 2 \dim \ker T$

ויוצא כי $\dim \ker \ge \frac{n}{2}$.

ב. נניח כי $n = 3$. נובע מהסעיף הקודם ש- $\dim \ker T = 2$ או $\dim \ker T = 3$.

אם $\dim \ker T = 3$ אז $\operatorname{Im} T = \{\underline{0}\}$, כלומר $T = 0$ וזו סתירה לנתון $T \ne 0$.

לכן $\dim \ker T = 2$ ו- $\dim \operatorname{Im} T = 1$.

כדי לקבל את ההצגה המטריציאלית הנתונה, עלינו לבנות בסיס $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ כך ש- $T(v_1) = T(v_2) = 0$ (כלומר $v_1, v_2 \in KerT$), וגם ש- $T(v_3) = v_1$.

יהי $\{v_1\}$ בסיס של $\operatorname{Im} T$. אז קיים $v_3 \in V$ כך ש- $v_1 = T(v_3)$ וגם מתקיים $v_1 \in KerT$ (כי $\operatorname{Im} T \subseteq KerT$ לפי הסעיף הקודם). נשלים את הקבוצה $\{v_1\}$ לבסיס $\{v_1, v_2\}$ של $\ker T$ ונוכיח שהקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ מהווה בסיס של V: יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ סקלרים שמקיימים $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ (*). נפעיל את T על שני האגפים של השוויון הזה ומתקבל $\lambda_3 T(v_3) = 0$, אך $T(v_3) = v_1 \ne 0$ ולכן $\lambda_3 = 0$. נציב ב-(*) ויוצא $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ ומהאי-לתות של $\{v_1, v_2\}$ נובע ש- $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ וכך הוכחנו שהקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ היא בסיס של V כי היא בת״ל ומכילה 3 וקטורים. מההגדרה של ההצגה מטריציאלית, מתקבל ש-:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

שאלה 4

א. נמצא העתקה לינארית T שמקיימת $\operatorname{Im} T = \ker T = Sp\{x+1, x^3\}$.

ע״פ למה 9.4.2, מספיק להגדיר את התמונות של הווקטורים של בסיס כלשהו כדי לקבוע העתקה לינארית באופן יחיד. נבחר בסיס מתאים ל- $\mathbf{R}_4[x]$: הקבוצה $\{x+1, x^3\}$ בלתי תלויה לינארית (כי הפולינומים האלה אינם פרופורציונליים), נשלים אותה לבסיס $B = (x+1, x^3, x^2, 1)$ של $\mathbf{R}_4[x]$. הקבוצה B בלתי תלויה לינארית (הקורא יבדוק זאת) והיא מכילה 4 איברים, לכן היא בסיס ל- $\mathbf{R}_4[x]$.

נגדיר העתקה לינארית $T : \mathbf{R}_4[x] \to \mathbf{R}_4[x]$ על- ידי תמונותיהם של וקטורי הבסיס B:

$T(x+1) = T(x^3) = 0$ ו- $T(x^2) = x+1$, $T(1) = x^3$.

כעת, עלינו לבדוק שכל התנאים הנדרשים על T אכן מתקיימים.

לפי למה 9.3.9 , $\operatorname{Im} T = Sp\{T(x+1)\,,\,T(x^3)\,,\,T(x^2)\,,\,T(1)\}$, כלומר מתקבל

ש- $\operatorname{Im} T = Sp\{x+1, x^3\}$ כנדרש. יתר על כן, ברור ש- $Sp\{x+1, x^3\} \subseteq \ker T$.

מצד שני, נובע ממשפט הממד ש- $\dim \ker T = 2$ (כי $\dim \operatorname{Im} T = 2$) ולכן ממשפט 8.3.4

נובע ש- $Sp\{x+1, x^3\} = \ker T$. לסיכום, מצאנו העתקה לינארית שעונה לדרישות השאלה.

ב. 1. אם $T : M_{2\times3}(\mathbf{R}) \to M_{3\times3}(\mathbf{R})$ היא העתקה לינארית על , אז

$\dim \operatorname{Im} T = \dim M_{3\times3}(\mathbf{R}) = 9$ (*), אך ע״פ משפט המימד עבור העתקות לינאריות,

מתקיים $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim M_{2\times3}(\mathbf{R}) = 6$, מה שלא יתכן יחד עם (*). לכן **לא קיימת** העתקה לינארית $T : M_{2\times3}(\mathbf{R}) \to M_{3\times3}(\mathbf{R})$ על.

2. העתקה לינארית $T : M_{2\times3}(\mathbf{R}) \to M_{3\times3}(\mathbf{R})$ אינה **בהכרח** חד- חד ערכית, למשל העתקת האפס $T = 0$ אינה חד- חד- ערכית. **אך יתכן שהיא חד- חד- ערכית**, לדוגמה ההעתקה הליניארית $T : M_{2\times3}(\mathbf{R}) \to M_{3\times3}(\mathbf{R})$ המוגדרת ע״י:

$$T\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

היא חד- חד- ערכית. בדיקה מיידית.

שאלה 5

א. מהמשפטים 10.5.1 ו- 10.5.2, נובע שההעתקה הליניארית T אינה הפיכה אם ורק אם המטריצה $[T]_B$ אינה הפיכה, מה ששקול לכך ש- $\det[T]_B = 0$. החישוב נותן ש- $\det[T]_B = (a-1)^2$, לכן T אינה הפיכה אם ורק אם $a = 1$. המטריצה המתאימה היא

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

יש כמה דרכים לחשב את $T(x_1, x_2, x_3)$. נראה את החישוב בעזרת מטריצת המעבר P מהבסיס B לבסיס E . ע״פ משפט 10.6.1 מתקיים $[T]_E = P^{-1}[T]_B P$ (*). ידוע שהמטריצה

P^{-1} היא מטריצת המעבר מהבסיס E לבסיס B. לכן מהנתונים מתקבל מיד ש-

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ומהחישוב הסטנדרטי יוצא $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

נפעיל את הנוסחה (*) ונקבל:

$$[T]_E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ע"פ משפט 10.2.1: $[T(x_1,x_2,x_3)]_E = [T]_E \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_3 \\ 0 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix}$

ולכן: $T(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 - x_3, 0, -x_1 + x_3)$.

ב. בסעיף הקודם קיבלנו ש- $[T]_E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

למציאת $\ker T$ נפתור את המערכת $[T]_E \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$. מתקבל $x_1 = x_3 = 0$, כלומר

$\ker T = Sp\{(0,1,0)\}$.

ע"פ למה 9.3.7, התת-מרחב $\operatorname{Im} T$ הוא מרחב העמודות של $[T]_E$, כלומר

$\operatorname{Im} T = Sp\{(3,0,-1),(-1,0,1)\}$.

ג. להלן שתי דרכים לחישוב $[T(2,-2,1)]_B$:

<u>דרך 1</u>: לפי הנוסחה במשפט 10.2.1, מתקיים $[T(1,2,-1)]_B = [T]_B[(1,2,-1)]_B$.

למציאת הקואורדינטות של $(1,2,-1)$ ביחס לבסיס B נשתמש במטריצת המעבר שכבר חישבנו בסעיף א': נובע ממשפט 8.4.3 ש- $[(1,2,-1)]_B = P[(1,2,-1)]_E$, כלומר:

$$[(1,2,-1)]_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

לכן $[T(2,-2,1)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, כלומר $[T(2,-2,1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>דרך 2</u>: מהנוסחה $T(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 - x_3, 0, -x_1 + x_3)$ מתקבל $T(1,2,-1) = (4,0,-2)$.

נסמן ב- $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ את וקטור הקואורדינטות של $(4,0,-2)$, מתקיים:

$(4,0,-2) = a(1,0,1) + b(0,1,-1) + c(1,-1,0)$.

זו מערכת לינארית בשלוש משוואות ושלושה נעלמים a,b,c , נפתור אותה :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

ומכך נובע ש- $[T(2,-2,1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.