אינפי 1 סמסטר 2022ג – פתרון חלקי לממ״ח 04

שאלה 1

1. נכון.

לכל $n \in \mathbb{N}$, (בעזרת שאלה 49 מיחידה 1) ותכונות הערך המוחלט,

$$n \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq 1 \Rightarrow |a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a_n \leq 1 \Rightarrow a_n \in [-1,1]$$

ולכן הסדרה $f(a_n)$ מוגדרת.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ולכן (משפט 3.25) גם שתי תתי הסדרות שלה $\sqrt[2n-1]{2n-1}$, $\sqrt[2n]{2n}$ מתכנסות לאותו גבול.

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt[2n]{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{2n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{\sqrt[2n-1]{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt[2n-1]{2n-1}} = \frac{-1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{2n-1}} = \frac{-1}{1} = -1$$

ומרציפות f בקטע $[-1,1]$ נקבל מטענה 5.27

$$a_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow f(a_{2n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(1)$$
$$a_{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow f(a_{2n-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(-1) = f(1)$$

$f(a_{2n-1})$, $f(a_{2n})$ מכסות את $f(a_n)$, ולכן (משפט 3.31) הסדרה $f(a_n)$ מתכנסת.

2. לא נכון.

דוגמא נגדית: $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \ \text{or} \ x = -1 \end{cases}$.

אז $|f(x)| = 1$ לכל $x \in [-1,1]$, פונקציה קבועה ובוודאי רציפה בקטע $[-1,1]$, וכמו כן $f(1) = f(-1) = 1$, כלומר f מקיימת את תנאי הטענה.

הערה: הפונקציה $g(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ לא מקיימת את התנאי $g(1) = g(-1)$, ולכן f הוגדרה כך ב $x = -1$.

נשים לב שלכל $n \geq 2$ טבעי: $n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1 \Rightarrow -1 < a_n < 1$

ולכן כל אברי הסדרה a_n (פרט ל $n = 1$) מקיימים

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt[2n]{2n}} = \frac{1}{\sqrt[2n]{2n}} \Rightarrow 0 < a_{2n} < 1 \Rightarrow f(a_{2n}) = 1$$

$$a_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1}}{\sqrt[2n-1]{2n-1}} = \frac{-1}{\sqrt[2n-1]{2n-1}} \Rightarrow -1 < a_{2n-1} < 0 \Rightarrow f(a_{2n-1}) = -1$$

כלומר עבור $n \geq 2$ מתקיים $f(a_n) = (-1)^n$, וזו סדרה שידוע שמתבדרת. שינוי איבר אחד אינו משנה את ההתבדרות (משפט 2.17) כלומר גם הסדרה $\left(f(a_n)\right)$ מתבדרת.

שאלה 2

1. לא נכון.

נשתמש בהגדרת Heine לגבול. ממסקנה 5.9 קיימת סדרת מספרים אי-רציונליים a_n המתכנסת ל $x=0$ ולכן לכל n טבעי מתקיים $\sin(a_nD(a_n))=\sin(a_n\cdot 0)=\sin 0=0$ ומכאן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(a_nD(a_n))}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{a_n}=\lim_{n\to\infty}0=0$$

ולכן לפי הגדרת Heine גבול הפונקציה אינו 1.

הערה: הגבול אינו קיים כי אם b_n סדרת מספרים רציונליים המתכנסת ל $x=0$ אז

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(b_nD(b_n))}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(b_n\cdot 1)}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(b_n)}{b_n}=1$$

כאשר המעבר האחרון מסתמך על ניסוח Heine לגבול ועל הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

2. לא נכון.

דוגמא נגדית: $f(x)=xD(x)$ ($D(x)$ פונקציית Dirichlet). f רציפה אך ורק ב $x=0$ (שאלה 52 ביחידה 5), ומכאן ש f רציפה ב $x=0$ אבל אין אף סביבה של $x=0$ בה f רציפה.

<u>שאלה 3</u>

1. נכון.

בקטע $(0,\frac{\pi}{2})$ מתקיים $\cos x>0$, $\sin x>0$ ובפרט $\sin x,\cos x$ אינן מתאפסות בקטע ולכן f אכן מוגדרת בקטע $(0,\frac{\pi}{2})$.

מרציפות $\sin x$, $\lim_{x\to 0^+}\sin x=\sin 0=0$, ובסביבה ימנית קטנה של $x=0$ (למשל בקטע $(0,\frac{\pi}{2})$) מתקיים $\sin x>0$, ולכן

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x}="\frac{1}{0^+}"=\infty$$

מרציפות $\cos x$, $\lim_{x\to 0^+}\cos x=\cos 0=1$, ולכן

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\to\infty}-\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}="\infty-1"=\infty$$

מרציפות $\cos x$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x=\cos\frac{\pi}{2}=0$, ובסביבה שמאלית קטנה של $x=\frac{\pi}{2}$ (למשל בקטע $(0,\frac{\pi}{2})$) מתקיים $\cos x>0$, ולכן

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\cos x}="\frac{1}{0^+}"=\infty$$

מרציפות $\sin x$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1$, ולכן

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\to 1}-\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to\infty}="1-\infty"=-\infty$$

יהי $y\in\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\infty$ ולכן לפי הגדרת הגבול, (עבור $M=y$) קיים $\delta_1>0$, ואפשר להניח ש $\delta_1<\frac{\pi}{4}$, כך שלכל $0<x<0+\delta_1$ מתקיים $f(x)>y$. נבחר $0<x_1<0+\delta_1$ ואז מתקיים $f(x_1)>y$.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=-\infty$ ולכן לפי הגדרת הגבול, (עבור $M=y$) קיים $\delta_2>0$, ואפשר להניח ש $\delta_2<\frac{\pi}{4}$, כך שלכל $\frac{\pi}{2}-\delta_2<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $f(x)<y$. נבחר $\frac{\pi}{2}-\delta_2<x_2<\frac{\pi}{2}$ ואז מתקיים $f(x_2)>y$.

לסיכום $f(x_1)>y>f(x_2)$.

נשים לב כי: $0<x_1<\delta_1<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-\delta_2<x_2<\frac{\pi}{2}$, ובקיצור $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$.

f רציפה בקטע $(0,\frac{\pi}{2})$ בתור הפרש ומנה של פונקציות רציפות (ומכנים שונים מ 0), ולכן בפרט f רציפה בקטע $[x_1,x_2]$. כאמור $f(x_1)>y>f(x_2)$, ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $c\in[x_1,x_2]$ כך ש $f(c)=y$, ובפרט $c\in(0,\frac{\pi}{2})$.

2. נכון.

אם f קבועה בקטע $[a,b]$ אז היא גם קבועה בקטע (a,b) ובוודאי שאינה חח"ע בו.

אם f אינה קבועה בקטע $[a,b]$ אז קיים $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)\neq f(a)=f(b)$, ולכן $c\neq a, c\neq b$ כלומר $a<c<b$. בלי הגבלת הכלליות נניח $f(c)>f(a)=f(b)$.

נבחר $f(a)=f(b)<L<f(c)$ כלשהו, ואז ע"י שימוש במשפט ערך הביניים פעם אחת בקטע $[a,c]$ ופעם אחת בקטע $[c,b]$ (השלימו את הפרטים – התנאים של המשפט) נקבל שקיימים $d_1\in[a,c]$, $d_2\in[c,b]$ כך ש $f(d_1)=L$, $f(d_2)=L$.

מכיוון ש $f(d_1)=L\neq f(c)$ נובע $d_1\neq c$ ובדומה $d_1\neq a$ וגם $d_2\neq b,c$, ולכן $a<d_1<c<d_2<b$, כלומר $d_1\neq d_2$ בקטע (a,b) ומתקיים $f(d_1)=f(d_2)$, ומכאן ש f אינה חח"ע בקטע (a,b).

<u>שאלה 4</u>

1. לא נכון.

דוגמא נגדית: הפונקציות $g(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$, $f(x)=1$, $f,g:[0,1]\to[0,1]$.

ברור ש f רציפה ב $(0,1)$, בקטע $(0,1)$ $g(x)=x$ רציפה בקטע (אבל אינה רציפה ב $[0,1]$).

כמו כן לכל $x\in[0,1]$ מתקיים $g(x)<1=f(x)$.

$f\left((0,1)\right)=\{1\}$ (קבוצה סופית) ולכן $\max f\left((0,1)\right)=\max\{1\}=1$ ולכן (טענה 3.8)

$\sup f\left((0,1)\right)=\max f\left((0,1)\right)=1$.

$g\left((0,1)\right)=(0,1)$ ולכן (בדומה לטענה 3.13, או דוגמא 3.2) $\sup g\left((0,1)\right)=\sup(0,1)=1$.

ולא מתקיים $\sup f((0,1))>\sup g((0,1))$.

2. נכון.

f,g רציפות בקטע $[a,b]$ ולכן לפי המשפט השני של ויירשטרס הן מקבלות מקסימום בקטע. נניח $\max f([a,b])=f(c)$, $\max g([a,b])=g(d)$ עבור $c,d\in[a,b]$. אז

$$\max g([a,b])=g(d)<f(d)\le\max f([a,b])$$

ולפי טענה 3.8

$$\sup g([a,b])=\max g([a,b])<\max f([a,b])=\sup f([a,b])$$

<u>שאלה 5</u>

1. לא נכון.

כדי ש $\sqrt{1-x^2}$ יהיה מוגדר צריך ($1-x^2$ פולינום מוגדר לכל x)

$$1-x^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le x \le 1$$

כדי ש $\sqrt{\arccos x}$ יהיה מוגדר צריך של $\arccos x$ תהיה מוגדרת, וזה מתקיים עבור $-1 \le x \le 1$, וגם $\arccos x \ge 0$ וזה מתקיים לכל x בתחום ההגדרה של $\arccos$.

כדי ש $\tan(2x+1)$ יהיה מוגדר צריך $2x+1 \ne \frac{1}{2}\pi + \pi k$ לכל $k \in \mathbb{Z}$, כלומר $x \ne -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\pi k$.

אבל עבור $k=0$ נקבל $x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$, $2x+1=\frac{1}{2}\pi$ ולכן $\tan(2x+1)$ אינה מוגדרת ולכן גם $f(x)$ (הפונקציה שבשאלה) אינה מוגדרת, בעוד ש $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi \in [-1,1]$ כי

$$0<\pi<4 \quad \Rightarrow \quad 0<\tfrac{1}{4}\pi<1 \quad \Rightarrow \quad -1<-\tfrac{1}{2}<-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\pi<\tfrac{1}{2}<1$$

לכן תחום ההגדרה של f אינו $[-1,1]$ (למעשה הוא שווה ל $[-1,1]\setminus\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi\}$).

2. לא נכון.

x^2+x+1 פולינום ומוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$. ולכן $f(x)=\arcsin(x^2+x+1)$ מוגדרת כאשר

$$-1 \le x^2+x+1 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le x^2+x+1 \text{ and } x^2+x+1 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x+2 \ge 0 \text{ and } x^2+x \le 0$$

$x^2+x+2=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x=x(x+1) \le 0$ עבור $-1 \le x \le 0$.

ולכן תחום ההגדרה של f הוא $[-1,0]$.

שאלה 6

1. נכון.

מכיוון ש f חסומה ומונוטונית ב (a,b), לפי משפט 5.39 נובע שהגבולות החד צדדיים בקצוות הקטע קיימים (במובן הסופי). מכיוון ש f רציפה ב (a,b) ומכיוון שהגבולות החד צדדיים בקצוות הקטע קיימים (במובן הסופי), לפי משפט 5.49 נובע ש f רציפה במידה שווה ב (a,b).

2. נכון.

אילו בשלילה הקטע אינו סגור באחד הקצוות, למשל בקצהו הימני (כלומר אם הקטע הוא $[a,b)$ או (a,b)), אז הפונקציה $f(x)=x$ שרציפה בו אינה מקבלת בו מקסימום בסתירה לנתון.

שאלה 7

1. נכון.

$\arctan x$ רציפה ב $\mathbb{R}$ ובפרט ב $[0,\infty)$, $\lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{1}{2}\pi$ גבול סופי, ולפי שאלה 48 ביחידה 5 מתקבל ש $\arctan x$ רציפה במידה שווה בקטע $[0,\infty)$.

בדומה $\arctan x$ רציפה ב $(-\infty,0]$, $\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{1}{2}\pi$ גבול סופי, ולפי טענה אנלוגית לשאלה 48 ביחידה 5 מתקבל ש $\arctan x$ רציפה במידה שווה בקטע $(-\infty,0]$.

ולפי שאלה 49 ביחידה 5 מתקבל ש $\arctan x$ רציפה במידה שווה ב $(-\infty,0]\cup[0,\infty)=\mathbb{R}$.

2. לא נכון.

דוגמה נגדית: $f(x)=x^2$. f רציפה ב $\mathbb{R}$, ומכאן שלכל $a<b$, f רציפה ב $[a,b]$ ולפי משפט Cantor היא רציפה במידה שווה בקטע $[a,b]$, ומהטענה משאלה 44 ביחידה 5 נובע שהיא רציפה במידה שווה בתת הקטע (a,b). אך f אינה רציפה במידה שווה ב $\mathbb{R}$ (דוגמה מהספר).

שאלה 8

1. נכון.

לכל $\varepsilon>0$ אפשר לבחור $\delta=\varepsilon/C$ ואז לכל $x,y\in$ המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים

$$|f(x)-f(y)| \le C|x-y| < C\delta=\varepsilon$$

ולכן f רציפה במידה שווה בקטע I לפי ההגדרה.

2. נכון.

לכל $x,y\in I$, על סמך תכונות הערך המוחלט ועל סמך $f(x)\ge C$ לכל $x\in I$,

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right|=\left|\frac{f(y)-f(x)}{f(x)f(y)}\right|=\frac{|f(y)-f(x)|}{|f(x)f(y)|}\underset{f>0}{=}\frac{|f(y)-f(x)|}{f(x)f(y)}\le\frac{|f(y)-f(x)|}{C^2}=$$
$$=\frac{|f(x)-f(y)|}{C^2}$$

מכיוון ש f רציפה במ"ש בקטע I, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in I$ המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<C^2\varepsilon$ ולכן

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right|\le\frac{|f(x)-f(y)|}{C^2}<\frac{C^2\varepsilon}{C^2}=\varepsilon$$

ומכאן שהפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ רציפה במידה שווה בקטע I.

<u>שאלה 9</u>

1. נכון.

לכל $x\ne 0$

$$\cos\frac{1}{x}\ge -1 \quad\Rightarrow\quad 1+\cos\frac{1}{x}\ge 0 \quad,\quad x^2\ge 0 \quad\Rightarrow\quad f(x)=x^2\left(1+\cos\frac{1}{x}\right)\ge 0$$

כמו כן $f(0)=0$, ולכן לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)\ge 0=f(0)$, ומכאן ש $f(0)$ מינימום של f ב $\mathbb{R}$.

2. לא נכון.

דוגמא נגדית: הפונקציה f מטענה 1 בשאלה זו.

לכל $x\ne 0$

$$\cos\frac{1}{x}\le 1 \quad\Rightarrow\quad 1+\cos\frac{1}{x}\le 2 \quad,\quad x^2\ge 0 \quad\Rightarrow\quad 0\le f(x)=x^2\left(1+\cos\frac{1}{x}\right)\le 2x^2$$

$\lim_{x\to 0}0=\lim_{x\to 0}2x^2=0$ ולפי משפט הסנדוויץ' $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ ולכן f רציפה ב $x=0$.

בכל $x\ne 0$ f רציפה בתור הרכבה, סכום ומכפלה של פונקציות רציפות, ומכאן f רציפה ב $\mathbb{R}$.

ולכן f רציפה בקטע ($\mathbb{R}$) המכיל את הנקודה $x=0$ ו $f(0)$ מינימום של f (לפי סעיף 1).

אבל אין אף סביבה ימנית של $x=0$ בה f עולה במובן הרחב.

תהי $(0,\delta)$ סביבה ימנית כלשהי של $x=0$. מתכונת ארכימדס קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $n>\frac{1}{\delta}$ ולכן

$$0<\frac{1}{2\pi n+\frac{3}{2}\pi}<\frac{1}{2\pi n+\pi}<\frac{1}{n}<\delta$$

ולכן אם נסמן $x_2=1/(2\pi n+\pi)$, $x_1=1/(2\pi n+\frac{3}{2}\pi)$ אז x_1,x_2 בסביבה ימנית זו, $x_1<x_2$ אבל

$$f(x_1)=x_1^2\left(1+\cos(2\pi n+\tfrac{3}{2}\pi)\right)=x_1^2>0$$

$$f(x_2)=x_2^2\left(1+\cos(2\pi n+\pi)\right)=0 \quad\Rightarrow\quad f(x_1)>f(x_2)$$

ולכן f אינה עולה, לא במובן הרגיל ואפילו לא במובן הרחב, בסביבה הימנית $(0,\delta)$.

<u>שאלה 10</u>

1. לא נכון.

נניח בשלילה ש $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, אז לפי הגדרת Heine עבור הסדרה $x_n=n$ המקיימת

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$ נקבל $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n}$. אבל לכל n טבעי

$$n<1+n\le 2n \quad\Rightarrow\quad \sqrt[n]{n}<\sqrt[n]{1+n}\le\sqrt[n]{2n}=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\ ,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\cdot 1=1$$

וממשפט הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n}=1$, סתירה.

2. נכון.

נסמן $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

מטענה 6.18, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, ומריפות הפונקציה $\ln x$ (ב $x=e$) ולפי משפט גבול של הרכבה (5.14)

$$\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

ולכן $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$. נחשב $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

ע"י החלפת משתנה $y=1+x$, $\lim\limits_{x\to\infty}x+1=\infty$ נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{\ln y}{y-1}$$

לכל $y>2$ מתקיים $y-1>0$, $\ln y>0$, $\frac{1}{2}y>1$ ולכן $y-1>y-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}y$ ולכן

$$0<\frac{\ln y}{y-1}<\frac{\ln y}{\frac{1}{2}y}=2\frac{\ln y}{y}$$

לפי שאלה 17 מיחידה 6 $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\ln y}{y}=0$ ולכן $\lim\limits_{y\to\infty}2\dfrac{\ln y}{y}=2\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\ln y}{y}=0=\lim\limits_{y\to\infty}0$, ולפי משפט

הסנדוויץ' (גירסה עבור גבול באינסוף) נקבל $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\ln y}{y-1}=0$.

נגדיר $F(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ f(x) & x>0\end{cases}$. לכל $x>0$ $F(x)=f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ ולכן F רציפה בתור הרכבה ומנה של פונקציות רציפות (ומכנה שונה מאפס).

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=1=F(0)$$

ולכן F רציפה מימין ב $x=0$, ומכאן F רציפה ב $[0,\infty)$.

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

ולכן, לפי שאלה 48 ביחידה 5, F רציפה במידה שווה בקטע $[0,\infty)$.

לפי שאלה 44 ביחידה 5, F רציפה במידה שווה בקטע החלקי $(0,\infty)$. אבל בקטע $(0,\infty)$ מתקיים $F(x)=f(x)$ ולכן f רציפה במידה שווה בקטע $(0,\infty)$.