פתרון לממ"ן 11 – סמסטר 2021ג

אלגברה לינארית 1 - 20109

שאלה 1

נפתור את המערכת הבאה, מעל $\mathbf{Z}_{11}$:

$$\begin{cases}(3a^2-b)x-2y=10\\ by=2\end{cases}$$

רואים מיד שאם $\underline{b=0}$, מתקבלת סתירה ($0=2$) בשורה השנייה, ולכן **אין פתרון למערכת.**

נניח בהמשך ש- $\underline{b\neq 0}$, נדרג את מטריצת המקדמים של המערכת הנתונה :

$$\left(\begin{array}{cc|c}3a^2-b & -2 & 10\\ 0 & b & 2\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{b}R_2}\left(\begin{array}{cc|c}3a^2-b & -2 & 10\\ 0 & 1 & \dfrac{2}{b}\end{array}\right)=B$$

1. **אם** $\underline{3a^2-b\neq 0}$, המטריצה B מדורגת עם 2 איברים פותחים. לכן כל המשתנים קשורים, במילים אחרות, יש פתרון יחיד למערכת.
2. **אם** $\underline{3a^2-b=0}$, נמשיך את הדרוג של B :

$$B=\left(\begin{array}{cc|c}0 & -2 & 10\\ 0 & 1 & \dfrac{2}{b}\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & \dfrac{2}{b}\\ 0 & -2 & 10\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & \dfrac{2}{b}\\ 0 & 0 & 10+\dfrac{4}{b}\end{array}\right).$$

ויש יותר מפתרון אחד אם ורק אם $10+\frac{4}{b}=0$ או $-1+\frac{4}{b}=0$, מה ששקול ל- $\underline{b=4}$. נציב את הערך הזה בתנאי $3a^2-b=0$ ומתקבל $3a^2=4$, מה ששקול ל- $a^2=5$ (כי $3^{-1}=4$).
בדיקה ישירה מראה ש- $\underline{a=4}$ או $\underline{a=7}$. לסיכום, קיימים שני זוגות (a,b) עבורם יש יותר מפתרון אחד והם **<u>(4,4) ו- (7,4)</u>**. במקרים האלה, קבוצת הפתרונות היא $\left\{\left(t,\frac{2}{b}\right)\mid t\in\mathbf{Z}_{11}\right\}$.

יש 11 אפשרויות עבור הפרמטר t, לכן בכל אחד מהמקרים יש 11 פתרונות למערכת הנתונה.

שאלה 2

א. נשתמש בשיטת גאוס כדי לפתור את המערכת הנתונה :

$$\begin{cases} 2y+2z-2w=0 \\ x-z-3w=0 \\ 2x+3y+z+w=0 \\ -2x+y+3z-2w=0 \end{cases}$$

נחליף את שתי המשוואות הראשונות ונדרג את המטריצה המצומצמת של המערכת הומוגנית שהתקבלה.

1. **מעל $\mathbf{R}$:**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4+2R_1]{R_2\to\frac{1}{2}R_2,\ R_3\to R_3-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_3\to R_3-3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to 0.1R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4+7R_3]{R_1\to R_1+3R_3,\ R_2\to R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

במטריצה הקנונית B יש 3 איברים פותחים, לכן יש 3 משתנים קשורים, שהם x, y, w

ומשתנה חופשי, z . נסמן $z=a$ ויוצא כי $x=z=a$, $y=-z=-a$ ו- $w=0$.

לפיכך, הפתרון הכללי הוא $(a,-a,a,0)$, $a\in\mathbf{R}$ וקבוצת הפתרונות היא

$S=\{(a,-a,a,0)\mid a\in\mathbf{R}\}$.

2. **מעל $\mathbf{Z}_5$:**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4+2R_1]{R_2\to 3R_2,\ R_3\to R_3-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_3\to R_3-3R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-2R_3]{R_1\to R_1+3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

לפי אותו שיקול כמו במקרה הקודם יוצא שיש משתנה חופשי ולכן 5 פתרונות, כאשר

קבוצת הפתרונות היא $S=\{(a,4a,a,0)\mid a\in\mathbf{Z}_5\}$.

ב. נפתור את המערכת :

$$(*)\ \begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x^2-y^2+2z^2=2 \\ 2x^2+y^2-z^2=3 \end{cases}$$

מערכת זו אינה לינארית. נגדיר משתני עזר : $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$ ואז ניתן לכתוב את

המערכת (*) כך : $\begin{cases} X+Y+Z=6 \\ X-Y+2Z=2 \\ 2X+Y-Z=3 \end{cases}$ (**).

המערכת (**) הינה לינארית, נדרג את מטריצת המקדמים שלה :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

כל המשתנים קשורים ולכן יש פתרון יחיד למערכת (**) והוא $(1,3,2)$.

נובע מכך ש- $x^2 = 1$, $y^2 = 3$, $z^2 = 2$ ולכן יש 8 פתרונות למערכת הנתונה כי

$x = \pm 1$, $y = \pm\sqrt{3}$, $z = \pm\sqrt{2}$. הפתרונות הם :

$$(1,\sqrt{3},\sqrt{2}),\ (1,-\sqrt{3},\sqrt{2}),\ (1,\sqrt{3},-\sqrt{2}),\ (1,-\sqrt{3},-\sqrt{2}),$$

$$(-1,\sqrt{3},\sqrt{2})(-1,-\sqrt{3},\sqrt{2}),\ (-1,\sqrt{3},-\sqrt{2}),\ (-1,-\sqrt{3},-\sqrt{2}) .$$

שאלה 3

נפתור את המערכת הנתונה ע"י דרוג של מטריצת המקדמים :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 1-k & 2 \\ k & -4 & -6 & k^2+2k-9 \\ k-2 & 2k-4 & 3k-8 & k^2+2k-12 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_3-(k-2)R_1}{\xrightarrow{R_2 \to R_2 - kR_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 1-k & 2 \\ 0 & k^2-4 & k^2-k-6 & k^2-9 \\ 0 & k^2-4 & k^2-6 & k^2-8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \cdots \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 1-k & 2 \\ 0 & k^2-4 & k^2-6 & k^2-8 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{array}\right) = C$$

יש פתרון יחיד אם ורק אם כל המשתנים קשורים, כלומר אם ורק אם יש 3 איברים פותחים.

לפיכך, נדון במספר מקרים.

אם $k \neq \pm 2, 0$ **אז** יש **פתרון יחיד.**

אם $k = \pm 2$ **אז** $C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mp 2 & 1\mp 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \pm 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 \pm R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mp 2 & 1\mp 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \neq 0 \end{array}\right)$ ולכן **אין פתרון**.

אם $k = 0$ **אז** $C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, יש שורת סתירה ולכן שוב **אין פתרון**.

שאלה 4

א. הקבוצה A בלתי תלויה לינארית אם ורק אם כל שוויון $\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$,

כאשר $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ מספרים ממשיים, גורר ש- $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

אם כן, נניח שמתקיים $\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_3=\underline{0}$. נציב את הביטויים הנתונים עבור

הווקטורים $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$:

$$\lambda_1(2\alpha\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_4)+\lambda_2(\mathbf{u}_3+\alpha\mathbf{u}_4)+\lambda_3(\alpha\mathbf{u}_1+\alpha\mathbf{u}_2+\alpha\mathbf{u}_4)=\mathbf{0}$$

כלומר

$$\alpha\lambda_3\mathbf{u}_1+(2\alpha\lambda_1+\alpha\lambda_3)\mathbf{u}_2+\lambda_2\mathbf{u}_3+(\lambda_1+\alpha\lambda_2+\alpha\lambda_3)\mathbf{u}_4=\mathbf{0}$$

נתון ש- U בלתי תלויה לינארית, לכן כל המקדמים בשוויון האחרון שווים ל- 0 :

$$(*)\begin{cases}\alpha\lambda_3=0 & (1)\\ 2\alpha\lambda_1+\alpha\lambda_3=0 & (2)\\ \lambda_2=0 & (3)\\ \lambda_1+\alpha\lambda_2+\alpha\lambda_3=0 & (4)\end{cases}$$

זו מערכת הומוגנית כאשר הנעלמים הם $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

נציב את (1) ו- (3) ב- (4) ויוצא מיד $\lambda_1=0,\lambda_2=0$ ו- $\alpha\lambda_3=0$. הצבה של הערכים האלה

ב-(2) מראה שהשוויון (2) מתקיים. נובע מכך שהמערכת (*) שקולה למערכת

$$\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \alpha\lambda_3=0\end{cases}.$$

נבחין בין 2 מקרים :

אם $\alpha\neq 0$ אז בהכרח $\lambda_3=0$ ולכן יש הפתרון הטריוויאלי בלבד ולכן הקבוצה A בלתי תלויה לינארית.

אם $\alpha=0$, מתקיים השוויון $\alpha\lambda_3=0$ עבור כל λ_3, לכן יש אינסוף פתרונות למערכת ולכן **הקבוצה A תלויה לינארית**.

ב. עבור $\alpha=0$, מתקבל $\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_4$, $\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$. מכיוון שהווקטורים $\mathbf{u}_4$, $\mathbf{u}_3$ בת״ל, לא ניתן לבטא את $\mathbf{v}_2$ כצרוף לינארי של $\mathbf{v}_3$ ו- $\mathbf{v}_1$.

ג. לא ניתן לצרף אחד מהווקטורים $\mathbf{v}_i$ כך ש- $U\cup\{\mathbf{v}_i\}$ תהיה בסיס של $\mathbf{R}^5$ כי כל $\mathbf{v}_i$ הוא צרוף לינארי של ה- $\mathbf{u}_i$ ולכן לכל $\mathbf{v}_i$ הקבוצה $U\cup\{\mathbf{v}_i\}=A=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4,\mathbf{v}_i\}$ תלויה לינארית ולפיכך אינה בסיס של $\mathbf{R}^5$.

שאלה 5

יהיו $\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_m,\underline{b}$ וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$.

א. נניח כי $m \geq n$ וכי למשוואה $x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_m\underline{a}_m = \underline{b}$ (1) יש פתרון יחיד $(c_1,\ldots,c_m)$.

אז מתקיים $c_1\underline{a}_1 + \ldots + c_m\underline{a}_m = \underline{b}$ (2).

נוכיח את הטענה הבאה:

טענה: אם למשוואה $x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_m\underline{a}_m = \underline{b}$ יש פתרון יחיד, אז הקבוצה $A = \{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m\}$ בלתי תלויה לינארית.

הוכחה: יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ מספרים ממשיים שמקיימים: $\lambda_1\underline{a}_1 + \ldots + \lambda_m\underline{a}_m = \underline{0}$ (3).

נחבר את המשוואות (2) ו-(3) ומתקבל: $(c_1 + \lambda_1)a_1 + (c_2 + \lambda_2)\underline{a}_2 + \ldots + (c_m + \lambda_m)\underline{a}_m = \underline{b}$

מהיחידות של הפתרון למערכת (1) נובע כי לכל i, $1 \leq i \leq m$, מתקיים $c_i + \lambda_i = c_i$ ולכן $\lambda_i = 0$ לכל i, מה שגורר שהוקטורים $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m$ בלתי תלויים לינארית.

מספר וקטורים בקבוצה בלתי תלויה לינארית של $\mathbf{R}^n$ שווה לכל היותר n (משפט 2.6.7), לכן $m \leq n$. יחד עם הנתון $m \geq n$, מתקבל ש- $m = n$ ומכיוון שהקבוצה $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m\}$ בלתי תלויה לינארית ובת n וקטורים, קבוצה זו בסיס של $\mathbf{R}^n$ (משפט 2.7.8).

ב. נניח ש- $m \leq n$ ושלכל $\underline{c} \in \mathbf{R}^n$ יש פתרון למשוואה $x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_m\underline{a}_m = \underline{c}$.

נוכיח שהקבוצה $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m\}$ היא בסיס ל- $\mathbf{R}^n$.

מההנחה נובע שכל וקטור $c \in \mathbf{R}^n$ הוא צרוף לינארי של וקטורי A ולכן הקבוצה A פורשת את $\mathbf{R}^n$. ידוע כי כל קבוצה פורשת מכילה לפחות n וקטורים (משפט 2.7.3), לכן $m \geq n$ ויחד עם ההנחה מתקבל ש- $m = n$. מכיוון שקבוצה פורשת של $\mathbf{R}^n$ בת n וקטורים היא בלתי תלויה לינארית, יוצא שהקבוצה A בסיס של $\mathbf{R}^n$.

ג. נוכיח שאם למשוואה $x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_m\underline{a}_m = \underline{b}$ יש פתרון ואם הקבוצה $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m\}$ בלתי תלויה לינארית, אז הפתרון הוא יחיד.

נניח כי למשוואה (1) יש פתרון ושהקבוצה A בלתי תלויה לינארית. נוכיח, דרך השלילה, כי הפתרון יחיד. ובכן נניח כי $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ ו- $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ שני פתרונות שונים של (1). אז קיים i, $1 \leq i \leq n$, ומקיים $c_i \neq d_i$:

(4) $c_1\underline{a}_1 + \ldots + c_m\underline{a}_m = \underline{b}$ ו- (5) $d_1\underline{a}_1 + \ldots + d_m\underline{a}_m = \underline{b}$.

נחסיר את (5) מ- (4) ומתקבל:

$$(c_1 - d_1)\underline{a}_1 + \ldots + (c_i - d_i)\underline{a}_i + \ldots + (c_m - d_m)\underline{a}_m = \underline{0}$$

זהו צרוף לינארי של וקטורי A ששווה ל-0 ובה המקדם ה- i, לפחות, שונה מאפס.

לכן הקבוצה A תלויה לינארית, מה שסותר את ההנחה ש-A בלתי תלויה לינארית.

נובע מכך שההנחה שיש יותר מפתרון אחד לא נכונה, כלומר קיים פתרון יחיד למשוואה (1).