<u>אינפי 1 סמסטר 2022ג – פתרון ממ"ן 17</u>

<u>שאלה 1</u>

f רציפה ב $\mathbb{R}$ ו x_0 נקודת מקסימום מקומי של f .

נניח בשלילה ש $f(x_0)$ אינו המקסימום של f ב $\mathbb{R}$. אז קיימת נקודה $y \in \mathbb{R}$ כך ש $f(y) > f(x_0)$.

בלי הגבלת הכלליות נניח כי $x_0 < y$.

f רציפה ב $\mathbb{R}$ ולכן רציפה בקטע $[x_0, y]$, ומהמשפט השני של ויירשטראס נסיק שהיא מקבלת בקטע מינימום.

נקודת המינימום של f בקטע $[x_0, y]$ אינה יכולה להיות בפנים הקטע, כי אז לפי טענה 8.3 היא היתה נקודת קיצון מקומי של f , בסתירה לנתון שאין ל f נקודות קיצון מקומי מלבד x_0 . ולכן המינימום של f בקטע מתקבל באחד מקצוות הקטע.

מכיוון ש $f(y) > f(x_0)$ נסיק ש $f(x_0)$ הוא המינימום של f בקטע $[x_0, y]$.

$f(x_0)$ הוא המינימום של f בקטע $[x_0, y]$ ולכן לכל $x \in [x_0, y]$ מתקיים $f(x) \ge f(x_0)$.

כמו כן, x_0 נקודת מקסימום מקומי של f ולכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ מתקיים $f(x) \le f(x_0)$.

נסמן $\alpha = \min\{\delta, y - x_0\}$, אז $\alpha > 0$ (הקטן מבין שני מספרים חיוביים) וכן $\alpha \le \delta$ ו $\alpha \le y - x_0$.

$$x_0 < x < x_0 + \alpha \quad \Rightarrow \quad x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad x \in N_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \le f(x_0)$$

$$x_0 < x < x_0 + \alpha \quad \Rightarrow \quad x_0 < x < x_0 + y - x_0 = y \quad \Rightarrow \quad x \in [x_0, y] \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge f(x_0)$$

ולכן לכל $x \in (x_0, x_0 + \alpha)$ מתקיים $f(x) = f(x_0)$, כלומר f קבועה בקטע $(x_0, x_0 + \alpha)$, ולפיכך כל נקודה בקטע זה היא נקודת קיצון מקומי (גם מקסימום מקומי וגם מינימום מקומי) של f , בסתירה לנתון.

ולכן הנחת השלילה שגויה ו f מקבלת מקסימום ב x_0 .

<u>שאלה 2</u>

$(f(c)-f(a))(f(b)-f(c))<0$ ולכן אחד הגורמים במכפלה חיובי ואחד שלילי.
בלי הגבלת הכלליות נניח כי מתקיים

$$f(c)-f(a)>0 \;,\; f(b)-f(c)<0$$

כלומר

$$f(c)>f(a) \;,\; f(c)>f(b)$$

f רציפה בקטע $[a,b]$ ולכן רציפה ב $[a,c]$ החלקי לו, וגזירה בקטע (a,b) ולכן גזירה בקטע (a,c) החלקי לו.

לפי משפט Lagrange קיימת נקודה $d_1\in(a,c)$ כך ש

$$f'(d_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

$f(c)-f(a)>0$, ו $c\in(a,b)$ ולכן $c>a$ ומכאן $c-a>0$, ומתקבל $f'(d_1)>0$.

בדומה, f רציפה ב $[a,b]$ ולכן רציפה ב $[c,b]$, וגזירה ב (a,b) ולכן גזירה ב (c,b) .

לפי משפט Lagrange קיימת נקודה $d_2\in(c,b)$ כך ש

$$f'(d_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

$f(b)-f(c)<0$, ו $c\in(a,b)$ ולכן $b-c>0$, ומתקבל $f'(d_2)<0$.

כעת $a<d_1<c<d_2<b$ ולכן $[d_1,d_2]\subset(a,b)$. f גזירה בקטע (a,b) ולכן גזירה בקטע $[d_1,d_2]$ החלקי לו.

כאמור $f'(d_1)>0>f'(d_2)$, וממשפט Darboux מתקבל שקיימת נקודה $t\in[d_1,d_2]$ כך ש $f'(t)=0$, ובפרט $t\in(a,b)$, כנדרש.

הערה: אפשר לפתור תרגיל זה בעוד דרכים.

<u>שאלה 3</u>

$$f'(x)-\frac{3x}{\sqrt{3x^2+6}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x)=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+6}} .$$

נשים לב כי לכל $x\in\mathbb{R}$, $3x^2+6>0$ ולכן ההרכבה $\sqrt{3x^2+6}$ מוגדרת וגזירה ב $\mathbb{R}$ בתור הרכבה של פונקציות גזירות, ומתקיים

$$\left(\sqrt{3x^2+6}\right)'=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+6}}$$

נסמן

$$h(x)=f(x)-\sqrt{3x^2+6}$$

$\sqrt{3x^2+6}$ גזירה ב $\mathbb{R}$ ובפרט גזירה בקטע $[0,1]$, ונתון כי f גזירה בקטע $[0,1]$. ולכן h גזירה בקטע $[0,1]$ בתור הפרש בין פונקציות הגזירות בקטע.

$$h'(x)=f'(x)-\left(\sqrt{3x^2+6}\right)'=f'(x)-\frac{3x}{\sqrt{3x^2+6}}$$

$$h'(0)=f'(0)-\frac{3\cdot 0}{\sqrt{3\cdot 0^2+6}}=f'(0)-0=f'(0)\overset{(1)}{\geq}0$$

$$h'(1)=f'(1)-\frac{3\cdot 1}{\sqrt{3\cdot 1^2+6}}=f'(1)-1\overset{(1)}{\leq}0$$

(1) לכל x בקטע $[0,1]$ מתקיים $0\leq f'(x)\leq 1$

h גזירה ב $[0,1]$ ומתקיים $h'(0)\geq 0\geq h'(1)$, ומשפט Darboux נסיק שקיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש

$$h'(c)=f'(c)-\frac{3c}{\sqrt{3c^2+6}}=0 \quad\Rightarrow\quad f'(c)=\frac{3c}{\sqrt{3c^2+6}}$$

<u>שאלה 4</u>

$f(x)=\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ רציפה בקטע $[0,1]$ בתור הרכבה ומכפלה של פונקציות רציפות בקטע, ולפי משפט Cantor f רציפה במידה שווה בקטע $[0,1]$.

f גזירה בקטע $(0,\infty)$ בתור הרכבה ומכפלה של פונקציות גזירות בקטע, ובפרט גזירה בקטע $[1,\infty)$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{\cos\sqrt{x}}{2}$$

ולכן

$$\left|f'(x)\right|=\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{\cos\sqrt{x}}{2}\right|\overset{(1)}{\le}\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right|+\left|\frac{\cos\sqrt{x}}{2}\right|\overset{(2)}{=}\frac{\left|\sin\sqrt{x}\right|}{2\sqrt{x}}+\frac{\left|\cos\sqrt{x}\right|}{2}\overset{(3)}{\le}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\overset{(4)}{\le}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

(1) אי שוויון המשולש

(2) תכונות הערך המוחלט ו $2\sqrt{x}>0$

(3) לכל $x\in\mathbb{R}$, $|\sin x|\le 1$ ו $|\cos x|\le 1$

(4) לכל $x\in[1,\infty)$, $x\ge 1$ ולכן גם $\sqrt{x}\ge 1$

כלומר f' חסומה בקטע $[1,\infty)$. מהטענה בשאלה 9 ביחידה 8 נסיק ש f רציפה במידה שווה ב $[1,\infty)$.

ומהטענה משאלה 49 ביחידה 5 נקבל ש f רציפה במידה שווה ב $[0,1]\cup[1,\infty)=[0,\infty)$.

<u>שאלה 5</u>

א.

(i)

יהי $x>a$. f גזירה ולכן גם רציפה בקטע $[a,\infty)$, ולכן גם רציפה בקטע $[a,x]$ וגזירה בקטע (a,x) , וממשפט Lagrange נסיק שקיימת $c\in(a,x)$ כך ש

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

$f'(x)\ge m$ לכל $x\in[a,\infty)$ ו $c>a$ ולכן $f'(c)\ge m$, ומכאן

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge m$$

נכפול אי השוויון ב $x-a>0$ ונקבל

$$f(x)-f(a)\ge m(x-a)\quad\Rightarrow\quad f(x)\ge f(a)+m(x-a)=f(a)-ma+mx$$

לשם נוחות נסמן $g(x)=f(a)-ma+mx$.

קיבלנו שלכל $x>a$ מתקיים $f(x)\ge g(x)$,

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left(f(a)-ma+\underbrace{m}_{\to m>0}\cdot\underbrace{x}_{\to\infty}\right)="(f(a)-ma)+m\cdot\infty"=\infty$$

מקריטריון ההשוואה עבור גבולות אינסופיים (באנלוגיה למשפט 2.45) נקבל ש

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

(ii)

ניתן להוכיח טענה זו באופן אנלוגי לחלוטין להוכחת (i), אבל ניתן הוכחה אחרת.

נגדיר $g(x)=-f(x)$. f גזירה בקטע $[a,\infty)$ ולכן g גזירה בקטע $[a,\infty)$.

לכל $x\in[a,\infty)$ מתקיים

$$f'(x)\le -m\quad\Rightarrow\quad g'(x)=-f'(x)\ge m$$

g מקיימת את התנאים של טענת סעיף (i), ולכן $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$, ומכאן נסיק כי

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}-g(x)=-\infty$$

ב.

(i)

f גזירה פעמיים בקטע $(0,\infty)$ (ובפרט גזירה בו) ומקיימת $f''(x)>0$ בקטע, כלומר f' גזירה בקטע $(0,\infty)$ ומקיימת $(f')'>0$ בקטע. ממשפט 8.17 נקבל ש f' עולה בקטע $(0,\infty)$.

נניח בשלילה שקיים $x_0>0$ כך ש $f'(x_0)\ge 0$.

יהי $a>x_0$ כלשהו. מהמונוטוניות של f' נקבל $f'(a)>f'(x_0)\ge 0$, כלומר $f'(a)>0$, ולכל $x\in[a,\infty)$ מתקיים $f'(x)\ge f'(a)$.

נסמן $m=f'(a)>0$.

$a>0$ ולכן $[a,\infty)\subset(0,\infty)$, ומכאן ש f גזירה בקטע $[a,\infty)$ ולכל $x\in[a,\infty)$ מתקיים $f'(x)\ge m$.

מסעיף א נסיק כי $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, בסתירה לנתון.

מהסתירה נובע שלכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $f'(x)<0$.

(ii)

בסעיף (i) מצאנו שלכל $x \in (0,\infty)$ מתקיים $f'(x) < 0$, כלומר 0 הינו חסם מלעיל ל $f'\big((0,\infty)\big)$.

$f'\big((0,\infty)\big)$ כמובן לא ריקה וחסומה מלעיל, ולכן (משפט 3.6) קיים $\sup f'\big((0,\infty)\big)$.

ממינימליות החסם העליון נקבל ש $\sup f'\big((0,\infty)\big) \le 0$.

נניח בשלילה ש $\sup f'\big((0,\infty)\big) < 0$, ונסמן $m = -\sup f'\big((0,\infty)\big) > 0$.

אז $-m = \sup f'\big((0,\infty)\big)$ הינו חסם מלעיל של $f'\big((0,\infty)\big)$ ולכן לכל $x > 0$ מתקיים $f'(x) \le -m$.

יהי $a > 0$ כלשהו, אז $[a,\infty) \subset (0,\infty)$.

f גזירה בקטע $(0,\infty)$ ולכן גזירה בתת הקטע $[a,\infty)$, ולכל $x \ge a$ מתקיים $f'(x) \le -m$. מסעיף א נקבל ש $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, בסתירה לנתון.

מהסתירה נובע ש $\sup f'\big((0,\infty)\big) = 0$.

(iii)

בסעיפים הקודמים מצאנו ש f גזירה בקטע $(0,\infty)$, f' עולה ב $(0,\infty)$, $f'(x) < 0$ ב $(0,\infty)$ ו $\sup f'\big((0,\infty)\big) = 0$.

נוכיח כי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

יהי $\varepsilon > 0$.

$-\varepsilon < 0 = \sup f'\big((0,\infty)\big)$ ולכן (ממינימליות החסם העליון) $-\varepsilon$ אינו חסם מלעיל של $f'\big((0,\infty)\big)$, כלומר קיים $x_0 > 0$ כך ש $f'(x_0) > -\varepsilon$.

מהמונוטוניות של f', לכל $x > x_0$ מתקיים

$$f'(x) > f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < f'(x_0) < f'(x) < 0 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|f'(x)\right| < \varepsilon$$

מצאנו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $N = x_0 > 0$ כך שלכל $x > N$ מתקיים $\left|f'(x) - 0\right| < \varepsilon$, לפיכך $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

<u>שאלה 6</u>
א.
נסמן

$$f(x)=x^x-x\overset{(1)}{=}e^{\ln(x^x)}-x\overset{(2)}{=}e^{x\ln x}-x \quad , \quad g(x)=\ln x-x+1$$

(1) לפי הזהות $x=e^{\ln x}$
(2) חוקי הלוגריתם.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}e^{x\ln x}-x\overset{(3)}{=}e^{1\cdot\ln 1}-1=e^0-1=1-1=0$$

$$\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\ln x-x+1\overset{(3)}{=}\ln 1-1+1=0$$

(3) רציפות ואריתמטיקה.
f,g גזירות ב $(0,\infty)$ בתור הרכבה, וכפלה, סכום והפרש פונקציות גזירות, ולכן גזירות בסביבה נקובה של $x=1$.

$$f'(x)=e^{x\ln x}\cdot\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)-1=e^{x\ln x}(1+\ln x)-1$$

$$g'(x)=\frac{1}{x}-1$$

נחשב את

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}(1+\ln x)-1}{\frac{1}{x}-1}$$

$$\lim_{x\to 1}f'(x)=\lim_{x\to 1}e^{x\ln x}(1+\ln x)-1\overset{(3)}{=}e^{1\cdot\ln 1}(1+\ln 1)-1=e^0\cdot(1+0)-1=1-1=0$$

$$\lim_{x\to 1}g'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}-1\overset{(3)}{=}\frac{1}{1}-1=1-1=0$$

מטעמי נוחות נסמן $k(x)=g'(x)=\frac{1}{x}-1 \quad , \quad h(x)=f'(x)=e^{x\ln x}(1+\ln x)-1$.

אז $\lim_{x\to 1}k(x)=0 \ , \ \lim_{x\to 1}h(x)=0$.

h,k גזירות ב $(0,\infty)$ בתור הרכבה, וכפלה, סכום והפרש פונקציות גזירות, ולכן גזירות בסביבה נקובה של $x=1$.

$$h'(x)=e^{x\ln x}\cdot(1+\ln x)\cdot(1+\ln x)+e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}=e^{x\ln x}\cdot\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)$$

$$k'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

נחשב את

$$\lim_{x\to 1}\frac{h'(x)}{k'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}\cdot\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\overset{(3)}{=}\frac{e^{1\cdot\ln 1}\cdot\left((1+\ln 1)^2+\frac{1}{1}\right)}{-\frac{1}{1^2}}=\frac{1\cdot(1^2+1)}{-1}=-2$$

ולכן לפי כלל Lhospital (בפעם השניה)

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)}{k(x)}\overset{\text{L}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{h'(x)}{k'(x)}=-2$$

ולכן לפי כלל Lhospital (בפעם הראשונה)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{L}{=}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-2$$

ב.
נחשב גבולות חד צדיים.

$$\lim_{x\to 0^+}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

נסמן $t=\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}="\frac{1}{0^+}"=\infty$, ולפי משפט גבול של הרכבה (4.39)

$$\lim_{x\to 0^+}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t-1}{t}\overset{L}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{1}=\lim_{t\to\infty}e^t=\infty$$

הצדקה של משפט Lhospital:

$\lim_{t\to\infty}t=\infty$, $\lim_{t\to\infty}e^t-1="\infty-1"=\infty$, הפונקציות t , e^t-1 גזירות ב $\mathbb{R}$ ולכן גזירות בסביבה של ∞.

$$\lim_{x\to 0^-}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

נסמן $t=\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}="\frac{1}{0^-}"=-\infty$, ולפי משפט גבול של הרכבה (4.39)

$$\lim_{x\to 0^-}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t-1}{t}\overset{(4)}{=}"\frac{0-1}{-\infty}"=0$$

(4) אריתמטיקה והגבול הידוע $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

הגבולות החד צדיים שונים, ולכן (משפט 4.48) הגבול $\lim_{x\to 0}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ אינו קיים.

ג.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\pi}\arctan x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1 \quad , \quad \lim_{x\to\infty}x=\infty$$

ולכן זהו גבול מסוג $"1^\infty"$.

בסביבה של ∞ מתקיים $\arctan x>0$ ולכן $(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x>0$, ולפי הזהות $x=e^{\ln x}$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left[\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x\right]}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}$$

נחשב את גבול הביטוי במעריך

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\pi}\underbrace{\arctan x}_{\to\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1 \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\ln 1=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

הפונקציות $\frac{1}{x}$, $\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)$ גזירות ב $(0,\infty)$ (סביבה של ∞) בתור הרכבה של פונקציות גזירות.

ולכן לפי כלל Lhospital

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arctan x}\cdot\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\arctan x}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\underbrace{\arctan x}_{\to\frac{\pi}{2}}}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+1}\overset{(3)}{=}\frac{-1}{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

ולכן מרציפות הפונקציה e^x ומשפט גבול של הרכבה (5.14)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}=e^{-\frac{2}{\pi}}$$

<u>שאלה 7</u>

א.

$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ גזירה בקטע $(0,\infty)$ כסכום של פונקציות גזירות בקטע ולכן גם רציפה ב $(0,\infty)$.

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$$

$$0<x<1 \;\Rightarrow\; x-1<0\;,\; x^2>0 \;\Rightarrow\; f'(x)<0$$

f רציפה וגזירה ב $(0,\infty)$ ובפרט רציפה ב $[0,1]$ וגזירה ב $(0,1)$, $f'(x)<0$ בקטע $(0,1)$, ולפי משפט 8.18 נקבל ש f יורדת בקטע $(0,1]$. ולכן לכל $0<x\le 1$ מתקיים $f(x)\ge f(1)$.

$$x>1 \;\Rightarrow\; x-1>0\;,\; x^2>0 \;\Rightarrow\; f'(x)>0$$

f רציפה וגזירה ב $(0,\infty)$ ובפרט רציפה ב $[1,\infty)$ וגזירה ב $(1,\infty)$, $f'(x)>0$ בקטע $(1,\infty)$, ולפי משפט 8.18 נקבל ש f עולה בקטע $[1,\infty)$. ולכן לכל $x\ge 1$ מתקיים $f(x)\ge f(1)$.

לסיכום לכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $f(x)\ge f(1)$, כלומר f מקבלת מינימום בקטע $(0,\infty)$ בנקודה $x=1$.

ב.

נוכיח שלכל $y\in\mathbb{R}$ קיים $x\in(0,\infty)$ כך ש $g(x)=y$.

נחשב תחילה את הגבולות החד-צדדיים של g בקצוות הקטע.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{e^x}_{\to 1}\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}="1\cdot(-\infty)"=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\underbrace{e^x}_{\to\infty}\underbrace{\ln x}_{\to\infty}="\infty\cdot\infty"=\infty$$

יהי $y\in\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ ולכן לפי הגדרת הגבול, (עבור $M=y$) קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<x<0+\delta$ מתקיים $g(x)<y$.

נבחר $0<x_1<0+\delta$ ואז מתקיים $g(x_1)<y$.

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ ולכן לפי הגדרת הגבול, (עבור $M=y$) קיים $N>0$, ואפשר להניח ש $N>\delta$, כך שלכל $x>N$ מתקיים $g(x)>y$.

נבחר $x_2>N$ ואז מתקיים $g(x_2)>y$.

לסיכום $g(x_1)<y<g(x_2)$.

נשים לב כי: $0<x_1<\delta<N<x_2$, ולכן $[x_1,x_2]\subset(0,\infty)$.

g רציפה בקטע $(0,\infty)$ בתור מכפלה של פונקציות רציפות, ובפרט רציפה בקטע $[x_1,x_2]$. כאמור $g(x_1)<y<g(x_2)$, ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $c\in[x_1,x_2]$ כך ש $g(c)=y$, ובפרט $c\in(0,\infty)$.

קיבלנו ש g מקבלת בקטע $(0,\infty)$ כל ערך ממשי, לפחות פעם אחת.

g גזירה בקטע $(0,\infty)$ בתור מכפלה של פונקציות גזירות.

$$g'(x)=e^x\ln x+e^x\frac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)=e^x\cdot f(x)$$

מסעיף א, f מקבלת מינימום בקטע $(0,\infty)$ בנקודה $x=1$, כלומר לכל $x\in(0,\infty)$

$$f(x) \ge f(1) = \frac{1}{1} + \ln 1 = 1 + 0 = 1 > 0$$

לכל $x \in (0,\infty)$, $e^x > 0$, $f(x) > 0$ ולכן $g'(x) = e^x \cdot f(x) > 0$.
g גזירה ובעלת נגזרת חיובית בקטע $(0,\infty)$, ולפי משפט 8.17 נסיק כי g עולה בקטע $(0,\infty)$. ולכן g חח״ע בקטע $(0,\infty)$ (שאלה 14 ביחידה 4).
מחח״ע g בקטע נובע ש g מקבלת בקטע $(0,\infty)$ כל ערך ממשי לכל היותר פעם אחת.

לסיכום, g מקבלת בקטע $(0,\infty)$ כל ערך ממשי לפחות פעם אחת ולכל היותר פעם אחת, כלומר בדיוק פעם אחת.