ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20109

אלגברה לינארית 1

חוברת הקורס - אביב 2024ב

כתב: נתנאל רגב

מרץ 2024 - סמסטר אביב - תשפ״ד

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם ללומדי הקורס "אלגברה לינארית 1".

כדי להקל עליכם את לימוד הקורס, שאינו קל, השקענו מאמץ ניכר בבניית מערכת מסייעת ללימוד העצמי. תיאור המערכת כלול בחוברת זו. אנו ממליצים שתקראו את החוברת עוד בטרם תיגשו ללימוד עצמו.
בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת:
http://www.openu.ac.il/shoham.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה של הקורס הוא נתנאל רגב. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781423, בימי א', בין השעות 11:00-12:00.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - netanr@openu.ac.il
- פקס: 09-7780631.
- **שאילתא** - לפניות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאילתא. לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת **בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.**

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודיכם.

ב ב ר כ ה ,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20109 /ב2024)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
1	22.03.2024-17.03.2024 (ה תענית אסתר)	פרק 1		
2	29.03.2024-24.03.2024 (א פורים)	פרקים 1 – 2		
3	05.04.2024-31.03.2024	פרקים 2 – 3		
4	12.04.2024-07.04.2024	פרק 3		ממ"ן 11 11.04.2024
5	19.04.2024-14.04.2024	פרק 4		
6	26.04.2024-21.04.2024 (ב-ו פסח)	פרקים 4 – 6		
7	03.05.2024-28.04.2024 (א-ב פסח)	פרק 7		
8	10.05.2024-05.05.2024 (ב יום הזכרון לשואה)	פרק 7		ממ"ן 12 09.05.2024
9	17.05.2024-12.05.2024 (ב יום הזיכרון, ג יום העצמאות)	פרק 8		
10	24.05.2024-19.05.2024	פרק 8		ממ"ן 13 23.05.2024
11	31.05.2024-26.05.2024 (א ל"ג בעומר)	פרק 9		
12	07.06.2024-02.06.2024	פרק 9		ממ"ן 14 06.06.2024
13	14.06.2024-09.06.2024 (ד שבועות)	פרק 10		
14	21.06.2024-16.06.2024	פרק 10		ממ"ן 15 27.06.2024

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם :

1. להגיש מטלות במשקל כולל של **12 נקודות לפחות**.
2. לקבל בבחינת הגמר ציון **60 לפחות**.
3. לקבל בציון הסופי של הקורס **60 נקודות לפחות**.

פירוט המטלות בקורס

בקורס אלגברה לינארית 1 יש **5** ממ״נים.

תאריכי הגשת המטלות מופיעים בלוח זמנים ופעילויות וכן על גבי המטלות עצמן. שימו לב כי תאריכים אלה הם תאריכים אחרונים למשלוח. מטלות שיישלחו לאחר המועד שנקבע בלוח הזמנים של הקורס, לא תילקחנה בחשבון בחישוב הציון הסופי. המטלות תיבדקנה על ידי המנחים כדי שהסטודנטים יוכלו לקבל משוב על עבודתם. במקרים מיוחדים של אי עמידה בלוח הזמנים, ניתן לפנות אל מרכז ההוראה.

המטלה	הפרקים אליהם היא מתייחסת	משקל המטלה
ממ״ן 11	פרקים 1 – 2	4
ממ״ן 12	פרקים 3 – 4	4
ממ״ן 13	פרקים 6 – 7	4
ממ״ן 14	פרקים 7 – 8	4
ממ״ן 15	פרקים 9 – 10	4
		סה״כ 20 נקודות

חשוב לדעת!

- **למפגש הראשון** יש לקרוא באופן מעמיק את **פרק 1 של כרך א'.**

- **החוברת "פרקי ההכנה בקורס"** מיועדת ללימוד עצמי. לא יהיה תרגול על החומר הזה במסגרת המפגש . **אין צורך** לקרוא את כל החוברת בתחילת הסמסטר.
הנחיות בנושא זה יופיעו באתר הקורס בלשונית: פרקי הכנה.

- **פתרון המטלות** הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

  כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:
  בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר.
  ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
  ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.
  ראו הסבר מפורט באתר הקורס בלשונית "מידע כללי על הקורס".

  זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

- **מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.**

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20109 – אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1 – 2

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2024ב **מועד אחרון להגשה:** 11.04.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (10 נקודות)

האם קבוצת המספרים הממשיים $\mathbf{R}$ היא שדה ביחס לפעולת חיבור הרגילה ולפעולת הכפל $*$ המוגדרת על-ידי $a * b = (ab)^3$ אם כן, הוכיחו זאת ואם לא, הסבירו מדוע.

שאלה 2 (20 נקודות)

א. פתרו את המערכת הבאה ב- 4 נעלמים מעל $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} 2y + 2z - 2w = 0 \\ x - z - 3w = 0 \\ 2x + 3y + z + w = 0 \\ -2x + y + 3z - 2w = 0 \end{cases}.$$

ב. פתרו מעל $\mathbf{R}$ את המערכת הלא לינארית ב- 3 נעלמים:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 = 2 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 = 3 \end{cases}.$$

רמז: השתמשו במשתני עזר.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות מעל $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x - ky + (1-k)z = 2 \\ kx - 4y - 6z = k^2 + 2k - 9 \\ (k-2)x + (2k-4)y + (3k-8)z = k^2 + 2k - 12 \end{cases}, \quad k \in \mathbf{R}$$

עבור אילו ערכי k יש למערכת הנתונה פתרון יחיד? אינסוף פתרונות? אין פתרון?
במקרה שיש אינסוף פתרונות, רשמו את הפתרון הכללי למערכת.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $U=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית של וקטורים ב - $\mathbf{R}^5$.

נגדיר $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ וקטורים ב- $\mathbf{R}^5$ באופן הבא:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= 2\alpha\,\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_4\\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_3+\alpha\,\mathbf{u}_4\\ \mathbf{v}_3 &= \alpha\,\mathbf{u}_1+\alpha\,\mathbf{u}_2+\alpha\,\mathbf{u}_4\end{aligned}$$

כאשר α מספר ממשי. נסמן $A=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$.

א. מצאו את כל ערכי α שעבורם הקבוצה A תלויה ליניארית.

ב. עבור כל ערך של α שמצאת בסעיף א', בדקו האם ניתן לרשום את $\mathbf{v}_2$ כצירוף ליניארי של $\mathbf{v}_1$ ו- $\mathbf{v}_3$. אם כן- מצאו את הצירוף, אם לא- נמק.

ג. האם ניתן לצרף את $\mathbf{v}_i$, אחד הווקטורים מהקבוצה A, לווקטורים שב- U כך שהקבוצה בת חמשת הווקטורים, $U\cup\{\mathbf{v}_i\}$, תהיה בסיס של $\mathbf{R}^5$?

שאלה 5 (25 נקודות)

יהיו $\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_m,\underline{b}$ וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$.

א. הוכיחו כי אם $m\ge n$ ואם למשוואה $x_1\underline{a}_1+\ldots+x_m\underline{a}_m=\underline{b}$ יש פתרון יחיד, אז הקבוצה $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m\}$ היא בסיס ל- $\mathbf{R}^n$.

ב. הוכיחו כי אם $m\le n$ ואם לכל $\underline{c}\in\mathbf{R}^n$ יש פתרון למשוואה $x_1\underline{a}_1+\ldots+x_m\underline{a}_m=\underline{c}$, אז הקבוצה $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m\}$ היא בסיס ל- $\mathbf{R}^n$.

ג. הוכיחו כי אם למשוואה $x_1\underline{a}_1+\ldots+x_m\underline{a}_m=\underline{b}$ יש פתרון ואם הקבוצה $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m\}$ היא בלתי תלויה לינארית, אז הפתרון הוא יחיד.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20109 – אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 3 – 4

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2024ב **מועד אחרון להגשה:** **09.05.2024**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15 נקודות)

תהיינה A,B מטריצות ב- $M_n(F)$ המקיימות $AB=BA$.

הוכיחו, על-ידי אינדוקציה על k שלכל $k\in\mathbf{N}$, $k\geq 1$, מתקיים ש- $(AB)^k=A^kB^k$.

שאלה 2 (15 נקודות)

נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -k \end{pmatrix}.$$

מצאו את כל הערכים של k עבורם A הפיכה ומתקיים $A=A^{-1}$.

שאלה 3 (20 נקודות)

בשאלה זו, המטריצות מעל השדה $\mathbf{R}$. אין קשר בין הסעיפים השונים.

א. הוכיחו שאם B,A מטריצות מסדר $n\times n$ ואם $A^2+AB+I=0$, אז $AB=BA$.

ב. תהיינה B,A מטריצות מסדר $n\times n$, כאשר n אי-זוגי.
הוכיחו שאם מתקיים $AB+BA=0$, אז לפחות אחת המטריצות B,A סינגולרית.

ג. תהי A מטריצה ריבועית מסדר n כך שלכל מטריצה ריבועית $B\neq 0$ מסדר n מתקיים $AB\neq 0$. הוכיחו ש- A הפיכה.

רמז: ניתן להיעזר בטענה 3.6.8 וגם במשפט 3.10.6

שאלה 4 (15 נקודות)

תהיינה A מטריצה מסדר $n \times m$ ו- B מטריצה מסדר $m \times n$ כאשר $n < m$.

הוכיחו כי AB אינה הפיכה.

הדרכה: משפט 3.10.6 סעיף ז'

שאלה 5 (15 נקודות)

נתונות המטריצות הבאות, מעל $\mathbf{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} a+3 & 1 & b-1 \\ a-1 & 4 & b+2 \\ b+2 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$$ ו- $$B = \begin{pmatrix} 1 & b & 4 & 1 \\ 2a+6 & a-1 & 2a-2 & 2b+4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5-3b & 1-b & 2-3b & 8-3a \end{pmatrix}.$$

נתון כי $\det A = \frac{1}{3}$. חשבו את $\det B$ וגם $\det(-2B^{-1})$.

שאלה 6 (20 נקודות)

חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר n, $n > 1$, מעל $\mathbf{R}$:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & n & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 0 & n & \cdots & \cdots & n \\ \vdots & n & 0 & n & \cdots & n \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n & 0 & n \\ n & n & \cdots & \cdots & n & 0 \end{vmatrix}$$

כלומר, $D = (d_{ij})_{1 \le i, j \le n}$, כאשר לכל i, $1 \le i \le n$, $d_{ij} = \begin{cases} 0 & if \;\; j = i \\ n & if \;\; j \ne i \end{cases}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20109 – אלגברה ליניארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6 – 7

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2024ב **מועד אחרון להגשה:** **23.05.2024**

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס. קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (20 נקודות)

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & z^2 & 2\\ z & (1+i)\overline{z} & 2z\end{pmatrix}$. מצאו את כל הערכים של המספר המרוכב z כך ש-A הפיכה. יש להציג את z על-ידי הצגה טריגונומטרית.

שאלה 2 (15 נקודות)

נגדיר את הקבוצה $\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$. על קבוצה זו נגדיר את הפעולות הבאות:

פעולת החיבור: לכל $x,y\in\mathbb{R}_+$ מתקיים $x\oplus y=\frac{x}{y}$.

פעולת הכפל בסקלר: לכל $x\in\mathbb{R}_+$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $\alpha\odot x=x^\alpha$.

האם הקבוצה $\mathbb{R}_+$ עם הפעולות האלו היא מרחב ליניארי מעל $\mathbb{R}$.

שאלה 3 (25 נקודות)

א. קבעו אלו מהקבוצות הבאות הן מרחבים ליניאריים מעל $\mathbf{R}$, ביחס לפעולות הרגילות.

$$K=\left\{\begin{pmatrix}a-2c & c+a\\ b & -c\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$$

$$L=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3 \mid x_1+x_2=2x_1-3x_2-5\}$$

$$M=\{p(x)\in\mathbf{R}_4[x]\mid p(-1)=p(1)=p(0)\}$$

$$S=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\mid f(-x)=f(x)+1\,,\ x\in\mathbf{R}\ \text{לכל}\}$$

ב. עבור כל אחד מהמרחבים שמצאת, הציגו קבוצה פורשת סופית.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי

$$U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}\,.$$

א. הוכיחו ש- U הוא תת־מרחב של $M_2(\mathbb{R})$ בעזרת המבחן לתת מרחב של משפט 7.3.2.

ב. הוכיחו ש- U הוא תת־מרחב של $M_2(\mathbb{R})$ בעזרת מציאת קבוצה סופית K, כך ש- $V = \mathrm{Sp}(K)$.

ג. נתונה הקבוצה $K = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid ad = 0\right\}$.

הוכיחו כי $U \subseteq K$. האם K הוא תת־מרחב של $M_2(\mathbb{R})$?

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי

$$V = \{(a + 2b, 2a + 8b + 2c, a + 10b + 4c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}\,.$$

א. הוכיחו ש- V תת־מרחב של $\mathbb{R}^3$ בעזרת מציאת קבוצה סופית K, כך ש- $V = \mathrm{Sp}(K)$.

ב. האם הווקטור $u = (1,5,7) \in V$? אם כן, מצאו לו צירוף לינארי של איברי הקבוצה K שמצאתם בסעיף א׳.

ג. מצאו תת־מרחב T של $\mathbb{R}^3$ כך שמתקיים $\mathbb{R}^3 = V \oplus T$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20109 – אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 7 – 8

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2024ב **מועד אחרון להגשה:** 06.06.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס. קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15 נקודות)

תהי $A=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ קבוצת וקטורים במרחב לינארי V.

נתון ש- $v_1 \notin Sp\{v_2,\dots,v_n\}$ וגם ש- $v_1+v_n \in Sp\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$.

הוכיחו ש- $\{\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ תלויה לינארית.

שאלה 2 (15 נקודות)

נגדיר $f_1, f_2, f_3 : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ שלוש פונקציות על-ידי:

$$f_1(x)=2\sin x-1,\ f_2(x)=x^2\cos x,\ f_3(x)=x-\cos^2 x.$$

מצאו את ממדו של המרחב $Sp\{f_1, f_2, f_3\}$.

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונים U ו- W התת-מרחבים הבאים של $\mathbf{M}^{\mathrm{R}}_{2\times 2}$:

$$U=Sp\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-3\\1&-1\end{pmatrix}\right\} \text{ ו- } W=Sp\left\{\begin{pmatrix}4&2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}\right\}.$$

א. מצאו בסיס עבור U, W ו- $U+W$.

ב. מצאו בסיס עבור $U\cap W$.

ג. מצאו תת-מרחב T של $M_{2\times2}(\mathbf{R})$ כך שמתקיים $M_{2\times2}(\mathbf{R})=W\oplus T$.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהיו

$$,U = \mathrm{Sp}(\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_3\})$$

$$.W = \mathrm{Sp}(\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_1 - v_3\})$$

נתון שהקבוצה $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס של מרחב לינארי V.

א. הוכיחו כי $U = V$.

ב. חשבו את הממד של W, ומצאו בסיס ל- W.

ג. מצאו תת מרחב T של V כך ש $V = W \oplus T$.

שאלה 5 (15 נקודות)

תהיינה $A_{m\times n}$ ו- $B_{n\times m}$ מטריצות כך ש- $m > n$.

הוכיחו שאם המטריצה BA הפיכה אז $\rho(AB) = \rho(B) = \rho(A) = n$.

שאלה 6 (15 נקודות)

תהיינה A, B מטריצות מסדר 3×3.

הוכיחו שאם $\rho(A) + \rho(B) > 3$ אז יש עמודה של B שלא פותרת את המערכת $A\underline{x} = \underline{0}$.

הערה: ניתן להשתמש במשפט 8.6.1.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20109 – אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 9 – 10

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2024ב **מועד אחרון להגשה:** 27.06.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15 נקודות)

בדקו האם ההעתקות הבאות ליניאריות:

א. $T:\mathbf{R}_n[x]\to\mathbf{R}_n[x]$ המוגדרת על-ידי $T(p(x))=xp'(x)+2p(x)$, כאשר $p'(x)$ היא הנגזרת של $p(x)$.

ב. $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ המוגדרת על-ידי $T(x,y)=(2x-|y|,3x,y)$.

ג. $T:M_{n\times n}^{\mathbf{R}}\to M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ המוגדרת על-ידי $T(X)=X^2-X$.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה ההעתקה הלינארית $T:M_{2\times2}(\mathbf{R})\to\mathbf{R}_3[x]$ המוגדרת על-ידי:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a-d)x^2+(b+c)x+5a-5d \quad \text{לכל} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_{2\times2}(\mathbf{R})$$

א. מצאו בסיס ל- $\operatorname{Im}T$ ובסיס ל- $\ker T$.

ב. האם מתקיים $M_{2\times2}(\mathbf{R})=\ker T+\operatorname{Im}T$?

ג. **1.** נניח ש- $A\in \operatorname{Ker}T$. האם מתקיים $A^2\in \operatorname{Ker}T$?

2. נניח ש- $p(x)\in \operatorname{Im}T$. האם מתקיים $q(x)=p(x)+3x^2+2x+5\in \operatorname{Im}T$?

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי V מרחב לינארי ממימד n ותהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית המקיימת $T^2=0$.

א. הוכיחו כי $\mathrm{Im}\,T\subseteq \mathrm{Ker}\,T$ וכי $\dim(\mathrm{Ker}\,T)\geq n/2$.

ב. נניח כי $n=3$ ו- $T\neq 0$. הוכיחו כי קיים בסיס B של V כך ש- $[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

רמז: השלם בסיס של $\mathrm{Ker}\,T$ לבסיס של V.

שאלה 4 (25 נקודות)

א. מצאו העתקה ליניארית $T:\mathbf{R}_4[x]\to\mathbf{R}_4[x]$ כך ש- $\mathrm{Im}\,T=\mathrm{Ker}\,T=Sp\{x+1,x^3\}$.

רשמו נוסחה מפורשת עבור $T(ax^3+bx^2+cx+d)$, $a,b,c,d\in\mathbf{R}$.

ב. תהי $T:M_{2\times3}(\mathbf{R})\to M_{3\times3}(\mathbf{R})$ העתקה לינארית.

ענו על כל אחת השאלות הבאות ונמקו היטב:

1. האם יתכן ש- T על?

2. האם יתכן ש- T חד- חד- ערכית?

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ העתקה לינארית לא הפיכה המיוצגת בבסיס הסדור

$B=((1,0,1),(0,1,-1),(1,-1,0))$ על ידי המטריצה $[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&a&2a\\a&1&2a\end{pmatrix}$.

א. מצאו את ערך הקבוע a וחשב את $T(x_1,x_2,x_3)$ לכל $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$.

ב. מצאו בסיס ל- $\mathrm{Im}\,T$ ובסיס ל- $\mathrm{Ker}\,T$.

ג. מצאו את וקטור הקואורדינטות של $T(1,2,-1)$ לפי הבסיס B.