ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20474

חשבון אינפיניטסימלי 1

חוברת הקורס - סתיו 2024א

כתב: יונתן כהן

דצמבר 2023 - סמסטר סתיו תשפ"ד

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו שמחים לברך אתכם עם הצטרפותכם אל תלמידי הקורס "חשבון אינפיניטסימלי 1".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לקורס קיים אתר אינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה.
בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס.
מידע על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת:
http://www.openu.ac.il/shoham.
מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה בקורס הוא יונתן כהן. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781419, בימי ג' בשעות 12-13 (ניתן גם לנסות בימים אחרים).
- בדואר אלקטרוני jonathanc@openu.ac.il.
- בפקס 09-7780631.

לפניות בנושאים אקדמיים שונים (כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד), אנא עשו שימוש במערכת הפניות דרך שאילתא.
לחצו על הכפתור פניה חדשה, ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים בחרו את הפניה המתאימה. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות.

אנו מאחלים לכם בהצלחה בלימודים.

בברכה,
צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20474 / 2024א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	08.12.2023-03.12.2023 (ו חנוכה)	יחידה 1			
2	15.12.2023-10.12.2023 (א-ו חנוכה)	יחידה 2			ממ"ן 11 14.12.23
3	22.12.2023-17.12.2023	יחידה 2			
4	29.12.2023-24.12.2023	יחידה 3			
5	05.01.2024-31.12.2023	יחידה 3			ממ"ן 12 31.12.23
6	12.01.2024-07.01.2024	יחידה 4			
7	19.01.2024-14.01.2024	יחידה 4		ממ"ח 01 18.01.24	ממ"ן 13 14.01.24
8	26.01.2024-21.01.2024	יחידה 5			ממ"ן 14 25.01.24
9	02.02.2024-28.01.2024	יחידות 5, 6			
10	09.02.2024-04.02.2024	יחידות 7, 8			ממ"ן 15 07.02.24
11	14.02.2024-11.02.2024	יחידה 8		ממ"ח 02 14.02.24	
12					ממ"ן 16 21.02.24

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

התנאים לקבלת נקודות זכות

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס עליכם לעמוד בתנאים הבאים:

1. להגיש מטלות במשקל של 10 נקודות לפחות.
2. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.
3. לקבל בציון הסופי ציון 60 לפחות.

תיאור המטלות

בחוברת המטלות יש שבעה ממ"נים וארבעה ממ"חים.
יש להגיש מטלות במשקל של 10 נקודות לפחות.
אנו ממליצים להגיש את כל המטלות על מנת שתחשפו למגוון גדול של שאלות.

תאריכי הגשת המטלות מופיעים ב'לוח זמנים ופעילויות' וכן על גבי המטלות עצמן. שימו לב כי תאריכים אלה הם תאריכים אחרונים למשלוח. מטלות שיישלחו לאחר המועד שנקבע בלוח הזמנים של הקורס, לא ייבדקו ולא יילקחו בחשבון בחישוב הציון הסופי.
במקרים מיוחדים של אי עמידה בלוח הזמנים – ניתן לנסות ולבקש דחייה בהגשת ממ"ן מהמנחים שלכם, ודחייה בהגשת ממ"ח ממרכז ההוראה בקורס.
מטלות המנחה יבדקו על ידי צוות הקורס וישלחו בדוקות, עם הערות, לבתיכם.
באתר הקורס יפורסמו פתרונות לרוב המטלות, זמן מה לאחר מועד הגשתן (הודעה על היום המדויק תופיע ב'לוח המודעות' שבאתר). מובן מאליו שבשום מקרה אי אפשר להגיש את המטלה לאחר שפתרונה פורסם.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ להשתדל ולהגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן הצלחתם להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודד הגשת מספר רב של מטלות, הנהגנו הקלה כדלהלן:
בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות שמשקלן 10 נקודות ומעלה.

מותר, ואפילו מומלץ, לדון עם עמיתים ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש, היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.
אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

בערכת הלימוד של הקורס תמצאו חוברת דקה ובה סיכום ההגדרות והמשפטים בקורס. חוברת זו היא חומר העזר היחיד המותר בשימוש בבחינת הסיום של הקורס, ובלבד שלא כתוב בה שום דבר נוסף, ולכן הקפידו שלא לכתוב על גבי חוברת זו. אין לכתוב בעט/עפרון בתוך החוברת, כולל קוים תחתונים, כוכביות, מסגרות, למרקר, להוסיף לשוניות סימון וכו'.
אסור למרקר.
נא להקפיד על כך. חוברת שנכתב בה הינה עילה לפסילת בחינה ודין משמעתי.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידה 1

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 14.12.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

שאלה 1 (25 נקודות)

א. יהיו $k,m\in\mathbb{N}$. הוכיחו כי $a=k+m\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

ב. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים: $(1+\sqrt{2})^n$ הוא מספר אי-רציונלי.

רמז: הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי, $(1+\sqrt{2})^n$ הוא מהצורה $k+m\sqrt{2}$, $k,m\in\mathbb{N}$.

אח"כ הסיקו כי $(1+\sqrt{2})^n$ הוא מספר אי-רציונלי.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהיו a,b שני מספרים ממשיים.

הוכיחו שמתקיים $\left|\sqrt{|a|+1}-\sqrt{|b|+1}\right|\le\frac{|a-b|}{2}$.

הדרכה: נמקו שעבור $x,y>0$ מתקיים $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

שאלה 3 (25 נקודות)

להזכירכם: $\lfloor a \rfloor$ הוא החלק השלם של a (ראו הגדרה 1.63).

א. הוכיחו כי לכל x ו y ממשיים מתקיים: $x \le y \quad \Rightarrow \quad \lfloor x \rfloor \le \lfloor y \rfloor$.

ב. פתרו את המשוואה: $\lfloor x^2 \rfloor = 9$.

הקפידו לנמק את כל טענותיכם.

שאלה 4 (30 נקודות)

נגדיר: קבוצה A של מספרים ממשיים נקראת **צפופה בקטע I** אם לכל $x, y \in I$ כך ש $x < y$ קיים $a \in A$ כך ש $x < a < y$.

א. הוכיחו שהקבוצה $A = \{ q\sqrt{3} \mid q \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q} \}$ צפופה ב $[0,1]$.

ב. נסחו: A אינה צפופה בקטע I.

הדרכה: יש לנסח את השלילה של ההגדרה 'A צפופה בקטע I' הרשומה לעיל, באמצעות המילים 'לכל' ו'קיים'. אפשר להיעזר בסעיף 2.1.3 ושאלות 11, 17 ביחידה 2.

ג. הוכיחו שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 3 אינה צפופה בקטע $[-1,1]$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 12

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידה 2

מספר השאלות: 3 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 31.12.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״.

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

הערה חשובה:

בעמוד 92 ביחידה 2 מופיעה ההגדרה הזאת לגבול של סדרה:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי N, כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

להגדרה זו אנו קוראים ״הגדרת הגבול בלשון ε, N״.

שאלה 1 (35 נקודות)

בשאלה זו יש להוכיח/לנסח בלשון ε, N, ובלי להסתמך על אף משפט או טענה אחרת מיחידה 2, אין להוכיח בדרך השלילה.

א. הוכיחו ישירות מהגדרת הגבול בלשון ε, N: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{4n+1}{n}} = 2$.

ב. (i) תהי (a_n) סידרה ויהי L מספר ממשי. נסחו בלשון ε, N: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq L$.

כלומר, עליכם לשלול בלשון ε, N את הטענה: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

הערה: התבוננו בשאלה 17 מיחידה 2.

(ii) נסחו בלשון ε, N: הסדרה (a_n) מתבדרת.

ג. הוכיחו בלשון ε, N שהסדרה $a_n = \dfrac{(-1)^n n + 1}{n+2}$ מתבדרת.

שאלה 2 (25 נקודות)

חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים. בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, הוכיחו זאת.

א. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+(-1)^n} - n$

ב. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-2n^6-1}{n^4-\pi n^5+5n}$

ג. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}}$

שאלה 3 (40 נקודות)

יהיו (a_n) ו (b_n) סדרות כך שמתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

א. אם כמעט כל אברי (a_n) ו (b_n) חיוביים, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

ב. אם כמעט כל אברי (b_n) חיוביים, אז כמעט כל אברי (a_n) חיוביים.

ג. $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

ד. קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $b_n \neq 0$.

ה. אם $b_n < a_n$ כמעט לכל n, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

ו. אם $0 < b_n < a_n$ כמעט לכל n, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידה 3

מספר השאלות: 3 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 14.01.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

שאלה 1 (30 נקודות)

תהי (a_n) הסדרה המוגדרת על-ידי: $a_1 = 0$ ו $a_{n+1} = \dfrac{1}{4(1-a_n)}$ לכל n.

א. הוכיחו שהסדרה מוגדרת היטב, כלומר לכל n, קיים המספר a_n.

ב. הוכיחו שהסדרה (a_n) מתכנסת וחשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

שאלה 2 (30 נקודות)

חשבו את הגבולות שלהלן אם הם קיימים. בכל מקרה שהגבול לא קיים, גם לא במובן הרחב, נמקו מדוע, וחשבו את כל הגבולות החלקיים (גם גבולות חלקיים במובן הרחב).

א. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-5)^n + 2(-2)^n + 3}{5^{n+1} + 2(-3)^n + 3}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-5)^n + 4^{n+1} + 3}{(-4)^n + 2(-2)^n + 3}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} - 1\right)^n$

שאלה 3 (40 נקודות)

תהי $a_n = \left\langle \sqrt{n} \right\rangle$ (להזכירכם, $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$).

א. הוכיחו כי הסדרה (a_n) חסומה.

ב. חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

ג. מצאו את $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מינימום.
נמקו את תשובתכם.

ד. הוכיחו כי לכל n מתקיים: $\left\langle \sqrt{n^2-1} \right\rangle = \sqrt{n^2-1} - n + 1$.

ה. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1} - n + 1 = 1$.

ו. היעזרו בטענות סעיפים ד', ה' כדי להוכיח ש $L=1$ הוא גבול חלקי של (a_n).

ז. חשבו את $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

ח. מצאו את $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, וקבעו האם לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ יש מקסימום.
נמקו את תשובתכם.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס:	20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1		
חומר הלימוד למטלה:	יחידות 1, 2, 3		
מספר השאלות:	16	**משקל המטלה:**	1 נקודה
סמסטר:	2024א	**מועד אחרון להגשה:**	18.01.2024

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות.
סמנו: **א** - אם רק טענה 1 נכונה,
ב - אם רק טענה 2 נכונה,
ג - אם שתי הטענות נכונות,
ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

<u>יחידה 1</u>

שאלה 1

יהיו a ו b מספרים ממשיים.

1. אם $b \neq 0$ ו $|a| < b^2$, אז $-b < \frac{a}{b} < b$.
2. אם $a \neq 0$ ו $b \neq 0$, אז $\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{a}\right| \geq 2$.

<u>יחידה 2</u>

שאלה 2

תהי (a_n) סדרה.

1. אם $\lim_{n\to\infty} {a_n}^2$ קיים, אז $\lim_{n\to\infty} a_n$ קיים.
2. אם $\lim_{n\to\infty} {a_n}^2 = 0$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

שאלה 3

תהי (a_n) סדרה כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$.

1. קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - 4| < \frac{1}{10}$.
2. קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N טבעי יש $n > N$ כך ש $|a_n - 1| \ge \varepsilon$.

שאלה 4

תהי (a_n) סדרה.

1. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$, אז קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ ולכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - 4| < \varepsilon$.
2. אם קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ ולכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - 4| < \varepsilon$,

   אז $a_n = 4$ לכל $n > N$.

שאלה 5

יהיו (a_n) ו (b_n) סדרות כך ש $a_n b_n < 0$ כמעט לכל n.

1. ($a_n < 0$ כמעט לכל n) או ($b_n < 0$ כמעט לכל n).
2. ($a_n < 0$ או $b_n < 0$) כמעט לכל n.

שאלה 6

תהי (a_n) סדרה.

1. אם (a_n) חסומה, אז $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ אפסה.
2. אם $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה, אז $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ אפסה.

שאלה 7

תהי (a_n) סדרה.

1. אם $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה, אז קיים $M > 0$ כך שלכל n טבעי מתקיים $|a_n| \le |a_1| + (n-1)M$.
2. אם $(a_{n+1} - a_n)$ חסומה, אז $\left(\frac{a_n}{n^2}\right)$ אפסה.

שאלה 8

יהיו (a_n) ו (b_n) סדרות כך ש $a_n \to 0$ ו $b_n \to \infty$.

.1 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty$

.2 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$

שאלה 9

יהיו (a_n) ו (b_n) סדרות כך ש $a_n \to \infty$, $b_n \to 0$ ו $b_n \neq 0$ כמעט לכל n.

.1 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$ או $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = -\infty$.

.2 $\lim_{n\to\infty}a_n b_n$ שווה ל 0 או ל ∞ או ל $-\infty$.

שאלה 10

.1 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\lfloor\frac{3}{n}\right\rfloor = \frac{3}{2}$

.2 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor = \frac{2}{3}$

שאלה 11

תהי (a_n) סדרה חיובית.

.1 אם קיים $c > 1$ כך ש $\sqrt[n]{a_n} > c$ כמעט לכל n, אז $a_n \to \infty$.

.2 אם $a_n \to \infty$, אז קיים $c > 1$ כך ש $\sqrt[n]{a_n} > c$ כמעט לכל n.

שאלה 12

יהיו (a_n) ו (b_n) סדרות כך ש $a_n \to \infty$.

.1 אם $(a_n + b_n)$ חסומה, אז $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = -1$.

.2 קיים $M > 0$ כך ש $a_{n+1} \geq M a_n$ כמעט לכל n.

יחידה 3

שאלה 13

תהי (a_n) סדרה אפסה.

1. אם (a_n) יורדת ממש, אז (a_n) חיובית.
2. אם (a_n) חיובית, אז קיים N טבעי כך ש (a_{N+n}) יורדת.

שאלה 14

נגדיר: $a_1 = 1$ ו $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ לכל n.

1. הסדרה מוגדרת היטב, כלומר לכל n קיים a_n.
2. הסדרה (a_n) מתכנסת במובן הרחב.

שאלה 15

תהי (a_n) סדרה.

1. אם (a_{2n}) ו (a_{3n}) מתכנסות, אז $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{3n}$.
2. (a_n) מתכנסת אם ורק אם (a_{2n-1}), (a_{2n}) ו (a_{3n}) מתכנסות.

שאלה 16

תהי (a_n) סדרה ויהי $I=(a,b)$ קטע פתוח כך ש $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ צפופה ב I.

כלומר, לכל $x,y\in I$ כך ש $x<y$ קיים n כך ש $x<a_n<y$.

1. כל $L\in I$ הוא גבול חלקי של (a_n).
2. אם $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq I$, אז $b=\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידה 4

מספר השאלות: 3 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 25.01.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

שאלה 1 (30 נקודות)

בשאלה זו יש להוכיח בלשון ε,δ (ניסוח Cauchy), ובלי להסתמך על אף משפט או טענה אחרת מיחידה 4, אין להוכיח בדרך השלילה.

א. הוכיחו ישירות לפי הגדרת הגבול בלשון ε,δ (הגדרה 4.28): $\lim\limits_{x\to\frac{2}{\pi}}\left\lfloor \sin\frac{1}{x}\right\rfloor = 0$.

ב. הוכיחו ישירות לפי הגדרת הגבול בלשון M_1, M_2 (הגדרה 4.55): $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x-\sin 3x}=\infty$.

שאלה 2 (30 נקודות)

א. תהי f פונקציה המוגדרת בקטע (M_0,∞).

נסחו את הטענה "לא קיים ל f גבול סופי כש $x\to\infty$" בשתי דרכים:

(i) בלשון ε, M (ניסוח Cauchy).

(ii) בלשון סדרות (ניסוח Heine).

ב. הוכיחו כי לא קיים ל $f(x)=\dfrac{4}{5+\cos x}$ גבול סופי כש $x\to\infty$ בשתי דרכים:

(i) ישירות לפי ההגדרה של סעיף א' (i) (ניסוח Cauchy).

(ii) ישירות לפי ההגדרה של סעיף א' (ii) (ניסוח Heine).

שאלה 3 (40 נקודות)

בכל אחד מהסעיפים הבאים חשבו את הגבול, או הוכיחו שאינו קיים.

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{x^7}$.

ג. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^3-3x^5+1}{5x^5+3x^3-1}$.

ד. $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-\sin x}+x$.

ה. $\lim\limits_{x\to \frac{k\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor$, $k=0,1,2$ (כלומר יש לחשב 3 גבולות).

שאלה 4 רשות לא להגשה!

יהיו f ו g פונקציות מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ המקיימות $(f\circ g)(x)=x$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. f היא חד-חד-ערכית.

ב. g היא חד-חד-ערכית.

ג. f היא על.

ד. g היא על.

ה. $(g\circ f)(x)=x$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

ו. אם g היא על, אז $(g\circ f)(x)=x$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

רמז: במחלק מסעיפי השאלה אפשר להיעזר בפונקציות

$$h(x)=\begin{cases} x & x\le 0\\ x-1 & x>0\end{cases},\quad k(x)=\begin{cases} x & x\le 0\\ x+1 & x>0\end{cases}.$$

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 5, 6

מספר השאלות: 4 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 07.02.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

שאלה 1 (25 נקודות)

א. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0.

(i) נסחו בלשון ε,δ : f אינה רציפה ב x_0 (כלומר, נסחו את שלילת טענה 5.3).

(ii) נסחו בלשון סדרות: f אינה רציפה ב x_0 (כלומר, נסחו את שלילת טענה 5.4).

סעיפים ב', ג' מתייחסים לפונקציה g הרציפה בנקודה x_0 ולפונקציה $f(x)=g(x)D(x)$, כאשר $D(x)$ היא פונקציית דיריכלה (ראו הגדרה 5.8 ביחידה 5).

ב. הוכיחו כי אם $g(x_0)=0$ אז f רציפה ב x_0.

ג. הוכיחו כי אם $g(x_0)\neq 0$ אז f אינה רציפה ב x_0 בשלוש דרכים שונות:

(i) ישירות לפי ההגדרה של סעיף א' (i).

(ii) ישירות לפי ההגדרה של סעיף א' (ii).

(iii) הניחו בשלילה ש f רציפה ב x_0, והגיעו לסתירה בעזרת כללי האריתמטיקה של פונקציות רציפות (משפט 5.11).

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה ב $[0,\infty)$.

הוכיחו כי אם לכל $x>0$ מתקיים $|f(x)|>x$, אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ או $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

רמז: הוכיחו תחילה ש f חיובית ב $(0,\infty)$ או ש f שלילית ב $(0,\infty)$.

שאלה 3 (25 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,\infty)$ כך ש $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ ($L\in\mathbb{R}$).

א. הוכיחו כי אם f מקבלת מינימום ב $[0,\infty)$, אז קיים $x_0 \ge 0$ כך ש $f(x_0)\le L$.

ב. הוכיחו כי אם קיים $x_0 \ge 0$ כך ש $f(x_0)<L$, אז f מקבלת מינימום ב $[0,\infty)$.

ג. הוכיחו כי אם קיים $x_0 \ge 0$ כך ש $f(x_0)=L$, אז f מקבלת מינימום ב $[0,\infty)$.

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $f(x)=e^{-x}+\sin^2 x$.

א. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} f(\pi n)=0$ (הערה: זהו גבול של סדרה).

ב. הוכיחו כי $\inf f\left([0,\infty)\right)=0$.

ג. האם מקבלת מינימום ב $[0,\infty)$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 רשות לא להגשה!

מצאו את נקודות הרציפות והאי-רציפות של הפונקציה $f(x)=\lfloor x\rfloor \tan\frac{\pi x}{2}$ ב $\mathbb{R}$.

מיינו את נקודות האי-רציפות.

הערה: יש לקרוא את תת פרק 5.1.5.

שאלה 6 רשות לא להגשה!

חשבו את הגבולות (אם הם לא קיימים הוכיחו זאת).

א. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

ב. $\lim_{x\to 0}|x|^{1/x^2}$

הערה: יש לקרוא את תת פרק 6.5.

מטלת מחשב (ממ״ח) 02

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1

חומר הלימוד למטלה: יחידות 4, 5, 6

מספר השאלות: 16 **משקל המטלה:** 1 נקודה

סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 14.02.2024

את התשובות לממ״ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל שאלה במטלה זו מופיעות שתי טענות.

סמנו : **א** - אם רק טענה 1 נכונה,

ב - אם רק טענה 2 נכונה,

ג - אם שתי הטענות נכונות,

ד - אם שתי הטענות אינן נכונות.

<u>יחידה 4</u>

שאלה 1

1. הפונקציה $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$ היא פונקציה חד-חד-ערכית מ $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ על $\mathbb{R}$ (כלומר מ $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ל $\mathbb{R}$, והינה על).
2. הפונקציה $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ היא פונקציה חד-חד-ערכית מ $(1,\infty)$ על $(0,\infty)$.

שאלה 2

1. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה.
   אם f אינה חד-חד-ערכית, אז קיימים x ו y כך ש $x\neq y$ ו $f(x)=f(y)$.
2. אם f היא פונקציה המוגדרת בקטע $[-1,1]$, יורדת ב $[-1,0]$ ועולה ב $[0,1]$,
   אז f אינה חד-חד- ערכית.

שאלה 3

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=2$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}=1$

שאלה 4

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\tan x}$ אינו קיים.

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+2x^2+1}{x^5+x^7+1}=1$

שאלה 5

1. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}$

2. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}$

<u>יחידה 5</u>

שאלה 6

יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות.

1. אם $f(x)<0$ לכל x ב $\mathbb{R}$ ו $\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty$, אז $\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=-\infty$.

2. אם $f(x)<0$ לכל x ב $\mathbb{R}$, f רציפה ב x_0, ו $\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty$,

   אז $\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=-\infty$.

שאלה 7

1. אם f ו g הן פונקציות רציפות ב x_0 ואם $f(x_0)\ge g(x_0)$, אז קיימת סביבה של x_0 כך שלכל x בסביבה זו מתקיים $f(x)\ge g(x)$.

2. אם f רציפה ב $\mathbb{R}$ ואם לכל $x\ne x_0$ מתקיים $f(x)>0$, אז $f(x_0)>0$.

שאלה 8

1. אם $f \cdot g$ רציפה ב x_0, אז f ו g רציפות ב x_0, או f ו g אינן רציפות ב x_0.
2. אם $f+g$ רציפה ב x_0, אז f ו g רציפות ב x_0, או f ו g אינן רציפות ב x_0.

שאלה 9

1. הסדרה $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.
2. הסדרה $\left(n\cos\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

שאלה 10

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה.

1. אם f רציפה ב $\mathbb{R}$ ואינה חסומה מלעיל ומלרע, אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ או $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.
2. אם f מונוטונית עולה ואינה חסומה מלרע, אז $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

שאלה 11

תהי $\left(a_n\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ ותהי f פונקציה המוגדרת ב $[-1,1]$ כך ש $f(-1)=f(1)$.

1. אם f רציפה ב $[-1,1]$, אז הסדרה $\left(f(a_n)\right)$ מתכנסת.
2. אם $|f|$ רציפה ב $[-1,1]$, אז הסדרה $\left(f(a_n)\right)$ מתכנסת.

שאלה 12

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(xD(x))}{x}=1$ ($D(x)$ היא פונקציית דיריכלה).
2. אם f היא פונקציה רציפה בנקודה x_0, אז יש סביבה של x_0 שבה f רציפה.

שאלה 13

1. הפונקציה $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}$ מקבלת בקטע הפתוח $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ כל ערך ממשי.
2. תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.
אם $f(a)=f(b)$, אז f אינה חד-חד-ערכית ב (a,b) .

שאלה 14

יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות חסומות ב $[a,b]$ והמקיימות $f(x)>g(x)$ לכל $x\in[a,b]$.

1. אם f ו g רציפות ב (a,b) , אז $\sup f((a,b))>\sup g((a,b))$.
2. אם f ו g רציפות ב $[a,b]$, אז $\sup f([a,b])>\sup g([a,b])$.

שאלה 15

1. תחום ההגדרה של הפונקציה $\tan(2x+1)+\sqrt{\operatorname{Arc}\cos x}+\sqrt{1-x^2}$ הוא $[-1,1]$.
2. תחום ההגדרה של הפונקציה $\arcsin(x^2+x+1)$ הוא $[-1,1]$.

שאלה 16

1. $f(0)$ הוא מינימום של הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2\left(1+\cos\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.
2. אם f רציפה בקטע I , x_0 נקודה פנימית של I , ו $f(x_0)$ הוא מינימום של f , אז קיימת סביבה ימנית של x_0 שבה f עולה במובן הרחב.
הערה: פונקציה f נקראת **עולה במובן הרחב** בקטע I אם לכל x ו y בקטע מתקיים:
אם $x>y$, אז $f(x)\geq f(y)$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20474 – חשבון אינפיניטסימלי 1
חומר הלימוד למטלה: יחידות 7, 8
מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 4 נקודות
סמסטר: 2024א **מועד אחרון להגשה:** 21.02.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה.
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

קראו בעיון באתר הקורס את ההנחיות לגבי אופן הגשת מטלות.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin^2(x)\cdot\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

מצאו את תחום ההגדרה, תחום הרציפות ותחום הגזירות של f. כמו כן לכל נקודה בתחום הגזירות, מצאו את הנגזרת המתאימה. נמקו את תשובותיכם.

שאלה 2 (10 נקודות)

תהי f פונקציה זוגית ב $\mathbb{R}$ (כלומר $f(-x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$).

הוכיחו כי אם f גזירה ב $x=0$ אז $f'(0)=0$.

שאלה 3 (12 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}$ המקבלת מקסימום מקומי בנקודה x_0.

הוכיחו כי אם אין ל f נקודות קיצון נוספות, אז f מקבלת מקסימום בנקודה x_0.

רמז: הסתמכו על המשפט השני של ויירשטרס (שימו לב שלא נתון ש f גזירה!).

שאלה 4 (13 נקודות)

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b). נניח כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך שמתקיים $\big(f(c)-f(a)\big)\big(f(b)-f(c)\big)<0$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $t\in(a,b)$ כך ש $f'(t)=0$.

שאלה 5 (25 נקודות)

א. תהי f פונקציה גזירה ב $[a,\infty)$.

(i) הוכיחו שאם קיים קבוע $m>0$ כך ש $f'(x)\ge m$ לכל $x\in[a,\infty)$, אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

רמז: משפט הערך הממוצע (משפט לגרנז').

(ii) הסיקו שאם קיים קבוע $m>0$ כך ש $f'(x)\le -m$ לכל $x\in[a,\infty)$, אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

ב. תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב $(0,\infty)$ כך ש $f''(x)>0$ לכל $x\in(0,\infty)$.

הוכיחו כי אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ ($L\in\mathbb{R}$) אז:

(i) $f'(x)<0$ לכל $x\in(0,\infty)$.

(ii) $\sup f'\big((0,\infty)\big)=0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.

הערה: בכל סעיף מותר לכם להשתמש בסעיפים שקדמו לו, גם אם לא הוכחתם אותם.

שאלה 6 (12 נקודות)

חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שאינם קיימים:

א. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$

ג. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

שאלה 7 (18 נקודות)

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ בקטע $(0,\infty)$ מקבלת מינימום בנקודה $x=1$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $g(x)=e^x\ln x$ מקבלת כל ערך ממשי בדיוק פעם אחת.

שאלה 8 רשות לא להגשה!

תהי $f(x)=\begin{cases} x+xe^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \dfrac{a-2\cos x}{\sin x} & x>0 \end{cases}$ כאשר $a\in\mathbb{R}$.

א. מצאו את כל ערכי a שעבורם f רציפה ב $x=0$.

רמז: הפרידו למקרים (i) $a=2$, (ii) $a\neq 2$.

ב. מצאו את כל ערכי a שעבורם f גזירה ב $x=0$.

שאלה 9 רשות לא להגשה!

תהי f פונקציה גזירה בקטע $[0,1]$ המקיימת $0\le f'(x)\le 1$ לכל $x\in[0,1]$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $x\in[0,1]$ כך ש $f'(x)=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+6}}$.

רמז: שימו לב ש $\left(\sqrt{g(x)}\right)'=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.