אינפי 1 סמסטר 2022ג – פתרון חלקי לממ"ח 01

שאלה 1

1. לא נכון.

$x=0$ אינו מקיים את התנאי $|0|<0^2$ ולכן אינו שייך לקבוצה שבאגף שמאל אבל כן שייך לקבוצה שבאגף ימין, ולכן הקבוצות אינן שוות.

2. לא נכון.

$|0-1|=1\not<1=|2\cdot 0-1|$ ולכן $x=0$ אינו שייך לקבוצה שבאגף שמאל אבל כן שייך לקבוצה שבאגף ימין, ולכן הקבוצות אינן שוות.

שאלה 2

1. לא נכון.

עבור $x<0$ מתקיים $\sqrt{x^2}=|x|=-x\neq x$.

2. לא נכון.

עבור $x\le\frac{1}{2}$ מתקיים $x-1<0$ והביטוי $\sqrt{x-1}$ אינו מוגדר, ולכן כל $x\le\frac{1}{2}$ אינו פתרון של האי-שוויון $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}\ge\sqrt{3x-2}$ ואינו שייך לקבוצה שבאגף שמאל.

שאלה 3

1. לא נכון.

אם $b<0$ אז $-b>b$ ואי השוויון השמאלי אינו יכול להתקיים.

למשל עבור $a=0,b=-1$ אי השוויון הימני מתקיים והשמאלי לא.

2. נכון.

$\frac{1}{\left|\frac{a}{b}\right|}=\left|\frac{b}{a}\right|$, נסמן $x=\left|\frac{a}{b}\right|$, ואז אי השוויון הוא $x+\frac{1}{x}\ge 2$. $a,b\neq 0$ ולכן $\frac{a}{b}\neq 0$ ומכאן $x>0$.

$$x+\frac{1}{x}\ge 2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+1\ge 2x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-2x+1\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2\ge 0$$

וזה אכן מתקיים לכל $x>0$.

שאלה 4

1. לא נכון.

דוגמה נגדית: $a=1,b=2,c=4,d=3$. בדקו שהתנאים מתקיימים ותוצאה אינה מתקיימת.

2. לא נכון.

דוגמה נגדית: $a=1,b=3,c=2,d=3$. בדקו שהתנאים מתקיימים ותוצאה אינה מתקיימת.

שאלה 5

1. לא נכון.

דוגמה נגדית: $a_n=(-1)^n$. בדקו.

2. נכון.

יהי $\varepsilon>0$. $\lim_{n\to\infty}a_n{}^2=0$ ולכן קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|a_n{}^2-0\right|<\varepsilon^2$ ולכן $0\le a_n{}^2=\left|a_n{}^2\right|<\varepsilon^2$, ומתכונות השורש נקבל $\sqrt{a_n{}^2}<\sqrt{\varepsilon^2}$ כלומר $|a_n|<|\varepsilon|=\varepsilon$.

מצאנו שלכל $\varepsilon>0$ קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-0|<\varepsilon$ כלומר $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

<u>שאלה 6</u>

1. נכון. זוהי בדיוק הגדרת הגבול, עבור הבחירה $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$.
2. נכון.

משפט זה הוא בדיוק ניסוח שלילת גבול (במונחי ε, N) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 1$. מיחידות הגבול, מכיוון ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$ נובע ש 1 אינו הגבול .

<u>שאלה 7</u>

1. לא נכון.

משפט זה נראה דומה לניסוח הגבול (במונחי ε, N) $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$, אבל ה "לכל $\varepsilon > 0$" אינו במיקום הנכון במשפט.

המספר האי-שלילי היחיד הקטן מכל מספר חיובי הוא 0 , ולכן אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - 4| < \varepsilon$ אז $|a_n - 4| = 0$ ולכן $a_n = 4$. ולכן המשפט "קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ ולכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - 4| < \varepsilon$" אומר שלכל $n > N$ מתקיים $a_n = 4$, וברור שהתנאי $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$ לא גורר שהחל ממקום מסוים כל אברי הסדרה הם 4 . דוגמה נגדית : $a_n = 4 + \dfrac{1}{n}$.

2. נכון. מוסבר בסעיף הקודם.

<u>שאלה 8</u>

1. לא נכון. דוגמה נגדית : $a_n = (-1)^n \ , \ b_n = (-1)^{n+1}$. בדקו.
2. נכון.

כמעט לכל n מתקיים $a_n b_n < 0$ פרושו שקיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n b_n < 0$.

$xy < 0$ גורר $x < 0$ או $y < 0$, ולכן לכל $n > N$ מתקיים $a_n < 0$ או $b_n < 0$.

קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n < 0$ או $b_n < 0$, פרוש הדבר שכמעט לכל n מתקיים $a_n < 0$ או $b_n < 0$.

<u>שאלה 9</u>

1. נכון.

הסדרה $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ אפסה ולכן ממשפט 2.22 נקבל כי $\dfrac{a_n}{n} = a_n \cdot \dfrac{1}{n}$ אפסה.

2. לא נכון.

דוגמה נגדית : $a_n = n$. אז $a_{n+1} - a_n = 1$ וזו סדרה חסומה, אבל $\dfrac{a_n}{n} = 1$ אינה אפסה.

<u>שאלה 10</u>

1. נכון.

$a_{n+1} - a_n$ חסומה, יהי $M > 0$ כך שלכל n $|a_{n+1} - a_n| < M$.

נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים $|a_n| \le |a_1| + (n-1)M$.

עבור $n = 1$ אכן מתקיים $|a_1| + (n-1)M = |a_1| + 0 \cdot M = |a_1| \ge |a_1|$.

נניח $|a_n| \le |a_1| + (n-1)M$ ואז

$$|a_{n+1}| = |a_{n+1} - a_n + a_n| \overset{(1)}{\leq} |a_{n+1} - a_n| + |a_n| \overset{(2)}{<} M + |a_1| + (n-1)M = |a_1| + nM$$

(1) אי שוויון המשולש

(2) הגדרת M והנחת האינדוקציה

2. נכון.

מתוצאת סעיף 1 נקבל

$$0 \leq \left|\frac{a_n}{n^2}\right| = \frac{|a_n|}{n^2} \leq \frac{|a_1| + (n-1)M}{n^2} < \frac{|a_1| + nM}{n^2} = \frac{|a_1|}{n^2} + \frac{M}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_1|}{n^2} + \frac{M}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_1|}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{M}{n} = 0 + 0 = 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

וממשפט הסנדוויץ' נקבל $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{n^2}\right| = 0$. משאלה 20 ביחידה 2 נסיק $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$.