<u>אינפי 1 סמסטר 2022ג – פתרון ממ"ן 15</u>

<u>שאלה 1</u>

$\lfloor x \rfloor$ מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$.

$\tan x$ אינה מוגדרת בכל $x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(1+2k)\pi}{2}$ עבור כל k שלם , ולכן $\tan\frac{\pi x}{2}$ מוגדרת בכל x פרט ל $x = 1+2k$, k שלם, כלומר בכל x פרט לשלמים האיזוגיים.

ולכן f מוגדרת בכל x פרט לשלמים האיזוגיים.

בכל x שלם איזוגי f אינה מוגדרת ולכן בוודאי אינה רציפה.

$\lfloor x \rfloor$ רציפה בכל x שאינו שלם (שאלה 4 ביחידה 5).

$\frac{\pi x}{2}$ רציפה ב $\mathbb{R}$ (פונקציה לינארית) ו $\tan x$ רציפה בכל תחום הגדרתה, ולכן $\tan\frac{\pi x}{2}$ רציפה בכל תחום הגדרתה בתור הרכבת פונקציות רציפות (משפט 5.15), כלומר בכל x שאינו שלם איזוגי.

ולכן f רציפה בכל x שאינו שלם, בתור מכפלת פונקציות רציפות.

נבדוק מה קורה בנקודות השלמות.

יהי $x_0 \in \mathbb{Z}$.

בסביבה הימנית (x_0, x_0+1) של x_0 מתקיים $\lfloor x \rfloor = x_0$ ולכן $\lim\limits_{x\to x_0^+}\lfloor x \rfloor = \lim\limits_{x\to x_0^+} x_0 = x_0$.

בסביבה השמאלית (x_0-1, x_0) של x_0 מתקיים $\lfloor x \rfloor = x_0 - 1$ ולכן $\lim\limits_{x\to x_0^-}\lfloor x \rfloor = \lim\limits_{x\to x_0^-} x_0 - 1 = x_0 - 1$.

אם x_0 זוגי, קיים n שלם כך ש $x_0 = 2n$.

$$f(x_0) = \lfloor x_0 \rfloor \tan\frac{\pi x_0}{2} = \lfloor 2n \rfloor \tan n\pi \overset{(1)}{=} \lfloor 2n \rfloor \cdot 0 = 0$$

(1) ממחזוריות $\tan x$, $\tan n\pi = \tan 0 = 0$

$\tan\frac{\pi x}{2}$ רציפה ב x_0 , ולכן $\lim\limits_{x\to x_0}\tan\frac{\pi x}{2} = \tan\frac{\pi x_0}{2} = \tan n\pi = 0$ ולכן

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+}\lfloor x \rfloor \tan\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to x_0^+}\lfloor x \rfloor \cdot \lim_{x\to x_0^+}\tan\frac{\pi x}{2} = x_0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-}\lfloor x \rfloor \tan\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to x_0^-}\lfloor x \rfloor \cdot \lim_{x\to x_0^-}\tan\frac{\pi x}{2} = (x_0 - 1) \cdot 0 = 0$$

לסיכום

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = f(x_0)$$

כלומר f רציפה ב x_0 .

אם x_0 איזוגי, קיים n שלם כך ש $x_0 = 2n+1$.

כאמור f אינה מוגדרת ב x_0 ובוודאי לא רציפה ב x_0 . נבדוק את סוג אי הרציפות:

$$\lim_{x\to x_0^+}\tan\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to (2n+1)^+}\tan\frac{\pi x}{2} = -\infty$$

נראה זאת: נסמן $y = \frac{\pi x}{2} - n\pi$, $\lim\limits_{x\to(2n+1)^+}\frac{\pi x}{2} - n\pi = \frac{\pi}{2}$ ובסביבה ימנית של $2n+1$ מתקיים $\frac{\pi x}{2} - n\pi > \frac{\pi}{2}$, ולכן (לפי משפט גבול של הרכבה, 4.39)

$$\lim_{x\to x_0^+}\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to(2n+1)^+}\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^+}\tan(y+n\pi)\overset{(1)}{=}\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^+}\tan y=-\infty$$

הערה: באופן דומה ניתן לקבל

$$\lim_{x\to x_0^-}\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to(2n+1)^-}\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-}\tan y=\infty$$

כעת

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\underbrace{\lim_{x\to x_0^+}\lfloor x\rfloor}_{\to x_0}\underbrace{\tan\frac{\pi x}{2}}_{\to-\infty}$$

ולכן אם $x_0>0$ נקבל $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$, ואם $x_0<0$ נקבל $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$.

כלומר x_0 נקודת אי רציפות מסוג שני.

לסיכום:

f רציפה בכל $x\in\mathbb{R}$ שאינו שלם איזוגי, ובכל x שלם איזוגי יש ל f אי רציפות מסוג שני.

<u>שאלה 2</u>

א.

(i)

f אינה רציפה ב x_0 אם"ם קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים x המקיים $|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

(ii)

f אינה רציפה ב x_0 אם"ם קיימת סדרה (x_n) המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ וגם $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$.

ב.

$$f(x) = g(x)D(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

נתון $g(x_0) = 0$, ולכן גם $f(x_0) = g(x_0)D(x_0) = 0 \cdot D(x_0) = 0$.

g רציפה ב x_0 ולכן לפי ניסוח היינה לרציפות (טענה 5.4) לכל סדרה (x_n) המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) = 0$.

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $D(x) = 0$ או $D(x) = 1$, כלומר $0 \leq D(x) \leq 1$, ולכן לכל n מתקיים $0 \leq D(x_n) \leq 1$ כלומר $(D(x_n))$ סדרה חסומה, ולפי משפט חסומה כפול אפסה (משפט 2.22)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)D(x_n) = 0 = f(x_0)$$

קיבלנו שלכל סדרה (x_n) המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, ולכן לפי ניסוח היינה לרציפות מתקבל ש f רציפה ב x_0.

ג.

(i)

נפריד לשני מקרים: x_0 רציונלי, x_0 אירציונלי.

אם x_0 רציונלי, $f(x_0) = g(x_0) \neq 0$.

נבחר $\varepsilon = |f(x_0)| > 0$.

יהי $\delta > 0$.

נבחר x אירציונלי בסביבה $N_\delta(x_0)$, קיומו מובטח ע"י צפיפות המספרים האירציונליים ב $\mathbb{R}$ (שאלה 62 ביחידה 1). אז $|x - x_0| < \delta$ כנדרש. x אירציונלי ולכן $f(x) = 0$, ומכאן

$$|f(x) - f(x_0)| = |0 - f(x_0)| = |f(x_0)| \geq \varepsilon$$

אם x_0 אירציונלי, $f(x_0) = 0$.

לכל x רציונלי, $f(x) = g(x)$ ולכן $|f(x) - f(x_0)| = |g(x) - 0| = |g(x)|$.

מכיוון ש $g(x_0) \neq 0$ ועל סמך רציפות g ב x_0 נוכל לבחור את x כך שזה יהיה גדול מ ε חיובי.

נראה זאת באופן פורמלי.

נבחר $\varepsilon = \dfrac{|g(x_0)|}{2} > 0$.

יהי $\delta > 0$.

g רציפה ב x_0 ולכן קיים δ_1 כך שלכל $|x - x_0| < \delta_1$ מתקיים

$$\left|g(x)-g(x_0)\right|<\varepsilon \overset{(2)}{\Rightarrow} \left|\left|g(x)\right|-\left|g(x_0)\right|\right| \le \left|g(x)-g(x_0)\right|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$-\varepsilon<\left|g(x)\right|-\left|g(x_0)\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|g(x)\right|>\left|g(x_0)\right|-\varepsilon=\left|g(x_0)\right|-\frac{1}{2}\left|g(x_0)\right|=\frac{1}{2}\left|g(x_0)\right|=\varepsilon$$

(2) אי שוויון המשולש (שאלה 39 ביחידה 1)

כעת, נבחר x רציונלי בסביבת $\min\{\delta,\delta_1\}$ של x_0, קיומו מובטח ע"י צפיפות הרציונליים ב $\mathbb{R}$ (משפט 1.66). אז $\left|x-x_0\right|<\delta$ כנדרש, וגם $\left|x-x_0\right|<\delta_1$ ולכן $\left|g(x)\right|>\varepsilon$, ומכאן

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|g(x)-0\right|=\left|g(x)\right|>\varepsilon$$

(ii)

נפריד לשני מקרים: x_0 רציונלי, x_0 אירציונלי.

אם x_0 רציונלי, $f(x_0)=g(x_0)\neq 0$.

מלמה 5.9 נקבל שקיימת סדרה (x_n) של מספרים אירציונליים שמקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, אבל

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} g(x_n)\underbrace{D(x_n)}_{=0}=\lim_{n\to\infty} 0=0\neq f(x_0)$$

אם x_0 אירציונלי, $f(x_0)=0$.

מלמה 5.9 נקבל שקיימת סדרה (x_n) של מספרים רציונליים שמקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, אבל

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} g(x_n)\underbrace{D(x_n)}_{=1}=\lim_{n\to\infty} g(x_n)\overset{(3)}{=}g(x_0)\neq 0=f(x_0)$$

(3) רציפות g ב x_0 וניסוח היינה לרציפות

(iii)

נניח בשלילה ש f רציפה ב x_0. g רציפה ב x_0 ו $g(x_0)\neq 0$, ומאריתמטיקה של רציפות נקבל שגם $\frac{f(x)}{g(x)}$ רציפה ב x_0, כלומר $D(x)$ רציפה ב x_0, בסתירה לטענה 5.10.

ולכן f אינה רציפה ב x_0.

<u>שאלה 3</u>

נוכיח תחילה כי $f(x)\neq 0$ לכל $x\in(0,\infty)$.

נניח בשלילה שקיים $x_0\in(0,\infty)$ כך ש $f(x_0)=0$, אז $|f(x_0)|=0$ ולכן מהנתון נקבל $0=|f(x_0)|>x_0>0$, סתירה.

מהסתירה נובע שלכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $f(x)\neq 0$, כלומר $f(x)>0$ או $f(x)<0$.

הערה: זה אומר שישנן 3 אפשרויות,

(i) $f(x)>0$ לכל $x\in(0,\infty)$,

(ii) $f(x)<0$ לכל $x\in(0,\infty)$,

(iii) קיים $x\in(0,\infty)$ עבורו $f(x)>0$ וגם קיים $x\in(0,\infty)$ עבורו $f(x)<0$.

נוכיח כעת כי f חיובית בקטע $(0,\infty)$ או שלילית בקטע $(0,\infty)$, כלומר: $f(x)>0$ לכל $x\in(0,\infty)$ או $f(x)<0$ לכל $x\in(0,\infty)$.

בשלילה, נניח שקיימים $x_1,x_2\in(0,\infty)$ עבורם $f(x_1)>0$ ו $f(x_2)<0$.

בלי הגבלת הכלליות נניח כי $x_1<x_2$.

$[x_1,x_2]\subset[0,\infty)$ ומכיוון ש f רציפה ב $[0,\infty)$ נובע שהיא רציפה ב $[x_1,x_2]$.

כאמור $f(x_1)<0$ ו $f(x_2)>0$ וממשפט 5.29 נובע שקיימת נקודה $c\in(x_1,x_2)$ כך ש $f(c)=0$.

אבל $c\in(x_1,x_2)$ ולכן $c>0$, בסתירה לכך ש $f(x)\neq 0$ לכל $x\in(0,\infty)$.

מהסתירה נובע ש f חיובית בקטע $(0,\infty)$ או שלילית בקטע $(0,\infty)$.

אם f חיובית בקטע $(0,\infty)$ אז לכל $x>0$ מתקיים $f(x)=|f(x)|>x$.

$\lim_{x\to\infty}x=\infty$, ולפי קריטריון ההשוואה לגבולות אינסופיים (באנלוגיה למשפט 2.45), נקבל $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

אם f שלילית בקטע $(0,\infty)$ אז לכל $x>0$ מתקיים $-f(x)=|f(x)|>x$ ולכן $f(x)<-x$.

$\lim_{x\to\infty}-x=-\infty$, ולפי קריטריון ההשוואה לגבולות אינסופיים נקבל $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$.

<u>שאלה 4</u>

א.

נניח כי המינימום של f בקטע $[0,\infty)$ מתקבל בנקודה $x_0 \in [0,\infty)$. אז לכל x בקטע מתקיים $f(x) \ge f(x_0)$, ולכן ממשפט 4.41 (גירסה לגבול ב ∞)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \ge \lim_{x\to\infty} f(x_0) = f(x_0) \quad \Rightarrow \quad L \ge f(x_0)$$

ב.

יהי $x_0 \in [0,\infty)$ כך ש $f(x_0) < L$.

נסמן $\varepsilon = L - f(x_0) > 0$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ולכן מהגדרת הגבול קיים $N > 0$ כך שלכל $x > N$ מתקיים

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) > L - \varepsilon = f(x_0) \quad (1)$$

$x_0 \le N$, שכן אילו היה מתקיים $x_0 > N$ אז מ (1) היינו מקבלים $f(x_0) > f(x_0)$, מה שלא ייתכן.

ולכן $x_0 \in [0,N]$.

f רציפה ב $[0,\infty)$ ולכן רציפה ב $[0,N]$, ומהמשפט השני של Weierstrass f מקבלת מינימום בקטע,

נניח שהמינימום הוא $f(c)$ כאשר $c \in [0,N]$.

אז לכל $x \in [0,N]$ מתקיים $f(x) \ge f(c)$, ובפרט גם $f(x_0) \ge f(c)$ שכן $x_0 \in [0,N]$.

ולכל $x > N$ מתקיים

$$f(x) \overset{(1)}{>} f(x_0) \ge f(c) \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(c)$$

ובסך הכל, לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים $f(x) \ge f(c)$, כלומר $f(c)$ הוא מינימום של f בקטע $[0,\infty)$.

ג.

יהי $x_0 \in [0,\infty)$ כך ש $f(x_0) = L$.

אם קיים $x_1 \in [0,\infty)$ כך ש $f(x_1) < L$, אז מסעיף ג' נובע ש f מקבלת מינימום בקטע $[0,\infty)$.

אחרת, לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים $f(x) \ge L$, ואז לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים $f(x) \ge f(x_0)$, ולכן $f(x_0)$ הוא מינימום של f בקטע $[0,\infty)$.

<u>שאלה 5</u>

נרצה להרחיב את הפונקציה $f(x)=\frac{(2x+\sin x)\arctan x}{x^2}$ לקטע $[0,\infty)$.

נחשב את הגבול הימני של f ב $x=0$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(2x+\sin x)\arctan x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x+\sin x}{x}\cdot\frac{\arctan x}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2x+\sin x}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(2+\frac{\sin x}{x}\right)=2+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=2+1=3$$

נסמן $t=\arctan x$, אז $x=\tan t$. $\lim_{x\to0^+}\arctan x=0$, ובסביבה ימנית של $x=0$ מתקיים $\arctan x>0$,

ולכן לפי משפט גבול של הרכבה (4.39)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to0^+}\frac{t}{\tan t}=1$$

השוויון האחרון על סמך $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$, שאלה 67 ביחידה 4.

ולסיכום נקבל

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2x+\sin x}{x}\cdot\frac{\arctan x}{x}=3\cdot1=3$$

כעת נגדיר

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x>0\\ 3 & x=0\end{cases}$$

נראה ש h רציפה בקטע $[0,\infty)$.

בקטע $(0,\infty)$, $h(x)=f(x)=\frac{(2x+\sin x)\arctan x}{x^2}$, וזו פונקציה רציפה בקטע בתור סכום, מכפלה

ומנה של פונקציות רציפות בקטע (ומכנה שונה מ 0).

$$\lim_{x\to0^+} h(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=3=h(0)$$

ולכן h רציפה מימין בנקודה $x=0$.

ומכאן ש h רציפה בקטע $[0,\infty)$.

כעת נחשב את הגבול של h ב ∞.

לכל $x>0$ (כלומר בסביבה של ∞) מתקיים $-1\le\sin x\le1$ ולכן $-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{x}=0$

וממשפט הסנדוויץ׳ נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}2+\frac{\sin x}{x}=2+0=2$$

לכל $x>0$ מתקיים $-\frac{\pi}{2}\le\arctan x\le\frac{\pi}{2}$ כלומר $\arctan x$ חסומה בסביבה $(0,\infty)$ של ∞.

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, ולפי משפט ׳חסומה כפול אפסה׳ (באנלוגיה למשפט 2.22), נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\arctan x=0$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin x}{x} \cdot \frac{\arctan x}{x} = 2\cdot 0 = 0$$

כעת, h רציפה בקטע $[0,\infty)$ ו $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. משאלה 4 נובע ש h מקבלת מינימום בקטע $[0,\infty)$ אם ורק אם קיימת נקודה $x_0 \in [0,\infty)$ כך ש $h(x_0) \le 0$. נראה שאין נקודה שכזו.

$h(0) = 3 > 0$.

לכל $0 < x < \pi$, $\sin x > 0$ ולכן $2x+\sin x > 0$. לכל $x \ge \pi$, $2x+\sin x \ge 2x-1 \ge 2\pi - 1 > 0$.
ולכן $2x+\sin x > 0$ לכל $x > 0$.

$\arctan x > 0$ לכל $x > 0$, ולכן לכל $x > 0$ $f(x) = \dfrac{(2x+\sin x)\arctan x}{x^2} > 0$ ולכן גם $h(x) > 0$.

לא קיים $x_0 \in [0,\infty)$ כך ש $h(x_0) \le 0$ ולכן h אינה מקבלת מינימום בקטע $[0,\infty)$.

כעת נניח בשלילה ש f מקבלת מינימום בקטע $(0,\infty)$, נניח בנקודה x_0.

אילו בשלילה $f(x_0) \ge 3$, אז לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) \ge f(x_0) \ge 3$, ולפי משפט 4.41 (גירסה לגבול ב ∞) מתקבל $\lim_{x\to\infty} f(x) \ge 3$, בסתירה (גבול זה שווה ל 0 $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$).

ולכן $f(x_0) < 3$.

כעת, f מקבלת מינימום בקטע $(0,\infty)$ בנקודה x_0 ולכן לכל $x > 0$ מתקיים $h(x) = f(x) \ge f(x_0)$, וגם $h(0) = 3 > f(x_0)$, כלומר לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים $h(x) \ge f(x_0)$.

אבל $x_0 > 0$ ולכן $h(x_0) = f(x_0)$, כלומר לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים $h(x) \ge h(x_0)$, ו h מקבלת מינימום בקטע $[0,\infty)$, סתירה.

מכאן ש f אינה מקבלת מינימום בקטע $(0,\infty)$.

<u>שאלה 6</u>

א.

לכל $x\ge 1$ מתקיים

$$x^2+x>x^2>0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+x}>\sqrt{x^2}=x>0$$

ולכן לכל $x,y\ge 1$ מתקיים

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}>x+y>0$$

ומכאן

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}}\overset{(1)}{<}\frac{x+y+1}{x+y}=1+\frac{1}{x+y}\overset{(2)}{\le}1+\frac{1}{2}<2$$

(1) הקטנו מכנה, והמונה והמכנה חיוביים

(2) $x,y\ge 1$ ולכן $x+y\ge 2$

נוכיח ש f רציפה במידה שווה בקטע $[1,\infty)$.

צריך להוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[1,\infty)$ המקיימים $|y-x|<\delta$ מתקיים $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

יהי $\varepsilon>0$, ויהיו $x,y\in[1,\infty)$.

$$f(y)-f(x)=\sqrt{y^2+y}-\sqrt{x^2+x}\overset{(3)}{=}\frac{\left(\sqrt{y^2+y}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{y^2+y}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\frac{(y^2+y)-(x^2+x)}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{x^2+x}}=\frac{(y^2-x^2)+(y-x)}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{x^2+x}}=\frac{(y-x)(y+x)+(y-x)}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{x^2+x}}=\frac{(y-x)(x+y+1)}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{x^2+x}}$$

(3) כפל בצמוד, $\sqrt{x^2+x}>0$ ו $\sqrt{y^2+y}>0$ ולכן $\sqrt{y^2+y}+\sqrt{x^2+x}\ne 0$

ולכן

$$|f(y)-f(x)|=\left|\frac{(x+y+1)(y-x)}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{x^2+x}}\right|\overset{(4)}{=}\frac{|x+y+1|}{\left|\sqrt{y^2+y}+\sqrt{x^2+x}\right|}|y-x|\overset{(5)}{=}\frac{x+y+1}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{x^2+x}}|y-x|\overset{(6)}{\le}$$

$$\le 2|y-x|$$

(4) תכונות הערך המוחלט

(5) $x+y+1>0$, $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}>0$

(6) לפי מה שהוכחנו לעיל עבור $x,y\ge 1$

נבחר $\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$, אז לכל $x,y\in[1,\infty)$ המקיימים $|y-x|<\delta$ מתקיים

$$|f(y)-f(x)|\le 2|y-x|<2\delta=2\cdot\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

וקיבלנו ש f רציפה במידה שווה ב $[1,\infty)$.

כעת נוכיח ש f רציפה במידה שווה ב $[0,\infty)$.

f רציפה בקטע $[0,1]$ בתור הרכבת פונקציות רציפות (נשים לב שלכל $x\in[0,1]$, $x^2+x\ge 0$ וההרכבה מוגדרת). ממשפט קנטור נסיק ש f רציפה במידה שווה בקטע $[0,1]$.

ולפי הטענה משאלה 49 ביחידה 5 נקבל ש f רציפה במידה שווה ב $[0,1]\cup[1,\infty)=[0,\infty)$.

ב.

$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ (גבול ידוע) ו $\sin\frac{1}{x}$ חסומה סביבה ימנית של $x=0$ (ב $(0,1)$) ולפי משפט 'חסומה כפול אפסה' (באנלוגיה למשפט 2.22)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0$$

נגדיר את הפונקציה

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

נראה ש h רציפה בקטע $[0,\infty)$.

בקטע $(0,\infty)$ $h(x)=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$, וזו פונקציה רציפה בקטע בתור מכפלה והרכבה של פונקציות רציפות בקטע (ומכנה שונה מ 0).

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0=h(0)$$

ולכן h רציפה מימין בנקודה $x=0$.
ומכאן ש h רציפה בקטע $[0,\infty)$.

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

נסמן $t=\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, ובסביבה של ∞ (למשל $(0,\infty)$) מתקיים $\frac{1}{x}>0$, ולפי משפט גבול של הרכבה (4.39)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}="\frac{1}{\infty}"=0$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0\cdot 1=0$$

וזהו גבול סופי.

ולכן לפי הטענה בשאלה 48 ביחידה 5, h רציפה במידה שווה בקטע $[0,\infty)$.

ומכאן, לפי הטענה בשאלה 44 ביחידה 5, h רציפה במידה שווה בתת הקטע $(0,\infty)$.

אבל בקטע $(0,\infty)$ f זהה ל h, וקיבלנו ש f רציפה במידה שווה בקטע $(0,\infty)$.

ג.

פתרון I:

צריך להוכיח שקיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיימים $x,y\in(0,1)$ המקיימים $|y-x|<\delta$ אבל $|f(y)-f(x)|\ge\varepsilon$.

נבחר $\varepsilon=1$, ויהי $\delta>0$.

נסמן $y=\frac{1}{2\pi n+\frac{1}{2}\pi}$, $x=\frac{1}{2\pi n}$ כאשר $n\in\mathbb{N}$ כלשהו. אז ברור ש $0<y<x\le\frac{1}{2\pi}<1$ ולכן $x,y\in(0,1)$. כמו כן (ע"י שימוש במחזוריות הפונקציה $\sin x$)

$$\left|f(y)-f(x)\right|=\left|\sin\frac{1}{y}-\sin\frac{1}{x}\right|=\left|\sin(2\pi n+\tfrac{1}{2}\pi)-\sin 2\pi n\right|=\left|1-0\right|=1\geq\varepsilon$$

כעת

$$\left|y-x\right|\overset{(7)}{=}x-y=\frac{1}{2\pi n}-\frac{1}{2\pi n+\frac{1}{2}\pi}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{2\pi n(2\pi n+\frac{1}{2}\pi)}\overset{(8)}{<}\frac{\frac{1}{2}\pi}{2\pi n}=\frac{1}{4n}<\frac{1}{n}$$

(7) כי $y<x$ ולכן $y-x<0$

(8) כי $2\pi n+\frac{1}{2}\pi>1$

מתכונת ארכימדס קיים n טבעי כך ש $n>\frac{1}{\delta}$, ועבור n זה, $x=\frac{1}{2\pi n}$, $y=\frac{1}{2\pi n+\frac{1}{2}\pi}$ מקיימים $x,y\in(0,1)$, $\left|y-x\right|<\frac{1}{n}<\delta$ וגם $\left|f(y)-f(x)\right|\geq\varepsilon$ כנדרש.

פתרון II:

הגבול $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$ אינו קיים (דוגמאות 4.23, 5.17), וממשפט 5.49 נובע ש $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ אינה רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$.