אלגברה לינארית 1 - 20109

פתרון לממ״ן 12 - 2021ג

שאלה 1

תהיינה A,B מטריצות ב- $M_n(F)$ המקיימות $AB=BA$.

נוכיח שלכל $k\in \mathbf{N}$, $k\geq 1$, מתקיים ש- $(AB)^k=A^kB^k$ (1). עבור $k=1$, השוויון ברור.

נניח שמתקיים (1) עבור k מסויים ונוכיח ש- $(AB)^{k+1}=A^{k+1}B^{k+1}$.

מתקיים:

$$(AB)^{k+1}=(AB)^k AB \underset{(1),\ AB=BA}{=} (A^kB^k)BA \underset{(*)}{=} A^k(B^kB)A \underset{(*)}{=} A^k(B^{k+1}A)$$

כאשר (*) מסמן את האסוציאטיביות של כפל מטריצות.

לסיכום, הוכחנו $(AB)^{k+1}=A^k(B^{k+1}A)$ (2).

נראה באינדוקציה על k שאם $AB=BA$ אז לכל $k\geq 1$, מתקיים $AB^k=B^kA$ (3).

זה ברור עבור $k=1$ ונניח שזה גם נכון עבור k. אז:

$$AB^{k+1}=AB^kB \underset{(3)}{=} (B^kA)B=B^k(AB) \underset{AB=BA}{=} B^k(BA)=(B^kB)A=B^{k+1}A$$

וקיבלנו ש- $AB^{k+1}=B^{k+1}A$. לכן $AB^k=B^kA$ מתקיים לכל $k\geq 1$. נחזור ל-(2):

$$(AB)^{k+1}=A^k(B^{k+1}A)=A^k(AB^{k+1})=A^{k+1}B^{k+1}$$

ולכן לכל $k\geq 1$, מתקיים ש- $(AB)^k=A^kB^k$.

שאלה 2

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -k \end{pmatrix}$, כאשר $k\in \mathbf{Z}_7$. עלינו למצוא את כל הערכים של k עבורם A הפיכה ומתקיים $A=A^{-1}$. נוכיח את הטענה הבאה:

<u>טענה</u>: $A^2=I$ אם ורק אם A הפיכה ומתקיים $A=A^{-1}$

הוכחה: אם $A^2=I$ אז ע״פ מסקנה 4.5.2, A הפיכה ומתקיים $A=A^{-1}$. ולהיפך, אם A הפיכה ומתקיים $A=A^{-1}$ אז נכפיל את שני האגפים של השוויון הזה ב- A ומתקבל $A^2=I$.

לכן, מספיק למצוא את כל הערכים של k עבורם $A^2=I$:

$$A^2=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

נובע מכך ש- $k^2-1=1$, או $k^2=2$. מחשבים את הריבועים של כל איברי $\mathbf{Z}_7$ ויוצא כי יש שני פתרונות למשוואה $k^2=2$ והם $k=3$ ו- $k=4$.

לסיכום, מתקיים $A=A^{-1}$ **אם ורק אם** $k=3$ **או** $k=4$**.**

שאלה 3

א. נתונות A, B מטריצות מסדר $n \times n$ המקיימות $A^2+AB+I=0$ (*). נוכיח ש- $AB=BA$.

מהשוויון (*) מתקבל $A(-A-B)=I$ ולכן המטריצה A הפיכה (מסקנה 4.5.2). מ-(*) נסיק גם ש- $AB=-A^2-I$. נכפיל כל אגף בשוויון הזה ב- A^{-1} בצד שמאל וב- A בצד ימין ויוצא ש- $BA=-A^2-I$, מה שגורר ש- $AB=BA$.

ב. תהיינה A, B מטריצות מסדר $n\times n$, כאשר n אי-זוגי, המקיימות $AB+BA=0$ ונוכיח שלפחות אחת המטריצות A, B סינגולרית. מהנתון נובע ש- $AB=-BA$ ולכן:

$$(*) \qquad \det AB=\det(-BA)\underset{\text{שאלה 4.3.3 ב'}}{\underset{\downarrow}{=}}(-1)^n\det(BA)\underset{n\text{ אי-זוגי}}{\underset{\downarrow}{=}}-\det BA\,.$$

מאידך, לפי משפט המכפלה (משפט 4.5.1) מתקיים $\det AB=(\det A)(\det B)$. יחד עם (*) יוצא ש- $(\det A)(\det B)=-(\det B)(\det A)$, כלומר $(\det A)(\det B)=0$.

לכן $\det A=0$ או $\det B=0$, וממשפט 4.4.1 ניתן להסיק ש- A סינגולרית או B סינגולרית.

ג. תהי A מטריצה ריבועית מסדר n כך שלכל מטריצה ריבועית $B\neq 0$ מסדר n מתקיים $AB\neq 0$. נוכיח ש- A הפיכה. דרך השלילה, נניח שהיא סינגולרית. ממשפט 3.10.6 נובע שקיים וקטור $\underline{0}\neq v\in\mathbf{R}^n$ שמקיים $Av=\underline{0}$. נגדיר מטריצה ריבועית B מסדר n כך שכל עמודה שלה שווה לווקטור v. אז, לפי למה 3.4.3, מתקיים $AB=0$ ומכיוון שהמטריצה B שונה מאפס, קיבלנו סתירה. לכן הנחתנו שגויה, כלומר המטריצה A הפיכה.

שאלה 4

תהיינה A מטריצה מסדר $m\times n$ ו- B מטריצה מסדר $n\times m$ כאשר $n<m$. נוכח כי AB אינה הפיכה.

מהנתון $n<m$ נובע שקיים וקטור $\underline{c}\in\mathbf{R}^n$, $\underline{c}\neq\underline{0}$ כך ש- $B\underline{c}=\underline{0}$ (משפט 1.13.1). נכפיל את השוויון הזה בצד שמאל במטריצה A ולאחר שימוש באסוציאטיביות של הכפל מתקבל $(AB)\underline{c}=\underline{0}$, פרושו הווקטור $\underline{c}$ הוא פתרון לא טריוויאלי של המערכת $AB\underline{x}=\underline{0}$. לפיכך המטריצה AB אינה הפיכה (משפט 3.10.6 ז').

שאלה 5

לחישוב הדטרמיננטה של B, נבטא את $\det B$ בעזרת $\det A$. תחילה, נפתח את $\det B$ לפי השורה השלישית:

$$\det B=\begin{vmatrix}1 & b & 4 & 1\\ 2a+6 & a-1 & 2a-2 & 2b+4\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 5-3b & 1-b & 2-3b & 8-3a\end{vmatrix}=(-1)^{3+2}2\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 2a+6 & 2a-2 & 2b+4\\ 5-3b & 2-3b & 8-3a\end{vmatrix}.$$

לאחר הוצאה של הגורם המשותף 2 מהשורה השנייה, נשתמש בעובדה שהדטרמיננטה של מטריצה שווה לדטרמיננטה של המשוחלפת שלה ויוצא:

$$\det B=-4\begin{vmatrix}1 & a+3 & 5-3b\\ 4 & a-1 & 2-3b\\ 1 & b+2 & 8-3a\end{vmatrix}$$

נבצע עכשיו פעולות אלמנטריות:

$$\det B\overset{C_1\leftrightarrow C_2}{=}4\begin{vmatrix}a+3 & 1 & 5-3b\\ a-1 & 4 & 2-3b\\ b+2 & 1 & 8-3a\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}a+3 & 1 & 3b-5\\ a-1 & 4 & 3b-2\\ b+2 & 1 & 3a-8\end{vmatrix}\overset{C_3\to C_3+2C_2}{=}-4\begin{vmatrix}a+3 & 1 & 3b-3\\ a-1 & 4 & 3b+6\\ b+2 & 1 & 3a-6\end{vmatrix}$$

$$=-12\begin{vmatrix}a+3 & 1 & b-1\\ a-1 & 4 & b+2\\ b+2 & 1 & a-2\end{vmatrix}=-12\det A$$

ומהנתון $\det A=\frac{1}{3}$ מתקבל $\underline{\det B=-4}$. בפרט, נובע שהמטריצה B הפיכה (משפט 4.4.1)

נחשב עתה את $\det(-2B^{-1})$:

$$\det(-2B^{-1})\underset{\downarrow}{=}(-2)^4\det B^{-1}=16\det B^{-1}\underset{\downarrow}{=}\frac{16}{\det B}=-4.$$

שאלה 4.3.3 ב'   מסקנה 4.5.4

וקיבלנו ש- $\det(-2B^{-1})=-4$.

שאלה 6

נחשב את הדטרמיננטה הנתונה:

$$D=\begin{vmatrix}0 & n & n & \cdots & \cdots & n\\ n & 0 & n & \cdots & \cdots & n\\ \vdots & n & 0 & n & \cdots & n\\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \vdots\\ n & \cdots & \cdots & n & 0 & n\\ n & n & \cdots & \cdots & n & 0\end{vmatrix}.$$

תחילה, נוציא את הגורם המשותף n מכל שורה ונמשיך בפעולות אלמנטריות:

$$D=n^n\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&\cdots&1\\\vdots&1&0&&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\1&&&&0&1\\1&1&\cdots&\cdots&1&0\end{vmatrix}\overset{R_k\to R_k-R_1}{\underset{k\neq 1}{=}}n^n\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&\cdots&1\\1&-1&0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&0&-1&&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\1&&&&-1&0\\1&0&\cdots&\cdots&0&-1\end{vmatrix}$$

$$D\overset{C_1\to\sum_{k=1}^{n}C_k}{=}n^n\begin{vmatrix}n-1&1&1&\cdots&\cdots&1\\0&-1&0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&0&-1&&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0&-1&0\\0&0&\cdots&\cdots&0&-1\end{vmatrix}\overset{(*)}{=}(n-1)n^n\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&\cdots&0\\0&-1&0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&0&-1&&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0&-1&0\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0&-1\end{vmatrix}$$

כאשר (*) מסמן פתוח של הדטרמיננטה לפי העמודה הראשונה. התקבלה דטרמיננטה של מטריצה אלכסונית מסדר $n-1$. לכן היא שווה למכפלה של איברי האלכסון ומתקבל:

$$\underline{D=(-1)^{n-1}(n-1)n^n}$$