אינפי 1 סמסטר 2022ג – פתרון חלקי לממ"ח 03

שאלה 1

1. לא נכון.

לא קיים אף $x\in\mathbb{R}\backslash\{3\}$ כך ש $f(x)=\frac{2}{x-3}=0$, כלומר $y=0$ אינו בתמונת הפונקציה ולכן היא אינה על $\mathbb{R}$ (הערה: הפונקציה כן חח"ע ב $\mathbb{R}\backslash\{3\}$)

2. נכון.

אם $g(x_1)=g(x_2)$ עבור $x_1,x_2\in(1,\infty)$ אז

$$g(x_1)=g(x_2)\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{x_1-1}}=\frac{1}{\sqrt{x_2-1}}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{x_1-1}=\sqrt{x_2-1}\quad\Rightarrow\quad x_1-1=x_2-1$$

$$\Rightarrow\quad x_1=x_2$$

ולכן g חח"ע ב $(1,\infty)$.

לכל $y\in(0,\infty)$ נסמן $x=1+\frac{1}{y^2}$, $y>0$ ולכן $x>1$ כלומר $x\in(1,\infty)$ (x בתחום הפונקציה)

ומתקיים

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{y^2}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}}}=\frac{1}{\left|\frac{1}{y}\right|}=|y|\overset{y>0}{=}y$$

ולכן g על $(0,\infty)$.

שאלה 2

1. נכון.

זו ההגדרה של פונקציה לא חח"ע.

2. לא נכון.

דוגמא נגדית: הפונקציה $f(x)=\begin{cases}-x & -1\le x\le 0\\ 2+x & 0<x\le 1\end{cases}$, היא יורדת בקטע $[-1,0]$ ועולה בקטע $[0,1]$

אבל כן חח"ע בקטע $[-1,1]$ (שרטוט הגרף יעזור להבין למה).

הערה: נשים לב שהפונקציה אינה רציפה ב $[-1,1]$. אילו היתה נוספת דרישת רציפות ב $[-1,1]$, הטענה היתה נכונה (ע"י שימוש במשפט ערך הביניים).

שאלה 3

1. נכון.

עבור $a\neq 0$, לפי משפט גבול של הרכבת פונקציות 4.39, $y=ax$ מקיימת $\lim\limits_{x\to 0}ax=0$ וכן $ax\neq 0$

עבור x בסביבה נקובה של $x=0$, ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x\to 0}a\cdot\frac{\sin ax}{ax}=\lim_{y\to 0}a\cdot\frac{\sin y}{y}=a\cdot 1=a$$

מכאן

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{x}-\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{5-3}{1}=2$$

2. לא נכון.

עבור $0<x<\pi$ מתקיים $|\sin x|=\sin x \Rightarrow \sin x\ge 0$, עבור $-\pi<x<0$ מתקיים
$|\sin x|=-\sin x \Rightarrow \sin x\le 0$ ולכן

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1$$

ולכן הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$ לא קיים, ובוודאי שאינו שווה ל 1.

<u>שאלה 4</u>

1. לא נכון.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\cdot x\cos\tfrac{1}{x}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$ (נובע משאלה 67 א ביחידה 4),

$$\left|x\cos\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le|x|\cdot 1=|x| \quad\Rightarrow\quad -|x|\le x\cos\frac{1}{x}\le|x|$$

$\lim_{x\to 0}\pm|x|=0$ ולפי משפט הסנדוויץ' $\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$ ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\cdot x\cos\frac{1}{x}=1\cdot 0=0$$

2. לא נכון.

ע"י חילוק מונה ומכנה ב x^7 (מותר כי מדובר על $x\to\infty$, כלומר על x בסביבה של ∞, למשל בסביבה $(1,\infty)$, ולכן $x>0$)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+2x^2+1}{x^5+x^7+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^5}+\frac{1}{x^7}}{\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^7}}=\frac{0+0+0}{0+1+0}=0$$

<u>שאלה 5</u>

1. נכון.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x \underset{\sqrt{x^2+x}+x>0}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}_{\to 1}+1}=\frac{1}{2}$$

את הגבול בשלב האחרון אפשר לחשב ע"י החלפת משתנה: $\lim\limits_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x}=1$ ולפי משפט גבול של הרכבה

ורציפות פונקציית השורש, $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt{1}=1$.

2. לא נכון.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x=\lim\limits_{x\to-\infty} x(x+1)="(-\infty)\cdot(-\infty+1)"=\infty$ ולכן ע"י החלפת משתנה $y=x^2+x$,

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2+x=\infty$, ממשפט גבול של הרכבה

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}=\lim_{y\to\infty}\sqrt{y}=\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to-\infty}\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\to\infty}-\underbrace{x}_{\to-\infty}="\infty-(-\infty)"=\infty$$

<u>שאלה 6</u>

1. לא נכון.

דוגמא נגדית: $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\neq 0\\ -1 & x=0\end{cases}$.

לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)<0$, וגם $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$, אבל

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=\lim_{x\to 0}(-x^2)\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}(-1)=-1\neq-\infty$$

2. נכון.

f רציפה ב x_0 ולכן $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)<0$ ולכן

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)="\underbrace{f(x_0)}_{<0}\cdot\infty"=-\infty$$

ההבדל המהותי בין טענות 1 ו 2 הוא הרציפות של f ב x_0. העובדה שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)<0$ <u>לא מבטיחה</u> ש $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, הרציפות נותנת $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)<0$.

<u>שאלה 7</u>

1. לא נכון.

דוגמא נגדית: $g(x)=0$, $f(x)=x$, שתיהן כמובן רציפות ב $x_0=0$ ומתקיים

$f(x_0)=f(0)=0=g(0)=g(x_0)$, ולכן גם $f(x_0)\geq g(x_0)$. אבל בכל סביבה של $x_0=0$ קיים

$x<0$ ועבורו $f(x)=x<0=g(x)$.

2. לא נכון.

דוגמא נגדית: $f(x)=x^2$ רציפה ב $\mathbb{R}$, ולכל $x\neq 0$ מתקיים $f(x)=x^2>0$, אבל $f(0)=0$.

<u>שאלה 8</u>

1. לא נכון.

דוגמא נגדית: $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ קל להראות שאינה רציפה ב $x_0=0$, $g(x)=0$ בוודאי רציפה ב

$x_0=0$, ו $f\cdot g(x)=0$ רציפה ב $x_0=0$. תנאי הטענה מתקיים ותוצאת הטענה לא מתקיימת.

2. נכון.

נניח שפונקציה אחת רציפה ב x_0 והשניה אינה רציפה ב x_0, נניח כי f רציפה ב x_0 ו g אינה רציפה ב x_0. נסמן $h(x)=f(x)+g(x)$. אילו בשלילה h רציפה ב x_0 אז גם $g(x)=h(x)-f(x)$ רציפה ב x_0 בתור הפרש פונקציות רציפות בנקודה, סתירה.

ולכן לא ייתכן שפונקציה אחת רציפה והשניה אינה רציפה ב x_0, משמע או ששתיהן רציפות או ששתיהן לא רציפות בנקודה.

__שאלה 9__

1. נכון.

הסדרה מתכנסת $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1$ (בדקו) ולכן היא חסומה (משפט 2.16).

2. לא נכון.

לכל $n\in\mathbb{N}$, $0<\frac{1}{n}\le 1<\frac{\pi}{3}$ ולכן $\cos\frac{1}{n}>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ (כי $\cos x$ יורדת בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$) ולכן $n\cos\frac{1}{n}>\frac{1}{2}n$. מתכונת ארכימדס, לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $n>2M$ ואז $n\cos\frac{1}{n}>\frac{n}{2}>M$, ולכן M אינו חסם מלעיל של הסדרה. מכאן הסדרה אינה חסומה מלעיל ולכן גם אינה חסומה.

__שאלה 10__

1. לא נכון.

דוגמא נגדית: $f(x)=x\sin x$, כמובן ש f רציפה ב $\mathbb{R}$.

f אינה חסומה מלעיל ב $\mathbb{R}$: לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $n>M$, ואז

$$f(2\pi n+\tfrac{1}{2}\pi)=(2\pi n+\tfrac{1}{2}\pi)\sin(2\pi n+\tfrac{1}{2}\pi)\underset{\sin=1}{=}2\pi n+\tfrac{1}{2}\pi>2\pi n>n>M$$

ולכן M אינו חסם מלעיל של f ב $\mathbb{R}$. ומכאן ש f אינה חסומה מלעיל ב $\mathbb{R}$, ובאופן דומה מוכיחים ש f אינה חסומה מלרע ב $\mathbb{R}$. אבל

$$a_n=2\pi n+\tfrac{1}{2}\pi \ , \ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2\pi n+\tfrac{1}{2}\pi=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(2\pi n+\tfrac{1}{2}\pi)\sin(2\pi n+\tfrac{1}{2}\pi)=\lim_{n\to\infty}2\pi n+\tfrac{1}{2}\pi=\infty$$

$$b_n=2\pi n \ , \ \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}2\pi n=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}f(b_n)=\lim_{n\to\infty}(2\pi n)\sin(2\pi n)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

ולכן לפי הגדרת Heine, לא קיים $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, ובוודאי שאינו שווה ל ∞ או ל $-\infty$.

2. נכון.

f אינה חסומה מלרע ולכן כל $M\in\mathbb{R}$ אינו חסם מלרע, ולכן קיים $N\in\mathbb{R}$ כך ש $f(N)<M$. f עולה ולכן לכל $x<N$ מתקיים $f(x)<f(N)<M$.

לסיכום, לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x<N$ מתקיים $f(x)<M$, כלומר

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$