אינפי 1 סמסטר 2022ג – פתרון ממ"ן 12

שאלה 1

א.

עלינו להוכיח כי לכל $\varepsilon>0$ קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|\sqrt{\frac{4n+1}{n}}-2\right|<\varepsilon$.

יהי $\varepsilon>0$.

$$\left|\sqrt{\frac{4n+1}{n}}-2\right|\overset{(1)}{=}\left|\frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n}}-2\right|=\left|\frac{\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right|$$

(1) 'חוקי השורש', שאלה 1.49

בברור $4n+1>0$ ולכן גם $\sqrt{4n+1}>0$ (חוקי השורש) ומכאן $\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n}>0$ ולכן אפשר לבצע 'כפל בצמוד'.

$$\left|\sqrt{\frac{4n+1}{n}}-2\right|=\left|\frac{(\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n})(\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n})}{\sqrt{n}(\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n})}\right|=\left|\frac{(\sqrt{4n+1})^2-(2\sqrt{n})^2}{\sqrt{n}(\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n})}\right|=$$

$$=\left|\frac{4n+1-4n}{\sqrt{n}(\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n})}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n})}\right|\overset{(2)}{=}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n})}$$

(2) $\sqrt{n}>0$, הביטוי בתוך הערך המוחלט חיובי

כעת

$$4n+1>4n \quad\Rightarrow\quad \sqrt{4n+1}>\sqrt{4n}=2\sqrt{n}$$

$$\left|\sqrt{\frac{4n+1}{n}}-2\right|=\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n})}\overset{(3)}{<}\frac{1}{\sqrt{n}(2\sqrt{n}+2\sqrt{n})}=\frac{1}{\sqrt{n}\cdot4\sqrt{n}}=\frac{1}{4n}$$

(3) הקטנו את המכנה

כמו כן

$$\frac{1}{4n}<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad n>\frac{1}{4\varepsilon}$$

מתכונת ארכימדס קיים $N\in\mathbb{N}$ המקיים $N>\frac{1}{4\varepsilon}$, ואז לכל $n>N$ מתקיים

$$\left|\sqrt{\frac{4n+1}{n}}-2\right|<\frac{1}{4n}<\frac{1}{4N}<\frac{1}{4\frac{1}{4\varepsilon}}=\varepsilon$$

ב. (i)

$\lim_{n\to\infty}a_n\neq L$ (כלומר: לא נכון ש $\lim_{n\to\infty}a_n=L$) אס"ם קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל N טבעי קיים $n>N$ המקיים $|a_n-L|\geq\varepsilon$.

ב. (ii)

הסדרה (a_n) מתבדרת אס"ם אינה מתכנסת, כלומר לכל $L\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n\neq L$. כלומר:

(a_n) מתבדרת אס"ם לכל $L\in\mathbb{R}$ קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל N טבעי קיים $n>N$ המקיים $|a_n-L|\geq\varepsilon$.

ג.

עלינו להוכיח כי לכל $L \in \mathbb{R}$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N טבעי קיים $n > N$ המקיים $|a_n - L| \geq \varepsilon$.

יהי $L \in \mathbb{R}$ כלשהו. נפריד ההוכחה לשני מקרים: $L \geq 0$, $L < 0$.

אם $L \geq 0$:

נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

נבדוק מתי מתקיים $\frac{-n+1}{n+2} < -\frac{1}{2}$.

$$\frac{-n+1}{n+2} < -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -2n+2 < -n-2 \quad \Leftrightarrow \quad n > 4$$

יהי N טבעי.

נסמן $k = \max\{N, 4\}$ ונבחר $n = 2k+1$. אז k מספר טבעי ולכן $n = 2k+1$ מספר טבעי אי-זוגי.

$k \geq N$ ולכן $n = 2k+1 \geq 2N+1 > 2N > N$. בנוסף $k \geq 4$ ולכן $n = 2k+1 \geq 9 > 4$ ומכאן

$$a_n = \frac{(-1)^n n+1}{n+2} \overset{(1)}{=} \frac{-n+1}{n+2} \overset{(2)}{<} -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n < 0$$

$$|a_n - L| \overset{(3)}{=} L - a_n \overset{(4)}{\geq} -a_n \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$$

(1) כי n איזוגי

(2) כי $n > 4$

(3) $L \geq 0$, $a_n < 0$ ולכן $a_n - L < 0$

(4) כי $L \geq 0$

אם $L < 0$:

נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

נבדוק מתי מתקיים $\frac{n+1}{n+2} > \frac{1}{2}$.

$$\frac{n+1}{n+2} > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2n+2 > n+2 \quad \Leftrightarrow \quad n > 0$$

וזה מתקיים לכל n טבעי.

יהי N טבעי.

ונבחר $n = 2N$. אז n מספר טבעי זוגי, $n = 2N > N$, ומתקיים

$$a_n = \frac{(-1)^n n+1}{n+2} \overset{(5)}{=} \frac{n+1}{n+2} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n > 0$$

$$|a_n - L| \overset{(6)}{=} a_n - L \overset{(7)}{>} a_n \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$$

(5) כי n זוגי

(6) $L < 0$, $a_n > 0$ ולכן $a_n - L > 0$

(7) כי $L < 0$

<u>שאלה 2</u>

כללי האריתמטיקה לגבולות אינסופיים (משפט 2.43) מסומנים במרכאות: "$\infty+\infty$", "$\frac{1}{\infty}$" וכד'.

ברור שהביטויים שבתוך המרכאות הם חסרי משמעות – אנחנו יודעים לחבר, לחסר וכו' רק מספרים ממשיים, ו ∞ אינו מספר ממשי אלא סמל למשהו.
בכל זאת בחישובי הגבולות נרשה לעצמנו לקצר ולהשתמש בסימונים אלה.

אם נרשום לדוגמא "$3+\infty$" כוונתנו שאנחנו משתמשים כאן בכלל "∞ + מספר חיובי" וכד'.

א.

לכל n טבעי $n^2+(-1)^n \ge n^2-1 \ge 0$ ולכן הסדרה מוגדרת.

$\sqrt{n^2+(-1)^n} \ge 0$ ולכן $\sqrt{n^2+(-1)^n}+n \ge n > 0$ ובפרט ביטוי זה שונה מ 0, ולכן

$$\sqrt{n^2+(-1)^n}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+(-1)^n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+(-1)^n}+n\right)}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}=\frac{n^2+(-1)^n-n^2}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}$$

ולכן לכל n מתקיים

$$0\overset{(1)}{\le}\left|\sqrt{n^2+(-1)^n}-n\right|=\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}\right|\overset{(1)}{=}\frac{\left|(-1)^n\right|}{\left|\sqrt{n^2+(-1)^n}+n\right|}\overset{(2)}{=}\frac{1}{\sqrt{n^2+(-1)^n}+n}\overset{(3)}{\le}\frac{1}{n}$$

(1) תכונות הערך המוחלט

(2) $\sqrt{n^2+(-1)^n}>0$, $\left|(-1)^n\right|=\left|\pm1\right|=1$

(3) $\sqrt{n^2+(-1)^n}+n \ge n$

$\lim_{n\to\infty}0=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ וממשפט הסנדוויץ' נסיק $\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{n^2+(-1)^n}-n\right|=0$,

ומשאלה 20 ביחידה 2 נקבל שגם $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+(-1)^n}-n=0$.

ב.

ע"י חילוק מונה ומכנה ב $n^5 \ne 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n^6-1}{n^4-\pi n^5+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^2}-2n-\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n}-\pi+\frac{5}{n^4}}$$

לכל k טבעי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^k=0$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\pi+\frac{5}{n^4}=0-\pi+0=-\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}-2n-\frac{1}{n^5}="0-\infty-0"=-\infty$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n^6-1}{n^4-\pi n^5+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^2}-2n-\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n}-\pi+\frac{5}{n^4}}="\frac{-\infty}{-\pi}"=\infty$$

ג.

לכל n טבעי $\sqrt{3}n^2 > 0$ (מכפלת מספרים חיוביים) ולכן $\left\lfloor \sqrt{3}n^2 \right\rfloor \geq 0$, ומתכונות הערך השלם

$$0 \leq \left\lfloor \sqrt{3}n^2 \right\rfloor \leq \sqrt{3}n^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{\left\lfloor \sqrt{3}n^2 \right\rfloor}{n^4} \leq \frac{\sqrt{3}n^2}{n^4} = \frac{\sqrt{3}}{n^2}$$

(חילקנו במספר חיובי).

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{n^2} = 0$$

וממשפט הסנדוויץ' נסיק שגם

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\lfloor \sqrt{3}n^2 \right\rfloor}{n^4} = 0$$

ד.

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$$

נסמן $0 < x_n = \dfrac{2n-1}{2n}$, אזי

$$x_1 = \frac{1}{2} \ , \ x_2 = \frac{3}{5} \ , \ x_3 = \frac{5}{6} \ , \ldots$$

ולכן

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}} = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot \ldots \cdot x_n}$$

כלומר הסדרה (a_n) היא סדרת הממוצעים ההנדסיים של הסדרה החיובית (x_n).

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 1$$

וממשפט 2.52 נסיק שגם $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

<u>שאלה 3</u>

א.

הטענה אינה נכונה. דוגמה נגדית:

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ odd} \\ n & n \text{ even} \end{cases} \quad , \quad b_n = \begin{cases} n & n \text{ odd} \\ 1 & n \text{ even} \end{cases}$$

(odd – איזוגי, even – זוגי).

עבור n איזוגי $a_n b_n = 1 \cdot n = n$, עבור n זוגי $a_n b_n = n \cdot 1 = n$. ולכן לכל n מתקיים $a_n b_n = n$ ומכאן

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

לכל n a_n, b_n חיוביים ולכן זה נכון גם כמעט לכל n.

אבל $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \infty$ וגם $\lim_{n\to\infty} b_n \neq \infty$. נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \infty$, ההוכחה ש $\lim_{n\to\infty} b_n \neq \infty$ אנלוגית.

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq \infty$ אם קיים M כך שלכל N טבעי קיים $n > N$ המקיים $a_n \le M$ (זו שלילת ההגדרה $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, הגדרה 2.36).

נבחר למשל $M = 2$, ויהי N טבעי, אז $n = 2N+1$ מקיים $n = 2N+1 > 2N > N$, וזהו מספר טבעי אי-זוגי ולכן $a_n = 1 < 2 = M$.

ב.

הטענה נכונה.

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$ ולכן מהגדרת הגבול (עבור $M = 0$) קיים N_1 טבעי כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $a_n b_n > 0$.

נתון שכמעט כל אברי (b_n) חיוביים, כלומר קיים N_2 טבעי כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $b_n > 0$.

יהי $N = \max\{N_1, N_2\}$, אז לכל $n > N$ מתקיים $a_n b_n > 0$ וגם $b_n > 0$, ומכאן $a_n = \frac{a_n b_n}{b_n} > 0$. כלומר

כמעט כל אברי (a_n) חיוביים.

ג.

הטענה אינה נכונה. דוגמה נגדית: $b_n = \frac{1}{n}$, $a_n = n^2$. אז

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

אבל $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

ד.

הטענה נכונה.

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$ ולכן מהגדרת הגבול (עבור $M = 0$) קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n b_n > 0$

ומכאן $b_n \neq 0$.

ה.
הטענה נכונה.

$\lim_{n\to\infty} b_n = 5 \neq 0$ ולכן לפי למה 2.26, כמעט לכל n מתקיים $b_n \neq 0$ ולכן $a_n = \frac{a_nb_n}{b_n} = a_nb_n \cdot \frac{1}{b_n}$. כעת מאריתמטיקה של גבולות אינסופיים

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_nb_n \cdot \frac{1}{b_n} = "\infty \cdot \frac{1}{5}" = \infty$$

ו.
הטענה אינה נכונה. דוגמה נגדית: $b_n = -n$, $a_n = -1$. אז

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty}(-n)\cdot(-1) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

לכל $n > 1$ מתקיים $b_n = -n < -1 = a_n$, כלומר מתקיים $b_n < a_n$ כמעט לכל n. אבל $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1 \neq \infty$.

ז.
הטענה נכונה.

מהנתון קיים N_1 טבעי כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $0 < b_n < a_n$, ובפרט $a_n > 0$, וע"י כפל אי השוויון ב a_n נקבל שמתקיים $a_nb_n < a_n{}^2$.

יהי $M > 0$.

מהנתון $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \infty$ נובע שקיים N_2 טבעי כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $a_nb_n > M^2$.

יהי $N = \max\{N_1, N_2\}$, אז לכל $n > N$ מתקיים $a_n{}^2 > a_nb_n > M^2$ ולכן $a_n{}^2 > M^2$.

$$a_n{}^2 > M^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a_n{}^2} > \sqrt{M^2} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad |a_n| > |M| \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad a_n > M$$

(1) לכל x ממשי, $\sqrt{x^2} = |x|$

(2) a_n ו M חיוביים

לסיכום הראינו שלכל $M > 0$ קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > M$, כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.