216738542 תום שבתאי

ממן 12

שאלה 1

תהיינה A,B מטריצות ב- $M_n(F)$

המקיימות $AB=BA$ (1)

נוכיח באינדוקציה שאם $AB=BA$ אז לכל $k\in\mathbb{N}$ $AB^k=B^kA$

עבור $k=1$: $AB=BA$ (1)

הנחת אינדוקציה: יהי $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $AB^k=B^kA$

עבור $k+1$: $AB^{k+1}=AB^kB=B^kAB\overset{(1)}{=}B^kBA=B^{k+1}A$

מסקנת אינדוקציה: לכל $k\in\mathbb{N}$ $AB^k=B^kA$ (2)

נוכיח באינדוקציה שלכל $k\in\mathbb{N}$ $(AB)^k=A^kB^k$

עבור $k=1$: $(AB)^1=AB=A^1B^1$

הנחת אינדוקציה: יהי $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $(AB)^k=A^kB^k$

עבור $k+1$: $(AB)^{k+1}=(AB)^kAB=A^kB^kAB\overset{(2)}{=}A^kAB^kB$

$=A^{k+1}B^{k+1}$

מסקנת אינדוקציה: לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים ש- $(AB)^k=A^kB^k$

∎

שאלה 2 — ממן 12

תהי: A מטריצה

$$A=\begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -k \end{bmatrix}$$

נמצא את ערכי k כך ש-A הפיכה ו- $A=A^{-1}$.

נשים לב כי $A^2=I$ אםם A הפיכה ו- $A=A^{-1}$

הוכחה: אם $A^2=I$ אז לפי מסקנה 4.5.2 A הפיכה, ו- $A=A^{-1}$, ואם A הפיכה ו- $A=A^{-1}$ אז לפי הגדרה

$$A^2=A\cdot A=A\cdot A^{-1}=I$$

לכן מספיק למצוא את ערכי k בהם $A^2=I$

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -k \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 \end{bmatrix}=I$$

ולכן

$$k^2-1=1$$
$$\Downarrow$$
$$k^2=2$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{k=\pm\sqrt{2}}$$

לסיכום A הפיכה ומתקיים $A=A^{-1}$ אםם $k=\pm\sqrt{2}$

$\square$

ממן 12

שאלה 3

א) יהיו A,B מטריצות מסדר $n\times n$ מעל השדה $\mathbb{R}$
המקיימות ① $A^2+AB+I=0$, נוכיח ש- $AB=BA$.

לכן ① $A(-A-B)=I$

ולכן לפי מסקנה 4.5.2 $A(-A-B)=(-A-B)A$

$$\Downarrow$$

$$-A^2-AB=-A^2-BA \Rightarrow -AB=-BA \Rightarrow \boxed{AB=BA}$$

ממן 12

שאלה 3

ב) תהיינה A,B מטריצות מסדר $n \times n$ כש- n אי זוגי ומתקיים (1) $AB+BA=0$, נוכיח שלפחות אחת מהמטריצות A,B סינגולרית.

לפי (1) $AB=-BA$ ולכן $|AB|=|-BA|$ לפי שאלה 4.3.3 $|AB|=(-1)^n|BA|$
מכיוון ש- n אי-זוגי $|AB|=-|BA|$ לפי משפט 4.5.1 $|A||B|=-|A||B|$
ולכן מתקיים ש- $|A|$ או $|B|$ שווים ל- 0 ולכן לפי משפט 4.4.1
$|A|$ או $|B|$ סינגולריות בהתאמה $\square$

ממן 12

שאלה 3

ב) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n כך שלכל מטריצה ריבועית $B\neq O$ מסדר n מתקיים $AB\neq O$. נוכיח ש-A הפיכה בשלילה.

נניח בשלילה A סינגולרית, לפי 3.10.6 סעיף ג', קיים וקטור $v\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $v\neq\underline{0}$, $Av=\underline{0}$, נגדיר מטריצה B כך שכל עמודה שלה היא v ומכיוון ש- $v\neq\underline{0}$ אז $B\neq O$ ולכן $AB=O$ וגם $AB\neq O$, סתירה. ולכן A לא סינגולרית - הפיכה

מסקנה: A הפיכה

$\square$

ממן 12

שאלה 4

תהיינה A מטריצה מסדר $m\times n$ ו-B מטריצה מסדר $n\times m$ כאשר $n<m$ (1)
נוכיח כי AB סינגולרית, בשלילה.

נניח כי AB הפיכה, לפי (1) ומשפט 1.13.1 קיים $\underline{v}\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $\underline{v}\neq 0$
ומתקיים $B\underline{v}=0$ נכפיל משמאל את שני האגפים ב- A ונקבל $AB\underline{v}=0$ (2)

לפי הנחת השלילה ומשפט 3.10.6 מתקבל של משוואות $AB\underline{x}=0$ קיים רק
הפתרון הטריוויאלי אבל (2) הוא דוגמה לפתרון הלא טריוויאלי, סתירה
ולכן AB סינגולרית.

$\square$

מבחן 12

שאלה 5

תהיינה A,B מטריצות מעל $\mathbb{R}$

ונתון ש- $|A|=\frac{1}{3}$.

נחשב את $|B|$ ו- $|-2B^{-1}|$

$$A=\begin{pmatrix} a+3 & 7 & b-1 \\ a-1 & 4 & b+2 \\ b+2 & 7 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & b & 4 & 1 \\ 2a+6 & a-1 & 2a-2 & 2b+4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5-3b & 1-b & 2-3b & 8-3a \end{pmatrix}$$

נפתח את B לפי שורה 3

$$\det B=(-1)^{3+2}\,2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2a+6 & 2a-2 & 2b+4 \\ 5-3b & 2-3b & 8-3a \end{vmatrix}$$

$$\det B=-2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2a+6 & 2a-2 & 2b+4 \\ 5-3b & 2-3b & 8-3a \end{vmatrix}$$

נוציא גורם משותף משורה 2

$$\det B=-4\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a+3 & a-1 & b+2 \\ 5-3b & 2-3b & 8-3a \end{vmatrix}$$

4.3.1 סעיף

$$\det B = -4\begin{vmatrix} 1 & a+3 & 5-3b \\ 4 & a-1 & 2-3b \\ 1 & b+2 & 8-3a \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftrightarrow C_2$ 4.3.2 סעיף

$$\det B = 4\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 5-3b \\ a-1 & 4 & 2-3b \\ b+2 & 1 & 8-3a \end{vmatrix}$$

נוציא גורם משותף מטור -1

$$\det B = -4\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 3b-5 \\ a-1 & 4 & 3b-2 \\ b+2 & 1 & 3a-8 \end{vmatrix}$$

$C_3 \to C_3 + 2C_2$

$$\det B = -4\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 3b-3 \\ a-1 & 4 & 3b+6 \\ b+2 & 1 & 3a-6 \end{vmatrix}$$

נוציא גורם משותף מטור 3

$$\det B = -12\begin{vmatrix} a+3 & 1 & b-1 \\ a-1 & 4 & b+2 \\ b+2 & 1 & a-2 \end{vmatrix}$$

$$\det B = -12|A|$$

לפי הנתון ש- $|A| = \frac{1}{3}$

$$|B| = -4$$

$$|-2B^{-1}| = (-2)^4 |B^{-1}| = 16 \frac{1}{|B|} = -4$$

$\square$

ממן 12

שאלה 6

$$D=\begin{vmatrix} 0 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 0 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & n & 0 & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & n & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n & \vdots \\ n & \vdots & \cdots & n & 0 & n \\ n & n & n & \cdots & n & 0 \end{vmatrix} \underset{k\neq 1}{\overset{R_k\to R_k-R_1}{=}} \begin{vmatrix} 0 & n & n & \cdots & n & n \\ n & -n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ n & \vdots & \cdots & 0 & -n & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_1\to R_1+R_k}{=} \begin{vmatrix} -n(1-n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ n & \vdots & \cdots & 0 & -n & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} \overset{C_1\to \sum_{k=1}^{n} C_k}{=} \begin{vmatrix} -n(1-n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

$$\overset{①}{=} (1-n)n^n \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{②}{=} (-1)^n\cdot(1-n)\cdot n^n$$

① פיתוח לפי העמודה הראשונה

② משפט 4.3.8

מסקנה:

$$\boxed{D=(-1)^n\cdot(1-n)\cdot n^n}$$

$\square$