אינפי 1 סמסטר 2022ג – פתרון ממ"ן 14

שאלה 1

א.

הטענה אינה נכונה.

דוגמה נגדית: $g(x)=k(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$, $f(x)=h(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$.

(הכוונה לפונקציות h,k הנתונות ברמז בשאלה).

לכל $x\le 0$

$$x\le 0 \quad\Rightarrow\quad g(x)=x \quad\Rightarrow\quad f(g(x))=f(x)\underset{x\le 0}{=}x \quad\Rightarrow\quad (f\circ g)(x)=x$$

לכל $x>0$

$$x>0 \quad\Rightarrow\quad g(x)=x+1>0 \quad\Rightarrow\quad f(g(x))=f(x+1)\underset{x+1>0}{=}(x+1)-1=x \quad\Rightarrow\quad (f\circ g)(x)=x$$

לסיכום $(f\circ g)(x)=x$ לכל $x\in\mathbb{R}$, כלומר הפונקציות f,g מקיימות את תנאי הטענה.

אבל

$$f(\tfrac{1}{2})\underset{\frac{1}{2}>0}{=}\tfrac{1}{2}-1=-\tfrac{1}{2} \quad,\quad f(-\tfrac{1}{2})\underset{-\frac{1}{2}<0}{=}-\tfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad f(\tfrac{1}{2})=f(-\tfrac{1}{2})$$

ולכן f אינה חח"ע.

ב.

הטענה נכונה.

נניח בשלילה שקיימים $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש $x\ne y$ וגם $g(x)=g(y)$. אז

$$g(x)=g(y) \quad\Rightarrow\quad f(g(x))=f(g(y)) \quad\Rightarrow\quad (f\circ g)(x)=(f\circ g)(y)$$

ומהנתון מתקבל $x=y$, בסתירה לבחירה של x,y .

לפיכך הנחת השלילה שגויה, ולכל $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש $x\ne y$ מתקיים $g(x)\ne g(y)$, כלומר g חח"ע.

ג.

הטענה נכונה.

יהי $y\in\mathbb{R}$. מהנתון מתקיים $y=(f\circ g)(y)=f(g(y))$.

נסמן $x=g(y)$ ונקבל כי $f(x)=y$.

כלומר הראינו שכל איבר ב $\mathbb{R}$ הוא תמונה על ידי f של איבר מתאים ב $\mathbb{R}$, ולכן f על.

ד.

הטענה אינה נכונה.

דוגמה נגדית: הפונקציות f,g של סעיף א'. כבר ראינו שהן מקיימות את התנאי של הטענה.

לכל $x\le 0$, $g(x)=x\le 0$.

לכל $x>0$, $g(x)=x+1>1$.

ולכן לא קיים אף $x\in\mathbb{R}$ כך ש $g(x)=\frac{1}{2}$, כלומר $\frac{1}{2}$ אינו בתמונת g , ולכן תמונת g אינה $\mathbb{R}$ (בעוד שהטווח של g הוא $\mathbb{R}$) ולכן g אינה על.

ה.

הטענה אינה נכונה.

דוגמה נגדית: הפונקציות f,g של סעיף א'. כבר ראינו שהן מקיימות את התנאי של הטענה.

לכל $x\le 0$

$$x \le 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) = g(x) \underset{x\le 0}{=} x$$

לכל $x > 1$

$$x > 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x-1 > 0 \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) = g(x-1) \underset{x-1>0}{=} (x-1)+1 = x$$

כלומר לכל $x \le 0$ או $x > 1$ אכן מתקיים $(g \circ f)(x) = x$.

אבל זה לא מתקיים עבור $0 < x \le 1$.

לדוגמה, עבור $x = \frac{1}{2}$

$$\tfrac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{1}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad g(f(\tfrac{1}{2})) = g(-\tfrac{1}{2}) \underset{-\frac{1}{2}<0}{=} -\tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (g \circ f)(\tfrac{1}{2}) \ne \tfrac{1}{2}$$

ולכן לא נכון ש $(g \circ f)(x) = x$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

ו.

הטענה נכונה.

יהי $x \in \mathbb{R}$. g היא על ולכן קיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש $g(a) = x$.

מהנתון

$$a = (f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(x)$$

ולכן

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a) = x$$

<u>שאלה 2</u>

א.

יש להוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < \left|x - \frac{2}{\pi}\right| < \delta$ יתקיים $\left|\left\lfloor \sin\frac{1}{x} \right\rfloor - 0\right| < \varepsilon$.

יהי $\varepsilon > 0$.

נשים לב שלכל x ממשי מתקיים $-1 \le \sin x \le 1$ ולכן $\lfloor \sin x \rfloor \in \{-1, 0, 1\}$.

ולכן נחפש סביבה נקובה של $\frac{2}{\pi}$ שבה מתקיים $\left\lfloor \sin\frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.

נבחר $\delta = \frac{1}{\pi}$.

אם $0 < \left|x - \frac{2}{\pi}\right| < \delta$ אז $0 < \left|x - \frac{2}{\pi}\right|$, כלומר $x \ne \frac{2}{\pi}$ ולכן $\frac{1}{x} \ne \frac{\pi}{2}$, וגם

$$\left|x - \frac{2}{\pi}\right| < \delta = \frac{1}{\pi} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\pi} < x - \frac{2}{\pi} < \frac{1}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\pi} < x < \frac{3}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} < \frac{1}{x} < \pi$$

ולכן $0 < \frac{1}{x} < \pi$ וגם $\frac{1}{x} \ne \frac{\pi}{2}$, אי לכך $0 < \sin\frac{1}{x} < 1$ ולכן $\left\lfloor \sin\frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.

אם כן, לכל x המקיים $0 < \left|x - \frac{2}{\pi}\right| < \delta$ מתקיים $\left|\left\lfloor \sin\frac{1}{x} \right\rfloor - 0\right| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ כנדרש.

ב.

צריך להוכיח שלכל $M_1 \in \mathbb{R}$ (או $M_1 > 0$ – מותר להוכיח עבור $M_1 > 0$ בלבד) קיים $M_2 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > M_2$ יתקיים $\sqrt{2x - \sin 3x} > M_1$.

יהי $M_1 > 0$.

צריך לבחור את M_2 כך שהביטוי $\sqrt{2x - \sin 3x}$ מוגדר עבור כל $x > M_2$.

נניח $M_2 \ge 1$, ואז לכל $x > M_2$ מתקיים $x > 1$. לכל x, $-1 \le \sin x \le 1$ ולכן

$$2x - \sin 3x \ge 2x - 1 > 2 - 1 > 0$$

והביטוי $\sqrt{2x - \sin 3x}$ אכן מוגדר עבור כל $x > M_2$.

$\sqrt{x}$ פונקציה עולה (שאלה 49 ביחידה 1) ולכן עבור $x > M_2$

$$2x - \sin 3x \ge 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x - \sin 3x} \ge \sqrt{2x - 1} > \sqrt{2M_2 - 1}$$

נבחר אם כן $M_2 = \max\left\{1, \frac{M_1^2 + 1}{2}\right\}$. אז $M_2 \ge 1$ כפי שהנחנו, וגם $M_2 \ge \frac{M_1^2 + 1}{2}$ ולכן לכל $x > M_2$

$$\sqrt{2x - \sin 3x} > \sqrt{2M_2 - 1} \ge \sqrt{2 \cdot \frac{M_1^2 + 1}{2} - 1} = \sqrt{M_1^2} \overset{(1)}{=} M_1$$

(1) $M_1 > 0$

<u>שאלה 3</u>

א.

(i)

לא קיים ל f גבול סופי כש $x\to\infty$ אם"ם לכל $L\in\mathbb{R}$ לא מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$,

כלומר אם"ם לכל $L\in\mathbb{R}$ קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $x>M$ המקיים $|f(x)-L|\ge\varepsilon$.

(ii)

לא קיים ל f גבול סופי כש $x\to\infty$ אם"ם לכל $L\in\mathbb{R}$ לא מתקיים $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$,

כלומר אם"ם לכל $L\in\mathbb{R}$ קיימת סדרה (x_n) המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ אבל $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\ne L$ (בביטוי $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\ne L$ הכוונה היא לשלילת הטענה $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$).

ב.

(i)

צריך להוכיח שלכל $L\in\mathbb{R}$ קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $x>M$ המקיים $\left|\frac{4}{5+\cos x}-L\right|\ge\varepsilon$.

יהי $L\in\mathbb{R}$. נפריד לשני מקרים: $L=1$, $L\ne1$.

אם $L=1$, נבחר $\varepsilon=\frac{1}{4}$. יהי $M\in\mathbb{R}$.

לפי תכונת ארכימדס, קיים k טבעי המקיים $k>M$, נבחר $x=2k\pi$. אז $x=2k\pi>k>M$.

כמו כן ממחזוריות הפונקציה $\cos x$, $\cos x=\cos 2k\pi=\cos 0=1$ ולכן

$$\left|\frac{4}{5+\cos x}-L\right|=\left|\frac{4}{5+\cos x}-1\right|=\left|\frac{4}{5+1}-1\right|=\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}\ge\frac{1}{4}=\varepsilon$$

אם $L\ne1$, נבחר $\varepsilon=|1-L|>0$. יהי $M\in\mathbb{R}$.

נבחר $x=\lceil|M|\rceil\cdot2\pi+\pi$. אז

$$|M|\ge0 \quad\Rightarrow\quad \lceil|M|\rceil\ge0$$

$$\Rightarrow\quad x=\lceil|M|\rceil\cdot2\pi+\pi>\lceil|M|\rceil\cdot2\pi\overset{(1)}{\ge}\lceil|M|\rceil\overset{(2)}{\ge}|M|\overset{(3)}{\ge}M$$

(1) כי $\lceil|M|\rceil\ge0$

(2) לפי תכונות החלק השלם $\lceil x\rceil$: $\lceil x\rceil\ge x$

(3) לפי תכונות הערך המוחלט: $|x|\ge x$

כלומר $x>M$ כנדרש.

כמו כן $\lceil|M|\rceil$ הוא מספר שלם ולכן, ממחזוריות הפונקציה $\cos x$, $\cos x=\cos\pi=-1$ ולכן

$$\left|\frac{4}{5+\cos x}-L\right|=\left|\frac{4}{5+(-1)}-L\right|=|1-L|=\varepsilon$$

ולכן בוודאי $\left|\frac{4}{5+\cos x}-L\right|\ge\varepsilon$.

(ii)

צריך להוכיח שלכל $L\in\mathbb{R}$ קיימת סדרה (x_n) המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ אבל $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq L$.

יהי $L\in\mathbb{R}$. שוב נפריד לשני מקרים: $L=1$, $L\neq 1$.

אם $L=1$, נבחר את הסדרה $x_n=2\pi n$. אז

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} 2\pi n=\text{"}2\pi\cdot\infty\text{"}=\infty$$

אבל לכל n

$$f(x_n)=\frac{4}{5+\cos x_n}=\frac{4}{5+\cos 2\pi n}=\frac{5}{5+1}=\frac{2}{3}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\neq L$$

אם $L\neq 1$, נבחר את הסדרה $x_n=2\pi n+\pi$. אז

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}=\underbrace{2\pi n}_{\to\infty}+\pi=\text{"}\infty+\pi\text{"}=\infty$$

אבל לכל n

$$f(x_n)=\frac{4}{5+\cos x_n}=\frac{4}{5+\cos(2\pi n+\pi)}=\frac{4}{5+(-1)}=1$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}1=1\neq L$$

<u>שאלה 4</u>

א.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}$$

(1) בסביבה נקובה קטנה מספיק של $x=0$ מתקיים $\cos x>0$ ולכן $1+\cos x\neq 0$

(2) לפי הזהות הטריגונומטרית $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

ידוע ש $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (משפט 4.45) ולכן $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1^2=1$, מהגבול הידוע $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ (טענה 4.44) ואריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ב.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{x^7}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4\frac{1}{x^3}$$

בגלל הביטוי $\frac{1}{x^3}$ נחשב גבולות חד צדדיים.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4=1^4=1$ ולכן גם $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4=1$.

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}="\frac{1}{0^+}"=\infty$, $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}="\frac{1}{0^-}"=-\infty$, ולכן מאריתמטיקה של גבולות אינסופיים,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^4 x}{x^7}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4}_{\to 1}\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to\infty}="1\cdot\infty"=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^4 x}{x^7}=\lim_{x\to 0^-}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4}_{\to 1}\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to -\infty}="1\cdot(-\infty)"=-\infty$$

הגבולות החד צדדיים שונים, ולכן (לפי משפט אנלוגי למשפט 4.48, עבור גבולות במובן הרחב), הגבול המבוקש לא קיים.

ג.

נחלק מונה ומכנה ב x^5, מדובר על גבול ב ∞ ולכן דנים בסביבה של ∞, בסביבה $(1,\infty)$ למשל, ולכן $x>0$ ו $x^5\neq 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^5+1}{5x^5+3x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-3+\frac{1}{x^5}}{5+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^5}}=\frac{0-3+0}{5+0-0}=-\frac{3}{5}$$

כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}=0$.

ד.

נדון בסביבה $(-\infty,-1)$ של $-\infty$. לכל $x<-1$ מתקיים $x^2>1$ ולכן $x^2-\sin x>1-1=0$, והפונקציה מוגדרת בסביבה זו של $-\infty$.

לכל $x<-2$ מתקיים

$$x^2\overset{(1)}{=}\left|x^2\right|\overset{(2)}{=}|x|^2=|x|\cdot|x|\overset{(3)}{>}2|x|\overset{(3)}{=}-2x \quad\overset{(4)}{\Rightarrow}\quad x^2-\sin x>-2x-1>0 \quad\overset{(5)}{\Rightarrow}\quad \sqrt{x^2-\sin x}>\sqrt{-2x-1}$$

(1) $x^2\ge 0$

(2) תכונות הערך המוחלט

(3) $x<-2$ ולכן $|x|=-x>2$

(4) $\sin x\ge -1$

(5) $\sqrt{x}$ פונקציה עולה (יחידה 1 שאלה 49)

נחשב את הגבול של הפונקציה $\sqrt{-2x-1}$ ב $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}(-2x-1)="-2\cdot(-\infty)-1"="\infty-1"=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-2x-1}\overset{(6)}{=}\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}\overset{(7)}{=}\infty$$

(6) החלפת משתנה: $t=-2x-1$, כאמור $\lim\limits_{x\to-\infty}t=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-1)=\infty$, ולפי משפט גבול של הרכבה 4.39, גרסה המתאימה לגבול ב $-\infty$

(7) גבול ידוע (דוגמה 4.31)

בסביבה $(-\infty,-2)$ של $-\infty$ מתקיים $\sqrt{x^2-\sin x}>\sqrt{-2x-1}$, ולכן לפי קריטריון ההשוואה לגבולות אינסופיים (באנלוגיה למשפט 2.45) מתקבל

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-\sin x}=\infty$$

ולכן הגבול המבוקש הוא מהצורה "$\infty-\infty$".

$x<0$ ונימקנו ש $x^2-\sin x>0$ ולכן

$$x^2-\sin x>0 \quad\overset{(5)}{\Rightarrow}\quad \sqrt{x^2-\sin x}>0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x^2-\sin x}-x>0$$

ולכן ניתן לבצע כפל בצמוד

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-\sin x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-\sin x}+x)(\sqrt{x^2-\sin x}-x)}{\sqrt{x^2-\sin x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-\sin x})^2-x^2}{\sqrt{x^2-\sin x}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\sin x-x^2}{\sqrt{x^2-\sin x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sin x}{\sqrt{x^2-\sin x}-x}$$

כזכור $\sqrt{x^2-\sin x}-x>0$, ולכן

$$-1\le\sin x\le 1 \quad\Rightarrow\quad -1\le-\sin x\le 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{\sqrt{x^2-\sin x}-x}\le\frac{-\sin x}{\sqrt{x^2-\sin x}-x}\le\frac{1}{\sqrt{x^2-\sin x}-x}$$

ואי שוויון זה תקף לכל $x<-2$, כלומר בסביבה של $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\sqrt{x^2-\sin x}}_{\to\infty}-\underbrace{x}_{\to-\infty}="\infty-(-\infty)"=\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\pm1}{\sqrt{x^2-\sin x}-x}="\frac{\pm1}{\infty}"=0$$

ולפי משפט הסנדוויץ' (גרסה לגבול ב $-\infty$) נקבל כי

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-\sin x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sin x}{\sqrt{x^2-\sin x}-x}=0$$

ה.

עבור $k=0$: צריך לבדוק את הגבול $\lfloor \sin x\rfloor$ $\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor$.

נחשב גבולות חד צדדיים.

גבול ימני : בסביבה ימנית של $x=0$, למשל בסביבה $(0,1)$, מתקיים $0<\sin x<1$ ולכן $\lfloor \sin x\rfloor=0$, ולכן

$$\lim_{x\to0^+}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor=\lim_{x\to0^+}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot0=\lim_{x\to0^+}0=0$$

גבול שמאלי : בסביבה שמאלית של $x=0$, למשל בסביבה $(-\pi,0)$, מתקיים $-1\le\sin x<0$ ולכן $\lfloor \sin x\rfloor=-1$,

$$\lim_{x\to0^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor=\lim_{x\to0^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot(-1)=-\lim_{x\to0^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

נסמן $t=\frac{x}{2}$, ברור ש $\lim_{x\to0^-}t=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{2}=0$, ובסביבה שמאלית של 0, למשל בסביבה $(-1,0)$, מתקיים $t=\frac{x}{2}<0$, ולכן (משפט גבול של הרכבה 4.39, גירסה לגבול שמאלי)

$$\lim_{x\to0^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor=-\lim_{x\to0^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\lim_{t\to0^-}\sin t=-0=0$$

כאן השתמשנו בגבול הידוע $\lim_{x\to0}\sin x=0$, ולכן גם הגבול השמאלי הוא 0 (משפט 4.48).

לסיכום

$$\lim_{x\to0^+}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor=\lim_{x\to0^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor=0$$

ולפיכך $\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor=0$.

עבור $k=1$: צריך לבדוק את הגבול $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor$.

בסביבה נקובה קטנה של $x=\frac{\pi}{2}$, למשל ב $N^*_{\pi/2}(\frac{\pi}{2})$, מתקיים $0<x<\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$, ולכן

$$0<\sin x<1\quad\Rightarrow\quad\lfloor \sin x\rfloor=0\quad\Rightarrow\quad\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor=0$$

ולכן

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}0=0$$

עבור $k=2$: צריך לבדוק את הגבול $\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor \sin x\rfloor$.

$$\lim_{x\to\pi^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor\sin x\rfloor=\lim_{x\to\pi^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\lim_{x\to\pi^-}\lfloor\sin x\rfloor$$

(בהנחה ששני הגבולות באגף ימין אכן קיימים, בהמשך נראה שזה אכן מתקיים).
נחשב את הגבולות החד צדדיים.

בסביבה השמאלית $(\frac{1}{2}\pi,\pi)$ של π מתקיים $0<\sin x<1$ ולכן $\lfloor\sin x\rfloor=0$, ולכן

$$\lim_{x\to\pi^-}\lfloor\sin x\rfloor=\lim_{x\to\pi^-}0=0$$

נחשב הגבול $\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$:

נסמן $t=\frac{x}{2}$, ברור ש $\lim_{x\to\pi}t=\lim_{x\to\pi}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$, ובסביבה נקובה קטנה של π מתקיים $t=\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}$ ולכן (משפט גבול של הרכבה 4.39)

$$\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\sin t=1$$

(זהו גבול ידוע, שאלה 77 ביחידה 4).

ובפרט גם $\lim_{x\to\pi^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pi^+}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=1$ (משפט 4.48).

אם כן,

$$\lim_{x\to\pi^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor\sin x\rfloor=\lim_{x\to\pi^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\lim_{x\to\pi^-}\lfloor\sin x\rfloor=1\cdot0=0$$

בדומה:

$$\lim_{x\to\pi^+}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor\sin x\rfloor=\lim_{x\to\pi^+}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\lim_{x\to\pi^+}\lfloor\sin x\rfloor$$

בסביבה ימנית קטנה של π מתקיים $-1<\sin x<0$ ולכן $\lfloor\sin x\rfloor=-1$, ולכן

$$\lim_{x\to\pi^+}\lfloor\sin x\rfloor=\lim_{x\to\pi^+}(-1)=-1$$

ולכן

$$\lim_{x\to\pi^+}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor\sin x\rfloor=\lim_{x\to\pi^+}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\lim_{x\to\pi^+}\lfloor\sin x\rfloor=1\cdot(-1)=-1$$

לסיכום,

$$\lim_{x\to\pi^-}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor\sin x\rfloor=0\neq-1=\lim_{x\to\pi^+}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor\sin x\rfloor$$

ולפיכך, לפי משפט 4.48, הגבול $\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\lfloor\sin x\rfloor$ אינו קיים.