אלגברה לינארית 1 - 20109

פתרון לממ"ן 13 - 2021ג

שאלה 1

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & z^2 & 2\\ z & (1+i)\overline{z} & 2z\end{pmatrix}$. נמצא את כל הערכים של המספר המרוכב z כך ש- A הפיכה. המטריצה הפיכה אם ורק אם $\det A \neq 0$. לפיכך, נחשב את $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & z^2 & 2\\ z & (1+i)\overline{z} & 2z\end{vmatrix} \underset{R_3\to R_3-zR_1}{\overset{R_2\to R_2-R_1}{=}} \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & z^2 & 1\\ 0 & (1+i)\overline{z} & z\end{vmatrix} = z^3-(1+i)\overline{z}.$$

לכן A הפיכה אם ורק אם $z^3-(1+i)\overline{z}\neq 0$. לפיכך, נפתור את המשוואה $z^3=(1+i)\overline{z}$ (1).

$\underline{z=0}$ הוא פתרון שלה ונניח בהמשך ש- $\underline{z\neq 0}$.

נכפיל את שני האגפים של (1) ב- z ומתקבלת המשוואה $z^4=(1+i)z\overline{z}$ (2), שקולה ל-(1). נשתמש בהצגה הטריגונומטרית $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, כאשר $r\geq 0$ ו- $0\leq\theta\leq 2\pi$. לאחר צמצום ושימוש בנוסחת דה מואבר, יוצא ש-(2) שקולה ל- $r^2(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=1+i$ (3). מאידך, $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$. לכן:

$$(3)\Leftrightarrow r^2(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2=\sqrt{2} \\ 4\theta=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\ , k\in\mathbf{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=\sqrt[4]{2} \\ \theta=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2}\ , k\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

מכאן הנוסחה הכללית של הפתרונות הוא $z_k=\sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}))$, $k\in\mathbf{Z}$

ויש 4 כאלה. לסיכום, יש 5 פתרונות: $0, cis\frac{\pi}{16}, cis\frac{9\pi}{16}, cis\frac{17\pi}{16}, cis\frac{25\pi}{16}$.

לפיכך, המטריצה A הפיכה אם ורק אם $z\notin\left\{0, cis\frac{\pi}{16}, cis\frac{9\pi}{16}, cis\frac{17\pi}{16}, cis\frac{25\pi}{16}\right\}$.

שאלה 2

עבור כל אחת מהקבוצות K,L,M,S עלינו לבדוק האם היא מרחב לינארי ואם כן, למצוא קבוצה פורשת עבורה. נעיר שאם נוכיח שקבוצה היא תת-מרחב של מרחב לינארי ידוע עבור אותן פעולות אז נסיק מכך שהיא מרחב לינארי וכך תוקצר הבדיקה.

- **קבוצה K**: נמצא תת-קבוצה A של המרחב הלינארי $M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ כך ש- $K = Sp(A)$ ואז נסיק ממשפט 7.5.1 ש- K תת- מרחב של $M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ וש- A היא קבוצה פורשת שלו.

  נתבונן באיבר הכללי של K . עבור כל c,b,a ממשיים מתקיים:

$$\begin{pmatrix} a-2c & c+a \\ b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c & c \\ 0 & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  לכן $K = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbf{R} \right\}$,

  במילים אחרות $K = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

  וכאמור, ע״פ משפט 7.5.1 , K תת-מרחב של $M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$, לכן מרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$

  והקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ היא קבוצה פורשת שלו.

  <u>דרך אחרת</u>: נוכיח שהקבוצה K היא תת- מרחב של $M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ בעזרת שימוש במשפט 7.3.2:

  - $K \neq \varnothing$ כי מטריצת האפס, למשל, שייכת לה (כאשר $a=b=c=0$).
  - יהיו $M = \begin{pmatrix} a-2c & c+a \\ b & -c \end{pmatrix}$ ו- $M' = \begin{pmatrix} a'-2c' & c'+a' \\ b' & -c' \end{pmatrix}$, כאשר $a,b,c,a',b',c' \in \mathbf{R}$.

    אז המטריצה $M+M' = \begin{pmatrix} (a+a')-2(c+c') & c+c'+(a+a') \\ b+b' & -(c+c') \end{pmatrix}$ בעלת הצורה המאפיינת את איברי K ולכן K סגורה ביחס לחיבור.
  - נראה שהקבוצה K סגורה ביחס לכפל בסקלר: יהיו λ סקלר ו- $M = \begin{pmatrix} a-2c & c+a \\ b & -c \end{pmatrix}$.

    אז $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda(a-2c) & \lambda(c+a) \\ \lambda b & -\lambda c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a - 2\lambda c & \lambda c + \lambda a \\ \lambda b & -\lambda c \end{pmatrix}$ בעלת הצורה הכללית של איברי K ולכן שייכת ל- K.

- **הקבוצה L** אינה מרחב לינארי כי היא לא מכילה את $(0,0,0)$, וקטור האפס של $\mathbf{R}^3$, שהוא גם וקטור האפס של כל תת-מרחב שלו ע״פ שאלה 7.3.1.
- **הקבוצה M** היא מרחב לינארי: נוכיח שהיא תת-מרחב של $\mathbf{R}_4[x]$ באמצעות משפט 7.3.3 (אפשר גם להסיק זאת ממשפט 7.5.1):

- $M \neq \emptyset$ כי היא מכילה את פולינום האפס שמקיים את התנאים המאפיינים את M.
- יהיו $p(x),q(x)$ פולינומים ב- M ו- λ,λ' ממשיים. אז:

$$(\lambda p+\lambda' q)(1)=\lambda p(1)+\lambda' q(1) \overset{\underset{\downarrow}{p,q\in M}}{=} \lambda p(-1)+\lambda' q(-1)=(\lambda p+\lambda' q)(-1)$$

באופן דומה מראים שמתקיים $(\lambda p+\lambda' q)(1)=(\lambda p+\lambda' q)(0)$. לכן $\lambda p+\lambda' q\in M$.

לסיכום, M תת-מרחב של $\mathbf{R}_4[x]$.

כעת נמצא קבוצה פורשת עבור M.

יהי $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ פולינום ב- M. אז: $p(-1)=p(1)=p(0)$ שקול

למערכת: $\begin{cases} a+b+c+d=d \\ -a+b-c+d=d \end{cases}$, כלומר $\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+b-c=0 \end{cases}$.

מכך נובע ש- $b=0$ ו- $c=-a$ ו- d,a חופשיים. לכן הצורה הכללית של פולינום ב- M

היא $p(x)=a(x^3-x)+d$, כאשר d,a ממשיים כלשהם. לכן $M=Sp(\{x^3-x,1\})$.

- **הקבוצה S** אינה מרחב לינארי כי היא לא מכילה את פונקציית האפס.

שאלה 3

תהי $A=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ קבוצת וקטורים במרחב לינארי V. נתון ש- $v_1\notin Sp\{v_2,\dots,v_n\}$ וגם ש- $v_1+v_n\in Sp\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$. נוכיח שהקבוצה $\{v_2,\dots,v_n\}$ תלויה לינארית.

מהנתון $v_1+v_n\in Sp\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$, נובע שקיימים סקלרים $c_1,\dots,c_{n-1}$ כך ש-

$v_1+v_n=c_1v_1+\dots+c_{n-1}v_{n-1}$ ולכן $v_1(1-c_1)=c_2v_2+\dots+c_{n-1}v_{n-1}-v_n$ **(*)**.

אם $c_1\neq 1$ אז $v_1=\dfrac{1}{1-c_1}\left(c_2v_2+\dots+c_{n-1}v_{n-1}-v_n\right)$ מה שסותר ש- $v_1\notin Sp\{v_2,\dots,v_n\}$.

לכן $c_1=1$. נציב ב-(*) ומתקבל $c_2v_2+\dots+c_{n-1}v_{n-1}-v_n=0$, זהו צרוף לינארי לא טריוויאלי של $v_2,\dots,v_n$ השווה ל- $\underline{0}$. לכן הקבוצה $\{v_2,\dots,v_n\}$ תלויה לינארית.

שאלה 4

נתונות הפונקציות $f_1,f_2,f_3:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ המוגדרות ע"י $f_1(x)=2\sin x-1$, $f_2(x)=x^2\cos x$ ו- $f_3(x)=x-\cos^2 x$. למציאת המימד של $U=Sp\{f_1,f_2,f_3\}$, נבדוק את התלות הלינארית של הקבוצה $\{f_1,f_2,f_3\}$. נניח שמתקיים $\lambda_1 f+\lambda_2 g+\lambda_3 h=0$ **(*)**, כאשר $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}$, כלומר הפונקציה בצד שמאל של השוויון שווה לפונקציית האפס. לפיכך, **לכל** $x\in\mathbf{R}$ מתקיים:

$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)+\lambda_3 h(x)=0$, או $\lambda_1(2\sin x-1)+\lambda_2 x^2\cos x+\lambda_3(x-\cos^2 x)=0$ **(**)**.

מאחר ו-(**) מתקיים לכל $x \in \mathbf{R}$, ניתן להציב ב-(**) ערכים שונים של x ומתקבלים תנאים הכרחיים שמקיימים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$x = 0 \quad \Leftarrow \quad -\lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

$$x = \pi \quad \Leftarrow \quad \lambda_1 + \frac{\pi}{2}\lambda_3 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \Leftarrow \quad -\lambda_1 - \lambda_2 - \pi\lambda_3 = 0 .$$

מתקבל בקלות ש- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. לכן הקבוצה $\{f_1, f_2, f_3\}$ בלתי תלויה לינארית. היא גם פורשת את המרחב $Sp\{f_1, f_2, f_3\}$, לכן היא בסיס שלו ו- $\dim U = 3$.

שאלה 5

א. <u>מציאת בסיס ל- U</u>:

נסמן $U = Sp\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. נבדוק האם הקבוצה הפורשת $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ היא בלתי תלויה לינארית. נסמן ב- B את הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}(\mathbf{R})$. ע״פ משפט 8.4.4, הקבוצה $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ בת״ל אם ורק אם הקבוצה $\{[A_1]_B, [A_2]_B, [A_3]_B, [A_4]_B\}$ בת״ל ב- $\mathbf{R}^4$. לכן, נדרג את המטריצה ששורותיה הן $[A_1]_B, [A_2]_B$, $[A_3]_B$ ו- $[A_4]_B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}}{\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{R_4 \to R_4 - 4R_2}{\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - \frac{3}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נובע מכך שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$ בת״ל. מצד שני, קבוצה זו גם פורשת את U מפני שמרחב השורות של המטריצה A נשמר לאחר דרוג ולכן לאחר חזרה למרחב U מתקבלת קבוצה פורשת שלו.

לסיכום הקבוצה $B_U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס ל- U.

<u>מציאת בסיס ל- W</u>:

שתי המטריצות הפורשות את U אינן פרופורציונליות ולכן הן בלתי תלויות לינארית. לכן הקבוצה הפורשת $B_W = \left\{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס ל- W ו- $\dim W = 2$.

<u>מציאת בסיס ל- $U+W$</u> :

ע"פ שאלה 7.6.8, אם S, T תת-קבוצות לא ריקות של מרחב לינארי V, אז מתקיים : $Sp(T)+Sp(S)=Sp(T\cup S)$. נפעיל את הטענה הזאת על U ו- W שמוגדרים כ- Sp של קבוצות מטריצות ונקבל :

$$U+W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}\right\}.$$

נראה שהקבוצה שפורשת את $U+W$ גם בלתי תלויה לינארית. נבדוק זאת כמו קודם, ע"י המרה למרחב $\mathbf{R}^4$: נדרג את המטריצה ששורותיה הן וקטורי הקואורדינטות (לפי הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}(\mathbf{R})$) של חמש המטריצות הפורשות את $U+W$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&-3\\2&1&0&-1\\4&2&1&0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

נובע מכך ש- $\dim(U+W)=4=\dim M_{2\times2}(\mathbf{R})$ ולכן $U+W=M_{2\times2}(\mathbf{R})$ (משפט 8.3.4).

ניתן לבחור את הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}(\mathbf{R})$ כבסיס ל- $U+W$.

<u>מציאת בסיס</u> ל- $U\cap W$:

ע"פ משפט המימד, מתקיים :

$$\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W)=3+2-4=1.$$

מצד שני, מתקיים $v=\begin{pmatrix}4&2\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, לכן המטריצה v משותפת ל-U ול- W

ולכן $Sp\left\{\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}\subseteq U\cap W$. מאחר ויש אותו מימד לשני תת-המרחבים , מתקיים השוויון

$U\cap W=Sp\left\{\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$, שוב לפי משפט 8.3.4.

ג. נוסיף לבסיס של W את המטריצות E_{12},E_{22} של הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}(\mathbf{R})$. הקורא יבדוק שמתקבל בסיס ל-$M_{2\times2}(\mathbf{R})$ (למשל ע"י דרוג המטריצה ששורותיה הן וקטורי הקואורדינטות של ארבע המטריצות האלה לפי לבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}(\mathbf{R})$). נגדיר $T=Sp\{E_{12},E_{22}\}$. אז $\dim T=2$ (מדוע?). התת-מרחב $W+T$ נפרש על- ידי האיחוד של הבסיסים של W ו- T, שהוא בסיס של $M_{2\times2}(\mathbf{R})$ ולכן מתקיים $W+T=M_{2\times2}(\mathbf{R})$. יתר על כן, $\dim W+\dim T=4=\dim M_{2\times2}(\mathbf{R})$. לכן $M_{2\times2}(\mathbf{R})=W\oplus T$ (מסקנה 8.3.7).

שאלה 6

נתונות A,B מטריצות מסדר 3×3 כך ש- $\rho(A)+\rho(B)>3$. נניח, דרך השלילה, שכל עמודה ב- B פותרת את המשוואה $A\underline{x}=\underline{0}$. אז מרחב העמודות W_B של B מוכל במרחב הפתרונות $P(A)$ של המערכת $A\underline{x}=\underline{0}$ ולכן $\dim W_B \le \dim P(A)$ (*). מאידך, ידוע ש- $\dim W_B=\rho(B)$ וגם $\dim P(A)=3-\rho(A)$, לכן מ-(*) נובע ש- $\rho(B)\le 3-\rho(A)$, או $\rho(A)+\rho(B)\le 3$. זו סתירה לנתון $\rho(A)+\rho(B)>3$. לכן קיימת עמודה ב- B שלא פותרת את המשוואה $A\underline{x}=\underline{0}$.