אלגברה לינארית 1 - (20109)

פתרון לממ"ן 15 – 2021ג

שאלה 1

א. נחשב את הפולינום האופייני של A :

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & 4 \\ -1 & t-1 & 2 \\ -2 & 0 & t+3 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-3 & 4 \\ -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t-1)(t^2-1) = (t-1)^2(t+1)$$

לכן יש למטריצה A שני ערכים עצמיים , $\lambda_1 = 1$ עם ריבוב אלגברי 2 ו- $\lambda_2 = -1$ עם ריבוב אלגברי 1. המטריצה A לכסינה אם ורק אם הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים (מתקיים כאן) ועבור כל ערך עצמי שלה הריבוב האלגברי שווה לריבוב הגיאומטרי. תנאי זה מתקיים עבור λ_2 מפני שהריבוב הגיאומטרי הוא תמיד גדול או שווה ל-1 וגם קטן או שווה לריבוב האלגברי. נחשב עתה את הריבוב הגיאומטרי של $\lambda_1 = 1$: הוא שווה למימד המרחב העצמי V_{λ_1} ומרחב זה הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $(\lambda_1 I - A)\underline{x} = 0$. המטריצה $I - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ שקולת שורות למטריצה $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ומטריצה זו מדרגה 1. לכן הריבוב הגיאומטרי של λ_1 שווה ל- $3 - \rho(I - A) = 2$ והוא שווה לריבוב האלגברי שלו. הוכחנו שתנאי הלכסינות מתקיימים, לכן A לכסינה ודומה למטריצה $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

נחשב עתה את המטריצה P. ידוע שהמטריצה P היא מטריצת מעבר מהבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^3$ לבסיס מורכב מווקטורים עצמיים $B = (u_1, u_2, u_3)$, כאשר הווקטורים u_1, u_2 מתאימים לערך עצמי 1 והווקטור u_3 לערך עצמי -1. אם כן, נמצא בסיס לכל אחד מהמרחבים העצמיים. בסיס ל- V_{λ_1} מתקבל מהמטריצה C (כי V_{λ_1} הוא מרחב הפתרונות של המערכת $(I - A)x = 0$ ו- C שקולת שורות ל- $I - A$). כך יוצא כי $B_1 = \{(2,0,1),(0,1,0)\}$ בסיס ל- V_{λ_1} . נמצא כעת את המרחב העצמי V_{λ_2} השייך ל- $\lambda_2 = -1$. מרחב זה הוא מרחב הפתרונות של המערכת $(-I - A)x = 0$ והחישוב נותן ש- $B_2 = \{(2,1,2)\}$ בסיס ל- V_{λ_2}.

איחוד הבסיסים $B = B_1 \cup B_2 = ((2,0,1),(0,1,0),(2,1,2))$ הוא בסיס של $\mathbf{R}^3$ המורכב

מווקטורים עצמיים וממנו מתקבלת המטריצה $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ב. המטריצה A מסעיף א׳ היא מטריצת הייצוג של ההעתקה T ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^3$. מכיוון שהמטריצה A לכסינה, גם ההעתקה T לכסינה (משפט 11.3.5) והמטריצה D מייצגת את T ביחס לבסיס B. לכן מתקיים $D = [T]_B = P^{-1}AP = P^{-1}[T]_E P$ ולכן $[T]_E = PDP^{-1}$.

מצד שני, לפי משפט 10.4.1 מתקיים $[T^{2020}]_E = [T]_E^{2020}$. מכאן:

$$[T^{2020}]_E = [T]_E^{2020} = (PDP^{-1})^{2020} = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1}) = PD^{2020}P^{-1}$$

ברור כי $D^{2020} = I$, לכן $[T^{2020}]_E = I^{2020} = I$ ולכן $T^{2020} = I_{\mathbf{R}^3}$, כאשר $I_{\mathbf{R}^3}$ מסמן את העתקת הזהות של $\mathbf{R}^3$.

שאלה 2

בשאלה זו, נשתמש במשפט 11.3.5, לפיו T לכסינה אם ורק אם מטריצה שמייצגת אותה לפי בסיס כלשהו לכסינה. מהנתונים $T(1,1,0) = (-5,-5,0)$ ו- $T(1,1,1) = (2,2,2)$ נובע שהווקטור $v_1 = (1,1,0)$ הוא וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי -5 והווקטור $v_2 = (1,1,1)$ וקטור עצמי של T השייך לערך העצמי 2.

למציאת כל הערכים העצמיים, נחשב את המטריצה של T ביחס לבסיס שמתאים לנתונים. נסמן $v_3 = (1,-1,0)$. הווקטורים v_1, v_2, v_3 בלתי תלויים לינארית (בדיקה סטנדרטית), לכן (v_1, v_2, v_3) הוא בסיס ל-$\mathbf{R}^3$. נמצא את הקואורדינטות (α,β,γ) של $T(v_3)$ ביחס לבסיס B. ע״פ הגדרתן הן מקיימות $T(v_3) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ ולכן (α,β,γ) הוא הפתרון של המערכת ההומוגנית שמטריצת המקדמים שלה היא $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-4 \\ 1 & 1 & -1 & a+6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$. מהחישוב יוצא כי

$\begin{pmatrix} a+1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = [T(v_3)]_B$ ולכן $[T]_B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ והפולינום האופייני של T הוא

$p_T(t) = (t+5)^2(t-2)$. מכך נובע כי הערכים העצמיים של T הם 2 ו- -5. משיקול זהה לזה בשאלה 1, מתקבל שהריבוב הגיאומטרי של 2 שווה לריבוב האלגברי שלו. נבדוק מהו הריבוב הגיאומטרי של -5: זהו המימד של מרחב הפתרונות של $(-5I - [T]_B)x = 0$. נדרג את מטריצת המקדמים:

$$(-5I-[T]_B)=\begin{pmatrix}0&0&-a-1\\0&-7&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-a-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

אם $a=-1$, אז $\rho(-5I-[T]_B)=1$ והריבוב הגיאומטרי של -5 שווה ל-2 ו- T לכסינה.

אם $a\neq-1$, אז $\rho(-5I-[T]_B)=2$ והריבוב הגיאומטרי של -5 שווה ל-1 ו- T אינה לכסינה.

לסיכום, T לכסינה אם ורק אם $a=-1$.

שאלה 3

תהי $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ טרנספורמציה לינארית המקיימת $T(1,2,3)=(-2,-4,-6)$ וגם $\dim\operatorname{Im}T<\dim\ker T$. ההעתקה הלינארית $T-2I$ איזומורפיזם אם ורק אם $\ker(T-2I)=\{\mathbf{0}\}$, כלומר אם ורק אם לא קיים וקטור $v\in\mathbf{R}^3$, $v\neq\mathbf{0}$ המקיים $T(v)=2v$. במילים אחרות, $T-2I$ איזומורפיזם אם ורק אם 2 אינו ערך עצמי של T.

לפיכך, נחשב את הערכים העצמיים של T.

מהנתון $T(1,2,3)=(-2,-4,-6)$ נובע ש- $\lambda=-2$ הוא ערך עצמי של T והווקטור $(1,2,3)$ הוא וקטור עצמי השייך לו. מהנתון השני $\dim\operatorname{Im}T<\dim\ker T$ וממשפט המימד הטוען ש- $\dim\operatorname{Im}T+\dim\ker T=\dim\mathbf{R}^3=3$ מתקבל ש-1 או $\dim\operatorname{Im}T=0$.

אם $\dim\operatorname{Im}T=0$ אז $T=0$, וזה סותר את הנתון הראשון. לכן $\dim\operatorname{Im}T=1$ ו- $\dim\ker T=2$, בפרט $\ker T\neq\{\mathbf{0}\}$. נובע מכך ש- 0 הוא ערך עצמי של T (כי יש וקטור $v\in\mathbf{R}^3$, $v\neq\mathbf{0}$ כך ש- $T(v)=0v=\mathbf{0}$) ו- $\ker T$ הוא המרחב העצמי שלו. לפיכך, הריבוב הגיאומטרי של $\lambda=0$ הוא 2 ומכיוון שסכום כל הריבובים הגיאומטריים לא עולה על 3, מתקבל שהריבוב הגיאומטרי של הערך העצמי $\lambda=-2$ הוא 1 ואין ערך עצמי נוסף. לסיכום, הערכים העצמיים של T הם 0 ו- 2- ו- 2 אינו ערך עצמי של T. לפי הדיון בתחילת השאלה, ההעתקה $T-2I$ היא איזומורפיזם.

שאלה 4

מכיוון ש- A אינה הפיכה ($\rho(A)<5$), 0 הוא ערך עצמי של A (שאלה 11.3.1) ומהנתון $\rho(A)=1$ נובע שהריבוב הגיאומטרי של $\lambda=0$ שווה ל-4 (מדוע?). נסיק מכך שהריבוב האלגברי של $\lambda=0$ הוא לפחות 4 (משפט 11.5.3), ומכיוון שהפולינום האופייני של A הוא פולינום מתוקן ממעלה 5 (שאלה 11.4.5) הוא מהצורה $p_A(t)=t^4(t+\alpha)$. נסיק משאלה 11.4.6 ש- $p_A(t)=t^4(t-2)$ ולפיכך למטריצה A יש 2 ערכים עצמיים, 0 עם ריבוי אלגברי 4 ו- 2 עם ריבוי אלגברי 1.

ידוע שהריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי הוא גדול או שווה ל-1 וגם שהוא קטן או שווה לריבוי הגיאומטרי שלו. לכן, הריבוי הגיאומטרי של 2 הוא גם 1. לסיכום, הוכחנו שעבור כל ערך עצמי הריבויים שווים וגם שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים. לכן, לפי משפט 11.5.4 המטריצה A לכסינה.

שאלה 5

א. וקטור $v=(x,y,z,t)$ ב- $\mathbf{R}^4$ שייך למשלים האורתוגונלי של W אם ורק אם $v\bullet(1,-1,-1,1)=0$, זאת אומרת $x-y-z+t=0$. פותרים את המשוואה ומתקבל:

$W^{\perp}=Sp\{(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$.

נבנה בסיס אורתונורמלי ל- $W^{\perp}$ בעזרת התהליך של גרם-שמידט מופעל על הבסיס $\{u_1=(1,0,0,-1),u_2=(0,1,0,1),u_3=(0,0,1,1)\}$ של $W^{\perp}$.

לפי הנוסחה שמופיעה בעמוד 267 בכרך ב', נגדיר:

$u_1^*=(1,0,0,-1)$, $u_2^*=(0,1,0,1)+\frac{1}{2}(1,0,0,-1)=(\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{2})$

$u_3^*=(0,0,1,1)+\frac{1}{2}(1,0,0,-1)-\frac{1}{3}(\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{2})=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1,\frac{1}{3})$.

מוודאים שהוקטורים u_1^*,u_2^*,u_3^* אכן אורתוגונליים זה לזה ומנרמלים אותם:

נגדיר $u_i^{'}=\frac{u_i^*}{\|u_i^*\|}$ עבור $i=1,2,3$ ומכך ש- $\|u_1^*\|=\sqrt{2}$, $\|u_2^*\|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\|u_3^*\|=\frac{2}{\sqrt{3}}$, יוצא כי

$u_1^{'}=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $u_2^{'}=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0,\frac{1}{\sqrt{6}})$, $u_3^{'}=(\frac{1}{\sqrt{12}},-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}})$.

הקבוצה $\{u_1^{'},u_2^{'},u_3^{'}\}$ היא בסיס אורתונורמלי של $W^{\perp}$.

ב. יהי u ההיטל האורתוגונלי של הוקטור $v=(1,0,1,1)$ על W. מכיוון ש- $u\in W$, ניתן לרשום $u=(a,-a,-a,a)$, כאשר a סקלר. מאידך, הוקטור $u-v$ אורתוגונלי ל- W, לכן $(u-v)\bullet(1,-1,-1,1)=0$ ומכך יוצא כי $a=\frac{1}{4}$ וההיטל האורתוגונלי של v על W הוא $u=(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

שאלה 6

יהיו $u,v\in\mathbf{R}^n$ שונים מ- $\mathbf{0}$, $u\neq v$, המקיימים $\{u,v\}^{\perp}=\{u\}^{\perp}$ ונוכיח שהקבוצה $\{u,v\}$ תלויה לינארית. מהנתון נסיק מיד ש- $\{u,v\}^{\perp\perp}=\{u\}^{\perp\perp}$, ומהערה ב' עמ' 248 מתקבל ש- $\left((Sp\{u,v\})^{\perp}\right)^{\perp}=\left((Sp\{u\})^{\perp}\right)^{\perp}$ ולכן $Sp\{u,v\}=Sp\{u\}$ ע"פ משפט 12.3.2. מאחר ו- $u\neq\mathbf{0}$, הקבוצה $\{u\}$ בלתי תלויה לינארית, לכן היא בסיס ל- $Sp\{u\}$ ו- $\dim Sp\{u\}=1$ וגם $\dim Sp\{u,v\}=1$. נובע מכך שהקבוצה $\{u,v\}$ תלויה לינארית כי מכילה יותר מוקטור אחד.