אינפי 1 סמסטר 2022ג – פתרון חלקי לממ״ח 02

שאלה 1

1. נכון.

מאריתמטיקה של גבולות אינסופיים (משפט 2.43)

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = "\infty + 0" = \infty$$

ומטענה 2.39 נקבל

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} -(b_n - a_n) = -\infty$$

2. נכון.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = "\frac{1}{\infty}" = 0$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = 0\cdot 0 = 0$$

שאלה 2

1. לא נכון.

דוגמה נגדית: $b_n = \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, $a_n = n$.

אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ו $(-1)^n$ סדרה חסומה, ולפי הטענה 'חסומה כפול אפסה' (משפט 2.22), $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

אבל

$$c_n = \frac{a_n}{b_n} = (-1)^n n^2 = \begin{cases} -n^2 & n \text{ odd} \\ n^2 & n \text{ even} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} -(2n-1)^2 = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n} = \lim_{n\to\infty}(2n)^2 = \infty$$

וממשפט 3.25 נובע שהסדרה (c_n) אינה מתכנסת לשום גבול (סופי או אינסופי), ובפרט לא שואפת ל ∞ ולא שואפת ל $-\infty$.

2. לא נכון.

דוגמה נגדית: אותה הדוגמה הנגדית מסעיף 1.

כאמור $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אבל $a_n b_n = (-1)^n$ ולסדרה זו אין גבול במובן הרחב (דוגמה 2.22).

שאלה 3

1. לא נכון.

לכל $n > 3$ מתקיים

$$0 < \frac{3}{n} < 1 \quad\Rightarrow\quad \left\lfloor \frac{3}{n} \right\rfloor = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{n}{2}\left\lfloor \frac{3}{n} \right\rfloor = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\lfloor \frac{3}{n} \right\rfloor = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

2. נכון.

לכל n טבעי מתקיים, לפי תכונות החלק השלם,

$$\frac{n}{3}-1<\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\le\frac{n}{3}$$

נכפול אי השוויון ב $\frac{2}{n}$ החיובי ונקבל

$$\frac{2}{n}\left(\frac{n}{3}-1\right)<\frac{2}{n}\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\le\frac{2}{n}\cdot\frac{n}{3}\quad\Rightarrow\quad\frac{2}{3}-\frac{2}{n}<\frac{2}{n}\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\le\frac{2}{3}$$

כעת

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\quad,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}-\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$$

וממשפט הסנדוויץ' נסיק ש

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor=\frac{2}{3}$$

<u>שאלה 4</u>

1. נכון.

כמעט לכל n מתקיים $\sqrt[n]{a_n}>c$, ולכן (שאלה 33 ביחידה 1)

$$(\sqrt[n]{a_n})^n>c^n\quad\Rightarrow\quad a_n>c^n$$

$c>1$ ולכן משאלה 41 ביחידה 2, $\lim\limits_{n\to\infty}c^n=\infty$, ומקריטריון ההשוואה לגבולות אינסופיים (משפט 2.45) נקבל כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

2. לא נכון.

דוגמה נגדית: $a_n=n$.

אז כמובן ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$. אבל לא נכון שקיים $c>1$ כך שכמעט לכל n $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{n}>c$.

נראה זאת.

נניח בשלילה שקיים $c>1$ כך שכמעט לכל n $\sqrt[n]{n}>c$, אז לפי משפט 2.31 נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\ge\lim_{n\to\infty}c=c\quad\Rightarrow\quad 1\ge c$$

וקיבלנו סתירה. ולכן לא קיים c שכזה.

הסבר אחר:

הטענה קיים $c>1$ כך שכמעט לכל n $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{n}>c$ משמעה: קיים $c>1$ כך שקיים N טבעי כך שלכל $n>N$, $\sqrt[n]{n}>c$.

שלילת הטענה היא: לכל $c>1$ ולכל N טבעי כך קיים $n>N$ כך ש $\sqrt[n]{n}\le c$. נוכיח שזה המצב.

ידוע (טענה 2.35) ש $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

יהי $c>1$, נסמן $\varepsilon=c-1>0$. מהגדרת הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ נובע שקיים M טבעי כך שלכל $n>M$ מתקיים

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon\quad\Rightarrow\quad-\varepsilon<\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon\quad\Rightarrow\quad\sqrt[n]{n}<\varepsilon+1=c$$

יהי N טבעי. נבחר $n>\max\{N,M\}$, ואז $n>N$ כנדרש, וגם $n>M$ ולכן $\sqrt[n]{n}<c$.

<u>שאלה 5</u>

1. נכון.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = "\frac{1}{\infty}" = 0$.

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(a_n+b_n)-a_n}{a_n} = \frac{a_n+b_n}{a_n} - 1 = (a_n+b_n)\cdot\frac{1}{a_n} - 1$$

(a_n+b_n) חסומה ו $\frac{1}{a_n}$ אפסה ולכן

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\cdot\frac{1}{a_n} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\cdot\frac{1}{a_n} - 1 = 0-1 = -1$$

2. לא נכון.

דוגמה נגדית: $a_n = \begin{cases} n & n \text{ odd} \\ n^2 & n \text{ even}\end{cases}$.

לכל n זוגי $a_n = n^2 \geq n$ ולכן לכל n טבעי $a_n \geq n$, ולפי קריטריון ההשוואה לגבולות אינסופיים $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ כנדרש.

הטענה קיים $M>0$ כך שכמעט לכל n $a_{n+1} \geq Ma_n$ משמעה: קיים $M>0$ כך שקיים N טבעי כך שלכל $n>N$, $a_{n+1} \geq Ma_n$.

שלילת הטענה היא: לכל $M>0$ ולכל N טבעי כך קיים $n>N$ כך ש $a_{n+1} < Ma_n$ כלומר $\frac{a_{n+1}}{a_n} < M$. נוכיח שזה המצב.

לכל n זוגי

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

לכל $M>0$ קיים, לפי תכונת ארכימדס, מספר טבעי k כך ש $k > \frac{2}{M}$.

יהי N טבעי כלשהו, נבחר n זוגי הגדול מ N ומ k, למשל $n = 2\max\{N,k\}$ (השלימו את הפרטים – n זוגי, $n>N$, $n>k$).

ולכן $n>N$ כנדרש, וגם $n>k>\frac{2}{M}$ ו n זוגי ולכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{2}{n} < \frac{2}{\frac{2}{M}} = M$.

הסבר אחר:

תת הסדרה $\left(\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right)$ של $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ מקיימת לכל n

$$0 < \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} < \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$

ולפי משפט הסנדוויץ׳ (השלימו הפרטים החסרים) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 0$.

יהי $M>0$, אז מהגדרת הגבול (נבחר את ε של הגדרת הגבול להיות $\varepsilon = M$) קיים K טבעי כך שלכל $n>K$ מתקיים

$$\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}-0\right|<M \quad\Rightarrow\quad -M<\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}<M \quad\Rightarrow\quad a_{2n+1}<Ma_{2n}$$

(כפלנו ב a_{2n} החיובי).

יהי N טבעי כלשהו, נבחר $n>\max\{N,K\}$, ואז $n>K$ ולכן $a_{2n+1}<Ma_{2n}$. כמו כן $n>N$ ולכן $2n>n>N$, והוכחנו שקיים m ($m=2n$) כך ש $m>N$ ו $a_{m+1}<Ma_m$ כנדרש.

<u>שאלה 6</u>

1. נכון.

נניח בשלילה שקיים k טבעי כך ש $a_k\le 0$. הסדרה יורדת ממש ולכן

$$a_{k+1}<a_k\le 0 \quad\Rightarrow\quad a_{k+1}<0$$

ולכל $n>k$ מתקיים $n\ge k+1$ ולכן $a_n\le a_{k+1}$.

לפי משפט 2.31 מתקבל $0=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le a_{k+1}<0$ והתקבלה סתירה.

2. לא נכון.

דוגמה נגדית: $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & n \text{ odd}\\ \frac{1}{2n} & n \text{ even}\end{cases}$. הסדרה (a_n) כמובן חיובית.

לכל n מתקיים $0<a_n\le\frac{1}{n}$ (פרטו) וממשפט הסנדוויץ' (השלימו הפרטים) מתקבל $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

כלומר הסדרה (a_n) אפסה.

אבל לכל n זוגי מתקיים

$$a_n=\frac{1}{2n}\ ,\ a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\ ,\ n+1\le n+n=2n \quad\Rightarrow\quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\ge\frac{1}{2n}=a_n$$

אילו בשלילה היה קיים N טבעי כך שהסדרה (a_{N+n}) יורדת, אז לכל n טבעי היה מתקיים

$$a_{N+n+1}<a_{N+n}$$

ובפרט זה היה מתקיים ל n ים עבורם $N+n$ זוגי, סתירה.

<u>שאלה 7</u>

1. נכון.

נוכיח באנידוקציה שלכל n טבעי, a_n קיים ו $a_n>0$.

עבור $n=1$, נתון כי a_1 קיים ו $a_1=1$ ולכן מתקיים $a_1>0$.

נניח כי a_n קיים ו $a_n>0$. אז $2+a_n>0$ ולכן $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ קיים, וכמו כן

$$2+a_n>0 \quad\Rightarrow\quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}>0$$

וקיבלנו ש a_n קיים לכל n כלומר הסדרה (a_n) מוגדרת היטב.

2. נכון.

$a_2=\sqrt{2+a_1}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$.

נוכיח באינדוקציה שלכל n, $a_{n+1}>a_n$.

עבור $n=1$, $a_2=\sqrt{3}>1=a_1$.

נניח כי $a_{n+1} > a_n$, אז

$$a_{n+1} > a_n \quad \Rightarrow \quad 2+a_{n+1} > 2+a_n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2+a_{n+1}} > \sqrt{2+a_n} \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} > a_{n+1}$$

וקיבלנו שהסדרה (a_n) עולה ממש, ולפי משפט 3.18 היא מתכנסת במובן הרחב.

הערה: ניתן להוכיח שהסדרה חסומה ולכן מתכנסת (משפט 3.16).

<u>שאלה 8</u>

1. לא נכון.

דוגמה נגדית: $a_n = \begin{cases} 1 & n = 2^k, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$, כלומר האיברים ה $2,4,8,16,\ldots$ בסדרה הם 1 ושאר האיברים הם 0.

אם n הוא מהצורה $n = 2^k$ עבור k טבעי, אז $2n = 2^{k+1}$, ולכן

$$a_{2n} = a_n = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{2n} - a_n = 0$$

אם n אינו מהצורה $n = 2^k$ עבור k טבעי, אז לא קיים k טבעי כך ש $2n$ מצורה 2^k ולכן

$$a_{2n} = a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{2n} - a_n = 0$$

לסיכום לכל n, $a_{2n} - a_n = 0$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} - a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

אבל (a_n) אינה מתכנסת.

(a_{2n-1}) היא תת סדרה של (a_n) (האיברים באינדקסים האי-זוגיים), כל מספר אי-זוגי אינו מהצורה $n = 2^k$ עבור k טבעי ולכן $a_{2n-1} = 0$, ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

הסדרה $n_k = 2^k$ היא סדרה עולה ממש של אינדקסים טבעיים, כי לכל k טבעי 2^k הוא מספר טבעי וכמו כן $n_{k+1} = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2^k = n_k$, כלומר $(a_{n_k}) = (a_{2^k})$ היא תת סדרה של (a_n).

אבל כל אברי תת סדרה זו שווים ל 1 ולכן $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2^k} = \lim\limits_{k\to\infty} 1 = 1$.

ממשפט 3.25 נסיק שהסדרה (a_n) אינה מתכנסת.

2. נכון.

נסמן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. (a_{2n}) היא תת סדרה של (a_n) (האיברים באינדקסים הזוגיים), ולפי משפט 3.25 גם $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = L$, ולפיכך

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} - a_n = L - L = 0$$

<u>שאלה 9</u>

1. נכון.

נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = M$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = L$.

נתבונן בתת הסדרה (a_{6n}).

$6n = 2 \cdot 3n$, כלומר $(a_{6n}) = (a_{2\cdot 3n})$ היא תת סדרה של (a_{2n}) (תת סדרה באינדקסים $n_k = 3k$), ולפי משפט 3.25, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{6n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = L$.

$6n = 3 \cdot 2n$, כלומר $(a_{6n}) = (a_{3\cdot 2n})$ היא תת סדרה של (a_{3n}) (תת סדרה באינדקסים $n_k = 2k$), ולפי משפט 3.25, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{6n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = M$.

מיחידות הגבול נסיק כי $L = M$.

2. נכון.

אם (a_n) מתכנסת אז לפי משפט 3.25 כל תת סדרה שלה מתכנסת, ובפרט תת הסדרות (a_{2n}), (a_{2n-1}), (a_{3n}) מתכנסות.

הכוון השני: אם (a_{2n}), (a_{2n-1}), (a_{3n}) מתכנסות, אז מסעיף א' $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{3n}$, נסמן ערך הגבול ב L.

נתבונן בתת הסדרה $(a_{3(2n-1)})$.

זו תת סדרה של (a_{3n}) (תת סדרה באינדקסים $n_k = 2k-1$) ולכן לפי משפט 3.25 גבולה הוא L.

$3(2n-1) = 6n-3 = 2(3n-1)-1$ ולכן זו תת סדרה של (a_{2n-1}) (תת סדרה באינדקסים $n_k = 3k-1$, זו סדרה עולה ממש של אינדקסים טבעיים – השלימו), ולפי משפט 3.25 $\lim_{n\to\infty} a_{3(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$, ולכן גם $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = L$.

(a_{2n-1}), (a_{2n}) מכסות את (a_n) ומתכנסות לאותו גבול L, ולפי משפט 3.31 נובע שגם (a_n) מתכנסת (ל L).

<u>שאלה 10</u>

1. נכון.

טענה: אם קבוצה A צפופה בקטע I כלשהו, אז לכל $x, y \in I$ כך ש $x < y$ יש אינסוף איברים של A בקטע (x, y).

הוכחת הטענה זהה לתשובה לשאלה 57 ביחידה 1.

נסמן $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. נתון ש A צפופה ב I.

יהי $L \in I = (a,b)$. לכל $0 < \varepsilon < L-a$, אז $a < L-\varepsilon < L$, כלומר $L-\varepsilon, L \in I$ ו $L-\varepsilon < L$.

מטענת העזר קיימים בקטע $(L-\varepsilon, L)$ אינסוף איברים של A, כלומר ישנם אינסוף איברים של הסדרה (a_n) המקיימים

$$L-\varepsilon < a_n < L \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

ולפי אפיון גבולות חלקיים (משפט 3.27) נובע ש L גבול חלקי של (a_n).

2. נכון.

ראשית, b הוא גבול חלקי של (a_n). ההוכחה זהה להוכחה בסעיף 1:

מצפיפות קבוצת אברי הסדרה בקטע (a,b), עבור כל $0 < \varepsilon < b-a$ בקטע $(b-\varepsilon, b)$ יש אינסוף איברים של הסדרה (a_n), וממשפט 3.27 מתקבל המבוקש.

מהנתון $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq I = (a,b)$ נובע שלכל n מתקיים $a_n < b$.

מתכונות הגבול העליון (משפט 3.43, סעיף 5) נובע $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} b$. הסדרה (b) היא סדרה קבועה ולכן מתכנסת, ולכן (דוגמה 3.13) $\overline{\lim_{n\to\infty}} b = \lim_{n\to\infty} b = b$, וקיבלנו $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \le b$.

ולפיכך b הוא גבול חלקי המקסימלי של (a_n), כלומר $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = b$.