אינפי 1 סמסטר 2022ג – פתרון ממ"ן 16

שאלה 1

א.

$$\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \overset{(1)}{=} \left[\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n^2}}}\right]^{\sin\frac{1}{n^2}\cdot n^2} = \left[\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n^2}}}\right]^{n^2\sin\frac{1}{n^2}}$$

(1) לכל n טבעי $0<\frac{1}{n^2}\le 1<\frac{\pi}{2}$ ולכן $0<\sin\frac{1}{n^2}<1$ ובפרט $\sin\frac{1}{n^2}\neq 0$.

נסמן:

$$a_n=\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n^2}}} \quad , \quad b_n=n^2\sin\frac{1}{n^2}$$

כלומר הגבול המבוקש הוא $\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^{b_n}$.

נחשב הגבול

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} n^2\sin\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (משפט 4.45). הסדרה $x_n=\frac{1}{n^2}$ מקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, כמו כן, לכל n $x_n=\frac{1}{n^2}\neq 0$, ומהגדרת הגבול לפי Heine (4.29)

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

נחשב הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n^2}}}$.

הסדרה $x_n=\frac{1}{n^2}$ מקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ וכמו כן $x_n=\frac{1}{n^2}\neq 0$ לכל n, ומהגדרת הגבול לפי Heine (4.29)

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sin x_n=\lim_{x\to 0}\sin x=0$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (טענה 6.18). הסדרה $y_n=\sin\frac{1}{n^2}$ מקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n^2}=0$, כמו כן, לכל n $y_n=\sin\frac{1}{n^2}\neq 0$, ומהגדרת הגבול לפי Heine (4.29)

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+y_n\right)^{\frac{1}{y_n}}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

כעת, לפי טענה 6.15, נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n}=e^1=e$$

ב.
נסמן

$$f(x)=|x| \;,\; g(x)=\frac{1}{x^2}$$

בסביבה נקובה של $x=0$ מתקיים $f(x)=|x|>0$ ולכן $f(x)^{g(x)}>0$, ומכאן

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}=e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln|x|}$$

(השתמשנו כאן בזהות $x=e^{\ln x}$ עבור $x>0$ ובחוקי הלוגריתם).
כלומר הגבול המבוקש הוא

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to 0} e^{g(x)\ln f(x)}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln|x|}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x)=\lim_{x\to 0}\ln|x|\overset{(2)}{=}\lim_{y\to 0^+}\ln y=-\infty$$

(2) החלפת משתנה $y=|x|$, $\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}|x|=0$ ובסביבה נקובה של $x=0$ מתקיים $|x|>0$, ולפי משפט גבול של הרכבה (4.39)

ולכן

$$\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\ln f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln|x|="\infty\cdot(-\infty)"=-\infty$$

ומכאן

$$\lim_{x\to 0}|x|^{1/x^2}=\lim_{x\to 0} e^{g(x)\ln f(x)}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln|x|}\overset{(3)}{=}\lim_{y\to -\infty} e^{y}=0$$

(3) החלפת משתנה $y=\frac{1}{x^2}\cdot\ln|x|$, $\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln|x|=-\infty$, ולפי משפט גבול של הרכבה (4.39)

<u>שאלה 2</u>

א.

לכל n טבעי

$$f(\pi n) = e^{-\pi n} + \sin^2 \pi n = e^{-\pi n} + \underbrace{(\sin \pi n)^2}_{=0} = e^{-\pi n}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, והסדרה $x_n = -\pi n$ מקיימת

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} (-\pi n) = "(-\pi) \cdot \infty" = -\infty$$

ולפי Heine

$$\lim_{n \to \infty} f(\pi n) = \lim_{n \to \infty} e^{-\pi n} = \lim_{n \to \infty} e^{x_n} = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

ב.

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $e^{-x} > 0$ ו $\sin^2 x \geq 0$ ולכן $f(x) = e^{-x} + \sin^2 x > 0$, ובפרט זה נכון לכל $x \in [0, \infty)$, ולכן 0 חסם מלרע של $f\left([0, \infty)\right)$.

נסמן $x_n = \pi n$. לכל n טבעי $x_n > 0$ ולכן $x_n \in [0, \infty)$, ומכאן $f(x_n) \in f\left([0, \infty)\right)$,

כלומר $\left(f(x_n)\right)$ סדרה שכל איבריה ב $f\left([0, \infty)\right)$, ומהסעיף הקודם $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(\pi n) = 0$.

לפי האפיון של חסם תחתון (שאלה 11 ביחידה 3) מתקבל ש $\inf f\left([0, \infty)\right) = 0$.

ג.

אילו בשלילה היה קיים מינימום לפונקציה f בקטע $[0, \infty)$, כלומר היה קיים $\min f([0, \infty))$, אז לפי טענה 3.13 היה מתקיים $\min f([0, \infty)) = \inf f([0, \infty)) = 0$, כלומר היה קיים $x_0 \in [0, \infty)$ כך ש $f(x_0) = 0$, בסתירה לכך שלכל $x \in [0, \infty)$ מתקיים $f(x) > 0$.

מהסתירה נובע שהפונקציה f אינה מקבלת מינימום בקטע $[0, \infty)$.

<u>שאלה 3</u>

א.

f מוגדרת בכל $\mathbb{R}$.

לכל $x \neq 0$, $f(x)=\sin^2(x)\cdot\sin\frac{1}{x}$ ולכן f גזירה בכל $x\neq 0$ בתור הרכבה ומכפלה של פונקציות גזירות (ומכנה שונה מ 0), וכן

$$f'(x)=2\sin x\cos x\cdot\sin\frac{1}{x}+\sin^2 x\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\sin 2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\frac{\sin^2 x\cdot\cos\frac{1}{x}}{x^2}$$

בנקודה $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\sin x=1\cdot 0=0$$

לכל $x\neq 0$ מתקיים $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ כלומר הפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ חסומה בסביבה נקובה של $x=0$, ולכן לפי טענה "חסומה כפול אפסה" (באנלוגיה למשפט 2.22) נקבל

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$$

ומכאן f גזירה ב $x=0$, ו $f'(0)=0$.

לסיכום f מוגדרת וגזירה ב $\mathbb{R}$ ולכן גם רציפה ב $\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\begin{cases}\sin 2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\frac{\sin^2 x\cdot\cos\frac{1}{x}}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

ב.

תחום ההגדרה של $g(x)=\left|\ln x\right|$ זהה לתחום ההגדרה של $\ln x$, כלומר $(0,\infty)$.

g רציפה בקטע זה בתור הרכבה של פונקציות רציפות בקטע.

$\ln x$ עולה ב $(0,\infty)$ ו $\ln 1=0$ ולכן $\ln x>0$ לכל $x>1$, $\ln x<0$ לכל $0<x<1$, ולכן

$$g(x)=\begin{cases}-\ln x & 0<x<1\\ \ln x & x\geq 1\end{cases}$$

בקטע $[1,\infty)$ $g(x)$ זהה ל $\ln x$.

$\ln x$ גזירה ב $(0,\infty)$ ולכן גזירה בכל $x>1$ וגזירה מימין בנקודה $x=1$. מכיוון ש $g(x)$ זהה ל $\ln x$ בקטע $[1,\infty)$ נובע שגם g גזירה בכל $x>1$ וגזירה מימין בנקודה $x=1$, ולכל $x\geq 1$ מתקיים $g'(x)=\frac{1}{x}$ (כאשר בנקודה $x=1$ הכוונה היא לנגזרת ימנית).

בדומה: בקטע $(0,1]$ $g(x)$ זהה ל $-\ln x$.

$-\ln x$ גזירה ב $(0,\infty)$ ולכן גזירה בכל $0<x<1$ וגזירה משמאל בנקודה $x=1$. מכיוון ש $g(x)$ זהה ל $-\ln x$ בקטע $(0,1]$ נובע שגם g גזירה בכל $0<x<1$ וגזירה משמאל בנקודה $x=1$, ולכל $0<x\leq 1$ מתקיים $g'(x)=-\frac{1}{x}$ (כאשר בנקודה $x=1$ הכוונה היא לנגזרת שמאלית).

ובנקודה $x=1$ קיבלנו כי

$$g'_+(1)=\frac{1}{1}=1\quad,\quad g'_-(1)=-\frac{1}{1}=-1\quad\Rightarrow\quad g'_+(1)\neq g'_-(1)$$

ולכן (לפי משפט 7.12) g אינה גזירה ב $x=1$.

לסיכום g מוגדרת ורציפה ב $(0,\infty)$, גזירה ב $(0,1)\cup(1,\infty)$,

$$g'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x} & 0<x<1\\ \dfrac{1}{x} & 1<x\end{cases}$$

<u>שאלה 4</u>

נתון ש f גזירה ב $x=0$. לפי הגדרת הנגזרת

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\overset{(1)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{f(-y)-f(0)}{-y}=-\lim_{y\to 0}\frac{f(-y)-f(0)}{y}\overset{(2)}{=}$$
$$=-\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}=-\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=-f'(0)$$

(1) החלפת משתנה $y=-x$, $\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}(-x)=0$ ובסביבה נקובה של $x=0$ מתקיים $-x\neq 0$,
ולפי משפט גבול של הרכבה (4.39)

(2) $f(-y)=f(y)$ כי f זוגית

הערה: ביצענו את החלפת המשתנה $y=-x$ כדי באופן 'מלאכותי' לייצר את הביטוי $f(-y)$, על מנת שנוכל לנצל את תכונת הזוגיות של f.

קיבלנו

$$f'(0)=-f'(0)\quad\Leftrightarrow\quad 2f'(0)=0\quad\Leftrightarrow\quad f'(0)=0$$

פתרון אחר:

נתון ש f גזירה ב $x=0$, ולפי הטענה בשאלה 62 ג ביחידה 7

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}\overset{(3)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{2h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

(3) $f(-h)=f(h)$ כי f זוגית

<u>שאלה 5</u>

א.

נניח תחילה ש $a \neq 2$.

אם $a > 2$ אז

$$\lim_{x\to 0^+} a-2\cos x = a-2>0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$$

ו $\sin x > 0$ בסביבה ימנית של $x=0$, ולכן

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{a-2\cos x}{\sin x} = "\underbrace{(a-2)}_{>0}\cdot\frac{1}{0^+}" = \infty$$

באופן דומה אם $a<2$ אז

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{a-\cos x}{\sin x} = "\underbrace{(a-2)}_{<0}\cdot\frac{1}{0^+}" = -\infty$$

בשני המקרים מתקבל שהגבול $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ אינו קיים במובן הסופי, ולכן f אינה רציפה ב $x=0$.

כעת נניח ש $a=2$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2-2\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2(1-\cos x)}{\sin x} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2(1-\cos^2 x)}{\sin x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\cdot 0}{1+1} = 0$$

(1) כפלנו וחילקנו ב $1+\cos x$, ביטוי זה חיובי בסביבה נקובה קטנה מספיק של $x=0$.

(2) צמצמנו (כלומר חילקנו מונה ומכנה ב) $\sin x$ השונה מאפס ב $N^*_{\pi/2}(0)$.

נחשב הגבול השמאלי של f ב $x=0$.

נראה כי $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, נעזר ניסוח Heine לגבול.

תהי (x_n) סדרה כלשהי המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ וכן $x_n < 0$ לכל n .

אז $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = "\frac{1}{0^-}" = -\infty$. $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$, ולכן לפי ניסוח Heine לגבול נקבל כי $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{x\to -\infty} e^x = 0$.

זה נכון לכל סדרה (x_n) המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ו $x_n < 0$ לכל n , ולכן שוב לפי ניסוח Heine נקבל כי

$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

וכעת

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + xe^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x\to 0^-} x + \lim_{x\to 0^-} x \cdot \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 + 0\cdot 0 = 0$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ ולכן $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ ולכן f רציפה ב $x=0$.

לסיכום, f רציפה ב $x=0$ אס"ם $a=2$.

ב.

אם $a \neq 2$ אז מסעיף קודם f אינה רציפה ב $x=0$, וממשפט 7.9 נובע שאינה גזירה ב $x=0$.

נניח כי $a=2$ ולכן f רציפה ב $x=0$, נבדוק גזירות f ב $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2-2\cos x}{x\sin x}$$

כפי שראינו בסעיף א', ב $N^*_{\pi/2}(0)$ מתקיים

$$\frac{2-2\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin x}{1+\cos x}$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2-2\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2}{1+\cos x}=1\cdot\frac{2}{1+1}=1$$

כלומר f גזירה מימין ב $x=0$, $f'_+(0)=1$.

על סמך הגבול שהראינו בסעיף קודם,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+xe^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0^-}1+e^{\frac{1}{x}}=1+0=1$$

כלומר f גזירה משמאל ב $x=0$, $f'_+(0)=1$.

$f'_+(0)=1=f'_-(0)$ ולכן (לפי משפט 7.12) f גזירה ב $x=0$.

נימוק אחר:

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ולכן $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$, כלומר f גזירה ב $x=0$.

לסיכום, f גזירה ב $x=0$ אם ורק אם $a=2$.