אינפי 1 סמסטר 2022ג – פתרון ממ"ן 13

שאלה 1

א.

נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי, a_n קיים ו $0 \le a_n \le \frac{1}{2}$.

עבור $n=1$, נתון כי a_1 קיים ו $a_1 = 0$ ולכן מתקיים $0 \le a_1 \le \frac{1}{2}$.

נניח כי a_n קיים ו $0 \le a_n \le \frac{1}{2}$. אז בפרט $a_n \ne 1$ ולכן קיים $a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)}$. בנוסף

$$0 \le a_n \le \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \le -a_n \le 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \le 1-a_n \le 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \le 4(1-a_n) \le 4$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{4} \le \frac{1}{4(1-a_n)} \le \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \le a_{n+1} \le \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 \le a_{n+1} \le \frac{1}{2}$$

(1) כל המספרים חיוביים

מאקסיומת האינדוקציה נובע שלכל n טבעי, a_n קיים ו $0 \le a_n \le \frac{1}{2}$.

קיבלנו שהסדרה (a_n) מוגדרת היטב, וחסומה.

ב.

$$a_2 = \frac{1}{4(1-a_1)} = \frac{1}{4(1-0)} = \frac{1}{4} > 0 = a_1$$

נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי, $a_{n+1} > a_n$.

עבור $n=1$, ראינו שאכן מתקיים $a_2 > a_1$.

נניח כי $a_{n+1} > a_n$, אז

$$a_{n+1} > a_n \quad \Rightarrow \quad -a_{n+1} < -a_n \quad \Rightarrow \quad 1-a_{n+1} < 1-a_n \quad \Rightarrow \quad 4(1-a_{n+1}) < 4(1-a_n)$$

כמו כן לכל n מתקיים $a_n \le \frac{1}{2}$ ולכן $1-a_n \ge 1-\frac{1}{2} > 0$ ולכן כל המספרים חיוביים,

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4(1-a_{n+1})} > \frac{1}{4(1-a_n)} \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} > a_{n+1}$$

מאקסיומת האינדוקציה נובע שלכל n טבעי, $a_{n+1} > a_n$.

וקיבלנו שהסדרה (a_n) עולה ממש.

הסדרה עולה וחסומה ולפי משפט 3.16 היא מתכנסת.

נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. לכל n מתקיים $0 \le a_n \le \frac{1}{2}$, ולפי משפט 2.31 מתקבל $0 \le L \le \frac{1}{2}$.

לפי משפט 2.29 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$. מצד שני, לפי אריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(1-a_n)} = \frac{1}{4(1-L)}$$

(נשים לב ש $L<1$ וגבול המכנה שונה מ 0).

ממשפט יחידות הגבול נובע

$$L=\frac{1}{4(1-L)} \quad \Rightarrow \quad 4L(1-L)=1 \quad \Rightarrow \quad 0=4L^2-4L+1=(2L-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 2L-1=0 \quad \Rightarrow \quad L=\frac{1}{2}$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$.

<u>שאלה 2</u>

א.

$$a_n=\frac{(-5)^n+2(-2)^n+3}{5^{n+1}+2(-3)^n+3}\overset{(1)}{=}\frac{\frac{(-5)^n}{5^n}+2\frac{(-2)^n}{5^n}+\frac{3}{5^n}}{\frac{5^{n+1}}{5^n}+2\frac{(-3)^n}{5^n}+\frac{3}{5^n}}=\frac{(-1)^n+2\left(-\frac{2}{5}\right)^n+3\cdot\frac{1}{5^n}}{5+2\left(-\frac{3}{5}\right)^n+3\cdot\frac{1}{5^n}}$$

(1) חילקנו מונה ומכנה ב 5^n

נסתכל על תתי הסדרות (a_{2n}) – תת הסדרה של האיברים באינדקסים הזוגיים, ו (a_{2n-1}) – תת הסדרה של האיברים באינדקסים האי-זוגיים.

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n}+2\left(-\frac{2}{5}\right)^{2n}+3\cdot\frac{1}{5^{2n}}}{5+2\left(-\frac{3}{5}\right)^{2n}+3\cdot\frac{1}{5^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\left(\frac{4}{25}\right)^n+3\cdot\frac{1}{25^n}}{5+2\left(\frac{9}{25}\right)^n+3\cdot\frac{1}{25^n}}=$$

נשים לב כי לכל k המקיים $|k|<1$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}k^n=0$ (טענה 2.33), ולכל k המקיים $|k|>1$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{k^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|k|}\right)^n=0$ (תכונות הערך המוחלט וטענה 2.33), ולכן גם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k^n}=0$ (שאלה 20 ביחידה 2). ולכן לפי אריתמטיקה

$$=\frac{1+2\cdot0+3\cdot0}{5+2\cdot0+3\cdot0}=\frac{1}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n-1}+2\left(-\frac{2}{5}\right)^{2n-1}+3\cdot\frac{1}{5^{2n-1}}}{5+2\left(-\frac{3}{5}\right)^{2n-1}+3\cdot\frac{1}{5^{2n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{4}{25}\right)^n+3\cdot5\cdot\frac{1}{25^n}}{5+2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{9}{25}\right)^n+3\cdot5\cdot\frac{1}{25^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1-5\left(\frac{4}{25}\right)^n+15\cdot\frac{1}{25^n}}{5-\frac{10}{3}\left(\frac{9}{25}\right)^n+15\cdot\frac{1}{25^n}}=\frac{-1-5\cdot0+15\cdot0}{5-\frac{10}{3}\cdot0+15\cdot0}=-\frac{1}{5}$$

ולכן ממשפט 3.25 נובע שלסדרה אין גבול, גם במובן הרחב.

תת הסדרה (a_{2n-1}) מתכנסת ולכן ממשפט 3.25 נובע שיש לה גבול חלקי יחיד, והוא גבולה $-\frac{1}{5}$. בדומה תת הסדרה (a_{2n}) מתכנסת ולכן ממשפט 3.25 נובע שיש לה גבול חלקי יחיד, והוא גבולה $\frac{1}{5}$.

מכיוון שתת הסדרות (a_{2n}) ו (a_{2n-1}) מכסות את הסדרה (a_n), נסיק ממשפט 3.30 ש $\pm\frac{1}{5}$ הם הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה.

ב.

$$a_n=\frac{(-5)^n+2(-3)^n+3}{(-4)^n+2(-2)^n+3}\overset{(2)}{=}\frac{\frac{(-5)^n}{(-4)^n}+2\frac{(-3)^n}{(-4)^n}+\frac{3}{(-4)^n}}{1+2\frac{(-2)^n}{(-4)^n}+\frac{3}{(-4)^n}}=\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n+2\left(\frac{3}{4}\right)^n+3\cdot\frac{1}{(-4)^n}}{1+2\left(\frac{2}{4}\right)^n+3\cdot\frac{1}{(-4)^n}}$$

(2) חילקנו מונה ומכנה ב $(-4)^n$

נסתכל על תתי הסדרות (a_{2n}) – תת הסדרה של האיברים באינדקסים הזוגיים, ו (a_{2n-1}) – תת הסדרה של האיברים באינדקסים האי-זוגיים.

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{2n}+2\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}+3\cdot\frac{1}{(-4)^{2n}}}{1+2\left(\frac{2}{4}\right)^{2n}+3\cdot\frac{1}{(-4)^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{25}{16}\right)^{n}+2\left(\frac{9}{16}\right)^{n}+3\cdot\frac{1}{16^n}}{1+2\left(\frac{4}{16}\right)^{n}+3\cdot\frac{1}{16^n}}=$$

נשים לב כי לכל k המקיים $|k|<1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}k^n=0$ (טענה 2.33), לכל k המקיים $k>1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}k^n=\infty$ (שאלה 41 ביחידה 2), ולכל k המקיים $|k|>1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{k^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|k|}\right)^n=0$ (תכונות הערך המוחלט וטענה 2.33), ולכן גם $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k^n}=0$ (שאלה 20 ביחידה 2). ולכן לפי אריתמטיקה

$$=\text{"}\frac{\infty+2\cdot0+3\cdot0}{1+2\cdot0+3\cdot0}\text{"}=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{2n-1}+2\left(\frac{3}{4}\right)^{2n-1}+3\cdot\frac{1}{(-4)^{2n-1}}}{1+2\left(\frac{2}{4}\right)^{2n-1}+3\cdot\frac{1}{(-4)^{2n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{25}{16}\right)^{n}+2\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^{n}+3\cdot(-4)\cdot\frac{1}{16^n}}{1+2\cdot\frac{4}{2}\cdot\left(\frac{4}{16}\right)^{n}+3\cdot(-4)\frac{1}{16^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{5}\left(\frac{25}{16}\right)^{n}+\frac{8}{3}\left(\frac{9}{16}\right)^{n}-12\cdot\frac{1}{16^n}}{1+4\left(\frac{4}{16}\right)^{n}-12\cdot\frac{1}{16^n}}=\text{"}\frac{\frac{4}{5}\cdot\infty+\frac{8}{3}\cdot0-12\cdot0}{1+4\cdot0-12\cdot0}\text{"}=\infty$$

מכיוון שתת הסדרות (a_{2n}) ו (a_{2n-1}) מכסות את הסדרה, נסיק ממשפט 3.31 שהסדרה מתכנסת במובן הרחב, וממשפט 3.25 נובע $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

ג.

לכל n טבעי מתקיים $a_n=\left(\frac{1}{n}-1\right)^n=\left(-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^n=(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, ולכן

$$a_n=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n & n \text{ even}\\ -\left(1-\frac{1}{n}\right)^n & n \text{ odd}\end{cases}$$

משאלה 66 ביחידה 3

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

ממשפט 3.25 כל תת סדרה של סדרה זו מתכנסת אף היא לאותו גבול. ולכן עבור תתי הסדרות של האיברים באינדקסים הזוגיים והאי-זוגיים

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}=\frac{1}{e}$$

ומכאן

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}-\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}=-\frac{1}{e}$$

ולפיכך לסדרה (a_n) אין גבול (מסקנה ממשפט 3.25).

תת הסדרה (a_{2n}) מתכנסת ל $\frac{1}{e}$, ולפי דוגמה 3.13 נובע שיש לה גבול חלקי יחיד וקבוצת הגבולות החלקיים שלה היא $\left\{\frac{1}{e}\right\}$. בדומה קבוצת הגבולות החלקיים של (a_{2n-1}) היא $\left\{-\frac{1}{e}\right\}$.

מכיוון שתת הסדרות (a_{2n}) ו (a_{2n-1}) מכסות את הסדרה (a_n), נסיק ממשפט 3.30 ש $\pm\frac{1}{e}$ הם הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה (a_n), וקבוצת הגבולות החלקיים שלה היא $\left\{\pm\frac{1}{e}\right\}$.

ד.

(a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים. נוכיח כי קיים N טבעי כך ש $a_N \ge 0$.

אם $a_1 \ge 0$ סיימנו. אחרת $a_1 < 0$, נסמן $k = |a_1| = -a_1$, נשים לב שזהו מספר שלם וחיובי כלומר טבעי.

מכיוון שכל אברי הסדרה שלמים, והסדרה עולה ממש, אז $a_{n+1} - a_n \ge 1$ לכל n ולכן

$$a_{k+1} - a_1 = (a_{k+1} - a_k) + (a_k - a_{k-1}) + \ldots + (a_2 - a_1) \ge 1 + 1 + \ldots + 1 = k$$
$$\Rightarrow \quad a_{k+1} - a_1 \ge k = -a_1 \quad \Rightarrow \quad a_{k+1} \ge 0$$

ועבור $N = k+1$ מתקיים $a_N \ge 0$.

יהי N טבעי כך ש $a_N \ge 0$. מכך שהסדרה (a_n) עולה ממש נקבל שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > a_N \ge 0$,

כלומר a_n מספר שלם וחיובי כלומר טבעי.

ובצורה אחרת, לכל n טבעי a_{N+n} הוא מספר טבעי.

לשם נוחות נסמן $b_n = a_{N+n}$ (כלומר הסדרה $(b_n) = (a_{N+n})$ היא הזזה של הסדרה (a_n)).

(a_n) סדרה עולה ממש ולכן לכל n $a_{N+n+1} > a_{N+n}$ כלומר $b_{n+1} > b_n$, כלומר גם (b_n) סדרה עולה ממש.

וקיבלנו ש (b_n) סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים, ואפשר לחשוב עליה כעל סדרה עולה של אינדקסים, ולכן יכולה להגיד תת סדרה.

נסמן $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 'הסדרה של Euler', וכידוע $\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

לפיכך (e_{b_n}) היא תת סדרה של (e_n), ולפי משפט 3.25

$$\lim_{n\to\infty} e_{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_{n+N}}\right)^{a_{n+N}} = e$$

בנוסף, $\left(1+\frac{1}{a_{n+N}}\right)^{a_{n+N}}$ היא הזזה של $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$, ולפי משפט גבול של הזזה (2.29) יש להן אותו גבול, כלומר

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

<u>שאלה 3</u>

א.

מתכונות החלק השלם, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \langle x \rangle < 1$$

ובפרט לכל n טבעי $0 \le \langle \sqrt{n} \rangle < 1$, כלומר $0 \le a_n < 1$, והסדרה (a_n) חסומה.

ב.

(a_n) סדרה חסומה ולכן לפי משפט 3.38 קיים $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

נסתכל על תת הסדרה (a_{k^2}), כלומר תת הסדרה (a_{n_k}) כאשר סדרת האינדקסים היא $n_k = k^2$.

לכל k טבעי, $n_k = k^2$ הוא מספר טבעי (ריבוע של טבעי). כמו כן $n_{k+1} = (k+1)^2 > k^2 = n_k$.

ומכאן (n_k) היא סדרה עולה ממש של אינדקסים טבעיים, כלומר (a_{n_k}) היא תת סדרה של (a_n).

לכל k טבעי

$$a_{n_k} = a_{k^2} = \langle \sqrt{k^2} \rangle \overset{(1)}{=} \langle k \rangle \overset{(2)}{=} 0$$

(1) $\sqrt{k^2} = |k| = k$ כי k טבעי ולכן חיובי.

(2) לכל x שלם מתקיים $\lfloor x \rfloor = x$ ולכן $\langle x \rangle = 0$, k טבעי ולכן שלם.

כלומר תת הסדרה (a_{n_k}) היא הסדרה הקבועה 0 ולכן

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} a_{k^2} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

ולכן 0 הוא גבול חלקי של (a_n).

נראה כעת שזהו הגבול החלקי הקטן ביותר.

יהי L גבול חלקי כלשהו של (a_n), ותהי (a_{n_k}) תת סדרה כך ש $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$.

לכל n מתקיים $a_n \ge 0$ ולכן לכל k מתקיים $a_{n_k} \ge 0$. ממשפט 2.31 נקבל כי $L = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \ge 0$.

הראינו כי 0 גבול חלקי, ולכל גבול חלקי L של (a_n) מתקיים $L \ge 0$, ומכאן ש 0 הוא הגבול החלקי המינימלי של (a_n), כלומר $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$.

ג.

$a_1 = \langle \sqrt{1} \rangle = \langle 1 \rangle = 0$ ולכן 0 איבר של הסדרה, כלומר $0 \in \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

כמו כן, כי שראינו בסעיף א, לכל $a_n \in \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ מתקיים $a_n \ge 0$, ולכן $\min\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

לפי טענה 3.13 מתקבל $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

ד.

לכל n טבעי מתקיים $n \ge 1$ ולכן $n^2 \ge 1$ ולכן $n^2 - 1 \ge 0$, ומכאן

$$0 \le n^2 - 1 < n^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n^2 - 1} < \sqrt{n^2} = |n| = n$$

נוכיח שלכל n טבעי מתקיים $\sqrt{n^2 - 1} \ge n - 1$. כל המספרים אי שליליים ולכן

$$\sqrt{n^2-1}\ge n-1 \iff \left(\sqrt{n^2-1}\right)^2\ge (n-1)^2 \iff n^2-1\ge n^2-2n+1 \iff 2n\ge 2 \iff n\ge 1$$

וזה אכן מתקיים לכל n טבעי.

לסיכום לכל n טבעי מתקיים $n-1\le\sqrt{n^2-1}<n$, ומתכונות החלק השלם

$$\left\lfloor\sqrt{n^2-1}\right\rfloor=n-1$$

$$\Rightarrow\ \left\langle\sqrt{n^2-1}\right\rangle=\sqrt{n^2-1}-\left\lfloor\sqrt{n^2-1}\right\rfloor=\sqrt{n^2-1}-(n-1)=\sqrt{n^2-1}-n+1$$

ה.

נחשב תחילה $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2-1}-n$.

ראינו שלכל n טבעי $n^2-1\ge 0$ ומכאן

$$n^2-1\ge 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{n^2-1}\ge 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{n^2-1}+n\ge n>0$$

ובפרט $\sqrt{n^2-1}+n\ne 0$. ע״י כפל בצמוד

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-1}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-1}-n)(\sqrt{n^2-1}+n)}{\sqrt{n^2-1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n}$$

כעת,

$$0<\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n}\overset{(3)}{\le}\frac{1}{n}$$

(3) $n^2-1\ge 0$ ולכן $\sqrt{n^2-1}\ge 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ וכמובן $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$, ולפי משפט הסנדוויץ׳ נקבל כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n}=0$, ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-1}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n}=0$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-1}-n+1=0+1=1$$

ו.

נסתכל על תת הסדרה (a_{k^2-1}), כלומר תת הסדרה (a_{n_k}) כאשר סדרת האינדקסים היא $n_k=k^2-1$.

נראה שזו סדרה עולה ממש של אינדקסים טבעיים:

לכל k טבעי k^2 טבעי ולכן גם $n_k=k^2-1$ טבעי (פרט ל $k=1$, ראו הערה בהמשך), ו

$$k+1>k>0 \ \Rightarrow\ (k+1)^2>k^2 \ \Rightarrow\ (k+1)^2-1>k^2-1 \ \Rightarrow\ n_{k+1}>n_k$$

הערה: עבור $k=1$ מתקבל $n_1=1^2-1=0$ (כלומר $a_{n_1}=a_0$), וזה כמובן לא מספר טבעי, ולכן לא תקין.

אם כן ׳נתקן׳ את הגדרת סדרה האינדקסים (n_k) כך: נגדיר לכל $k\ge 2$, $n_k=k^2-1$, ועבור $k=1$ נגדיר את n_1 להיות $n_1=1$. אז לכל k n_k הוא מספר טבעי, כפי שהוכח קודם לכל $k>1$ מתקיים $n_{k+1}>n_k$,

ומכיוון ש $n_2=2^2-1=3>1=n_1$ אז גם עבור $k=1$ מתקיים $n_{k+1}>n_k$.

ובסך הכל לכל k מתקיים $n_{k+1}>n_k$, (n_k) סדרה עולה ממש.

ולסיכום (n_k) היא סדרה עולה ממש של אינדקסים טבעיים.

כעת, לפי סעיף ד, לכל $k \geq 2$ טבעי (כלומר כמעט לכל k),

$$a_{n_k} = a_{k^2-1} = \left\langle \sqrt{k^2-1} \right\rangle = \sqrt{k^2-1} - k + 1$$

ומסעיף ה

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} a_{k^2-1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{k^2-1} - k + 1 = 1$$

וקיבלנו כי 1 הוא גבול חלקי של (a_n).

ז.

(a_n) סדרה חסומה ולכן לפי משפט 3.38 קיים $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

מסעיף א, לכל n מתקיים $a_n \leq 1$.

הסדרה הקבועה 1 מתכנסת וגבולה כמובן 1, ולפי דוגמה 3.13 $\overline{\lim_{n\to\infty}} 1 = 1$.

לפי תכונות הגבול העליון (משפט 3.40, סעיף 5), מכיוון שלכל n $a_n \leq 1$ מתקבל $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} 1 = 1$.

אבל בסעיף ו קיבלנו ש 1 הוא גבול חלקי של (a_n), ולכן הגבול החלקי המקסימלי של (a_n) מקיים $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \geq 1$, ובסך הכל $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = 1$.

ח.

בסעיף א קיבלנו ש 1 חסם מלעיל של $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

בסעיף ו מצאנו ש 1 גבול חלקי של (a_n), כלומר ישנה תת סדרה (a_{n_k}) של (a_n) שגבולה 1. בפרט, זו סדרה של איברים מהקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

כלומר, 1 חסם מלעיל של $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, וישנה סדרה של מספרים מהקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ שגבולה הוא 1, ולפי הטענה משאלה 9 ביחידה 3 נובע כי $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$.

הקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ כמובן אינה ריקה (בכל סדרה יש לפחות איבר אחד ולכן קבוצת אברי סדרה לעולם אינה ריקה) ובסעיף א ראינו שהיא חסומה מלעיל.

כמו כן בסעיף א ראינו שלכל n מתקיים $a_n < 1$ כלומר $1 \notin \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, כלומר $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ אינו איבר של $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

לפי הטענה בשאלה 60 מיחידה 3 נובע שלא קיים $\max\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.