אינפי 1 סמסטר 2022ג – פתרון ממ"ן 11

שאלה 1

א.

נניח בשלילה ש $a = k + m\sqrt{2}$ רציונלי.

$$a = k + m\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a - k = m\sqrt{2}$$

ומכיוון ש m טבעי הוא שונה מאפס ולכן

$$\sqrt{2} = \frac{a-k}{m}$$

k, m מספרים טבעיים ולכן רציונליים, ו m טבעי ולכן שונה מאפס. ומכיוון שהפרש ומנת מספרים רציונליים (כאשר המכנה שונה מ 0) הם רציונליים, מתקבל ש $\sqrt{2}$ רציונלי, בסתירה למשפט 1.21 האומר ש $\sqrt{2}$ הינו מספר אי-רציונלי.

ומכאן שהנחת השלילה שגויה, ו $a = k + m\sqrt{2}$ אי-רציונלי.

ב.

תחילה נוכיח באינדוקציה את הטענה: לכל n טבעי קיימים $k, m \in \mathbb{N}$ כך ש $(1+\sqrt{2})^n = k + m\sqrt{2}$.

הוכחת הטענה:

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$:

$(1+\sqrt{2})^1 = 1 + \sqrt{2} = 1 + 1\cdot\sqrt{2}$, כלומר $(1+\sqrt{2})^1 = k + m\sqrt{2}$ כאשר $k = m = 1$ טבעיים, והטענה נכונה.

צעד האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור n, כלומר קיימים $k, m \in \mathbb{N}$ כך ש $(1+\sqrt{2})^n = k + m\sqrt{2}$,

ונוכיח את נכונותה עבור $n+1$, כלומר קיימים $k', m' \in \mathbb{N}$ כך ש $(1+\sqrt{2})^{n+1} = k' + m'\sqrt{2}$.

$$(1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2}) \overset{(1)}{=} (k + m\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) \overset{(2)}{=} k + k\sqrt{2} + m\sqrt{2} + m\sqrt{2}^2 =$$
$$= k + k\sqrt{2} + m\sqrt{2} + 2m = (k+2m) + (k+m)\sqrt{2}$$

(1) מהנחת האינדוקציה

(2) פישוט אלגברי

כעת אם נסמן $k' = k + 2m$, $m' = k + m$, שהינם מספרים טבעיים בתור סכום ומכפלה של טבעיים,

נקבל $(1+\sqrt{2})^{n+1} = k' + m'\sqrt{2}$ כנדרש, וסיימנו את הוכחת הטענה. $\square$

כעת מסעיף א' נובע ש $(1+\sqrt{2})^n$ הוא אי-רציונלי.

<u>שאלה 2</u>

א.

נוכיח תחילה את הזהות שבהדרכה:

עבור $x, y > 0$ מתקיים $\sqrt{y} > 0$, $\sqrt{x} > 0$ ולכן $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$ ולכן

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \quad (1)$$

כעת, יהיו a, b שני מספרים ממשיים.

מתכונות הערך המוחלט $|a| \geq 0$ ולכן $|a| + 1 \geq 1 > 0$ ובדומה $|b| + 1 > 0$, ולכן לפי הזהות (1)

$$\left|\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1}\right| \overset{(1)}{=} \left|\frac{(|a|+1) - (|b|+1)}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}}\right| = \left|\frac{|a| - |b|}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}}\right| \overset{(2)}{=} \frac{\left||a| - |b|\right|}{\left|\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}\right|}$$

(2) תכונות הערך המוחלט (שאלה 1.39)

$|a| + 1 > 0$ ולכן $\sqrt{|a|+1} > 0$ ובדומה $\sqrt{|b|+1} > 0$, ולכן $\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1} > 0$ ומתכונות הערך המוחלט

$$\left|\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}\right| = \sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}$$

ולכן

$$\left|\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1}\right| = \frac{\left||a| - |b|\right|}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}}$$

כעת, $|a| + 1 \geq 1$ ולכן $\sqrt{|a|+1} \geq 1$ ובדומה $\sqrt{|b|+1} \geq 1$, ולכן $\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1} \geq 2$ והמונה אי-שלילי ולכן

$$\left|\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1}\right| \leq \frac{\left||a| - |b|\right|}{2} \overset{(3)}{\leq} \frac{|a - b|}{2}$$

(3) אי שוויון המשולש (שאלה 1.39)

ב.

בעזרת חוקי החזקה וחוקי כפל מקוצר

$$\left(\frac{a + |a|}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - |a|}{2}\right)^2 = \frac{(a + |a|)^2}{2^2} + \frac{(a - |a|)^2}{2^2} = \frac{a^2 + 2a|a| + |a|^2}{4} + \frac{a^2 - 2a|a| + |a|^2}{4} =$$

$$= \frac{2a^2 + 2|a|^2}{4} = \frac{a^2 + |a|^2}{2}$$

לפי תכונות הערך המוחלט (טענה 1.48 או שאלה 39 ביחידה 1), $|a|^2 = |a^2|$, ומכיוון ש $a^2 \geq 0$, $|a^2| = a^2$,

ומתקבל $|a|^2 = |a^2| = a^2$ ולכן

$$\left(\frac{a + |a|}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - |a|}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + |a|^2}{2} = \frac{a^2 + a^2}{2} = a^2$$

<u>שאלה 3</u>

א.

מתכונות החלק השלם (טענה 1.64) מתקיים $\lfloor x \rfloor \le x$, ולכן $\lfloor x \rfloor \le x \le y$.

נסמן $n = \lfloor x \rfloor$, אז זהו מספר שלם המקיים $n \le y$.

הגדרת החלק השלם

$$\lfloor y \rfloor = \max\{ k \in \mathbb{Z} \,|\, k \le y \}$$

כלומר $\lfloor y \rfloor$ הוא המקסימום של קבוצת כל המספרים השלמים שקטנים/שווים ל y , ובפרט הוא גדול/שווה כל מספר שלם שכזה. כאמור n מספר שלם המקיים $n \le y$ ולכן הוא אחד מאברי הקבוצה ולכן $n \le \lfloor y \rfloor$, כלומר $\lfloor x \rfloor \le \lfloor y \rfloor$.

ב.

(i)

$$\left\lfloor x-\tfrac{1}{2} \right\rfloor^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad \left\lfloor x-\tfrac{1}{2} \right\rfloor = \pm 5$$

ומתכונות החלק השלם (טענה 1.64)

$$\left\lfloor x-\tfrac{1}{2} \right\rfloor = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \le x-\tfrac{1}{2} < 6 \quad \Leftrightarrow \quad 5\tfrac{1}{2} \le x < 6\tfrac{1}{2}$$

$$\left\lfloor x-\tfrac{1}{2} \right\rfloor = -5 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \le x-\tfrac{1}{2} < -4 \quad \Leftrightarrow \quad -4\tfrac{1}{2} \le x < -3\tfrac{1}{2}$$

ולכן קבוצת פתרונות השוויון היא $[-4\tfrac{1}{2}, -3\tfrac{1}{2}) \cup [5\tfrac{1}{2}, 6\tfrac{1}{2})$.

(ii)

ומתכונות החלק השלם (טענה 1.64)

$$\lfloor x^2 \rfloor = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 9 \le x^2 < 10$$

$$9 \le x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \le -3 \text{ or } x \ge 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -3\,] \cup [3, \infty)$$

$$x^2 < 10 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{10} < x < \sqrt{10} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$$

ולכן קבוצת פתרונות השוויון היא חיתוך שתי קבוצות אלה

$$\big((-\infty, -3\,] \cup [3, \infty)\big) \cap (-\sqrt{10}, \sqrt{10}) = (-\sqrt{10}, -3] \cup [3, \sqrt{10})$$

<u>שאלה 4</u>

א.

צריך להוכיח שלכל $x, y \in [0,1]$ כך ש $x < y$ קיים $a \in A$ כך ש $x < a < y$, כלומר שלכל $x, y \in [0,1]$ כך ש $x < y$ קיים מספר רציונלי חיובי q כך ש $x < q\sqrt{3} < y$.

ובכן, יהיו $x, y \in [0,1]$ כך ש $x < y$. $\sqrt{3}$ חיובי ולכן נקבל

$$x < y \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{3}} < \frac{y}{\sqrt{3}}$$

$\mathbb{Q}$ צפופה ב $\mathbb{R}$ (משפט 1.66) ולכן קיים מספר רציונלי r כך ש $\frac{x}{\sqrt{3}} < r < \frac{y}{\sqrt{3}}$.

בפרט $0 \geq \frac{x}{\sqrt{3}} > r$ ולכן $r > 0$.

נכפול ב $\sqrt{3}$ החיובי

$$\frac{x}{\sqrt{3}} < r < \frac{y}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad x < r\sqrt{3} < y$$

נסמן $a = r\sqrt{3}$, ומכיוון ש r מספר רציונלי חיובי נובע כי $a \in A$, וקיבלנו שקיים $a \in A$ כך ש $x < a < y$.

ב.

A צפופה בקטע I אם: לכל $x, y \in I$ כך ש $x < y$ קיים $a \in A$ כך ש $x < a < y$.

שלילת הטענה A צפופה בקטע I:

A אינה צפופה בקטע I אס"ם: קיימים $x, y \in I$ המקיימים $x < y$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים ($a \geq y$ או $a \leq x$).

ג.

נסמן ב A את קבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 3, כלומר זו קבוצת כל המספרים הממשיים שההצגה שלהם כשבר עשרוני היא סופית ולא מופיעה בה הספרה 3.

נוכיח כי A אינה צפופה בקטע $[-1,1]$.

צריך להוכיח שקיימים $x, y \in [-1,1]$ המקיימים $x < y$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים ($a \geq y$ או $a \leq x$).

נבחר $y = 0.32$, $x = 0.31$, אז בברור $0.31, 0.32 \in [-1,1]$ וכן $0.31 < 0.32$.

ברור שלכל מספר $0.31 < t < 0.32$, הספרה הראשונה בהצגה שלו כשבר עשרוני היא 3 ולכן t אינו איבר של A.

הערה: לכל $0.31 < t < 0.32$ יש הצגה כשבר עשרוני. אם <u>אין</u> ל t הצגה כשבר עשרוני <u>סופי</u> אז בוודאי $t \notin A$, כי כל אברי A הם בעלי הצגה כשבר עשרוני סופי.

אם ל t יש הצגה כשבר עשרוני סופי, אז מכיוון ש $0.31 < t < 0.32$, נובע שהספרה הראשונה אחרי הנקודה היא 3, ולכן $t \notin A$.

כעת, יהי $a \in A$.

מכיוון ש $a \in A$ אז לא ייתכן ש $0.31 < a < 0.32$, ולכן $a \geq 0.32$ או $a \leq 0.31$, וסיימנו.