דף סיכום בחינה

מזהה סטודנט: N102217496

מזהה קורס: 20474   שם קורס: חשבון אינפיניטסימלי 1

מספר שאלה	ניקוד מירבי	ציון
1	25.00	24.00
2.1	10.00	0.00
2.2	15.00	15.00
3	25.00	
4.1	10.00	10.00
4.2	15.00	7.00
5	5.00	5.00
6	5.00	0.00
7	5.00	5.00
8	5.00	0.00
9	5.00	0.00

ציון בחינה סופי : 66.00

הבחינה הבדוקה בעמודים הבאים

מלא את הפרטים בכל המקומות הדרושים

מספר תעודת זהות (9 ספרות)	מספר הקורס	מועד
216738542	20474	88

הדבק כאן את מדבקת הנבחן

N102217496

ת.ז: 216738542 מספר סידורי: 8

לשימוש הבודק

396568

<u>שאלה 1</u>

תהי $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת של קטעים סגורים $I_n=[a_n,b_n]$ המקיימת

1) לכל n $I_n \supseteq I_{n+1}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n-a_n=0$

נשים לב שלפי נתון (1) לכל n $a_n\le a_{n+1}\le b_{n+1}\le b_n$

ולכן (a_n) ו- (b_n) חסומות כי a_1 מלרע ו- b_1 מלעיל

בנוסף לפי הגדרה 3.15 (a_n) סדרה עולה ו- (b_n) סדרה יורדת

ולכן לפי משפט 3.16 מכיוון שתנאיו מתקיימים "לשתי" הסדרות

(a_n) מתכנסת ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

וגם (b_n) מתכנסת ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

בנוסף מכיוון ש- (a_n) ו- (b_n) מתכנסות אזי לפי משפט 2.28

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n-\lim\limits_{n\to\infty} b_n \overset{(2)}{=} 0$

ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

נסמן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=C$

נגדיר סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל n $x_n\in I_n=[a_n,b_n]$

בחירה זו אפשרית כי קיימים אינסוף ערכים בקטע $[a_n,b_n]$

לפי הגדרת (x_n) לכל n מתקיים $a_n\le x_n\le b_n$

ולכן כל תנאי משפט 2.32 מתקיימים ולכן מתקיים:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=C$

המשך עמוד הבא

לשימוש הבודק

המשך שאלה 1

ולכן קיימת נקודה, c כך ש- $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

לא ברור כיצד זה נובע מן השורה הקודמת, ומה תפקיד הטיעון שם

כעת נוכיח שהיא יחידה

נניח בשלילה שקיימת עוד נקודה, כזאת, נקרא לה y

ונגדיר סדרה $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ כך: לכל n $y_n = y$

ולכן מין הגדרתה של נקודה y לכל n מתקיים $y_n \in [a_n, b_n]$

ולכן לכל n מתקיים $a_n \le y_n \le b_n$

וכל תנאי משפט 2.32 מתקיימים ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

ומכיוון שלכל n $y_n = y$ אז לפי טענה 2.11 מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y = c$$

בסתירה להנחת השלילה ולכן c נקודה אחת ויחידה

כנדרש

$\square$

24
(1)

<u>שאלה 3</u>

1)

נגדיר פונקציה f כך $f(x)=\sin x - x$

לפי משפט 7.20, משפט 7.26 ומשפט 7.13 $f(x)$ גזירה,

לכל x והנגזרת היא $f'(x)=\cos x-1$

שים לב כי- $f(0)=\sin 0 - 0 = 0$

כמו כן לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $0<\sin x<1$ ולכן בפרט

לכל $x>1$ היא חיובית ולכן נשאר רק את $0<x\leq 1$

396568

לשימוש הבודק

שאלה 3

(2) תהי (x_n) סדרה המוגדרת ע"י $0<x_1<\frac{1}{2}\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n$

נוכיח באינדוקציה, ש- (x_n) מונוטונית יורדת

עבור 1 $x_2=\sin x_1$ ולכן לפי סעיף (1) $x_2=\sin x_1<x_1$

עבור n מתקיים (נניח) כי $x_{n+1}\le x_n$

עבור n+1

$x_{n+2}=\sin(x_{n+1})<x_{n+1}$

סעיף (1)

מסקנת האינדוקציה: לכל n $x_{n+1}\le x_n$ ולכן לפי הגדרה 3.15

(x_n) סדרה מונוטונית יורדת

כמו כן מכיוון שלכל x $-1\le\sin x\le 1$ ו- $0<x_1\le\frac{1}{2}\pi$

אז הסדרה (x_n) חסומה, מלעיל ע"י $\frac{1}{2}\pi$ ומלרע ע"י -1

ולכן לפי הגדרה 3.2 (x_n) חסומה

ולכן כל תנאי משפט 3.16 מתקיימים ו- (x_n) מתכנסת

□

לשימוש הבודק

שאלה 3

3) נוכיח באינדוקציה שלכל n $0<x_n<\frac{1}{2}\pi$

עבור 1 נתון ש- $0<x_1<\frac{1}{2}\pi$

נניח עבור n מסוים ש- $0<x_n<\frac{1}{2}\pi$

נוכיח עבור $n+1$ $x_{n+1}=\sin x_n < x_n < \frac{1}{2}\pi$

סעיף (1) הנחה

וידוע שלכל $0<x<\frac{1}{2}\pi$ $0<\sin x$ ולכן $x_{n+1}=\sin x_n>0$

מכיוון ש- $\frac{1}{2}\pi > x_n > 0$ ולכן $0<x_{n+1}<\frac{1}{2}\pi$

מסקנת אינדוקציה: לכל n $0<x_n<\frac{1}{2}\pi$ לכן 0 חסם מלרע של (x_n)

לפי סעיף (1) ידוע שלכל $0<x<\frac{1}{2}\pi$ $\sin x<x$

ולכן לפי הגדרת (x_n) לכל $n\geq 1$ $x_{n+1}=\sin x_n<x_n$

ולכן הסדרה (x_n) מונוטונית יורדת ממש

כעת נוכיח ש- $\inf\{x_n|n\in\mathbb{N}\}=0$

לפי אנלוגיה של משפט 3.6 קיים $y=\inf\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$

יהי $\varepsilon>0$

396568

לשימוש הבודק

לשימוש הבודק

שאלה 4

א) נגדיר סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ כך:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{זוגי } n \\ n & \text{אי זוגי } n \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} n & \text{זוגי } n \\ 0 & \text{אי זוגי } n \end{cases}$$

לכל n זוגי $a_n \cdot b_n = 0 \cdot n = 0$

ולכל n אי זוגי $a_n \cdot b_n = n \cdot 0 = 0$

לכן לכל n $a_n \cdot b_n = 0$

ולכן לפי טענה 2.11 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$

והנתון מתקיים

נגדיר סדרות $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ ו- $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ כך:

$r_k = 2k-1, \ n_k = 2k$

נשים לב שלכל איבר $n \in \mathbb{N}$ n נמצא או ב- n_k או ב- r_k

ולכן a_{n_k} ו- a_{r_k} מכסות את a_n

וגם b_{n_k} ו- b_{r_k} מכסות את b_n

בנוסף לכל n n_k זוגי ו- r_k אי זוגי לכן:

$b_{n_k} = n, \ b_{r_k} = 0, \ a_{n_k} = 0, \ a_{r_k} = n$

ולכן לפי טענה 2.11 וטענה 2.37

$\lim\limits_{n\to\infty} b_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{r_k} = \infty$

וגם $\lim\limits_{n\to\infty} b_{r_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = 0$

ולכן לפי משפט 3.31

שני הסדרות לא מתכנסות ולכן הטענה $\boxed{\text{הופרכה}}$

$\square$

396568

10
(4.1)

לשימוש הבודק

שאלה 4

ג) 4) נוכיח את הטענה

יהי $C>0$ כך שלכל $x>0$ $f'(x)\geq C>0$

לכן לפי משפט 8.8 f עולה בכל $[0,\infty)$

נימוק?

נסמן $x_0 = f(0)$

נשים לב כי לכל $x\in[0,\infty)$ $\boxed{f(x)\geq x\cdot C + x_0}$

נסמן $g(x)=x\cdot C+x_0$ פונקציה מוגדרת היטב ב- $[0,\infty)$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x\cdot C + x_0 = \left(\lim_{x\to\infty} x\right)\cdot C + x_0 = \infty$$

מכיוון שלכל $x\in[0,\infty)$ $f(x)\geq g(x)$

אזי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

כנדרש

$\square$

לשימוש הבודק

לא מתקיימים כל תנאי השאלה

ש.ולי 4

ד) (2) נפריך את הטענה

נגדיר פונקציית f כך $f(x)=-\frac{1}{x}$

מכיוון ש- -7 ו- x שליליים לכל x

~~לכל $x>0$ $\frac{-1}{x}<0$ ולכן מתקיים 7.18~~

~~ולכן~~

מכיוון ש- $x>0$ אזי לכל $x>0$ $\frac{-1}{x}<0$ ולכן מתקיים

משפט 7.18 ולכן $f'(x)=\frac{1}{x^2}$

נשים לב שלכל $x>0$ מתקיים:

$f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$

אבל $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x}=0$

לכן הטענה לא נכונה, כנדרש

□

7
(4.2)

שאלה 2

לשימוש הבודק

0
(2.1)

396568

לשימוש הבודק

שאלה 2

ב) נסמן לכל x $f(x)=x\sin x$

נשים לב כי $f(x)$ רציפה לפי משפט 5.11, מסקנה 5.12

ו- משפט 5.13

בנוסף נשים לב כי $f(0)=0\cdot\sin 0=0$

נגדיר סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך $x_n=n\cdot 2\pi$

כידוע ממחזוריות sin נובע לכל n מתקיים:

$f(x_n)=n2\pi\cdot\sin(n2\pi)=(n2\pi)\cdot 0=0$

לכן קיימים אינסוף ערכים של x כך ש- $f(x)=0$

בנוסף נגדיר $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ כך $y_n=\frac{1}{2}\pi+n\pi\cdot 2$

לפי מחזוריות sin לכל n

מתקיים $f(y_n)=(\frac{1}{2}\pi+2n\pi)(\sin(\frac{1}{2}\pi+2n\pi))=\frac{1}{2}\pi+2n\pi=y_n$

נגדיר סדרת קטעים סגורים $(I_n=[f(x_n),f(y_n)])_{n=1}^{\infty}$

נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}(y_n)=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\pi+n\pi\cdot 2)=\infty$

מכיוון שלכל n $f(y_n)=y_n$ נובע $\lim_{n\to\infty}(f(y_n))=\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$

$*_1$ $\boxed{\text{ולכן לכל } M>0 \text{ קיים } N\in\mathbb{N} \text{ כך שלכל } n>N \text{ מתקיים } f(y_n)>M}$

יהי $y>0$ לפי $*_1$ קיימים אינסוף ערכים של $N<n$

כך ש- $f(y_n)>y$ ומכיוון ש- $y>0$ נובע לכל n

$f(x_n)=0<y$ לכן לכל $N<n$

מתקיים $y\in I_n=[f(x_n),f(y_n)]$ ומכיוון ש- $f(x)$ רציפה לכל x

היא רציפה ב- $[x_n,y_n]$ וכל תנאי משפט 5.31

מתקיימים ולכן לכל $N<n$ קיים $c_n\in[x_n,y_n]$ כך ש- $f(c_n)=y$

מכיוון שקיימים אינסוף קטעים $[x_n,y_n]$ כאלו נובע

קיימים אינסוף ערכי c_n כך ש- $f(c_n)=y$

כנדרש

□

15
(2.2)

לשימוש הבודק

396568

לשימוש הבודק

טיוטה

לכל $0<|x|<\delta$ מתקיים $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$

$$-\varepsilon < \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon h < f(x_0+h) - f(x_0) < \varepsilon h$$

$$-\varepsilon h - f(x_0+h) < -f(x_0) < \varepsilon h - f(x_0+h)$$

$$\varepsilon h + f(x_0+h) > f(x_0) > -\varepsilon h + f(x_0+h)$$

$\varepsilon =$

טיוטה

לשימוש הבודק

396568

לשימוש הבודק

רציפה

נניח f גזירה לכן לפי הגדרה 3.8

אזי קיים $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}$

לכן לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $h\in N^*_\delta(0)$

מתקיים $\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}\in N_\varepsilon(L)$

לכל $h\in N^*_\delta(0)$ $\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}\in N_\varepsilon(L)$

לכל $0<|h|<\delta$ מתקיים $\left|\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}\right|<\varepsilon$

$-\varepsilon<\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}<\varepsilon$

$-\varepsilon\cdot h<f(x_0+h)-f(x_0)<\varepsilon\cdot h$ $>f(x)>\varepsilon\cdot h-f(x_0+h)$

לכל $0<|x|<\delta$ מתקיים $-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<\varepsilon$

$-\varepsilon(x-x_0)<f(x)-f(x_0)<\varepsilon(x-x_0)$

$\varepsilon x_0-\varepsilon x<f(x)-f(x_0)<\varepsilon x-\varepsilon x_0$

$\varepsilon x_0-\varepsilon x+f(x_0)<f(x)<\varepsilon x-\varepsilon x_0+f(x_0)$

טיוטה

$f(x)$ $-\frac{1}{x}$

$f'(x)$ $\frac{1}{x^2}$

לכל

לכל x $|\sin x| \leq |x|$

מכיוון ש- $x>0$ אזי $|\sin x| \leq x$

צ"ל $f(x)<0$

$f(x) = \sin x - x$

f'

396568

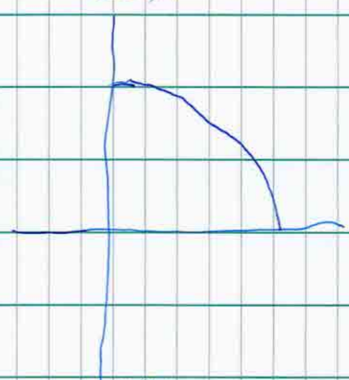
טיוטה

משפט

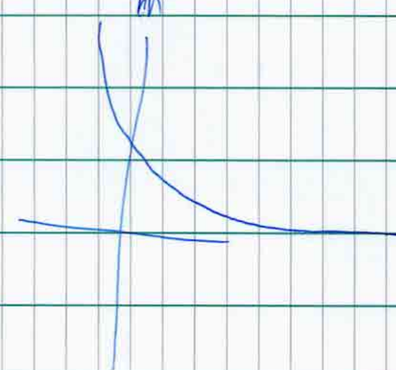
תהי f פונקציה ונניח ש- f גזירה ב- x_0

ונניח ש- f רציפה ב- x_0

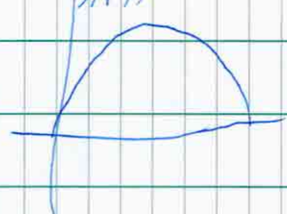
$\cos x$



$\ln$



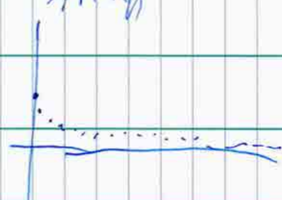
$\sin x$



$\ln(1+4x^2) \le e$

$\ln 1 = \log_e 1 = .$

$\sin x_n$



$x < y+\varepsilon$

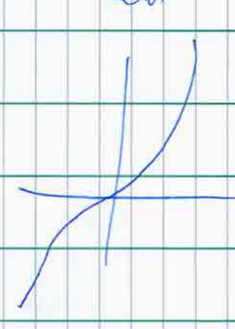
$f(x) \ge x \cdot c + x_0$

לכן מאחר היא גזירה לכל $x \in [0,\infty)$

$\ln$

2

e^{x}



גליון תשובות לשאלות רב–בררתיות

הקף במעגל את התשובה שבחרת (לכל שאלה יש רק תשובה אחת נכונה).
אם תרצה לבטל תשובה שבחרת, סמן עליה X.
דוגמה לתשובה שבחרת: א ב ג ד ה ו ז ח ט
דוגמה לתשובה שבטלת: א ב ג ד ה ו ז ח ט

שאלה	תשובה	שאלה	תשובה
1	א ב ג ד ה ו ז ח ט	21	א ב ג ד ה ו ז ח ט
2	א ב ג ד ה ו ז ח ט	22	א ב ג ד ה ו ז ח ט
3	א ב ג ד ה ו ז ח ט	23	א ב ג ד ה ו ז ח ט
4	א ב ג ד ה ו ז ח ט	24	א ב ג ד ה ו ז ח ט
5	א ב ג ד ה ו ז ח ט	25	א ב ג ד ה ו ז ח ט
6	א ב ג ד ה ו ז ח ט	26	א ב ג ד ה ו ז ח ט
7	א ב ג ד ה ו ז ח ט	27	א ב ג ד ה ו ז ח ט
8	א ב ג ד ה ו ז ח ט	28	א ב ג ד ה ו ז ח ט
9	א ב ג ד ה ו ז ח ט	29	א ב ג ד ה ו ז ח ט
10	א ב ג ד ה ו ז ח ט	30	א ב ג ד ה ו ז ח ט
11	א ב ג ד ה ו ז ח ט	31	א ב ג ד ה ו ז ח ט
12	א ב ג ד ה ו ז ח ט	32	א ב ג ד ה ו ז ח ט
13	א ב ג ד ה ו ז ח ט	33	א ב ג ד ה ו ז ח ט
14	א ב ג ד ה ו ז ח ט	34	א ב ג ד ה ו ז ח ט
15	א ב ג ד ה ו ז ח ט	35	א ב ג ד ה ו ז ח ט
16	א ב ג ד ה ו ז ח ט	36	א ב ג ד ה ו ז ח ט
17	א ב ג ד ה ו ז ח ט	37	א ב ג ד ה ו ז ח ט
18	א ב ג ד ה ו ז ח ט	38	א ב ג ד ה ו ז ח ט
19	א ב ג ד ה ו ז ח ט	39	א ב ג ד ה ו ז ח ט
20	א ב ג ד ה ו ז ח ט	40	א ב ג ד ה ו ז ח ט

לשימוש פנימי

מספר התשובות הנכונות: ______________ ציון: ______________

שם הבודק: ______________________________

396568