수치해석 Hw_#4

20160251 05 강재훈

• 5차시 벡터의 선형독립과 기저벡터

$Ax=0$ 일때 이러한 해집합은 null space라 부릅니다.

Echelon form　　row reduced form　　special form

ex) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　ex) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　ex) $v\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

이렇게 만들어진 special form으로 linear combination을 하면 1개의 vector space가 만들어지고 이 vector space가 null space임

$Ax=b$의 해가 존재하려면 b는 A의 col vector들이 span하는 vector space에 포함되어야 합니다.

Linear Independence (선형독립)

$c_1v_1 + c_2v_2 \cdots + c_nv_n = 0$ 일때 $c_1 = c_2 = c_3 \cdots = c_n = 0$ 이면 $v_1, v_2 \cdots v_n$을 각각 linearly Independent 하다고 부릅니다.

행렬A에 가우스 소거법을 했는데 전부 0이 아닌 col만큼 linearly Independent한 col vector가 존재합니다.

Rank of A

= # of Independent col vector = # of independent row vector = 가우스 소거법을 한 행렬의 pivot수

= col space의 차원 (Dim of $C(A)$)

span

• 어떤 벡터들을 가지고 모든 종류의 linear combination을 해서 vector space를 만들어 내는것

Basis vector

vector space를 span 할 수 있는 linearly Independent 한 최소개수의 vector

• 8차시 1차방정식 풀이와 직교벡터 구하기)

D. Orthonormal basis vector

basis vector들이 수직관계이고 크기들이 1인 경우

Gram schmidt orthogonalization

Orthonormal basis vector 들을 구하는 방법

1. orthonormal basis vector 1개를 구한다.

2. 임의의 벡터를 위에서 구한 벡터로 projection 시킨 후 원래의 벡터에서 이 projection 한 벡터를 빼주어 수직인 벡터를 구한 뒤 크기가 1인 벡터로 만들어 준다

3. 임의의 vector를 정하고 위에서 만들어준 orthonormal basis vector들이 span하는 vector space로 projection 시킨뒤, 수직이고 길이가 1인 새로운 orthonormal basis vector를 만들어 준다

4. 원하는 갯수만큼 3을 반복해준다

5. 임의의 vector와 projection 시킨 벡터의 차가 0에 가까우면 이미 span하고 있는 space 위의 벡터일 확률이 높으므로 새로운 벡터를 선택해서 다시 해준다.

• 8차시 일반 최소 제곱법과 QR 분할

Generalized least square

x_i당 w_i를 붙임 (w_i는 probability)

$wAx = wb \to Ax = b \to A^TAx = A^Tb = A^Tw^TwAx = A^Tw^Tb$

Orthonormal basis들로된 col vector로 이루는 matrix Q

$Q^TQ = I \Rightarrow Q^{-1} = Q^T$

ex) rotation matrix, permutation matrix

QR factorization

$a_j = \sum_{i=1}^{j} (q_i^T a_j) q_i$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (q_1^T a_1) & (q_1^T a_2) & \cdots \\ 0 & (q_2^T a_2) & \cdots \\ 0 & 0 & (q_3^T a_3) \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix} = QR$$

orthonormal basis vector로 이루어진 matrix

upper triangular matrix

• 11차시 고유값과 고유벡터 및 대각화

$Ax = \lambda x$ 일때 λ는 eigenvalue, x는 eigenvector라 부른다

$(A - \lambda I)x = 0$, $(A - \lambda I)$가 역행렬이 있으면 x는 항상 0이니까

$\det(A - \lambda I) = 0$

즉 eigenvector는 $(A - \lambda I)$의 null space이다.

Diagonalization of matrix

$A = LU$, $A = QR$, $A = S\Lambda S^{-1}$

$$S = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

λ_1에 대한 eigenvector

Remark; ① $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$이 전부 다르면 $e_1, e_2 \cdots e_n$이 전부 independent 하다.

② S는 unique하지 않다. eigenvector를 실수배 한것도 eigenvector니까

③ $S\Lambda S^{-1}$를 만들때 e_i와 λ_i의 순서를 유지 해주어야 한다.

④ n by n 행렬이라고 eigenvector가 n개 있는건 아니다

⑤ $A \to \lambda, e$ 일때 $A^k \to \lambda^k, e$ 이다