수치해석 Hw #3

컴퓨터공학과 2016025105 강재훈

· 2차시 LU분할

가우스 소거법 과정을 통하여 행렬을 LU분할 할 수 있음을 설명하고 이 때 행을 교환하는 과정을 순열 행렬로 표현하는 방법을 소개한다.

가우스 소거법 ; 우리가 일반적으로 연립방정식을 풀때 사용하는 방법으로 연립방정식을 행렬로 나타내서 풀 때도 사용할 수 있다.

ex) $2u+v+w=5$ ① $4u-6v=-2$ ② $-2u+7v+2w=9$ ③

$E_{21}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $E_{31}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 로 표현할 수 있다.

$E_{21}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $E_{31}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 로 표현할 수 있다.

$E_{31}E_{21}A$는 결국 upper triangle matrix 모양이 되므로

$E_{31}E_{21}A=U$ $A=E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}U$ 인데 $E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}$은 low triangle matrix이므로

$A=LU$가 되고 이를 LU 분할이라 한다.

이는 $E_{31}E_{21}A$가 upper triangle이라고 가정하고 푼 것인데 upper triangle 모양이 나오도록 pivoting 해줘야 한다면 순환행렬 P를 이용해야 한다.

ex) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ → 1번행과 3번행을 바꿈

· 4차시 벡터공간과 열벡터 공간

$Ax=b$ 인데 A가 n×n matrix라면 unique한 해가 있거나 해가 없는 경우일 것이다.
그런데 A가 m×n matrix인데 m<n 이라면 해가 무한개거나 해가 없을 것이다.
이 무한히 많은 해는 벡터공간이거나 벡터공간에 포함될 것이다.

vector space ; set closed under addition and scalar multiplication
특성 – 덧셈에 대한 교환·결합법칙 성립, scalar값의 분배법칙 성립.
항등원과 역원 벡터가 있다

column space ; set of all linear combinations from column vectors in A.

· 4차시 영벡터 공간과 해집합

행렬 A는 4개의 subspace를 만들수 있음 (row, column, null, left null space)

null space가 영벡터 공간

null space는 $Ax_1=0$, $Ax_2=0$, $A(x_1+x_2)=0$ 이니 덧셈에 대해 닫혀있고

$Ax_1=0$, $cAx_1=0$ 이므로 scalar multiplication에 닫혀있고

원점이 항상 포함되므로 vector space 이다.

null space는 row reduced form을 구하는것으로 찾을 수 있다.

그렇게 되면 pivot variable과 free variable로 변수를 나눌수 있는데 이걸 이용해,

special solution 형태로 표기할 수도 있다.

vector space의 dimension은 해당 vector space를 구성하는 independent vector의 수이다.

row와 null의 dimension은 합치면 전체 열개수이 되고 col과 left null의 dimension은 합치면 전체 행이 된다.

· 7차시 벡터의 직교성과 직선투영

Orthogonality (직교성)

두 벡터스페이스가 수직이면 linearly independent 하다고 본다.

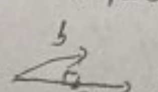
두 벡터 스페이스가 수직임을 확인하려면 두 벡터스페이스를 내적했을때 그 값이 0이면 된다.

$x^Ty = \vec{x}\cdot\vec{y}$와 같다.

두 벡터 스페이스가 수직이면 두 벡터 스페이스 각각에 속하는 벡터들끼리도 모두 수직이다.

$\underbrace{\text{row space와 null}}$ space, col $\underbrace{\text{space와 left}}$ null space는 수직관계이다

어떤 subspace V와 W가 있는데 $V\perp W$, $\dim(V)+\dim(W)=n$ 이면 orthogonal complement subspace라 한다.

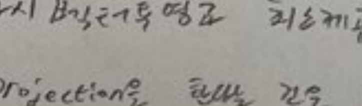


→ 직선위로의 투영의 일반적인 예이며 직선은 vector space가 될수 있으므로 사고를 확장시켜 내적의 벡터스페이스로의 투영을 가능하게 한다는 것은 생각할 수 있다.

· 7차시 벡터투영과 최소제곱법

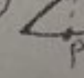
projection을 한다는 것은 closet point를 구한다는 것과 같다.

ex)

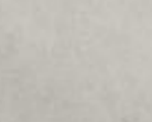


$Ax=b$ 에서 A가 $m\times n$ matrix이고 $m>n$ 이면 해가 없는 경우가 생긴다.

ex)



이런경우 해에 가장 근사한 값을 찾아주는 것을 생각할수 있다. ex)



즉 $\|Ax-b\|^2$의 최소 값을 구해주는 문제가 되고 이를 최소제곱법이라 한다.