수치해석 Hw #6-1

2016025105 강재훈

·11차시 고유값과 고유벡터 및 대각화

$Ax = \lambda x$ 일때 λ를 eigenvalue, x는 eigenvector라 부른다.

$(A-\lambda I)x = 0$ $(A-\lambda I)$가 역행렬이 있으면 x는 항상 0이니까

$\det(A-\lambda I) = 0$

즉 eigenvector는 $(A-\lambda I)$의 null space 이다.

Diagonalization of matrix

$A = LU$, $A = QR$ $A = S\Lambda S^{-1}$

$S = [e_1, e_2, e_3 \cdots e_n]$ $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & \\ & & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, e_i는 λ_i에 대한 eigenvector λ_i는 eigenvalue

Remark.

① $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$이 전부 다르면 $e_1, e_2 \cdots e_n$이 전부 independent 하다.

② S는 unique 하지 않다. eigenvector를 실수배한것도 eigenvector니까

③ $S\Lambda S^{-1}$를 만들때 e_i와 λ_i의 쌍을 유지해줘야 한다.

④ n by n 행렬이라고 eigenvector가 n개 있는건은 아니다.

⑤ $A \to \lambda, e$ 일때 $A^k \to \lambda^k e$ 이다.

·14차시 복소행렬과 에르미트 행렬.

complex num$(z) = a + jb$

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\theta = \arg\{z\} = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$z = re^{j\theta}$ $|z|^2 = r^2 = zz^*$

complex mat.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $x_k = a_k + jb_k$ $\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \cdots + |x_n|^2$

$= x_1x_1^* + x_2x_2^* \cdots + x_nx_n^*$

$= (x^T)^* x$

Complex vector의 내적

$x^H y$.

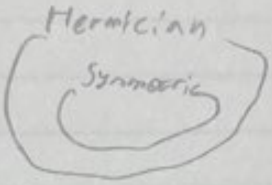
1) $x^H y$의 값이 실수가 아니면 교환법칙은 성립하지 않는다.

2) $x^H y = 0$ 이면 x와 y가 orthogonal 하다

3) $\|x\|^2 = x^H x$

4) $(AB)^H = B^H A^H$

에르미트 matrix



$A^H = A$ 인 경우 에르미트 matrix라 부른다.

1) $x^H A x$ (quadratic form)은 실수이다.

2) $A^H A$ (R)은 correlation matrix라 한다.

3) 모든 eigenvalue은 실수이다

4) 얻어진 모든 eigenvector들은 orthogonal 하다.

$A = S\Lambda S^{-1} = Q\Lambda Q^{-1}$ 이 되고 이는 $\lambda_1 x_1 x_1^T \dots + \lambda_n x_n x_n^T$로 나타낼 수 있고
이는 spectural theorem이라 부른다.

Spectural theorem을 이용해 해당 방향이 갖는 영향력을 측정할 수 있다.

15강 특이값 분할 (SVD)

Unitary matrix는 Q를 complex num까지 확장한 것이다.

$U^T U = U U^T = I$ $\|Ux\|^2 = \|x\|^2$ (길이보존) $(Ux)^H (Uy) = x^H y$ (각도보존)

n by n 행렬을 $A = S\Lambda S^{-1}$로 분해 m by n 행렬은 $A = U\Sigma V^T$로 분해

$A^T A$의 eigenvalue와 eigenvector를 구하고

$\lambda_1 \dots \lambda_r > 0$ $\lambda_{r+1} \dots \lambda_n = 0$ 인 수 2종으로 나눠서

$$\underset{r \times r}{\Sigma_1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_r} \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

V_1는 이 $\lambda_1 \dots \lambda_r$에 해당하는 eigen vector (i=1~r)

V_2은 $\lambda_{r+1} \dots \lambda_n$에 해당하는 eigen vector (i=r+1~n) $V = [V_1, V_2]$

$AV = U\Sigma$이므로 이전에 받고 있는 A, V, Σ를 이용해 U 구함

V는 row space와 null space. U는 col space와 left null space와 연관이 있다