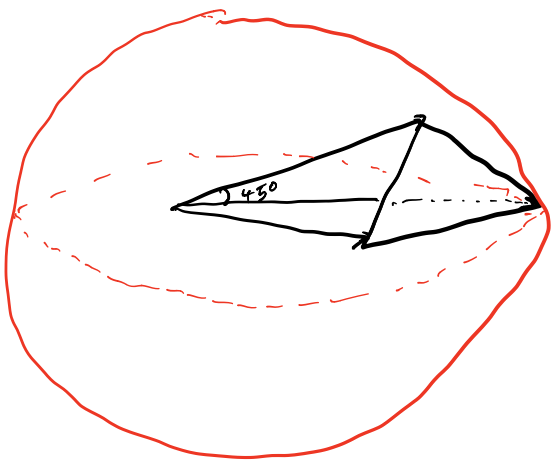
M4.

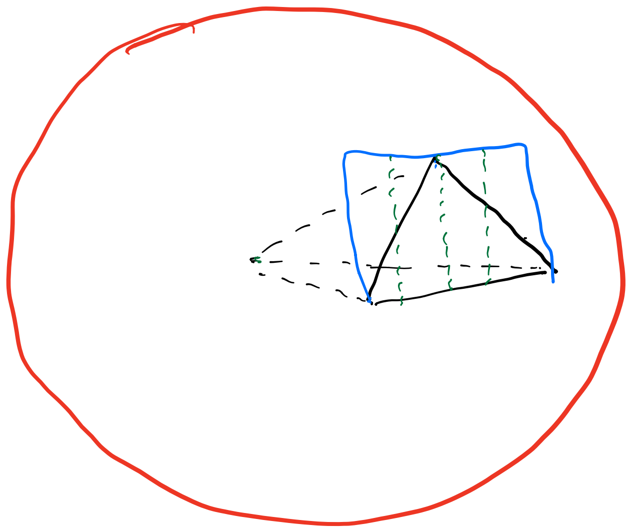
(A)

이 문제는 서로 45° 각도를 이루는 3개의 단위 벡터로 이루어진 삼각형이 구와 내접할 때, 최대 몇개의 삼각형이 내접할 수 있는지를 묻는 문제와 같다.



이 구의 반지름은 물론 1이고 구의 중심에서 해당 삼각형으로 사영했을때 구의 표면이 가려지는 넓이를 구해야 한다.

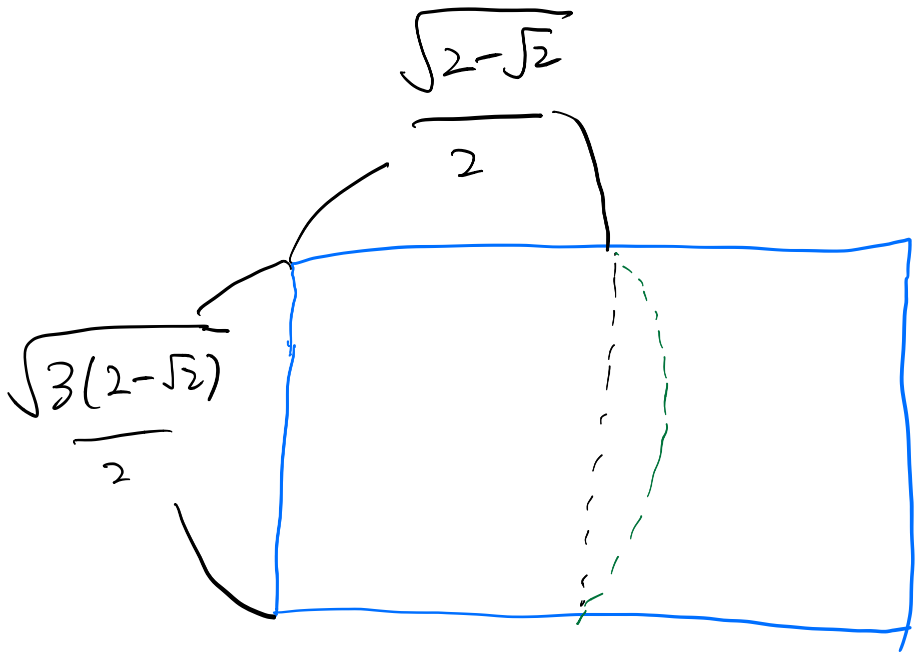
파란색 사각형의 오른쪽 부분의 사영은 삼각형의 오른쪽 부분의 사영의 넓이의 2배이다. (대칭성에 의해)



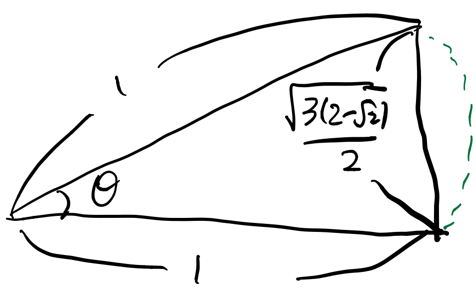
한 편 삼각형(정삼각형)의 변의 길이와 높이를 구해 보면

변: $\sqrt{1^2+1^2-2\cdot\cos45^\circ} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

높이: $\sqrt{2-\sqrt{2}-\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{3(2-\sqrt{2})}}{2}$



한편 초록색 호의 중심각을 계산하면



$$1^2+1^2-2\cos\theta = \frac{3(2-\sqrt{2})}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{3(2-\sqrt{2})-8}{4\cdot(-2)} = \frac{8-3(2-\sqrt{2})}{8}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8-3(2-\sqrt{2})}{8}\right) \fallingdotseq 38.70^\circ$$

그러면 호의 길이는 $2\pi \cdot \frac{38.70^\circ}{360^\circ} \fallingdotseq 0.6756$ 이고

사각형이 가리는 사영의 면적은 $0.6756 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$

이고 삼각형이 가리는 사영의 면적은

$\frac{0.6756 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ 입니다.

한편 구의 표면적은 4π 입니다.

4π를 $\frac{0.6756 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$로 나눈 몫은

48 입니다.

따라서 구하고자하는 단위벡터의 수는

$48/3 = \boxed{16\text{개}}$ 입니다.

(B)

(A)에서 와 마찬가지 방식으로 구하면

변 : $\sqrt{1^2+1^2-\cos 60^\circ} = \sqrt{2-\frac{1}{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

높이 : $\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

중심각 : $1^2+1^2-2\cos\theta = \frac{9}{16}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{9-32}{32}\cdot(-1) = \frac{23}{32}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{23}{32}\right) \simeq 44.04^\circ$

사각형 사영의 넓이는

$$\frac{44.04}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{44.04}{360^\circ} \cdot \pi \cdot \sqrt{3}$$

나눈 몫은 37 이고 따라서

단위 벡터의 수는 12개 입니다.