P2.

i) Earning growth에 대해

growth fomula $F(x(t), x(t-1))$은 다음 조건들을 만족해야 합니다

1. $\left.\dfrac{\partial F(x(t), x(t-1))}{\partial x(t-1)}\right|_{x(t)} < 0$, $x(t-1) \in \mathbb{R}$, 즉 $x(t-1)$과는 반비례

2. $\left.\dfrac{\partial F(x(t), x(t-1))}{\partial x(t)}\right|_{x(t-1)} > 0$, $x(t) \in \mathbb{R}$, 즉 $x(t)$와는 비례

3. 적절한 정규화

$$F(x(t), x(t-1)) = \frac{x(t) - x(t-1)}{\sqrt{x^2(t) + x^2(t-1)}}$$

은 위의 3가지 조건을 잘 만족합니다. $x(t) = a$ (after), $x(t-1) = b$ (before), $F(x(t), x(t-1)) = F$ 라고 간략화하면 $F = \dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$에 대해,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial a}\right|_{b} = \frac{2a^2 - ab + b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

인데

$2a^2 - ab + b^2$ 에서 a를 변수로 보고 이차방정식의 판별식을 계산하면 $-7b^2 < 0$ 이므로 해가 없고, b를 변수로 보고 이차방정식의 판별식을 계산하면 $-7a^2 < 0$ 이므로 해가 없습니다. 따라서 $2a^2 - ab + b^2$은 항상 양수이고 (단 $a \neq 0$ 그리고 $b \neq 0$), 따라서 $\left.\dfrac{\partial F}{\partial a}\right|_b > 0$ 입니다.

$\left.\dfrac{\partial F}{\partial b}\right|_a$도 마찬가지 방식으로 계산하면 항상 음수임을 알 수 있습니다.

또한 분모의 $\sqrt{a^2+b^2}$은 a와 b의 단위와 크기에 관계 없이 정규화의 역할을 수행해줍니다.

하지만 $\left(\lim_{a \to 0} \left.\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|_{b=0} = 1 \right) \neq \left(\lim_{b \to 0} \left.\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|_{a=0} = -1 \right)$ 이므로 $F(a,b)$는 $(0,0)$에서 극한값이 존재하지 않는다는 단점이 있습니다. 문제에서 말한 few exceptions에 $a, b = 0, 0$이 포함되어 있을 수 있으므로

$$F(a,b) = \begin{cases} \dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & ; \ a \neq 0 \text{ 또는 } b \neq 0 \\ 0 & ; \ a = 0 \text{ 그리고 } b = 0 \end{cases}$$

ii) Sales Growth에 대해

문제에서 a와 b는 positive 그리고 negative value 일 수 있다고 하였으므로 $a \neq 0$ 그리고 $b \neq 0$ 입니다.

따라서

$$F(a,b) = \frac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ 라고 할 수 있습니다.