به نام خدا

ساختمان‌های گسسته

توابع مولد

Dr. Aref Karimiafshar
A.karimiafshar@ec.iut.ac.ir

توابع مولد

- تابع مولد
  - کدگذاری اعضای یک دنباله به صورت ضرایب x در یک سری توانی
  - قابل استفاده برای
    - حل برخی مسایل شمارشی
    - حل برخی روابط بازگشتی
    - اثبات برخی اتحادهای ترکیبیاتی
    - ...
- تعریف
  - تابع مولد برای یک دنباله $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ از اعداد حقیقی به صورت سری بینهایت زیر تعریف می شود:

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

مثال

- توابع مولد برای دنباله های $\{a_k\}$

$$a_k = 3 \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 3x^k$$

$$a_k = k+1 \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

$$a_k = 2^k \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$$

- تابع مولد دنباله فیبوناچی

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots$$

تابع مولد

- تابع مولد برای یک دنباله متناهی $a_0, a_1, \ldots, a_n$ از اعداد حقیقی نیز قابل تعریف است!
  - صفر قرار دادن بقیه جملات در سری بینهایت

$$a_{n+1} = 0$$
$$a_{n+2} = 0$$
$$\vdots$$

- بنابراین
  – تابع مولد یک دنباله $\{a_n\}$ به صورت یک چند جمله‌ای درجه n تعریف می شود.

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

مثال

- تابع مولد برای دنباله $1, 1, 1, 1, 1, 1$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$(x^6 - 1)/(x - 1) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$G(x) = (x^6 - 1)/(x - 1)$$

مثال

- تابع مولد برای دنباله $a_k = C(m,k)$, for $k = 0, 1, 2, \ldots, m$
  - m یک عدد صحیح مثبت

$$G(x) = C(m,0) + C(m,1)x + C(m,2)x^2 + \cdots + C(m,m)x^m$$

  - طبق قضیه دوجمله‌ای

$$G(x) = (1+x)^m$$

توابع مولد

- $f(x) = 1/(1-x)$ تابع مولد برای دنباله $1, 1, 1, 1, \ldots$

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots \qquad |x| < 1$$

- $f(x) = 1/(1-ax)$ تابع مولد برای دنباله $1, a, a^2, a^3, \ldots$

$$1/(1-ax) = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots \qquad |ax| < 1$$

ترکیب سری‌های توانی

- اگر $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ آنگاه:

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k$$

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right)x^k$$

مثال

- اگر $f(x)=1/(1-x)^2$ ضرایب $a_0, a_1, a_2, \dots$ در بسط $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ را بدست آورید.

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$1/(1-x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} 1\right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

ضرایب دو جمله‌ای (تعمیم)

- ضرایب دو جمله‌ای در حالت تعمیم یافته
  - u یک عدد حقیقی
  - k یک عدد صحیح نامنفی

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} u(u-1)\cdots(u-k+1)/k! & \text{if } k > 0, \\ 1 & \text{if } k = 0. \end{cases}$$

- مثال $\binom{-2}{3}$

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!} = -4$$

ضرایب دو جمله‌ای (تعمیم)

- مثال $\binom{1/2}{3}$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!}$$
$$= (1/2)(-1/2)(-3/2)/6$$
$$= 1/16.$$

ضرایب دو جمله‌ای (تعمیم)

- محاسبه یک فرمول برای حالتی که n یک عدد صحیح منفی است! (برحسب ضرایب دوجمله‌ای معمولی)

$$\binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r (n+r-1)(n+r-2)\cdots n}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r (n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

$$= (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

$$= (-1)^r C(n+r-1, r).$$

تعمیم قضیه دو جمله‌ای

- اگر x و u دو عدد حقیقی باشند و $|x| < 1$ آنگاه:

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k$$

- مثال
  - تابع مولد $(1+x)^{-n}$
    - طبق تعمیم قضیه دوجمله‌ای

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$$

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C(n+k-1, k) x^k$$

  - تابع مولد $(1-x)^{-n}$
    - تبدیل x به -x

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k) x^k$$

کاربرد تابع مولد برای شمارش

- تعداد جوابهای معادله $e_1 + e_2 + e_3 = 17$ را با شرایط زیر بدست آورید.

$$2 \le e_1 \le 5$$
$$3 \le e_2 \le 6$$
$$4 \le e_3 \le 7$$

$$\underbrace{(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)}(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$$

- ضریب x^{17} در عبارت فوق

$\Rightarrow$ 3

مثال

- به چند طریق می توانیم 8 شیرینی مشابه را بین سه بچه متمایز تقسیم کرد به نحوی که هر بچه حداقل دو شیرینی دریافت کند و بیشتر از چهار شیرینی هم دریافت نکند.

  – حداقل 2 شیرینی و حداکثر 4

  $$(x^2 + x^3 + x^4)$$

  – با توجه به اینکه 3 بچه داریم!!

  $$(x^2 + x^3 + x^4)^3$$

  – باید ضریب x^8 را پیدا کنیم !؟!

$\Rightarrow$ 6

مثال

- با استفاده از تابع مولد تعداد ترکیب‌های kتایی از یک مجموعه n عضوی را بیابید. فرض می‌کنیم که قضیه دوجمله‌ای را می دانیم!
  - برای هر عضو در این مجموعه یا در ترکیب قرار می گیرد یا نه! $(1+x)$
  - بنابراین سهم هر عضو در تابع مولد $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
  - با توجه به اینکه n عضو داریم: $f(x)=(1+x)^n$
  - با استفاده از قضیه دوجمله‌ای

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

مثال

- با استفاده از تابع مولد تعداد ترکیب‌های rتایی از یک مجموعه n عضوی را در حالتی که تکرار مجاز است، بیابید.

  – تابع مولد $G(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$

  – از هر عضو در این مجموعه می توانیم به هر تعداد انتخاب کنیم

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

  – با توجه به اینکه n عضو داریم:

$$G(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^n$$

مثال

- با استفاده از تابع مولد تعداد ترکیب‌های rتایی از یک مجموعه n عضوی را در حالتی که تکرار مجاز است، بیابید.

$$1 + x + x^2 + \cdots = 1/(1-x)$$

$$G(x) = 1/(1-x)^n = (1-x)^{-n}$$

$$(1-x)^{-n} = (1+(-x))^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r$$

$$\binom{-n}{r}(-1)^r = (-1)^r C(n+r-1, r) \cdot (-1)^r$$

$$= C(n+r-1, r)$$

پایان

موفق و پیروز باشید