

به نام خدا

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها - مقدمه

۱. معکوس یک رشته می‌تواند به صورت بازگشتی طبق این رابطه تعریف شود: $(wa)^R = aw^R$, $a^R = a$ به ازای هر $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$ روابط زیر را اثبات کنید:

$$1.1. (uv)^R = v^R u^R \text{ به ازای هر } u, v \in \Sigma^+$$

$$2.1. (w^R)^R = w \text{ به ازای هر } w \in \Sigma^*$$

$$3.1. (L_1 L_2)^R = L_2^R L_1^R \text{ به ازای هر } L_1 \text{ و } L_2.$$

۲. برای هر یک از زبان‌های زیر که بر روی الفبای $\Sigma = \{a, b\}$ تعریف شده‌اند، یک گرامر بیابید.

۱.۲. زبانی که هر جمله آن شامل دقیقاً دو a باشد.

۲.۲. زبانی که هر جمله آن شامل حداقل دو a باشد.

۳.۲. زبانی که هر جمله آن بیشتر از سه a نداشته باشد.

۴.۲. زبانی که هر جمله آن با a شروع و با b خاتمه یابد.

۵.۲. زبانی که تعداد b در هر جمله آن زوج باشد.

۳. برای هر یک از زبان‌های زیر بر روی الفبای $\Sigma = \{a, b\}$ یک گرامر بیابید.

$$1.3. L_1 = \{a^n b^m : n > 0, m < n\}$$

$$2.3. L_2 = \{a^{2n} b^{3n} : n \geq 2\}$$

$$3.3. L_3 = \{a^n b^{n-2} : n \geq 3\}$$

$$4.3. L_4 = \{ww^R : w \in \{a, b\}^+\}$$

۴. اگر گرامر زبان L_n با متغیر S_n آغاز شود، برای هر یک از زبان‌های زیر یک گرامر بیابید.

$$1.4. L_1 L_2$$

$$2.4. L_1 \cup L_2$$

$$3.4. L_1^3$$

$$4.4. L_1^*$$

۵. برای هر یک از زبان‌های زیر که بر روی الفبای $\Sigma = \{a\}$ تعریف شده‌اند، یک گرامر بیابید.

$$1.5. L_1 = \{w : |w| \bmod 3 > 0\}$$

$$2.5. L_2 = \{w : |w| \bmod 3 = 0\}$$

۶. در هر قسمت نشان دهید آیا دو گرامر داده شده معادل یکدیگرند یا خیر. دو گرامر معادل یکدیگرند اگر زبان‌هایی که تولید می‌کنند با هم برابر باشند.

$$1.6. S \rightarrow SS|aSb|\lambda \text{ و } S \rightarrow SS|SSS|aSb|\lambda$$

$$2.6. S \rightarrow aSb|bSa|a \text{ و } S \rightarrow aSb|bSa|SS|\lambda$$

۷. فرض کنید در یک زبان برنامه‌نویسی، اعداد بدین صورت باشند: (۱) اعداد یا به صورت علامت‌دار و یا بدون علامت باشند. (۲) اعداد از سه قسمت صحیح و اعشاری و توانی تشکیل شده باشند. (۳) قسمت اعشاری با علامت نقطه آغاز می‌شود و می‌تواند تهی باشد. (۴) قسمت توانی با علامت e آغاز می‌شود و با یک عدد صحیح علامت‌دار پایان می‌یابد. قسمت توانی نیز می‌تواند تهی باشد.

برای چنین اعدادی یک گرامر طراحی کنید.

۸. مکمل دو یا متمم دو برای یک عدد دودویی، بدین صورت به دست می‌آید: ابتدا نقیض عدد دودویی با گرفتن نقیض از هر بیت به دست می‌آید. سپس عدد ۱ به عدد دودویی به دست آمده اضافه می‌شود. یک مبدل طراحی کنید که عددی دودویی را به صورت یک رشته دریافت کرده، و متمم دو را برای آن به صورت یک رشته تولید کند. بیت‌های مرتبه پایین‌تر در سمت چپ رشته قرار دارند و رشته از چپ به راست خوانده می‌شود.

۹. (اختیاری) فرض کنید $x = a_1 a_2 \dots a_n$ یک عدد دودویی باشد. مبدلی طراحی کنید که عدد x را به صورت یک رشته دریافت کند، و عدد $y = b_1 b_2 \dots b_n$ را با ویژگی زیر تولید کند: $b_1 = b_2 = 0$ و $b_i = (a_{i-2} + a_{i-1} + a_i) \bmod 2$ به ازای $i > 2$.

۱۰. (اختیاری) کامپیوترهای دیجیتال اطلاعات را توسط رشته‌هایی از بیت‌ها با استفاده از نوعی رمزگذاری نشان می‌دهند. برای مثال حروف می‌توانند توسط سیستم بونی‌کد رمزگذاری شوند. مبدلی طراحی کنید که یک رشته دودویی را دریافت کند و رشته رمزگشایی شده را با ویژگی‌های زیر تولید کند: $a \rightarrow 00, b \rightarrow 01, c \rightarrow 10, d \rightarrow 11$ ، بدین معنی که رشته ۰۰ توسط حرف a رمزگشایی می‌شود، و الی آخر.