به نام خدا

ساختمان‌های گسسته

توابع مولد

Dr. Aref Karimiafshar
A.karimiafshar@ec.iut.ac.ir

مثال

- تابع مولد g(x) را بیابید که در آن a_r تعداد جوابهای نامنفی معادله زیر باشد.

$$2a + 3b + 5c = r$$

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ \dots\ )(1 + x^3 + x^6 + \ \dots\ )(1 + x^5 + x^{10} + \ \dots\ ) \ = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\, x^r$$

$$x^4 \rightarrow 4/2 \rightarrow a = 2$$

$$x^3 \rightarrow 3/3 \rightarrow b = 1$$

نکته

- تعداد جوابهای نامنفی معادله $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = r$
  - که در آن a_i اعداد طبیعی هستند، برابر است با:
  - ضریب x^r در سری توانی

$$(1 + x^{a_1} + x^{2a_1} + \ \dots\ )\,(1 + x^{a_2} + x^{2a_2} + \ \dots\ ) \cdots (1 + x^{a_n} + x^{2a_n} + \ \dots\ )$$

روابط کمکی در محاسبه سری توانی

- نکته 1

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ ...)^n \ = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \, x^r$$

$$a_r = \binom{\boldsymbol{n+r-1}}{\boldsymbol{r}} = \{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = \boldsymbol{r} \text{ تعداد جوابهای معادله}\}$$

- نکته 2

$$(1 - x^m)^n = 1 - \binom{n}{1} x^m + \binom{n}{2} x^{2m} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} x^{mn}$$

- نکته 3

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ ... + x^{m-1})^n \ = (1 - x^m)^n (1 + x + x^2 + x^3 + \ ...)^n$$

مثال

- تعداد جوابهای معادله $a+b+c+d=27$
  - با شرط $3 \le a,b,c,d \le 8$

$$(x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)^4 = a_{27}x^{27} + \cdots$$

$$x^{12}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4 = x^{12}(1-x^6)^4(1+x+x^2+x^3+\ \ldots)^4$$

$$= x^{12}\left(1-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-\binom{4}{3}x^{18}+\binom{4}{4}x^{24}\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{4+r-1}{r}x^r\right)$$

$$= \left(\binom{18}{15}-\binom{4}{1}\binom{12}{9}+\binom{4}{2}\binom{6}{3}\right)(x^{27})+\cdots$$

مثال

- ضریب x^{24} را در $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ \dots)^5$ بدست آورید.

تعداد جوابهای نامنفی معادله $a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 24$

$$\binom{28}{4}$$

مثال

- ضریب x^{24} را در $g(x) = (x^3 + x^4 + \ ...)^5$ بدست آورید.

$$(x^3 + x^4 + \ ...)^5 = x^{15}(1 + x + x^2 + \ ...)^5$$

$$\binom{13}{4}$$

قضیه

- فرض کنید $g(x)$ تابع مولد a_r و $h(x)$ تابع مولد b_r باشد.
- (1 $Ag(x) + Bh(x)$ تابع مولد $Aa_r + Bb_r$ است.
- (2 $(1-x)g(x)$ تابع مولد $a_r - a_{r-1}$ است.
- (3 $(1 + x + x^2 + \cdots)g(x)$ تابع مولد $a_0 + a_1 + \cdots + a_r$ است.

$$(1 + x + x^2 + \cdots)g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\, x^r + \sum_{r=1}^{\infty} a_{r-1}\, x^r + \sum_{r=2}^{\infty} a_{r-2}\, x^r + \ldots$$

قضیه

- فرض کنید $g(x)$ تابع مولد a_r و $h(x)$ تابع مولد b_r باشد.

- 4) $g(x)h(x)$ تابع مولد $a_r b_0 + a_{r-1} b_1 + \cdots + a_0 b_r$ است.

- 5) $xg(x)'$ تابع مولد ra_r است.

$$x\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\, x^r\right)' = x\left(\sum_{r=0}^{\infty} (r+1)\, a_{r+1}\, x^r\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} r a_r\, x^r$$

مثال

- تابع مولد $a_r = 3r + 5r^2$ بدست آورید.

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots$$

  – اگر g(x) تابع مولد r و h(x) تابع مولد r^2
  – آنگاه $3g(x) + 5h(x)$ تابع مولد $3r + 5r^2$ است

$$g(x) = x\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$h(x) = x\left(x\left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)'$$

$$\frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{5x + 5x^2}{(1-x)^3}$$

مثال

- تابع مولد تعداد راههای انتخاب r نفر از یک کلاس n نفره و انتخاب یک سرگروه از بین این r نفر را بدست آورید.

- تابع مولد این مسئله به صورت: $\sum_{r=0}^{\infty} r a_r x^r$
  - که تعداد راههای انتخاب r نفر از n نفر است
  - سری توانی a_r به صورت $\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r$

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r$$

$$x((1+x)^n)' = nx(1+x)^{n-1}$$

توابع مولد مفید

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n,k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n,2)a^2x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n,k)a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk} = 1 + C(n,1)x^r + C(n,2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	$C(n,k/r)$ if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	1 if $k \le n$; 0 otherwise
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$	a^k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1 + x^r + x^{2r} + \cdots$	1 if $r \mid k$; 0 otherwise

حل روابط بازگشتی

- مثال: رابطه بازگشتی زیر را با شرط اولیه $a_0 = 2$ حل کنید.

$$a_k = 3a_{k-1} \text{ for } k = 1, 2, 3, \ldots$$

- اگر $G(x)$ تابع مولد دنباله $\{a_k\}$ باشد، داریم:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

- ضرب x در طرفین

$$xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

حل روابط بازگشتی

- مثال: رابطه بازگشتی زیر را با شرط اولیه $a_0 = 2$ حل کنید.

$a_k = 3a_{k-1}$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} G(x) - 3xG(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - 3a_{k-1})x^k \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$G(x) - 3xG(x) = (1 - 3x)G(x) = 2.$$

$$G(x) = 2/(1 - 3x)$$

حل روابط بازگشتی

- مثال: رابطه بازگشتی زیر را با شرط اولیه $a_0 = 2$ حل کنید.

$a_k = 3a_{k-1}$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$

$G(x) = 2/(1-3x)$

$1/(1-ax) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k$

$$G(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 3^k x^k$$

$$a_k = 2 \cdot 3^k$$

مثال

- مثال: رابطه بازگشتی زیر را با شرط اولیه $a_0 = 1$ و $a_1 = 9$ حل کنید.

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$$

طرفین رابطه را در x^n ضرب می کنیم

$$a_n x^n = 8a_{n-1}x^n + 10^{n-1}x^n$$

فرم تابع مولد:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

مثال

- مثال: رابطه بازگشتی زیر را با شرط اولیه $a_0 = 1$ و $a_1 = 9$ حل کنید.
$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$

طرفین رابطه $a_n x^n = 8a_{n-1}x^n + 10^{n-1}x^n$ را از n=1 جمع می بندیم

$$
\begin{aligned}
G(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (8a_{n-1}x^n + 10^{n-1}x^n) \\
&= 8\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1}x^n \\
&= 8x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1}x^{n-1} \\
&= 8x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n \\
&= 8xG(x) + x/(1 - 10x),
\end{aligned}
$$

مثال

- مثال: رابطه بازگشتی زیر را با شرط اولیه $a_0 = 1$ و $a_1 = 9$ حل کنید.

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$$

$$G(x) - 1 = 8xG(x) + x/(1 - 10x)$$

$$G(x) = \frac{1 - 9x}{(1 - 8x)(1 - 10x)} \longrightarrow G(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - 8x} + \frac{1}{1 - 10x}\right)$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(8^n + 10^n)x^n$$

$$a_n = \frac{1}{2}(8^n + 10^n)$$

پایان

موفق و پیروز باشید