به نام خدا

طراحی سیستم های دیجیتال ۱

ادامه فصل دوم

جبر بول و گیت های منطقی

Dr. M. Beigizadeh

✓ استخراج تابع منطقی از جدول صحت

❖ هدف بدست آوردن تابع منطقی مربوط به جدول صحت روبرو است

x	y	z	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$$f_1 = \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ + \ldots\ldots$$

$$f_1 = \underline{\bar{x}\bar{y}z} + \underline{x\bar{y}\bar{z}} + \underline{x\bar{y}z} + \underline{xy\bar{z}} + \underline{xyz}$$

$$f_2 = \underline{\bar{x}\bar{y}z} + \underline{\bar{x}yz} + \underline{x\bar{y}\bar{z}} + \underline{x\bar{y}z}$$

✓ استخراج جدول صحت از تابع منطقی

❖ هدف بدست آوردن جدول صحت از روی تابع منطقی است

$$f_2 = \bar{x}z + x\bar{y}$$

$\bar{x}z \Rightarrow x = 0\,, z = 1\,, y = 0 \; or \; 1 \;\; \Rightarrow (0{,}0{,}1)\,, (0{,}1{,}1)$

$x\bar{y} \Rightarrow x = 1\,, y = 0\,, z = 0 \; or \; 1 \;\; \Rightarrow (1{,}0{,}0)\,, (1{,}0{,}1)$

x	y	z	F_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

✓ مثال طراحی

❖ می خواهیم مداری طراحی کنیم که رای اکثریت را در رای گیری از سه نفر بدست آورد.

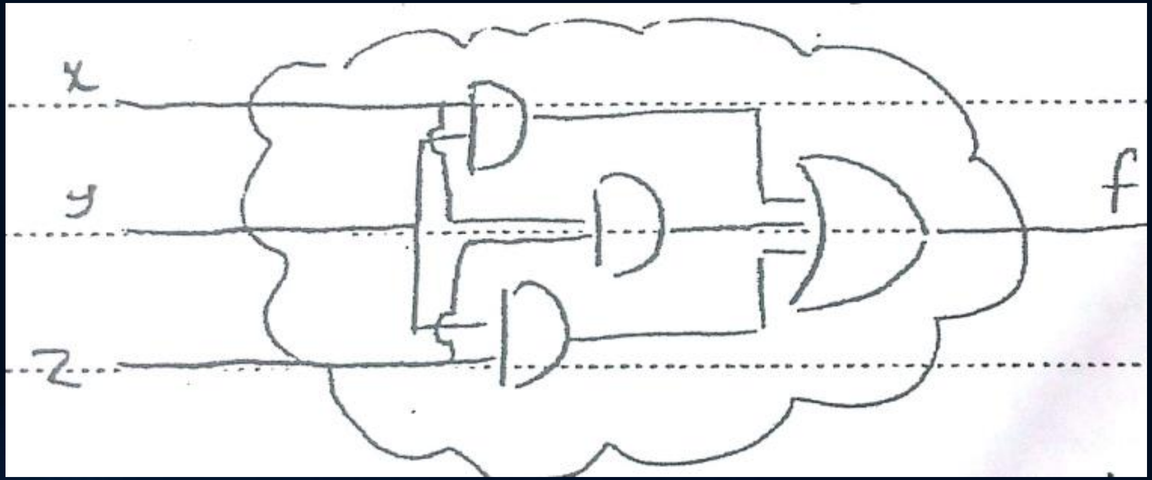
x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

$$= xy(z + \bar{z}) + \bar{x}yz + x\bar{y}z = y(x + \bar{x}z) + x\bar{y}z$$

$$= y(x + z) + x\bar{y}z = x(y + \bar{y}z) + yz$$

$$= xy + xz + yz$$



✓فرم های توابع بولی

❖ فرم SOP (Sum of Product): جمع حاصلضرب ها

$$f(A, B, C, D) = A\bar{B}C + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}C\bar{D}$$

❖ فرم POS (Product of Sum): حاصلضرب جمع ها

$$f(A, B, C, D) = (\bar{A} + B + C)(\bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{C} + D)$$

❖ به این فرم ها، فرم استاندارد (Standard Form) نیز می گویند.

❖ فرم متعارف (Canonical Form): همان فرم های SOP و POS هستند که دارای ویژگی های خاصی باشند.

✓ فرم های توابع بولی

❖ **جملات مینیمم (Minterms):** اگر یک جمله حاصلضربی از تمامی متغیرهای تابع که فقط یکبار بصورت متمم یا غیرمتمم استفاده شده، تشکیل شده باشد، به آن جمله یک جمله مینیمم (Minterm) گویند.

❖ اگر تابعی از جمع Minterm ها تشکیل شده باشد، به آن فرم Canonical SOP گویند.

$$f_\alpha(A, B, C) = \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} + \bar{A}BC + ABC$$

Uncomplemented variable:	1
Complemented variable:	0

Minterm	Minterm Code	Minterm Number
$\bar{A}B\bar{C}$	010	m_2
$AB\bar{C}$	110	m_6
$\bar{A}BC$	011	m_3
ABC	111	m_7

تصاص داده می شود.

می دهند که j معادل دهدهی عدد

ست.

$$f_\alpha(A, B, C) = m_2 + m_3 + m_6 + m_7$$

$$f_\alpha(A, B, C) = \sum m(2, 3, 6, 7)$$

Inputs ABC	Outputs $f_\alpha(A, B, C)$	$= \sum m(2, 3, 6, 7)$
000	0	
001	0	
010	1	$\leftarrow m_2$
011	1	$\leftarrow m_3$
100	0	
101	0	
110	1	$\leftarrow m_6$
111	1	$\leftarrow m_7$

✓جملات مینیمم (Minterms)

❖ **نکته مهم:** ترتیب متغیرها در تابع بسیار مهم است. زیرا این ترتیب، وزن بیت ها را مشخص می کند

$$f_\alpha(A, B, C) = \sum m(2, 3, 6, 7)$$

$$\begin{aligned} f_\beta(B, C, A) &= \sum m(2, 3, 6, 7) \\ &= \underbrace{m_2}_{010} + \underbrace{m_3}_{011} + \underbrace{m_6}_{110} + \underbrace{m_7}_{111} \\ &= \bar{B}C\bar{A} + \bar{B}CA + BC\bar{A} + BCA \\ &= \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_\beta(A, B, C) &= f_\beta(B, C, A) \\ &= \underbrace{\bar{A}\bar{B}C}_{001} + \underbrace{\bar{A}BC}_{011} + \underbrace{A\bar{B}C}_{101} + \underbrace{ABC}_{111} \\ &= m_1 + m_3 + m_5 + m_7 \\ &= \sum m(1, 3, 5, 7) \end{aligned}$$

❖ متمم تابع:

Row No. (i)	Inputs ABC	Outputs $f_\alpha(A, B, C)$	$= \sum m(2, 3, 6, 7)$	Complement $\bar{f}_\alpha(A, B, C)$	$= \sum m(0, 1, 4, 5)$
0	0 0 0	0		1	$\leftarrow m_0$
1	0 0 1	0		1	$\leftarrow m_1$
2	0 1 0	1	$\leftarrow m_2$	0	
3	0 1 1	1	$\leftarrow m_3$	0	
4	1 0 0	0		1	$\leftarrow m_4$
5	1 0 1	0		1	$\leftarrow m_5$
6	1 1 0	1	$\leftarrow m_6$	0	
7	1 1 1	1	$\leftarrow m_7$	0	

$$f_\alpha(A, B, C) = \sum m(2, 3, 6, 7)$$

$$\bar{f}_\alpha(A, B, C) = \sum m(0, 1, 4, 5)$$

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

✓ فرم توابع بولی

❖ **جملات ماکزیمم (Maxterms):** اگر یک جمله حاصل جمعی از تمامی متغیرهای تابع که فقط یکبار بصورت متمم یا غیرمتمم استفاده شده، تشکیل شده باشد، به آن جمله یک جمله ماکزیمم (Maxterm) گویند.

❖ اگر تابعی از ضرب Maxterm ها تشکیل شده باشد، به آن فرم Canonical POS گویند.

$$f_\gamma(A, B, C) = (A + B + C)(A + B + \bar{C})(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})$$

Inputs ABC	Outputs $f_\gamma(A, B, C)$
000	0
001	0
010	1
011	1
100	0
101	0
110	1
111	1

❖ ...د باینری اختصاص داده می شود.

Uncomplemented variable:	0
Complemented variable:	1

❖ ... M_j نشان می دهند که j معادل دهدهی عدد ... Maxterm است.

Maxterm	Maxterm Code	Maxterm List
$A + B + C$	000	M_0
$A + B + \bar{C}$	001	M_1
$\bar{A} + B + C$	100	M_4
$\bar{A} + B + \bar{C}$	101	M_5

$$f_\gamma(A, B, C) = M_0 M_1 M_4 M_5 = \prod M(0, 1, 4, 5)$$

✓جملات ماکزیمم (Maxterms)

❖ **نکته مهم:** در این حالت نیز ترتیب متغیرها در تابع بسیار مهم است.

❖ با مقایسه جدول صحت دو تابع f_a و f_γ خواهیم داشت:

Inputs ABC	Outputs $f_\alpha(A, B, C)$	Outputs $f_\gamma(A, B, C)$
000	0	0
001	0	0
010	1	1
011	1	1
100	0	0
101	0	0
110	1	1
111	1	1

$$f_\alpha(A, B, C) = \sum m(2, 3, 6, 7)$$
$$= f_\gamma(A, B, C)$$
$$= \prod M(0, 1, 4, 5)$$

❖ دو فرم Canonical SOP و Canonical POS قابل تبدیل به یکدیگر هستند.

$$\bar{m}_1 = \underbrace{\overline{\bar{A}\bar{B}C}}_{001} = \underbrace{A + B + \bar{C}}_{001} = M_1$$

(minterm code) (maxterm code)

❖ Minterm ها و Maxterm ها متمم یکدیگر هستند.

$$\bar{m}_i = M_i$$
$$\bar{M}_i = \bar{\bar{m}}_i = m_i$$

در Canonical SOP با یک های تابع سروکار داریم و در Canonical POS با صفرهای تابع سروکار داریم

✓ فرم توابع بولی

❖ مثال: تابع روبرو را به فرم Minterm و Maxterm بنویسید.

$$f(A,B,C) = (A + B + \bar{C}).(A + \bar{B} + \bar{C}).(\bar{A} + B + \bar{C}).(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

$$f(A,B,C) = \underbrace{(A + B + \bar{C})}_{001}\underbrace{(A + \bar{B} + \bar{C})}_{011}\underbrace{(\bar{A} + B + \bar{C})}_{101}\underbrace{(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})}_{111}$$
$$= M_1 M_3 M_5 M_7$$
$$= \prod M(1,3,5,7)$$

$$f(A,B,C) = \prod M(1,3,5,7) = \sum m(0,2,4,6)$$

Row No. (i)	Inputs ABC	Outputs $f(A,B,C)$	Outputs $\bar{f}(A,B,C)$	$= \prod M(0,2,4,6)$
0	000	1	0	$\leftarrow M_0$
1	001	0	1	
2	010	1	0	$\leftarrow M_2$
3	011	0	1	
4	100	1	0	$\leftarrow M_4$
5	101	0	1	
6	110	1	0	$\leftarrow M_6$
7	111	0	1	

$$f(A,B,C) = \sum m(0,2,4,6) = \prod M(1,3,5,7)$$
$$\bar{f}(A,B,C) = \sum m(1,3,5,7) = \prod M(0,2,4,6)$$

❖ پس برای متمم یک تابع، یا اعداد را تغییر می دهیم یا علامت را.

✓فرم توابع بولی

❖ **نکته:** برای دستیابی به ضابطه تابع از روی جدول صحت:

- می توان برای هر ترکیبی از متغیرها که به ازای آن تابع **یک** می شود، یک Minterm تشکیل داده و سپس جملات را با هم OR کنیم (بصورت SOP).
- می توان برای هر ترکیبی از متغیرها که به ازای آن تابع **صفر** می شود، یک Maxterm تشکیل داده و سپس جملات را با هم AND کنیم (بصورت POS).

A	B	C	f (A,B,C)	
0	0	0	0	M_0
0	0	1	0	M_1
0	1	0	1	m_2
0	1	1	0	M_3
1	0	0	1	m_4
1	0	1	1	m_5
1	1	0	0	M_6
1	1	1	1	m_7

$$f(A,B,C) = \sum m(2,4,5,7) = \prod M(0,1,3,6)$$

✓فرم توابع بولی

❖ **نکته:** اگر در جملات تابع، یک یا چند متغیر (مثلا متغیر A) وجود نداشت، آن جمله را در $(A+\bar{A})$ ضرب می کنیم تا متغیر ظاهر شود و بتوان لیست جملات مینیمم و ماکزیمم را بدست آورد.

$$F = A + B'C$$

$$A = A(B + B') = AB + AB'$$

$$A = AB(C + C') + AB'(C + C') = ABC + ABC' + AB'C + AB'C'$$

$$B'C = B'C(A + A') = AB'C + A'B'C$$

$$F = A'B'C + AB'C + AB'C + ABC' + ABC = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$$

❖ روش دیگر:

$$f = A + \bar{B}C \rightarrow AXX \rightarrow \begin{cases} A00 \rightarrow 100 \rightarrow m_4 \\ A01 \rightarrow 101 \rightarrow m_5 \\ A10 \rightarrow 110 \rightarrow m_6 \\ A11 \rightarrow 111 \rightarrow m_7 \end{cases}$$

Don't care

$$X\bar{B}C \rightarrow \begin{cases} 0\bar{B}C \rightarrow 001 \rightarrow m_1 \\ 1\bar{B}C \rightarrow 101 \rightarrow m_5 \end{cases} \Rightarrow f = \sum m(1,4,5,6,7)$$

$$F = A(A + \bar{C})$$

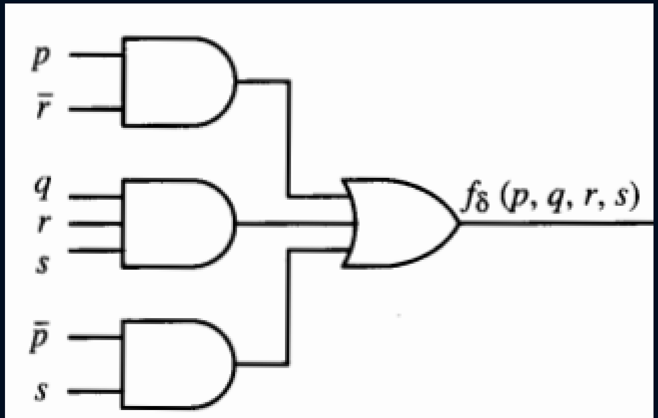
$$A+X+X \rightarrow \begin{cases} A+0+0 \rightarrow 000 \rightarrow M_0 \\ A+0+1 \rightarrow 001 \rightarrow M_1 \\ A+1+0 \rightarrow 010 \rightarrow M_2 \\ A+1+1 \rightarrow 011 \rightarrow M_3 \end{cases}$$

$$A+X+\bar{C} \rightarrow \begin{cases} A+0+\bar{C} \rightarrow 001 \rightarrow M_1 \\ A+1+\bar{C} \rightarrow 011 \rightarrow M_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f = \prod M(0,1,2,3)}$$

✓شبکه های AND-OR و NAND

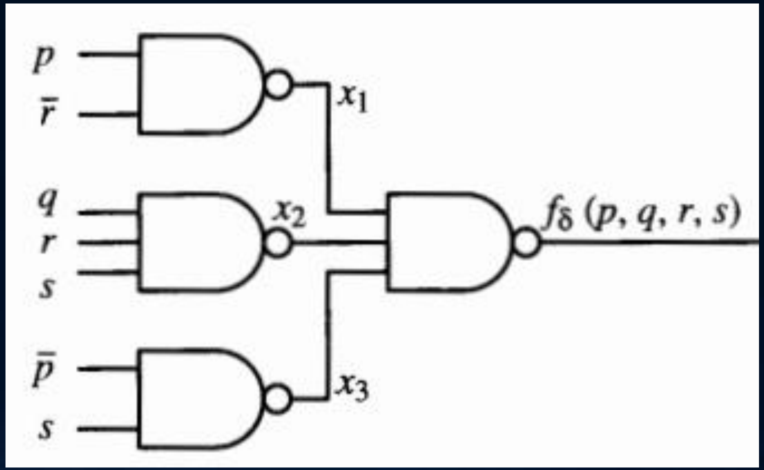
❖ توابعی که به فرم SOP هستند، از طریق شبکه های AND-OR پیاده سازی می شوند.

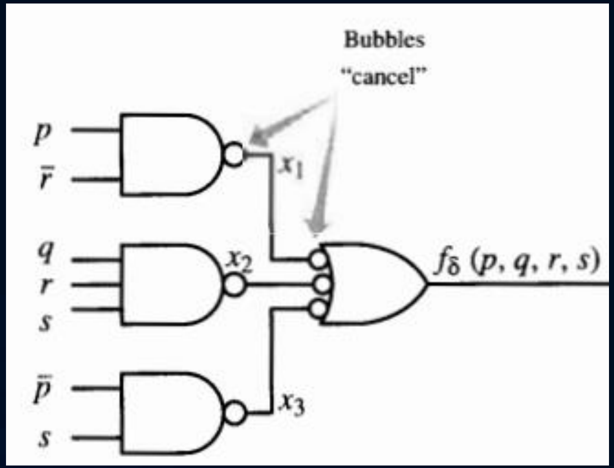
$$f_\delta(p,q,r,s) = p\bar{r} + qrs + \bar{p}s$$



❖ اینگونه توابع را می توان بصورت تمام NAND نیز پیاده سازی کرد.

$$\begin{aligned} f_\delta(p,q,r,s) &= \overline{\overline{p\bar{r} + qrs + \bar{p}s}} \\ &= \overline{\overline{p\bar{r}} \cdot \overline{qrs} \cdot \overline{\bar{p}s}} \end{aligned}$$

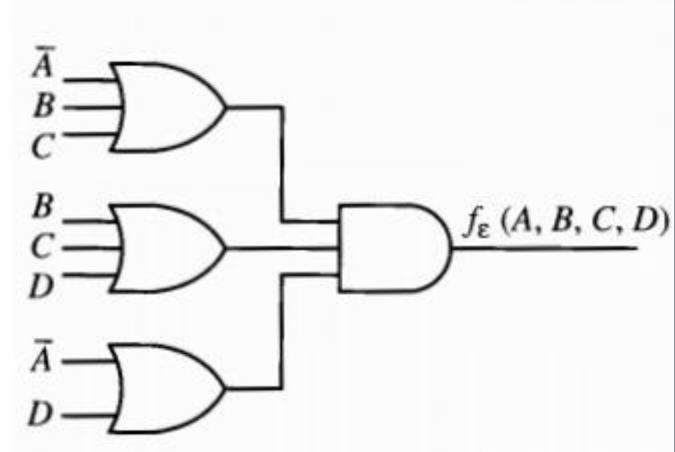




✓شبکه های OR-AND و NOR

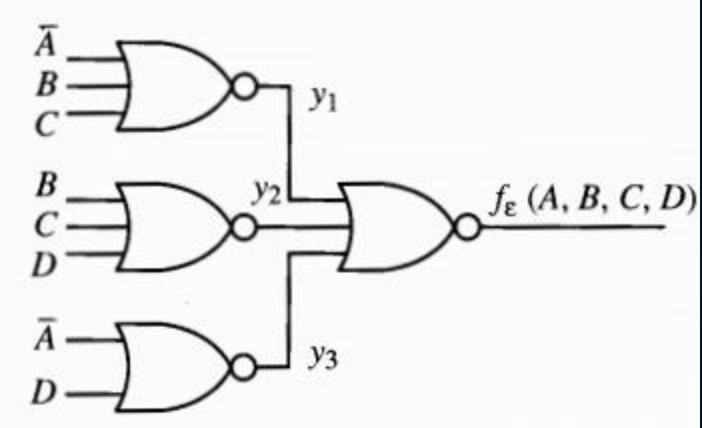
❖ توابعی که به فرم POS هستند، از طریق شبکه های OR-AND پیاده سازی می شوند.

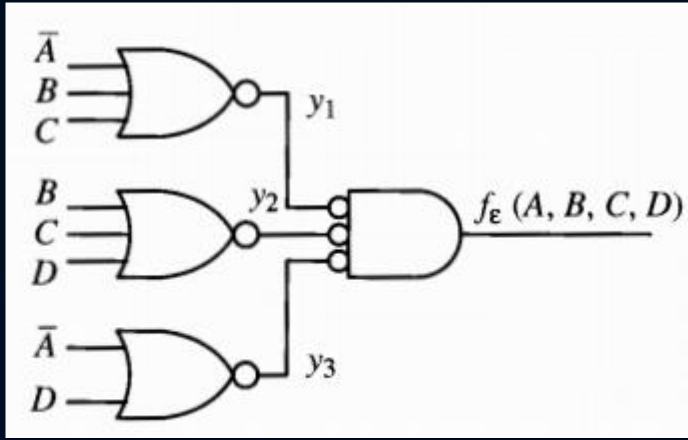
$$f_\epsilon(A, B, C, D) = (\bar{A} + B + C)(B + C + D)(\bar{A} + D)$$



❖ اینگونه توابع را می توان بصورت تمام NOR نیز پیاده سازی کرد.

$$f_\epsilon(A, B, C, D) = \overline{\overline{(\bar{A} + B + C)(B + C + D)(\bar{A} + D)}}$$
$$= \overline{\overline{\bar{A} + B + C} + \overline{B + C + D} + \overline{\bar{A} + D}}$$





✓آی سی ها (ICs)

❖ مدارهای مجتمع (Integrated Circuits)

❖ مشخصات مهم آی سی ها

✓ سرعت (Speed)

✓ توان مصرفی (Power Consumption)

✓ حاشیه نویز (Noise Margin)

✓ Fan-In

✓ Fan-Out

✓آی سی ها (ICs)

❖ دسته بندی آی سی ها از لحاظ مجتمع سازی:

- ✓ Small-Scale Integration (SSI)   NG < 10
- ✓ Medium-Scale Integration (MSI)   10 < NG < 1000   (Decoders, Adders,…)
- ✓ Large-Scale Integration (LSI)   NG > 1000   (Processors, Memory,…)
- ✓ Very Large-Scale Integration (VLSI)   NG ~ millions of Gate   (Memory array, …)