<u>به نام خدا</u>

طراحی سیستم های دیجیتال ۱

فصل اول

سیستم های عدد نویسی

Dr. M. Beigizadeh

✓ مبنای اعداد

- ❖ اعدادی که بطور معمول بیان می کنیم، در مبنای ده هستند.
- ❖ به اعداد در مبنای ده، دهدهی یا Decimal گفته می شود.
- ❖ اعداد در مبنای ده می توانند ارقام 9 ~ 0 را داشته باشند.

$$7{,}392 \rightarrow 7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

$$a_5a_4a_3a_2a_1a_0.\ a_{-1}a_{-2}a_{-3} \rightarrow 10^5a_5 + 10^4a_4 + 10^3a_3 + 10^2a_2 + 10^1a_1 + 10^0a_0 + 10^{-1}a_{-1} + 10^{-2}a_{-2} + 10^{-3}a_{-3}$$

- ❖ مبنا را با نماد r نشان می دهند.
- ❖ مبنا به توان ارزش مکانی معادل وزن هر رقم می باشد.

$$a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot r^2 + a_1 \cdot r + a_0 + a_{-1} \cdot r^{-1} + a_{-2} \cdot r^{-2} + \cdots + a_{-m} \cdot r^{-m}$$

✓ مبنای اعداد

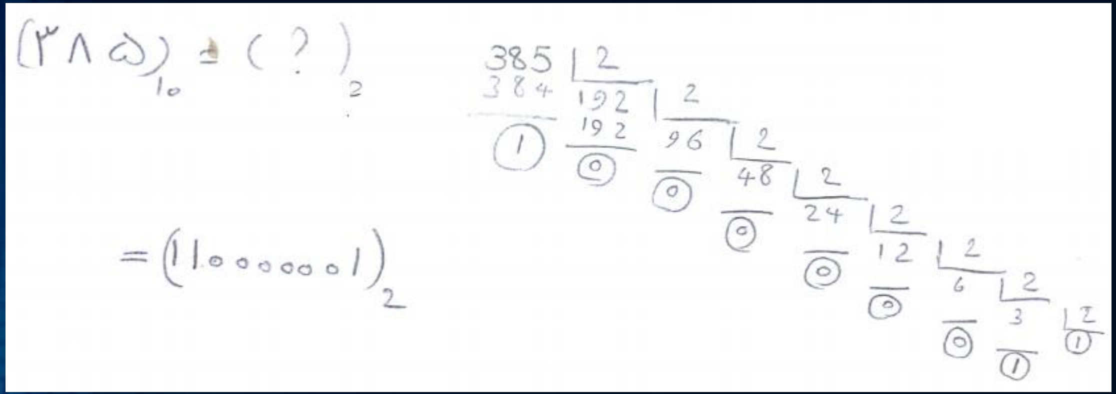
❖ مبنای ۲ (r = 2)

- ✓ به اعداد در مبنای دو، دودویی یا باینری (Binary) گفته می شود.
- ✓ اعداد در مبنای دو می توانند ارقام 1 , 0 را داشته باشند.
- ✓ به ارقام صفر و یک در مبنای دو، بیت (BIT) گفته می شود. (Binary DigIT)
- ✓ هر ضریب a_j در 2^j ضرب می شود.

$$(1101.01)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = (13.25)_{10}$$

✓ مبنای اعداد

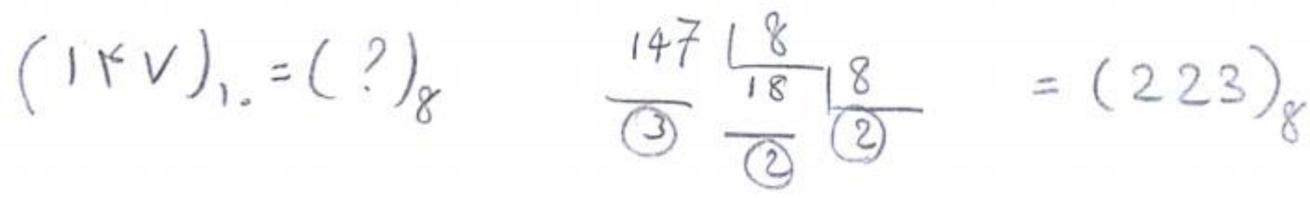
- ❖ برای تبدیل از مبنای ۱۰ به مبنای r، از تقسیم های متوالی بر r استفاده می کنیم.



$(۳۸۵)_{10} = (?)_2$

385 | 2 → 384, ①
192 | 2 → 192, ⓪
96 | 2 → ⓪
48 | 2 → ⓪
24 | 2 → ⓪
12 | 2 → ⓪
6 | 2 → ⓪
3 | 2 → ①
①

$= (110000001)_2$

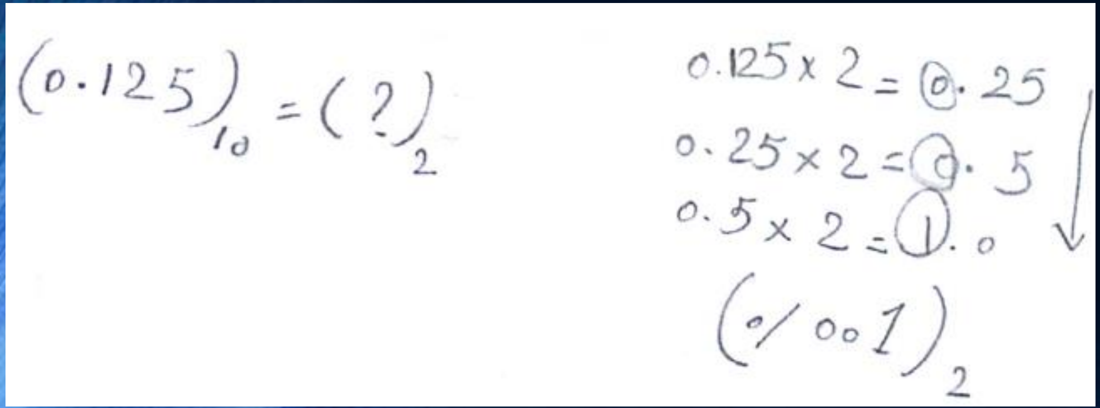


$(۱۴۷)_{10} = (?)_8$

147 | 8 → ③
18 | 8 → ②
②

$= (223)_8$

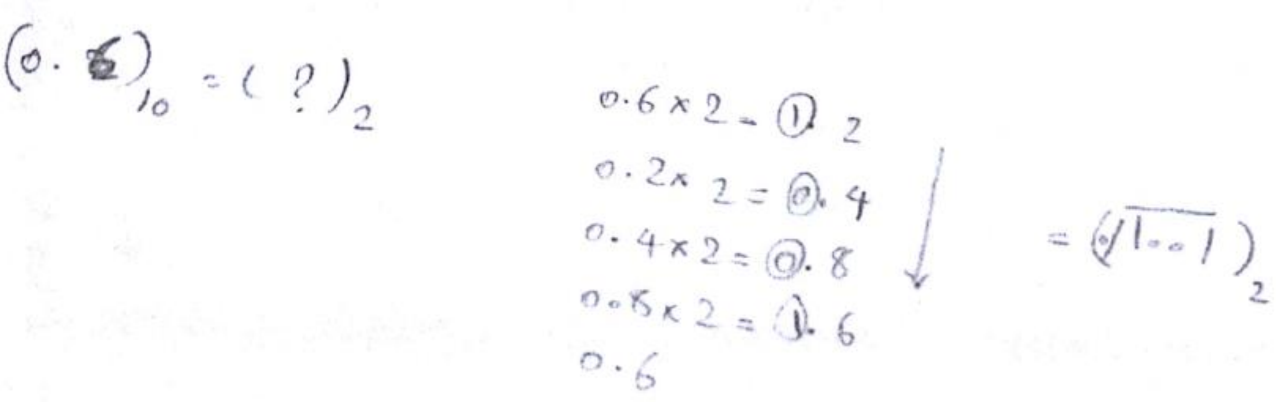
- ❖ برای تبدیل اعداد اعشاری به مبنای ۲، بجای تقسیم از ضرب استفاده می کنیم.



$(0.125)_{10} = (?)_2$

$0.125 \times 2 = ⓪.25$
$0.25 \times 2 = ⓪.5$
$0.5 \times 2 = ①.0$

$(0/001)_2$



$(0.6)_{10} = (?)_2$

$0.6 \times 2 = ①.2$
$0.2 \times 2 = ⓪.4$
$0.4 \times 2 = ⓪.8$
$0.8 \times 2 = ①.6$
0.6

$= (0/1001)_2$

✓ مبنای اعداد

❖ چند نکته:

✓ در مبنای ۲ به سمت راست ترین بیت، LSB و به سمت چپ ترین بیت، MSB گویند.

✓ از طریق بیت LSB می توان تشخیص داد که عدد زوج است یا فرد.

$$(\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{یک}})_2 = (2^n - 1)_{10}$$

$$(1\,\underbrace{00\ldots0}_{n\ \text{صفر}})_2 = (2^n)_{10}$$

✓ اگر n بیت سمت راست یک عدد باینری را حذف کنیم، تقسیم صحیح بر 2^n انجام داده ایم.

✓ اگر n بیت صفر به سمت راست یک عدد باینری اضافه کنیم، عدد را در 2^n ضرب کرده ایم.

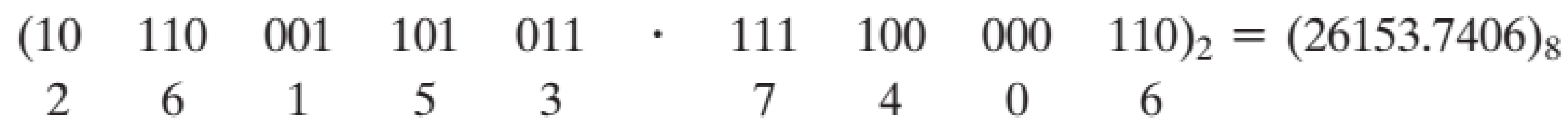
✓ مبنای اعداد

❖ مبنای ۸ $(r = 8)$

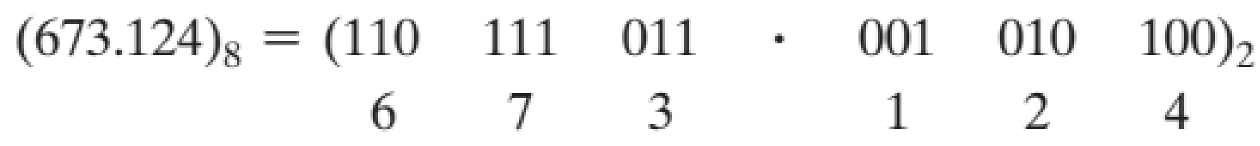
✓ به اعداد در مبنای ۸، Octal گفته می شود.

✓ اعداد در مبنای ۸ می توانند ارقام 7 ~ 0 را داشته باشند.

✓ هر رقم در مبنای ۸ معادل ۳ رقم در مبنای ۲ است.



(10	110	001	101	011	·	111	100	000	110)$_2$ = $(26153.7406)_8$
2	6	1	5	3		7	4	0	6

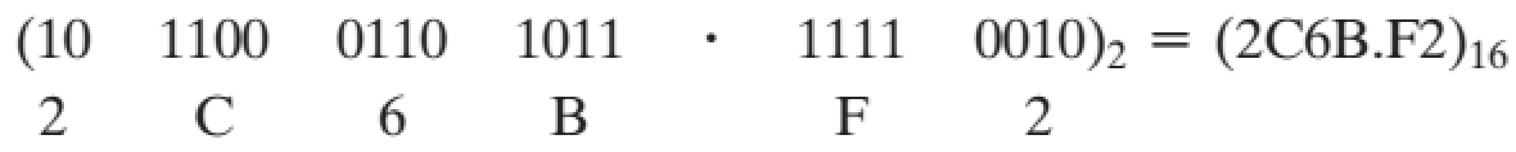


$(673.124)_8$ =	(110	111	011	·	001	010	100)$_2$
	6	7	3		1	2	4

✓ مبنای اعداد

❖ مبنای ۱۶ (r = 16)

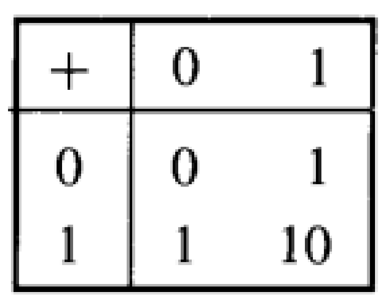
- ✓ به اعداد در مبنای ۱۶، Hexadecimal گفته می شود.
- ✓ اعداد در مبنای ۱۶ می توانند ارقام 15 ~ 0 را داشته باشند.
- ✓ از 0 تا 9 بصورت رقم و از 10 تا 15 بصورت حروف A، B، C، D، E و F نمایش داده می شوند.
- ✓ هر رقم در مبنای ۱۶ معادل ۴ رقم در مبنای ۲ است.



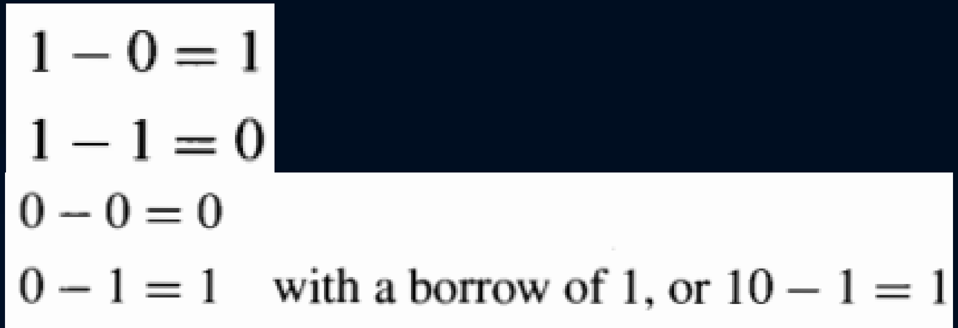
$$\begin{array}{lllllll} (10 & 1100 & 0110 & 1011 & \cdot & 1111 & 0010)_2 = (2C6B.F2)_{16} \\ \ \ 2 & \ \ C & \ \ 6 & \ \ B & & \ \ F & \ \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} (306.D)_{16} = (0011 & 0000 & 0110 & \cdot & 1101)_2 \\ \qquad\qquad\quad\ \ 3 & \ \ 0 & \ \ 6 & & \ \ D \end{array}$$

✓ جمع و تفریق اعداد در مبنای ۲



+	0	1
0	0	1
1	1	10

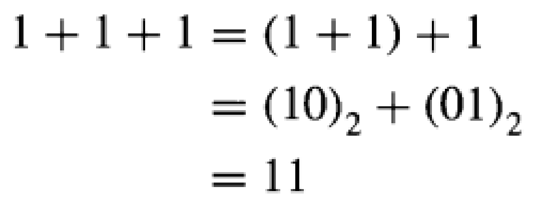


$1 - 0 = 1$

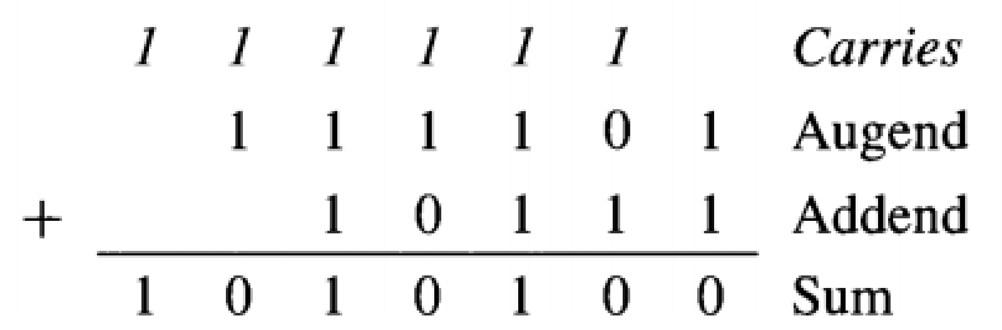
$1 - 1 = 0$

$0 - 0 = 0$

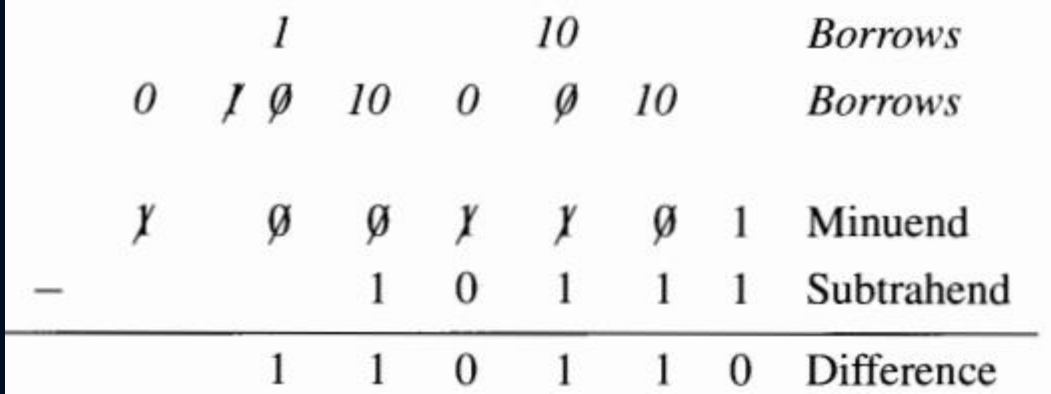
$0 - 1 = 1$ with a borrow of 1, or $10 - 1 = 1$



$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 &= (1 + 1) + 1 \\ &= (10)_2 + (01)_2 \\ &= 11 \end{aligned}$$



	1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*		*Carries*
		1	1	1	1	0	1	Augend
+			1	0	1	1	1	Addend
	1	0	1	0	1	0	0	Sum



		1			*10*			*Borrows*
	0	$\cancel{1}$ $\cancel{0}$	*10*	*0*	$\cancel{0}$	*10*		*Borrows*
	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$	1	Minuend
−			1	0	1	1	1	Subtrahend
		1	1	0	1	1	0	Difference

✓ متمم یا مکمل (Complement)

❖ از متمم برای ساده کردن عملیات تفریق استفاده می شود.

❖ برای هر عدد در مبنای r دو متمم تعریف می شود.

- ✓ متمم مبنا منهای یک (r-1) (Diminished Radix Complement)
- ✓ متمم مبنا (r) (Radix Complement)

❖ اعداد در مبنای ۱۰ دارای دو متمم ۹ و ۱۰ هستند.

❖ اعداد در مبنای ۲ دارای دو متمم ۱ و ۲ هستند. (1’s complement & 2’s complement)

✓ متمم یا مکمل (Complement)

❖ متمم مبنا منهای یک (r-1) (Diminished Radix Complement)

✓ متمم r-1 عدد n رقمی N در مبنای r بصورت زیر تعریف می شود:

$$C_{r-1}(N) = [N]_{r-1} = r^n - 1 - (N)_r$$

$$if\ r = 10 \ \rightarrow \ C_9(N) = 10^n - 1 - (N)_{10} \qquad if\ r = 2 \ \rightarrow \ C_1(N) = 2^n - 1 - (N)_2$$

✓ متمم ۹ هر عدد در مبنای ۱۰ از تفریق ارقام آن از ۹ بدست می آید.

$$C_9(1234) = 10^4 - 1 - 1234 = 9999 - 1234 = 8765$$

$$C_1(101) = 2^3 - 1 - (101) = (1000) - 1 - (101) = (111) - (101) = (010)$$

✓ برای بدست آوردن متمم ۱، کافیست بیت صفر را به یک و بیت یک را به صفر تبدیل کنیم.

$$C_1(10011) = (01100)$$

✓ متمم یا مکمل (Complement)

❖ متمم مبنا (r) (Radix Complement)

✓ متمم r عدد n رقمی N در مبنای r بصورت زیر تعریف می شود:

$$C_r(N) = [N]_r = r^n - (N)_r$$

$$if\ r = 10 \ \rightarrow\ C_{10}(N) = 10^n - (N)_{10} \qquad if\ r = 2 \ \rightarrow\ C_2(N) = 2^n - (N)_2$$

✓ برای محاسبه متمم ۱۰ هر عدد، از سمت راست اولین رقم غیرصفر را از ۱۰ کم می کنیم و بقیه را از ۹.

$$C_{10}(653) = 10^3 - 653 = 1000 - 653 = 347$$

$$C_2(1011) = 2^4 - (1011) = (10000) - (1011) = (0101)$$

✓ برای بدست آوردن متمم ۲، از سمت راست از اولین رقم غیرصفر به بعد، بیت ها را برعکس می کنیم.

$$C_2(10011) = (01101) \qquad C_2(101100) = (010100)$$

✓ متمم یا مکمل (Complement)

❖ **تذکر خیلی مهم:**

- ✓ در بحث متمم ها، صفر پشت عدد معنی خواهد داشت.
- ✓ باید مراقب بود که عدد چند بیتی است.

$C_1(1001) = ?$

$$if\ n = 4 \ \rightarrow\ C_1(1001) = (0110)$$

$$if\ n = 5 \ \rightarrow\ C_1(01001) = (10110)$$

$C_2(100) = ?$

$$if\ n = 3 \ \rightarrow\ C_2(100) = (100)$$

$$if\ n = 4 \ \rightarrow\ C_2(0100) = (1100)$$

$$C_{r-1}(C_{r-1}(N)) = N \qquad C_r(C_r(N)) = N$$

- ✓ اگر یک عدد ممیز داشت، باید ممیز را موقتاً برداریم، متمم بگیریم و سپس ممیز را سرجای خودش بگذاریم.

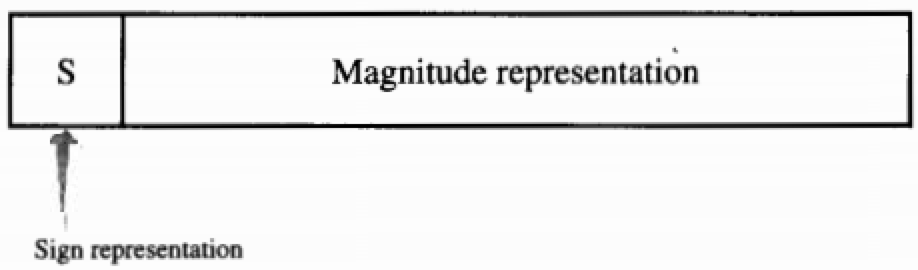
✓ اعداد علامت دار

❖ **روش اول: علامت – اندازه (Signed - Magnitude)**

✓ سمت چپ ترین بیت را به عنوان بیت علامت (Sign digit) درنظر می گیریم.

✓ اگر عدد مثبت بود، بیت علامت 0 و اگر عدد منفی بود، بیت علامت 1 است.

✓ در این روش بیت علامت جزو خود عدد نیست.



$$11001 \begin{cases} 25\ (unsigned) \\ -9\ \ (signed) \end{cases}$$

$+12\ (n=5) \rightarrow 0{,}1100$ $-14\ (n=5) \rightarrow 1{,}1110$ $-16\ (n=5) \rightarrow \times$

✓ در نمایش اعداد باید به محدودیت تعداد بیت ها توجه کنیم.

✓ اعداد علامت دار

❖ **روش دوم: علامت – متمم ۱ (Signed – 1’s Complement)**

✓ اعداد مثبت مانند روش قبل (علامت - اندازه) نشان داده می شوند.

✓ اعداد منفی بصورت متمم ۱ عدد مثبت متناظرشان نمایش داده می شوند. (با درنظر گرفتن بیت علامت)

✓ در این روش بیت علامت جزو خود عدد است.

$$+3\ (n=4)\begin{cases} 0{,}011\ \ (signed-magnitude) \\ 0{,}011\ \ (signed-1's\ complement) \end{cases}$$

$$-3\ (n=4)\begin{cases} 1{,}011\ \ (signed-magnitude) \\ C_1(+3)=C_1(0{,}011)=1100\ (signed-1's\ complement) \end{cases}$$

$$-7\ (n=4)\begin{cases} 1{,}111\ \ (signed-magnitude) \\ C_1(+7)=C_1(0{,}111)=1000\ (signed-1's\ complement) \end{cases}$$

✓ اعداد علامت دار

❖ روش سوم: علامت – متمم ۲ **(Signed – 2’s Complement)**

- ✓ اعداد مثبت مانند روش قبل (علامت - اندازه) نشان داده می شوند.
- ✓ اعداد منفی بصورت متمم ۲ عدد مثبت متناظرشان نمایش داده می شوند. (با درنظر گرفتن بیت علامت)
- ✓ در این روش بیت علامت جزو خود عدد است.

$$+3\ (n=4)\begin{cases} 0{,}011\ \ (signed-magnitude) \\ 0{,}011\ \ (signed-1's\ complement) \\ 0{,}011\ \ (signed-2's\ complement) \end{cases}$$

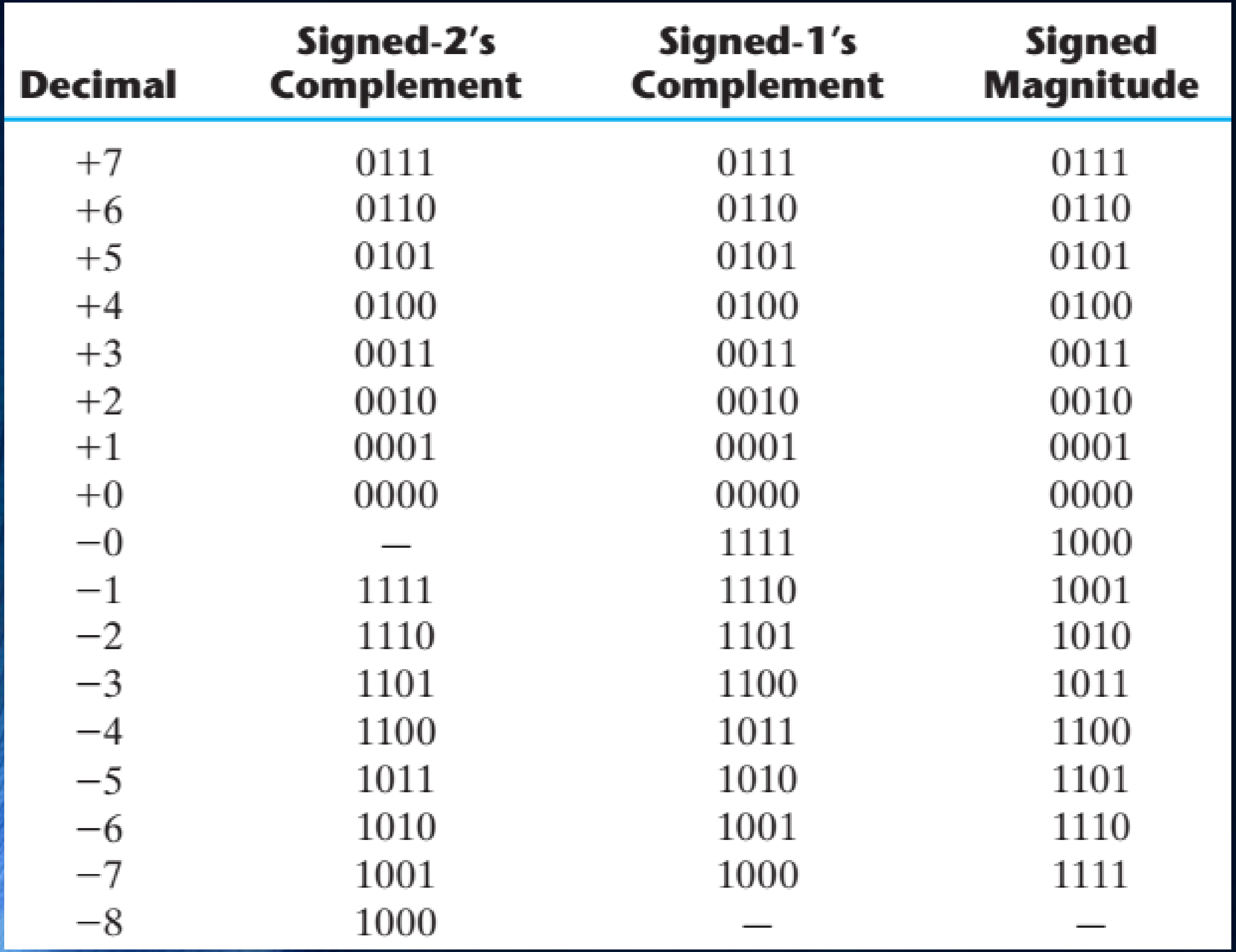
$$-3\ (n=4)\begin{cases} 1{,}011\ \ (signed-magnitude) \\ C_1(+3)=C_1(0{,}011)=1100\ (signed-1's\ complement) \\ C_2(+3)=C_2(0{,}011)=1101\ (signed-2's\ complement) \end{cases}$$

$$-7\ (n=4)\begin{cases} 1{,}111\ \ (signed-magnitude) \\ C_1(+7)=C_1(0{,}111)=1000\ (signed-1's\ complement) \\ C_2(+7)=C_2(0{,}111)=1001\ (signed-2's\ complement) \end{cases}$$

✓ اعداد علامت دار

❖ مقایسه روش های بیان شده:

n = 4



Decimal	Signed-2's Complement	Signed-1's Complement	Signed Magnitude
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
−0	—	1111	1000
−1	1111	1110	1001
−2	1110	1101	1010
−3	1101	1100	1011
−4	1100	1011	1100
−5	1011	1010	1101
−6	1010	1001	1110
−7	1001	1000	1111
−8	1000	—	—

✓ بازه اعداد قابل نمایش:

❈ در دستگاه علامت-اندازه

$\pm(2^{n-1} - 1)$

❈ در دستگاه علامت-متمم ۱

$\pm(2^{n-1} - 1)$

❈ در دستگاه علامت-متمم ۲

$-2^{n-1} \sim +(2^{n-1} - 1)$

✓ اگر اعداد خارج از این بازه باشند، سرریز (overflow) رخ داده است.

✓ اعداد علامت دار

- ❖ در اعداد علامت دار باید به تعداد بیت ها و دستگاه موردنظر توجه کرد.

- ❖ برای تشخیص مقدار یک عدد علامت دار، ابتدا باید بررسی کنیم که عدد مثبت است یا منفی.

✓ عدد 101 در دستگاه علامت-متمم ۱ و برای n=3 علامت دار شده است. مقدار آن چقدر است؟

$$101\ is\ Negative\ \rightarrow -C_1(101) = -(010) = -2$$

✓ عدد 11010 و 01001 در دستگاه علامت-متمم ۲ و برای n=5 علامت دار شده اند. مقدار آن ها چقدر است؟

$$11010\ is\ Negative\ \rightarrow -C_2(11010) = -(00110) = -6$$

$$01001\ is\ Positive \rightarrow +9$$

✓ در دستگاه علامت-متمم ۲ عدد $(110101)_2$ را برای n=8 منفی کنید.

ابتدا باید عدد را علامت دار کنیم:

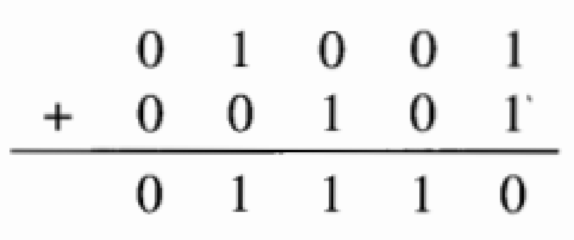
$$n = 8\,; (0{,}0110101)_2\ \rightarrow\ C_2(00110101) = 11001011$$

✓ جمع و تفریق اعداد علامت دار

❖ در جمع دو عدد مثبت، عملیات را بصورت معمولی انجام می دهیم. اما باید مراقب مسئله سرریز باشیم.

✓ جمع دو عدد +9 و +5 در یک سیستم ۵ بیتی (n=5) و در دستگاه علامت-متمم۲:

$$+9 = (0,1001)_{2cns}$$
$$+5 = (0,0101)_{2cns}$$

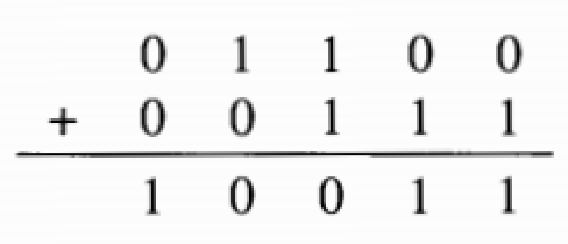


$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ + & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(0,1110)_{2cns} = +14$$

✓ جمع دو عدد +12 و +7 در یک سیستم ۵ بیتی (n=5) و در دستگاه علامت-متمم۲:

$$+12 = (0,1100)_{2cns}$$
$$+7 = (0,0111)_{2cns}$$



$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$-C_2(10011)_{2cns} = -(01101)_2 = -13$$

جواب اشتباه است. چون سرریز (overflow) رخ داده است.

✓ جمع و تفریق اعداد علامت دار

❖ در تفریق دو عدد علامت دار، از دستگاه علامت – متمم۲ استفاده می کنیم.

✓ حالت اول:

$$A = B - C$$

$$B \geq C$$

$$A = (B)_2 + (-(C)_2)$$

$$\begin{aligned} A &= (B)_2 + [C]_2 \\ &= (B)_2 + 2^n - (C)_2 \\ &= 2^n + (B - C)_2 \end{aligned}$$

$$(A)_2 = (B)_2 + [C]_2|_{\text{carry discarded}}$$

※ محاسبه عبارت 5 - 12+ در یک سیستم ۵ بیتی (n=5) و در دستگاه علامت-متمم۲:

$$+12 = (0{,}1100)_{2cns}$$

$$-5 = C_2(0{,}0101)_2 = (11011)_{2cns}$$

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ + & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \uparrow & & & & & \\ \text{Carry} & & & & & \end{array}$$

$$(00111)_{2cns} = +7$$

با صرفنظر کردن از بیت carry، حاصل درست را می یابیم.

✓ جمع و تفریق اعداد علامت دار

✓ حالت دوم:

$A = B - C$ $\quad A = (B)_2 + (-(C)_2)$ $\quad A = 2^n - (C - B)_2 = [C - B]_2$

$B < C$

- در این حالت بیت carry نداریم.
- چون حاصل نهایی در این حالت منفی است، برای برگرداندن آن باید یک متمم۲ از حاصل گرفته و یک منفی به آن اضافه کنیم.

❄ محاسبه عبارت 12 - 5+ در یک سیستم ۵ بیتی (n=5) و در دستگاه علامت-متمم۲:

$$+5 = (0,0101)_{2cns}$$

$$-12 = C_2(0,1100)_2$$

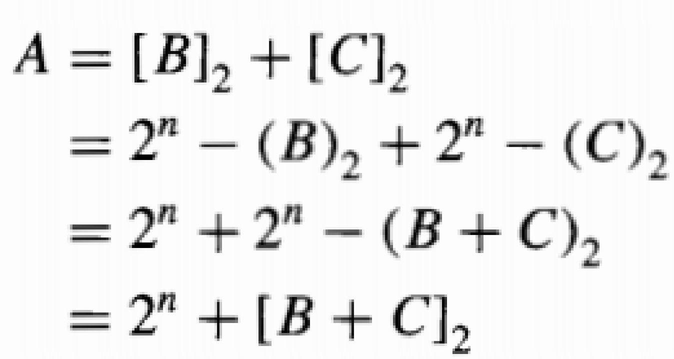
$$= (10100)_{2cns}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

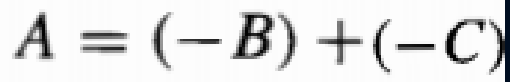
$$-C_2(11001)_{2cns} = -(00111)_2 = -7$$

✓ جمع و تفریق اعداد علامت دار

✓ حالت سوم:



$$\begin{aligned} A &= [B]_2 + [C]_2 \\ &= 2^n - (B)_2 + 2^n - (C)_2 \\ &= 2^n + 2^n - (B + C)_2 \\ &= 2^n + [B + C]_2 \end{aligned}$$



$$A = (-B) + (-C)$$

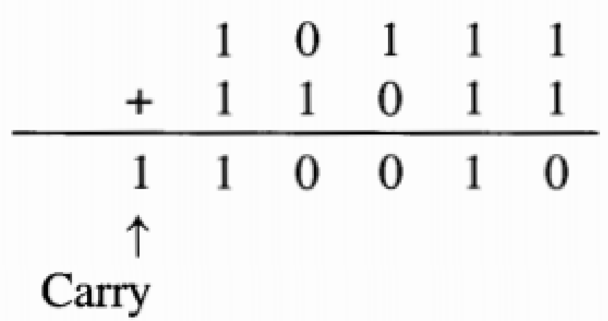
$$A = -B - C$$

- در این حالت بیت carry تولید می شود که باید از آن صرفنظر کرد.
- چون حاصل نهایی در این حالت منفی است، برای برگرداندن آن باید یک متمم۲ از حاصل گرفته و یک منفی به آن اضافه کنیم.

❉ محاسبه عبارت 5 - 9- در یک سیستم ۵ بیتی (n=5) و در دستگاه علامت-متمم۲:

$$-9 = C_2(0{,}1001)_2 = (10111)_{2cns}$$

$$-5 = C_2(0{,}0101)_2 = (11011)_{2cns}$$



$$\begin{array}{rrrrrr} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \uparrow & & & & & \\ \text{Carry} & & & & & \end{array}$$

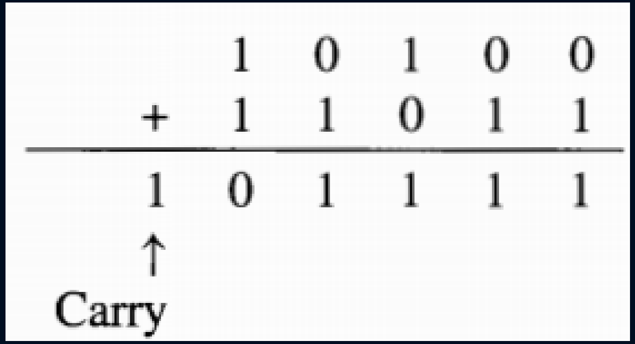
$$-C_2(10010)_{2cns} = -(01110)_2 = -14$$

✓ جمع و تفریق اعداد علامت دار

✓ حالت سوم:

❄ محاسبه عبارت 5 - 12- در یک سیستم ۵ بیتی (n=5) و در دستگاه علامت–متمم۲:

$$-12 = C_2(0{,}1100)_2$$
$$= (10100)_{2cns}$$
$$-5 = C_2(0{,}0101)_2$$
$$= (11011)_{2cns}$$



$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ + & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \uparrow & & & & & \\ \text{Carry} & & & & & \end{array}$$

$$(01111)_{2cns} = +15$$

جواب اشتباه است. چون سرریز (overflow) رخ داده است.

نکته: در دوحالت $A = B + C$ و $A = -B - C$ احتمال وقوع سرریز (overflow) وجود دارد.

✓ ممیز شناور (Floating-Point)

- ❖ فرم اعداد ممیز شناور شبیه نوشتن اعداد به فرم علمی است.
- ❖ از ممیز شناور می توان برای نمایش اعداد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک در مبنای ۲ استفاده کرد.

$$N = M \times r^E$$

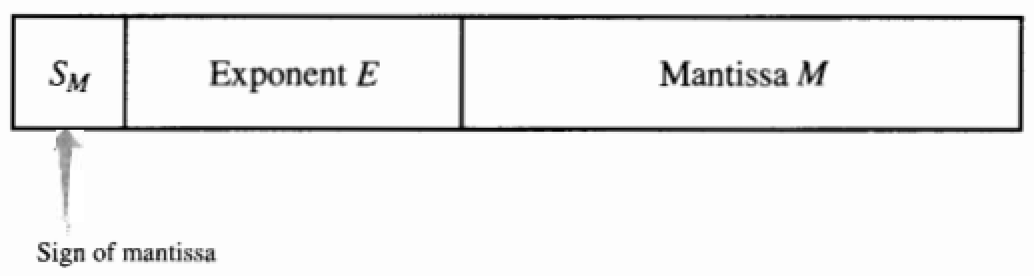
M: Mantissa
E: Exponent

$M < 1$

$$\begin{aligned} M &= +(1101.0101)_2 \\ &= (0.11010101)_2 \times 2^4 \\ &= (0.011010101)_2 \times 2^5 \\ &= (0.0011010101)_2 \times 2^6 \end{aligned}$$

$$N = \pm(.a_{n-1} \ldots a_{-m})_r \times r^n$$

- ❖ قسمت مانتیس و نما را می توان بصورت های مختلف کدگذاری کرد.



101101.101 M: 10 bits , E: 5 bits

$$101101.101 = 0.101101101 \times 2^6$$

0,0,0110,1011011010

✓ کدها (Codes)

❖ اطلاعات برای ارسال، می بایست کدگذاری شده و در طرف گیرنده بازگشایی (decode) شوند.

✓ کد BCD (Binary Coded Decimal):

- اعداد دهدهی بصورت باینری کد می شوند.
- هر رقم دهدهی را با ۴ بیت در BCD نشان می دهند.
- کد BCD تنها برای ارقام 9 ~ 0 تعریف می شود.
- یکی از کاربردهای آن در 7-Segment است.

$$(148)_{10} = (0001\ 0100\ 1000)_{BCD}$$

$$(9)_{10} = (1001)_{BCD} = (1001)_2$$

✓ کد Excess-3:

- در این کد به هر عدد ۳ تا اضافه می شود.

✓ کدها (Codes)

✓ کد ۲ از ۵:

- یک کد ۵ بیتی است که تنها دو بیت آن یک بوده و بقیه صفر هستند.
- یکی از کاربردهای آن برای تشخیص خطا است.

✓ کد تشخیص خطا:

- یک بیت اضافه به سمت چپ بیت های اصلی اضافه می کنند.
- به این بیت اضافه شده، بیت توازن (Parity Bit) گویند.
- بیت توازن به این صورت انتخاب می شود که:

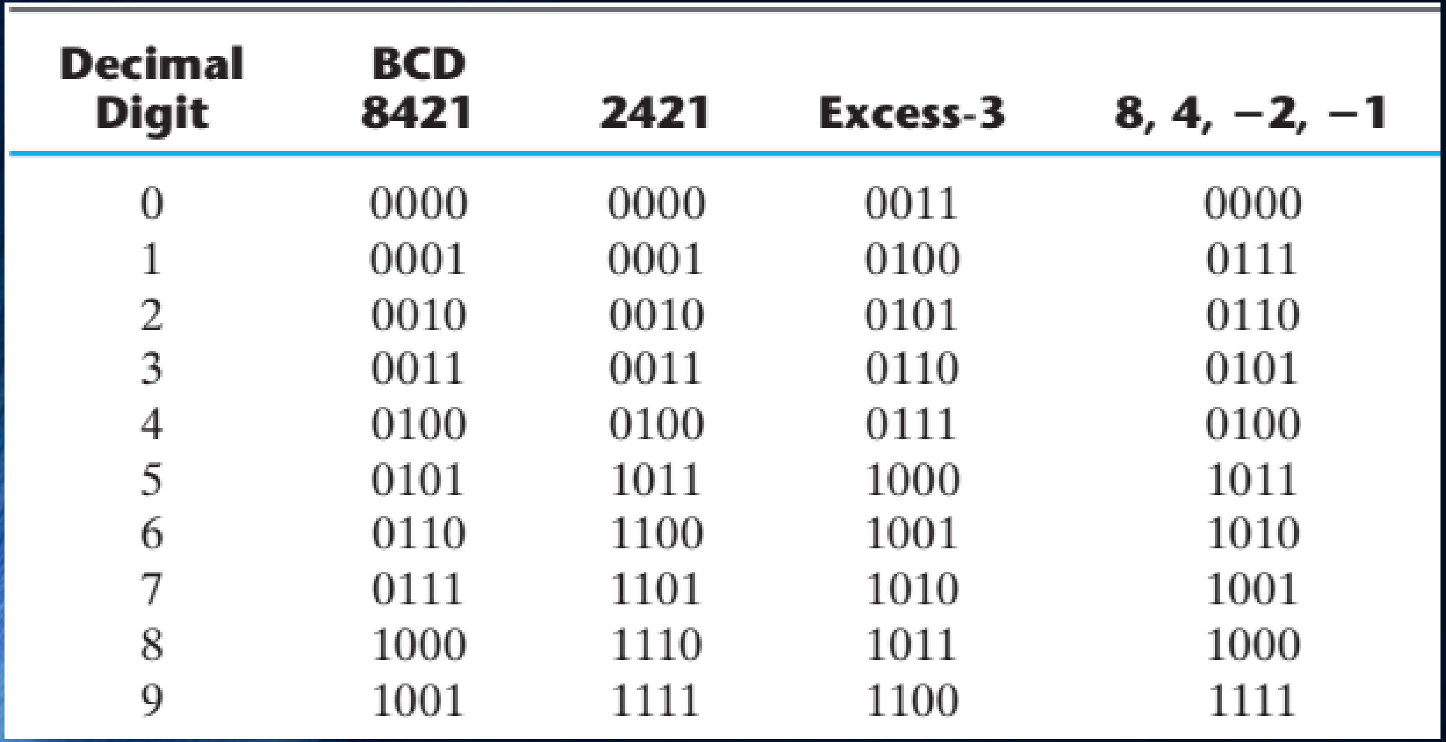
❋ تعداد کل یک ها، زوج شود ← توازن زوج
❋ تعداد کل یک ها، فرد شود ← توازن فرد

	With even parity	**With odd parity**
1000001	01000001	11000001

✓ کدها (Codes)

❖ کد ASCII:

- یک کد ۷ بیتی است که برای نشان دادن کاراکترها نیز استفاده می شود.



Decimal Digit	BCD 8421	2421	Excess-3	8, 4, −2, −1
0	0000	0000	0011	0000
1	0001	0001	0100	0111
2	0010	0010	0101	0110
3	0011	0011	0110	0101
4	0100	0100	0111	0100
5	0101	1011	1000	1011
6	0110	1100	1001	1010
7	0111	1101	1010	1001
8	1000	1110	1011	1000
9	1001	1111	1100	1111