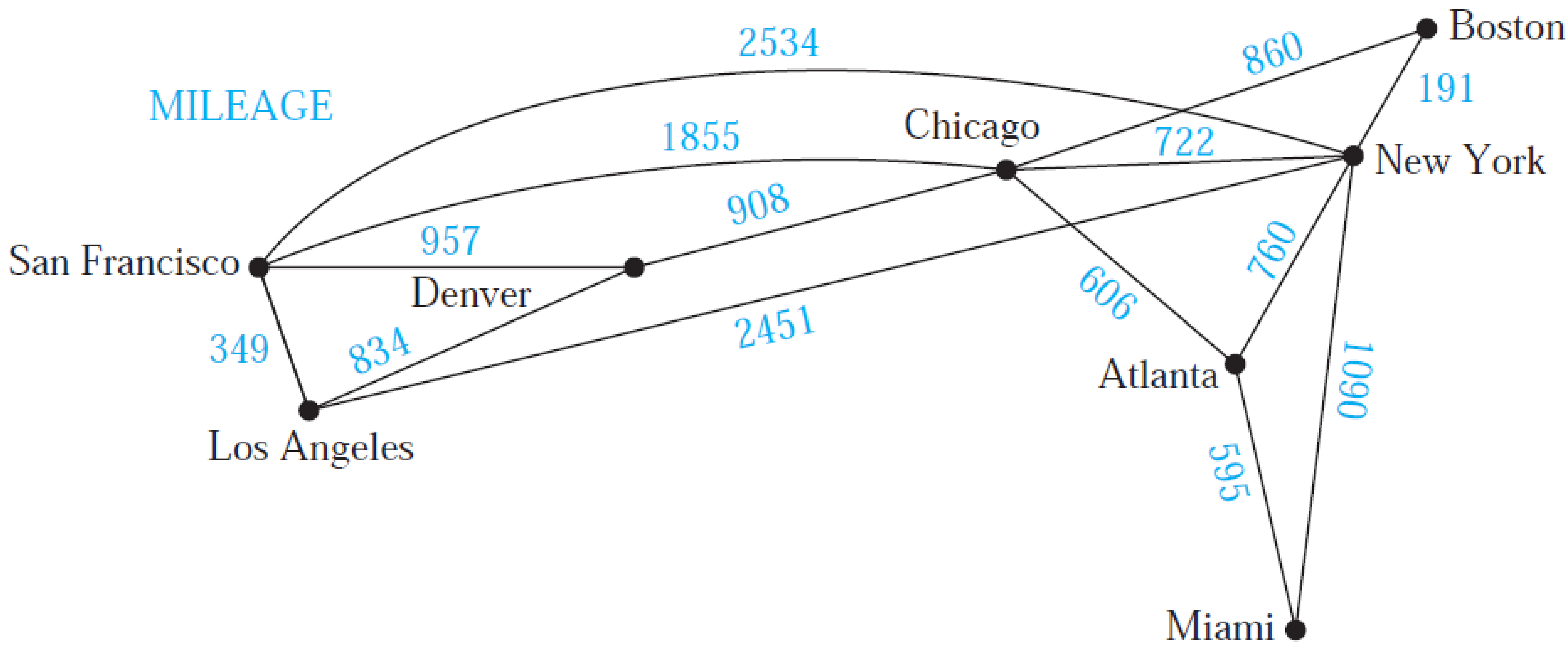
به نام خدا

ساختمان‌های گسسته

گراف

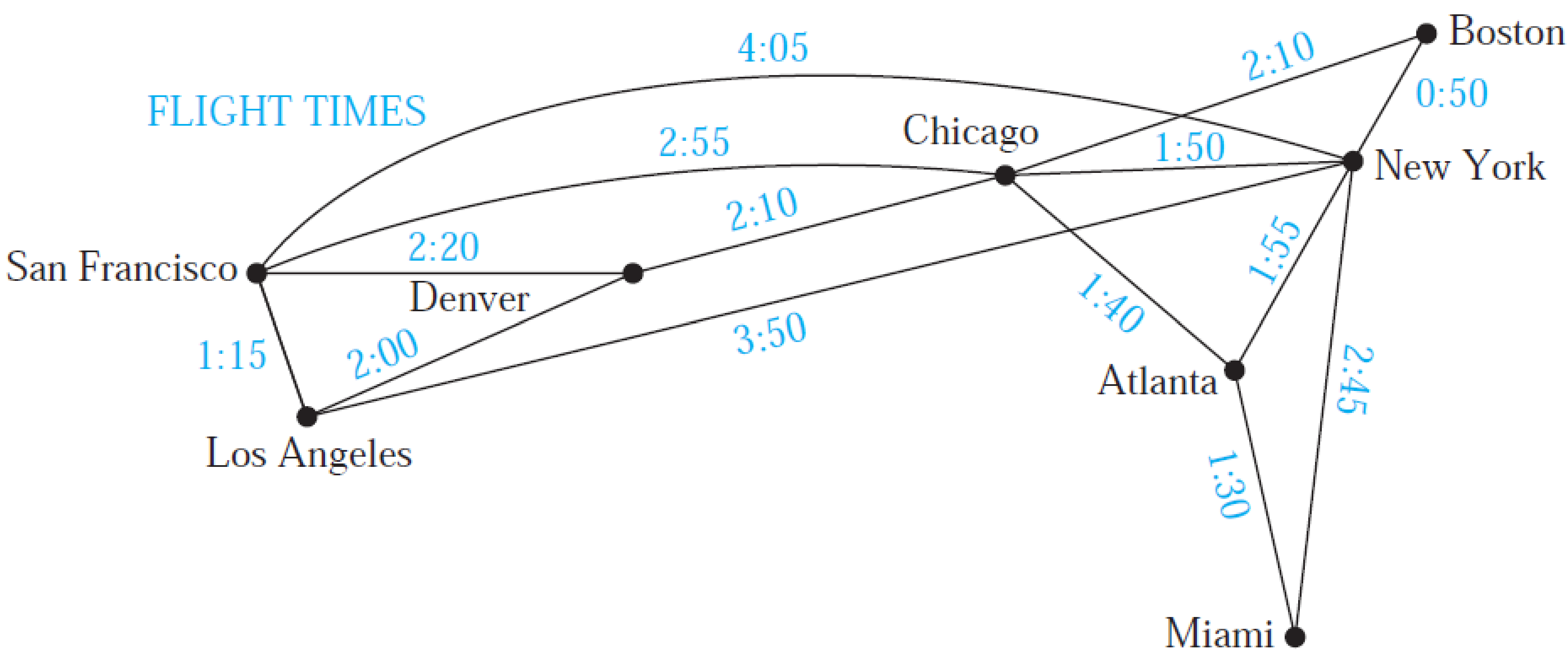
Dr. Aref Karimiafshar
A.karimiafshar@ec.iut.ac.ir

گراف فاصله



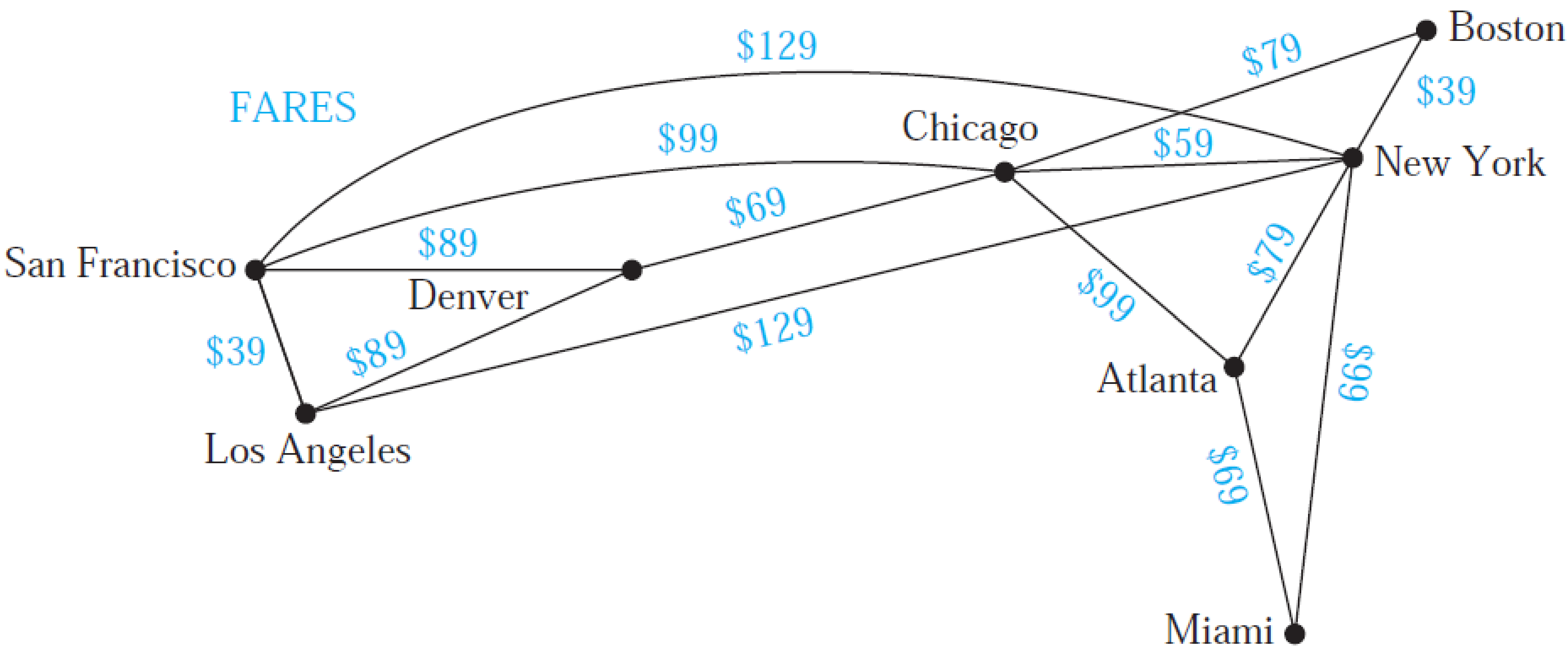
MILEAGE
2534
860
Boston
191
1855
Chicago
722
New York
908
957
San Francisco
Denver
760
606
349
834
2451
Atlanta
1090
Los Angeles
595
Miami

گراف زمان



FLIGHT TIMES
4:05
2:10
Boston
0:50
Chicago
2:55
1:50
New York
2:10
San Francisco
2:20
Denver
1:55
1:40
1:15
2:00
3:50
Atlanta
2:45
Los Angeles
1:30
Miami

گراف هزینه

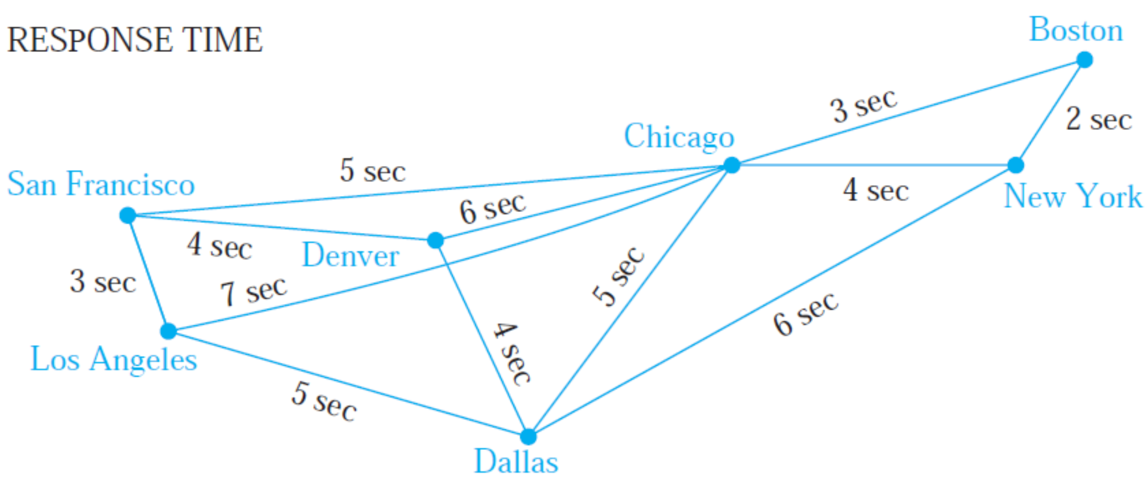


FARES
$129
$79
Boston
$39
$99
Chicago
$59
New York
$69
San Francisco
$89
Denver
$99
$79
$39
$89
$129
Atlanta
$99
Los Angeles
$69
Miami

گراف‌های وزن‌دار

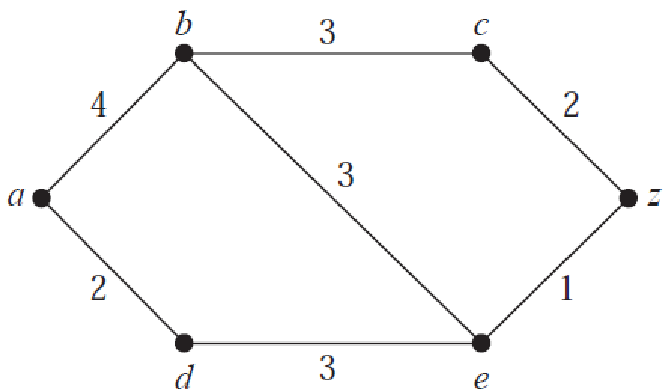
- گراف وزن‌دار ←گرافی که به هر یال آن یک عدد نسبت داده شود!

- به منظور مدل کردن سیستم‌ها و روابط آنها
  - شبکه‌های کامپیوتری
    - هزینه ارتباط
    - زمان پاسخ
    - فاصله



یافتن کوتاهترین مسیر

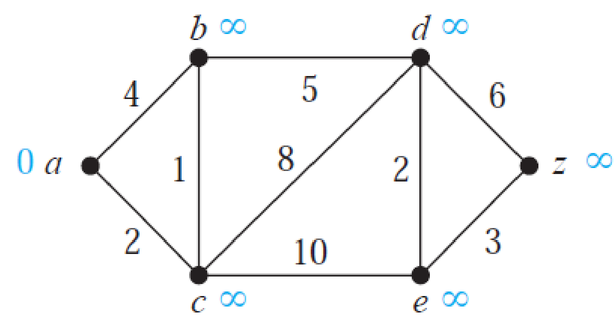
- طول مسیر در گراف وزن‌دار ← مجموع وزن یالها در یک مسیر!!!
- کوتاهترین مسیر ← کوچکترین طول مسیر!



- پیدا کردن کوتاهترین مسیر
  - الگوریتمهای حریصانه
  - الگوریتمهای جست و جوی فراگیر

الگوریتم Dijkstra

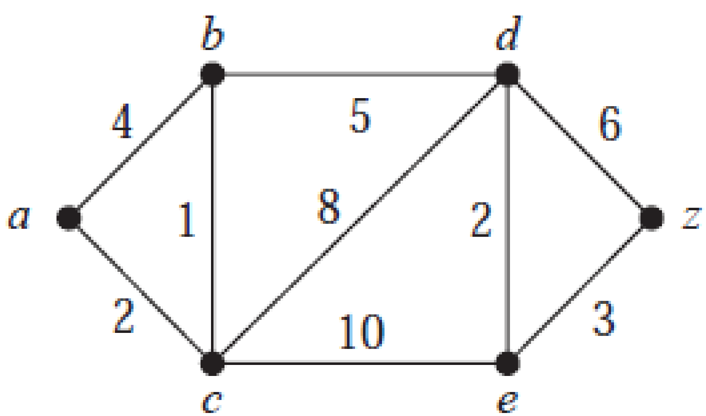
procedure *Dijkstra*(G: weighted connected simple graph, with
  all weights positive)
{G has vertices $a = v_0, v_1, \ldots, v_n = z$ and lengths $w(v_i, v_j)$
  where $w(v_i, v_j) = \infty$ if $\{v_i, v_j\}$ is not an edge in G}
for $i := 1$ **to** n
  $L(v_i) := \infty$
$L(a) := 0$
$S := \emptyset$
{the labels are now initialized so that the label of a is 0 and all
  other labels are ∞, and S is the empty set}
while $z \notin S$
  $u :=$ a vertex not in S with $L(u)$ minimal
  $S := S \cup \{u\}$
  for all vertices v not in S
    if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then** $L(v) := L(u) + w(u, v)$
    {this adds a vertex to S with minimal label and updates the
    labels of vertices not in S}
return $L(z)$ {$L(z) =$ length of a shortest path from a to z}



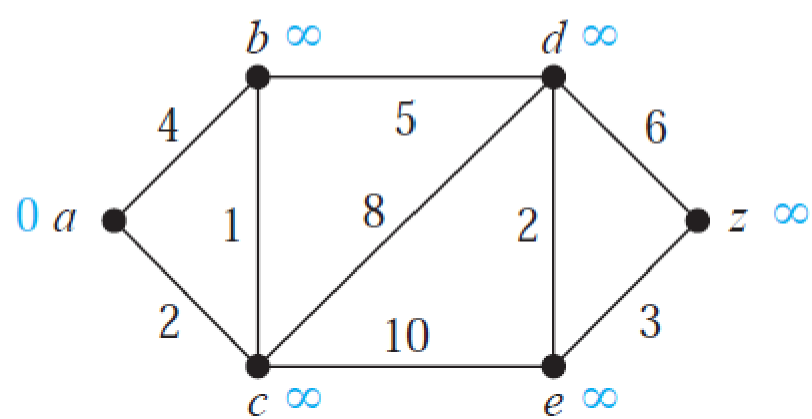
الگوریتم Dijkstra

- مثال:

کوتاهترین مسیر در گراف زیر را با استفاده از الگوریتم Dijkstra بیابید.

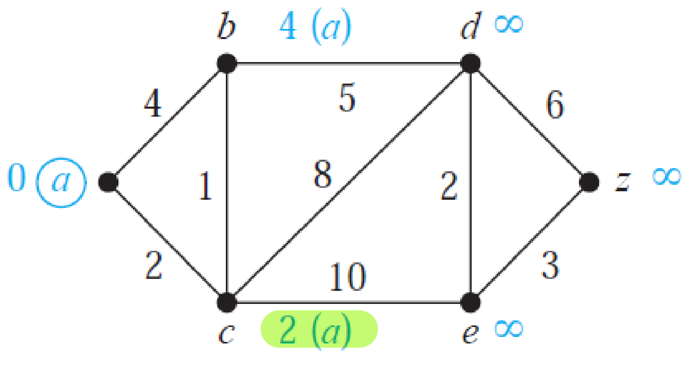


برچسب گذاری اولیه



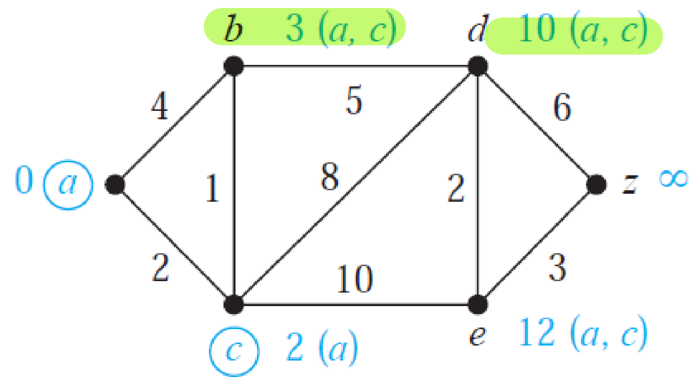
(a)

مثال



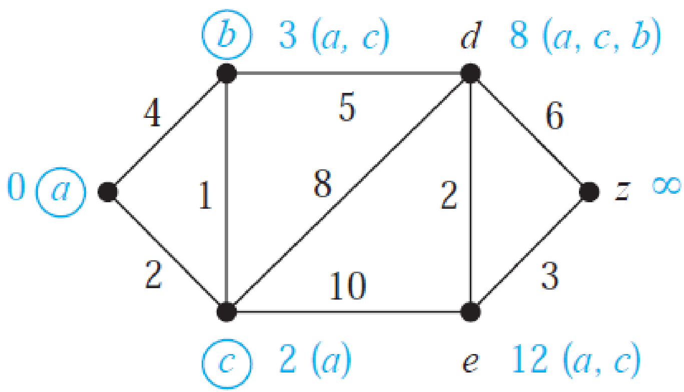
b
4 (a)
d ∞
4
5
6
0 a
1
8
2
z ∞
2
10
3
c
2 (a)
e ∞

(b)



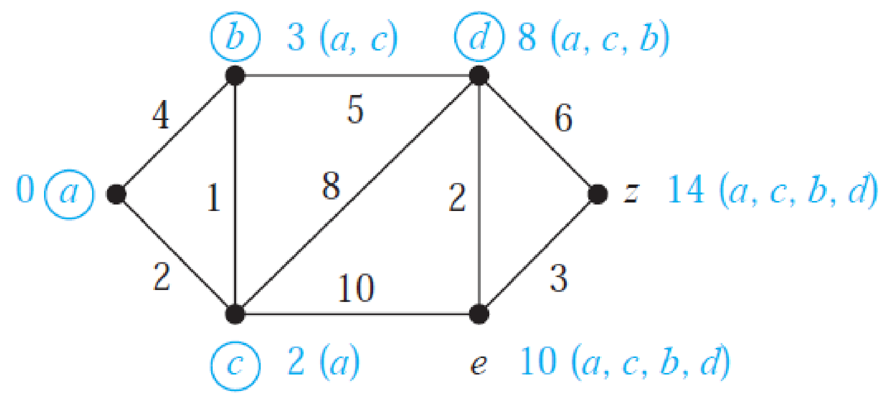
b
3 (a, c)
d
10 (a, c)
4
5
6
0 a
1
8
2
z ∞
2
10
3
c
2 (a)
e
12 (a, c)

(c)



b
3 (a, c)
d
8 (a, c, b)
4
5
6
0 a
1
8
2
z ∞
2
10
3
c
2 (a)
e
12 (a, c)

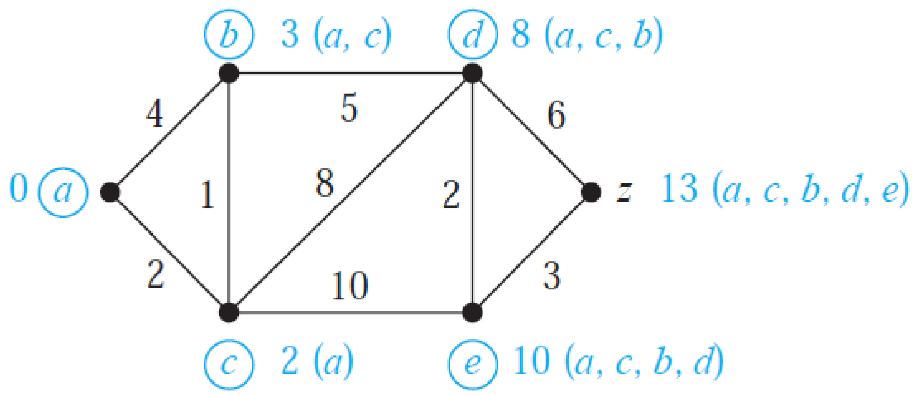
(d)



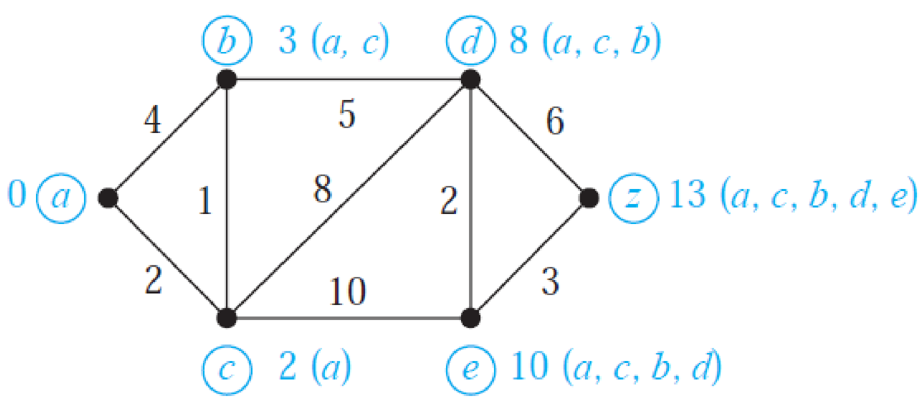
b
3 (a, c)
d
8 (a, c, b)
4
5
6
0 a
1
8
2
z
14 (a, c, b, d)
2
10
3
c
2 (a)
e
10 (a, c, b, d)

(e)

مثال



(f)

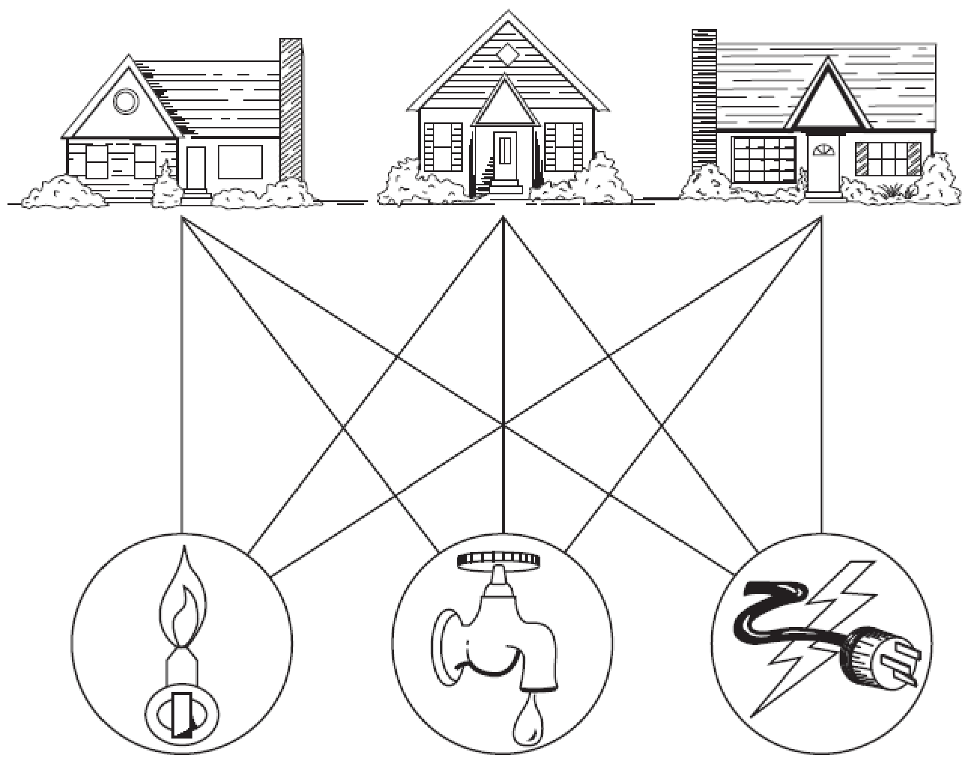


(g)

a, c, b, d, e, z

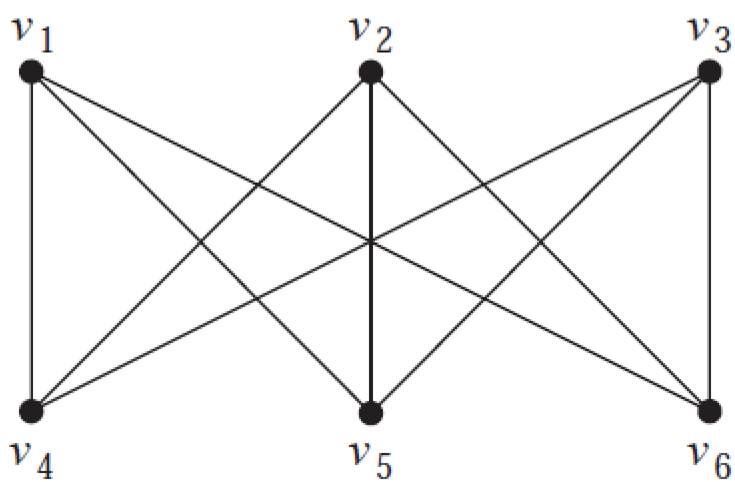
مسئله اتصال (آب، برق و گاز) به سه خانه

- آیا امکان دارد که آب، برق و گاز به این سه خانه متصل شود بدون اینکه خطوط آنها همدیگر را قطع کنند؟



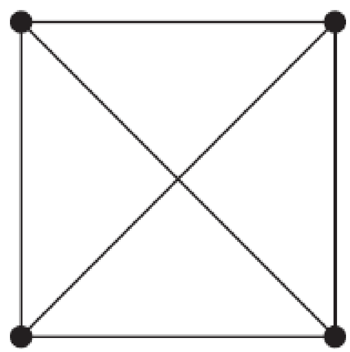
مسئله اتصال (آب، برق و گاز) به سه خانه

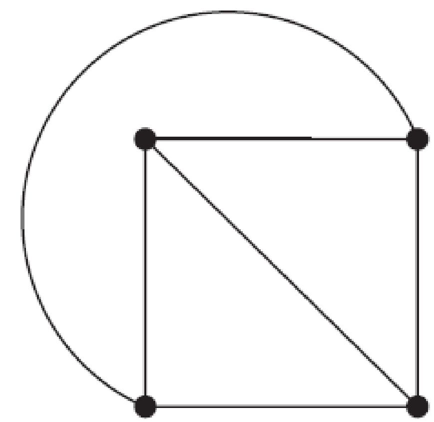
- آیا امکان دارد که آب، برق و گاز به این سه خانه متصل شود بدون اینکه خطوط آنها همدیگر را قطع کنند؟
- مشابه سازی مسئله: آیا امکان دارد گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$ را به نحوی در صفحه رسم کنیم که یالها به جزء در رئوس یکدیگر را قطع نکنند؟!



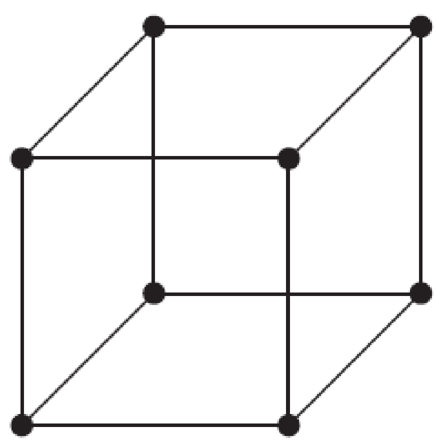
مثالهای مشابه

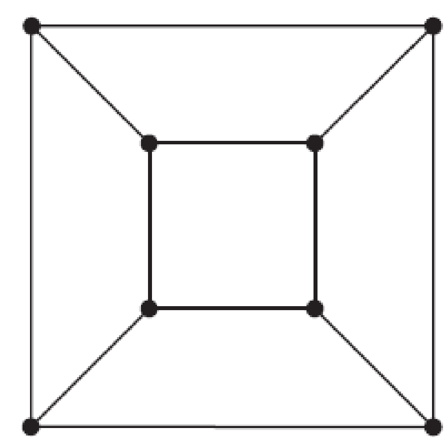
K_4





Q_3



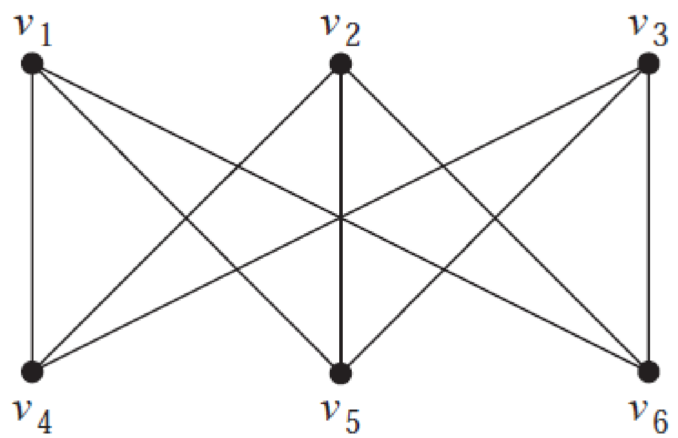


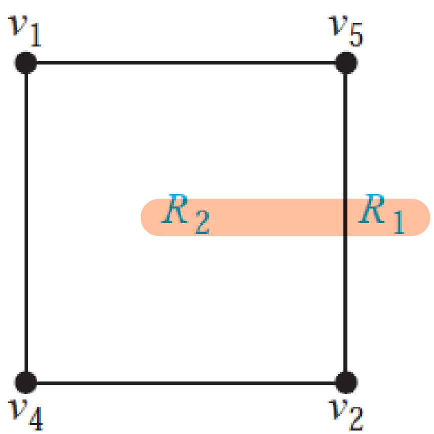
گرافهای مسطح

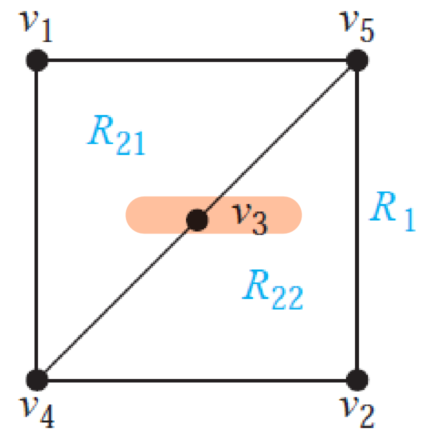
- گراف مسطح
  - گرافی که بتوان آن را به نحوی در صفحه رسم کرد که یالهای آن همدیگر را قطع نکنند مگر در رئوس!

- نمایش مسطح
  - به نمایشی از گراف که در آن یالها همدیگر را قطع نکنند نمایش مسطح گراف گویند.
  - با توجه به اینکه یک گراف می تواند نمایشهای مختلفی داشته باشد (مسطح و غیرمسطح) حتی اگر در نمایشی یالها همدیگر را قطع کنند باز این امکان وجود دارد که آن گراف مسطح باشد

مسئله اتصال (آب، برق و گاز) به سه خانه







فرمول اویلر

- اگر G یک گراف ساده مسطح همبند باشد
  - با تعداد رئوس v و تعداد یالهای e
  - چنانچه r تعداد نواحی موجود در نمایش مسطح G باشد

داریم:

$$r = e - v + 2$$

- مثال:

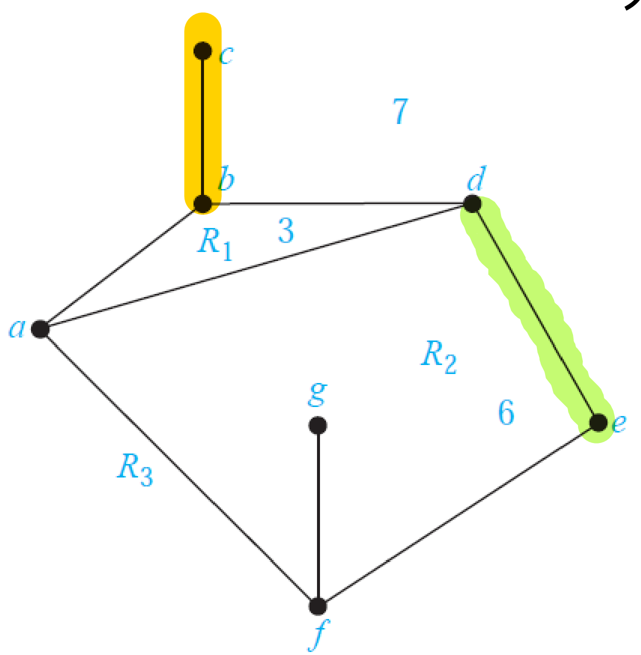
یک گراف ساده مسطح همبند با 20 راس را در نظر بگیرید که هر راس آن از درجه 3 باشد. نمایش مسطح این گراف، صفحه را به چند ناحیه تقسیم می کند؟

$$3v = 3 \cdot 20 = 60 \longrightarrow 2e = 60 \longrightarrow e = 30$$

$$r = e - v + 2 = 30 - 20 + 2 = 12$$

چند نکته

- در یک گراف مسطح همبند هر یال در یک یا دو وجه (ناحیه) قرار دارد.
- هر یال برشی دقیقا در یک وجه قرار دارد.
- هر یال غیربرشی دقیقا در دو وجه قرار دارد.



$\deg(R)$ =تعداد یالهای غیربرشی+2(تعداد یالهای برشی)

نتایج فرمول اویلر

- اگر G یک گراف ساده مسطح همبند باشد
  - با تعداد رئوس v و تعداد یالهای e
  - $v \geq 3$

داریم:

$$e \leq 3v - 6$$

اثبات:

$$2e = \sum_{\text{all regions } R} \deg(R) \geq 3r \longrightarrow (2/3)e \geq r = e - v + 2$$

$$e - v + 2 \leq (2/3)e \longrightarrow e/3 \leq v - 2 \longrightarrow e \leq 3v - 6$$

نتایج فرمول اویلر

- اگر G یک گراف ساده مسطح همبند باشد
  - با تعداد رئوس v و تعداد یالهای e
  - $v \geq 3$
  - هیچ مداری با طول سه نداشته باشیم

داریم:

$$e \leq 2v - 4$$

نتایج فرمول اویلر

- اگر G یک گراف ساده مسطح همبند باشد آنگاه G دارای راسی است که درجه آن از پنج بیشتر نیست.

اثبات:

$e \leq 3v - 6 \longrightarrow 2e \leq 6v - 12$

$2e = \sum_{v \in V} \deg(v) \longrightarrow 2e \geq 6v$

مثال

- نشان دهید که گراف K5 مسطح نیست.

$$e \leq 3v - 6 \longrightarrow \begin{array}{l} 3v - 6 = 9 \\ e = 10 \end{array}$$

- نشان دهید که گراف $K_{3,3}$ مسطح نیست.

$$e = 9 \leq 12 = 3 \cdot 6 - 6$$

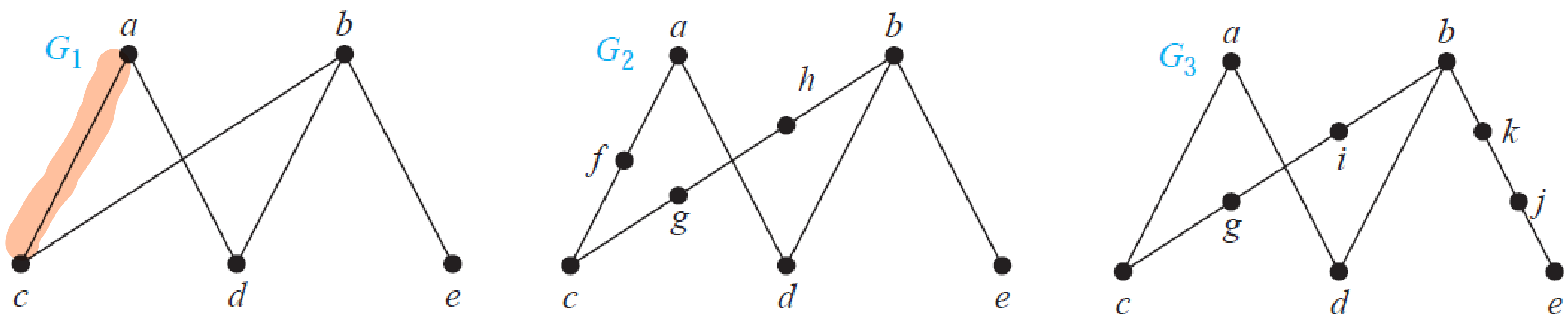
$$e \leq 2v - 4 \longrightarrow \begin{array}{l} e = 9 \\ 2v - 4 = 8 \end{array}$$

قضیه Kuratowski

- تعریف
  - زیر تقسیم مقدماتی:

حذف $\{u, v\}$ → اضافه کردن $\{u, w\}$ and $\{w, v\}$

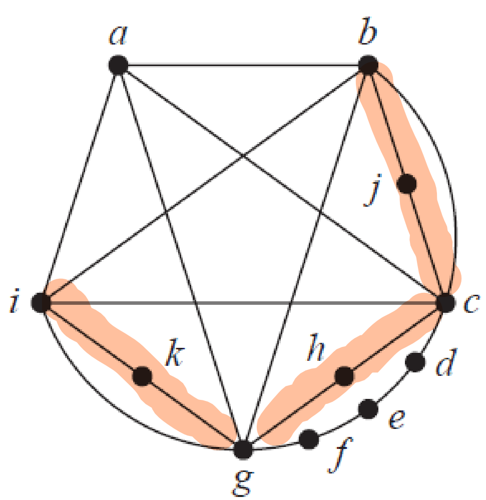
  - دو گراف homeomorphic هستند اگر بتوان با دنباله ای از زیر تقسیم‌های مقدماتی از یکی به دیگری رسید.



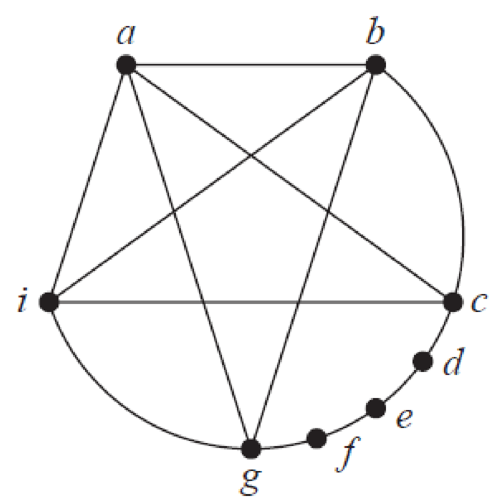
قضیه Kuratowski

- یک گراف مسطح است اگر و فقط اگر هیچ زیرگرافی homeomorphic با گراف K_5 یا $K_{3,3}$ نداشته باشد.

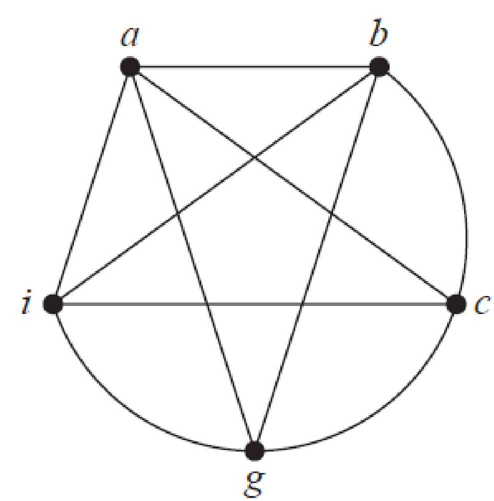
- مثال:



G



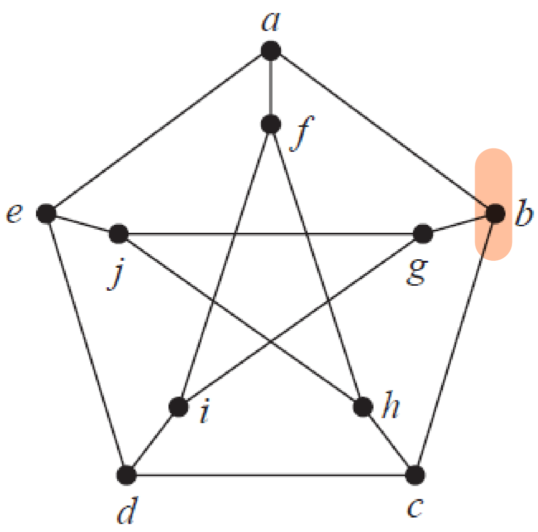
H

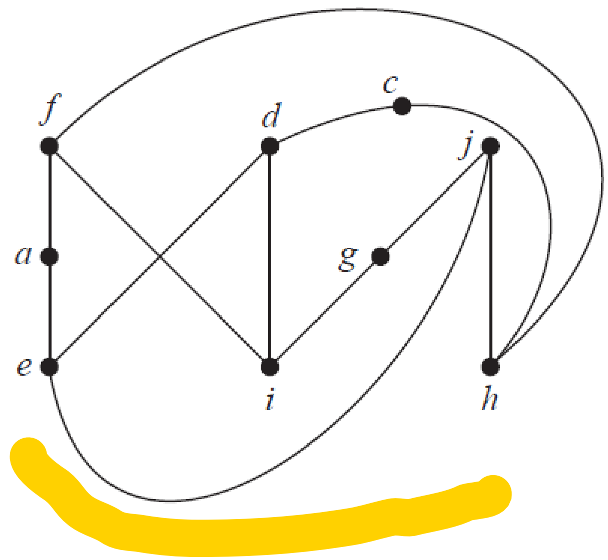


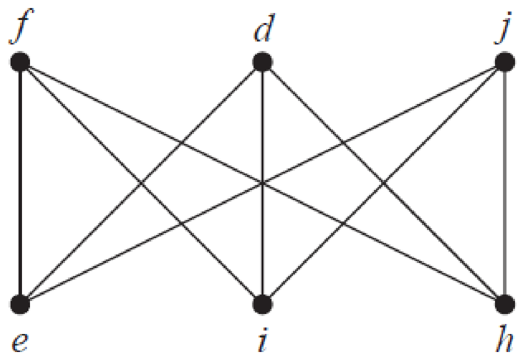
K_5

Kuratowski قضیه

• مثال:

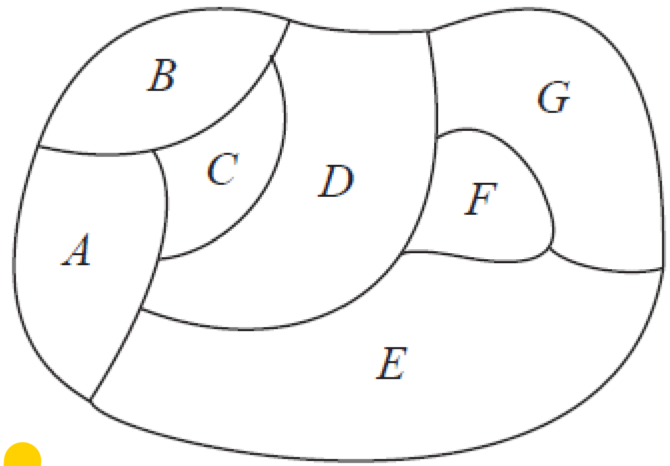


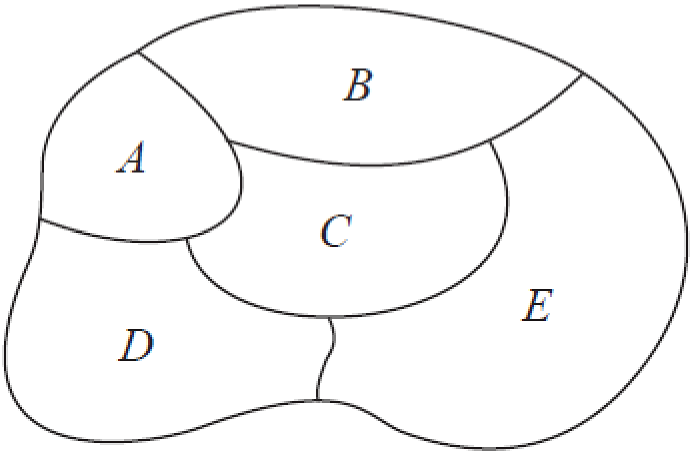




رنگ‌آمیزی گراف

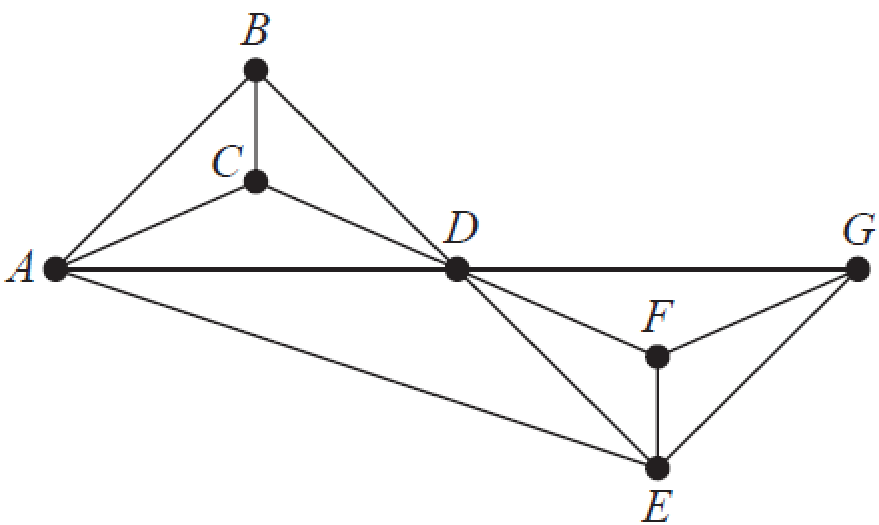
• رنگ‌آمیزی شهرها بر روی نقشه

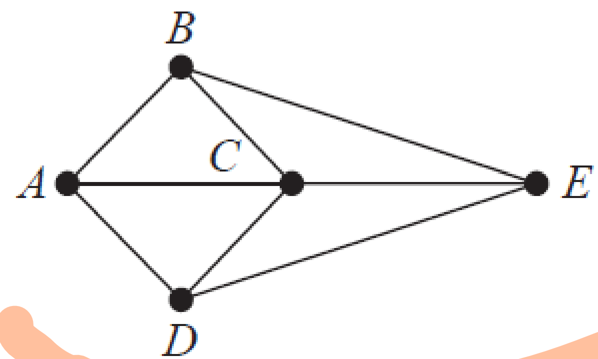




رنگ‌آمیزی گراف

- رنگ‌آمیزی شهرها بر روی نقشه و گراف دوگان
  - به هیچ دو راس مجاوری رنگ یکسانی نسبت داده نشود





رنگ‌آمیزی گراف

- برای هر گرافی می توان رنگ آمیزی پیدا کرد که تعداد رنگهای مورد نیاز از تعداد رئوس کمتر باشد!؟

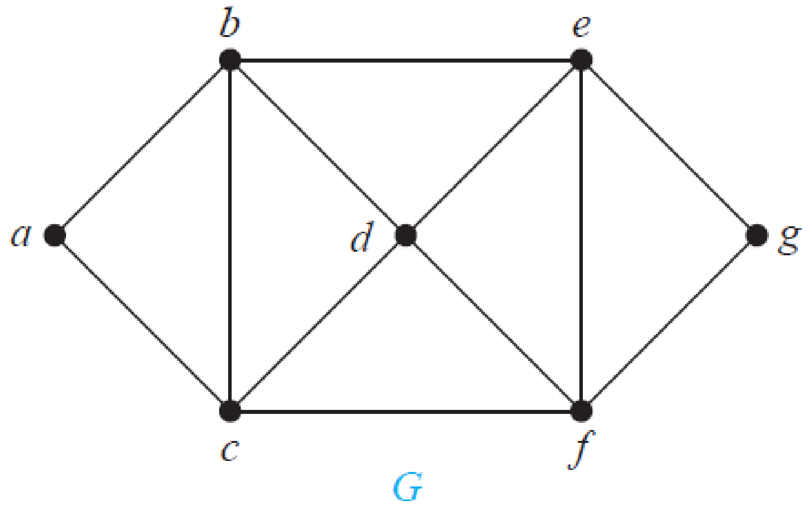
- تعریف:
  - عدد رنگی گراف (chromatic number):
    - کمترین تعداد رنگی که میتوان برای رنگ آمیزی یک گراف استفاده کرد
    - $\chi(G)$

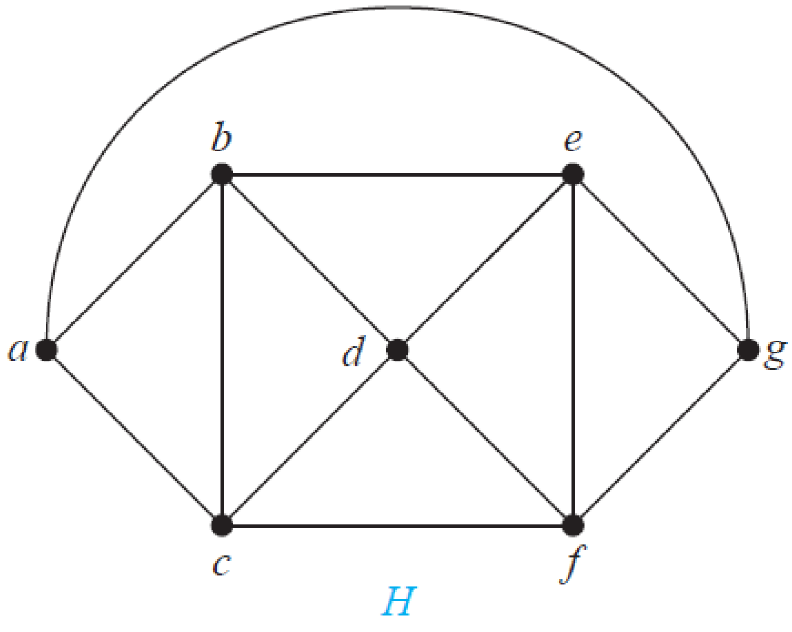
- قضیه:

عدد رنگی یک گراف مسطح بیشتر از چهار نخواهد بود!

مثال

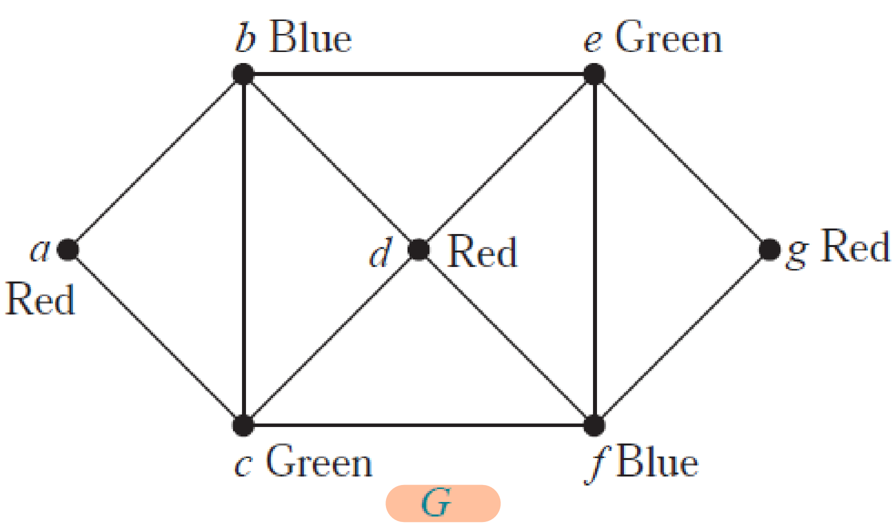
• عدد رنگی گرافهای زیر را بدست آورید.

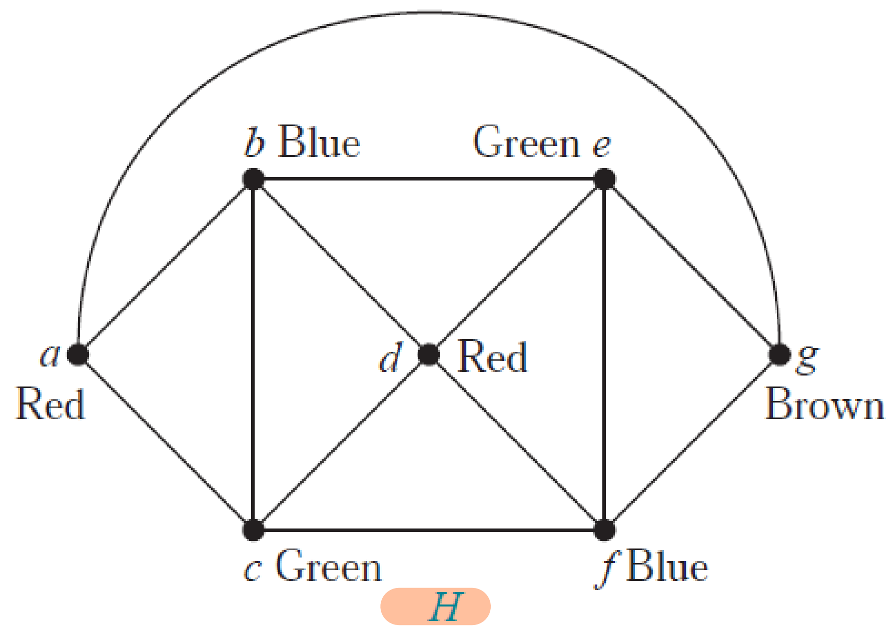




مثال

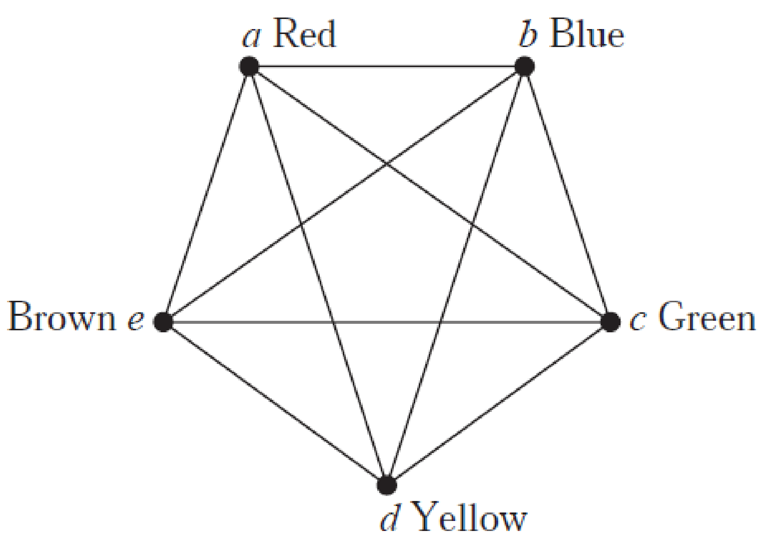
- عدد رنگی گرافهای زیر را بدست آورید.

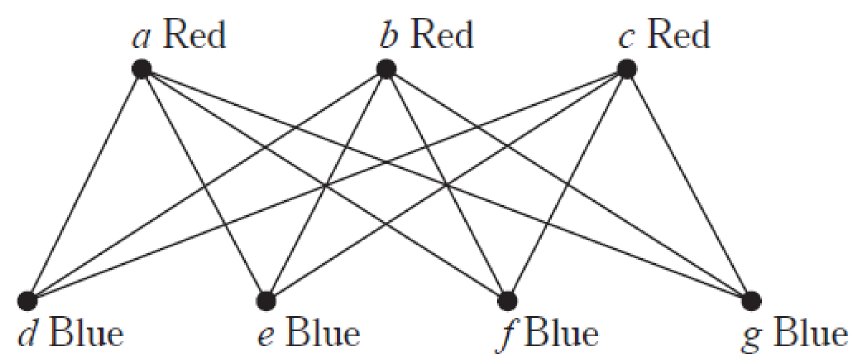




مثال

- عدد رنگی گرافهای K_n و $K_{3,4}$ را بدست آورید.



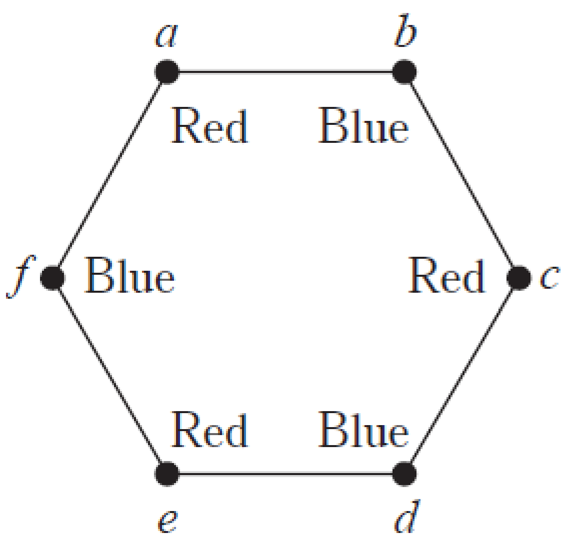


$$\chi(K_n) = n$$

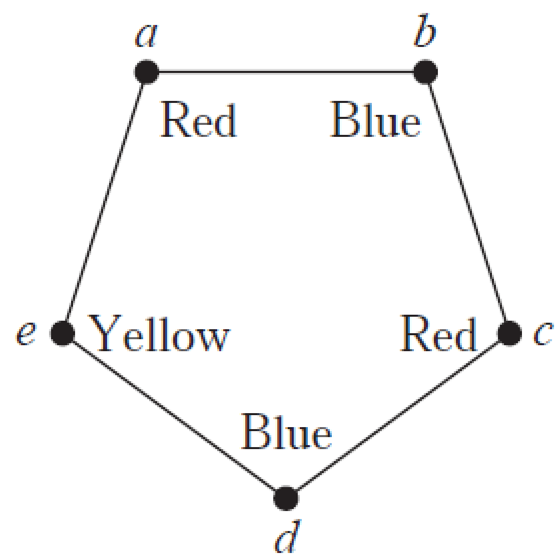
$$\chi(K_{m,n}) = 2$$

مثال

- عدد رنگی گراف C_n, where $n \geq 3$ را بدست آورید.



C_6



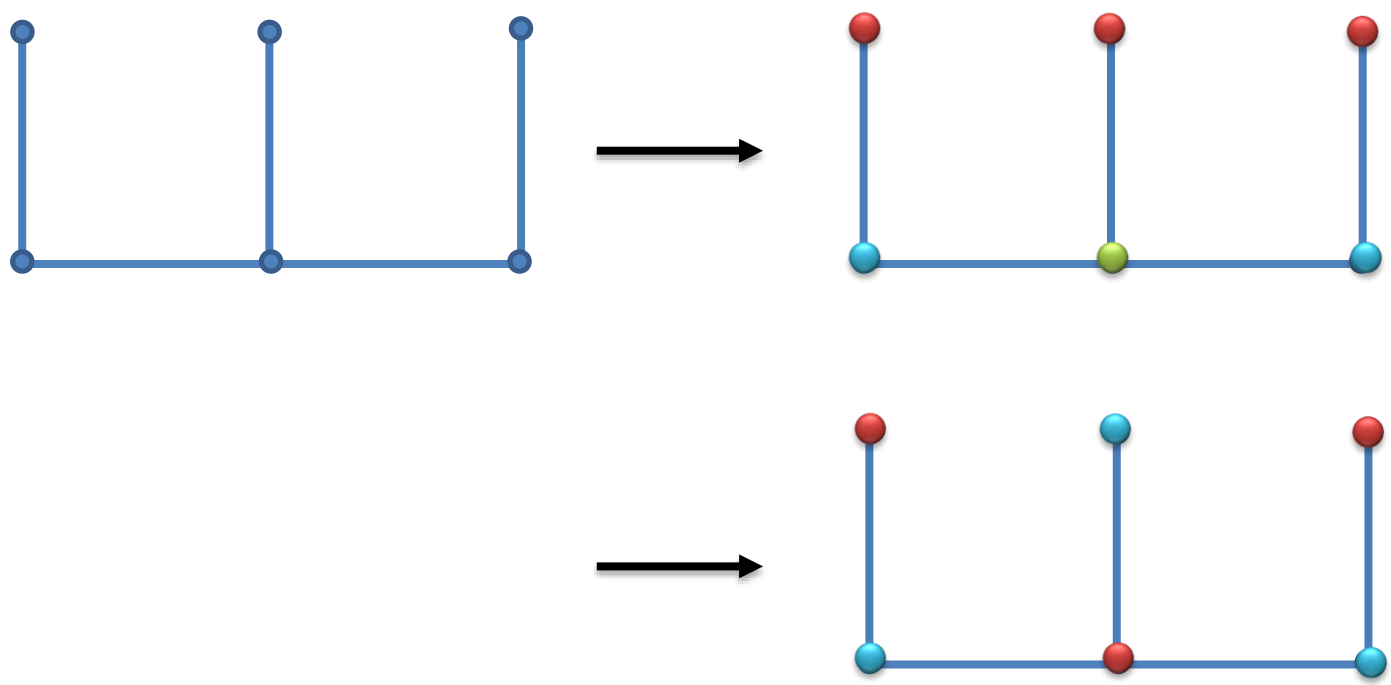
C_5

$\chi(C_n) = 2$

$\chi(C_n) = 3$

رنگ‌آمیزی گراف

- عدد رنگی گراف و ترتیب پیمایش راسها



پایان

موفق و پیروز باشید