به نام خدا

ساختمان‌های گسسته

گراف

Dr. Aref Karimiafshar
A.karimiafshar@ec.iut.ac.ir

مسیر

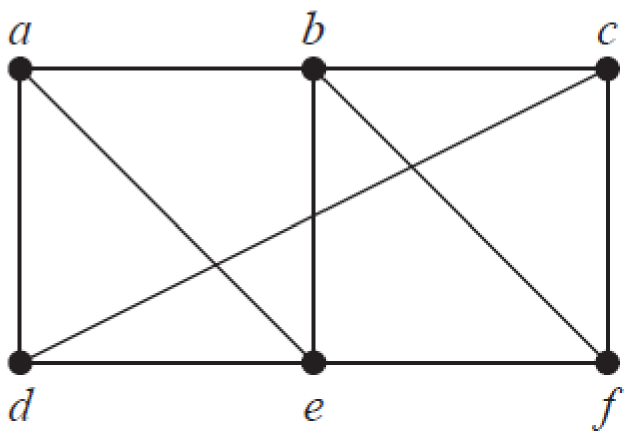
- دنباله‌ای از یالها که از یک راس مشخص شروع و پس از گذشت از رئوس مختلفی به یک راس مشخصی ختم می‌شود.

- اگر n عدد صحیح نامنفی و G گرافی غیرجهتدار باشد
  - مسیری به طول n از یک راس مانند u به راسی مانند v،
    - دنباله‌ای از n یال گراف G است (مانند $e_1, \ldots, e_n$)
    - هرگاه دنباله‌ای از رئوس مانند $x_0 = u, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = v$ وجود داشته باشد که e_i یالی بین دو راس متوالی x_{i-1} و x_i باشد

- اگر ابتدا و انتهای مسیر یک راس باشد به آن مدار یا مسیر بسته گوییم (u=v)
- یک مسیر یا مدار ساده است اگر دارای یال تکراری نباشد

مسیر

- مثال



$a, d, c, f, e \longrightarrow$ مسیر

$d, e, c, a \longrightarrow$ ~~مسیر~~

$b, c, f, e, b \longrightarrow$ مدار

$a, b, e, d, a, b \longrightarrow$ ~~مسیر ساده~~

گشت

- دنباله‌ای از یالها و رئوس در یک گراف $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$

- گشت بسته (closed walk): اگر ابتدا و انتهای گشت یکسان باشد (u=v)
  - معادل مدار

- گذر (trail): گشتی که دارای یال تکراری نباشد

- مسیر (path): گذری که دارای راس تکراری نباشد.

مسیر در گراف جهت دار

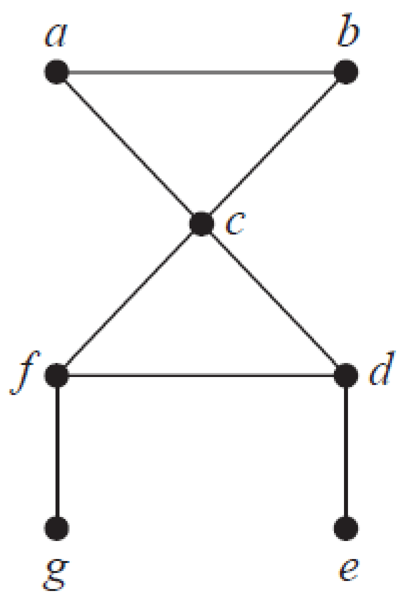
- اگر n عدد صحیح نامنفی و G گرافی جهت دار باشد
  - مسیری به طول n از یک راس مانند u به راسی مانند v،
    - دنباله‌ای از n یال گراف G است (مانند $e_1, e_2 \ldots, e_n$)
    - که e_1 یالی بین دو راس (x_0 , x_1)، e_2 یالی بین دو راس (x_1 , x_2) و e_n یالی بین دو راس (x_{n-1} , x_n) باشد، $x_0 =u$ و $x_n =v$

- اگر راس ابتدایی و انتهایی مسیر، یکسان باشد به آن مسیر بسته گوییم (u=v)

- یک مسیر یا مدار ساده است اگر دارای یال تکراری نباشد

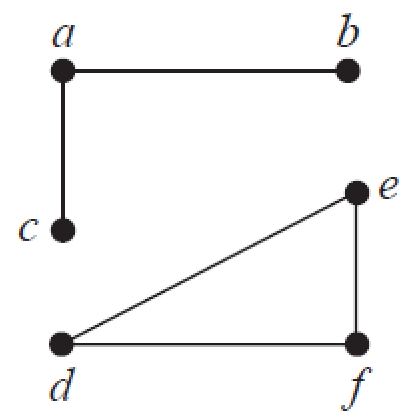
گراف همبند

- یک گراف را همبند گوییم هر گاه حداقل یک مسیر بین هر دو راس مختلف آن وجود داشته باشد.



G_1

همبند

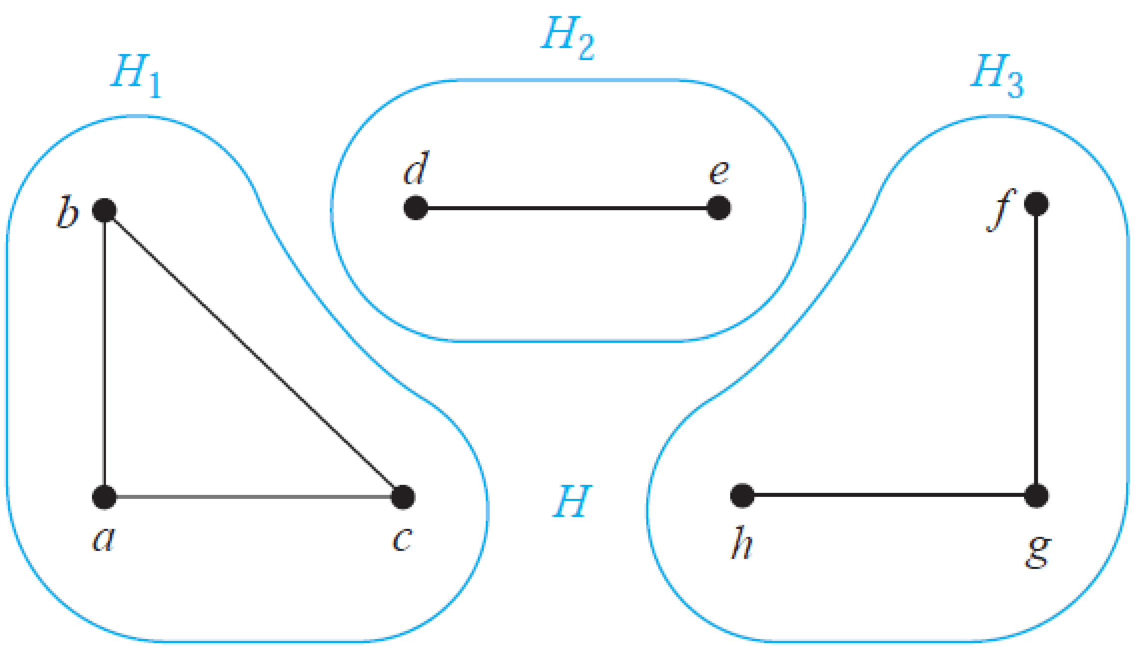


G_2

~~همبند~~

مولفه‌های همبندی

• یک زیرگراف همبند از گراف G که زیرگراف سره از هیچ زیرگراف همبند دیگری از G نباشد.



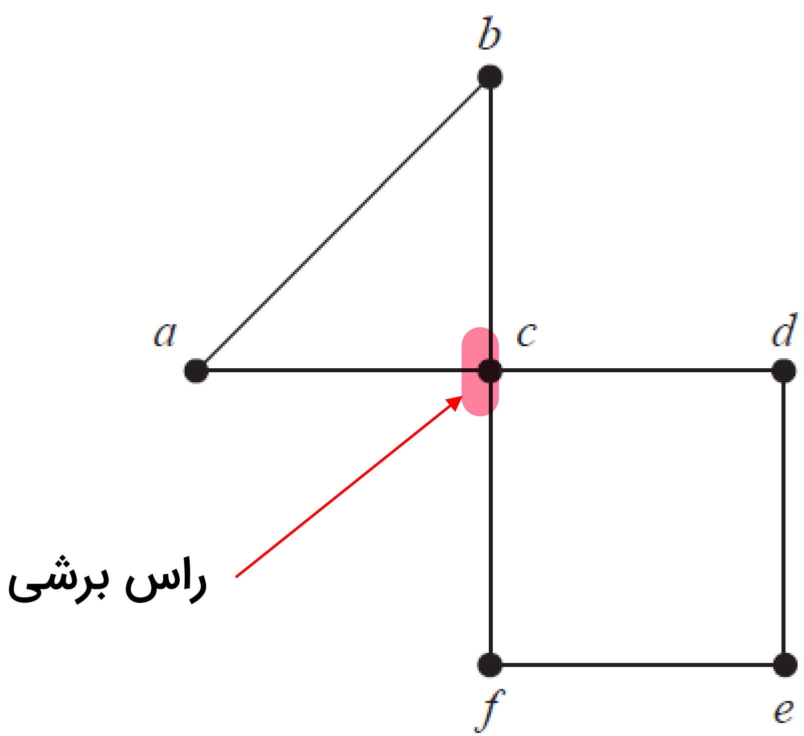
میزان همبندی

- همبندی ← همه رئوس به هم متصل هستند

- مثال:
  - گراف ارتباطی کامپیوترها بر روی یک شبکه
    - همبندی ← از هر کامپیوتری به همه کامپیوترهای دیگر می توانید پیام ارسال کنید
    - قابلیت اطمینان ارتباط بین دو کامپیوتر
      - اگر لینک دچار مشکل شود آیا پیام به درستی دریافت خواهد شد؟
      - میزان همبندی مفهومی است که به این سوال پاسخ خواهد داد!!

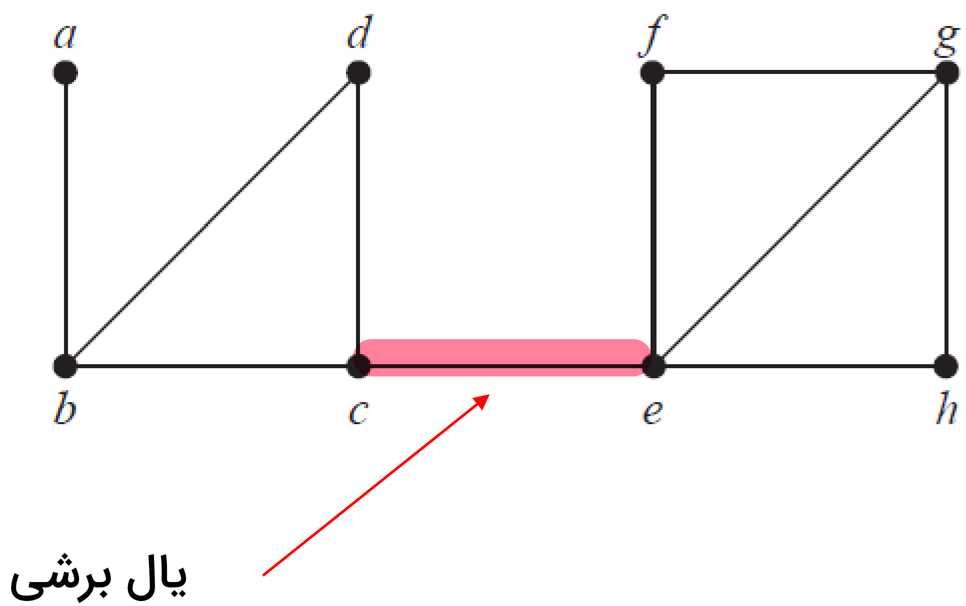
راس برشی

- راسی که با حذف کردن آن و تمام یالهای واقع بر آن مولفه‌های همبندی بیشتری به وجود آید.

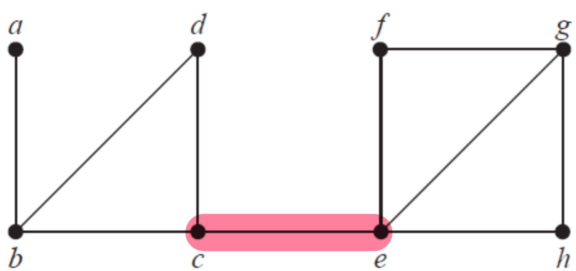


یال برشی

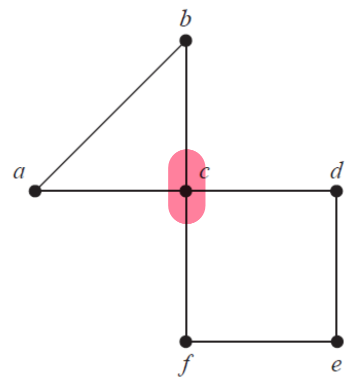
- یالی که با حذف کردن آن مولفه‌های همبندی بیشتری به وجود آید.



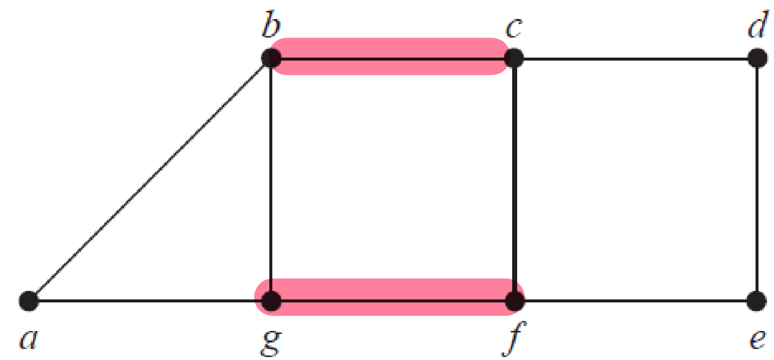
میزان همبندی



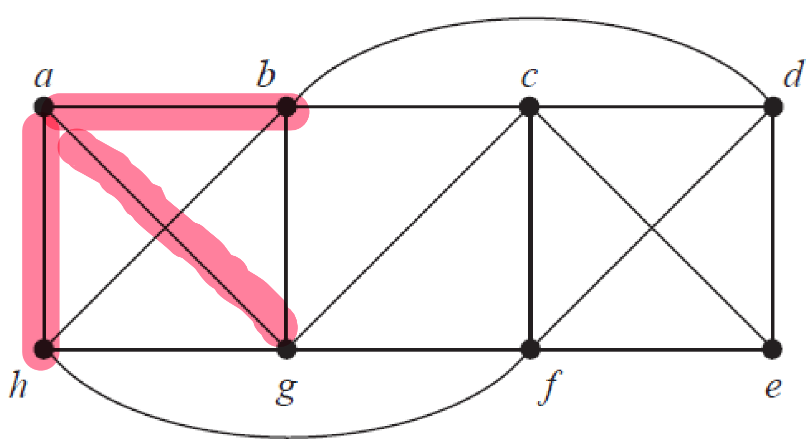
G_1



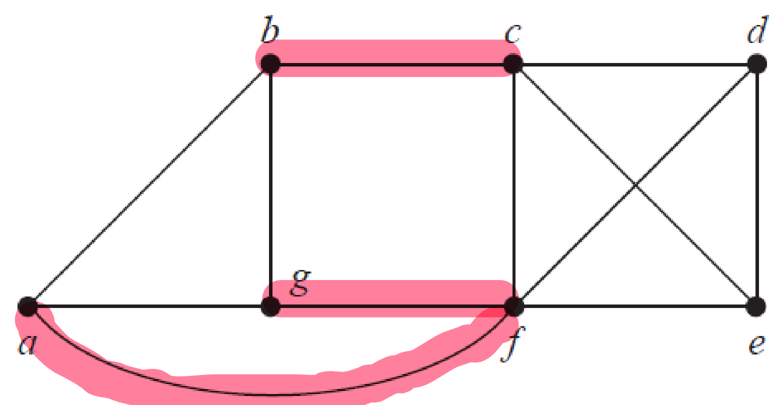
G_2



G_3



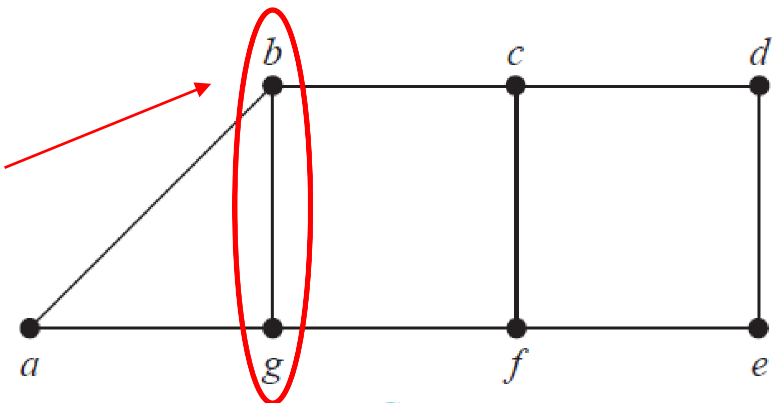
G_5



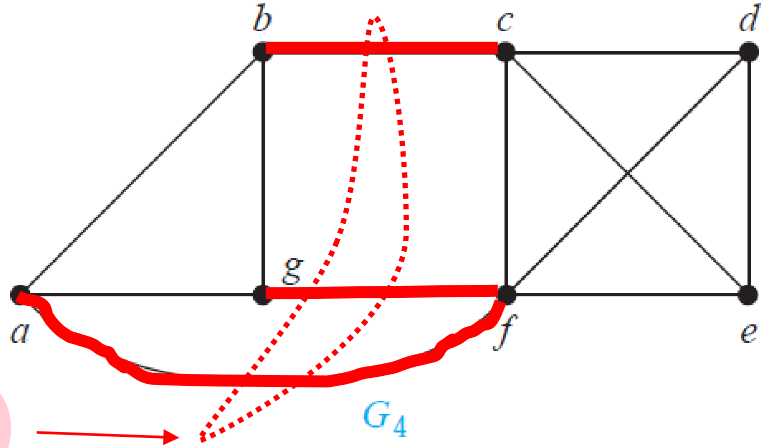
G_4

میزان همبندی

مجموعه ناهمبندساز راسی



G_3

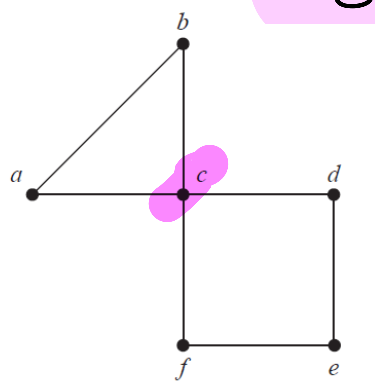


G_4

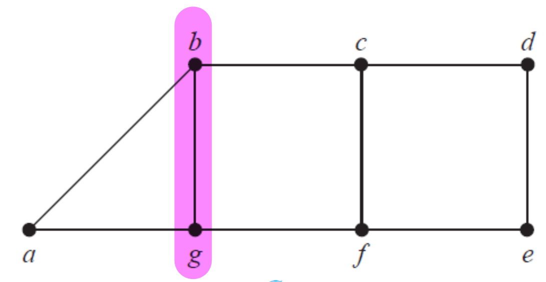
مجموعه ناهمبندساز یالی

عدد همبندی راسی

- اندازه کوچکترین مجموعه ناهمبندساز راسی← $\kappa(G)$



G_2



G_3

- گراف کامل قابل ناهمبندسازی نیست!

$$\kappa(K_n) = n - 1$$

- اصلاح تعریف ← حداقل تعداد رئوسی که می توان از یک گراف حذف کرد تا ناهمبند یا تبدیل به گرافی با فقط یک راس شود.

$$0 \le \kappa(G) \le n - 1$$

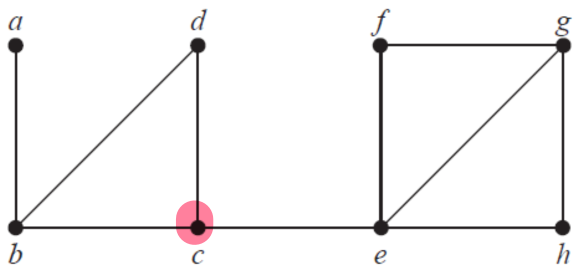
عدد همبندی راسی

- هر چه عدد همبندی راسی بزرگتر باشد ← گراف همبندتر است!!!

- گراف ناهمبند ← $\kappa(G) = 0$
- گراف K_1 ← $\kappa(G) = 0$
- گراف K_2 ← $\kappa(G) = 1$
- گراف K_3 ← $\kappa(G) = 2$

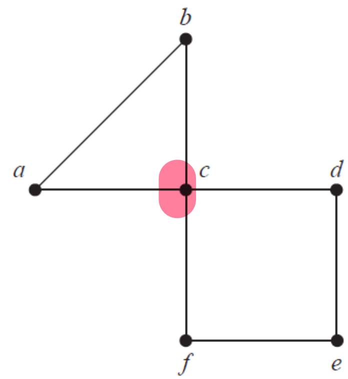
- اگر $\kappa(G) \geq k$ ← **k-connected**

عدد همبندی راسی



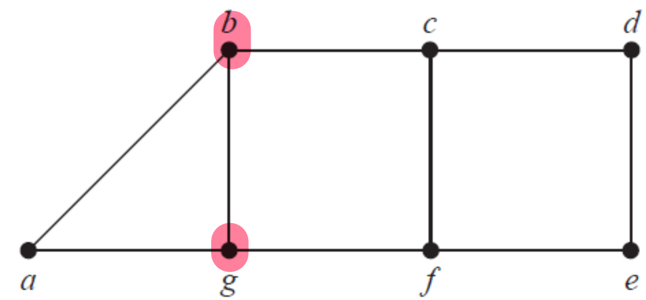
G_1

$\kappa(G_1) = 1$



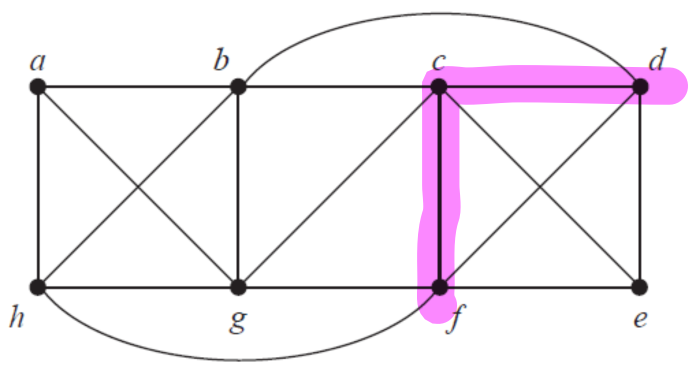
G_2

$\kappa(G_2) = 1$



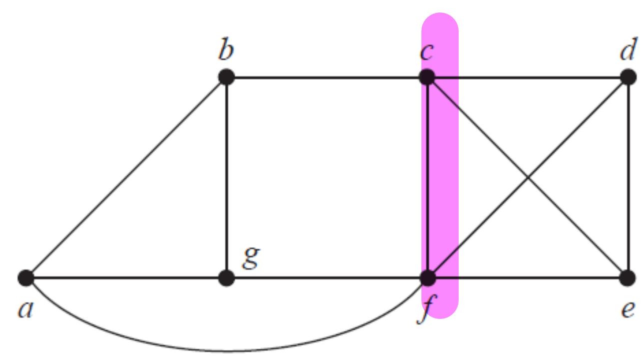
G_3

$\kappa(G_3) = 2$



G_5

$\kappa(G_5) = 3$

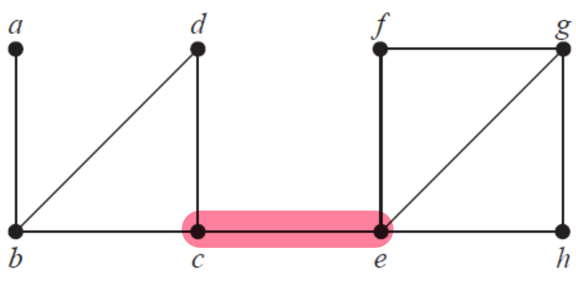


G_4

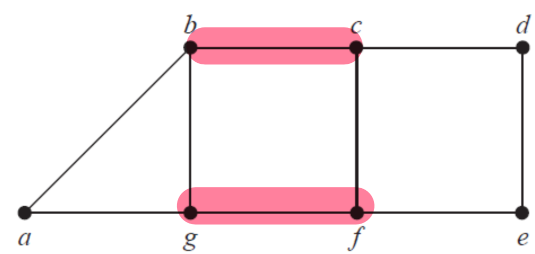
$\kappa(G_4) = 2$

عدد همبندی یالی

- اندازه کوچکترین مجموعه ناهمبندساز یالی← $\lambda(G)$



G_1



G_3

- اگر گراف همبند نباشد:

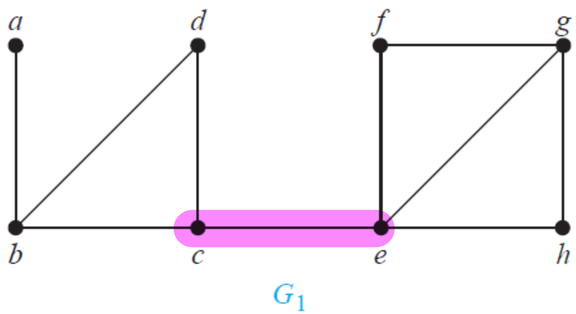
$$\lambda(G) = 0$$

- اگر گراف کامل باشد:

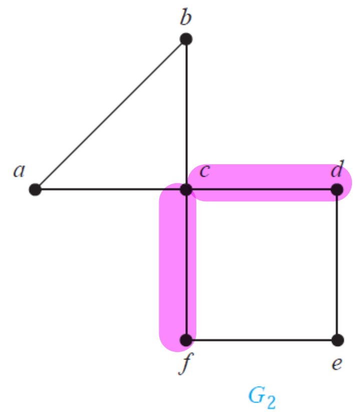
$$\lambda(G) = n - 1$$

$$0 \le \lambda(G) \le n - 1$$

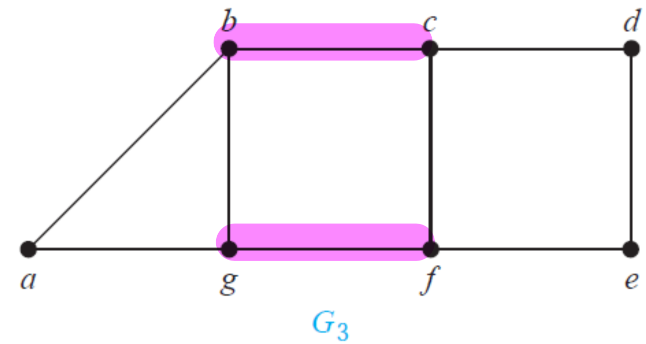
عدد همبندی یالی



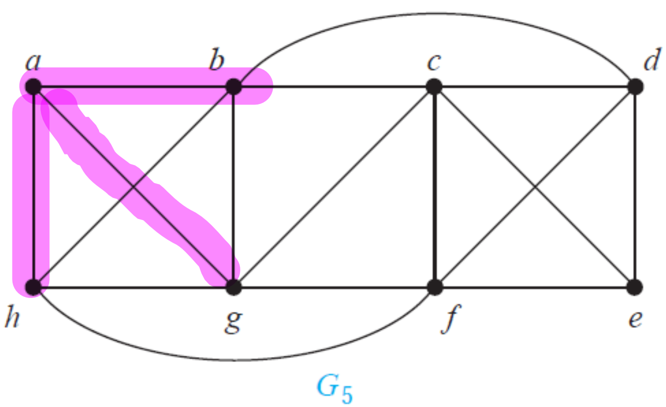
$\lambda(G_1) = 1$



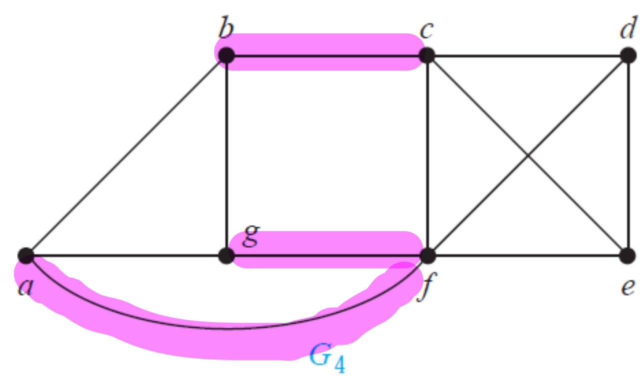
$\lambda(G_2) = 2$



$\lambda(G_3) = 2$



$\lambda(G_5) = 3$



$\lambda(G_4) = 3$

عدد همبندی

- رابطه بین عدد همبندی راسی و یالی

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg(v)$$

- در گراف کامل:

$$\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = \min_{v \in V} \deg(v) = n - 1$$

- در گراف ناهمبند G:

$$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$$

همبندی در گراف جهت دار

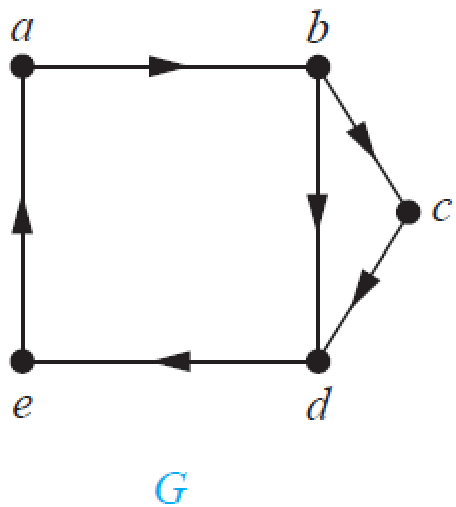
- یک گراف جهت دار را قویا همبند گوییم اگر a و b دو راس باشند
  - مسیری از a به b وجود داشته باشد
  - مسیری از b به a وجود داشته باشد

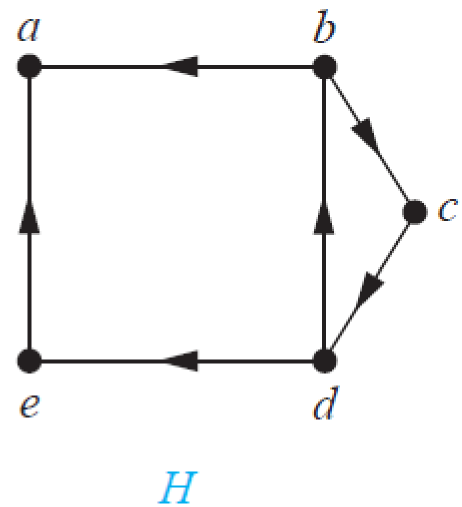
- دنباله ای از یالهای جهت دار بین هر دو راس گراف وجود داشته باشد

- یک گراف جهت دار را ضعیفا همبند گوییم:
  - اگر مسیری بین هر دو راس در گراف زمینه آن وجود داشته باشد
    - گراف زمینه: اگر جهت یالهای گراف را در نظر نگیریم

همبندی در گراف جهت دار

- مثال:



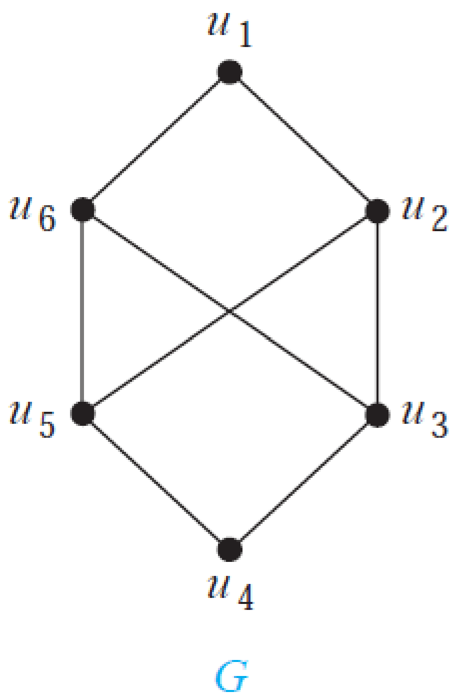


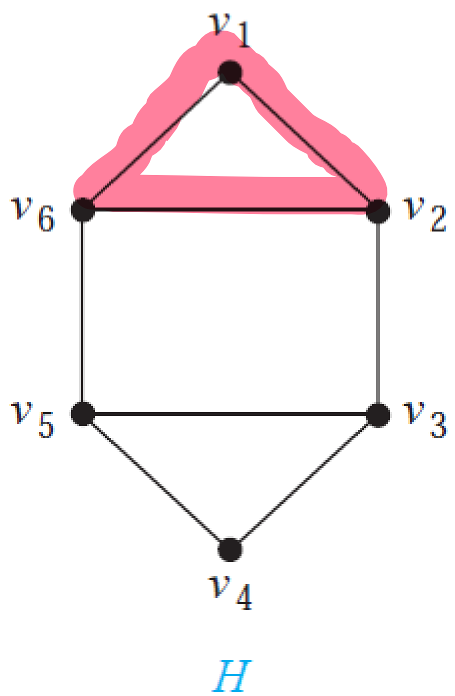
قویا همبند

ضعیفا همبند

یکریختی و مسیر

- استفاده از مسیر برای ارزیابی یکریختی





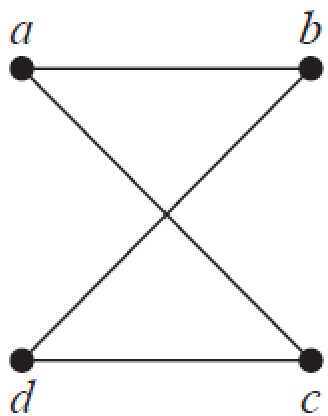
~~یکریخت~~

شمارش مسیرها

- اگر G یک گراف باشد که ماتریس مجاورت آن A باشد $v_1, v_2, \ldots, v_n$
  - تعداد مسیرهای مختلف با طول r از راس v_i به v_j درایه (i, j) در $\mathbf{A}^r$ است.

a, b, c, d

- مثال:



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

مسیرهای مختلف با طول 4
از a به d

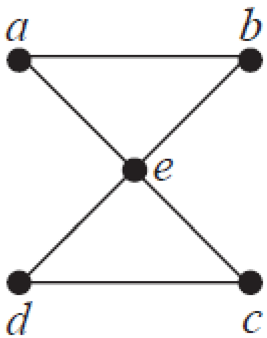
گراف اویلری

- گذر اویلری
  - گذری از یک گراف که شامل همه یالهای آن باشد.
- تور اویلری (گذر اویلری بسته)
  - گذر اویلری که بسته باشد!
- گراف اویلری
  - گرافی که یک تور اویلری داشته باشد.

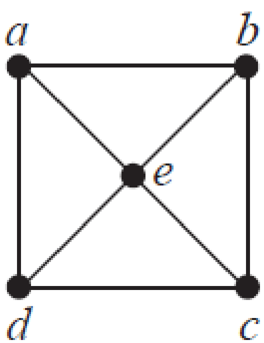
گراف اویلری

- مثال

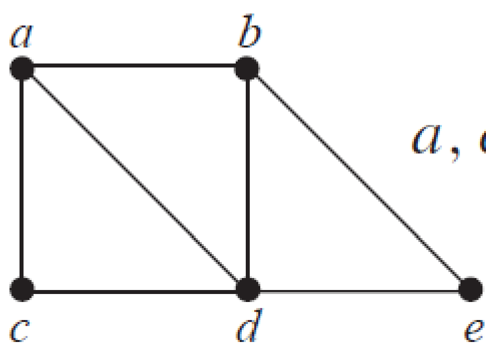
تور اویلری a, e, c, d, e, b, a



G_1



G_2

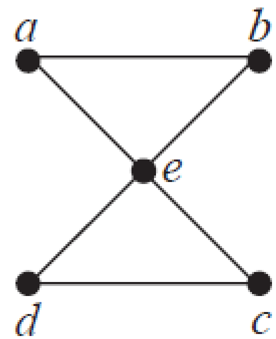


G_3

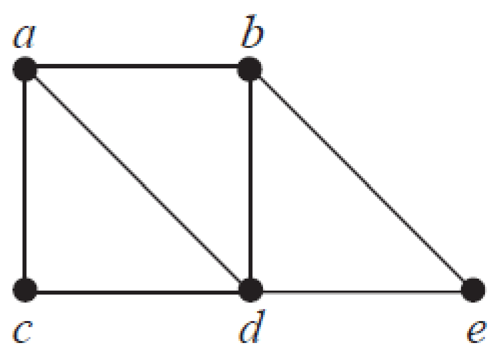
گذر اویلری a, c, d, e, b, d, a, b

گراف اویلری (قضیه)

- یک گراف همبند دارای تور اویلری است اگر وفقط اگر درجه هر راس آن زوج باشد.



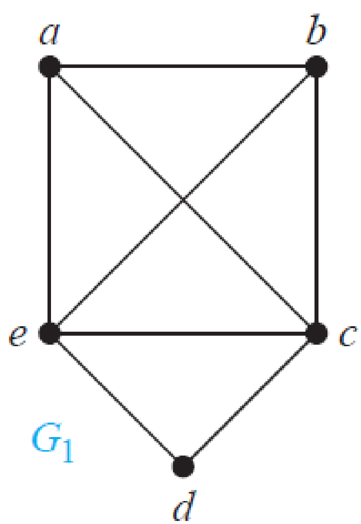
- یک گراف همبند دارای مسیر اویلری اما نه تور اویلری است اگر وفقط اگر دارای دو راس از درجه فرد باشد.

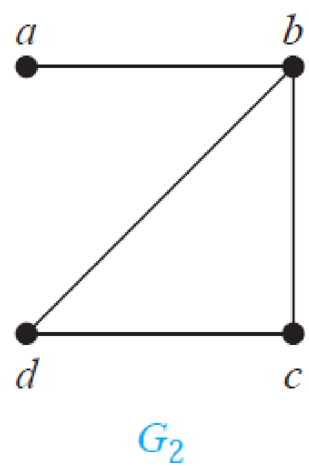


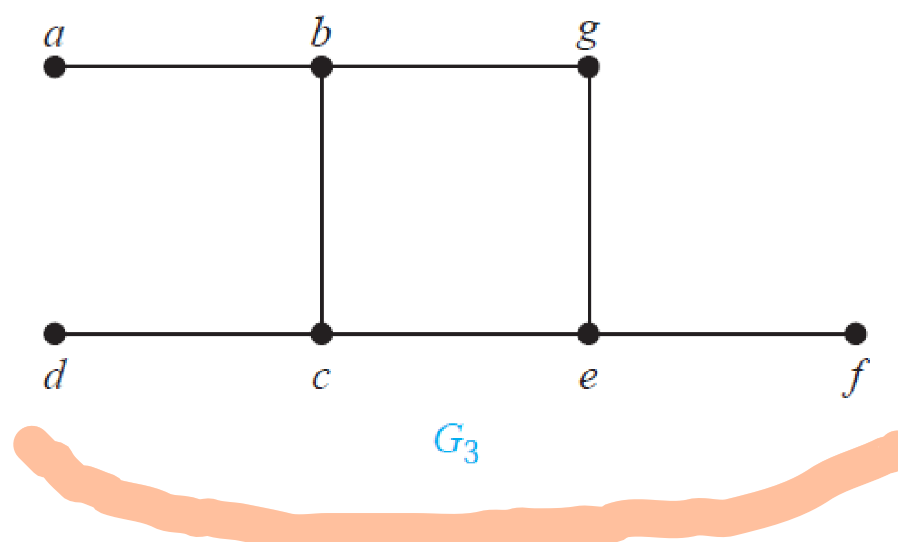
گراف هامیلتونی

- گذر هامیلتونی (مسیر ساده هامیلتونی)
  - گذری از یک گراف که شامل همه رئوس آن باشد.
- دور هامیلتونی
  - اگر مسیر هامیلتونی ابتدا و انتهای یکسانی داشته باشد.
- گراف هامیلتونی
  - گرافی که یک دور هامیلتونی داشته باشد.

گراف هامیلتونی







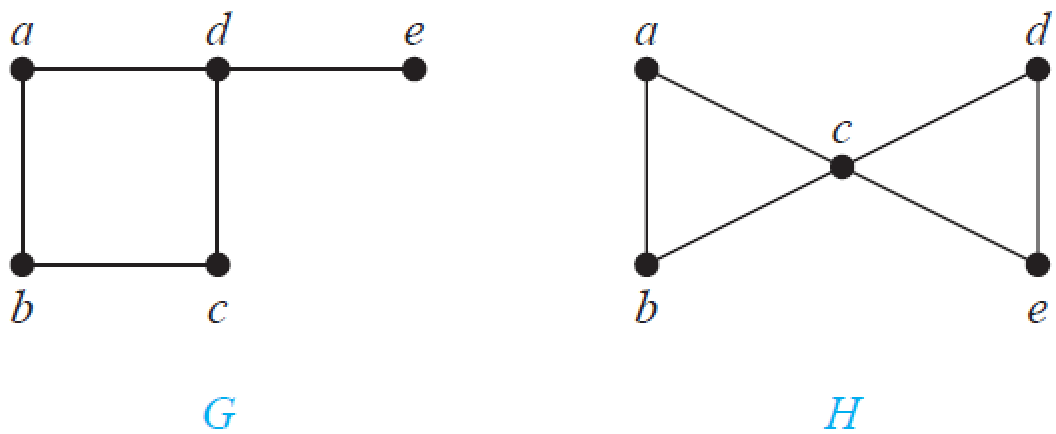
a, b, c, d, e, a

دور هامیلتونی

a, b, c, d

مسیر هامیلتونی

گراف هامیلتونی



فاقد دور هامیلتونی

گراف هامیلتونی

- **DIRAC’S THEOREM**
  - اگر G یک گراف ساده با حداقل سه راس باشد، آنگاه اگر درجه هر راس G حداقل n/2 باشد، G دارای دور هامیلتونی است.

- **ORE’S THEOREM**
  - اگر G یک گراف ساده با حداقل سه راس باشد، آنگاه اگر مجموع درجه هر دو راس غیر مجاور G حداقل n باشد، G دارای دور هامیلتونی است.

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n$$

پایان

موفق و پیروز باشید