



تمرین سوم درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها
سری فوریه (بخش اول)

استاد: دکتر نقش

زمان تحویل: ۱۴۰۲/۰۲/۰۳ ساعت ۱۶

۱- ضرایب سری فوریه‌ی غیر صفر یک سیگنال متناوب پیوسته زمان حقیقی با دوره تناوب اصلی ۸ به صورت زیر است:

$$a_1 = a_{-1}^* = j, \quad a_5 = a_{-5}^* = 2$$

سیگنال متناوب مربوطه را به صورت زیر بیان نمایید:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \theta_k)$$

۲- ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زیر را بدست آورید (در صورت امکان می‌توان از خواص سری فوریه استفاده کرد):

$$x(t) = \begin{cases} 0 & |t| > 1 \\ \frac{t+1}{2} & |t| \leq 1 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$x(t) = e^{-t}, \quad -1 < t < 1 \quad \text{ب)}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\delta(t - 2k - 1) \quad \text{ج)}$$

۳- $x(t)$ یک سیگنال حقیقی با دوره تناوب T و ضرایب سری فوریه a_k است.

الف) نشان دهید که $a_k = a_{-k}^*$ و a_0 حقیقی است.

ب) نشان دهید که در صورت زوج بودن $x(t)$ ، ضرایب سری فوریه آن نیز باید حقیقی و زوج باشد.

ج) نشان دهید که در صورت فرد بودن $x(t)$ ، ضرایب سری فوریه آن نیز باید موهومی خالص و فرد باشد و

$$a_0 = 0$$

د) نشان دهید که ضرایب سری فوریه بخش زوج $x(t)$ عبارتند از $\Re\{a_k\}$

ه) نشان دهید که ضرایب سری فوریه بخش فرد $x(t)$ عبارتند از $j \Im\{a_k\}$

۴- سیگنال $x(t)$ متناوب با دوره‌ی تناوب اصلی T و دارای ضرایب سری فوریه‌ی a_k است. دانشجویی در امتحان خود، دوره‌ی تناوب اصلی را به اشتباه $2T$ به دست آورده‌است و بر اساس همین دوره تناوب اشتباه، ضرایب سری فوریه را حساب می‌کند. اگر ضرایبی که دانشجو به دست آورده است را b_k بنامیم، b_k را برحسب a_k به دست آورید.

۵- اگر سیگنال پیوسته زمان $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب باشد،

الف) ثابت کنید اگر $x\left(t - \frac{T}{2}\right) = -x(t)$ باشد، ضرایب زوج سری فوریه سیگنال صفر است.

ب) ثابت کنید که عکس قضیه‌ی فوق نیز برقرار است، یعنی اگر ضرایب زوج سری فوریه سیگنال صفر باشند آنگاه :

$$x\left(t - \frac{T}{2}\right) = -x(t)$$

۶- $x(t)$ سیگنالی دارای دوره تناوب ۶ و $y(t)$ سیگنالی دارای دوره تناوب ۹ است. ضرایب سری فوریه آنها

به ترتیب برابر a_k و b_k هستند. ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید:

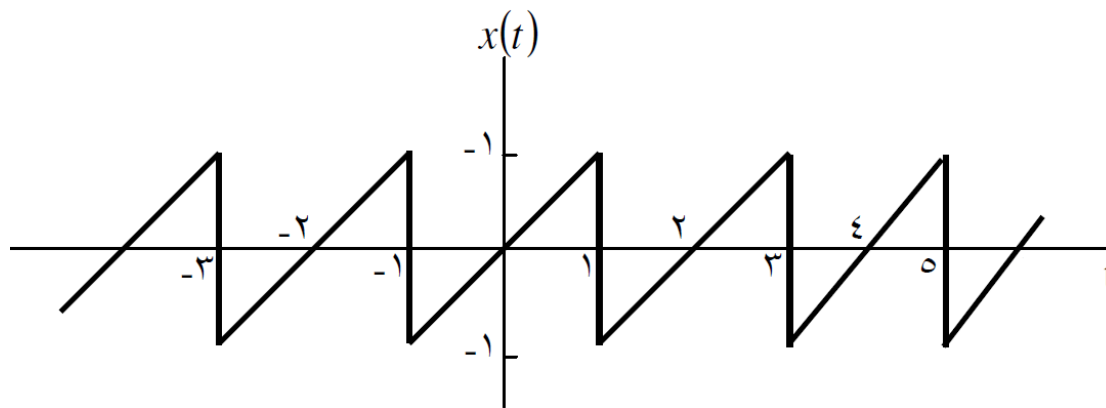
الف) $z(t) = 3x(t) + y(t)$

ب) $z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[t - 2k]$

ج) $z(t) = x^*(t) + x(-t)$

د) $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$

۷- ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.



۸- اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x(t)$ داده شده است:

الف) $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی $T=4$ و ضرایب سری فوریه a_k است.

ب) $x(t)$ حقیقی و فرد می باشد.

ج) به ازای $|k| > 1$ ، $a_k = 0$ است.

د) $\int_1^9 |x(t)|^2 dt = 2$

سیگنال های ممکن برای $x(t)$ را تعیین کنید.

موفق باشید