به نام خدا

ساختمان‌های گسسته

شمارش

Dr. Aref Karimiafshar
A.karimiafshar@ec.iut.ac.ir

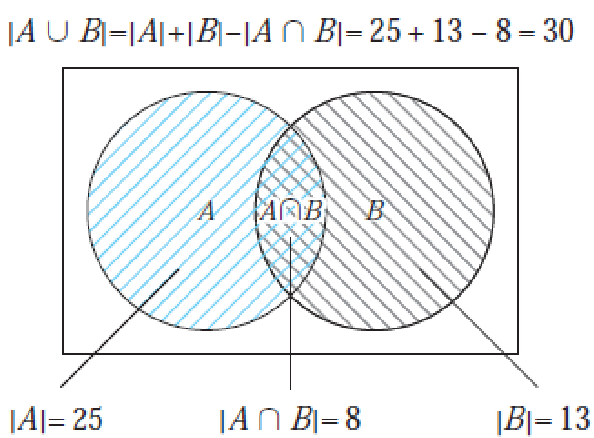
اصل شمول و عدم شمول

- یادآوری
  - تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- مثال
  - دانشجویان در یک کلاس درس ریاضیات گسسته
    - رشته کامپیوتر یا رشته ریاضی یا هردو
    - اگر 25 نفر از رشته کامپیوتر، 13 نفر از رشته ریاضی و 8 نفر دو رشته‌ای

  چند دانشجو در این کلاس داریم؟

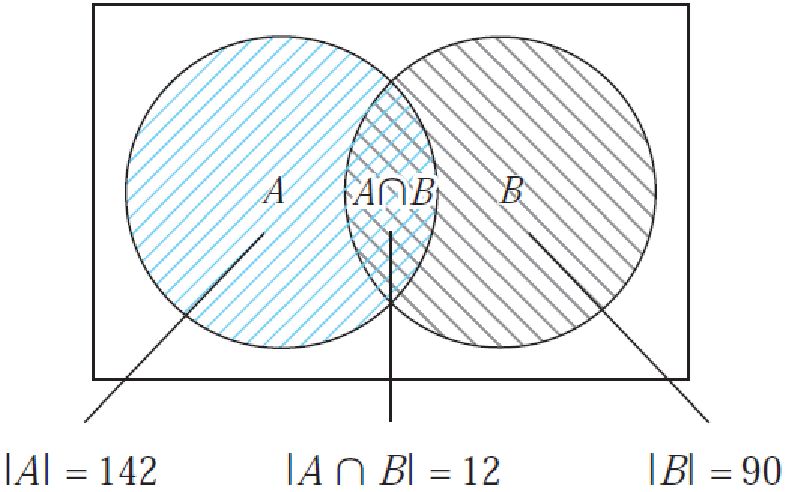


$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 25 + 13 - 8 = 30. \end{aligned}$$

مثال

- چند عدد مثبت کوچکتر یا مساوی 1000 داریم که بر 7 یا 11 بخش پذیر است؟

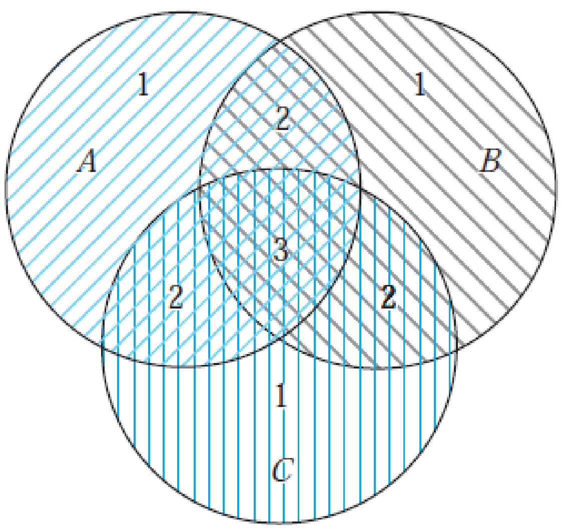
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 142 + 90 - 12 = 220$



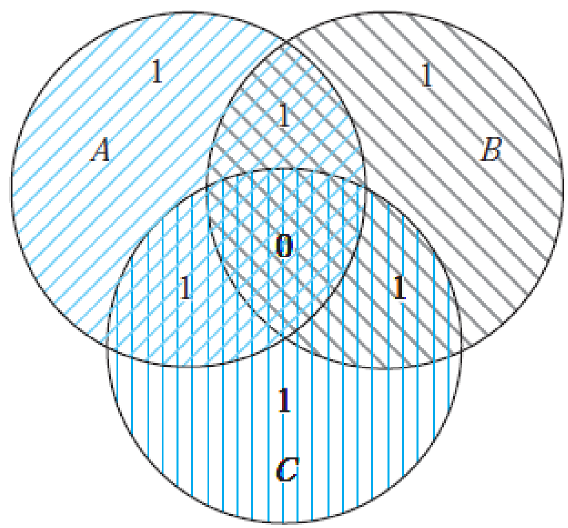
$$
\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
&= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor \\
&= 142 + 90 - 12 = 220
\end{aligned}
$$

اصل شمول و عدم شمول

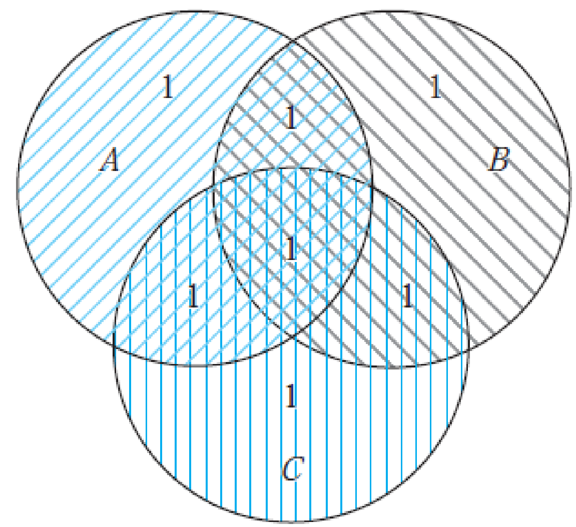
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



(a) Count of elements by $|A|+|B|+|C|$



(b) Count of elements by $|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|$



(c) Count of elements by $|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|$

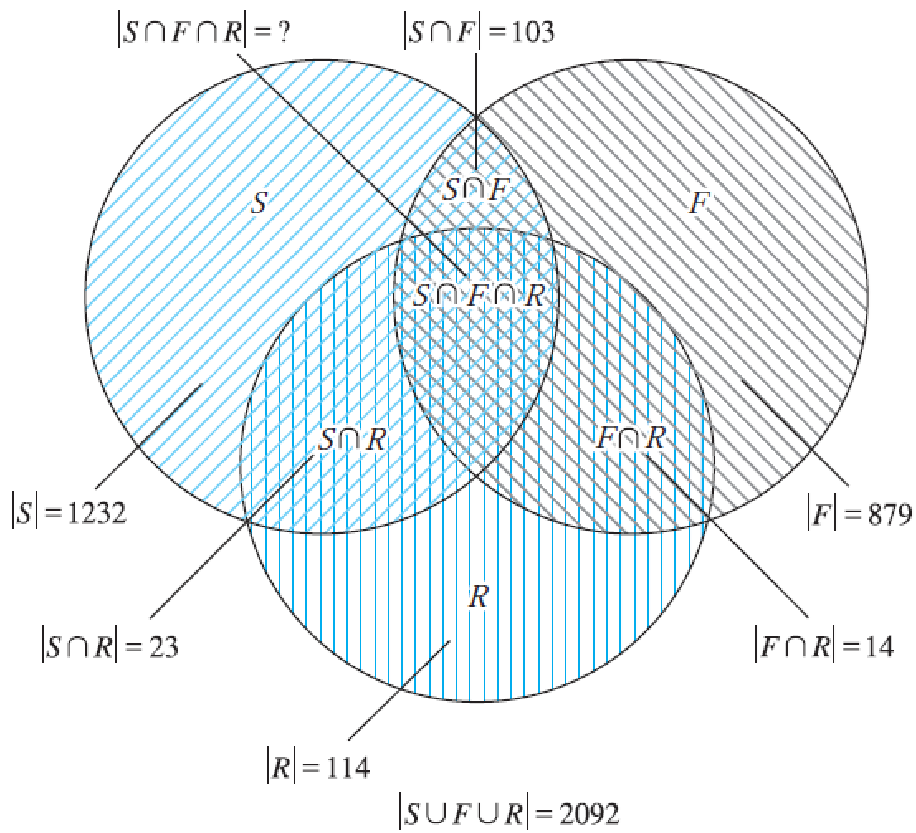
مثال

- اگر
  - 1232نفر زبان اسپانیایی
  - 879 نفر در زبان فرانسوی
  - 114 نفر روسی
  - 103 نفر اسپانیایی و فرانسوی
  - 23 نفر اسپانیایی و روسی
  - 14 فرانسوی و روسی
- اگر 2092 حداقل در یکی از این کلاسهای شرکت کرده باشند، چند نفر در هر سه کلاس شرکت کرده اند؟

$$|S| = 1232, \quad |F| = 879, \quad |R| = 114,$$
$$|S \cap F| = 103, \ |S \cap R| = 23, \ |F \cap R| = 14,$$

$$|S \cup F \cup R| = 2092$$

مثال



$$|S \cup F \cup R| = |S| + |F| + |R| - |S \cap F| - |S \cap R| - |F \cap R| + |S \cap F \cap R|$$

$$2092 = 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 - 14 + |S \cap F \cap R|$$

$$|S \cap F \cap R| = 7$$

اصل شمول و عدم شمول

- اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعه‌های متناهی باشند، آنگاه

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

- اثبات
  - فرض کنید که aعضوی باشد که دقیقا در rتا از مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ وجود دارد $1 \le r \le n$

$$C(r,1) \qquad \Sigma |A_i|$$

$$C(r,2) \qquad \Sigma |A_i \cap A_j|$$

$$C(r,1) - C(r,2) + C(r,3) - \cdots + (-1)^{r+1} C(r,r)$$

$$C(r,0) - C(r,1) + C(r,2) - \cdots + (-1)^r C(r,r) = 0$$

$$1 = C(r,0) = C(r,1) - C(r,2) + \cdots + (-1)^{r+1} C(r,r)$$

اصل شمول و عدم شمول (فرم دیگر)

- تعداد اعضایی در یک مجموعه که شامل یکسری ویژگیهای خاص نیستند $P_1, P_2, \ldots, P_n$
- A_i زیرمجموعه‌ای شامل اعضایی که ویژگی P_i را دارند.
- $N(P_1 P_2 \ldots P_n)$ تعداد اعضایی که ویژگیهای $P_1, P_2, \ldots, P_n$ را دارند.

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_k})$$

$$N(P_1' P_2' \ldots P_n') = N - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

$$N(P_1' P_2' \ldots P_n') = N - \sum_{1 \le i \le n} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(P_i P_j P_k) + \cdots + (-1)^n N(P_1 P_2 \ldots P_n)$$

مثال

- معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ چند جواب صحیح نامنفی با شرط $x_1 \le 3, x_2 \le 4, \text{ and } x_3 \le 6$ دارد؟

P_1	$x_1 > 3$
P_2	$x_2 > 4$
P_3	$x_3 > 6$

$$N(P_1'P_2'P_3') = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) + N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_2P_3) - N(P_1P_2P_3)$$

مثال

- معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ چند جواب صحیح نامنفی با شرط $x_1 \le 3,\ x_2 \le 4, \text{ and } x_3 \le 6$ دارد؟

$$N = C(3+11-1, 11) = 78$$

$$N(P_1) = C(3+7-1, 7) = C(9, 7) = 36 \qquad x_1 \ge 4$$

$$N(P_2) = C(3+6-1, 6) = C(8, 6) = 28 \qquad x_2 \ge 5$$

$$N(P_3) = C(3+4-1, 4) = C(6, 4) = 15 \qquad x_3 \ge 7$$

$$N(P_1P_2) = C(3+2-1, 2) = C(4, 2) = 6 \qquad x_1 \ge 4 \text{ and } x_2 \ge 5$$

$$N(P_1P_3) = C(3+0-1, 0) = 1 \qquad x_1 \ge 4 \text{ and } x_3 \ge 7$$

$$N(P_2P_3) = 0 \qquad x_2 \ge 5 \text{ and } x_3 \ge 7$$

$$N(P_1P_2P_3) = 0 \qquad x_1 \ge 4,\ x_2 \ge 5, \text{ and } x_3 \ge 7$$

$$N(P_1'P_2'P_3') = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6$$

مثال

- تعداد اعداد کوچکتر یا مساوی n که نسبت به n اول هستند را محاسبه کنید. $n = P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}$

$A_i = \{m \le n \mid P_i | m\}$

تعداد اعدادی که نسبت به n اول نیستند $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$

$$\emptyset(n) = n - \left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right|$$

$$|A_i| = \frac{n}{P_i} \qquad |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \frac{n}{P_{i_1} P_{i_2}} \qquad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \frac{n}{P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k}}$$

$$\emptyset(n) = n - \sum_{i} \frac{n}{P_i} + \sum_{i_1 < i_2} \frac{n}{P_{i_1} P_{i_2}} - \dots + (-1)^k \frac{n}{P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k}}$$

مثال

- تعداد اعداد کوچکتر یا مساوی n که نسبت به n اول هستند را محاسبه کنید. $n = P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}$

$$\emptyset(n) = n - \sum_{i} \frac{n}{P_i} + \sum_{i_1<i_2} \frac{n}{P_{i_1}P_{i_2}} - \dots + (-1)^k \frac{n}{P_{i_1}P_{i_2}\dots P_{i_k}}$$

$$k = 2 \rightarrow \emptyset(n) = n(1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2\times 3})$$

$$k = 3 \rightarrow \emptyset(n) = n\left(1 - \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_3} + \frac{1}{P_1P_2} + \frac{1}{P_1P_3} + \frac{1}{P_2P_3} - \frac{1}{P_1P_2P_3}\right)$$

$$= n\left((1 - \frac{1}{P_1})(1 - \frac{1}{P_2})(1 - \frac{1}{P_3})\right)$$

$$\emptyset(n) = n\left((1 - \frac{1}{P_1})(1 - \frac{1}{P_2}) \dots (1 - \frac{1}{P_k})\right)$$

تعداد توابع پوشا

- تعداد توابع پوشا از یک مجموعه 6 عضوی به یک مجموعه 3 عضوی را محاسبه کنید.

- حل:
  - اگر فرض کنیم b_1, b_2, and b_3 اعضای هم دامنه باشند.
  - P_1, P_2, and P_3 ویژگی، عضو iام در برد نباشد.

$$N(P_1' P_2' P_3') = N - [N(P_1) + N(P_2) + N(P_3)] + [N(P_1 P_2) + N(P_1 P_3) + N(P_2 P_3)] - N(P_1 P_2 P_3)$$

$$3^6 - C(3,1)2^6 + C(3,2)1^6 = 729 - 192 + 3 = 540$$

تعداد توابع پوشا

- به صورت کلی:
  - تعداد توابع پوشا از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی، $n \le m$
  - P_i ویژگی، عضو i ام در برد نباشد.

$$N(P_1'P_2'\ldots P_n') =$$

$$N - \sum_{i} N(P_i) + \sum_{i<j} N(P_iP_j) - \sum_{i<j<k} N(P_iP_jP_k) + \cdots + (-1)^n N(P_1P_2\ldots P_n)$$

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)\cdot 1^m$$

مثال

- به چند طریق می توانیم 5 کار مختلف را بین 4 کارمند متفاوت تقسیم کنیم به نحوی که به هر کارمند حداقل یک کار نسبت داده شده باشد.

- حل:
  - توزیع کارها را می توانیم به صورت یک تابع از مجموعه کارها به کارمندان در نظر بگیرم. برای اینکه حداقل به هر کارمند یک کار نسبت داده شده باشد، باید توابع پوشا را درنظر بگیریم.

$$4^5 - C(4,1)3^5 + C(4,2)2^5 - C(4,3)1^5 = 1024 - 972 + 192 - 4 = 240$$

پریش

- یک جایگشتی از اشیاء که هیچ شئ در جای اصلی خود قرار نگیرد

12345

21453 پریش

21543 ~~پریش~~

تعداد پریش‌ها

- تعداد پریش‌های یک مجموعه n عضوی

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

- اثبات
  - عنصر اام درجایگاه خودش قرار گیرد P_i for $i = 1, 2, \ldots, n$

$$D_n = N(P_1' P_2' \ldots P_n')$$

$$D_n = N - \sum_{i} N(P_i) + \sum_{i<j} N(P_i P_j) - \sum_{i<j<k} N(P_i P_j P_k) + \cdots + (-1)^n N(P_1 P_2 \ldots P_n)$$

تعداد پریش‌ها

$$N(P_i) = (n-1)!$$

$$\sum_{1 \le i \le n} N(P_i) = C(n,1)(n-1)!$$

$$N(P_i P_j) = (n-2)!$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j) = C(n,2)(n-2)!$$

$$N(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_m}) = (n-m)!$$

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n} N(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_m}) = C(n,m)(n-m)!$$

تعداد پریش‌ها

$$D_n = n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \cdots + (-1)^n C(n,n)(n-n)!$$

$$= n! - \frac{n!}{1!\cancel{(n-1)!}}\cancel{(n-1)!} + \frac{n!}{2!\cancel{(n-2)!}}\cancel{(n-2)!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!\,0!}0!$$

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

مثال

- کارمند جدیدی در یک رستوران فراموش می کند تا شناسه مربوط به هر کلاه را در آن قرار دهد. در بازگشت مشتریان، به هر نفر یک کلاه به صورت تصادفی اختصاص می دهد. احتمال اینکه هیچ کس کلاه خودش را دریافت نکند چقدر است؟

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

TABLE 1 The Probability of a Derangement.

n	2	3	4	5	6	7
$D_n/n!$	0.50000	0.33333	0.37500	0.36667	0.36806	0.36786

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots \approx 0.368$$

افراز یک مجموعه

- گوئیم مجموعه A به مجموعه‌های A_1، A_2، ...، A_n افراز شده است، هرگاه

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A \ , \qquad \forall\, i \neq j\ A_i \cap A_j = \emptyset$$

- دو افراز $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ را متفاوت گوئیم هرگاه

$$\{A_1, \dots, A_n\} \neq \{B_1, \dots, B_n\}$$

افراز یک مجموعه

- چند افراز از مجموعه A={1,2,3}

$$A = \{1,2,3\} = \{1\} \cup \{2,3\} = \{2\} \cup \{1,3\} = \{2,3\} \cup \{1\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$$

تعداد افرازهای یک مجموعه

- تعداد افرازهای یک مجموعه n+1 عضوی (عدد بل)

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

- اثبات
  - اگر x_{n+1} عنصر n+1ام در مجموعه n+1 عضوی (X_{n+1}) ما باشد
  - x_{n+1}باید در یک بلاک ظاهر شود، این بلاک به جزء x_{n+1} دارای k عضو دیگر است. بنابراین تعداد کل این بلاک ها $\binom{n}{k}$
  - به این ترتیب n+1-(k+1)عضو باقی خواهد ماند و به ازاء هر چنین بلاکی به تعداد B_{n-k} پارتیشن خواهیم داشت. بنابراین داریم:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

تعداد افرازهای یک مجموعه

- تعداد افرازهای یک مجموعه n+1 عضوی

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_{n-k} = \sum_{k=n}^{0} \binom{n}{n-k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{k}$$

تعداد افرازهای یک مجموعه

- تعداد افرازهای یک مجموعه 4 عضوی

$$B_1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} B_0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$B_2 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} B_k = \binom{1}{0} B_0 + \binom{1}{1} B_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 = 2$$

$$B_3 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} B_k = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$$

$$B_4 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} B_k = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 15$$

مثال

- 52 کارت داریم که باید بین چهار نفر تقسیم شوند به نحوی که به هر نفر 13 کارت برسد. به چند طریق می توانیم این 52 کارت را به چهار دسته 13تایی تقسیم کنیم.

دسته اول　　　دسته سوم

$$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}=\frac{52!}{13!\,39!}\,\frac{39!}{13!\,26!}\,\frac{26!}{13!\,13!}=\frac{52!}{(13!)^4}$$

دسته دوم

حذف حالات تکراری ناشی از جابجایی دسته ها　　$4!$

$$\frac{52!}{(13!)^4 4!}$$

مثال

- 52 کارت داریم که باید بین چهار نفر تقسیم شوند به نحوی که به هر نفر 13 کارت برسد. به چند طریق می توانیم این 13 کارت را به چهار دسته 13تایی تقسیم کنیم.

$$\mathbf{52!} \quad \overset{\mathbf{13!}}{(\ldots\ldots)} \overset{\mathbf{13!}}{(\ldots\ldots)} \overset{\mathbf{13!}}{(\ldots\ldots)} \overset{\mathbf{13!}}{(\ldots\ldots)}$$

حذف حالات تکراری ناشی از جابجایی دسته ها $\mathbf{4!}$

$$\frac{\mathbf{52!}}{(\mathbf{13!})^{\mathbf{4}}\mathbf{4!}}$$

تعداد افرازها با تعداد مشخص

- به صورت کلی
  - تعداد افرازهای یک مجموعه mn عضوی به m مجموعه n عضوی برابر است با:

$$\frac{(mn)!}{(n!)^m m!}$$

  - نکته
    - تعداد افرازهای یک مجموعه 2m عضوی به m زوج

$$\frac{(2m)!}{2^m m!}$$

مثال

- به چند طریق می توان در یک جام مسابقات فوتبال 16 تیم را روبروی هم قرار داد (به دسته‌های دوتایی تقسیم کرد)؟

$$\frac{\mathbf{16}!}{\mathbf{2^8 8}!} = 2027025$$

مثال

- به چند طریق می توان یک کلاس 25 نفری را به چهار گروه سه تایی، دو گروه چهارتایی و یک گروه پنج تایی تقسیم کرد.

$$\overset{3!}{(-\,-\,-)}\ \overset{3!}{(-\,-\,-)}\ \overset{3!}{(-\,-\,-)}\ \overset{3!}{(-\,-\,-)}\ \overset{4!}{(-\,-\,-\,-)}\ \overset{4!}{(-\,-\,-\,-)}\ \overset{5!}{(-\,-\,-\,-\,-)}\quad 25!$$

حذف حالات تکراری ناشی از جابجایی دسته ها

$2!$ دسته‌های 4تایی

$4!$ دسته‌های 3تایی

$$\frac{25!}{(3!)^4(4!)^2\,5!\,4!\,2!}$$

تعداد افرازها با تعداد مشخص

- تعریف
  - افراز یک مجموعه n عضوی به مجموعه‌هایی که شامل α_i زیر مجموعه با اندازه i، $1 \le i \le n$ به نحوی که $\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = n$ به صورت یک افراز از نوع $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n}$ شناخته می شود.

- به صورت کلی
  - تعداد افرازهای نوع $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n}$ یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} (i!)^{\alpha_i} \alpha_i!}$$

مثال

- به چند طریق می توان 10 نفر را در دو گروه با اندازه 3 و یک گروه با اندازه 4دسته بندی کرد (افراز نوع $3^2 4^1$ یک مجموعه 10 عضوی)؟

$$\frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{(3!)^2 2!\, 4!}}$$

تعداد افرازها با تعداد مشخص

- تعریف
  - اگر S(n,k) تعداد راه‌های افراز یک مجموعه n عضوی به دقیقا k بلاک را نمایش دهد، S(n,k) عدد استرلینگ نوع دوم گفته می‌شود.(Stirling number of second kind)
  - بنابراین
    - برای n≥1 داریم:

$$S(n,1) = S(n,n) = 1$$

مثال

- می خواهیم نشان دهیم $S(4,2)=7$.
- مجموعه چهار عضوی $\{1,2,3,4\}$ را در نظر بگیرید. تعداد افرازهایی شامل 2 بلاک از این مجموعه به صورت زیر است:

$\{1\}\cup\{2,3,4\}$

$\{2\}\cup\{1,3,4\}$

$\{3\}\cup\{1,2,4\}$

$\{4\}\cup\{1,2,3\}$

$\{1,3\}\cup\{2,4\}$

$\{1,4\}\cup\{2,3\}$

$\{1,2\}\cup\{3,4\}$

محاسبه عدد استرلینگ

- رابطه بازگشتی در رابطه با S(n,k) (عدد استرلینگ نوع دوم)

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k)$$

$$1 < k < n$$

- مثال

$$\begin{aligned} S(4,2) &= S(3,1) + 2\,S(3,2) \\ &= 1 + 2\,(S(2,1) + 2\,S(2,2)) \\ &= 1 + 2(1+2) = 7. \end{aligned}$$

محاسبه عدد استرلینگ

- نکته
  - برای $n \geq 2$ داریم:

$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1$$

- نکته
  - تعداد کل افرازهای یک مجموعه n عضوی براساس عدد استرلینگ

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

جدول اعداد استرلینگ

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	$B(n)$
1	1								1
2	1	1							2
3	1	3	1						5
4	1	7	6	1					15
5	1	15	25	10	1				52
6	1	31	90	65	15	1			203
7	1	63	301	350	140	21	1		877
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	4140

پایان

موفق و پیروز باشید