HW7

Subject:
Year : Month : Day : ( ) page : ( )

حوری دهش ۹۸۲۱۴۱۳

۱- $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 20000\pi$ $T_s = 10^{-4}$

الف) $X(\omega) = 0$ for $|\omega| > 5000\pi$

طبق قضیه نمونه برداری داریم ← $\omega_s > 2\omega_M$

$20000\pi > 2 \times 5000\pi \rightarrow$ سیگنال قابل بازیابی است

ب) $X(\omega) = 0$ for $|\omega| > 15000\pi$

شرط بازیابی $\rightarrow \omega_s > 2\omega_M \rightarrow 20000\pi \not> 2 \times 15000\pi$

← تضمینی برای قابل بازیابی نیست

ج) $Re\{X(\omega)\} = 0$ for $|\omega| > 5000\pi$

چون $Im\{X(\omega)\}$ محدود نشده است ← چون از شرط های بازیابی داشتن باند محدود است

← تضمینی برای قابل بازیابی نیست

د) $x(t)$ حقیقی , $X(\omega) = 0$ for $\omega > 5000\pi$

چون $x(t)$ حقیقی است و $20000\pi > 2\times 5000\pi$ است ← شرط برقرار است ←

$x(t)$ قابل بازیابی است

و) $x(t)$ حقیقی , $X(\omega) = 0$ for $\omega < -15000\pi$

← چون ω باند بالا ندارد و از سمت مثبت ها محدود شده است پس تضمینی به قابل بازیابی بودن $x(t)$ نیست ← $2\times 15000\pi \not< 20000\pi$

ه) $X(\omega) * X(\omega) = 0$ for $|\omega| > 15000\pi$

چون $X(\omega)$ با خودش کانوالو شده است اگر $X(\omega)$ مقدارش بین $|\omega|<\omega_1$ باشد ← با کانوالوشن با خودش ← محدود به صورت $|\omega|<2\omega_1$ می شود ← پس برای $X(\omega)$ داریم ← $|\omega| < 7500\pi$ ← شرط برقرار است

$20000\pi > 2\times 7500\pi \Rightarrow$ قابل بازیابی است

ی) $|X(\omega)| = 0$ for $\omega > 5000\pi$

← در این بخش فقط محدودهٔ مثبت شرط دارد و مقادیر $\omega < -5000\pi$ گفته نشده که برابر صفر است پس تابع از ۲ سمت دارای باند محدود نیست ← شرط برقرار نیست ← قابل بازیابی نیست

س۲ ←

۱) $x^2(t)$ ← اگر نرخ نایکوییست سیگنال $x(t)$ برابر با ω_s باشد ← تبدیل فوریه $X(j\omega)$ برای $|\omega| > \frac{\omega_s}{2}$ برابر صفر خواهد بود ←

$$y(t) = x^2(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) \cdot X(j\omega)]$$

← $Y(j\omega)$ برای $|\omega| > \omega_s$ برابر صفر است پس نرخ نایکوییست برای $y(t)$ برابر با $2\omega_s$ است

۲ ← $\frac{dx(t)}{dt}$ ←

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$$

← $Y(j\omega)$ برای $|\omega| > \frac{\omega_s}{2}$ برابر صفر است پس نرخ نایکوییست برای $y(t)$ برابر ω_s می باشد

۳ ← $x(t) * x(t)$ ←

$$y(t) = x(t) * x(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega)X(j\omega)$$

← $Y(j\omega)$ برای $|\omega| > \frac{\omega_s}{2}$ برابر صفر است پس نرخ نایکوییست برای $y(t)$ برابر ω_s می باشد

۴ ← $x(t)\cos(\omega_s t)$ ←

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_s t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2} X(j(\omega-\omega_s)) + \frac{1}{2} X(j(\omega+\omega_s))$$

← $Y(j\omega)$ برای $|\omega| > \omega_s + \frac{\omega_s}{2}$ برابر صفر است پس نرخ نایکوییست برای $y(t)$ برابر $3\omega_s$ است

۵ ← $x(t) + x(t-1)$ ←

$$y(t) = x(t) + x(t-1) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega) + e^{-j\omega t} X(j\omega)$$

← $Y(j\omega)$ برای $|\omega| > \frac{\omega_s}{2}$ برابر صفر است پس نرخ نایکوییست برای $y(t)$ برابر با ω_s است

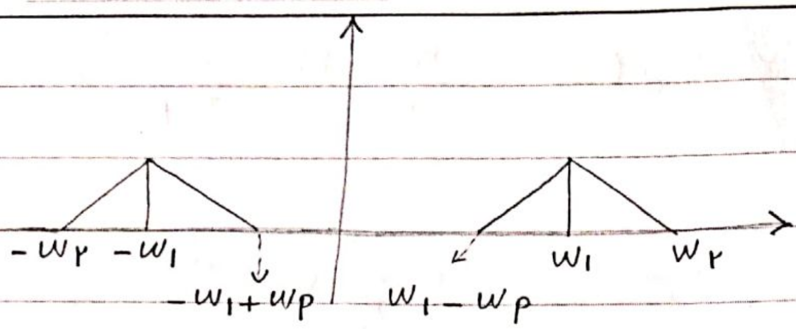
س ۳ ← مقادیر T و $\omega_c = ?$ ←

$\omega_p = \omega_2 - \omega_1$

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

طبق قضیه نایکوییست اگر بخواهیم پس از نمونه برداری از $y(t)$، بتوانیم دوباره به همان $y(t)$ برگردیم ← در اسپکتروم کافی است که قضیه نایکوییست را برای $y(t)$ رعایت کنیم ← یعنی $\frac{2\pi}{T} > 2\omega_2$ باشد

اما اگر بخواهیم مستقیم به $x(t)$ برگردیم، می توانیم $\omega_s = \omega_1$ قرار دهیم که در اسپکتروم شکلی مانند زیر خواهیم داشت ←



شرط ۱ → $\omega_1-\omega_p > -\omega_1+\omega_p \Rightarrow \omega_1-\omega_p>0$

در اینصورت ← $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_1}$

بایستی شیفت و LPF با $\omega_c = \omega_2-\omega_1=\omega_p$ می توانیم به $x(t)$ برسیم

س ۴ ←

الف) حقیقی است ب) ماکزیمم $X_d(e^{j\Omega})$ برابر با یک است

ج) $\frac{3\pi}{4} \le |\Omega| \le \pi$, $X_d(e^{j\Omega})=0$ د) $X_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j(\Omega-\pi)})$

از سؤال می دانیم ←

$x_c(t) \xleftrightarrow{F} X_c(\omega)=0$ For $|\omega|\ge 2000\pi$

نرخ نایکوییست ← $\omega_s = 2\omega_M = 2\times 2000\pi = 4000\pi$

$x_d[n] = x_c(nT) = x_c(0.5\times10^{-3}\, n)$

$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)$, $\omega = \frac{\Omega}{T} = 2000\,\Omega$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - \frac{2k\pi}{T}\right)\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$$

* ←

الف) ← طبق رابطه * $X_d(e^{j\Omega})$ عبارت $X_d(e^{j\Omega})$ حاصل جمع نسخه‌های شیفت داده شده $X_c(\omega)$ است پس سیگنال $X_c(\omega)$ نیز یک سیگنال حقیقی است

ب) ← طبق رابطه * ماکزیمم مقدار $X_d(e^{j\Omega})$ با $\frac{1}{T}\max(X_c(\omega))$ برابر است

$$1 = \frac{1}{T}\max(X_c(\omega)) \longrightarrow \max(X_c(\omega)) = T = 0.5\times 10^{-3}$$

ج) ← طبق رابطه * داریم ←

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = 0 \quad \text{for} \quad \frac{2\pi}{4T} \le |\omega| \le \frac{\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_c(\omega) = 0 & \text{for } |\omega| \ge 2000\pi \\ X_c(\omega) = 0 & \text{for } 1500\pi \le |\omega| \le 2000\pi \end{cases} \Rightarrow X_c(\omega) = 0 \ \text{for } |\omega| \ge 1500\pi$$

د) ←

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_d(e^{j(\Omega-\pi)}) \rightarrow$$

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\omega - \frac{\pi}{T} - \frac{2k\pi}{T}\right)$$

$$X_c(\omega - 4000k\pi) = X_c(\omega - 4000k\pi - 2000\pi) \longrightarrow X_c(\omega) = X_c(\omega - 2000\pi)$$

for $0 \le \omega \le 2000\pi$

س ۵ ←

$$w(t) = x_1(t)\,x_2(t) \xleftrightarrow{FT} W(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X_1(j\omega) * X_2(j\omega)\right]$$

$X_1(j\omega)$ برای $|\omega| > \omega_1$ برابر با صفر است و $X_2(j\omega)$ برای $|\omega| > \omega_2$ برابر صفر است

پس داریم ← $W(j\omega) = 0$, $|\omega| > \omega_1 + \omega_2$

پس نرخ نایکوییست برای $w(t)$ برابر با $\omega_s = 2(\omega_1 + \omega_2)$ است

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{2(\omega_1+\omega_2)} = \frac{\pi}{\omega_1+\omega_2}$$

س ۶ ←

الف) از ۲ طرف معادله تبدیل z می گیریم ←

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

قطب های $H(z)$ در $\frac{1}{4} \pm j\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ قرار دارند چون $h[n]$ علی است ROC عبارت

است از $|z| > \frac{1}{4} + j\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \frac{1}{2}$

ب)
$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$y(z) = X(z)\,H(z) \longrightarrow y(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2})}$$

ROC برای y ← اشتراک ROC های $X(z)$ و $H(z)$ می شود ←

$$\text{ROC} : y(z) \xrightarrow[\text{(میشه)}]{} |z| > \frac{1}{2}$$

$$y(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2})} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}} \Longrightarrow A = 1 \;,\; B = z^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) u[n]$$

س ۷ ←

از قسمت ۱ داریم ← چون $x[n]$ حقیقی است پس قطب ها و صفرهای $X(z)$ باید در جفت های مزدوج اتفاق بیفتد

از قسمت ۴ داریم ← $X(z)$ قطبی در $z = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$ دارد پس اگر $X(z)$ قطب های بیشتری نداشته باشد باید فرض کنیم که $X(z)$ به تعداد ۲ تا یا کمتر باید صفر داشته باشد و اگر

X(z) بیشتر از ۲ تا صفر داشته باشد باید قطب هایی در بی نهایت داشته باشد

از قسمت ۳ داریم ← X(z) در اصل ۲ تا صفر دارد پس ←

$$X(z) = \frac{Az^2}{(z - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(z - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})}$$

از قسمت ۵ داریم ← $X(1) = \frac{8}{3}$ ← $A = 2$ می شود

$$X(1) = \frac{A}{(1 - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})} = \frac{8}{3} \longrightarrow$$

$$\frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{4}} = \frac{8}{3} \rightarrow \cdots\cdots \longrightarrow A = 2$$

بخاطر اینکه x[n] ← right side است پس ←

$$X(z) = \frac{2z^2}{(z - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(z - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})} \qquad ROC: |z| > \frac{1}{3}$$