به نام خدا

ساختمان‌های گسسته

ادامه شمارش

Dr. Aref Karimiafshar
A.karimiafshar@ec.iut.ac.ir

مثال

- در مطالعات مربوط به نظریه کدگذاری جبری
  - رشته‌های روی یک الفبای معین، مثلا الفبای 0، 1 و2
    - نمونه یک رشته: 112، 0102
- اگر n عدد صحیح دلخواهی باشد، تعداد رشته‌هایی به طول n بر روی الفبای 0، 1 و 2

تعداد کل رشته‌ها به طول n $\qquad$ 3^n

- وزن یک رشته
  - وزن رشته x ← WT(x)

$$x = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$$

$$WT(x) = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

مثال (ادامه)

- در مطالعات مربوط به کدگذاری جبری
  - رشته‌های روی یک الفبای معین، مثلا الفبای 0، 1 و2
    - نمونه یک رشته: 112، 0102

- اگر n=2

$$\boldsymbol{WT(12) = 3}$$
$$\boldsymbol{WT(22) = 4}$$

- اگر n=3

$$\boldsymbol{WT(101) = 2}$$
$$\boldsymbol{WT(222) = 6}$$

مثال (ادامه)

...

- از بین رشته‌هایی به طول 10، تعداد رشته‌هایی که وزنشان زوج است تعیین کنید.(چنین رشته‌ای وقتی که تعداد یک‌های موجود در آن زوج است، وزنی زوج دارد.)

تعداد یک‌ها	تعداد رشته‌ها
0	2^{10}
2	$2^8\binom{10}{2}$
4	$2^6\binom{10}{4}$
6	$2^4\binom{10}{6}$
8	$2^2\binom{10}{8}$
10	$\binom{10}{10}$

$$x = x_0 + x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10}$$

$$2^{10} + 2^8\binom{10}{2} + 2^6\binom{10}{4} + 2^4\binom{10}{6} + 2^2\binom{10}{8} + \binom{10}{10} =$$

$$\sum_{n=0}^{5}\binom{10}{2n}2^{10-2n}$$

مثال

- فرض کنید از یک کیسه محتوی 52 مهره از چهار رنگ سبز، زرد، قرمز و آبی با شماره‌های 1تا 13 پنج مهره بیرون می‌آوریم. به چند طریق ممکن است این انتخاب فاقد مهره سبز باشد؟

ما دنبال انتخاب‌هایی مثل:

R1 B3 B4 Y6 Y11

B5 B7 B13 Y7 Y13

چون دوست نداریم مهره سبز در انتخاب‌های ما باشد، بنابراین 13 مهره سبز را ابتدا کنار می‌گذاریم و پنج مهره را از بین 39 مهره رنگ‌های دیگر انتخاب می کنیم!

$$\binom{39}{5} = 84$$

مثال (ادامه)

- فرض کنید از یک کیسه محتوی 52 مهره از چهار رنگ سبز، زرد، قرمز و آبی با شماره‌های 1تا 13 پنج مهره بیرون می‌آوریم. به چند طریق ممکن است این انتخاب شامل حداقل یک مهره سبز باشد؟

تعداد کل انتخاب‌ها را از تعداد حالت‌هایی که شامل هیچ مهره سبز نیست، کم می‌کنیم!

$$\binom{52}{5} - \binom{39}{5} = 2023203$$

مثال (ادامه)

- فرض کنید از یک کیسه محتوی 52 مهره از چهار رنگ سبز، زرد، قرمز و آبی با شماره‌های 1تا 13 پنج مهره بیرون می‌آوریم. به چند طریق ممکن است این انتخاب شامل حداقل یک مهره سبز باشد؟

راه حل دیگر!!

ابتدا؛ انتخاب یک مهره از 13 مهره سبز $\binom{13}{1}$

سپس؛ انتخاب 4 مهره از بقیه مهره‌ها $\binom{51}{4}$

$$\binom{13}{1}\binom{51}{4} = 3248700 > 2023203$$

G3 G5 G13 Y7 B11

G5 G3 G13 Y7 B11

مثال (ادامه)

- فرض کنید از یک کیسه محتوی 52 مهره از چهار رنگ سبز، زرد، قرمز و آبی با شماره‌های 1تا 13 پنج مهره بیرون می‌آوریم. به چند طریق ممکن است این انتخاب شامل حداقل یک مهره سبز باشد؟

تعداد مهره سبز	تعداد حالت‌ها	تعداد مهره غیر سبز	تعداد حالت‌ها	
1	$\binom{13}{1}$	4	$\binom{39}{4}$	$\binom{13}{1}\binom{39}{4}$
2	$\binom{13}{2}$	3	$\binom{39}{3}$	$\binom{13}{2}\binom{39}{3}$
3	$\binom{13}{3}$	2	$\binom{39}{2}$	$\binom{13}{3}\binom{39}{2}$
4	$\binom{13}{4}$	1	$\binom{39}{1}$	$\binom{13}{4}\binom{39}{1}$
5	$\binom{13}{5}$	0	$\binom{39}{0}$	$\binom{13}{5}\binom{39}{0}$

مثال (ادامه)

- فرض کنید از یک کیسه محتوی 52 مهره از چهار رنگ سبز، زرد، قرمز و آبی با شماره‌های 1تا 13 پنج مهره بیرون می‌آوریم. به چند طریق ممکن است این انتخاب شامل حداقل یک مهره سبز باشد؟

$$\binom{13}{1}\binom{39}{4}+\binom{13}{2}\binom{39}{3}+\binom{13}{3}\binom{39}{2}+\binom{13}{4}\binom{39}{1}+\binom{13}{5}\binom{39}{0}=$$

$$\sum_{n=1}^{5}\binom{13}{n}\binom{39}{5-n}=2023023$$

مثال

- با جابجا کردن حروف کلمه SUCCESS چند رشته متفاوت می‌توان ایجاد کرد؟

$$\boldsymbol{C}(7,3)\times\boldsymbol{C}(4,2)\times\boldsymbol{C}(2,1)\times\boldsymbol{C}(1,1)=$$

$$\frac{7!}{3!\,4!}\times\frac{4!}{2!\,2!}\times\frac{2!}{1!\,1!}\times\frac{1!}{1!\,0!}=$$

$$\frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!}$$

قاعده تقسیم

- فرض کنید یک مسئله‌ای n راه حل کلی دارد که برای هر راه حل w، dتای آنها یکسان‌اند. در نتیجه این مسئله از n/d راه، حل می‌شود.
  - تعداد کل حالات را می‌شماریم و بعد حالات نامطلوب (تکراری) را کم می‌کنیم.

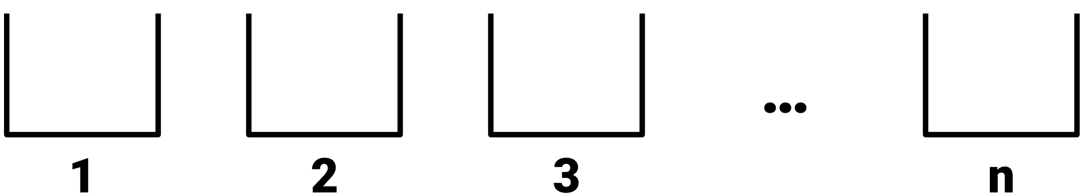
- مثال:
  - جایگشت دوری
    - چیدن n نفر دور یک میز

مثال (راه حل دیگر)

- تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی چندتاست؟

$\boldsymbol{C(n,r)}$

اگر عضوی در مجموعه r عضوی ظاهر شود T قرار می‌دهیم و در غیر این صورت F



T ← تا r

F ← تا n-r

$$\boldsymbol{P(n;r,n-r) = C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

یادآوری

- اگر n شئ حاوی n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم، ... و حاوی n_r تا از نوع rام وجود داشته باشد که در آن $n_1+n_2+...+n_r=n$، آنگاه $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$ جایگشت برای n شئ مفروض است.

$$\boldsymbol{P(n};n_1,n_2,\dots,n_r) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\dots n_r!}$$

بیان دیگر

- اگر n شئ حاوی n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم، ... و حاوی n_r تا از نوع rام وجود داشته باشد که در آن $n_1+n_2+\ldots+n_r=n$، آنگاه:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{n_1}\binom{\boldsymbol{n}-n_1}{n_2}\binom{\boldsymbol{n}-n_1-n_2}{n_3}\times \quad \cdots \quad \times\binom{\boldsymbol{n}-n_1-n_2\ldots-n_{r-1}}{n_r}=$$

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{n_1!\,\cancel{(\boldsymbol{n}-n_1)!}}\times\frac{\cancel{(\boldsymbol{n}-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(\boldsymbol{n}-n_1-n_2)!}}\times\frac{\cancel{(\boldsymbol{n}-n_1-n_2)!}}{n_3!\,(\boldsymbol{n}-n_1-n_2-n_3)!}\times\cdots\times$$

$$\frac{\cancel{(\boldsymbol{n}-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}}{n_r!\,\boldsymbol{0}!}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$$

نمادگذاری

- اگر $n_1+n_2+\dots+n_r=n$،

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_r) = C(n, n_1) \times C(n-n_1, n_2) \times \cdots \times C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}, n_r)$$

- این تعریف را برای حالتی که $n_1+n_2+\dots+n_r<n$، هم می‌توان تعمیم داد.

نمادگذاری (ادامه)

- اگر حالتی را در نظر بگیریم که $n_1+n_2+\ldots+n_r=n$، آخرین جمله برابر با یک خواهد شد! بنابراین:

$$C(\boldsymbol{n}; n_1, n_2, \ldots, n_r) = C(\boldsymbol{n}; n_1, n_2, \ldots, n_{r-1})$$

- به این ترتیب خواهیم داشت:

$$C(\boldsymbol{n}, r) = C(\boldsymbol{n}; r, n-r)$$

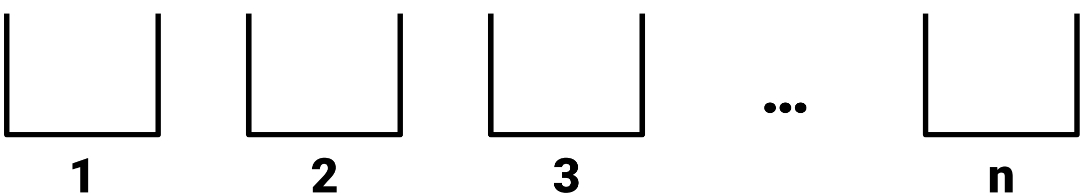
مثال

- به چند طریق می‌توان 10 سال اولی، 15 سال دومی و 25 سال سومی را در یک کلاس 60 نفره چید به نحوی که اگر در دو چیدمان جای سال اولی‌ها، سال دومی‌ها و سال سومی‌ها یکسان باشد، این دو چیدمان را یکسان در نظر می‌گیریم.

$$\boldsymbol{C}(\mathbf{60}; 10,15,25\ ) = \boldsymbol{C}(\mathbf{60}; 10,15,25,10)$$

ترکیب (بیان دیگر)

- می‌خواهیم r شئ یکسان را در n جعبه متمایز جای دهیم به طوری که در هیچ جعبه‌ای بیش از یک شئ نباشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

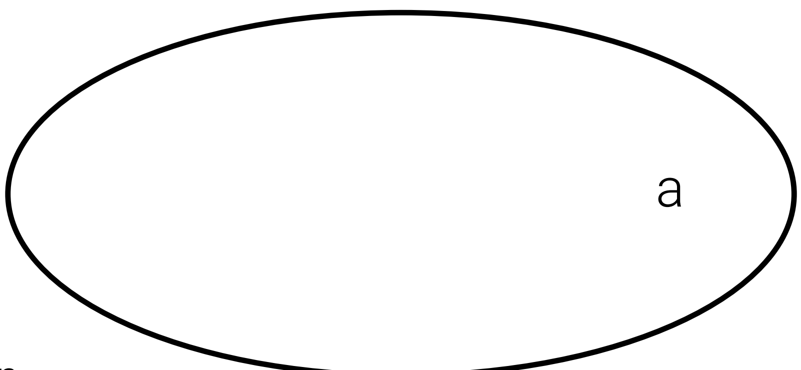


$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{n}, r)$$

رابطه پاسکال

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

اثبات:



مجموعه n عضوی

$$\binom{n-1}{r}$$

$$\binom{n-1}{r-1}$$

مثلث پاسکال

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$

$$\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}$$

$$\cdots$$

مثلث پاسکال

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

. . .

دو گونه شماری

- شمردن یک عدد به دو گونه متفاوت برای اثبات برابری آن دو صورت متفاوت.

مثال: اثبات رابطه پاسکال

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

مثال

- ثابت کنید:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

اثبات:

تعداد راه‌های انتخاب 2 از n زوج (2n) $\binom{2n}{2}$

2n نفر را به دو دسته تقسیم کنیم

هر دو نفر از دسته اول $\binom{n}{2}$

هر دو نفر از دسته دوم $\binom{n}{2}$

یک نفر از دسته اول و نفر دیگر از دسته دوم n^2

پایان

موفق و پیروز باشید