دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تکلیف ماشین های تورینگ و محاسبه پذیری

۱

۱.۱

$L_1 = \{ww : w \in \{a,b\}^+\}$

یک ماشین تورینگ با دو شیار که ورودی روی شیار اول نوشته شده است در نظر می‌گیریم. باید رشته ورودی را به دو قسمت مساوی تبدیل کنیم و سپس دو به دو حروف را مقایسه کنیم. برای این کار از سمت چپ رشته ورودی در نوار اول شروع کرده و هر حرف را با یک نماد جایگزین می‌کنیم و متناظر با آن حرف آخر رشته ورودی را از شیار اول پاک می‌کنیم و به شیار دوم اضافه می‌کنیم و نشانگر آن را به سمت چپ می‌بریم. با ادامه این روند نیمی از رشته در شیار اول و نیمی از رشته در شیار دوم قرار می‌گیرد. سپس نمادهای جایگزین شده رشته شیار اول را به حروف آن تبدیل کرده و همزمان روی دو شیار حرکت کرده و هر جفت حرف آنها را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم و به جلو حرکت می‌کنیم. اگر این رشته در زبان نباشد، در یک حالت غیر پایانی متوقف خواهد شد.

۲.۱

$L_2 = \{a^n :$ عدد اول است $n\}$

ایده کار ماشین بدین صورت است که باقی مانده طول رشته بر تمامی اعداد کوچکتر از آن بررسی می‌شود. یک ماشین که از دو شیار تشکیل شده و رشته ورودی روی شیار اول است در نظر می‌گیریم. ابتدا بررسی می‌شود که اگر طول رشته صفر یا یک بود، پذیرفته نشود و اگر دو بود، پذیرفته شود. در غیر این صورت روی شیار دوم رشته aa را می‌نویسیم. روند باقی مانده گیری را به صورت زیر انجام می‌دهیم: از ابتدای هر دو نوار حرکت می‌کنیم و اگر به پایان نوار دوم رسیدیم، نشانگر را به ابتدای آن می‌بریم. اگر همزمان نشانگر شیار اول و شیار دوم به پایان برسد این رشته پذیرفته نمی‌شود زیرا باقی مانده طول آن بر یک عدد کوچکتر از خود ناصفر است و اول نیست. در نهایت یک حرف به رشته شیار دوم اضافه می‌کنیم و روند باقی مانده گیری را اجرا کرده و تا جایی ادامه می‌دهیم که طول رشته شیار دوم به اندازه طول رشته شیار اول شود. اگر این رشته در زبان نباشد، در یک حالت غیر پایانی متوقف خواهد شد.

۳.۱

$L_3 = \{a^p b^q c^r : p \bmod q = r\}$

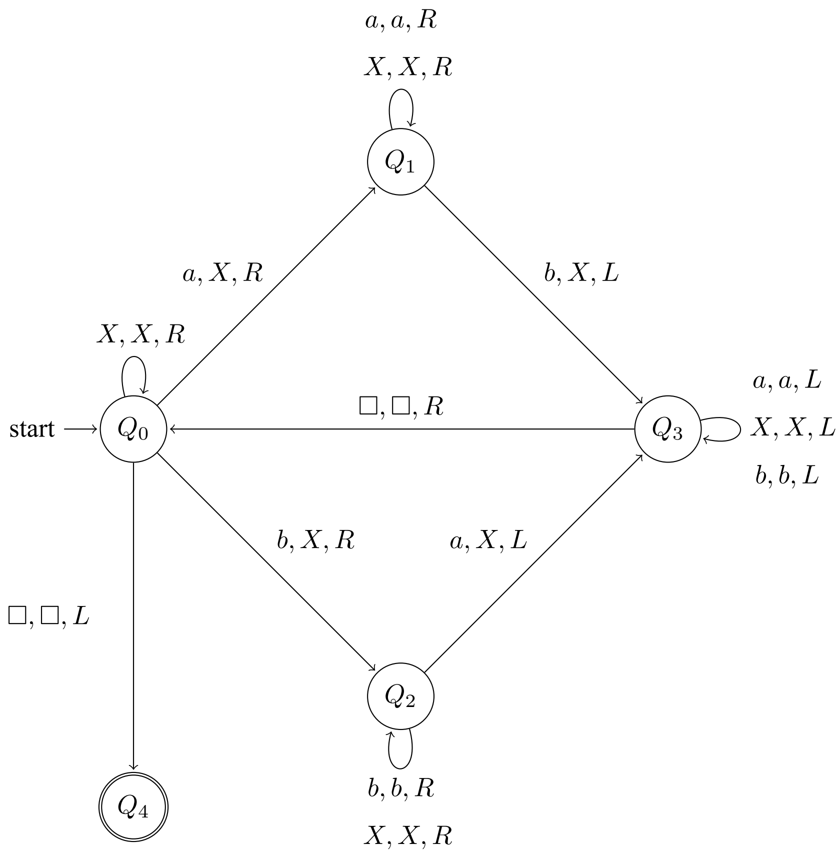
یک ماشین تورینگ با سه شیار در نظر می‌گیریم که رشته ورودی روی شیار اول قرار دارد. ابتدا بررسی می‌کنیم که رشته به صورت $a^*b^*c^*$ باشد و سپس رشته c^r را به شیار سوم و رشته b^q را به شیار دوم منتقل می‌کنیم و شیار اول محتوی رشته a^p خواهد بود. همچنین اگر $q \geq r$ باشد، طول رشته شیار سوم را با استفاده از روند باقی مانده گیری تا جایی کاهش می‌دهیم که این شرط برقرار نباشد. سپس سه نشانگر شیارها را همزمان با یکدیگر حرکت می‌دهیم تا نشانگر شیار اول به پایان رشته a^p برسد. اگر نشانگر شیار اول و سوم همزمان به پایان رشته برسد، رشته پذیرفته خواهد شد. اگر نشانگر شیار سوم به پایان برسد، این نشانگر متوقف خواهد شد تا نشانگر شیار دوم نیز به پایان برسد. در این حالت اگر نشانگر شیار اول به پایان رشته برسد، رشته پذیرفته نخواهد شد. پس از اینکه نشانگر شیار دوم به پایان رشته رسید، نشانگر شیار دوم و سوم به ابتدای رشته خواهند رفت و این روند ادامه پیدا می‌کند. اگر این رشته در زبان نباشد، در یک حالت غیر پایانی متوقف خواهد شد.

۴.۱

$L_4 = \{a^n b^{2n} : n \geq 1\}$

از ابتدای رشته شروع می‌کنیم و هر حرف a را با نماد A جایگزین کرده و سپس حرکت می‌کنیم تا به دو حرف b متوالی برسیم و آنها را با BB جایگزین می‌کنیم. سپس به عقب باز می‌گردیم تا به اولین a بعد از A برسیم و این روند را تا زمانی که a یا b باقی نماند انجام می‌دهیم و سپس تمامی حروف A و B را حذف می‌کنیم تا چیزی جز نماد نانوشته در نوار باقی نماند. اگر این رشته در زبان نباشد، در یک حالت غیر پایانی متوقف خواهد شد.

۵.۱



۲

قدرت این ماشین به اندازه ماشین تورینگ است. شبیه سازی به صورت زیر است:
پشته اول را به عنوان محتویات نوار در سمت چپ موقعیت فعلی و پشته دوم را به عنوان محتویات نوار در سمت راست در نظر می‌گیریم. ابتدا نماد شروع پشته (z) را در داخل دو پشته push می‌کنیم. سپس ورودی را خوانده و داخل پشته چپ push می‌کنیم. در نهایت محتوای پشته چپ را pop می‌کنیم و در پشته راست push می‌کنیم. در این صورت مقدار بالای پشته راست اولین نماد ورودی است. حال با pop عمل خواندن و با push عمل نوشتن را شبیه سازی می‌کنیم. در واقع با pop کردن از پشته راست و push کردن به پشت چپ، حرکت به سمت راست نشانگر نوار ماشین تورینگ را شبیه سازی می‌کنیم. برعکس این عملیات برای حرکت به سمت چپ نشانگر انجام می‌شود.

۳

$$S \to [\,]CD \mid [\,]C \mid [\,]D \qquad C \to cMC|cM \qquad D \to dND|dN$$
$$dN \to Nd \qquad cM \to Mc \qquad cN \to Nc$$
$$]M \to X] \qquad]N \to Y] \qquad XY \to YX \qquad YX \to XY$$
$$Y] \to]Y \qquad X] \to]X \qquad [\,] \to \lambda \qquad X \to a \qquad Y \to b$$

۴

۱.۴

$$L_1 = \{a^n b^n c^{2n} : n \geq 1\}$$

$S \to abcc|aAbcc \qquad Ab \to bA \qquad Ac \to Bbccc \qquad bB \to Bb \qquad aB \to aa|aaA$

۲.۴

$$L_2 = \{a^n b^m c^n d^m : n, m \geq 1\}$$

$S \to PQ \qquad P \to aPC|aC \qquad Q \to bQd|bd$

$Cb \to bC \qquad Cd \to cd \qquad Cc \to cc$

۳.۴

$L_3 = \{ww : w \in \{a,b\}^+\}$

$S \to T\alpha | T'\beta$

$T \to aTA | bTB | \alpha \qquad T' \to aT'A | bT'B | \beta$

$A\alpha \to L_a\alpha \qquad A\beta \to L_a\beta \qquad B\alpha \to L_b\alpha \qquad B\beta \to L_b\beta$

$AL_a \to L_aA \qquad AL_b \to L_bA \qquad BL_a \to L_aB \qquad BL_b \to L_bB$

$\alpha L_a \to a\alpha \qquad \alpha L_b \to a\beta \qquad \beta L_a \to b\alpha \qquad \beta L_b \to b\beta$

$\alpha\alpha \to aa \qquad \alpha\beta \to ab \qquad \beta\alpha \to ba \qquad \beta\beta \to bb$

۵

۱.۵

$L_1 = \{\langle N, w\rangle :$ یک ماشین متناهی غیرقطعی است و رشته w را می‌پذیرد $N\}$

این زبان تصمیم پذیر است. زیرا الگوریتمی وجود دارد که به ازای ماشین N و رشته w تعیین کند رشته توسط ماشین پذیرفته می‌شود یا خیر. این الگوریتم می‌تواند توسط ماشین تورینگ اجرا شود. به عبارت دیگر ماشین تورینگ M وجود دارد که اجرای رشته w روی ماشین N را شبیه سازی کند. می‌توان ماشین متناهی قطعی هم ارز N را پیدا کرد و آن را D می‌نامیم. اگر رشته w توسط ماشین D پذیرفته شود، ماشین M در یک حالت پایانی متوقف می‌شود و در غیر اینصورت ماشین M در یک حالت غیر پایانی متوقف می‌شود. پس ماشین M که برای زبان L_1 طراحی شده است، به ازای هر ورودی $\langle N, w\rangle$ متوقف می‌شود و بنابراین زبان L_1 تصمیم پذیر است.

۲.۵

$L_2 = \{\langle M_1, M_2\rangle : L(M_1) \subseteq L(M_2)$ و M_2 دو ماشین تورینگ هستند و $M_1\}$

فرض می‌کنیم ماشین تورینگ R زبان L_2 را تصمیم می‌گیرد. با استفاده از ماشین R ماشین S را می‌سازیم که زبان EQ_{TM} را تصمیم می‌گیرد. در نتیجه به تناقض می‌رسیم. به ازای ورودی $\langle M_1, M_2\rangle$ در ماشین S چنین تصمیم می‌گیریم: یک بار ورودی $\langle M_1, M_2\rangle$ را به R می‌دهیم و خروجی را r_1 می‌نامیم و یک بار ورودی $\langle M_2, M_1\rangle$ را به R می‌دهیم و خروجی را r_2 می‌نامیم. اگر r_1 و r_2 هر دو مثبت بودند، به این معنا که هر دو زیر مجموعه یکدیگر هستند، خروجی S مثبت و در غیر اینصورت منفی است. از آنجایی که قبلا ثابت کردیم هیچ تصمیم گیرنده‌ای برای EQ_{TM} وجود ندارد، پس به تناقض می‌رسیم و بنابراین فرض اولیه مبنی بر تصمیم پذیر بودن L_2 نادرست بوده است و این زبان تصمیم ناپذیر است.