HW2

Subject: .... Data: .... Page: ....

حوری دهش ۹۸۲۱۴۱۳

سؤال ۱ ←

الف) $w(t) = x(t) * h_1(t)$

$$w(t) = x(t) * \delta(t) - e^{-2t}u(t) = \underbrace{x(t)*\delta(t)}_{x(t)} - \underbrace{x(t)*e^{-2t}u(t)}_{I}$$

$$I = e^{-t}u(t) * e^{-2t}u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha}\underbrace{u(\alpha)}_{\alpha\geq 0}\, e^{-2(t-\alpha)}\underbrace{u(t-\alpha)}_{t-\alpha\geq 0 \to t\geq\alpha}\, d\alpha$$

پس t مثبت است

$$I \text{ ادامه} \rightarrow \int_0^t e^{-\alpha} e^{-2t+2\alpha}\, d\alpha = e^{-2t}\int_0^t e^{\alpha}\, d\alpha = (e^{t}-1)\, e^{-2t}u(t)$$

$$w(t) = \cancel{e^{-t}u(t)} - \cancel{e^{-t}}u(t) + e^{-2t}u(t) = \begin{cases} e^{-2t}u(t) & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

ب) $z(t) = x(t) * h_2(t) = x(t) * \delta(t) - e^{t}u(-t) =$

$$\underbrace{x(t) * \delta(t)}_{x(t)} - \underbrace{x(t) * e^{t}u(-t)}_{I}$$

$$I = e^{-t}u(t) * e^{t}u(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha}u(-\alpha)\, e^{-(t-\alpha)}u(t-\alpha)\, d\alpha$$

$$t\geq 0 \rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha} e^{-t+\alpha}\, d\alpha = e^{-t}\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha}\, d\alpha = e^{-t}\left(\frac{e^{2\alpha}}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{e^{-t}}{2}$$

$$t<0 \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha}\, e^{-t+\alpha}\, d\alpha = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{2\alpha}\, d\alpha = e^{-t}\left(\frac{e^{2\alpha}}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{t} =$$

$$\frac{e^{t}}{2}$$

$$I \Longrightarrow \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^{t} u(-t)$$

$$z(t) = e^{-t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-t} u(t) - \frac{1}{2} e^{t} u(-t) =$$

$$\frac{1}{2} e^{-t} u(t) - \frac{1}{2} e^{t} u(-t)$$

ج) $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$

$$h(t) = \left(\delta(t) - e^{-2t} u(t)\right) * \left(\delta(t) - e^{t} u(-t)\right) =$$

$$\delta(t) - e^{t} u(-t) - e^{-2t} u(t) + \underbrace{e^{-2t} u(t) * e^{t} u(-t)}_{I}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha}\, \underbrace{u(-\alpha)}_{-\alpha \geq 0 \,\rightarrow\, \alpha \leq 0}\, e^{-2(t-\alpha)}\, \underbrace{u(t-\alpha)}_{t-\alpha \geq 0 \,\rightarrow\, t \geq \alpha}\, d\alpha =$$

$$t \geq 0 \longrightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha}\, e^{-2t+2\alpha}\, d\alpha = e^{-2t}\int_{-\infty}^{0} e^{3\alpha}\, d\alpha = e^{-2t}\left(\frac{e^{3\alpha}}{3}\right)\Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$\frac{1}{3} e^{-2t}$$

$$t<0 \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha}\, e^{-2t+2\alpha}\, d\alpha = e^{-2t}\left(\frac{e^{3\alpha}}{3}\right)\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{1}{3} e^{t}$$

$$I \Rightarrow \frac{1}{3} e^{-2t} u(t) + \frac{1}{3} e^{t} u(-t)$$

$$h(t) = \delta(t) - \frac{2}{3} e^{-2t} u(t) - \frac{2}{3} e^{t} u(-t)$$

د) $y_1(t) = w(t) * h_2(t)$

$$y_1(t) = e^{-2t} u(t) * \left(\delta(t) - e^{t} u(-t)\right) = e^{-2t} u(t) - \underbrace{e^{-2t} u(t) * e^{t} u(-t)}_{I}$$

$I =$ طبق بخش ج می شود $\Rightarrow \frac{1}{3} e^{-2t} u(t) + \frac{1}{3} e^{t} u(-t)$

$$y_1(t) = \frac{2}{3} e^{-2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{t} u(-t)$$

هـ) $y_2(t) = z(t) * h_1(t)$

$$y_2(t) = \left(\frac{1}{2} e^{-t} u(t) - \frac{1}{2} e^{t} u(-t)\right) * \left(\delta(t) - e^{-2t} u(t)\right)$$

$$\frac{1}{2} e^{-t} u(t) - \frac{1}{2} e^{t} u(-t) - \underbrace{\left(\frac{1}{2} e^{-t} u(t) * e^{-2t} u(t)\right)}_{A}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2} e^{t} u(-t) * e^{-2t} u(t)\right)}_{B}$$

$A =$ طبق بخش الف $\longrightarrow \frac{1}{2} \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) u(t)$

$B =$ طبق بخش ج $\longrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} e^{-2t} u(t) + \frac{1}{3} e^{t} u(-t)\right)$

$$y_2(t) = \cancel{\frac{1}{2}e^{-t}u(t)} - \frac{1}{2}e^{t}u(-t) - \cancel{\frac{1}{2}e^{-t}u(t)} + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

$$+\frac{1}{4}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{4}e^{t}u(-t) = \frac{2}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{t}u(-t)$$

و) $y_3(t) = x(t) * h(t)$

$$y_3(t) = e^{-t}u(t) * \left(h_1(t) * h_2(t)\right) =$$

$$e^{-t}u(t) * \left(\delta(t) - \frac{2}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}e^{t}u(-t)\right) =$$

$$e^{-t}u(t) - \underbrace{\left(e^{-t}u(t) * \frac{2}{3}e^{-2t}u(t)\right)} - \frac{2}{3}\underbrace{\left(e^{-t}u(t) * e^{t}u(-t)\right)}_{B}$$

$$-\frac{2}{3}\underbrace{\left(e^{-t}u(t) * e^{-2t}u(t)\right)}_{A}$$

A = طبق بخش الف $\longrightarrow e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$

B = طبق « ب $\longrightarrow \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{t}u(-t)$

$$y_3 = e^{-t}u(t) - \frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{2}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{2}{4}e^{-t}u(t)$$

$$-\frac{2}{4}e^{t}u(-t) = \frac{2}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{t}u(-t)$$

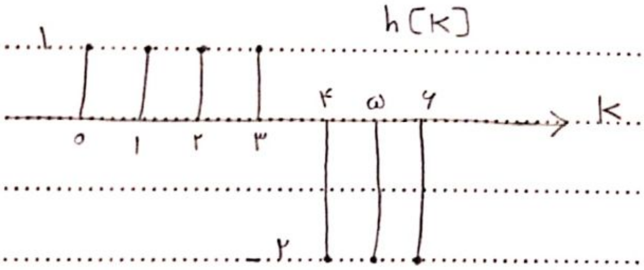
آیا تساوی برقرار است؟ بله برقرار است

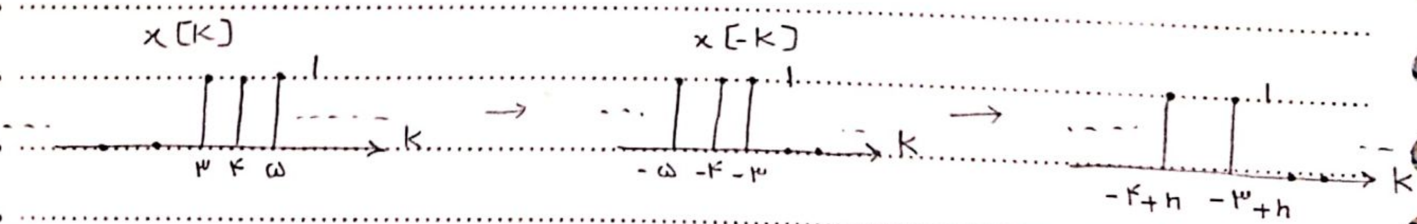
$$\left.\begin{aligned} (x(t) * h_1(t)) * h_2(t) &= y_1(t) \\ (x(t) * h_2(t)) * h_1(t) &= y_2(t) \\ x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) &= y_3(t) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y_1(t) = y_2(t) = y_3(t)$$

س۲ ←

الف) $x[n] = u[n-3]$

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$





$-3+n<0 \longrightarrow n<3 \longrightarrow y[n]=0$

$-3+n \geq 0$ and $-3+n \leq 3 \longrightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{-3+n} 1 = n-3+1 = n-2$

$-3+n \geq 4$ and $-3+n < 7 \longrightarrow 7 \leq n \leq 9 \longrightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{3} 1 +$

$$\sum_{k=۴}^{-۳+n} (-۲) = (۳+۱) + (-۲)(-۳+n-۴+۱) = -۲n+۱۶$$

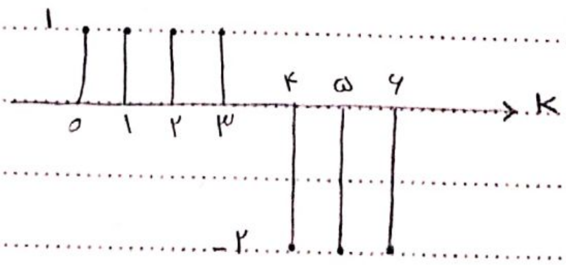
$$-۳+n \geq ۷ \longrightarrow n \geq ۱۰ \longrightarrow y[n] = \sum_{k=۰}^{۳} (۱) + \sum_{۴}^{۶} (-۲) + \sum_{k=۷}^{-۳+n} \cancel{h[k]}_{۰}\, x[n-k] = ۴ + ۳(-۲) = -۲$$

$$y[n] = \begin{cases} ۰ & n < ۳ \\ n-۲ & ۳ \leq n \leq ۶ \\ -۲n+۱۶ & ۷ \leq n \leq ۹ \\ -۲ & n \geq ۱۰ \end{cases}$$

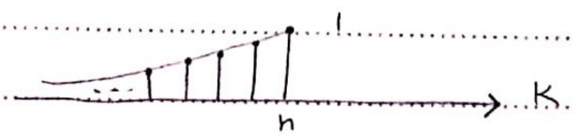
ب) $x[n] = a^{-n}\, u[n] \qquad a>0$

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

$h[k] \Rightarrow$



$x[n-k] \Rightarrow$



$n<0 \longrightarrow y[n]=0$

$$0\leq n\leq ۳ \longrightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{n} a^{-n+k} = a^{-n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^{k}}_{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}} = \frac{a-a^{n}}{a-1}$$

$$۴\leq n\leq ۶ \longrightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{n} h[k]\,a^{-n+k} = a^{-n}\Big[\sum_{k=0}^{۳} a^{k} - ۲\underbrace{\sum_{k=۴}^{n} a^{k}}_{k-۴\triangleq k'}\Big]$$

$$= a^{-n}\Big[\frac{1-a^{۴}}{1-a} - ۲\sum_{k'=0}^{n-۴} a^{k'+۴}\Big] =$$

$$a^{-n}\Big[\frac{1-a^{۴}}{1-a} - ۲a^{۴}\times\frac{1-a^{n-۳}}{1-a}\Big] = \frac{a^{-n}}{1-a}\Big[۲a^{n+1} - ۳a^{۴} + 1\Big]$$

$$n\geq ۷ \longrightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{n} h[k]\,a^{-n+k} = \sum_{k=0}^{۳} a^{-n+k} - ۲\underbrace{\sum_{k=۴}^{۶} a^{-n+k}}_{k'=k-۴}$$

$$+0 = a^{-n}\Big[\sum_{k=0}^{۳} a^{k} - ۲\sum_{k'=0}^{۲} a^{k'+۴}\Big] =$$

$$a^{-n}\Big[\frac{1-a^{۴}}{1-a} - ۲a^{۴}\times\frac{1-a^{۳}}{1-a}\Big] = \frac{a^{-n}}{1-a}\Big[۲a^{۷} - ۳a^{۴} + 1\Big]$$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n<0 \\ \dfrac{a-a^{n}}{a-1} & 0\leq n\leq ۳ \\ \dfrac{a^{-n}}{1-a}\Big[۲a^{n+1} - ۳a^{۴} + 1\Big] & ۴\leq n\leq ۶ \\ \dfrac{a^{-n}}{1-a}\Big[۲a^{۷} - ۳a^{۴} + 1\Big] & n\geq ۷ \end{cases}$$

س ۳ ←

$h = h_1 * ((h_2 * h_3) - (h_4 * h_5))$

$h_2[n] * h_3[n] = n\,u[n] * \delta[n-1] = (n-1)\,u[n-1]$

$h_4[n] * h_5[n] = a^n\,u[n] * \delta[n+1] = a^{n+1}\,u[n+1]$

$h = (\delta[n] - \delta[n-1]) * ((n-1)\,u[n-1] - a^{n+1}\,u[n+1]) =$

$(n-1)\,u[n-1] - a^{n+1}\,u[n+1] - (n-2)\,u[n-2] + a^n\,u[n]$

ب)

. حافظه دار ← حافظه دار است چون مقدار $h[n]$ به مقادیر قبل آن وابسته است

$x[n] * h_1[n] = x[n] - x[n-1]$

به خاطر وجود $u[n-1]$

. علیت ← علی نیست ← چون برای اینکه یک سیستم LTI علی شود باید برای همه $n<0$

داشته باشیم ← $h[n] = 0$ اما $h[n]$ به ازای $n=-1$ مقدار دارد

. پایداری ← پایدار نیست بخاطر $u[n-2]$ زیرا $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| \to \infty$

س۴ ←

الف)

$$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

$$h[n] - A\,h[n-1] = \delta[n] \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] - A\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} u[n-1]\right)$$

$$= \delta[n] \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] - A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} u[n-1] = u[n] - u[n-1]$$

$$\rightarrow u[n-1]\left(1 - A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right) = u[n]\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$n < 0 \rightarrow u[n-1] = u[n] = 0$$

$\Longrightarrow$

$$n = 0 \rightarrow u[n-1] = 0 \,,\; 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 0$$

$$n \geq 1 \rightarrow 1 - A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \rightarrow A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} =$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n \Longrightarrow A = \frac{1}{5}$$

ب)

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n] \xrightarrow[\text{الف}]{\text{صق}} h[n] - \frac{1}{5} h[n-1] \longrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] * h_i[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n-1] \rightarrow$$

$$h_i[n] = \delta[n] - B$$

$$\left(\frac{1}{\omega}\right)^n u[n] * B = \left(\frac{1}{\omega}\right)^n u[n-1] \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{n-k} u[n-k]\, B(k) =$$

$$\left(\frac{1}{\omega}\right)^n u[n-1] = \cdots + \left(\frac{1}{\omega}\right)^n u[n]\, B(0) + \left(\frac{1}{\omega}\right)^{n-1} u[n-1]\, B(1) + \cdots$$

$$\longrightarrow B(1) = \frac{1}{\omega} \,,\ \forall\, n \neq 1 \longrightarrow B(n) = 0 \longrightarrow h_i = \delta[n] - \frac{1}{\omega}\,\delta[n-1]$$

ω
$\leftarrow$ ش

س ۶ ←

الف) LTI ← خطی باشد
← تغییر ناپذیر با زمان باشد

خطی ← الف) $a\,x(t) \longrightarrow a\,y(t)$

$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$

$$a\,x(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}\, a\,x(\tau-1)\, d\tau = a\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}\, x(\tau-1)\, d\tau$$

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} \big(x_1(\tau-1) + x_2(\tau-1) \big)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}\, x_1(\tau-1)\, d\tau + \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}\, x_2(\tau-1)\, d\tau$$

برای مشخص کردن خطی بودن ←

$$a\,x(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)}\, a\,x(\tau-1)\, d\tau =$$

$$a\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}\, x(\tau-1)\, d\tau$$

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)} \big(x_1(\tau-1) + x_2(\tau-1) \big)\, d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}\, x_1(\tau-1)\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}\, x_2(\tau-1)\, d\tau$$

Subject: .... Data: .... Page: ....

تغییر ناپذیر با زمان باشد ←

$x(t) \longrightarrow y(t)$

الف) $x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$

$$x(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}\, x(\underbrace{\tau-t_0}_{\tau-t_0=\alpha}-1)\, d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-2(t-t_0-\alpha)}\, x(\alpha-1)\, d\tau$$

$\parallel$ TI است

$$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-2(t-t_0-\tau)}\, x(\tau-1)\, d\tau$$

الف LTI است

ت)

$$x(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)}\, x(\underbrace{\tau-t_0}_{\tau-t_0=\alpha}-1)\, d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-t_0-\alpha)}\, x(\alpha-1)\, d\tau$$

$\parallel\longrightarrow$ TI است

$$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-t_0-\tau)}\, x(\tau-1)\, d\tau$$

ت هم LTI است

ب) $$\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)}\, \delta(\tau-1)\, d\tau = e^{-2(t-1)}\, u(t-1)$$

ت ← $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}\, \delta(\tau-1)\, d\tau = e^{-2(t-1)}$$

DANIAL

ب) سیستم الف)

علی است چون به ازای مقادیر $t<0$ داریم ← $h(t)=0$

پایدار است چون ←

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-1)} u(t-1)\, dt =$$

$$\int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)}\, dt = \frac{1}{2} < \infty$$

سیستم ت)

علی نیست چون به ازای مقادیر $t<0$ داریم ← $h(t) \neq 0$

پایدار نیست چون ← $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-1)}\, dt = \infty$

ت) در هر بخش گفته شد

س ۷) ←

$$u(at) = \begin{cases} 1 & at>0 \\ 0 & at<0 \end{cases} \xrightarrow{\text{if } a>0} u(at) = \underbrace{\begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}}_{u(t)}$$

$$\Big\downarrow \text{if } a<0$$

$$u(at) = \begin{cases} 1 & t<0 \\ 0 & t>0 \end{cases} \Rightarrow u(-t)$$

$$\Rightarrow u(at) = \begin{cases} u(t) & a>0 \\ u(-t) & a<0 \end{cases} \Longrightarrow u(t)u(a) + u(-t)u(-a)$$

$$\delta(at) = \frac{du(at)}{d(at)} = \frac{1}{a} \times \frac{du(at)}{dt} = \frac{1}{a} \times \frac{d\left(u(t)u(a) + u(-t)u(-a)\right)}{dt}$$

$$= \frac{1}{a}\left[\delta(t)\,u(a) - \underbrace{\delta(-t)}_{\delta(t)}\,u(-a)\right] = \delta(t)\underbrace{\left[\frac{u(a)-u(-a)}{a}\right]}_{A}$$

$$A = \begin{cases} \frac{1}{a} & a>0 \\ \frac{-1}{a} & a<0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{|a|}$$

$$\Longrightarrow \delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}$$

س ۹ ← اگر s_1 را یک سیستم LTI وارون پذیر در نظر بگیریم و s_2 را وارون آن در نظر بگیریم

داریم ←

$$x_1(t) \xrightarrow{s_1} y_1(t)$$

$$y_1(t) \xrightarrow{s_2} x_1(t)$$

چون s_1 ، TI است ← $y_1(t-t_0) = s_1\{x_1(t-t_0)\}$

چون s_2 وارون s_1 است عکس رابطه فوق هم برقرار است

$x_1(t-t_0) = s_2\{y_1(t-t_0)\}$ ‏ s_2 سیستم TI است

چون s_1 خطی است ←

$$\begin{cases} a y_1(t) = s_1\{a x_1(t)\} \xrightarrow[\text{است } s_1]{\text{چون } s_2 \text{ وارون}} a x_1(t) = s_2\{a y_1(t)\} \\ b y_2(t) = s_1\{b x_2(t)\} \xrightarrow[\text{است } s_1]{\text{چون } s_2 \text{ وارون}} b x_2(t) = s_2\{b y_2(t)\} \\ a y_1(t) + b y_2(t) = s_1\{a x_1(t) + b x_2(t)\} \end{cases}$$

پس سیستم s_2 خطی است

$$\xrightarrow[\text{است}]{s_2 \text{ وارون } s_1} a x_1(t) + b x_2(t) = s_2\{a y_1(t) + b y_2(t)\}$$

س ۱۰ ←

الف) آرامش اولیه یعنی مادامی که ورودی صفر است خروجی صفر باشد

$$h[n] - a\,h[n-1] = b\,\delta[n] - \delta[n-1] \qquad h[n]=0 \text{ و } n \le -1$$

$$\text{if: } n=0 \longrightarrow h[0] - a\,h[-1] = b \longrightarrow h[0]=b$$

$$\text{if: } n=1 \longrightarrow h[1] - a\,h[0] = -1 \longrightarrow h[1] = ab-1$$

$$\text{if: } n=2 \longrightarrow h[2] - a\,h[1] \Longrightarrow h[2] = a(ab-1)$$

$$\Longrightarrow h[n] = \begin{cases} a^{n-1}(ab-1) & n \ge 1 \\ b & n=0 \\ 0 & n \le -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow h[n] = a^{n-1}(ab-1)\,u[n-1] + b\,\delta[n]$$

ب) حافظه دار است چون به $x[n-1]$ وابسته است

علی است چون برای $n<0 \leftarrow h[n]=0$

پایدار نیست چون

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|}_{\longrightarrow \infty \longrightarrow \text{محدود نمی‌شود}} = \sum_{n=0}^{+\infty} |h[n]| = |b| + \sum_{n=1}^{+\infty} \left| a^{n-1}(ab-1) \right|$$