به نام خدا

ساختمان‌های گسسته

شمارش

Dr. Aref Karimiafshar
A.karimiafshar@ec.iut.ac.ir

ترکیب با تکرار

- فرض می کنیم:
  - هر عضو بینهایت بار تکرار شده است.
- یادآوری
  - جایگشت با تکرار

n	**n**		**n**
1	2	...	r

جایگشت r شئ از n شئ: n^r

ترکیب با تکرار

- مثال
  - فرض کنید سه نمونه میوه (سیب، پرتقال و گلابی) داریم و می خواهیم چهار تا میوه در یک بشقاب بچینیم. به چند حالت می توانیم این کار را انجام بدهیم؟

4 apples	4 oranges	4 pears
3 apples, 1 orange	3 apples, 1 pear	3 oranges, 1 apple
3 oranges, 1 pear	3 pears, 1 apple	3 pears, 1 orange
2 apples, 2 oranges	2 apples, 2 pears	2 oranges, 2 pears
2 apples, 1 orange, 1 pear	2 oranges, 1 apple, 1 pear	2 pears, 1 apple, 1 orange

در اینجا ترتیب مهم نیست! فقط انتخاب 4تا میوه مهم است!!

ترکیب با تکرار

- مثال
  - فرض کنید سه نمونه میوه (سیب، پرتقال و گلابی) داریم و می خواهیم چهار تا میوه در یک بشقاب بچینیم. به چند حالت می توانیم این کار را انجام بدهیم؟

* | * | * * | | * * * *   * | * * | *

n-1 تا خط

$$C(n-1+r, r)$$

r تا ستاره

ترکیب با تکرار

- مثال
  - فرض کنید سه نمونه میوه (سیب، پرتقال و گلابی) داریم و می خواهیم چهار تا میوه در یک بشقاب بچینیم. به چند حالت می توانیم این کار را انجام بدهیم؟

$* \mid * \mid * *$ $\qquad \mid \mid * * * *$ $\qquad * \mid * * \mid *$

$$\boldsymbol{C(n-1+r,r)}$$

$$\binom{\mathbf{3-1+4}}{\mathbf{4}} = \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} = \mathbf{15}$$

ترکیب با تکرار

- به صورت کلی:
  - تعداد ترکیب‌های rتایی از یک مجموعه n عضوی در صورتی که تکرار مجاز باشد، برابر خواهد بود با:

$$\boldsymbol{C(n-1+r,r)}$$

$$\boldsymbol{C(n-1+r,r)=C(n-1+r,n-1)}$$

مثال

- فرض کنید یک شیرینی فروشی چهار نمونه شیرینی مختلف دارد. به چند طریق می توانیم 6 شیرینی انتخاب کنیم؟

$$\boldsymbol{C(4-1+6,6)=C(9,6)=C(9,3)=\frac{9!}{6!\,(3)!}=84}$$

مثال

- تعداد جواب‌های صحیح نامنفی، معادله $x_1+x_2+x_3=11$ را بدست آورید.

$$\boldsymbol{C(3-1+11,11)=C(13,11)=C(13,2)=\frac{13!}{11!\,(2)!}=78}$$

مثال

- تعداد جواب‌های صحیح نامنفی، معادله $x_1+x_2+x_3=11$ را به شرط این که $x_1 \geq 1$، $x_2 \geq 2$ و $x_3 \geq 3$ بدست آورید.

$$(x_1+1)+(x_2+2)+(x_3+3)=11$$

$$(x_1)+(x_2)+(x_3)=5$$

$$C(3-1+5,5)=C(7,5)=C(7,2)=\frac{7!}{5!\,(2)!}=21$$

جمع‌بندی

TABLE 1 Combinations and Permutations With and Without Repetition.

Type	*Repetition Allowed?*	*Formula*
r-permutations	No	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r-combinations	No	$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r-permutations	Yes	n^r
r-combinations	Yes	$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

ضرایب دو جمله‌ای

- بسط توان‌های دو جمله‌ای

$$(x+y)^n$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y)\\ &= xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy\\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

ضرایب دو جمله‌ای

- بسط توان‌های دو جمله‌ای

$$(x+y)^n$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$$

$$x^3,\ x^2y,\ xy^2,\ \text{and}\ y^3$$

$$\binom{3}{3} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{0}$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

قضیه دو جمله‌ای

- اگر x و y دو متغییر و n یک عدد صحیح نامنفی باشد، داریم:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

- اثبات

$$x^{n-j} y^j \text{ for } j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ضرایب $x^{n-j} y^j \quad \rightarrow \quad \binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$

مثال

- بسط $(x+y)^4$ را بدست آورید.

$$(x+y)^4 = \sum_{j=0}^{4} \binom{4}{j} x^{4-j} y^j$$

$$= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4$$

$$= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

مثال

- ضریب $x^{12}y^{13}$ را در بسط $(x+y)^{25}$ را محاسبه کنید.

ضریب $x^{12}y^{13} \rightarrow \binom{25}{13} = \frac{25!}{13!\,12!} = 5{,}200{,}300$

مثال

- ضریب $x^{12}y^{13}$ را در بسط $(2x-3y)^{25}$ را محاسبه کنید.

$$(2x+(-3y))^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j}(-3y)^j$$

ضریب $x^{12}y^{13} \quad \rightarrow \quad \binom{25}{13} 2^{12}(-3)^{13} = -\frac{25!}{13!\,12!}2^{12}3^{13}$

تساوی‌های مهم

- اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد، داریم:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- اثبات
  - با استفاده از قضیه دوجمله‌ای اگر x=1 و y=1 داریم:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

تساوی‌های مهم

- اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد، داریم:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- اثبات (دیگر)
  - تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با 2^n
  - از طرف دیگر، زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی

$\binom{n}{0}$ subsets with zero elements

$\binom{n}{1}$ subsets with one elements

$\binom{n}{2}$ subsets with two elements

$\cdots$

$\binom{n}{n}$ subsets with n elements

$$\rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

تساوی‌های مهم

- اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد، داریم:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

- اثبات
  - با استفاده از قضیه دوجمله‌ای اگر x=-1 و y=1 داریم:

$$0 = 0^n = ((-1)+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

تساوی‌های مهم

- اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد، داریم:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

- نتیجه می دهد:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

رابطه Vandermonde

- اگر m, n, r اعداد صحیح نامنفی باشد و r بزرگتر از m و n نباشد، داریم:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

- اثبات
  - فرض کنید m شئ در مجموعه اول و n شئ در مجموعه دوم داریم
  - انتخاب r شئ از مجموع این مجموعه $\binom{m+n}{r}$
  - از طرف دیگر،
    - می توانیم k شئ از مجموعه دوم و r-k شئ از مجموعه اول انتخاب کنیم $0 \le k \le r$
    - طبق اصل ضرب داریم: $\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$
    - طبق اصل جمع داریم: $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$

تساوی‌های مهم

- اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد، داریم:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

- اثبات
  - اگر در رابطه Vandermonde قرار دهیم m=r=n، داریم:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

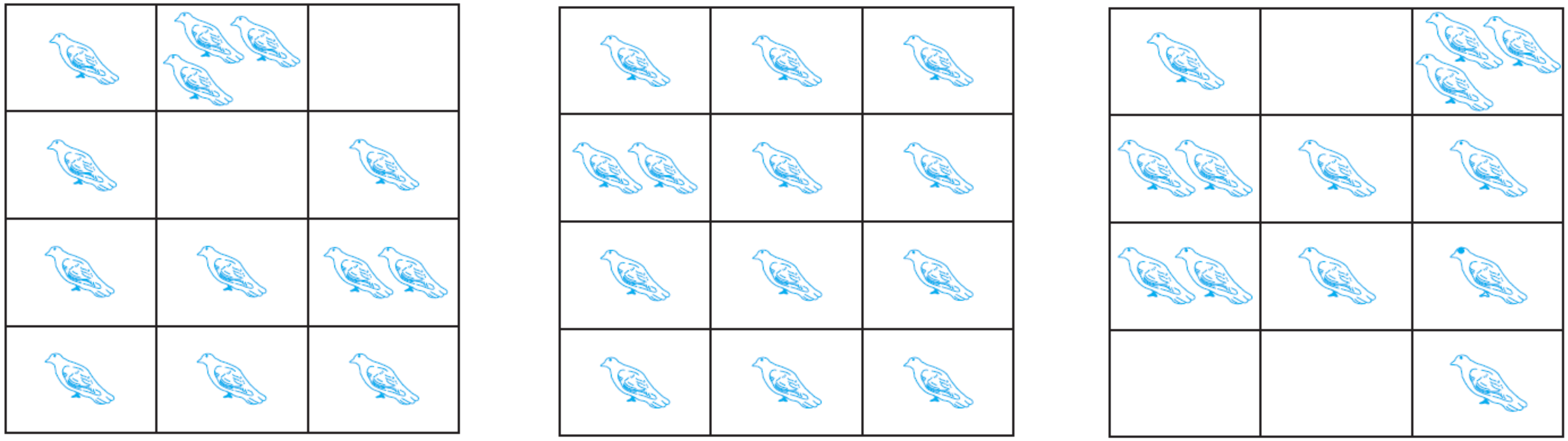
اصل لانه کبوتری

- فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت است. اگر بخواهیم k+1 شئ یا بیشتر را در k جعبه قرار دهیم، آنگاه حداقل دو جعبه وجود خواهد داشت که شامل دو یا بیشتر از آن اشیاء است.

- اثبات
  - برهان خلف: فرض کنیم در هیچ جعبه‌ای بیشتر از یک شئ نداشته باشیم. در این صورت حداکثر k شئ باید داشته باشیم که با فرض ما تناقض دارد.

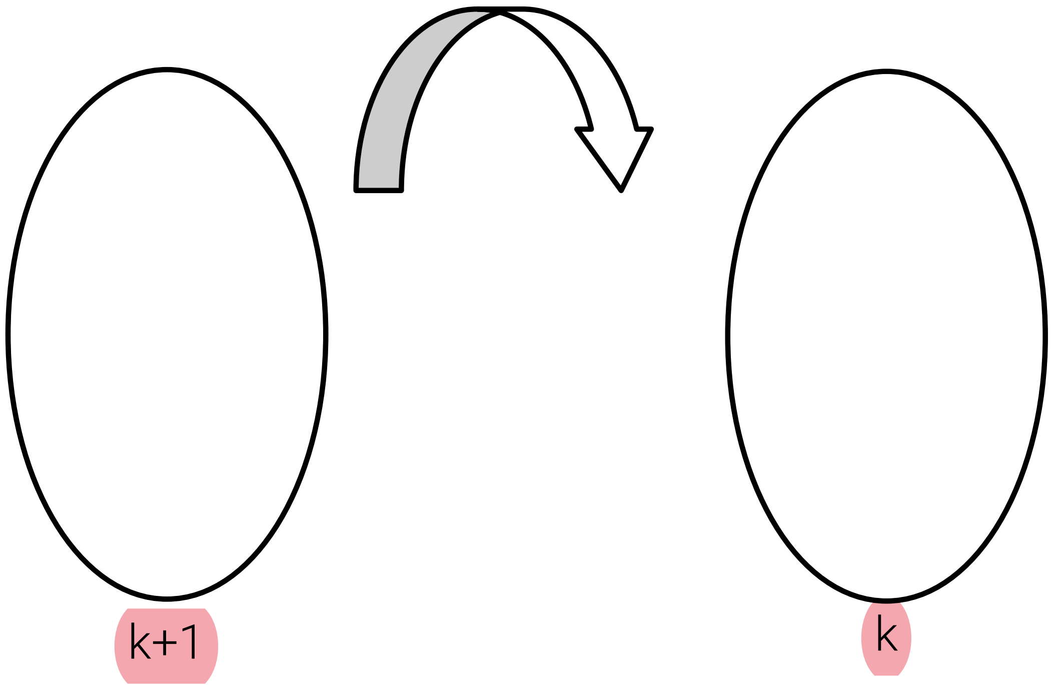
اصل لانه کبوتری

- مشخص نمی کند کدام لانه بیش از یک کبوتر دارد!
- مشخص نمی کند سایر خانه ها پر هستند!!



مثال

- هیچ تابعی از یک مجموعه k+1 عضوی یا بیشتر به یک مجموعه k عضوی نمی توان پیدا کرد که یک به یک باشد.



مثال

- در بین هر جمع 367 نفره، حداقل دو نفر وجود باید داشته باشد که در یک روز به دنیا آمده باشند.

- اثبات
  - 366 روز تولد متفاوت داریم
  - طبق اصل لانه کبوتری دو نفر باید روز تولد یکسانی داشته باشند

مثال

- چند دانشجو در یک کلاس باید داشته باشیم تا مطمئن شویم در نمره دهی برمبنای 0 تا 100 حداقل دو نفر نمره یکسانی دریافت می کنند؟

- اثبات
  - 101 نمره متفاوت داریم
  - اگر 102 دانشجو داشته باشیم، طبق اصل لانه کبوتری دو نفر نمره یکسانی خواهند داشت.

تعمیم اصل لانه کبوتری

- اگر بخواهیم N شئ را در k جعبه قرار دهیم، آنگاه حداقل یک جعبه وجود خواهد داشت که حداقل شامل $\lceil N/k \rceil$ شئ باشد.

- اثبات
  - برهان خلف: فرض کنیم در هیچ جعبه‌ای بیشتر از $\lceil N/k \rceil - 1$ شئ نداشته باشیم. در این صورت حداکثر

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N$$

شئ باید داشته باشیم که با فرض ما تناقض دارد.

مثال

- در میان 100 نفر حداقل $\lceil 100/12 \rceil = 9$ نفر وجود دارد که در یک ماه متولد شده‌اند.

- حداقل چند دانشجو در یک کلاس باید وجود داشته باشد تا مطمئن شویم در سیستم نمره دهی پنج گانه A, B, C, D , F حداقل 6 نفر نمره یکسانی دریافت می کنند؟
- اگر حداقل تعداد دانشجویان را با N نمایش دهیم، باید داشته باشیم: $\lceil N/5 \rceil = 6$
- بنابر این داریم:

$$N = 5 \cdot 5 + 1 = 26$$

مثال

- در طول 30 روز یک ماه، یک تیم بیس بال هر روز حداقل یک بازی انجام میدهد، اما تعدادکل بازیها بیشتر از 45 نخواهد بود. نشان دهید دوره‌ای از روزهای متوالی وجود دارد که در آن تیم باید دقیقا 14 بازی انجام دهد.

  - a_j تعداد بازیهایی که تا روز jام از ماه انجام شده است.
  - بنابراین: $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ دنباله صعودی از اعداد صحیح مثبت که

$1 \leq a_j \leq 45$

  - همچنین: $a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ دنباله صعودی از اعداد صحیح مثبت که $15 \leq a_j + 14 \leq 59$
  - دنباله 60تایی $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ همگی کوچکتر از 59 هستند. بنابراین دو عدد باید باهم برابر باشند.

$a_i = a_j + 14$

مثال

- نشان دهید که در میان هر n+1 عدد صحیح مثبت که از 2n بزرگتر نباشند، عددی وجود خواهد داشت که یکی از اعداد دیگر را تقسیم می کند.

  – هر کدام از n+1 عدد $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ را می توان به صورت حاصلضرب یک توان 2 و یک عدد فرد نوشت.

$$a_j = 2^{k_j} q_j \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n+1$$

q_j عدد فرد

k_j عدد صحیح نامنفی

  – اعداد $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ همگی فرد و کوچکتر از 2n هستند. چون تعداد فرد کوچکتر از 2n برابر nتا است، طبق اصل لانه کبوتری دو تا از این اعداد باهم برابرند. $q_i = q_j$

$$a_i = 2^{k_i} q$$

$$a_j = 2^{k_j} q$$

پایان

موفق و پیروز باشید