

به نام خدا

طراحی سیستم های دیجیتال ۱

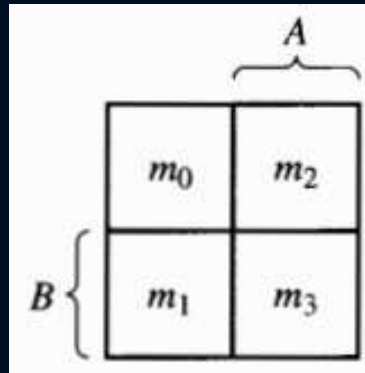
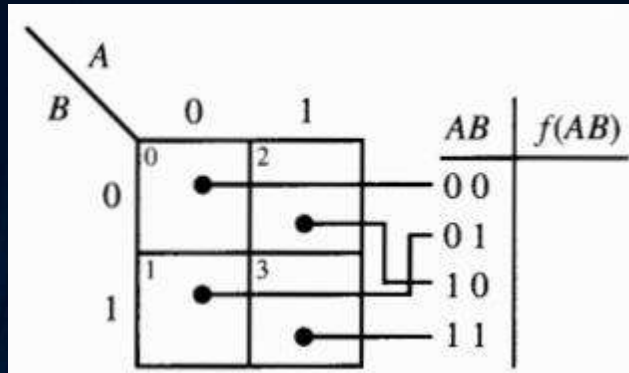
فصل سوم

ساده سازی با استفاده از جدول کارنو (K-Map)

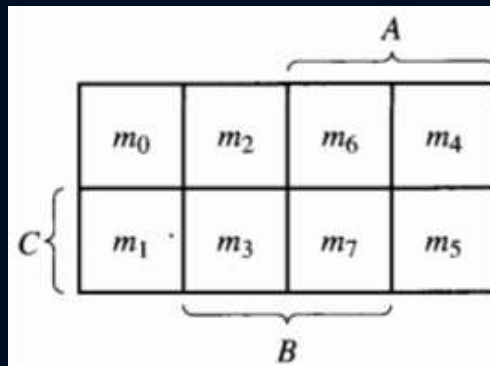
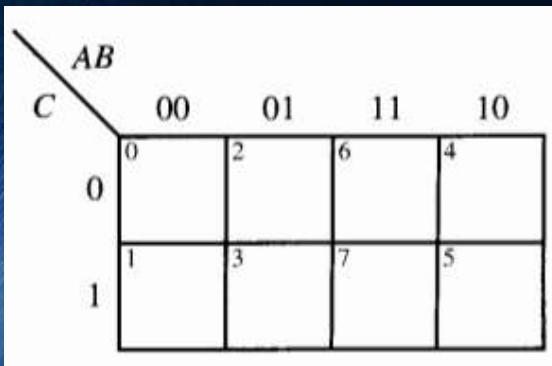
✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ یک نمایش گرافیکی از جدول صحت است.

❖ جدول کارنو تابع دو متغیره:



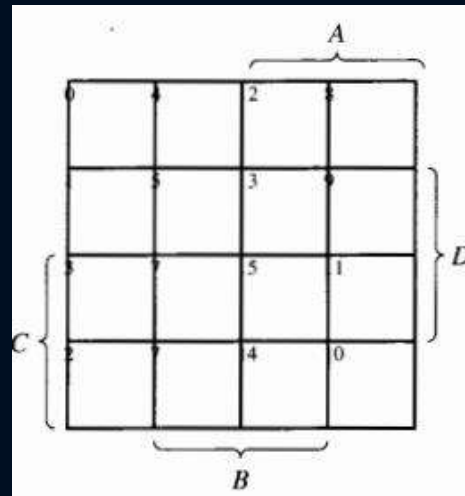
❖ جدول کارنوی تابع سه متغیره:



✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ جدول کارنو تابع چهار متغیره:

CD \ AB	AB			
	00	01	11	10
00	0	1	2	3
01	4	5	6	7
11	8	9	10	11
10	12	13	14	15



DE \ ABC	ABC			
	000	001	011	010
00	0	1	2	3
01	4	5	6	7
11	8	9	10	11
10	12	13	14	15

DE \ ABC	ABC			
	100	101	111	110
00	16	17	18	19
01	20	21	22	23
11	24	25	26	27
10	28	29	30	31

❖ جدول کارنوی تابع پنج متغیره:

✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ رسم جدول کارنوی یک تابع:

$$f(A, B, C) = m(0, 3, 5) = m_0 + m_3 + m_5$$

$$= \prod M(1, 2, 4, 6, 7) = M_1 M_2 M_4 M_6 M_7$$

AB \ C		A			
		00	01	11	10
C	0	0	1	0	0
	1	0	1	0	1

AB \ C		A			
		00	01	11	10
C	0	0	1	0	0
	1	0	1	0	1

AB \ C		A			
		00	01	11	10
C	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0

✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ رسم جدول کارنوی یک تابع:

یافتن لیست جملات مینیمم یا ماکزیمم یک تابع

$$f(A, B, C) = AB + B\bar{C}$$

AB \ C		BC̄		A	
		00	01	11	10
C	0	0	1	1	0
	1	0	0	1	0

Grouping: $B\bar{C}$ (cells 2, 6) and AB (cells 6, 7).

$$f(A, B, C) = \sum m(2, 6, 7)$$

AB \ C		A			
		00	01	11	10
C	0	0			0
	1	0	0		0

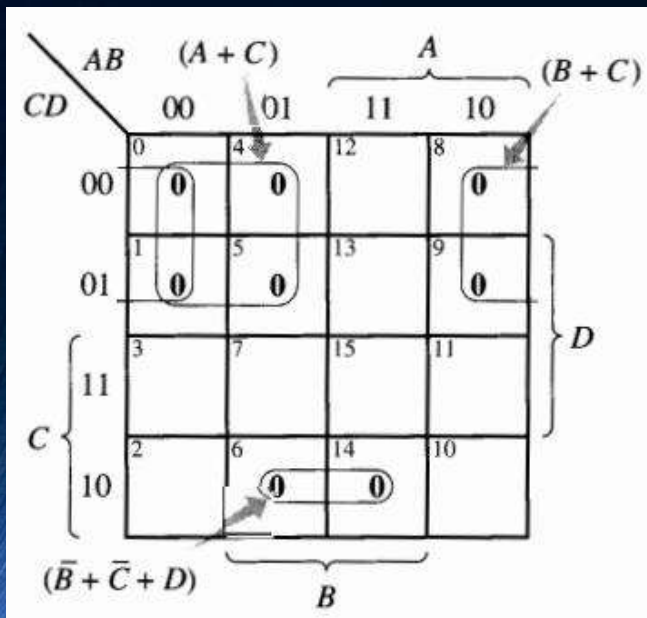
Grouping: $\bar{B}\bar{C}$ (cells 0, 1, 2, 3) and $\bar{B}C$ (cells 4, 5, 6, 7).

$$f(A, B, C) = \prod M(0, 1, 3, 4, 5)$$

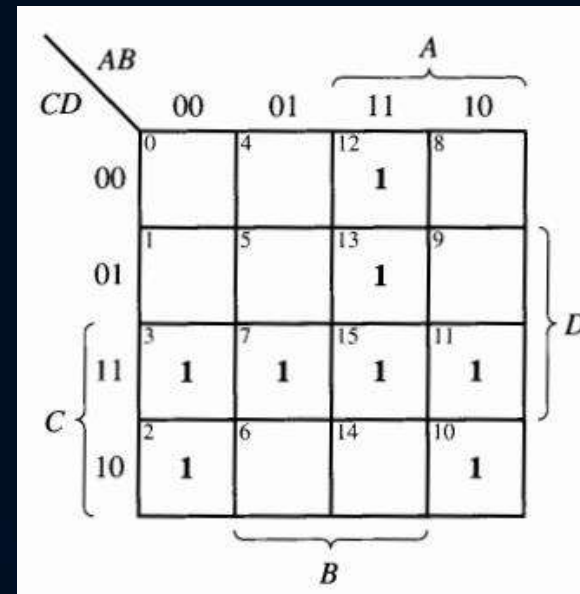
✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ رسم جدول کارنوی یک تابع به فرم POS:

$$f(A, B, C, D) = (A + C)(B + C)(\bar{B} + \bar{C} + D)$$



$$f(A, B, C, D) = \prod M(0, 1, 4, 5, 6, 8, 9, 14)$$

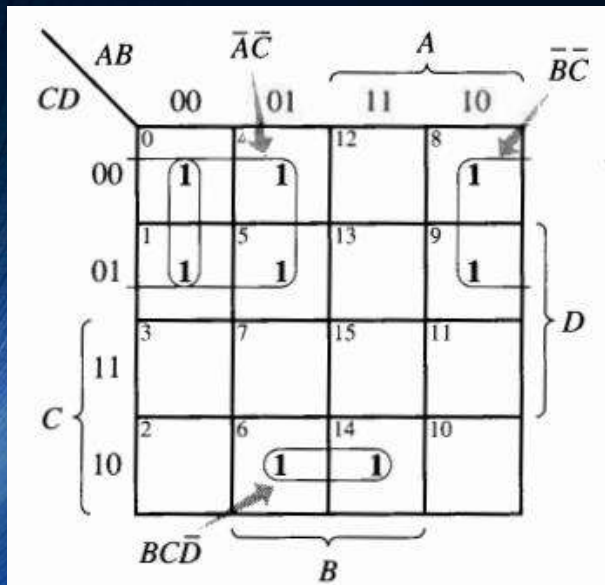


$$f(A, B, C, D) = \sum m(2, 3, 7, 10, 11, 12, 13, 15)$$

✓ جدول کارنو (K-Map)

$$f(A, B, C, D) = (A + C)(B + C)(\bar{B} + \bar{C} + D)$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(A, B, C, D) &= \overline{(A + C)(B + C)(\bar{B} + \bar{C} + D)} \\ &= \overline{(A + C)} + \overline{(B + C)} + \overline{(\bar{B} + \bar{C} + D)} \\ &= \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} + BCD\end{aligned}$$



❖ رسم جدول کارنوی یک تابع به فرم POS:

روش دیگر برای نشان دادن توابع به فرم POS در جدول کارنو، گرفتن متمم و استفاده از قضیه دمورگان است.

❖ یک های تابع \bar{f} در جدول کارنو همان صفرهای تابع f می باشند که معادل با لیست جملات ماکزیمم تابع f هستند.

❖ صفر های تابع \bar{f} در جدول کارنو همان یک های تابع f می باشند که معادل با لیست جملات مینیمم تابع f هستند.

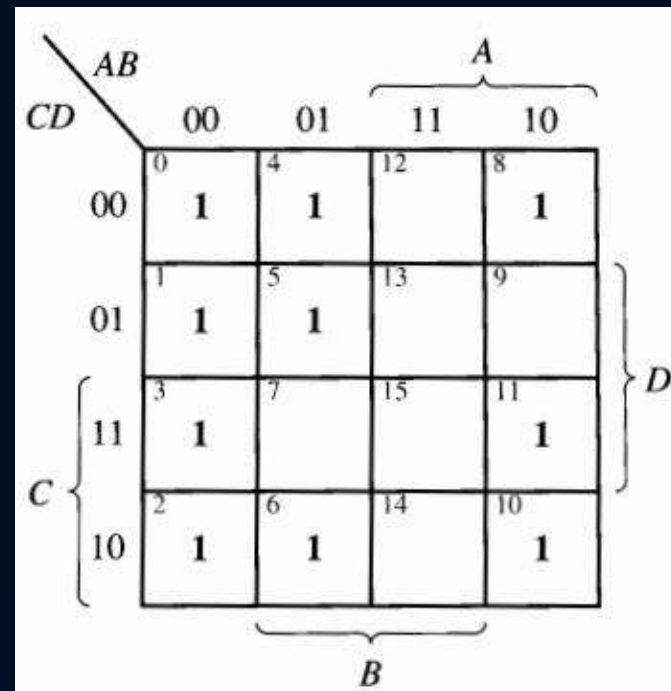
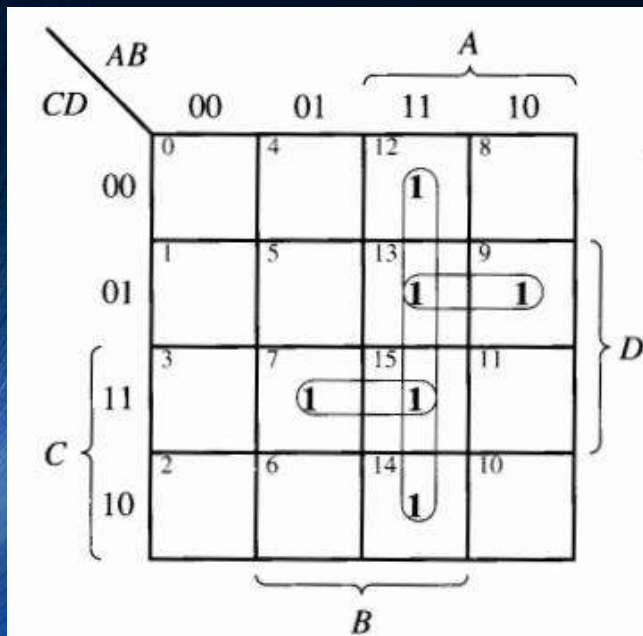
$$f(A, B, C, D) = \prod M(0, 1, 4, 5, 6, 8, 9, 14) = \sum m(2, 3, 7, 10, 11, 12, 13, 15)$$

✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ مثال: لیست جملات مینیمم تابع را بیابید.

$$f(A, B, C, D) = (\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + C + \bar{D})(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(A, B, C, D) &= \overline{(\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + C + \bar{D})(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})} \\ &= \overline{(\bar{A} + \bar{B})} + \overline{(\bar{A} + C + \bar{D})} + \overline{(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})} \\ &= AB + A\bar{C}D + BCD\end{aligned}$$



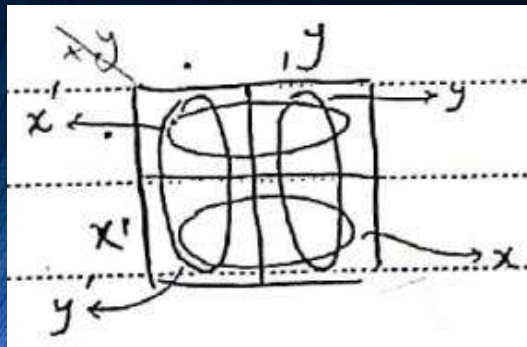
$$f(A, B, C, D) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

❖ تعریف همسایگی: دو جمله مینیم m_i و m_j بصورت منطقی همسایه هستند (Logically Adjacent) اگر آنها تنها در یک متغیر باهم متفاوت باشند. مانند $(m_{14}) ABC\bar{D}$ و $(m_{12}) AB\bar{C}\bar{D}$.

❖ در این حالت این دو می توانند باهم ترکیب شوند که نتیجه آن $AB\bar{D}$ می شود.

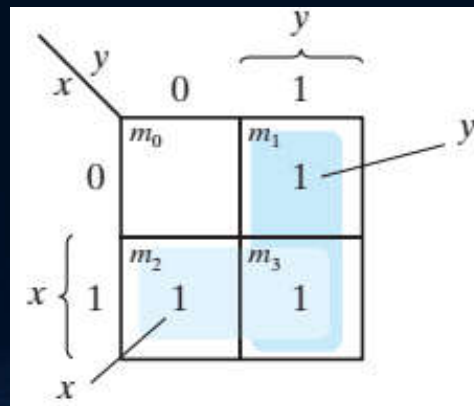
❖ بطور کلی هر دو ترم همسایه می توانند ترکیب شده و یک متغیر را حذف کنند.



$$f(x, y) = \sum m(1, 2, 3)$$

❖ تعداد خانه های یک همسایگی توان هایی

از ۲ هستند.



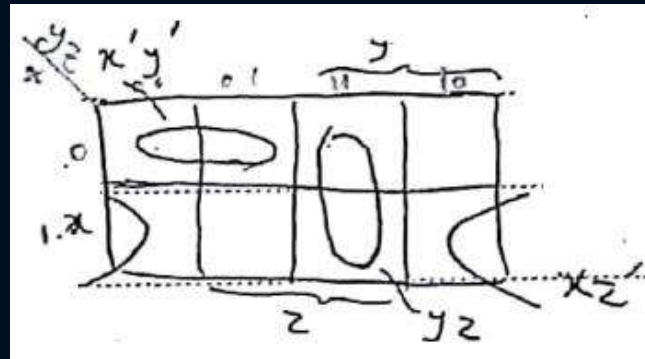
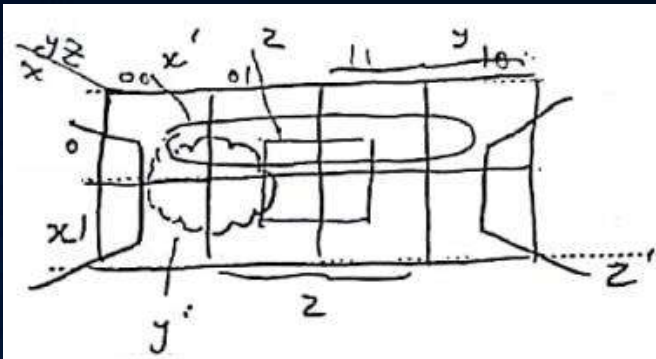
$$f(x, y) = \bar{x}y + x\bar{y} + xy = x + y$$

❖ عبارت معادل همسایگی ها می شود آن

متغیرهایی که تغییر نکرده اند.

✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

❖ کارنوی ۳ متغیره:



$$f(A, B, C) = AB + B\bar{C}$$

C \ AB	A			
	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

Hand-drawn K-map for $f(A, B, C) = AB + B\bar{C}$. The map is a 2x4 grid with columns labeled 00, 01, 11, 10 and rows labeled 0, 1. The cells (0, 1), (0, 6), (1, 1), and (1, 7) are marked with '1'. A group of four cells (0, 1), (0, 6), (1, 1), and (1, 7) is circled, representing the term $B\bar{C}$. A group of two cells (1, 1) and (1, 7) is also circled, representing the term AB .

$$f(A, B, C) = B\bar{C} + AB$$

$$F(x, y, z) = \Sigma(3, 4, 6, 7)$$

x \ yz	y			
	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

Printed K-map for $F(x, y, z) = \Sigma(3, 4, 6, 7)$. The map is a 2x4 grid with columns labeled 00, 01, 11, 10 and rows labeled 0, 1. The cells (0, 3), (0, 2), (1, 4), and (1, 6) are marked with '1'. A group of four cells (0, 3), (0, 2), (1, 4), and (1, 6) is shaded blue, representing the term $x\bar{z}$. A group of four cells (0, 3), (0, 2), (1, 3), and (1, 2) is also shaded blue, representing the term yz .

$$f(x, y, z) = x\bar{z} + yz$$

$$F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$$

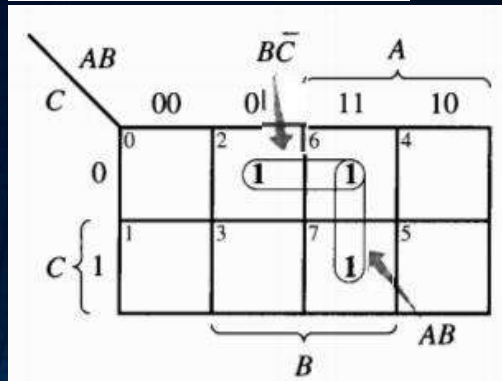
x \ yz	y			
	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

Printed K-map for $F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$. The map is a 2x4 grid with columns labeled 00, 01, 11, 10 and rows labeled 0, 1. The cells (0, 0), (0, 2), (1, 4), (1, 5), and (1, 6) are marked with '1'. A group of four cells (0, 0), (0, 2), (1, 4), and (1, 6) is shaded blue, representing the term \bar{z} . A group of four cells (0, 0), (0, 2), (1, 4), and (1, 6) is also shaded blue, representing the term $x\bar{y}$.

$$f(x, y, z) = \bar{z} + x\bar{y}$$

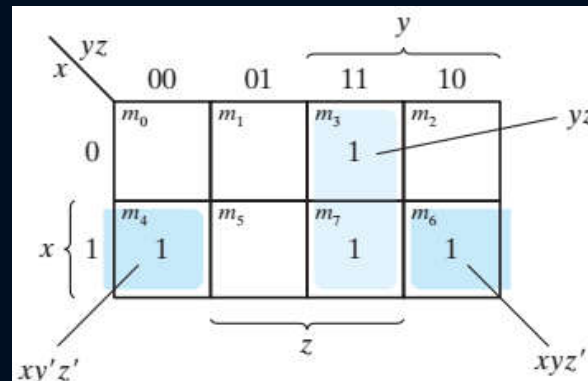
✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

$$f(A, B, C) = AB + B\bar{C}$$



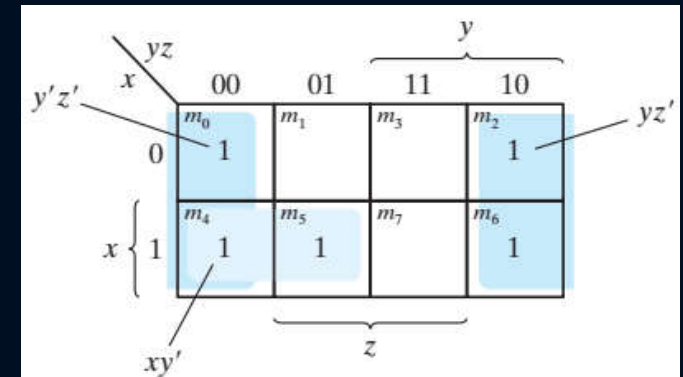
$$f(A, B, C) = B\bar{C} + AB$$

$$F(x, y, z) = \Sigma(3, 4, 6, 7)$$



$$f(x, y, z) = x\bar{z} + yz$$

$$F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$$



$$f(x, y, z) = \bar{z} + x\bar{y}$$

❖ در کارنوی ۳ متغیره:

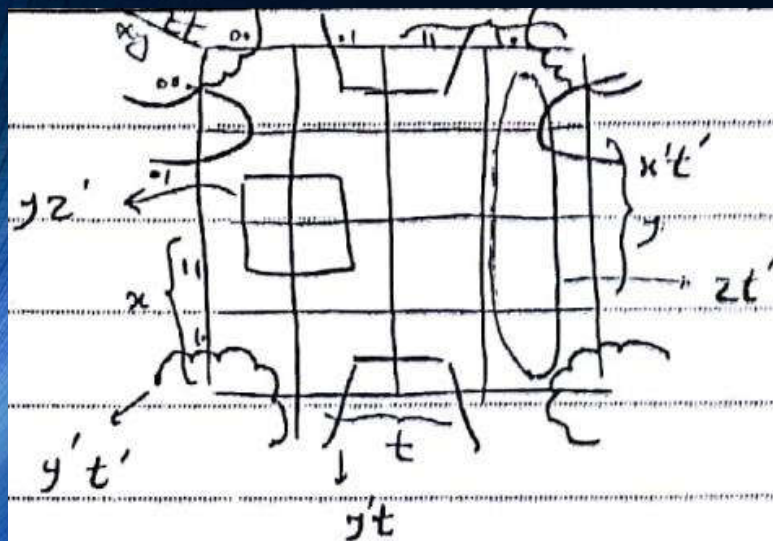
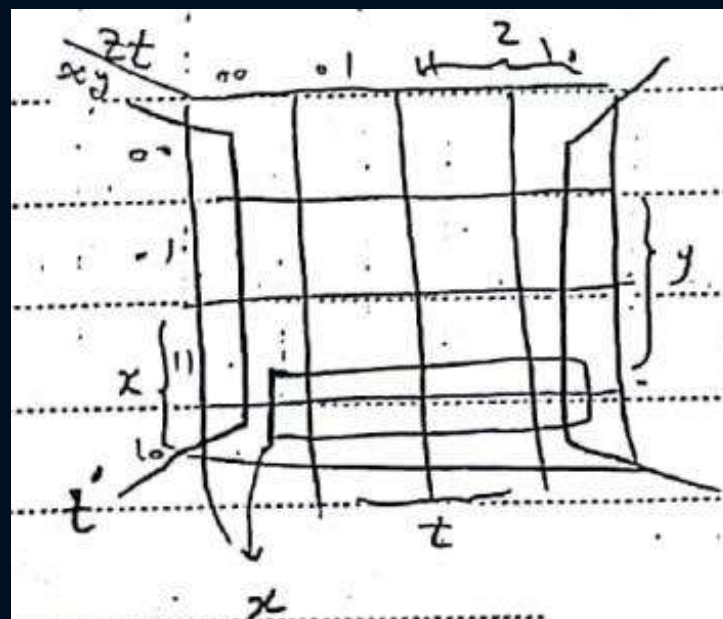
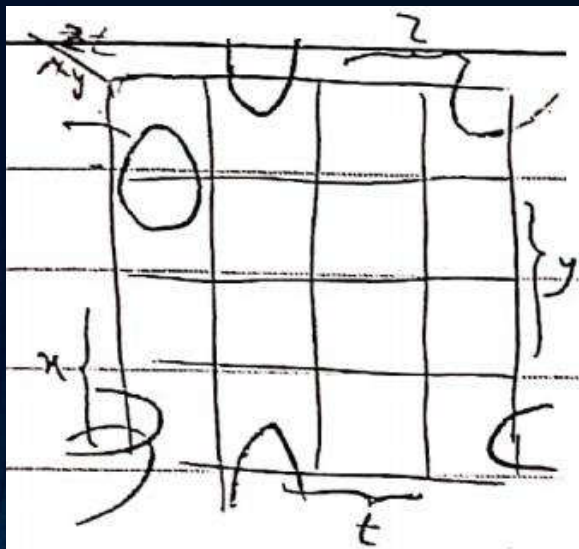
✓ هر ۲ خانه همسایه معادل می شود با ۲ متغیر (حذف یک متغیر)

✓ هر ۴ خانه همسایه معادل می شود با ۱ متغیر (حذف دو متغیر)

✓ ۸ خانه همسایه معادل است با تابعی که همیشه یک است

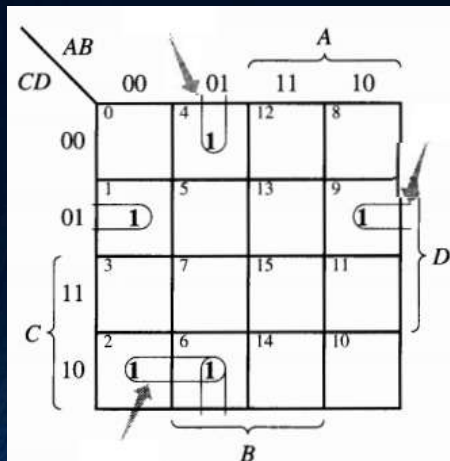
✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

❖ کارنوی ۴ متغیره:



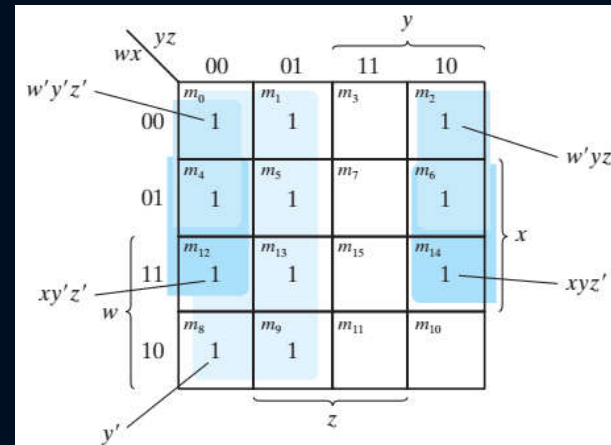
✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

$$f(A, B, C, D) = \sum m(1, 2, 4, 6, 9)$$



$$f(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{C}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{D}$$

$$F(w, x, y, z) = \sum (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$



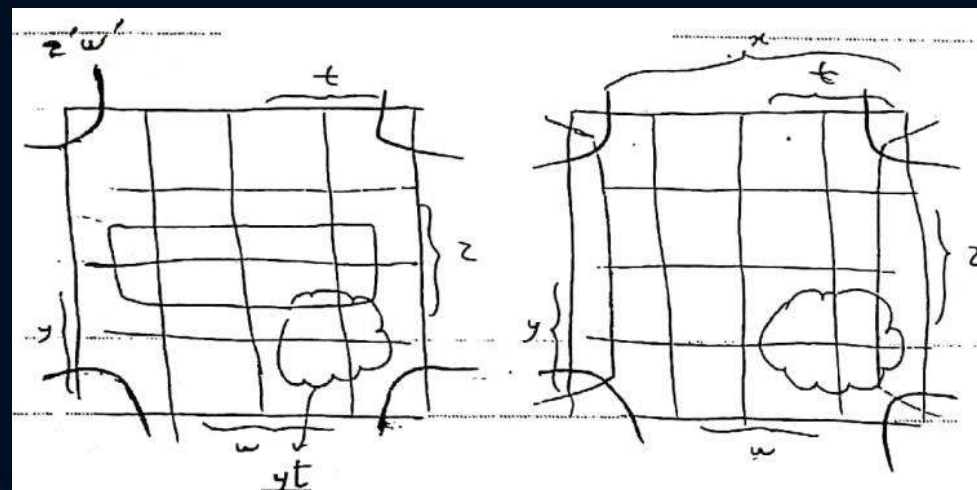
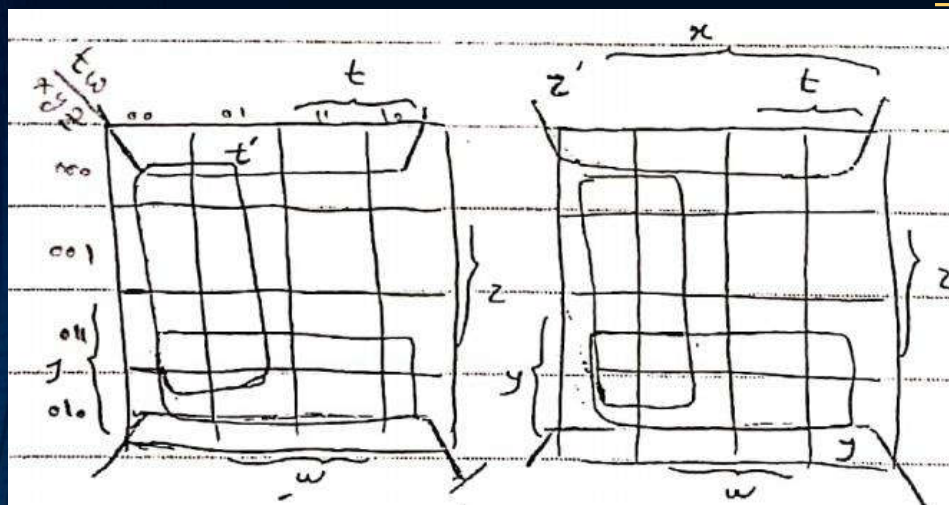
$$F = y' + w'z' + xz'$$

❖ در کارنوی ۴ متغیره:

- ✓ هر ۲ خانه همسایه معادل می شود با ۳ متغیر (حذف یک متغیر)
- ✓ هر ۴ خانه همسایه معادل می شود با ۲ متغیر (حذف دو متغیر)
- ✓ هر ۸ خانه همسایه معادل می شود با ۱ متغیر (حذف سه متغیر)

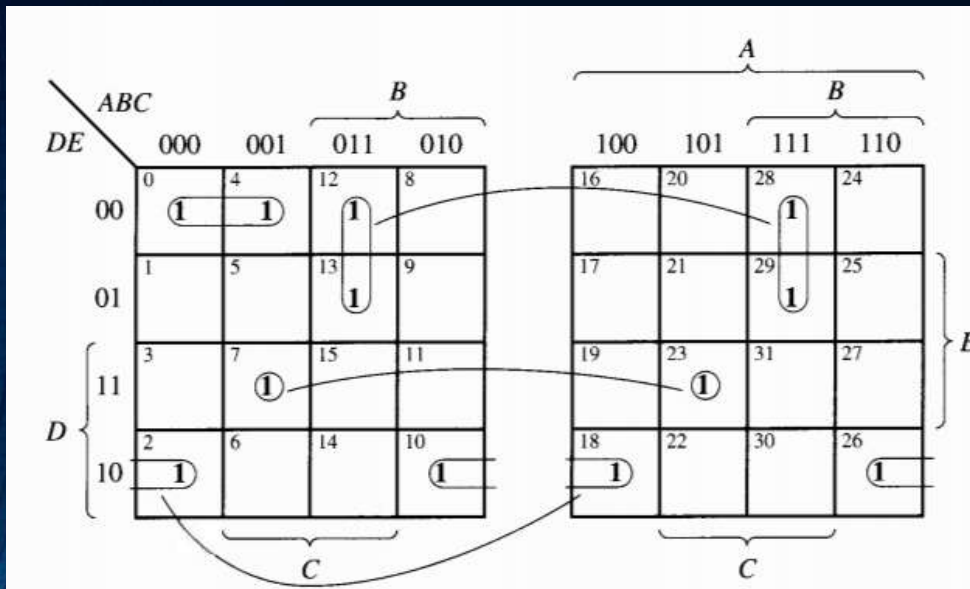
✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

❖ کارنوی ۵ متغیره:



✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

❖ کارنوی ۵ متغیره:



- ✓ هر ۲ خانه همسایه معادل می شود با ۴ متغیر (حذف یک متغیر)
- ✓ هر ۴ خانه همسایه معادل می شود با ۳ متغیر (حذف دو متغیر)
- ✓ هر ۸ خانه همسایه معادل می شود با ۲ متغیر (حذف سه متغیر)
- ✓ هر ۱۶ خانه همسایه معادل می شود با ۱ متغیر (حذف چهار متغیر)

✓ ساده سازی با جدول کارنو (K-Map)

AB \ C		A			
		00	01	11	10
C	0	0	1	1	0
	1	1	1	1	0

5 Minterms: $\{\bar{A}\bar{B}C, \bar{A}B\bar{C}, \bar{A}BC, AB\bar{C}, ABC\}$
 5 Groups of two minterms: $\{\bar{A}B, AB, \bar{A}C, B\bar{C}, BC\}$

❖ چند تعریف مهم:

✓ Implicant: یک جمله حاصلضربی است که می تواند برای پوشش دادن

جملات مینیمم یک تابع استفاده شود.

✓ Prime Implicant: بزرگترین دسته بندی که برای implicant ها می توان در نظر گرفت.

$B, \bar{A}C$

✓ Essential Prime Implicant: یک Prime Implicant است که حداقل یک minterm ی که

با هیچ Prime Implicant دیگری پوشش داده نشده را پوشش دهد.

$B, \bar{A}C$

✓ ساده سازی با جدول کارنو (K-Map)

❖ چند نکته مهم:

- ✓ بطور کلی هر خانه در یک جدول کارنو n متغیره، با n خانه بصورت منطقی همسایه است.
- ✓ همسایگی ها توان هایی از ۲ هستند. همچنین همسایگی 2^n خانه، n متغیر را حذف می کند.
- ✓ در ساده سازی بزرگترین همسایگی ممکن را در نظر می گیریم که باعث کاهش تعداد متغیرها می شود.
- ✓ به منظور پوشش دادن تمامی جملات مینیمم تا حد امکان کمترین دسته بندی ایجاد شود که باعث کاهش تعداد جملات حاصلضربی می شود.
- ✓ در ترکیب کردن خانه های یک جدول، همیشه با آن خانه هایی شروع می کنیم که برای آن ها تعداد کمتری همسایه وجود دارد (تنها ترین خانه در جدول).

✓ ساده سازی با جدول کارنو (K-Map)

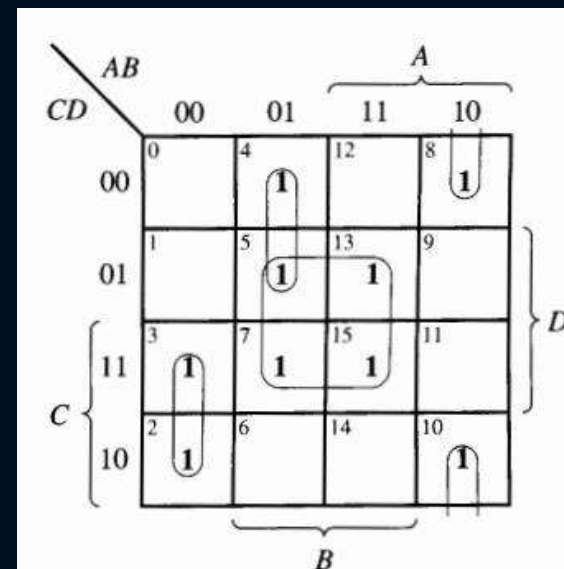
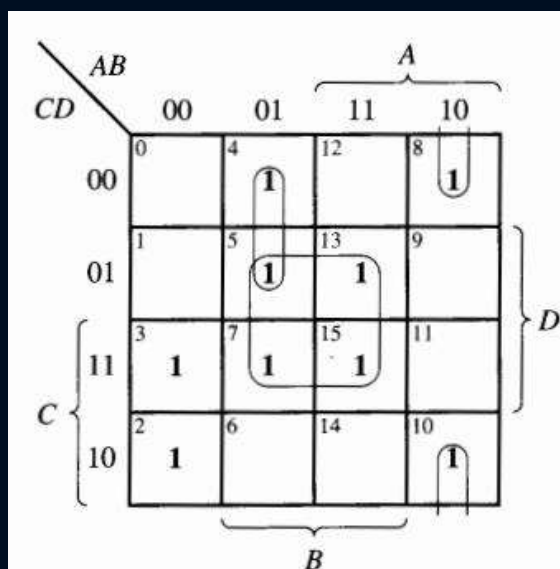
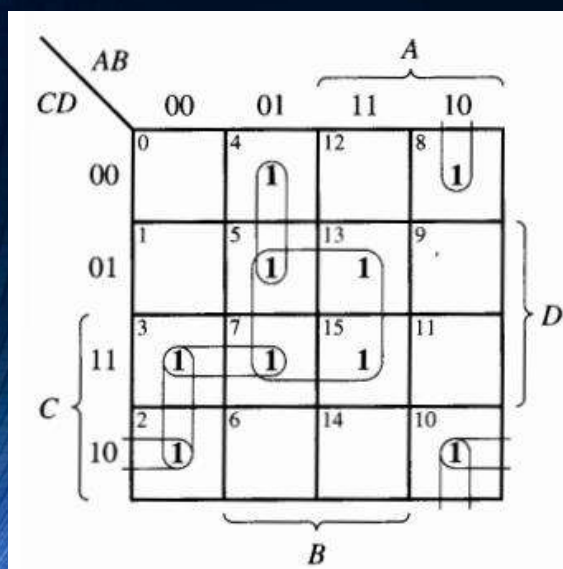
❖ الگوریتم برای استخراج فرم ساده شده SOP از جدول کارنو:

- (۱) تمامی PI ها را مشخص کرده و دورش دایره می کشیم.
- (۲) همه Essential PI ها را مشخص می کنیم.
- (۳) برای پوشش دادن minterm هایی که با essential پوشش داده نشده اند، کوچکترین PI های باقیمانده را انتخاب می کنیم.

✓ ساده سازی با جدول کارنو (K-Map)

$$f(A, B, C, D) = \sum m(2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 15)$$

❖ مثال: تابع روبرو را با جدول کارنو ساده کنید.

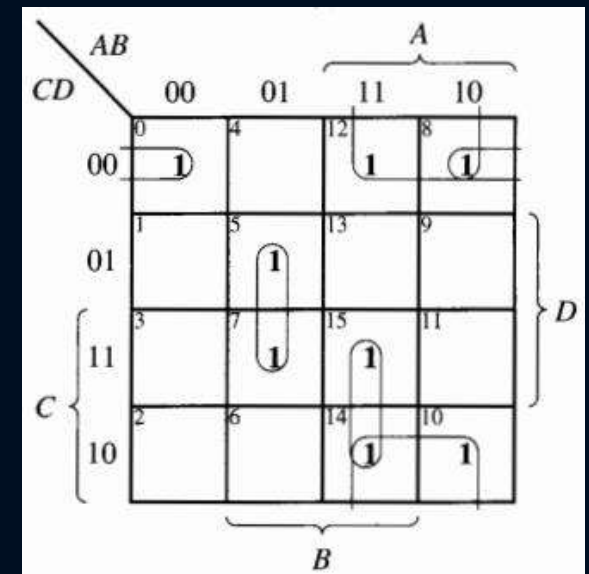
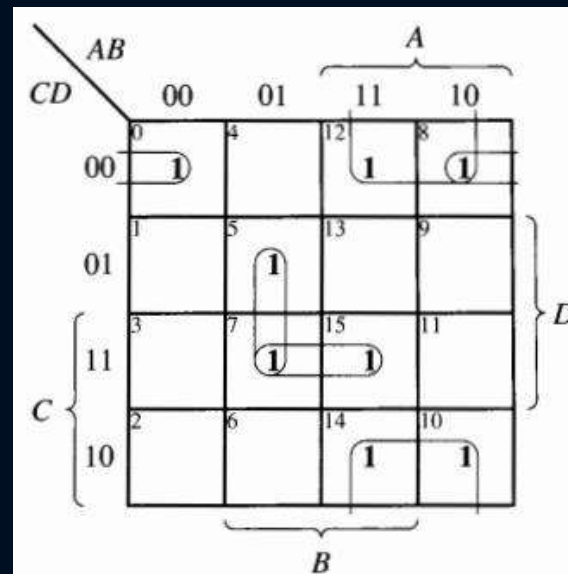
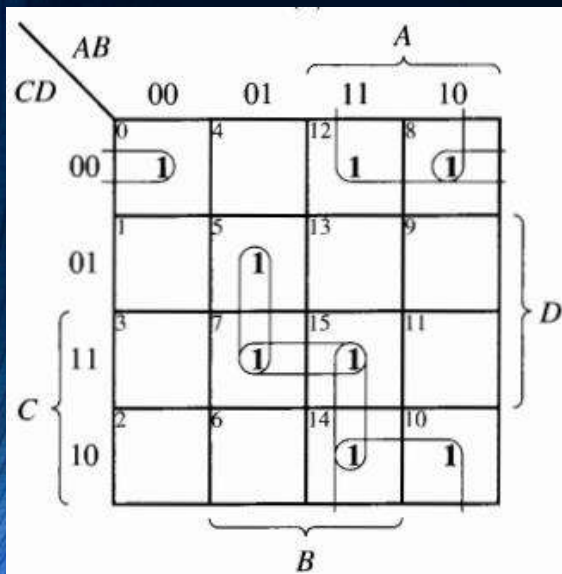


$$f(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + BD + A\bar{B}\bar{D}$$

✓ ساده سازی با جدول کارنو (K-Map)

$$f(A, B, C, D) = \sum m(0, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15)$$

❖ مثال: تابع روبرو را با جدول کارنو ساده کنید.



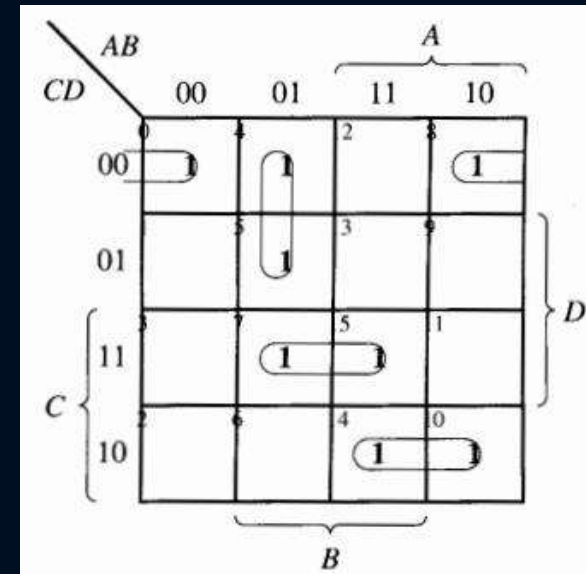
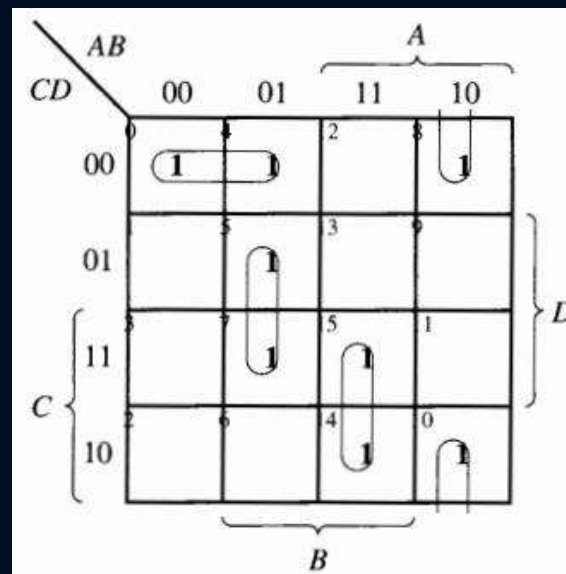
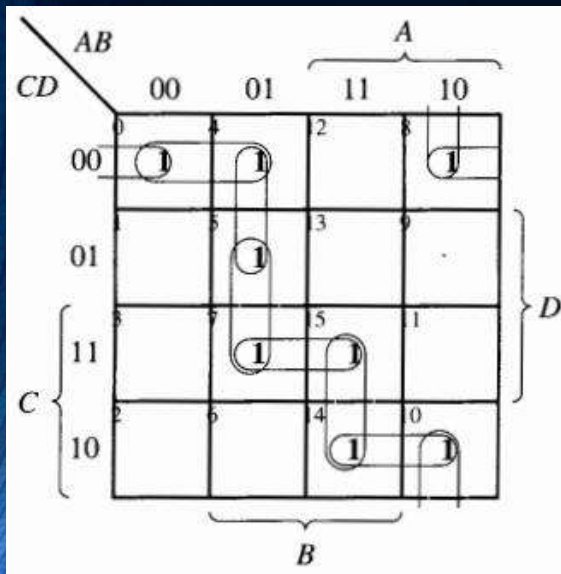
$$f(A, B, C, D) = \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BD + A\bar{D} + BCD$$

$$f(A, B, C, D) = \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BD + A\bar{D} + ABC$$

✓ ساده سازی با جدول کارنو (K-Map)

$$f(A, B, C, D) = \sum m(0, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 15)$$

❖ مثال: تابع روبرو را با جدول کارنو ساده کنید.



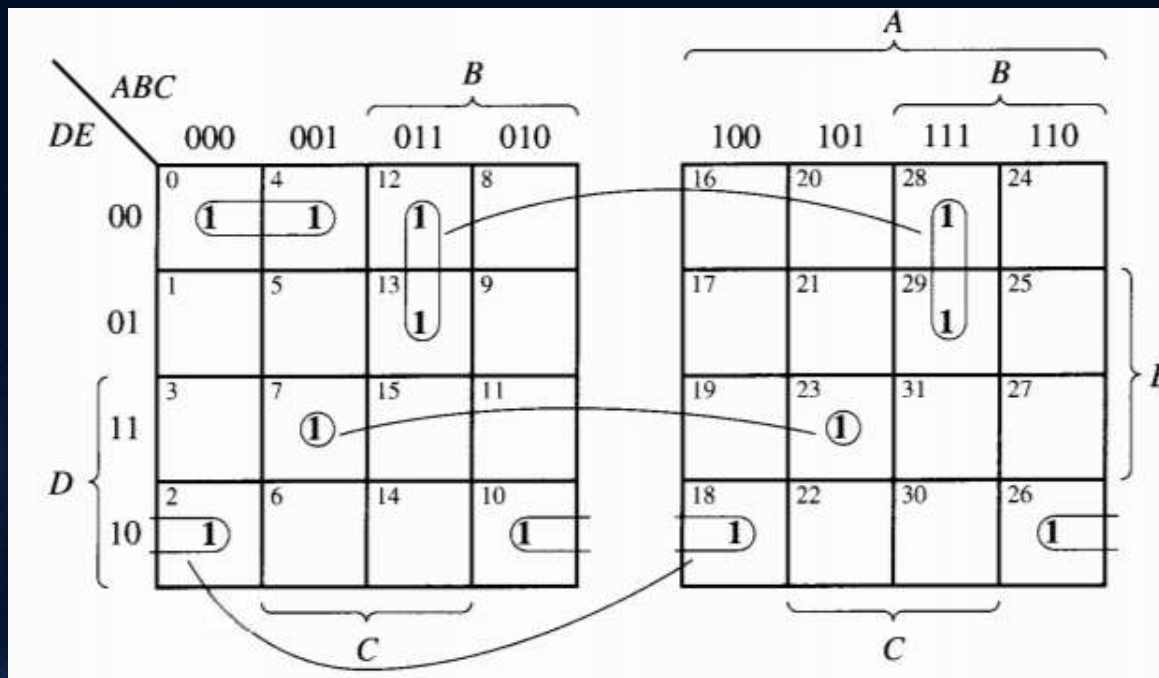
$$f(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BD + ABC + A\bar{B}\bar{D}$$

$$f(A, B, C, D) = \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C} + BCD + AC\bar{D}$$

✓ ساده سازی با جدول کارنو (K-Map)

$$f(A, B, C, D, E) = \sum m(0, 2, 4, 7, 10, 12, 13, 18, 23, 26, 28, 29)$$

❖ مثال: تابع روبرو را با جدول کارنو ساده کنید.



$$f(A, B, C, D, E) = \bar{A}\bar{B}\bar{D}\bar{E} + BC\bar{D} + \bar{B}CDE + \bar{C}D\bar{E}$$