حوری دهش ٩٨٢١٤١٣

س ١ ←

$$x(t) = \sum_{K=0}^{+\infty} A_K \cos(\omega_K t + \theta_K)$$

$a_1 = j \quad a_{-1} = -j \quad a_5 = a_{-5} = 2 \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{8}$

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} a_K e^{jK\omega_0 t} = 2e^{-5j\frac{2\pi}{8}t} + -je^{-j\frac{2\pi}{8}t} + je^{j\frac{2\pi}{8}t} + 2e^{5j\frac{2\pi}{8}t} = 4\cos\left(\frac{10\pi}{8}t\right) + \underbrace{j\underbrace{\left(e^{j\frac{2\pi}{8}t} - e^{-j\frac{2\pi}{8}t}\right)}_{2j\sin\left(\frac{2\pi}{8}t\right)}}_{-2\sin\left(\frac{2\pi}{8}t\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{8}t\right)}$$

$$\Rightarrow x(t) = 4\cos\left(\frac{10\pi}{8}t\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{8}t\right)$$

رابطه اویلر $\rightarrow \cos\omega_0 t = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$

$\rightarrow \sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$

DANIAL

س۲ ← $t>1$ یا $t<-1$

$$x(t)=\begin{cases}0 & \overbrace{|t|>1} \\ \dfrac{t+1}{2} & \underbrace{|t|\le 1}_{-1\le t\le 1}\end{cases} \quad , \quad T=2$$

الف)

$$\omega_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jk\pi t}dt=$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1}0\cdot e^{-jk\pi t}dt}_{0}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t+1}{2}e^{-jk\pi t}dt+\underbrace{\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}0\cdot e^{-jk\pi t}dt}_{0}=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)e^{-jk\pi t}dt=\underbrace{\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}t\,e^{-jk\pi t}dt}+$$

اینتگرال جزء به جزء

$$\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}e^{-jk\pi t}dt=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{-t}{jk\pi}e^{-jk\pi t}\right)_{-1}^{1}-\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{-1}{jk\pi}e^{-jk\pi t}dt}_{0}\right]$$

$$+\underbrace{\frac{1}{4}\times\frac{1}{-jk\pi}\left(e^{-jk\pi t}\right)_{-1}^{1}}_{0}=\frac{-1}{2jk\pi}\cos(k\pi)=\frac{j}{2k\pi}\cos(k\pi)$$

اینتگرال جزء به جزء → $t=u\rightarrow dt=du$

$$e^{-jk\pi t}dt=dv\rightarrow v=\frac{-1}{jk\pi}e^{-jk\pi t}$$

$$uv-\int v\,du$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t+1}{2}\, dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} t\, dt + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dt =$$

$$\frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}}_{0} + \frac{1}{4}\underbrace{(t)\Big|_{-1}^{1}}_{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & k = 0 \\[2ex] \dfrac{j}{2k\pi}\cos(k\pi) & k \neq 0 \end{cases}$$

ب) $x(t) = e^{-t} \quad -1 < t < 1 \quad , \quad T = 2$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{e^{-t}\, e^{-jk\pi t}}_{e^{t(-1-jk\pi)}}\, dt =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{-1-jk\pi}\left(e^{t(-1-jk\pi)}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

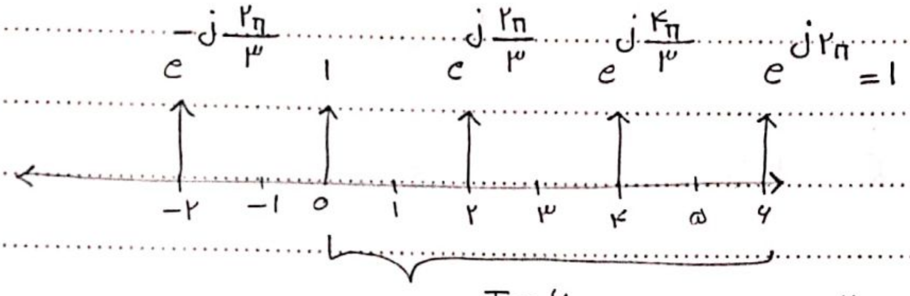
$$\frac{1}{-2-2jk\pi}\left(e^{-1-jk\pi} - e^{1+jk\pi}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-t}\, dt = \frac{-1}{2}\left(e^{-t}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{2}\left(e^{-1} - e^{1}\right)$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{-2-2jk\pi}\left(e^{-1-jk\pi} - e^{1+jk\pi}\right) & k \neq 0 \\[2ex] \dfrac{-1}{2}\left(e^{-1} - e^{1}\right) & k = 0 \end{cases}$$

ج) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2k) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\delta(t-2k-1)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2\pi}{3}n}\,\delta(t-2n)$$



$T = 6 \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{6}\int_6 x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt =$$

$$\frac{1}{6}\int_6 \left[e^{-j\frac{2\pi}{3}}\delta(t+2) + \delta(t) + e^{j\frac{2\pi}{3}}\delta(t-2) \right] e^{-jk\omega_0 t}\,dt =$$

$$\frac{1}{6}\left[e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{jk\frac{2\pi}{3}} + 1 + e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-jk\frac{2\pi}{3}} \right] =$$

$$\frac{1}{6}\left[1 + 2\cos\left(\frac{2\pi k}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

س ۳ ←

الف) $x(t) \in R \longrightarrow x(t) = x^*(t)$

$$\underbrace{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}}_{\mathrm{I}} = x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

$$-k \triangleq m \longrightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{-m}^* e^{jm\omega_0 t} \rightarrow \mathrm{II}$$

$$\xRightarrow{\mathrm{II}\,,\,\mathrm{I}} a_k = a_{-k}^*$$

چون $x(t)$ حقیقی است ← $\underbrace{\frac{1}{T}\int x(t)\,dt}_{\rightarrow a_0}$ هم حقیقی می‌شود پس a_0 حقیقی

است. از طرف دیگر هم طبق اثبات بالا $a_0 = a_0^*$ است پس a_0 باید حقیقی باشد.

ب) $x(t)$ حقیقی است $\longrightarrow x(t) = x^*(t) \xrightarrow{\text{طبق الف}} a_k = a_{-k}^*$ (I)

$x(t)$ زوج است $\longrightarrow x(t) = x(-t) \longrightarrow a_k = a_{-k}$ (II)

$$\xrightarrow{\mathrm{II}\,,\,\mathrm{I}} \underbrace{a_k = a_{-k}}\underbrace{= a_{-k}^*}$$

a_k زوج است ←   → a_k حقیقی است

$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \qquad x(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$

ج) $x(t)$ فرد است $\longrightarrow x(t) = -x(-t) \longrightarrow a_k = -a_{-k}$

$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \qquad x(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$

$x(t)$ حقیقی است $\longrightarrow x(t) = x^*(t) \longrightarrow a_k = a^*_{-k} \longrightarrow$

$$a_k^* = a_{-k} \xrightarrow{a_{-k} = -a_k} a_k^* = -a_k$$

a_k موهومی خالص و فرد است.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -x(-t)\,dt}_{\lambda = t + \frac{T}{2}} + \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} -x(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (-x(t) + x(t))\,dt = \boxed{0}$$

د) $even\{x(t)\} \stackrel{?}{=} Re\{a_k\}$

$$even\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2} = \frac{a_k + a_{-k}}{2} = \frac{2Re\{a_k\}}{2} = Re\{a_k\}$$

ه) $odd\{x(t)\} \stackrel{?}{=} jI_m\{a_k\}$

$$odd\{x(t)\} = \frac{x(t)-x(-t)}{2} = \frac{a_k - a_{-k}}{2} = \frac{a_k - a_k^*}{2} = \frac{2I_m\{a_k\}}{2} = jI_m\{a_k\}$$

$$x(t) \xleftrightarrow[T]{FS} a_k \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$ $\leftarrow$ س K

$$x(t) \xleftrightarrow[T' = 2T]{FS} b_k \qquad \omega_0' = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_0}{2}$$

$$b_k = \frac{1}{2T}\int_{2T} x(t)\, e^{-jk\omega_0' t}\, dt = \frac{1}{2T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{2}t}\, dt +$$

$$\underbrace{\frac{1}{2T}\int_T^{2T} x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{2}t}\, dt}_{} = *$$

$$\tau \triangleq t - T$$

$$d\tau = dt$$

$$[T, 2T] \longrightarrow [0, T]$$

$$* \ \frac{1}{2T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{2}t}\, dt + \frac{1}{2T}\int_0^T \underbrace{x(\tau + T)}_{} e^{-jk\frac{\omega_0}{2}(\tau+T)}\, d\tau$$

چون متناوب است می‌توانیم بنویسیم $x(\tau)$

$$\frac{1}{2T}\int_0^T x(\tau)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{2}\tau}\, \underbrace{e^{-jk\frac{\omega_0}{2}T}}_{\hookrightarrow e^{-jk\pi}}\, d\tau$$

$$\longrightarrow b_k = \frac{1}{2T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{2}t}\,[1 + (-1)^k]\, dt =$$

Subject: .... Data: .... Page: ....

$$= \begin{cases} 0 & K \text{ فرد} \\ \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-j\frac{K}{2}\omega_0 t}\, dt & K \text{ زوج} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & K \text{ فرد} \\ a_{\frac{K}{2}} & K \text{ زوج} \end{cases}$$

← س۵

الف) $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_K \quad , \quad T$

$x(t - \frac{T}{2}) = -x(t)$ *

$-x(t) \xleftrightarrow{FS} -a_K$

$x(t - \frac{T}{2}) \longleftrightarrow a_K e^{-jK\omega_0 t_0} = a_K e^{-jK\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{2}} = a_K e^{-jK\pi}$

$* \rightarrow -a_K = a_K e^{-jK\pi} \longrightarrow a_K e^{-jK\pi} + a_K = 0 \longrightarrow$

$a_K(e^{-jK\pi} + 1) = 0 \longrightarrow$ یا a_K باید صفر شود یا $e^{-jK\pi}$ باید منفی یک شود

$e^{-jK\pi} = \cos(-K\pi) + \underbrace{j\sin(-K\pi)}_{0}$

$\rightarrow \cos(-K\pi) = -1 \longrightarrow$ K باید فرد باشد

DANIAL

dp

Subject: .... Data: .... Page: ....

اگر k زوج بود $\longrightarrow a_k = 0$

ب) if : $k = 2m \,,\, m \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a_k = 0$

عکس یافته الف برقرار است $\longrightarrow a_k \left(e^{-jk\pi} + 1 \right) = 0 \longrightarrow$

$a_k e^{-jk\pi} = -a_k \longrightarrow x\left(t - \frac{T}{2}\right) = -x(t)$

س ۶ $\leftarrow$

الف) $z(t) = 3x(t) + y(t)$

$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \qquad T = 6$

$y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k \qquad T = 9$

$z(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k \qquad T = [6, 9] = 18$ ک.م.م

برای $x(t)$ با دوره‌ی تناوب ۱۸ داریم $\leftarrow$ $T' = 3T \longrightarrow \omega_0' = \frac{\omega_0}{3}$

$$a_k' = \frac{1}{3T}\int_{3T} x(t)\, e^{-jk\omega_0' t}\, dt = \frac{1}{3T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}t}\, dt \; +$$

$$\underbrace{\frac{1}{3T}\int_T^{2T} x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}t}\, dt}_{\tau = t - T} + \underbrace{\frac{1}{3T}\int_{2T}^{3T} x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}t}\, dt}_{\lambda = t - 2T} =$$

DANIAL

$$= \frac{1}{3T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}t}\, dt + \frac{1}{3T}\int_0^T \underbrace{x(\tau+T)}\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}(\tau+T)}\, d\tau +$$

متناوب پس $x(\tau)$ ←

$$\frac{1}{3T}\int_0^T \underbrace{x(\lambda+2T)}_{x(\lambda)}\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}(\lambda+2T)}\, d\lambda$$

متناوب پس $x(\lambda)$

$$a'_k = \frac{1}{3T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\frac{\omega_0}{3}t}\, dt \left[1 + e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + e^{-jk\frac{4\pi}{3}}\right] =$$

$$a_{\frac{k}{3}} \times \frac{1}{3}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi k}{3}\right) - j\sin\left(\frac{4\pi k}{3}\right)\right] = a_{\frac{k}{3}} \times \frac{1}{3}\left[1 + \underbrace{2\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)}\right]$$

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } k \text{ مضرب ۳ باشد} \\ -\frac{1}{2} & \text{// // // نباشد} \end{cases}$$

$$a'_k = \begin{cases} 0 & k \text{ مضرب ۳ نباشد} \\ a_{\frac{k}{3}} & \text{// // // باشد} \end{cases}$$

$\underbrace{T' = 2T}$

برای $y(t)$ با دوره تناوب ۱۸ داریم ←

$$b'_k = \begin{cases} 0 & k \text{ فرد} \\ b_{\frac{k}{2}} & k \text{ زوج} \end{cases}$$

→ طبق سؤال ۴ میشود ←

$$c_K = \begin{cases} 0 & K \neq ۲m \text{ and } K \neq ۳m \\ b_{\frac{K}{۲}} & K = ۲m \text{ and } K \neq ۳m \\ ۳a_{\frac{K}{۳}} & K \neq ۲m \text{ and } K = ۳m \\ ۳a_{\frac{K}{۳}} + b_{\frac{K}{۲}} & K = ۲m \text{ and } K = ۳m \end{cases}$$

$$c_K = ۳a'_K + b'_K$$

ب) $\sum_{-\infty}^{+\infty} x[K]\, \delta[t - ۲K]$

ج)
$$\begin{array}{ccccc} z(t) & = & x^*(t) & + & x(-t) \\ \Big\updownarrow \scriptstyle{FS} & & \Big\updownarrow \scriptstyle{FS} & & \Big\updownarrow \scriptstyle{FS} \\ c_k & & a^*_{-k} & & a_{-k} \end{array}$$

$$c_k = a^*_{-k} + a_{-k} = 2\,\mathrm{Re}\{a_{-k}\}$$

د)
$$\frac{d^2 x(t)}{dt}$$

س ۷ ←

معادلهٔ خط ← t $\qquad T = 2 \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-1}^{1} t\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt}$$

$t = u \longrightarrow dt = du$ $\qquad$ انتگرال جزء به جزء ←

$$e^{-jk\omega_0 t}\, dt = dv \longrightarrow v = \frac{-1}{jk\omega_0}\, e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\longrightarrow a_k = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(\frac{-t}{jk\omega_0}\, e^{-jk\omega_0 t}\right)\Bigg|_{-1}^{1}} - \int_{-1}^{1} \frac{-1}{jk\omega_0}\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt\right]$$

$$\frac{-1}{jk\pi}\, e^{-jk\pi} - \frac{1}{jk\pi}\, e^{jk\pi} = \frac{-1}{jk\pi}\,(2\cos(k\pi))$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{jk\pi}\, 2\cos(k\pi) + \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{+1}{jk\pi}\, e^{-jk\pi t}\, dt}\right] =$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{jk\pi} \times \frac{-1}{jk\pi}\, e^{-jk\pi t}\right)\Bigg|_{-1}^{1}}$$

$$\left(\frac{1}{k\pi}\right)^2 \underbrace{\left(\cancel{\cos(k\pi)} - j\cancel{\sin(k\pi)} - \cancel{\cos(k\pi)} - j\cancel{\sin(k\pi)}\right)}_{0}$$

$$\longrightarrow a_k = \frac{j}{k\pi}\cos(k\pi) \qquad k \neq 0$$

$$a_0 = \frac{۱}{۲} \int_{-۱}^{۱} t \, dt = \frac{۱}{۴} t \Big]_{-۱}^{۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$a_K = \begin{cases} \frac{۱}{۲} & K = ۰ \\ \frac{J}{K\pi} \cos(K\pi) & K \neq ۰ \end{cases}$$

س ۸ ←

الف) $T = 4 \longleftarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

ب) چون $x(t)$ حقیقی و فرد است پس ضرایب سری فوریه موهومی خالص و فرد می‌باشد و همین طور $a_0 = 0$ می‌شود

ج) به ازای $|k|>1$ یا $k<-1$ ← $a_k = 0$ می‌شود پس دنبال a_{-1} و a_1 و a_0 می‌گردیم طبق گام ب ← $a_0 = 0$ شد ← a_1 و a_{-1} فقط جواب دارند

$$x(t) = a_1 e^{j\omega_0 t} + a_{-1} e^{-j\omega_0 t}$$

د) از قضیه پارسوال می‌دانیم ← $\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_k |a_k|^2$

$$\hookrightarrow \frac{1}{4}\underbrace{\int_1^9 |x(t)|^2\,dt}_{2} = \sum_k |a_k|^2 \longrightarrow$$

$$|a_1|^2 + |\underbrace{a_{-1}}_{-a_1}|^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow a_1^2 + a_1^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow 2a_1^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow$$

چون فرد است

$$a_1^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow a_1 = \pm\frac{1}{2}$$

$a_1 = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{موهومی خالص}} a_1 = \frac{1}{2} j$ و $a_{-1} = \frac{-1}{2} j \longrightarrow$

$$x(t) = \frac{1}{2} j \, e^{j\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{2} j \, e^{-j\frac{\pi}{2}t}$$

$a_1 = \frac{-1}{2} \xrightarrow{\text{موهومی}} a_1 = \frac{-1}{2} j$ و $a_{-1} = \frac{1}{2} j \longrightarrow$

$$x'(t) = \frac{-1}{2} j \, e^{j\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{2} j \, e^{-j\frac{\pi}{2}t}$$