به نام خدا

نظریهٔ زبان‌ها و ماشین‌ها

آرش شفیعی

ماشین‌های حالات متناهی

مقدمه

- در این قسمت با یک ماشین ابتدایی به نام پذیرنده حالات متناهی [1] آشنا می‌شویم.
- این ماشین مجموعه‌ای متناهی از حالات داخلی دارد و حافظه جانبی ندارد (پس فقط حالتی که در آن قرار دارد را به یاد می‌آورد و حافظهٔ آن محدود است).
- این ماشین یک پذیرنده است، زیرا رشتهٔ ورودی را یا می‌پذیرد و یا رد می‌کند.
- ماشین‌های متناهی به دو دستهٔ قطعی و غیرقطعی تقسیم می‌شوند.

[1] finite state acceptor

مقدمه

- ابتدا با ماشین/پذیرندهٔ متناهی قطعی (دی‌اف‌ای) [1] آشنا می‌شویم.
- یک دی‌اف‌ای در هر حالت، با خواندن یک نماد فقط یک انتخاب برای تغییر حالت خود دارد.
- سپس با ماشین متناهی غیرقطعی (ان‌اف‌ای) [2] آشنا می‌شویم.
- با خواندن یک نماد در هر حالت، یک ان‌اف‌ای برای انتخاب حالت بعدی چندین گزینه دارد. این ماشین می‌تواند همهٔ حالت‌های بعدی ممکن را بررسی کند و یکی از حالات را انتخاب کند.
- دلیل اصلی استفاده از ان‌اف‌ای، سادگی آن در طراحی یک ماشین متناهی برای یک زبان است.
- از ماشین‌های حالات متناهی برای شناسایی و تعریف دسته‌ای از زبان‌ها به نام زبان‌های منظم استفاده خواهیم کرد.

[1] deterministic finite automaton/acceptor (dfa)
[2] nondeterministic finite automaton (nfa)

مقدمه

- اگر دو پذیرنده یک زبان واحد را شناسایی کنند می‌گوییم این دو پذیرنده معادل یکدیگرند.
- دستهٔ پذیرنده‌های قطعی و پذیرنده‌های غیرقطعی با یکدیگر معادل هستند، زیرا برای هر ان‌اف‌ای می‌توانیم یک دی‌اف‌ای معادل آن بیابیم.
- برای یک زبان منظم تعداد زیادی دی‌اف‌ای وجود دارد که معادل یکدیگرند. در اینصورت می‌توانیم دی‌اف‌ای کمینه (مینیمال) [1] را برای آن زبان بیابیم.

[1] minimal

ماشین متناهی قطعی

یک ماشین متناهی قطعی (دی‌اف‌ای):

- تعداد محدودی حالات داخلی دارد.
- یک رشتهٔ ورودی را با گرفتن یک نماد در واحد زمان پردازش می‌کند.
- با توجه به حالت داخلی فعلی و نماد ورودی به یک حالت دیگر گذار می‌کند.

ماشین متناهی قطعی

- یک پذیرندهٔ متناهی قطعی یا دی‌اف‌ای به صورت یک پنج‌تایی تعریف می‌شود: $M = (Q, \Sigma, \delta, q_\circ, F)$
- Q مجموعه‌ای متناهی از حالت‌های داخلی [1] است.
- Σ مجموعه‌ای متناهی از نمادها به نام الفبای ورودی [2] است.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ تابعی کامل به نام تابع گذار [3] است.
- $q_\circ \in Q$ حالت اولیه [4] است.
- $F \subseteq Q$ مجموعه‌ای از حالت‌های پایانی [5] است.

---
[1] internal states
[2] input alphabet
[3] transition function
[4] initial state
[5] final states

ماشین متناهی قطعی

یک دی‌اف‌ای بدین صورت عمل می‌کند:

- در نقطهٔ زمانی اولیه در حالت اولیهٔ q_0 قرار دارد و سازوکار ورودی خواندن رشتهٔ ورودی را از اولین نماد (از سمت چپ) رشتهٔ ورودی آغاز می‌کند.
- در هر حرکت ماشین، یک نماد از ورودی خوانده می‌شود، و سپس سازوکار ورودی یک سلول به سمت راست حرکت می‌کند.
- سازوکار ورودی فقط از چپ به راست حرکت می‌کند و فقط یک نماد در هر واحد زمان (در هر گام یا لحظه) از یک سلول خوانده می‌شود.
- گذار از یک حالت به حالت دیگر توسط تابع دلتا تعیین می‌شود، مثلا $\delta(q_0, a) = q_1$ بدین معنی که با خواندن نماد a در صورتی که ماشین در حالت q_0 باشد، به حالت q_1 می‌رود.
- بعد از خواندن پایان رشته، اگر ماشین در یکی از حالت‌های پایانی باشد، رشته پذیرش می‌شود، در غیراینصورت رد می‌شود.

ماشین متناهی قطعی

- برای نمایش یک دی‌اف‌ای از یک گراف گذار [1] استفاده می‌کنیم.
- رأس‌ها حالت‌ها و یال‌ها توابع گذار را نمایش می‌دهند. برچسب روی یک یال نمادی را نشان می‌دهد که توسط آن، ماشین از یک حالت به حالت دیگر گذار می‌کند.
- حالت اولیه با یک خط ورودی و حالت‌های پایانی با دو دایره مشخص می‌شوند.

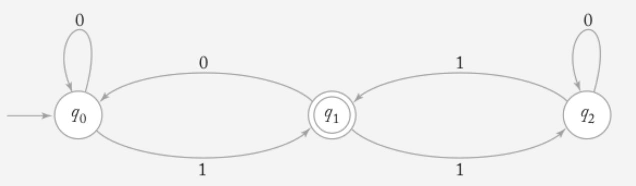
[1] transition graph

ماشین متناهی قطعی

- پس ماشین M با گراف G_M نشان داده می‌شود، به طوری که گراف $|Q|$ حالت دارد و نام هر حالت $q_i \in Q$ است.
- به ازای هر تابع گذار $\delta(q_i, a) = q_j$ گراف یالی از q_i به q_j با برچسب a دارد.
- رأس q_0 رأس آغازی و رأس‌های $q_f \in F$ رأس‌های پایانی نام دارند.

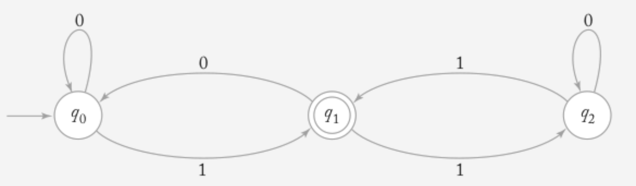
ماشین متناهی قطعی

- گراف زیر دی‌اف‌ای $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$ را نشان می‌دهد به طوری که :
- $\delta(q_0, 0) = q_0 \quad , \quad \delta(q_0, 1) = q_1 \quad , \quad \delta(q_1, 0) = q_0 \quad , \quad \delta(q_1, 1) = q_2 \quad , \quad \cdots$
- این ماشین چه رشته‌هایی را می‌پذیرد؟



ماشین متناهی قطعی

- این ماشین رشته‌هایی را می‌پذیرد که تعداد یک‌های پی‌درپی در پایان آن فرد باشد.
- $L = \{w۱^{(۲n+۱)} : w \in \{۰, ۱\}^*, n \geq ۰\}$



ماشین متناهی قطعی

- همچنین می‌توانیم یک تابع گذار تعمیم‌یافته بدین صورت تعریف کنیم: $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$
- در اینصورت دومین پارامتر تابع δ^* یک رشته است، به طوری که اگر $\delta(q_0, a) = q_1$ و $\delta(q_1, b) = q_2$ آنگاه $\delta^*(q_0, ab) = q_2$
- می‌توانیم به صورت بازگشتی تعریف کنیم: $\delta^*(q, \lambda) = q \quad , \quad \delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a)$ به طوری که $q \in Q$ و $w \in \Sigma^*$ و $a \in \Sigma$

ماشین متناهی قطعی و زبان‌ها

- زبانی که توسط ماشین $M = (Q, \Sigma, \delta, q_\circ, F)$ پذیرفته می‌شود، مجموعهٔ همهٔ رشته‌ها است بر روی Σ که توسط ماشین M پذیرفته می‌شوند:
- $L(M) = \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_\circ, w) \in F\}$
- توجه کنید که δ و δ^* توابع کامل هستند، یعنی همیشه به ازای یک ورودی تنها یک خروجی برای تابع تعریف شده است. قطعیت در یک ماشین قطعی به همین دلیل است.
- به ازای هر رشتهٔ ورودی، ماشین یا رشته را قبول می‌کند و یا رد می‌کند.
- رشته‌ای که رد می‌شود در یک حالت غیر پایانی خاتمه می‌یابد و در زبان متمم $L(M)$ قرار دارد:
- $\overline{L(M)} = \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_\circ, w) \notin F\}$

ماشین متناهی قطعی و زبان‌ها

- ماشین زیر چه زبانی را می‌پذیرد؟

ماشین متناهی قطعی و زبان‌ها

- ماشین زیر چه زبانی را پذیرش می‌کند؟
- $L = \{a^n b : n \geq ۰\}$
- در اینجا حالت $q_۲$ حالت تله [1] (دام) نامید می‌شود.

[1] trap state

ماشین متناهی قطعی و زبان‌ها

- تابع گذار می‌تواند همچنین به صورت یک جدول نشان داده شود.
- در اینجا نام هر سطر حالت فعلی و نام هر ستون نماد خوانده شده از ورودی است.
- خانه $c_{i,j}$ از جدول، حالتی را نشان می‌دهد که ماشین بعد از مشاهده نماد ورودی j در صورتی که در حالت i باشد، به آن می‌رود.

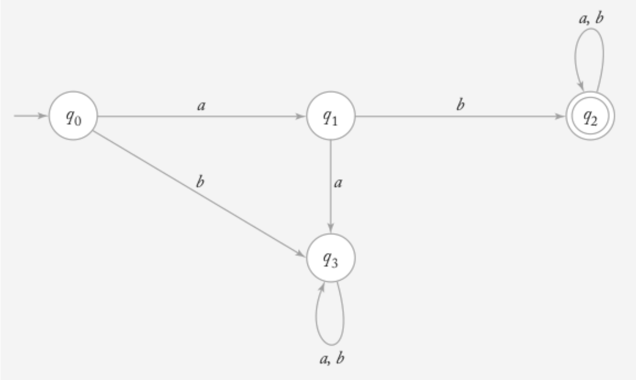
	a	b
$q_۰$	$q_۰$	$q_۱$
$q_۱$	$q_۲$	$q_۲$
$q_۲$	$q_۲$	$q_۲$

ماشین متناهی قطعی و زبان‌ها

- یک دی‌اف‌ای طراحی کنید که زبانی را شناسایی کند که بر روی الفبای $\Sigma = \{a, b\}$ تعریف شده است و پیشوند همهٔ جمله‌های آن ab باشد.

ماشین متناهی قطعی و زبان‌ها

- یک دی‌اف‌ای طراحی کنید که زبانی را شناسایی کند که بر روی الفبای $\Sigma = \{a, b\}$ تعریف شده است و پیشوند همهٔ جمله‌های آن ab باشد.

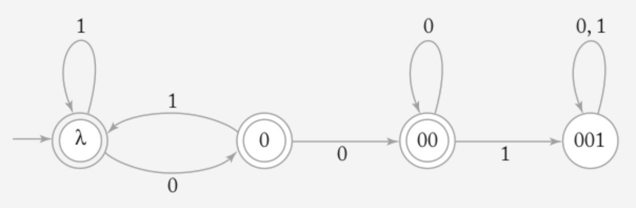


ماشین متناهی قطعی و زبان‌ها

– یک دی‌اف‌ای طراحی کنید که زبانی را شناسایی کند که در آن هیچ جمله‌ای شامل زیررشتهٔ ۰۰۱ نباشد.

ماشین متناهی قطعی و زبان‌ها

- یک دی‌اف‌ای طراحی کنید که زبانی را شناسایی کند که در آن هیچ جمله‌ای شامل زیررشتهٔ ۰۰۱ نباشد.



زبان‌های منظم

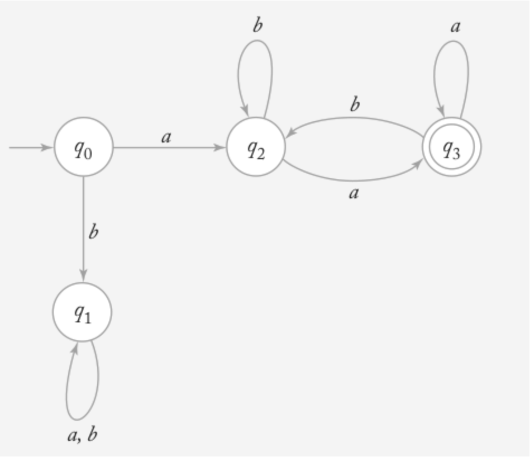
- ماشین متناهی قطعی خانواده‌ای از زبان‌ها را شناسایی می‌کند که به آنها زبان‌های منظم می‌گوییم.
- بنابراین زبان L منظم نامیده می‌شود اگر و تنها اگر یک پذیرندهٔ متناهی قطعی M وجود داشته باشد به طوری که $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathrm{M})$.

زبان‌های منظم

- نشان دهید زبان $L = \{awa : w \in \{a, b\}^*\}$ منظم است.

زبان‌های منظم

- نشان دهید زبان $L = \{awa : w \in \{a, b\}^*\}$ منظم است.

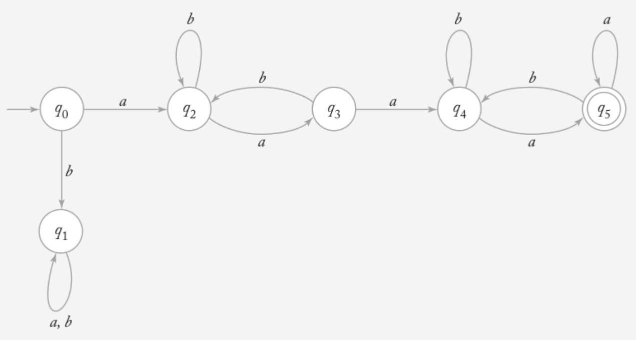


زبان‌های منظم

- نشان دهید زبان L^2 منظم است جایی که $L = \{awa : w \in \{a, b\}^*\}$.

زبان‌های منظم

- نشان دهید زبان $L^۲$ منظم است به طوری که $L = \{awa : w \in \{a, b\}^*\}$.
- $L^۲ = \{aw_۱aaw_۲a : w \in \{a, b\}^*\}$



ماشین متناهی غیرقطعی

- در ماشین متناهی قطعی، در هر حالت به ازای هر نماد فقط یک امکان برای گذار وجود دارد، به عبارت دیگر تابع δ یک تابع کامل است.
- در ماشین غیرقطعی به ازای یک نماد چندین گذار ممکن وجود دارد.

ماشین متناهی غیرقطعی

- یک ماشین یا پذیرندهٔ متناهی غیرقطعی (اناف‌ای) [1] با یک پنج‌تایی تعریف می‌شود:
$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- به طوری که Q و Σ و q_0 و F مانند تعریف ماشین متناهی قطعی تعریف می‌شوند، اما
$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \rightarrow 2^Q$

- اناف‌ای و دی‌اف‌ای چند تفاوت عمده دارند : (۱) برد تابع دلتا عضوی است از مجموعه‌توانی حالت‌ها و (۲) ماشین توسط رشتهٔ تهی یا به عبارتی بدون خواندن ورودی نیز می‌تواند گذار انجام دهد، و (۳) برد تابع می‌تواند یک مجموعهٔ تهی باشد، بنابراین به ازای یک پیکربندی ممکن است گذاری تعریف نشده باشد.

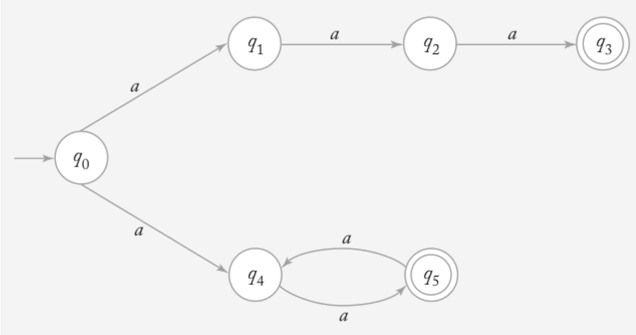
[1] nondeterministic finite acceptor/automata (nfa)

ماشین متناهی غیرقطعی

- گراف ان‌اف‌ای شبیه گراف دی‌اف‌ای است با این تفاوت که (۱) یال (q_i, q_j) با برچسب a موجود است اگر q_j عضو مجموعهٔ $\delta(q_i, a)$ باشد، و (۲) بر روی یال‌ها ممکن است برچسب λ باشد.
- یک رشته توسط ماشین پذیرفته می‌شود اگر حرکت‌هایی وجود داشته باشند که توسط آنها ماشین به یک حالت نهایی برسد، در غیر اینصورت رشته رد می‌شود.
- پس در صورتی که ماشینی رشته‌ای را بپذیرد، باید حرکت‌ها را برای رسیدن به حالت نهایی حدس زد.

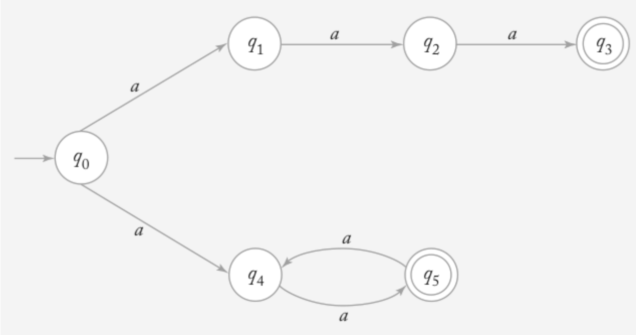
ماشین متناهی غیرقطعی

- ماشین زیر یک ماشین متناهی غیرقطعی است. این ماشین چه زبانی را می پذیرد؟



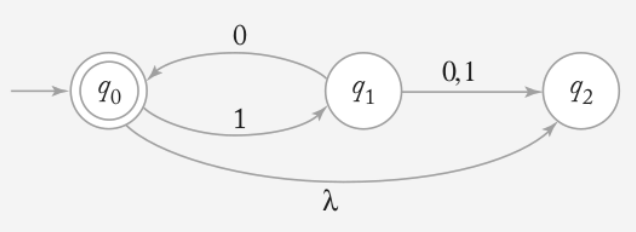
ماشین متناهی غیرقطعی

- این ماشین چه زبانی را می پذیرد؟ $L = \{a^{۳}\} \cup \{a^{۲n} : n \geq ۱\}$



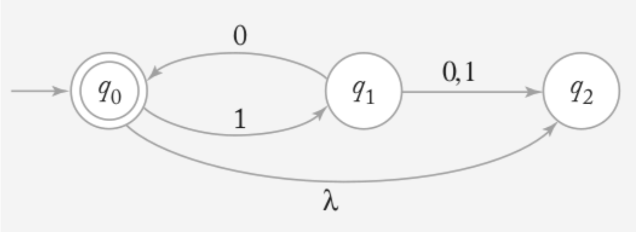
ماشین متناهی غیرقطعی

- ماشین زیر یک ماشین متناهی غیرقطعی است به دلیل (۱) وجود گذار با رشته تهی، (۲) بدون تابع گذار برای حالت q_2 و (۳) وجود دو گذار با نماد صفر از q_1.
- این ماشین چه رشته‌هایی را می‌پذیرد؟ آیا رشته ۱۰۱۰۰ را می‌پذیرد؟



ماشین متناهی غیرقطعی

- این ماشین چه رشته‌هایی را می‌پذیرد؟
- $\mathrm{L} = \{(۱۰)^{\mathrm{n}} : \mathrm{n} \geq ۰\} = \{\lambda, ۱۰, ۱۰۱۰, ۱۰۱۰۱۰, \cdots\}$

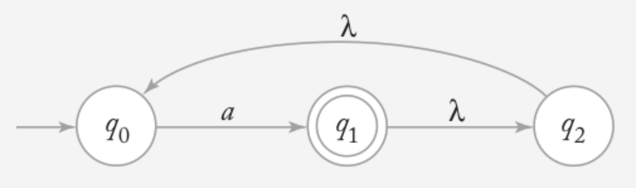


ماشین متناهی غیرقطعی

- برای یک ان‌اف‌ای، یک تابع گذار تعمیم یافته، به صورت $\delta^*(q_i, w)$ مجموعه‌ای است که شامل q_j می‌شود اگر و فقط اگر گشتی بر روی گراف گذار آن از q_i به q_j با خواندن رشتهٔ w وجود داشته باشد، به طوری که $q_i, q_j \in Q$ و $w \in \Sigma^*$.

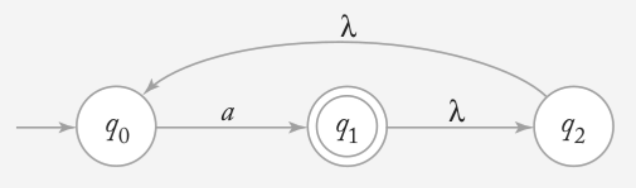
ماشین متناهی غیرقطعی

- برای ان‌اف‌ای زیر مقادیر $\delta^*(q_1, a)$، $\delta^*(q_2, \lambda)$، و $\delta^*(q_2, aa)$ را بیابید.



ماشین متناهی غیرقطعی

- برای ان‌اف‌ای زیر مقادیر $\delta^*(q_1, a)$، $\delta^*(q_2, \lambda)$، و $\delta^*(q_2, aa)$ را بیابید.
- $\delta^*(q_1, a) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\delta^*(q_2, \lambda) = \{q_0, q_2\}$
- $\delta^*(q_2, aa) = \{q_0, q_1, q_2\}$



ماشین متناهی غیرقطعی

- در یک ان‌اف‌ای، طول یک گشت [1] بر روی گراف برای پیدا کردن $\delta^*(q_i, w)$ حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟
- از آنجایی که گذارهای λ طول گشت را اضافه می‌کنند، باید برای طول گشت مقداری حداکثری پیدا کنیم، در غیر اینصورت الگوریتم جستجو نمی‌داند در چه نقطه‌ای متوقف شود.
- اگر بین دو رأس v_i و v_j گشتی با خواندن رشتهٔ w وجود داشته باشد، آنگاه طول این گشت در گراف گذار نمی‌تواند بزرگ‌تر از $\Lambda + (\Lambda + ۱)|w|$ باشد، به طوری که Λ تعداد یال‌ها با برچسب تهی در گراف است (با فرض اینکه هیچ دوری از یال‌های تهی به طور پی‌درپی در این گشت تکرار نمی‌شود).
- این رابطه را ثابت کنید.

[1] walk

ماشین متناهی غیرقطعی

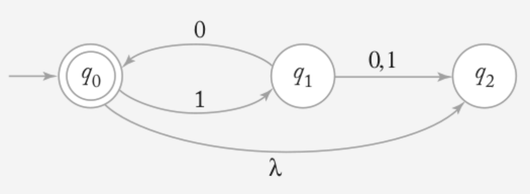
- اگر بین دو رأس v_i و v_j گشتی با خواندن رشتهٔ w وجود داشته باشد، آنگاه طول این گشت در گراف گذار نمی‌تواند بزرگ‌تر از $|w|(\Lambda + ۱) + \Lambda$ باشد، به طوری که Λ تعداد یال‌ها با برچسب تهی در گراف است (با فرض اینکه هیچ دوری از یال‌های تهی به طور پی‌درپی در این گشت تکرار نمی‌شود).
- یک گشت برای رشتهٔ w به طول n به این شکل است: $e_۱w_۱e_۲w_۲\cdots e_nw_ne_{n+۱}$
- به طوری که e_i یک دور است که روی همهٔ یال‌های آن برچسب تهی است و w_i یکی از نمادهای رشتهٔ w است.
- طول این گشت حداکثر برابر است با : $n + (n + ۱)\Lambda$
- $n + (n + ۱)\Lambda = \Lambda + (۱ + \Lambda)n$ به طوری که $n = |w|$

ماشین متناهی غیرقطعی

- زبان L که توسط ماشین متناهی غیرقطعی $M = (Q, \Sigma, \delta, q_{\circ}, F)$ پذیرفته می‌شود، مجموعه‌ای است از رشته‌ها که به صورت زیر تعریف می‌شود:
- $L(M) = \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_{\circ}, w) \cap F \neq \emptyset\}$
- به عبارت دیگر، زبانی که توسط یک ماشین متناهی غیرقطعی پذیرفته می‌شود، مجموعه ای از رشته‌های w است به طوری که گشتی با خواندن رشتهٔ w بر روی گراف گذار با شروع از رأس آغازی و پایان در یکی از رأس‌های پایانی وجود داشته باشد.

ماشین متناهی غیرقطعی

- اگر در یک ان‌اف‌ای، داشته باشیم $\delta^*(q_0, w) = \emptyset$ آنگاه می‌گوییم با دریافت رشتهٔ w ، ماشین به پیکربندی مرده [1] می‌رسد یا به بن‌بست برمی‌خورد.
- در ان‌اف‌ای زیر، با دریافت رشتهٔ ۰۰۱۰۱ یا ۰۱۱ ماشین به بن‌بست برمی‌خورد.
- وقتی ماشین به بن‌بست برمی‌خورد، رشته را رد می‌کند.



[1] dead configuration

ماشین متناهی غیرقطعی

- دلیل مطالعهٔ عدم قطعیت چیست؟

- عدم قطعیت در بسیاری از مسائل محاسباتی کاربرد دارد. به طور مثال در یک بازی (مانند بازی شطرنج) بررسی تمام حالات ممکن امکان پذیر نیست، بنابراین پس از بررسی تعداد زیادی از حالات، یکی از گزینه‌های پیش رو انتخاب می‌شود و بازی ادامه پیدا می‌کند تا در آینده نتایج انتخاب مشخص‌تر شود.

- گاهی طراحی یک ماشین قطعی برای یک زبان ساده نیست، ولی طراحی ماشین غیرقطعی به راحتی امکان پذیر است. برای مثال برای طراحی یک ماشین برای زبانی که اجتماع دو زبان باشد، می‌توان ماشینی طراحی کرد که شروع آن به شروع ماشین هر دو زبان متصل شود.

- در آینده نشان می‌دهیم که ماشین‌های قطعی و غیرقطعی معادل یکدیگرند، بنابراین هر دو یک دسته از زبان‌ها را شناسایی می‌کنند. پس اگر ماشینی متناهی غیرقطعی برای یک زبان پیدا کنیم، ماشین متناهی قطعی آن نیز وجود خواهد داشت.

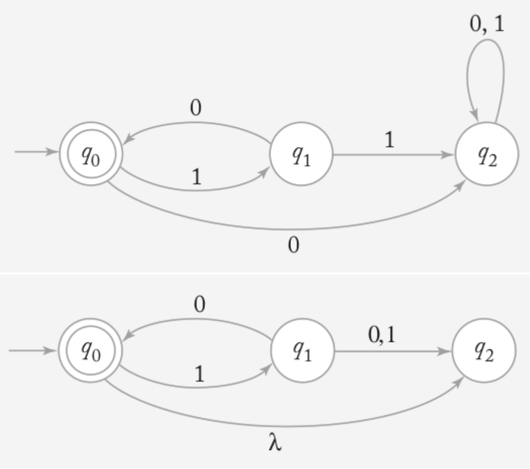
هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

- دو ماشین متناهی M_1 و M_2 هم‌ارز [1] هستند، اگر $L(M_1) = L(M_2)$
- پس دو ماشین هم‌ارز هستند اگر هر دو یک زبان را شناسایی کنند.

[1] equivalent

هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

- آیا دو ماشین متناهی قطعی و غیر قطعی زیر هم‌ارزند؟



هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

- وقتی دو رده (طبقه یا کلاس) [1] از ماشین‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم، سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا یک رده از ماشین‌ها از ردهٔ دیگر قدرتمندتر است یا خیر.
- یک ماشین قدرتمندتر نسبت به ماشین دیگر، زبانی را می‌پذیرد که ابرمجموعهٔ زبان آن ماشین دیگر است.
- از آنجایی که دی‌اف‌ای نوع محدود شده‌ای از ان‌اف‌ای است، زبانی که با یک دی‌اف‌ای پذیرفته می‌شود، توسط یک ان‌اف‌ای نیز پذیرفته می‌شود.
- اما آیا برای زبانی که توسط یک ان‌اف‌ای شناسایی می‌شود، می‌توان یک دی‌اف‌ای طراحی کرد؟

[1] class

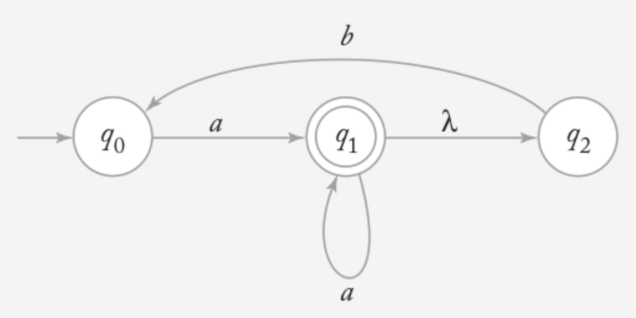
هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

- دو ماشین متناهی قطعی و غیرقطعی هم‌ارزند، و بنابراین ماشین غیرقطعی از ماشین قطعی قدرتمندتر نیست.
- این گزاره را با استفاده از برهان از طریق ساخت [1] (برهان با ساخت) اثبات می‌کنیم.
- روشی ارائه می‌کنیم که با آن هر ان‌اف‌ای را می‌توان به یک دی‌اف‌ای تبدیل کرد.
- به طور خلاصه، در یک ان‌اف‌ای، از هر حالت با خواندن یک نماد، به مجموعه‌ای از حالت‌ها می‌رویم. برای پیدا کردن دی‌اف‌ای معادل آن، هر یک از مجموعه حالت‌های ان‌اف‌ای باید یک حالت متمایز در دی‌اف‌ای باشد.
- پس معادل دی‌اف‌ای یک ان‌اف‌ای با $|Q|$ حالت، حداکثر $۲^{|Q|}$ حالت دارد.

[1] proof by construction (constructive proof)

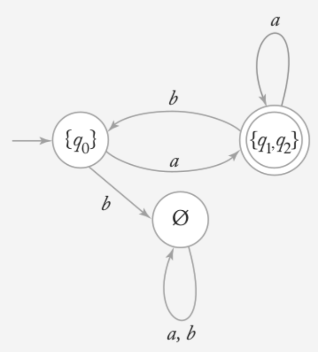
هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

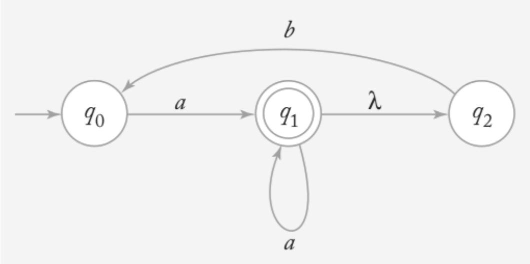
- ماشین متناهی قطعی معادل (هم‌ارز) ماشین متناهی غیرقطعی زیر را پیدا کنید.



هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

- ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی زیر معادل (هم‌ارز) یکدیگرند.





هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

- قضیه: فرض کنید L زبانی باشد که توسط پذیرندهٔ متناهی غیرقطعی $M_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ پذیرفته می‌شود. در اینصورت یک پذیرندهٔ متناهی قطعی $M_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ وجود دارد، به طوری که $L = L(M_D)$

هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

- قضیه: فرض کنید L زبانی باشد که توسط پذیرندهٔ متناهی غیرقطعی $M_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_\circ, F_N)$ پذیرفته می‌شود. در اینصورت یک پذیرندهٔ متناهی قطعی $M_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_\circ\}, F_D)$ وجود دارد، به طوری که $L = L(M_D)$

- برای اثبات این قضیه از برهان با ساخت استفاده می‌کنیم.

- به ازای ماشین داده شدهٔ M_N از الگوریتم (روند) [1] تبدیل ان‌اف‌ای به دی‌اف‌ای استفاده می‌کنیم تا گراف گذار G_D را برای ماشین M_D بسازیم.

[1] procedure

هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

الگوریتم تبدیل ماشین غیرقطعی به ماشین قطعی:

۱. یک گراف G_D با رأس $\{q_0\}$ به عنوان رأس آغازی بسازید.

۲. گام‌های زیر را تکرار کنید تا جایی که گراف گذار ماشین قطعی کامل شود:

- یکی از رأس‌های $\{q_i, q_j, \cdots, q_k\}$ از گراف G_D را که هیچ یال خروجی برای یک نماد $a \in \Sigma$ ندارد را انتخاب کنید. همهٔ مقادیر $\delta_N^*(q_i, a), \delta_N^*(q_j, a), \cdots, \delta_N^*(q_k, a)$ را محاسبه کنید.
- اگر $\delta_N^*(q_i, a) \cup \delta_N^*(q_j, a) \cup \cdots \cup \delta_N^*(q_k, a) = \{q_l, q_m, \cdots, q_n\}$ باشد، رأسی با نام $\{q_l, q_m, \cdots, q_n\}$ برای گراف G_D بسازید، البته اگر این رأس موجود نیست.
- یالی با برچسب a از رأس $\{q_i, q_j, \cdots, q_k\}$ به رأس $\{q_l, q_m, \cdots, q_n\}$ در گراف G_D اضافه کنید.

۳. هر رأسی از گراف G_D که نام آن شامل $q_f \in F_N$ می‌شود را به عنوان یک رأس پایانی انتخاب کنید.

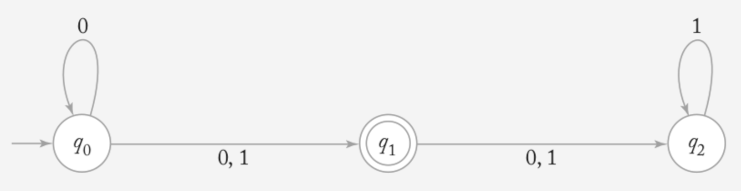
۴. اگر ماشین M_N رشتهٔ λ را می‌پذیرد، رأس $\{q_0\}$ در گراف G_D را به عنوان یک رأس پایانی انتخاب کنید.

هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

- این الگوریتم پایان می‌پذیرد و گرفتار حلقهٔ بی‌پایان نمی‌شود، زیرا گراف G_D حداکثر $|\Sigma|2^{|Q_N|}$ یال دارد، پس حلقه در نهایت متوقف می‌شود.
- برای اثبات درستی الگوریتم تبدیل ان‌اف‌ای به دی‌اف‌ای، می‌توان از برهان استقرایی (استقرا بر روی طول رشتهٔ ورودی) استفاده کرد.
- اگر برای رشتهٔ v با طول n ، وجود یک گشت از q_0 به q_i بر روی گراف G_N بر وجود گشتی بر روی گراف G_D از رأس $\{q_0\}$ به رأس $\{\cdots q_i \cdots\} = Q_i$ دلالت داشته باشد، آنگاه برای رشتهٔ $w = va$ با استفاده از الگوریتم تبدیل، وجود گشتی از q_0 به q_l به وجود یک گشتی از $\{q_0\}$ به یک رأس $\{\cdots q_l \cdots\} = Q_l$ دلالت خواهد داشت.

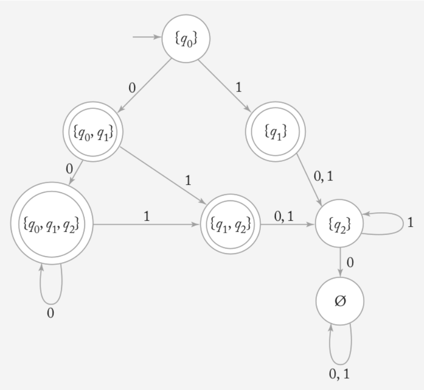
هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

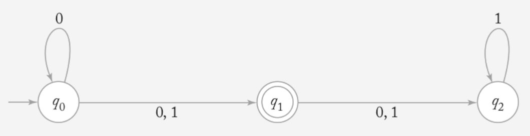
- یک دی‌اف‌ای هم‌ارز ان‌اف‌ای زیر طراحی کنید.



هم‌ارزی ماشین‌های متناهی قطعی و غیرقطعی

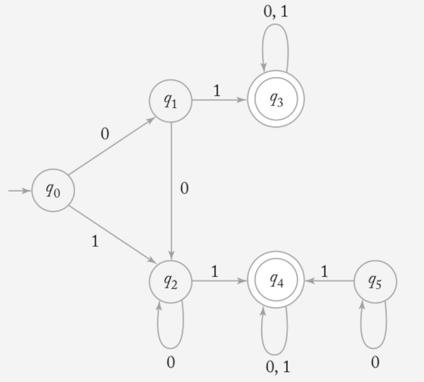
- ماشین‌های قطعی و غیرقطعی زیر با یکدیگر هم‌ارزند.

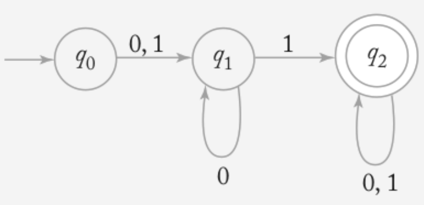




کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

- دو دی‌اف‌ای زیر با یکدیگر هم‌ارزند. اما در ماشین سمت چپ، حالت q_5 غیر قابل دسترسی است و در نتیجه می‌توان آن را حذف کرد. به علاوه، حالت‌های q_1 و q_2 و همچنین q_3 و q_4 در سمت چپ کاملا مشابه یکدیگرند.





کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

- از لحاظ نظری، دو ماشین که یک زبان را می‌پذیرند هیچ فرقی با یکدیگر ندارند.
- اما از لحاظ عملی، ماشین ساده‌تر و کوچک‌تر فضای کمتری را اشغال می‌کند.
- به علاوه، هر چه یک ماشین ساده‌تر نمایش داده شود، فهم عملکرد آن آسان‌تر می‌شود.

کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

- دو حالت p و q را در یک دی‌اف‌ای غیرمتمایز [1] می‌نامیم، اگر $\delta^*(q, w) \in F \implies \delta^*(p, w) \in F$ و همچنین $\delta^*(q, w) \notin F \implies \delta^*(p, w) \notin F$ به ازای هر $w \in \Sigma^*$
- اگر رشتهٔ $w \in \Sigma^*$ وجود داشته باشد به طوری که $\delta^*(p, w) \in F$ و $\delta^*(q, w) \notin F$ آنگاه حالت‌های p و q برای رشتهٔ w متمایز [2] هستند.

[1] indistinguishable
[2] distinguishable

کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

- برای کاهش حالات یک دی‌اف‌ای از دو الگوریتم (روند) استفاده می‌کنیم.
- ابتدا در الگوریتم اول به نام الگوریتم دسته‌بندی (علامت‌گذاری) حالات [1]، حالت‌های متمایز را مشخص می‌کنیم.
- سپس در الگوریتم دوم به نام الگوریتم کاهش تعداد حالات [2] دی‌اف‌ای کاهش یافته (مینیمال) را می‌سازیم.

[1] marking procedure
[2] reducing procedure

کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

الگوریتم دسته‌بندی حالات:

۱. همهٔ حالت‌های غیرقابل‌دسترس را حذف کنید. پس از پیمایش گراف (جستجوی همهٔ مسیرها) از رأس آغازی، همهٔ رئوسی که غیر قابل پیمایش‌اند، رأس‌های غیرقابل دسترس‌اند.

۲. در گام $n = ۰$ ، هر یک از جفت حالت p و q را در نظر بگیرید. اگر $p \in F$ و $q \notin F$ است، آنگاه این دو حالت را به عنوان حالت‌های متمایز در دو مجموعهٔ متفاوت قرار دهید.

کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

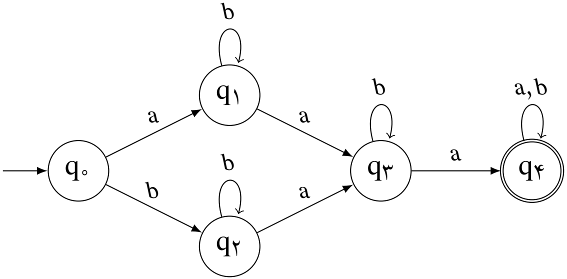
الگوریتم دسته‌بندی حالات:

۳. در گام $n + 1$ همهٔ جفت‌هایی که غیرمتمایزند (در گام n در یک مجموعهٔ یکسان قرار دارند) را در نظر بگیرید. به ازای هر جفت غیرمتمایز (p, q) و به ازای هر $a \in \Sigma$ مقادیر $\delta(p, a) = p_a$ و $\delta(q, a) = q_a$ را محاسبه کنید. اگر جفت (p_a, q_a) متمایزند (در گام n در دو مجموعهٔ متفاوت قرار دارند)، جفت (p, q) را نیز به عنوان یک جفت متمایز در دو مجموعهٔ متفاوت قرار دهید.

۴. اگر هیچ تغییری در مجموعه‌های (دسته‌های) متمایز گام $n + 1$ نسبت به مجموعه‌های متمایز گام n به وجود نیامد، همهٔ مجموعه‌های متمایز مشخص شده‌اند. بنابراین الگوریتم را خاتمه دهید. در غیراینصورت مقدار n را یک واحد افزایش دهید و به مرحلهٔ ۳ الگوریتم بازگرید.

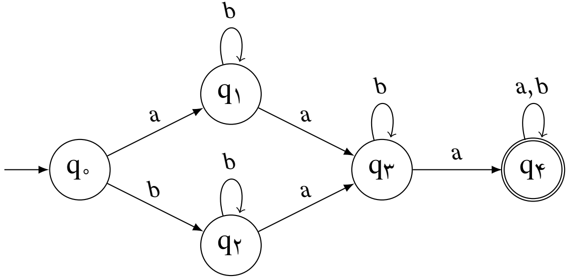
کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

- حالت‌های ماشین زیر را برای کاهش دادن تعداد حالات، دسته‌بندی کنید.



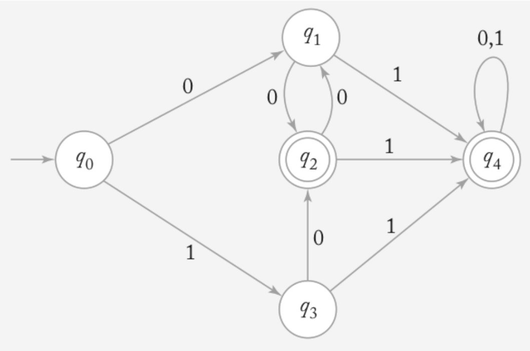
کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

$$
\begin{aligned}
n = ۰ :&\quad \{q_{۴}\},\quad \{q_{۰}, q_{۱}, q_{۲}, q_{۳}\} \\
n = ۱ :&\quad \{q_{۴}\},\quad \{q_{۳}\},\quad \{q_{۰}, q_{۱}, q_{۲}\} \\
n = ۲ :&\quad \{q_{۴}\},\quad \{q_{۳}\},\quad \{q_{۰}\},\quad \{q_{۱}, q_{۲}\} \\
n = ۳ :&\quad \{q_{۴}\},\quad \{q_{۳}\},\quad \{q_{۰}\},\quad \{q_{۱}, q_{۲}\}
\end{aligned}
$$



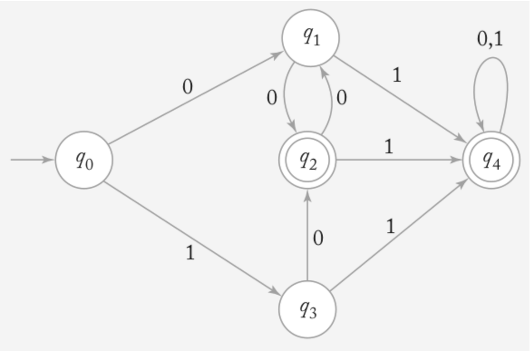
کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

- حالت‌های دی‌اف‌ای زیر را برای کاهش دادن تعداد حالات، دسته‌بندی کنید.



کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

- حالت‌های دی‌اف‌ای زیر را برای کاهش دادن تعداد حالات، دسته‌بندی کنید.
- $\{q_۰\}, \{q_۱, q_۳\}, \{q_۲\}, \{q_۴\}$



کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

الگوریتم کاهش تعداد حالات:

به ازای دی‌اف‌ای $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ دی‌اف‌ای کاهش‌یافتهٔ $\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, \widehat{q_0}, \widehat{F})$ را به صورت زیر می‌یابیم.

۱. با استفاده از الگوریتم دسته‌بندی حالات، همهٔ مجموعه‌های متمایز $\{q_i, q_j, \cdots, q_k\}$ را پیدا کنید.

۲. به ازای هر مجموعهٔ متمایز $\{q_i, q_j, \cdots, q_k\}$، یک حالت $ij\cdots k$ برای ماشین $\widehat{M}$ بسازید.

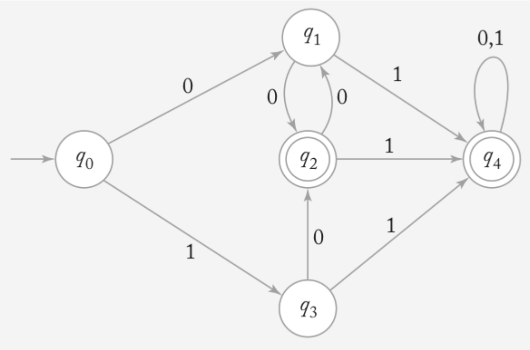
۳. به ازای هر گذار $\delta(q_r, a) = q_p$ در ماشین M مجموعه‌های متمایزی را بیابید که q_r و q_p متعلق به آنها هستند. اگر $q_r \in \{q_i, q_j, \cdots, q_k\}$ و $q_p \in \{q_l, q_m, \cdots, q_n\}$ باشند، برای تابع گذار $\widehat{\delta}$ چنین تعریف کنید: $\widehat{\delta}(ij\cdots k, a) = lm\cdots n$

۴. حالت آغازی $\widehat{q_0}$ در ماشین $\widehat{M}$ حالت $\cdots 0 \cdots$ است.

۵. مجموعهٔ حالات پایانی $\widehat{F}$ مجموعهٔ حالات $\cdots i \cdots$ است به طوری که $q_i \in F$.

کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

- پذیرندهٔ متناهی قطعی زیر را کاهش دهید.



کاهش تعداد حالات در ماشین متناهی

- با کاهش دادن حالات دی‌اف‌ای سمت راست، دی‌اف‌ای سمت چپ به دست می‌آید.