به نام خدا

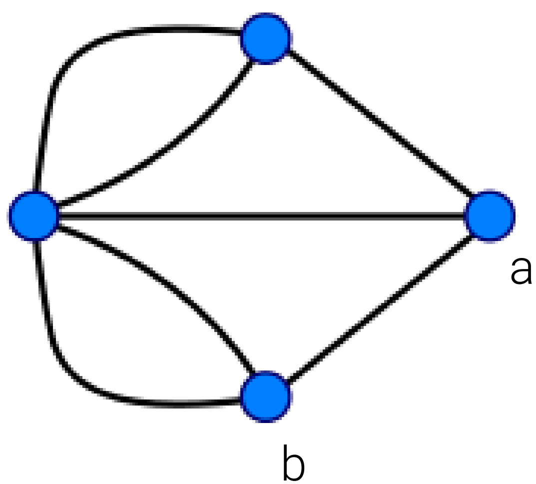
ساختمان‌های گسسته

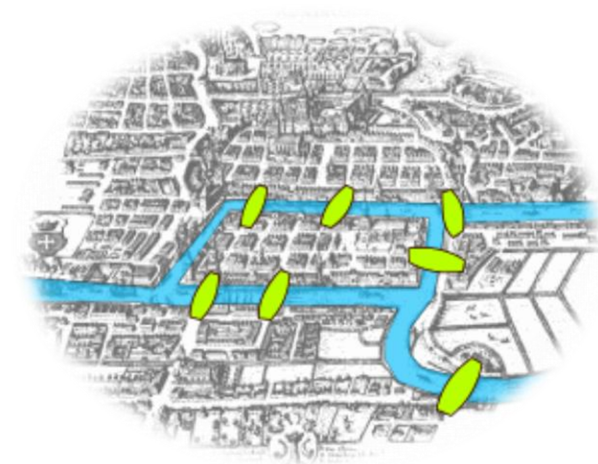
گراف

Dr. Aref Karimiafshar
A.karimiafshar@ec.iut.ac.ir

گراف

- فراهم آوردن یک مدل انتزاعی

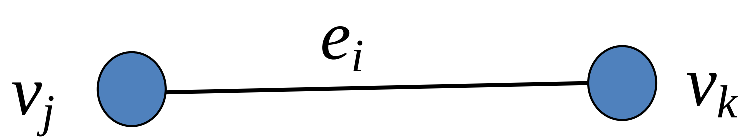




نمایش یک رابطه ← a R b

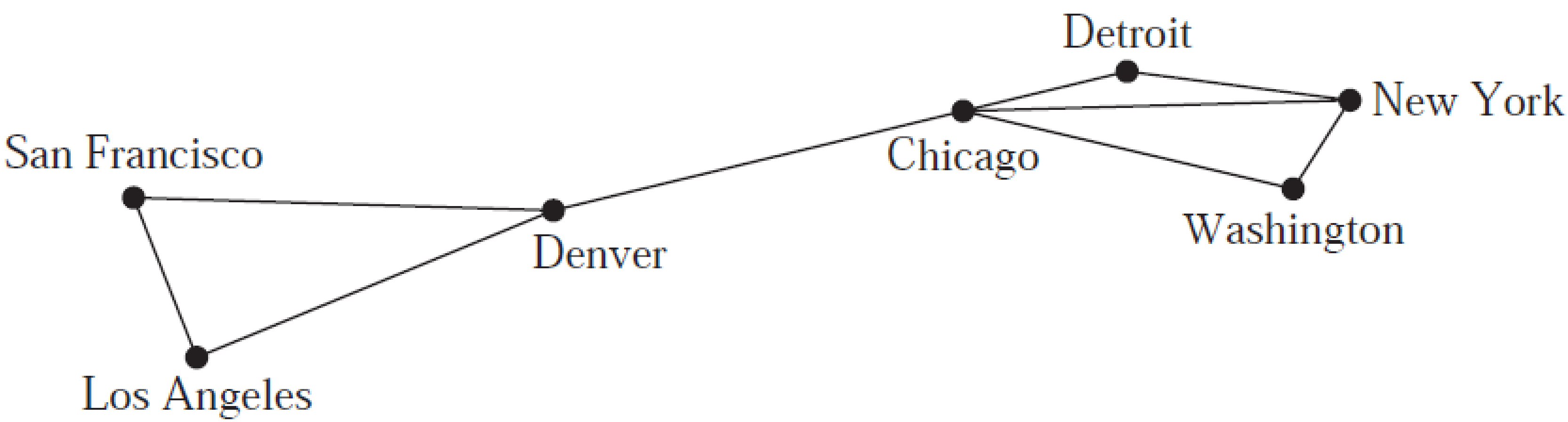
تعریف گراف

- یک گراف را به صورت G=(V, E) نمایش می دهیم.
  - V مجموعه همه رئوس
    - می تواند یک مجموعه نامتناهی باشد
  - E مجموعه همه یالها
    - یک یال می تواند یک یا دو راس را به هم متصل کند
    - می تواند یک مجموعه نامتناهی باشد



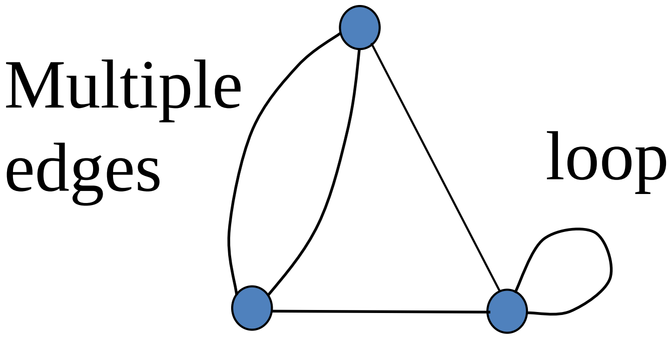
نمونه‌ای از یک گراف

- یک گراف را به صورت G=(V, E) نمایش می دهیم.

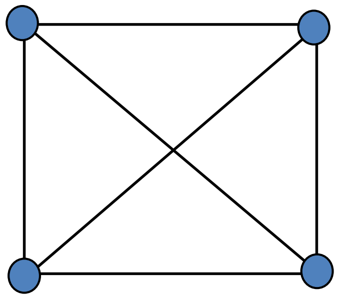


گراف ساده

- یک گراف ساده
  - هر یال دو راس متفاوت را به هم متصل می کند
  - بین هر دو راس متفاوت فقط یک یال وجود داشته باشد

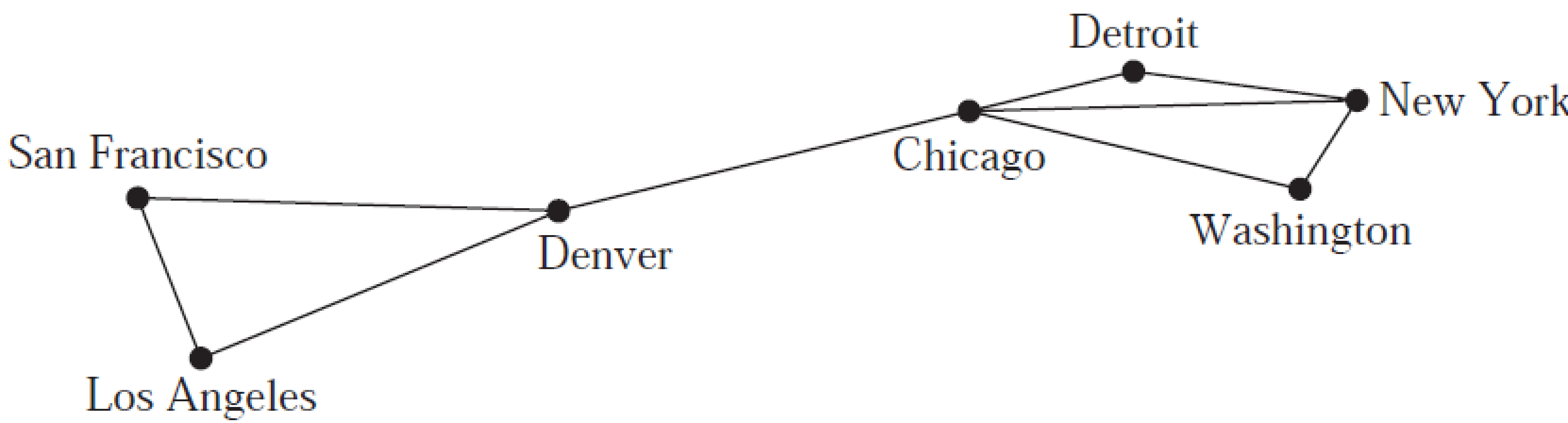


گراف چندگانه (**multigraphs**)

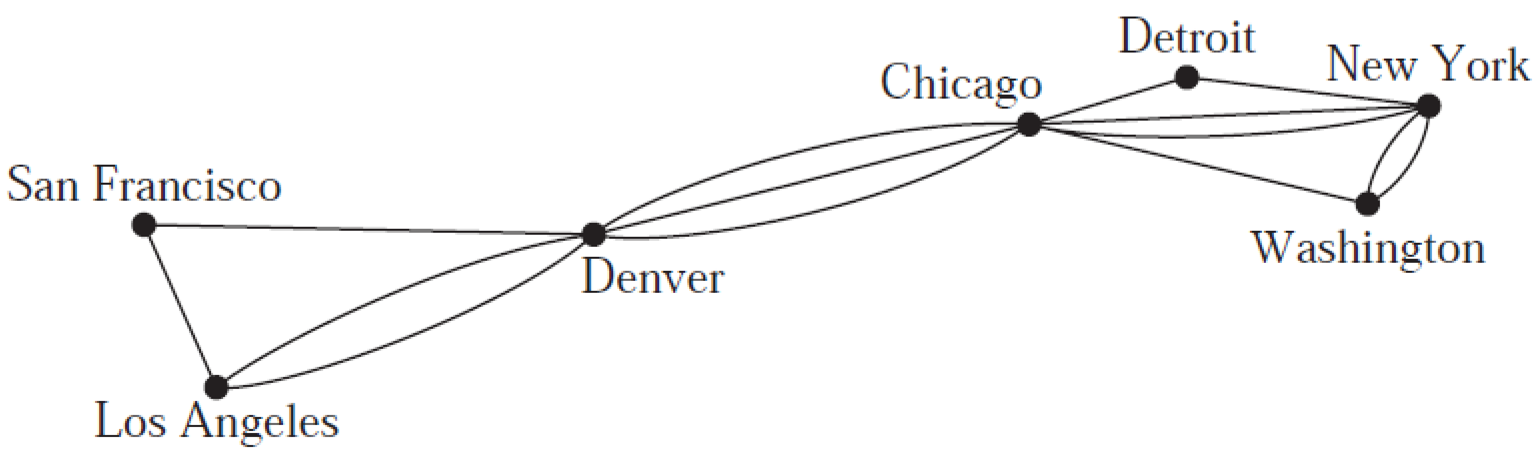


گراف ساده

نمونه‌ای از یک گراف



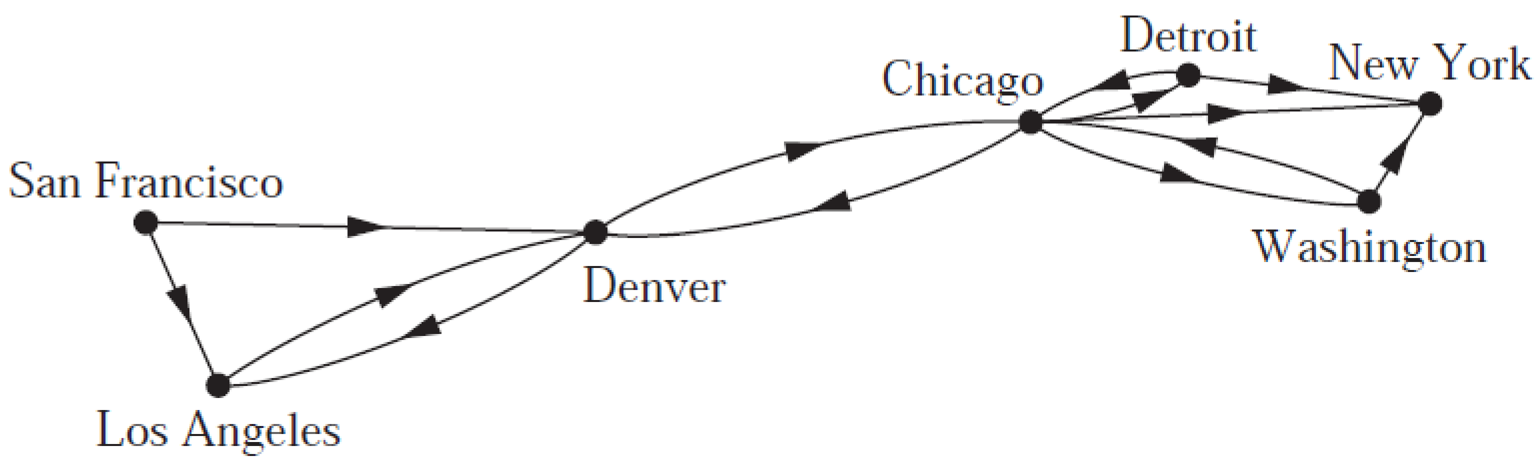
گراف ساده



گراف چندگانه

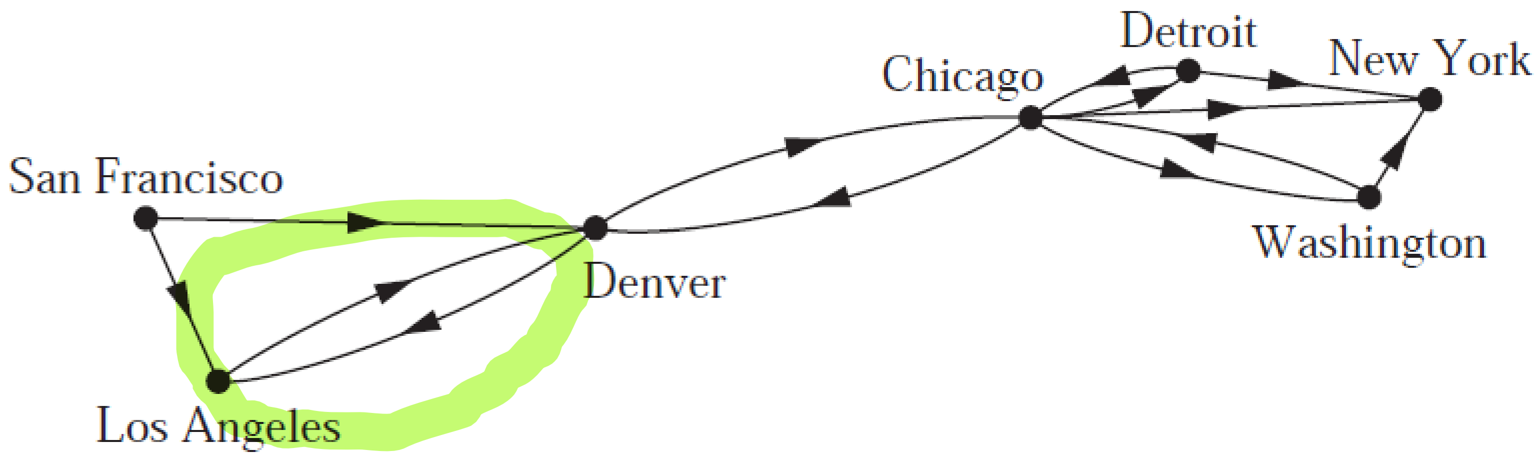
گراف جهت دار

- یک گراف را به صورت G=(V, E) نمایش می دهیم.
  - V مجموعه همه رئوس
  - E مجموعه همه یالها
    - یک یال به صورت زوج مرتب (u,v)
      - از u شروع و به v ختم می شود

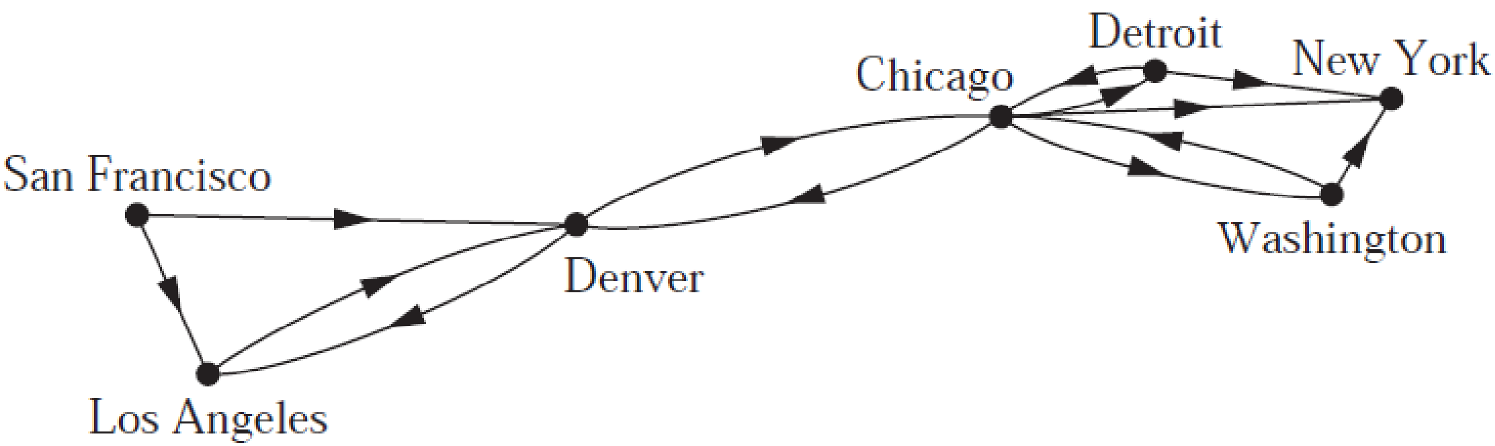


گراف جهت دار ساده

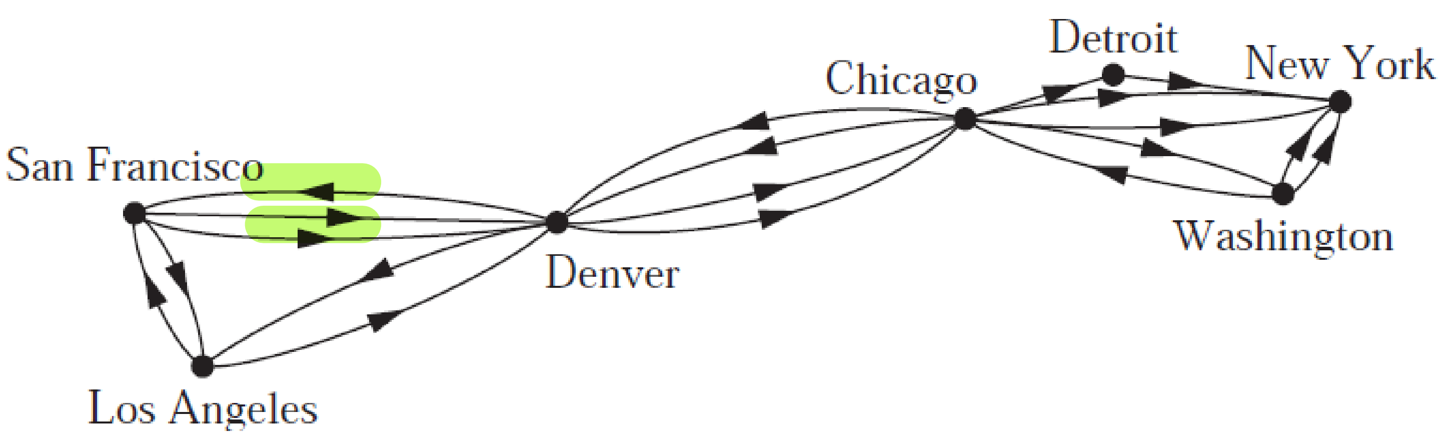
- گراف جهت دار ساده
  - فاقد طوقه
  - فاقد چند یالی



نمونه‌ای از یک گراف



گراف جهت دار ساده



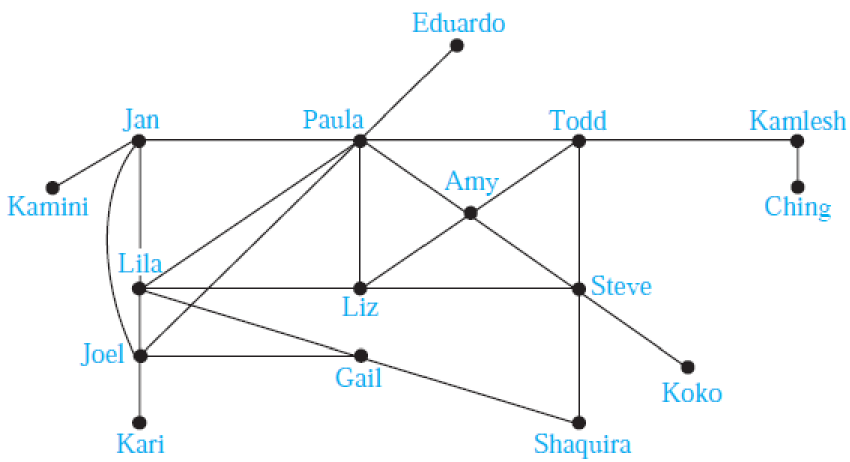
گراف جهت دار چندگانه

انواع گراف (واژه شناسی)

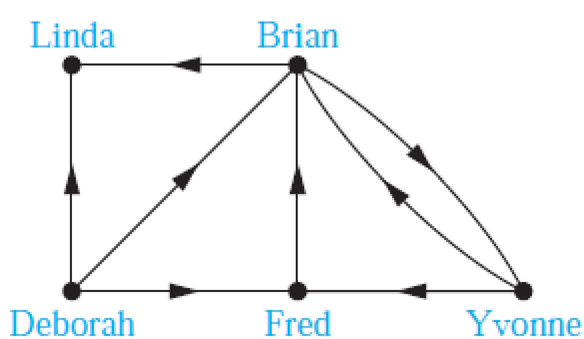
TABLE 1 Graph Terminology.			
Type	*Edges*	*Multiple Edges Allowed?*	*Loops Allowed?*
Simple graph	Undirected	No	No
Multigraph	Undirected	Yes	No
Pseudograph	Undirected	Yes	Yes
Simple directed graph	Directed	No	No
Directed multigraph	Directed	Yes	Yes
Mixed graph	Directed and undirected	Yes	Yes

کاربردهای گراف

- شبکه های اجتماعی
  - گراف دوستی



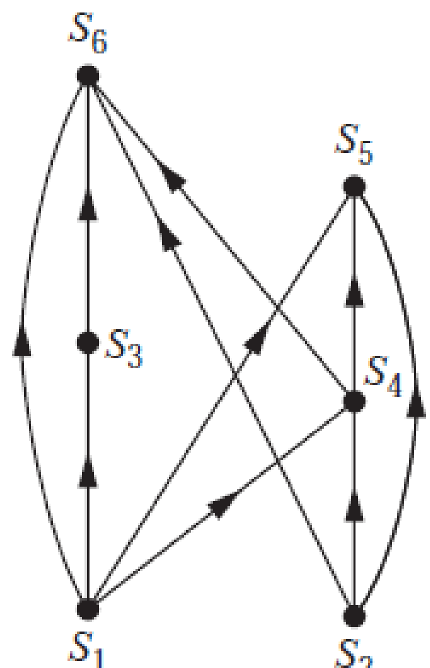
  - گراف تاثیر



کاربردهای گراف

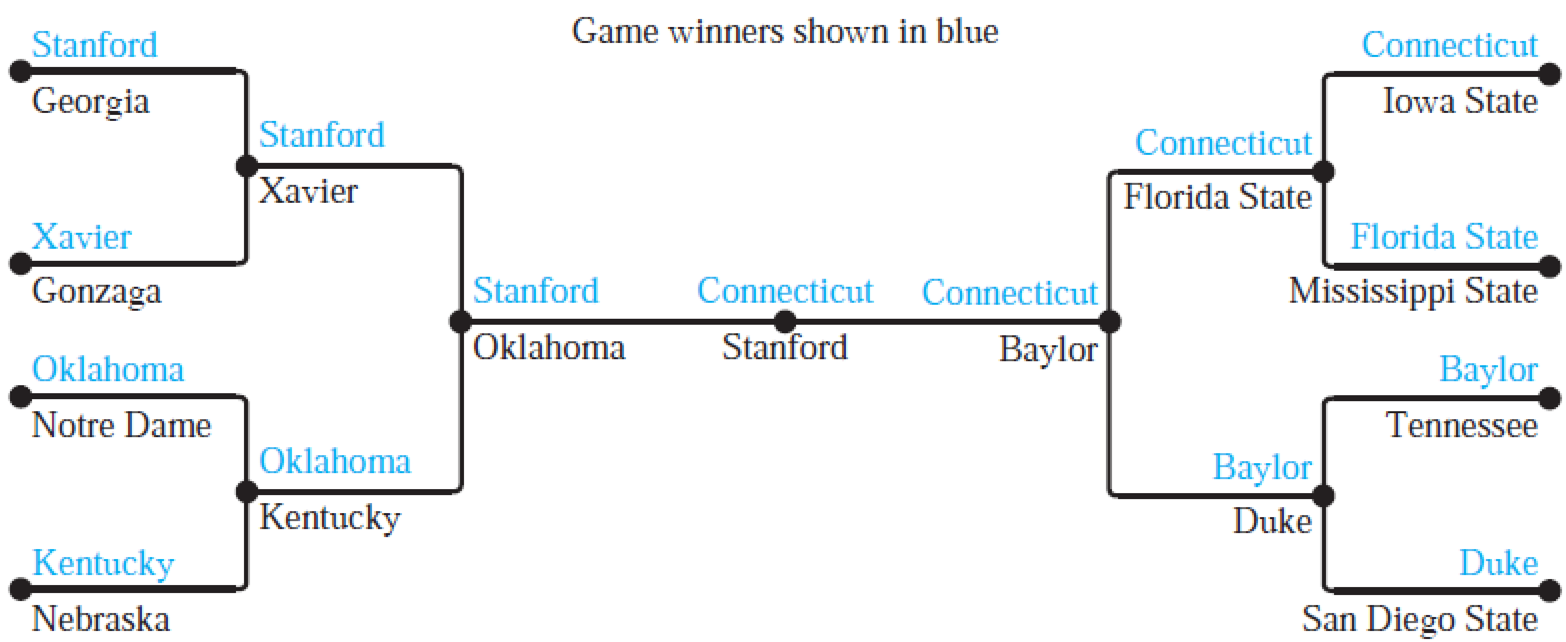
- طراحی نرم افزار
  - گراف همزمانی و روابط تقدم و تاخر

S_1	$a := 0$
S_2	$b := 1$
S_3	$c := a + 1$
S_4	$d := b + a$
S_5	$e := d + 1$
S_6	$e := c + d$



کاربردهای گراف

- تشکیل مسابقات
  - مسابقات تک حذفی

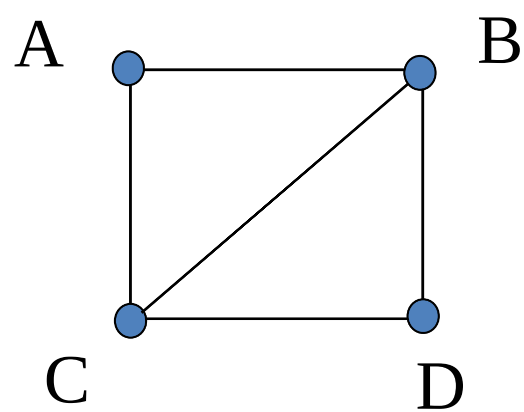


برخی تعاریف (در رابطه با گراف)

- همسایه یا مجاور
- دو راس که در انتهای یک یال (در یک گراف غیر جهت دار) قرار دارند

A همسایه B است

A همسایه D نیست



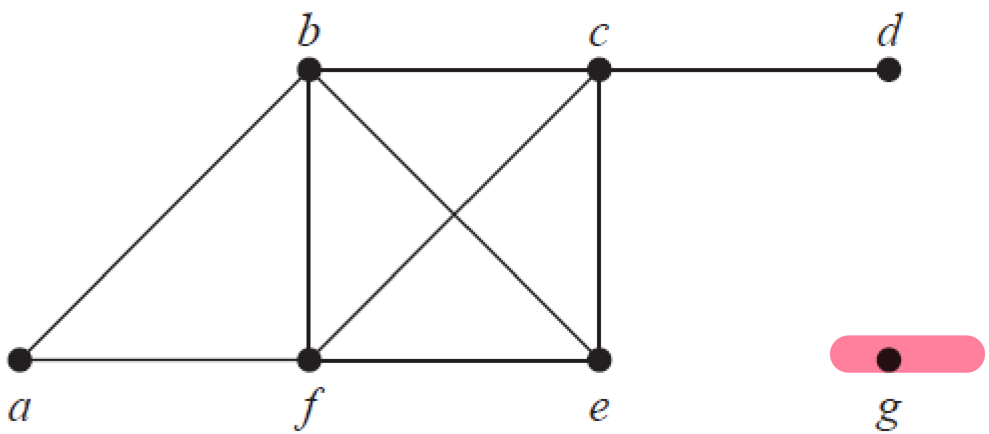
برخی تعاریف (در رابطه با گراف)

- $N(v)$ مجموعه همه همسایه های راس V
- اگر A یک زیر مجموعه از V باشد
  - $N(A)$ مجموعه همه همسایه های رئوس موجود در A

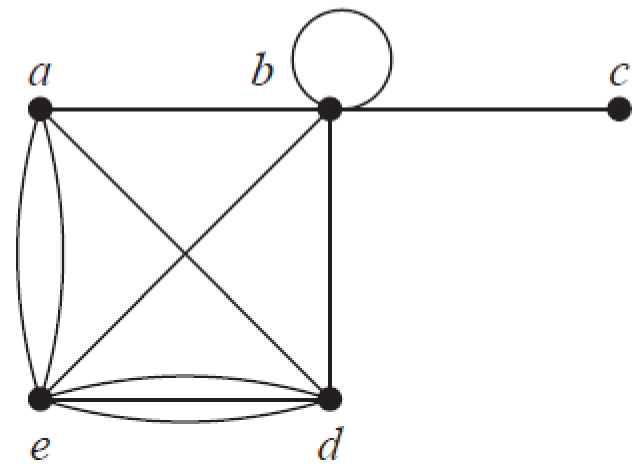
$$N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$$

- $\deg(v)$ درجه یک راس (در گراف غیرجهت دار)
  - تعداد همه همسایه های یک راس
    - طوقه دوبار شمارش می شود

درجه یک راس



G



H

$$\deg(a) = 2$$

$$\deg(b) = \deg(c) = \deg(f) = 4$$

$$\deg(g) = 0$$

$$N(a) = \{b, f\}$$

$$N(b) = \{a, c, e, f\}$$

$$\deg(a) = 4$$

$$\deg(b) = \deg(e) = 6$$

$$N(b) = \{a, b, c, d, e\}$$

قضیه (درجه رئوس)

- اگر $G = (V, E)$ یک گراف غیرجهت دار با m یال باشد، آنگاه

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

- این قضیه شامل وجود حلقه و چندیالی نیز می شود.

- مثال: چند یال در گرافی با 10 راس که درجه هر کدام 6 است وجود دارد؟

$$6 \cdot 10 = 60$$
$$2m = 60 \quad \Longrightarrow \quad m = 30$$

قضیه (درجه رئوس)

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

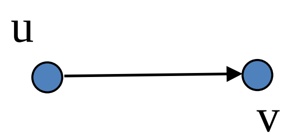
- یک گراف غیرجهت دار تعداد زوجی رئوس از درجه فرد دارد
  - اثبات:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

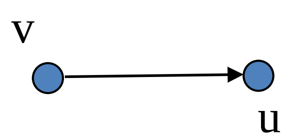
برخی تعاریف (در رابطه با گراف جهت دار)

- اگر (u,v) یک یال در گراف جهت دار G باشد
  - u مجاور به v
  - v مجاور از u
  - u را راس آغازین و v را راس پایانی گویند
    - این تعریف شامل حلقه نیز می شود.

u مجاور به v

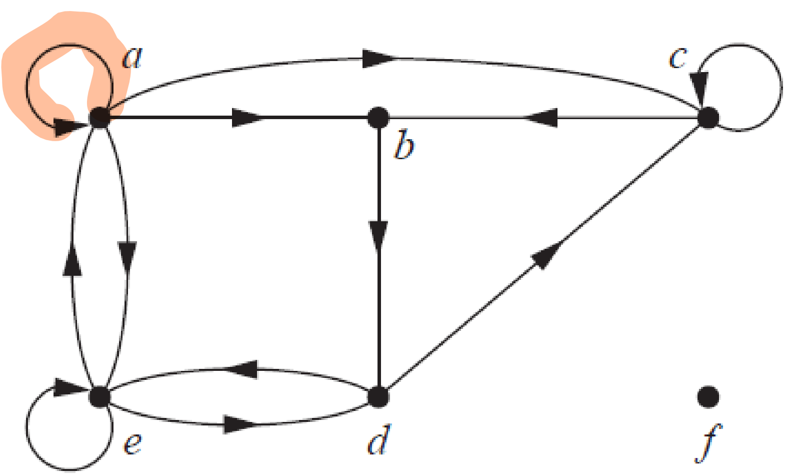


u مجاور از v



برخی تعاریف (در رابطه با گراف جهت دار)

- درجه رئوس در گراف جهت دار
  - درجه ورودی $\deg^-(v)$
    - تعداد یالهایی که v به عنوان راس انتهای ظاهر می شود
  - درجه خروجی $\deg^+(v)$
    - تعداد یالهایی که v به عنوان راس آغازین ظاهر می شود



$\deg^-(a) = 2,\ \deg^-(b) = 2,\ \deg^-(c) = 3$

$\deg^+(a) = 4, \deg^+(b) = 1, \deg^+(c) = 2$

$\deg^-(f) = 0 \quad \deg^+(f) = 0$

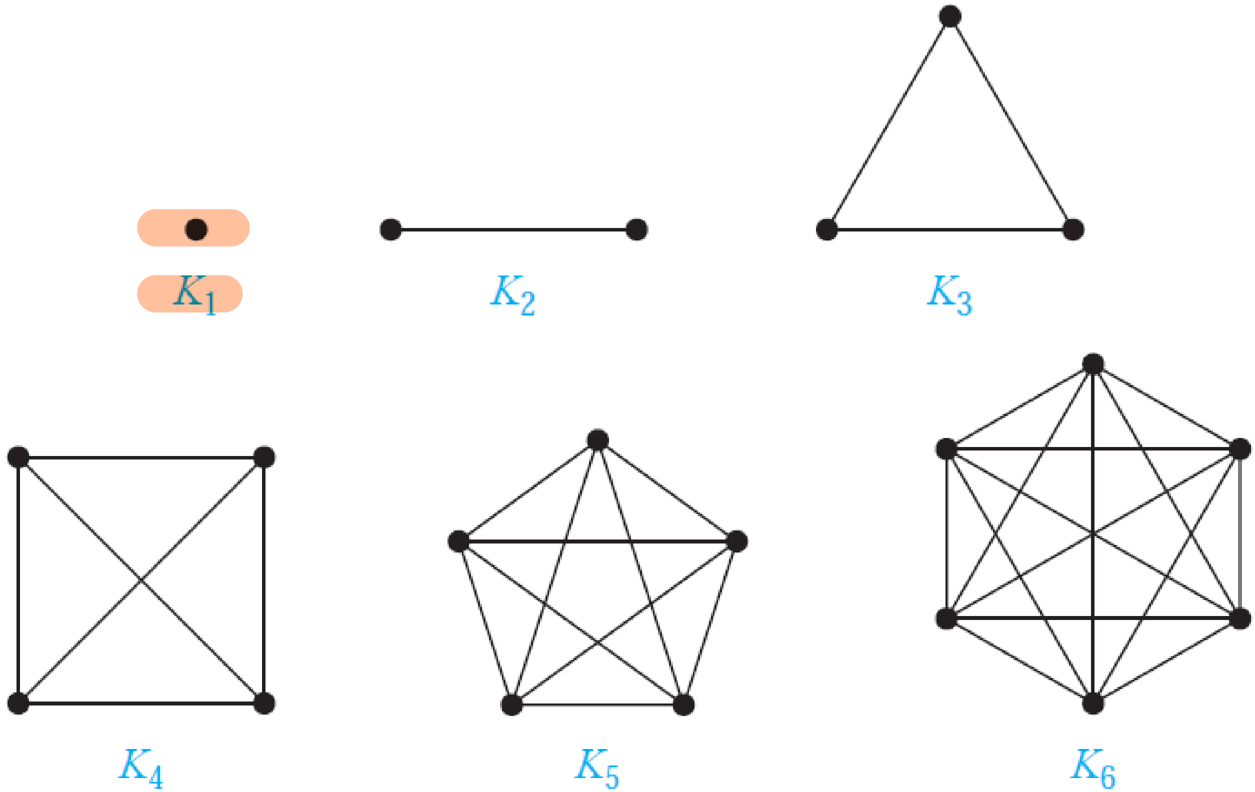
برخی تعاریف (در رابطه با گراف جهت دار)

- درجه رئوس در گراف جهت دار
  - درجه ورودی $\deg^-(v)$
    - تعداد یالهایی که v به عنوان راس انتهای ظاهر می شود
  - درجه خروجی $\deg^+(v)$
    - تعداد یالهایی که v به عنوان راس آغازین ظاهر می شود

$$\sum_{v\in V}\deg^-(v) = \sum_{v\in V}\deg^+(v) = |E|$$

گرافهای خاص (ساده)

- گراف کامل
  - بین هر دو راس دقیقا یک یال وجود داشته باشد



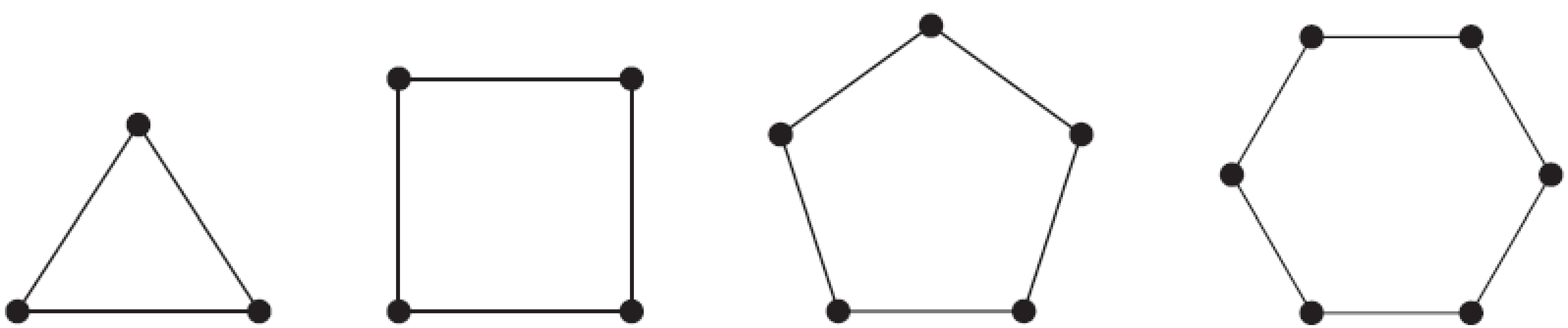
گرافهای خاص (ساده)

- دور
  - درجه هر راس دقیقا دو باشد

$C_n,\ n \geq 3$

$v_1, v_2, \ldots, v_n$

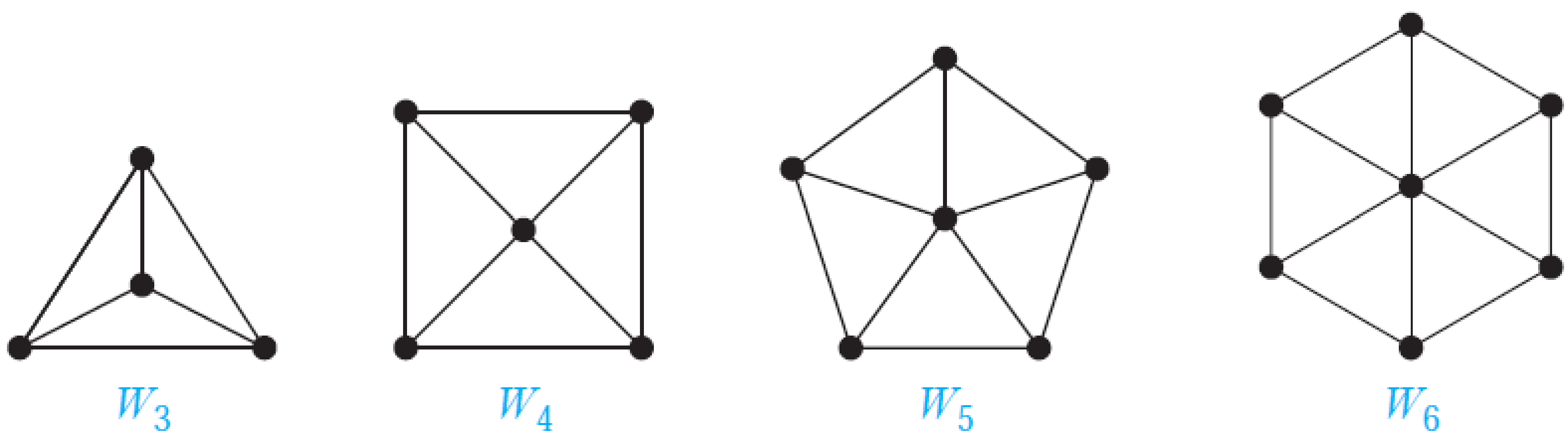
$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$, and $\{v_n, v_1\}$



C_3 C_4 C_5 C_6

گرافهای خاص (ساده)

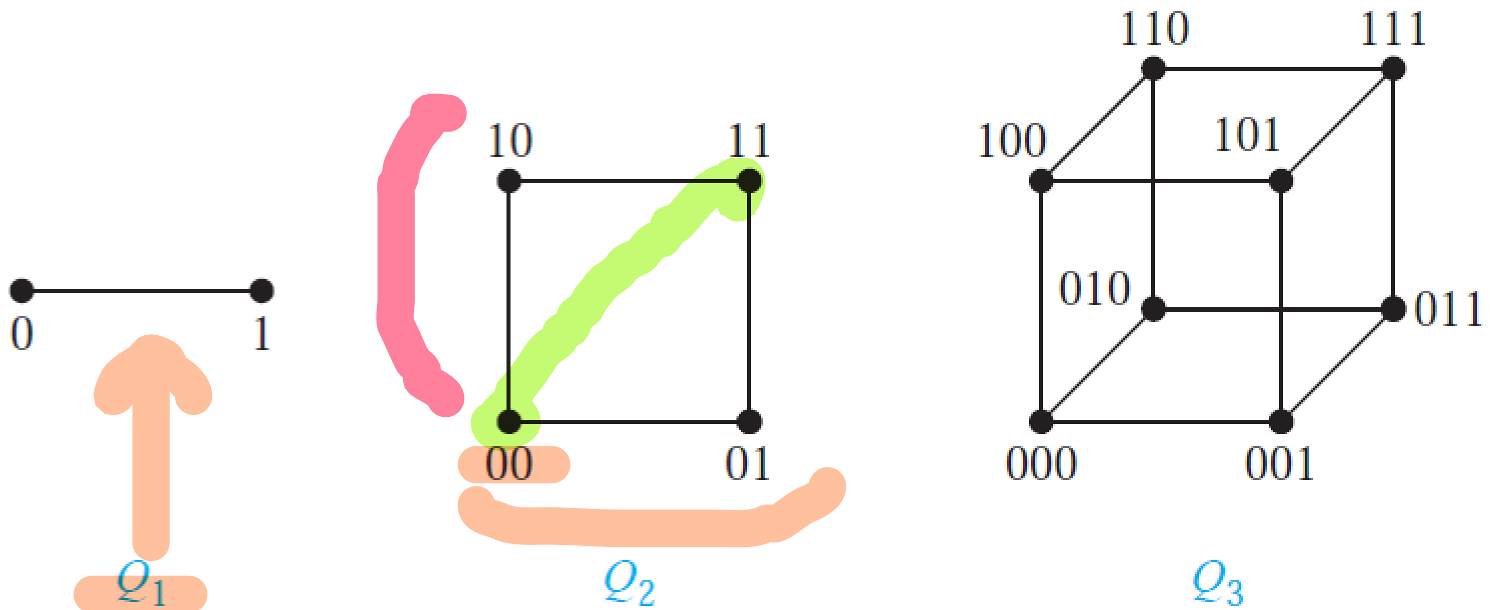
- چرخ $C_n, \quad n \geq 3 \longrightarrow W_n$
  - اضافه کردن یک راس جدید و همه یالهای آن به یک دور.



گرافهای خاص (ساده)

Q_n

- n-Cubes
  - 2^n راس، متناظر با رشته های n بیتی
  - دو راس مجاور هستند اگر رشته های متناظر با آنها فقط در یک بیت اختلاف داشته باشد

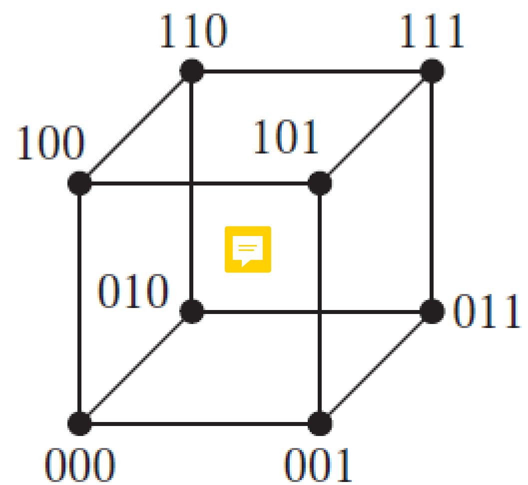


$Q_n \longrightarrow Q_{n+1}$

گرافهای خاص (ساده)

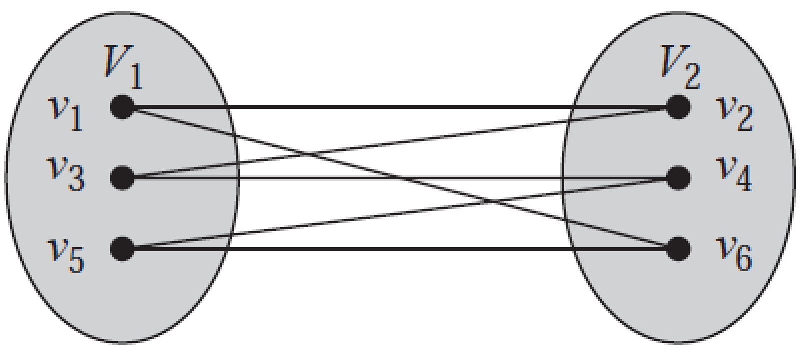
$Q_n \longrightarrow Q_{n+1}$

- n-Cubes
  - ایجاد دو کپی از Q_n
  - اضافه کردن صفر به ابتدای رشته های یک کپی و اضافه کردن یک به رشته های کپی دوم
  - اضافه کردن یال بین رئوسی که فقط در بیت اول رشته ها با هم تفاوت دارند



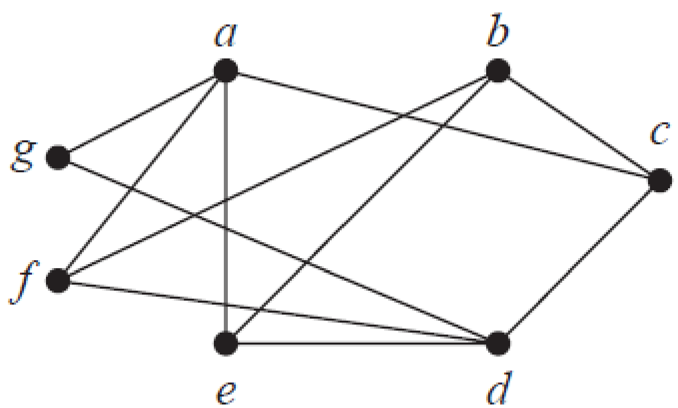
گراف دوبخشی

- یک گراف دوبخشی است اگر
  - بتوان مجموعه رئوس (V) را به دو بخش (V_1,V_2) افراز کرد به نحوی که یالهای گراف، یک راس از V_1 را به یک راس از V_2 متصل کند.
    - بین رئوس موجود در هر کدام از بخشها نباید یالی وجود داشته باشد



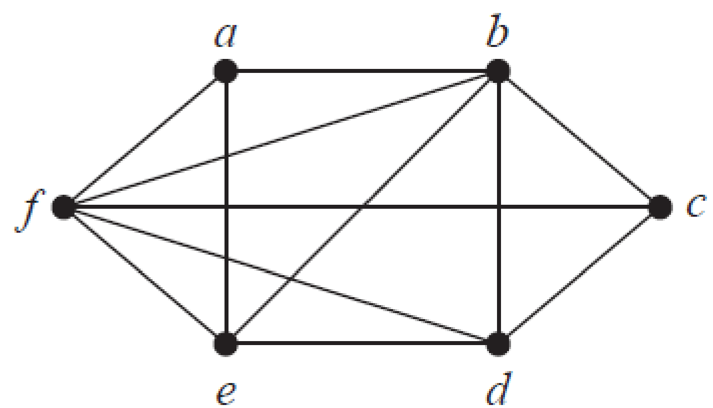
گراف دوبخشی

- مثال



G

دوبخشی

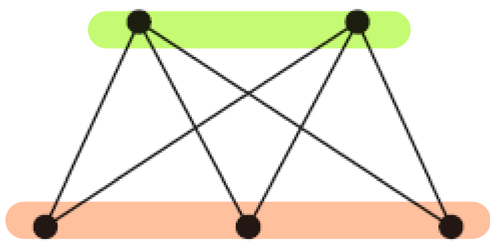


H

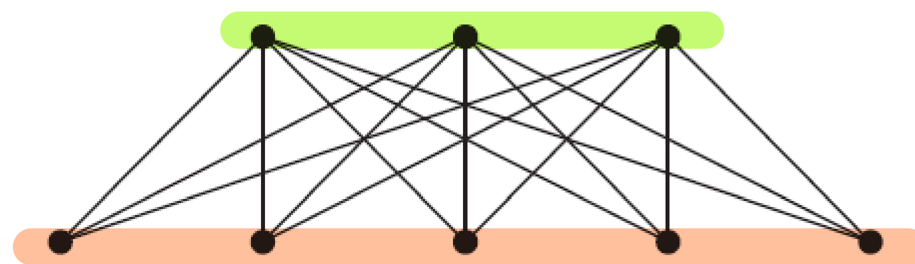
~~دوبخشی~~

گراف دوبخشی کامل

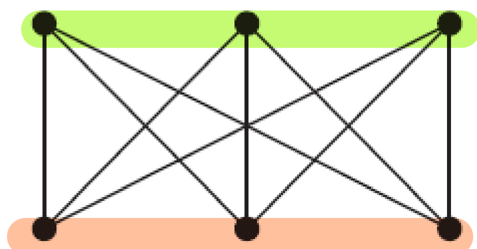
- گراف دوبخشی کامل $K_{m,n}$



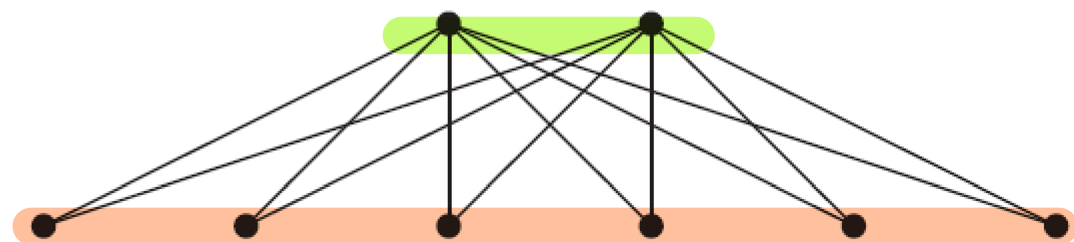
$K_{2,3}$



$K_{3,5}$



$K_{3,3}$



$K_{2,6}$

مثال

- انتساب کارها به متقاضیان

requirements, architecture, implementation, and testing

Alvarez, Berkowitz, Chen, and Davis

Alvarez $\longrightarrow$ requirements, and testing

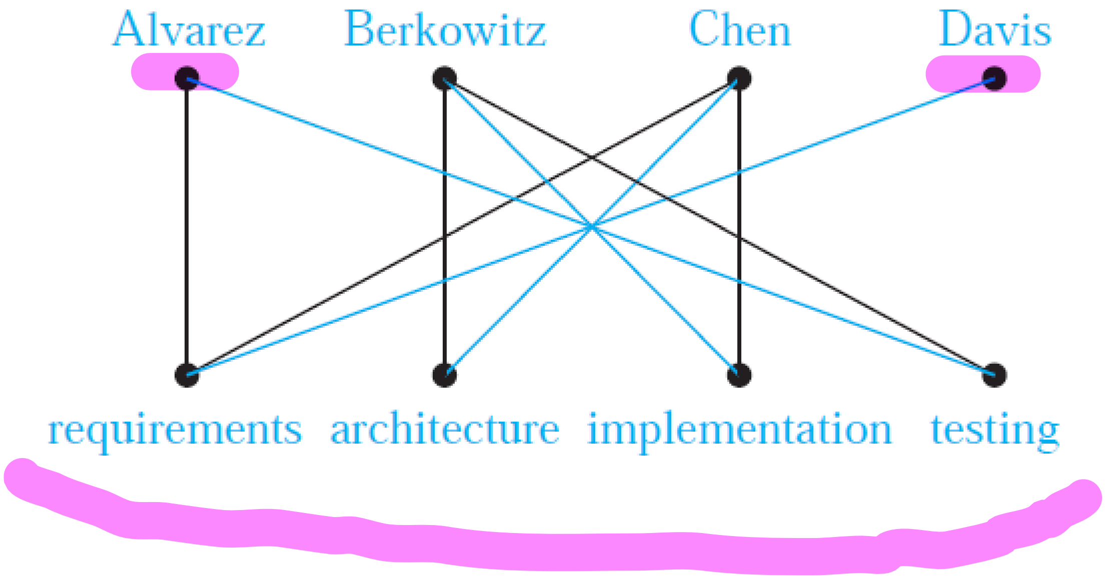
Berkowitz $\longrightarrow$ architecture, implementation, and testing

Chen $\longrightarrow$ requirements, architecture, and implementation

Davis $\longrightarrow$ requirements

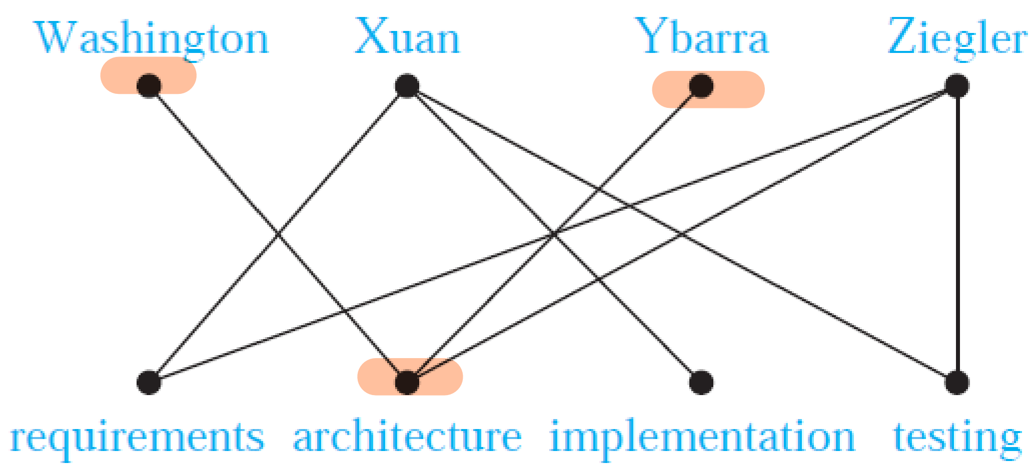
مثال

- انتساب کارها به متقاضیان



مثال

- انتساب کارها به متقاضیان



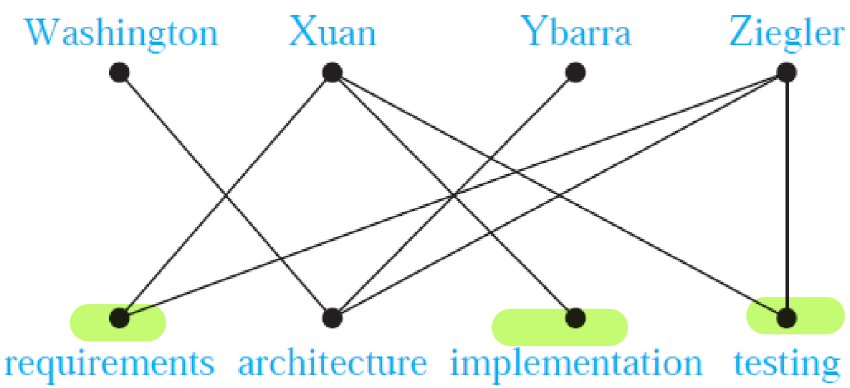
تطابق

- یک تطابق M روی گراف G
  - زیر مجموعه‌ای از یالها است به نحوی که:
    - انتهای هیچ دو یالی یکسان نباشد
- تطابق کامل از V_1 به V_2
  - هر راس موجود در V_1 انتهای یک یال قرار گیرد
  - به صورت معادل $|M| = |V_1|$
- مسئله انتساب کارها همانند پیدا کردن یک تطابق در مدل گراف است

قضیه HALL

- گراف دوبخشی G با دو بخش v_1 و v_2 دارای یک تطابق کامل از v_1 به v_2 است، اگر و فقط اگر برای هر زیرمجموعه A از v_1 داشته باشیم:

$$|N(A)| \geq |A|$$

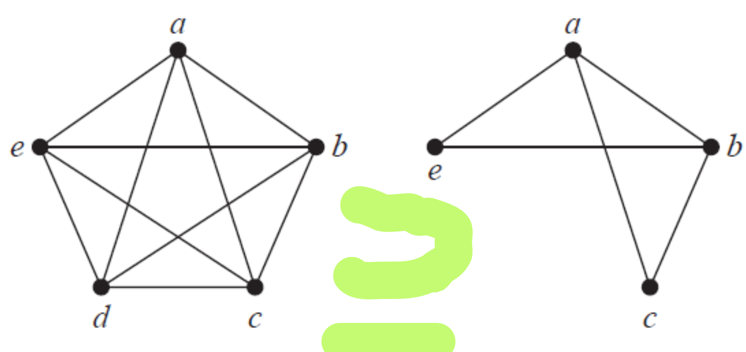


زیرگراف

- یک زیرگراف از گراف $G = (V, E)$ گرافی همانند $H = (W, F)$ است که در آن

$$W \subseteq V$$

$$F \subseteq E$$



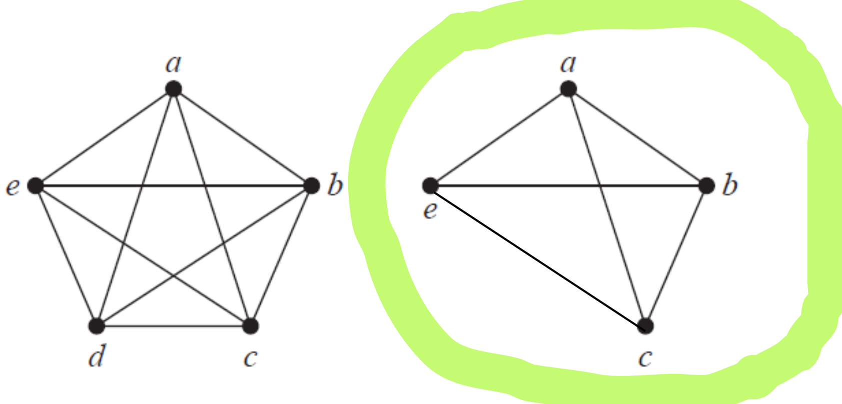
- اگر $H \neq G$ آنگاه H یک زیرگراف سره از G است

زیرگراف القایی

- یک زیرگراف القایی از گراف $G = (V, E)$ گرافی همانند $H = (W, F)$ است که در آن

$$W \subseteq V$$

و F هر یالی از E که دو سر آن در W قرار دارد را شامل شود.



حذف و اضافه کردن یال

- حذف یک یال از گراف و تولید یک زیرگراف جدید

$$G - e = (V, E - \{e\})$$

- حذف مجموعه‌ای از یالها و تولید یک زیرگراف جدید
  - همان مجموعه رئوس
  - مجموعه یالهای جدید $E - E'$

- اضافه کردن یک یال جدید به گراف

$$G + e = (V, E \cup \{e\})$$

حذف کردن راس

- حذف یک راس از گراف و تولید یک زیرگراف جدید

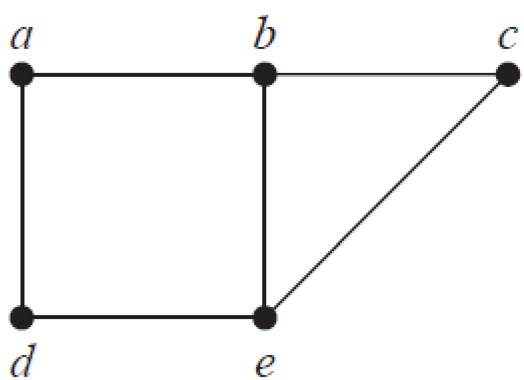
$$G - v = (V - v, E')$$

- حذف مجموعه‌ای از رئوس و تولید یک زیرگراف جدید
  - مجموعه رئوس جدید $V - V'$
  - مجموعه یالهای جدید $E - E'$

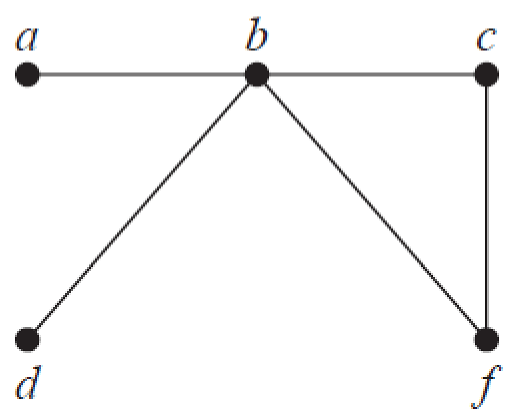
اجتماع دو گراف

- اجتماع دو گراف ساده $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$
  - مجموعه رئوس جدید $V_1 \cup V_2$
  - مجموعه یالهای جدید $E_1 \cup E_2$

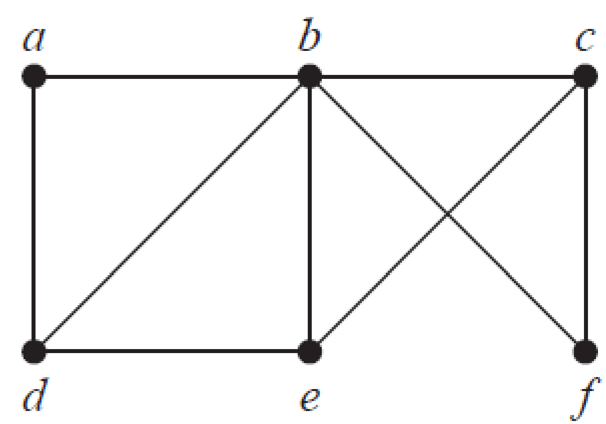
$G_1 \cup G_2$



G_1



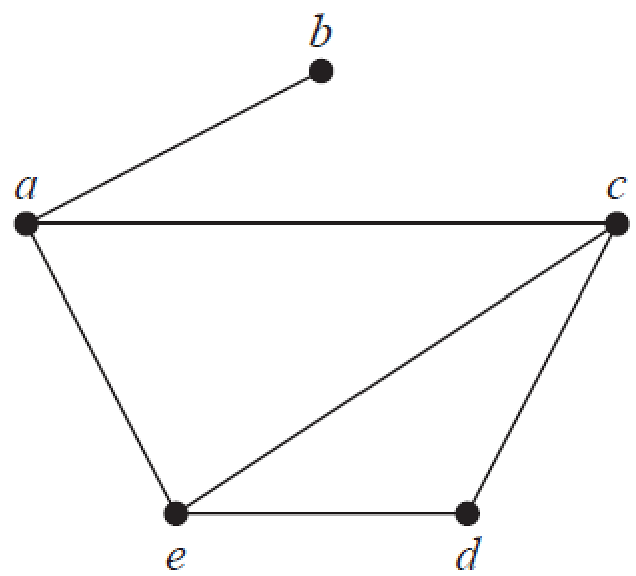
G_2



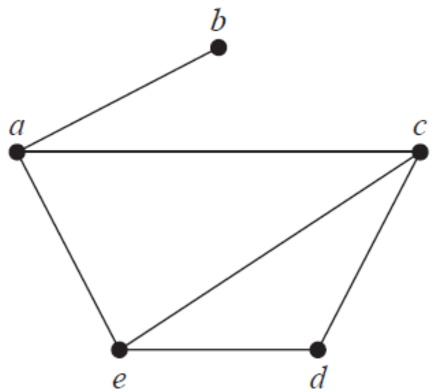
$G_1 \cup G_2$

روشهای نمایش گراف

- نمایش هندسی گراف ساده



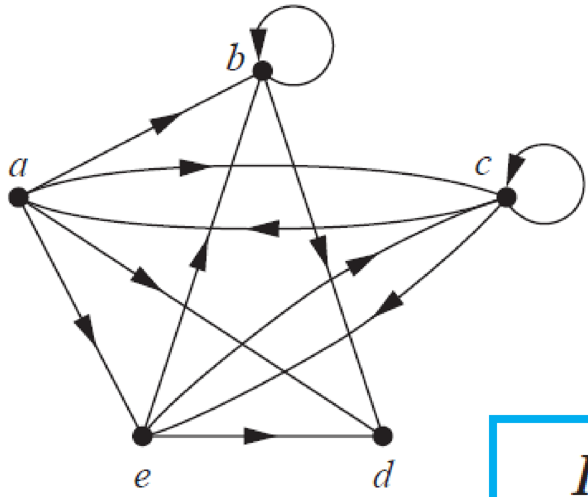
روشهای نمایش گراف



- لیست مجاورت گراف ساده

Vertex	Adjacent Vertices
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

روشهای نمایش گراف



- لیست مجاورت گراف جهت دار

Initial Vertex	*Terminal Vertices*
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

روشهای نمایش گراف

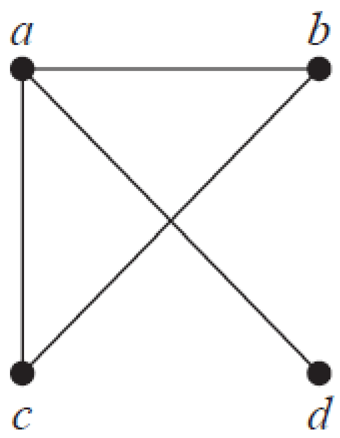
- ماتریس مجاورت گراف ساده
- اگر $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد و $|V| = n$
- ماتریس مجاورت به صورت $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ تعریف می شود که:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \{v_i, v_j\} \text{ is an edge of } G, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- مجموعه رئوس با یک ترتیب مشخصی مرتب می شوند.

ماتریس مجاورت

- مثال: ماتریس مجاورت گراف زیر را بدست آورید.
  - ترتیب رئوس: a, b, c, d

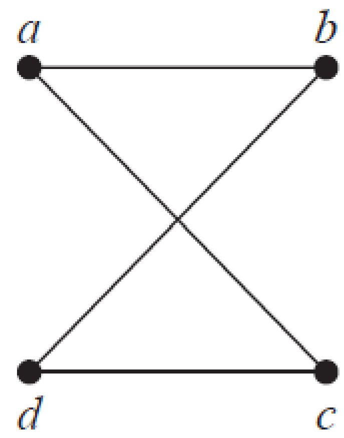


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس مجاورت

- مثال: گراف متناظر با ماتریس مجاورت زیر را رسم کنید.
  - ترتیب رئوس: a, b, c, d

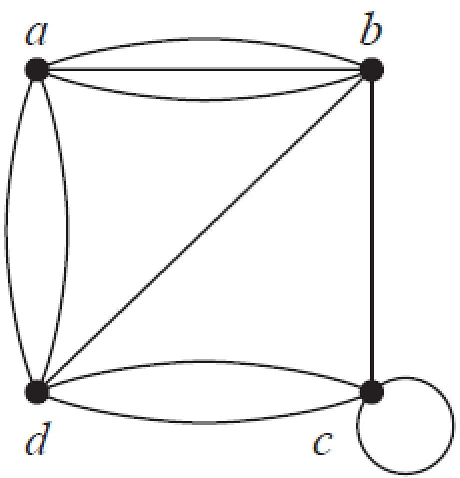
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



- ماتریس مجاورت یک گراف ساده متقارن است. $a_{ij} = a_{ji}$

ماتریس مجاورت

- مثال: ماتریس مجاورت گراف زیر را بدست آورید.
  - ترتیب رئوس: a, b, c, d



$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

روشهای نمایش گراف

$v_1, v_2, \ldots, v_n$

$e_1, e_2, \ldots, e_m$

$n \times m$

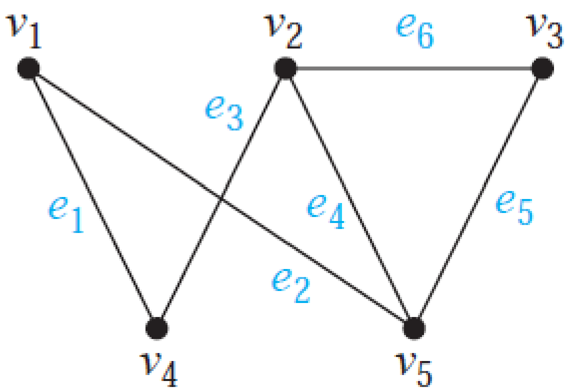
- ماتریس وقوع گراف ساده
- اگر $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد
- ماتریس وقوع به صورت $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ تعریف می شود که:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{when edge } e_j \text{ is incident with } v_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- مجموعه رئوس و یالها با یک ترتیب مشخصی مرتب می شوند.

ماتریس وقوع

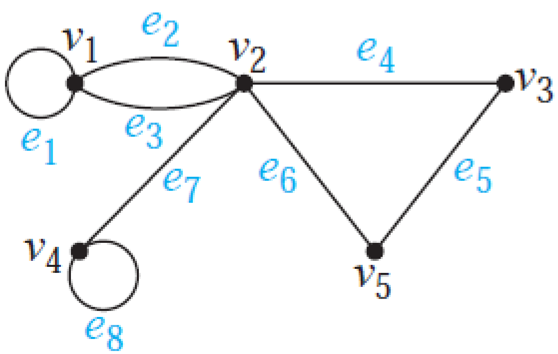
- مثال: ماتریس وقوع گراف زیر را بدست آورید.



$$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

ماتریس وقوع

- مثال: ماتریس وقوع گراف زیر را بدست آورید.



$$
\begin{array}{c@{\quad}c}
 & \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

یکریختی

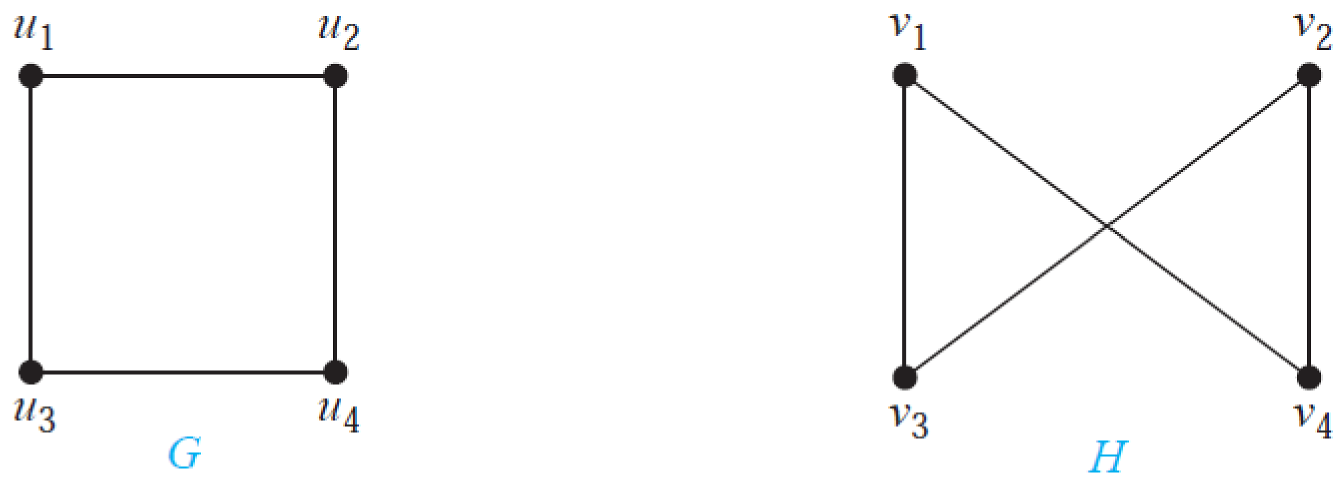
- دو گراف $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ را یکریخت گویند اگر و فقط اگر تابعی یک به یک و پوشا از V_1 به V_2 وجود داشته باشد به نحوی که:
  - a و b در G_1 مجاور هستند اگر و فقط اگر f(a) و f(b) در G_2 مجاور باشند
    - برای همه a و b موجود در V_1

- یعنی یک تناظر یک به یک بین روئوس دو گراف وجود دارد که رابطه مجاورت را حفظ می کند.

- یک ویژگی که تحت یکریختی حفظ شود graph invariant گفته می شود

یکریختی

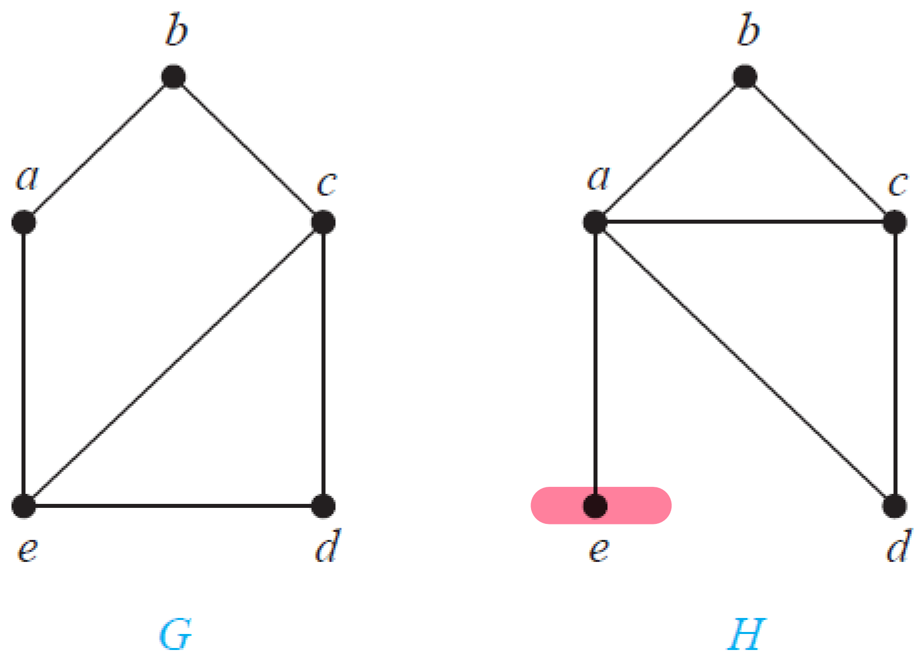
- دو گراف یکریخت



$$f(u_1) = v_1,\ f(u_2) = v_4,\ f(u_3) = v_3, \text{ and } f(u_4) = v_2$$

یکریختی

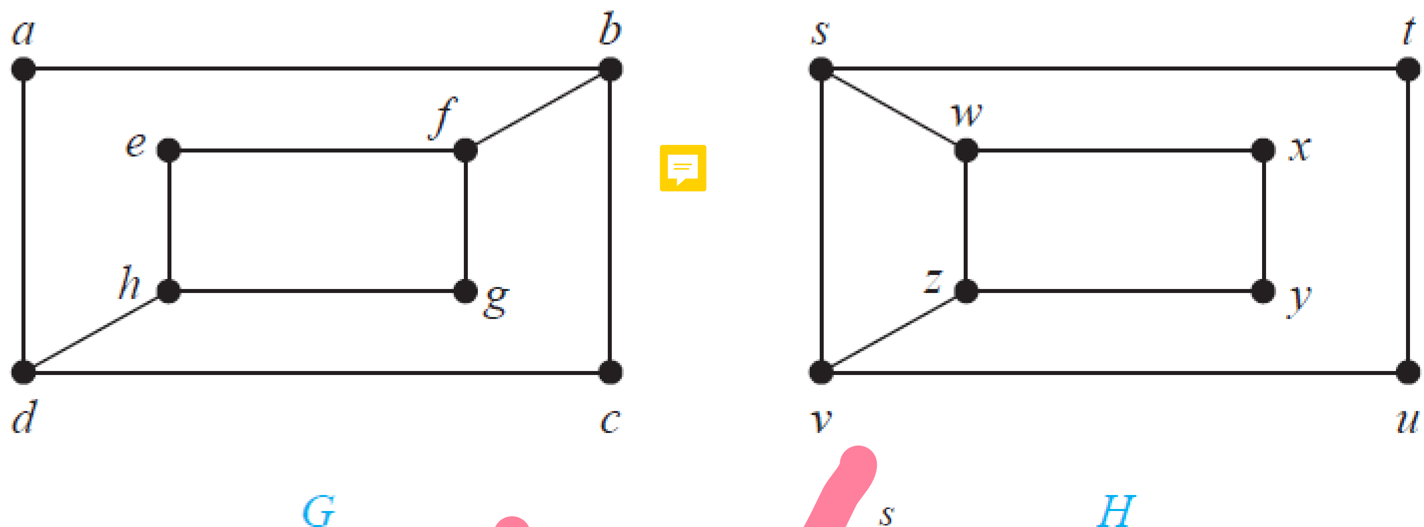
- آیا دو گراف زیر یکریخت هستند؟

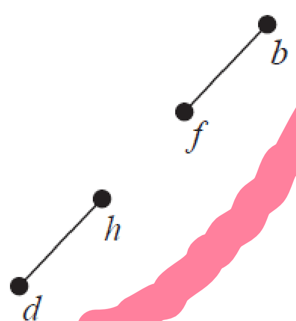


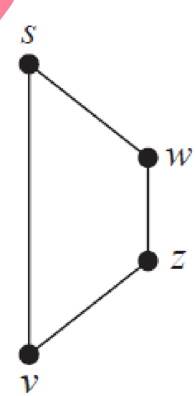
غیر یکریخت

یکریختی

- آیا دو گراف زیر یکریخت هستند؟



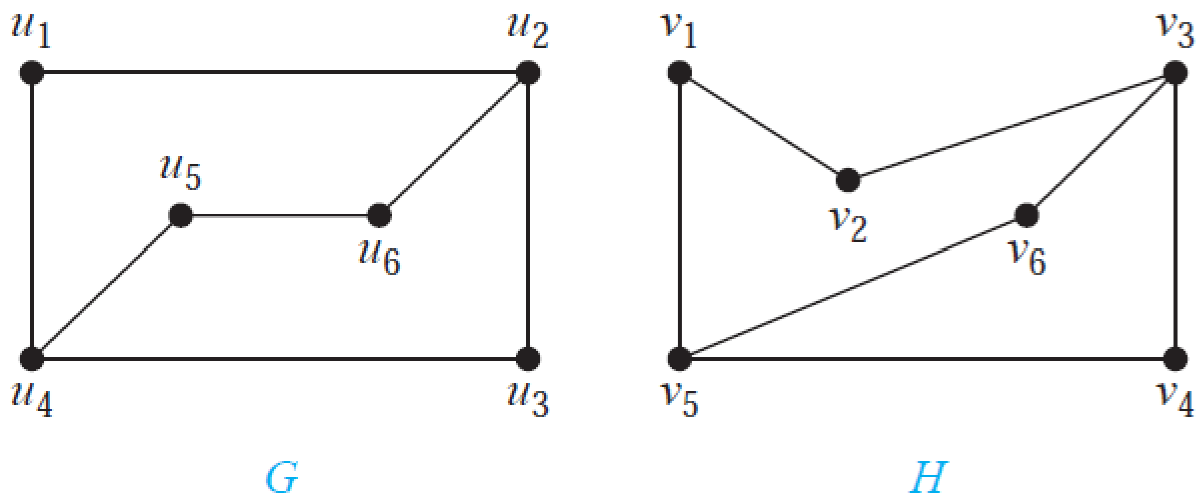




غیر یکریخت

یکریختی

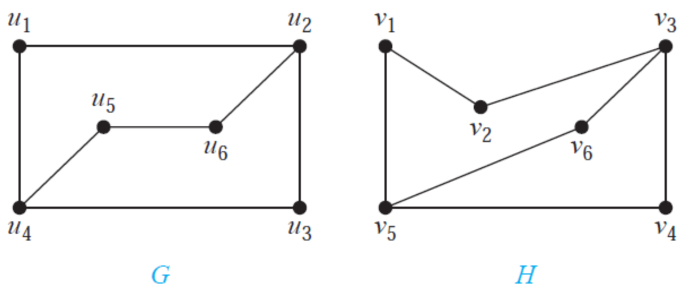
- آیا دو گراف زیر یکریخت هستند؟



$$f(u_1) = v_6,\ f(u_2) = v_3,\ f(u_3) = v_4,\ f(u_4) = v_5,\ f(u_5) = v_1,\ f(u_6) = v_2$$

یکریخت

یکریختی



- آیا دو گراف زیر یکریخت هستند؟

$f(u_1) = v_6,\ f(u_2) = v_3,\ f(u_3) = v_4,\ f(u_4) = v_5,\ f(u_5) = v_1,\ f(u_6) = v_2$

$$\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{A}_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

پایان

موفق و پیروز باشید