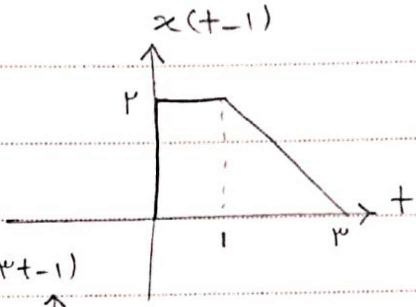
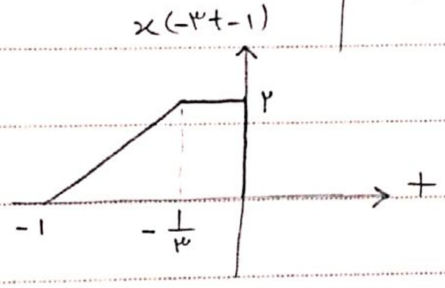
حوری دهش ۹۸۲۱۴۱۳

س ۱ ←

a) $x(-3t-1)$



اول ← $x(t-1)$ رسم می کنیم ←

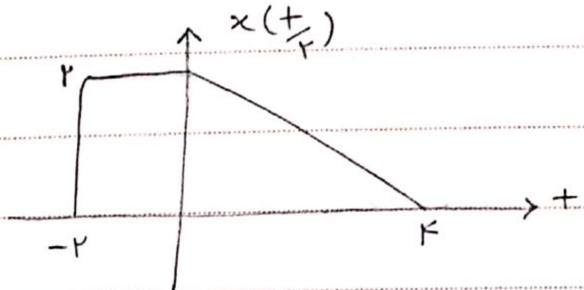


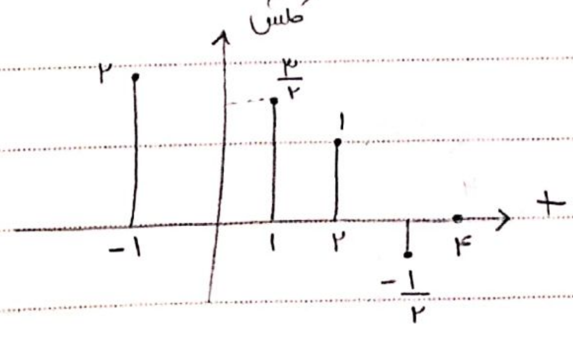
گام ۲ ← $x(-3t-1)$ ←

b) $x(\frac{t}{2})\,[\delta(t+1)+\delta(t-1)+\delta(t-2)-\delta(t-3)+\delta(t-4)]$

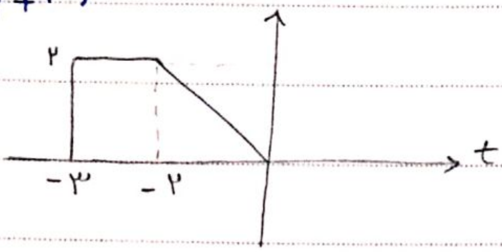
$t=-1 \quad t=1 \quad t=2 \quad t=3 \quad t=4$

که نمودار گسترده تر می شه

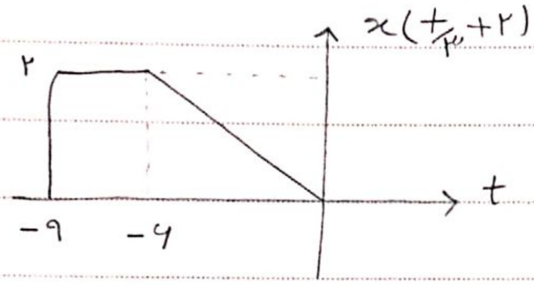




c) $x(\frac{t}{3}+2)$



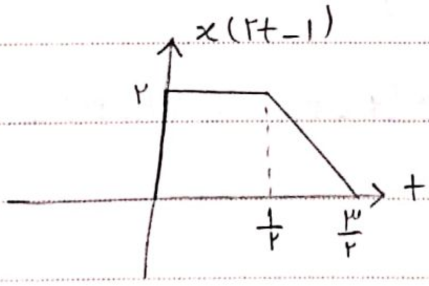
مرحله ۱ $\longrightarrow$



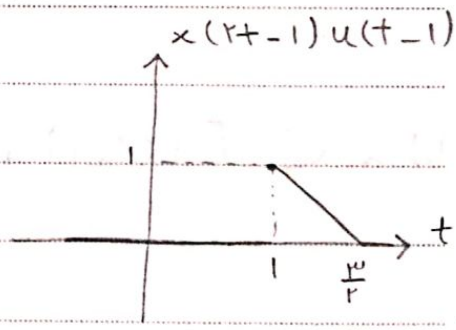
مرحله ۲ $\longrightarrow$

d) $x(2t-1)\,u(t-1)$

مرحله ۱ $\longrightarrow$



مرحله ۲ $\longrightarrow$

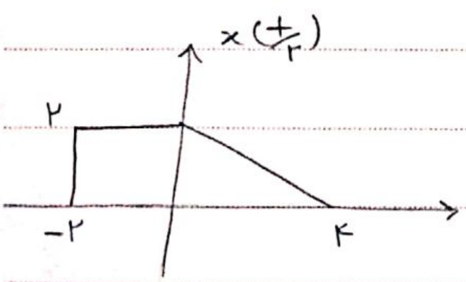


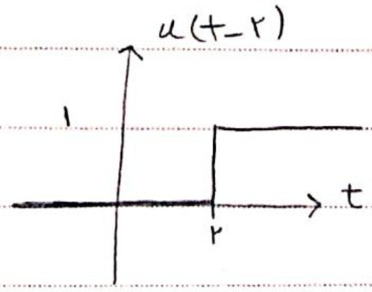
قبل از ۱ صفره و بعدش خودش می‌شه

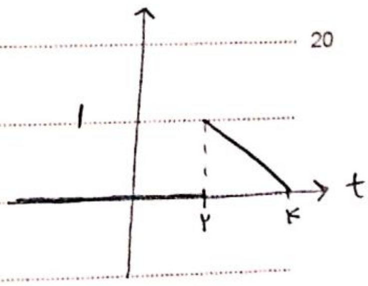
$-2t+3$

e) $odd\,(x(\frac{t}{2})\,u(t-2))$

$f(t) = x(\frac{t}{2})\,u(t-2)$

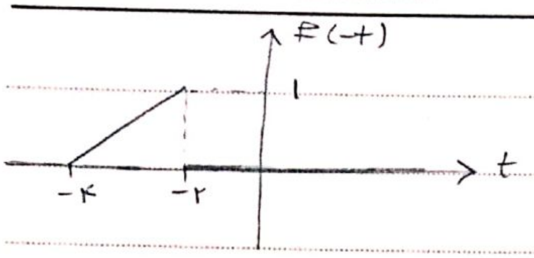




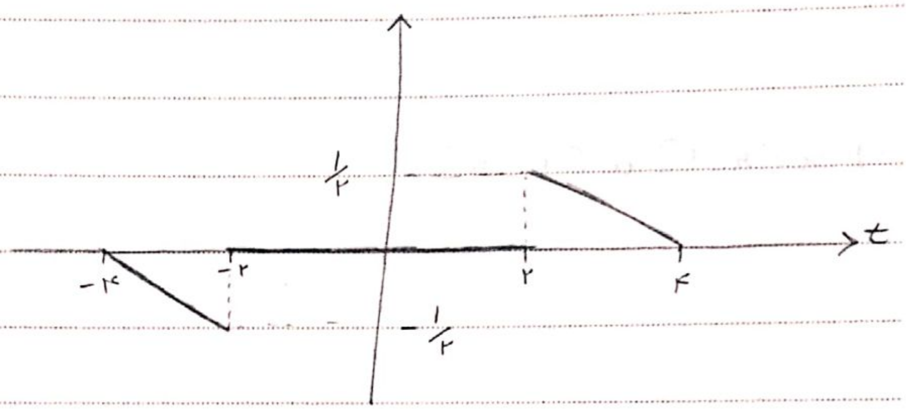


Subject

Date : Year: Month: Day:



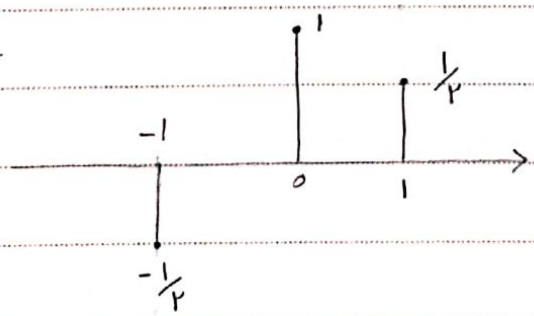
$$\text{odd}\{f(t)\} = \frac{1}{2}\left(f(t) - f(-t)\right)$$



← س۲

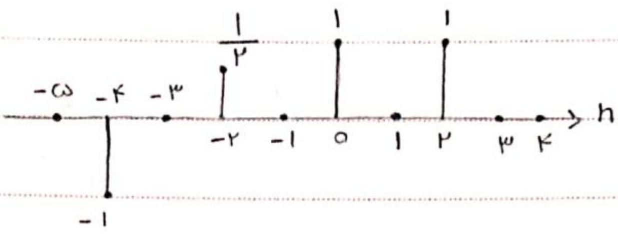
a) $x[3n]$

نکته ← غیرصحیح ها حذف می‌شوند



b) $\frac{1}{2}\left(x[n] + (-1)^n x[n]\right) = \begin{cases} 0 & n=-5 \\ -1 & n=-4 \\ 0 & n=-3 \\ \frac{1}{2} & n=-2 \\ 0 & n=-1 \\ 1 & n=0 \\ 0 & n=1 \\ 1 & n=2 \\ 0 & n=3 \\ 0 & n=4 \end{cases}$

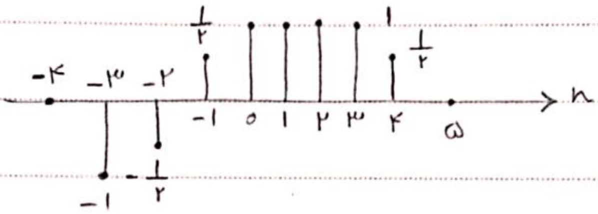
$(-1)^n x[n] = \begin{cases} 0 & n=-5 \\ -1 & n=-4 \\ \frac{1}{2} & n=-3 \\ \frac{1}{2} & n=-2 \\ -1 & n=-1 \\ 1 & n=0 \\ -1 & n=1 \\ 1 & n=2 \\ -\frac{1}{2} & n=3 \\ 0 & n=4 \end{cases}$



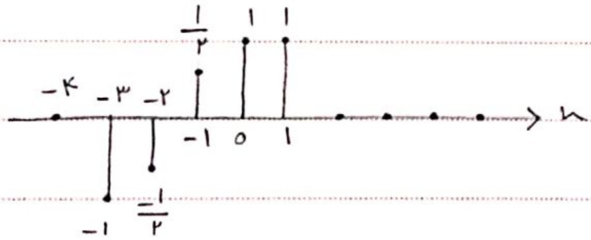
c) $x[n-1]\,u[1-n]$

برای $n \le 1$ جواب دارد و برای $n > 1$ صفر است ↲

$x[n-1] \rightarrow$

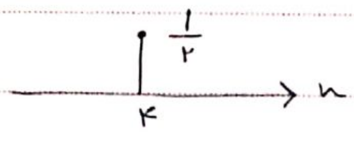


$\xrightarrow{x[n-1]\,u[1-n]}$

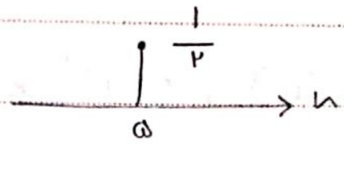


d) $x[n-1]\,\delta[n-4] - x[n-2]\,\delta[n-5]$

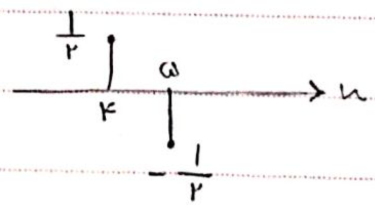
۱ واحد شیفت به راست $n=4$ ۲ واحد شیفت به راست $n=5$



$-$



$\Longrightarrow$



س۳ ←

الف) در سیگنال های فرد $x[n] = -x[-n]$ است پس $x[n] + x[-n] = 0$

همچنین می دانیم در سیگنال های فرد $x[0] = 0$ است

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] + \sum_{n=1}^{+\infty} x[n]}_{} + \underbrace{x[0]}_{0} = 0 + 0 = 0$$

$$\dots + x[-2] + x[-1] + x[1] + x[2] + \dots = 0$$

ب)

$x_1[n]$ فرد است $\longrightarrow x_1[n] = -x_1[-n]$

$x_2[n]$ زوج است $\longrightarrow x_2[n] = x_2[-n]$

$$f[n] = x_1[n]x_2[n] = -x_1[-n]x_2[-n] = -f[-n] \Longrightarrow$$

$f[n] = -f[-n] \longrightarrow$ $f[n]$ یک سیگنال فرد است

Subject

Date : Year: Month: Day:

ج)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x_e[n] + x_o[n] \right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] +$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n] + 2 \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x_o[n] x_e[n] \right)}$$

طبق قسمت ب دیدیم حاصل ضرب سیگنال زوج و فرد ← فرد است و همچنین برای یک سیگنال فرد داریم $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o[n]=0$ پس کل این عبارت صفر می شود

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$$

د)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_e(t) + x_o(t) \right)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)\,dt +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)\,dt + 2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_o(t) x_e(t) \right) dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)\,dt$$

طبق قسمت ب یک سیگنال فرد است ← این انتگرال طبق قضیه پایین صفر می شود

قضیه ← $F(x)$ یک سیگنال فرد است و فرض می کنیم $\int_{-a}^{a} F(x)\,dx$ داریم:

$$\int_{-a}^{a} F(x)\,dx = \int_{-a}^{0} F(x)\,dx + \int_{0}^{a} F(x)\,dx$$

Subject

Date : Year: Month: Day:

ادامهٔ سؤال ۳ ←

$u = -x \rightarrow du = -dx$

$\rightarrow u_1 = a$

$\rightarrow u_2 = 0$

ادامهٔ انتگرال $\rightarrow = -\int_a^0 f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(u)\,du +$

$\int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$

که این را می‌توانیم به محدودهٔ $\int_{-\infty}^{+\infty}$ هم تعمیم ببیم پس حتی این تعمیه انتگرال یک سیگنال فرد

صفر است.

س ۴ ←

$$\nearrow (x(t) + x(-t)) \times \frac{1}{2}$$

a) $\text{Even}\{\cos(4\pi t)\,u(t)\} = x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\cos(4\pi t)\,u(t) + \cos(-4\pi t)\,u(t)\right)$$

پریودیک $\longrightarrow x(t+T) = x(t) \longrightarrow \left(\cos(4\pi(t+T)) + \cos(-4\pi(t+T))\right) \times \cancel{\frac{1}{2}}\ \cancel{\forall t}$

$$= \cancel{\forall t}\ \cancel{\frac{1}{2}}\left(\cos(4\pi t) + \cos(-4\pi t)\right) \longrightarrow \cos(4\pi t + 4\pi T) = \cos 4\pi t$$

~~b) x(t) = e~~

$$\hookrightarrow \cos(-4\pi t - 4\pi T) = \cos(-4\pi t)$$

$$\Longrightarrow 4\pi T = 2k\pi \longrightarrow T = \frac{k}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow T = \frac{1}{2}$$ متناوب است

$$\Longrightarrow -4\pi T = 2k\pi \longrightarrow T = \frac{-k}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

b) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$

$$x(t) = x(t+T) \longrightarrow \underbrace{e^{j(\pi(t+T)-1)}}_{e^{j(\pi t - 1)}\cdot e^{j\pi T}} = e^{j(\pi t - 1)}$$

$$\Longrightarrow e^{j\pi T} = 1 = e^{j2\pi k} \longrightarrow \pi T = 2\pi k \longrightarrow T = 2k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} T = 2$$

متناوب است $\hookleftarrow$

Subject

Date : Year: Month: Day:

c) $x[n] = 2\cos(\frac{\pi}{4}n) + \sin(\frac{\pi}{8}n) - 2\cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})$

$x[n+N_0] = x[n]$

$\hookrightarrow 2\cos(\frac{\pi}{4}(n+N_0)) + \sin(\frac{\pi}{8}(n+N_0)) - 2\cos(\frac{\pi}{2}(n+N_0) + \frac{\pi}{4}) =$

$2\cos(\frac{\pi}{4}n) + \sin(\frac{\pi}{8}n) - 2\cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})$

$\rightarrow \cancel{2}\cos(\frac{\pi}{4}(n+N_0)) = \cancel{2}\cos(\frac{\pi}{4}n) \rightarrow \frac{\cancel{\pi}}{4}N_0 = 2K\cancel{\pi} \rightarrow N_0 = 8K \overset{K=1}{=} 8$

$\rightarrow \sin(\frac{\pi}{8}n) = \sin(\frac{\pi}{8}(n+N_0)) \rightarrow \frac{\cancel{\pi}}{8}N_0 = 2K\cancel{\pi} \rightarrow N_0 = 16K = 16$

$\rightarrow -2\cos(\frac{\pi}{2}(n+N_0) + \frac{\pi}{4}) = -\cancel{2}\cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}) \rightarrow \frac{\pi}{2}N_0 = 2K\pi \rightarrow$

$N_0 = 4K = 4$

$\rightarrow$ ک.م.م $\Rightarrow \underline{T = 16}$ متناوب است

d) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n)\cos(\frac{\pi}{4}n)$

$x[n+N_0] = x[n] \rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}(n+N_0))\cos(\frac{\pi}{4}(n+N_0)) = \cos(\frac{\pi}{2}n)$

$\cos(\frac{\pi}{4}n) \rightarrow \frac{\cancel{\pi}}{2}N_0 = 2K\cancel{\pi} \rightarrow N_0 = 4K = 4$ ک.م.م

$\hookrightarrow \frac{\cancel{\pi}}{4}N_0 = 2K\cancel{\pi} \rightarrow N_0 = 8K = 8$ $\Rightarrow \underline{T = 8}$

$\hookleftarrow$ متناوب است

Subject

Date : Year: Month: Day:

س ۵ ←

a) $y(t) = \begin{cases} t x(t) & t < |x(t)| \\ x(-t) & t \geq |x(t)| \end{cases}$

1- علیت ← چون خروجی در لحظه t_0 به مقادیر ورودی لحظات بعد از t_0 بستگی ندارد ← علّی است

2- پایداری ← ناپایدار است ← چون اگر $x(t) = 1$ را $\forall t$ داشته باشیم:

$y(t) = \begin{cases} t & t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$ ← پس به ازای ورودی محدود ← خروجی نامحدود دست میاد

3- حافظه دار است ← زیرا با برقراری شرط $t \geq |x(t)|$ مقدار خروجی به مقادیر قبلی

یعنی $x(-t)$ وابسته است

4- تغییر پذیر با زمان است ←

$x(t-t_0) = \begin{cases} t x(t-t_0) & t < |x(t-t_0)| \\ x(t_0-t) & t \geq |x(t-t_0)| \end{cases}$

با هم مساوی نیستند ← ← $\neq$

$y(t-t_0) = \begin{cases} (t-t_0) x(t-t_0) & t-t_0 < |x(t-t_0)| \\ x(t-t_0) & t-t_0 \geq |x(t-t_0)| \end{cases}$

Subject
Date : Year: Month: Day:

5ـ خطی بودن ← همگنی
← جمع آثار

$\alpha x(t) \to \alpha y(t)$

$$\alpha x(t) = \begin{cases} \alpha + x(t) & \frac{t}{|a|} < |x(t)| \\ \alpha x(-t) & \frac{t}{|a|} \geq |x(t)| \end{cases}$$

$\Longrightarrow \alpha x(t) \neq \alpha y(t) \to$ خاصیت همگنی ندارد پس خطی نیست

$$\alpha y(t) = \begin{cases} \alpha t x(t) & t < |x(t)| \\ \alpha x(-t) & t \geq |x(t)| \end{cases}$$

b) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k]\, \delta[n - 2k]$

1ـ علیت ← علی نیست چون به مقادیر آینده وابسته است

مثلا $\to y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k]\, \delta[1 - 2k] \longrightarrow k = +\infty$ به آینده بستگی دارد

2ـ حافظه دار است ← چون به مقادیر گذشته نیاز دارد

3ـ پایدار است ← $|x[n]| \leq M \longrightarrow -M \leq x[n] \leq M \longrightarrow$

$$-\sum_{k=-\infty}^{+\infty} M\, \delta[n - 2k] \leq y[n] \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M\, \delta[n - 2k] \to y[n] \leq M$$

parsian

4- تغییر پذیر با زمان است ←

$$x[n-N_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[\underbrace{k-N_0}_{k'}]\,\delta[n-2k] =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k']\,\delta[n-2N_0-2k']$$

$$y[n-N_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k]\,\delta[n-N_0-2k]$$

$$\Rightarrow x[n-N_0] \neq y[n-N_0]$$

5- خطی بودن ← همگنی

↳ جمع آثار

همگنی $\rightarrow \alpha x[n] = \alpha y[n]$

$$\alpha x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^* x^*[k]\,\delta[n-2k] = \alpha^* \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k]\,\delta[n-2k] = \alpha^* y[n]$$

$$\alpha y[n] = \alpha \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k]\,\delta[n-2k]$$

$\hookrightarrow \alpha x[n] \neq \alpha y[n] \rightarrow$ خاصیت همگنی ندارد پس خطی نیست

برای حقی کردن $x^*[K]$ را به $x[K]$ تبدیل می‌کنیم $\rightarrow$ $y[n] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x[K]\,\delta[n-2K]$

برقرار می‌شود

همگنی $\rightarrow \alpha x[n] = \alpha y[n]$

جمع آثار $\rightarrow$ $x_1[n] \rightarrow y_1[n]$

$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$

$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow y_1[n] + y_2[n]$

$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \rightarrow y[n] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} (x_1[K] + x_2[K])\,\delta[n-2K] =$

$y_1[n] + y_2[n]$

c) $y[n] = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^K} x[K]$

1- علی $\leftarrow$ علی نیست چون مقادیر در لحظه می‌تواند به آینده نیز وابسته باشد مثلاً اگر y در لحظه n را بخواهیم بدست آوریم به $\sum_{K=0}^{+\infty} x[K]$ را نیاز داریم که این باعث می‌شه به آینده وابسته باشه

2- حافظه‌دار است $\leftarrow$ چون مقادیرش به آینده وابسته است $\leftarrow$ همان توضیح علی

3- پایدار نیست $\leftarrow$ چون اگر $x[n]=1, \forall n$ داشته باشیم $\leftarrow$

$y[n] = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^K} \rightarrow$ نمی‌توانیم به ازای ورودی محدود، خروجی محدود داشته باشیم

4- تغییرپذیر با زمان است ←

$$x[n-n_0] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^k} x[k-n_0]$$

$\neq \longrightarrow$ نامساوی

$$y[n-n_0] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^{(n-n_0)}}{4^k} x[k-n_0]$$

5- خطی ← همگنی

↳ جمع آثار

همگنی $\longrightarrow \alpha x[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^k} \alpha x[k] = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^k} x[k] =$

$\alpha y[n]$ ← همگن است

جمع آثار $\longrightarrow x_1[n] \longrightarrow y_1[n]$

$x_2[n] \longrightarrow y_2[n]$

$x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow y_1[n] + y_2[n]$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^k} (x_1[n] + x_2[n])$$

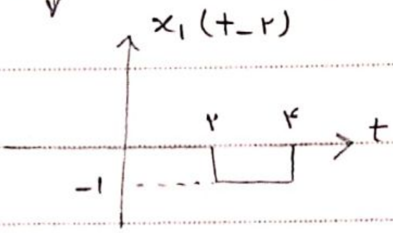
$\parallel$

$$y_1[n] + y_2[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^k} x_1[n] + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^k} x_2[n]$$

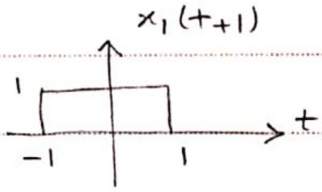
↳ خطی است

س ۶ ←

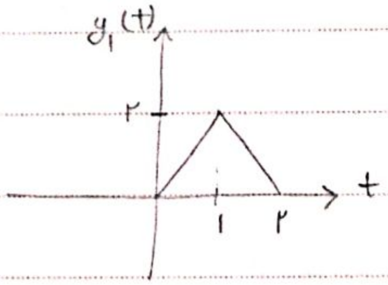
الف) $x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$



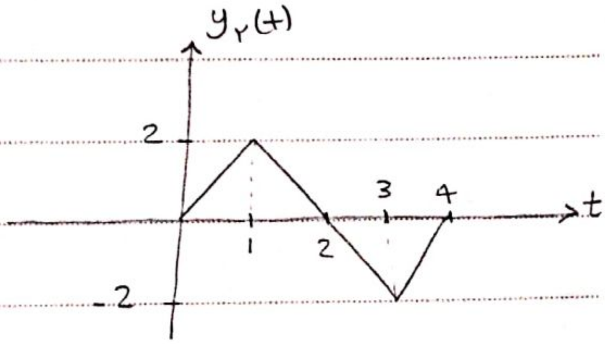
$x_3(t) = x_1(t) + x_1(t+1)$

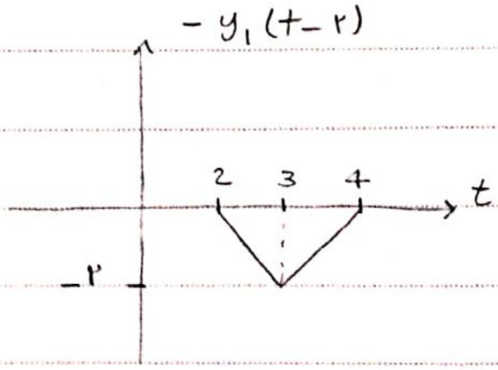


ب) چون سیستم LTI است $\rightarrow$ $y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$

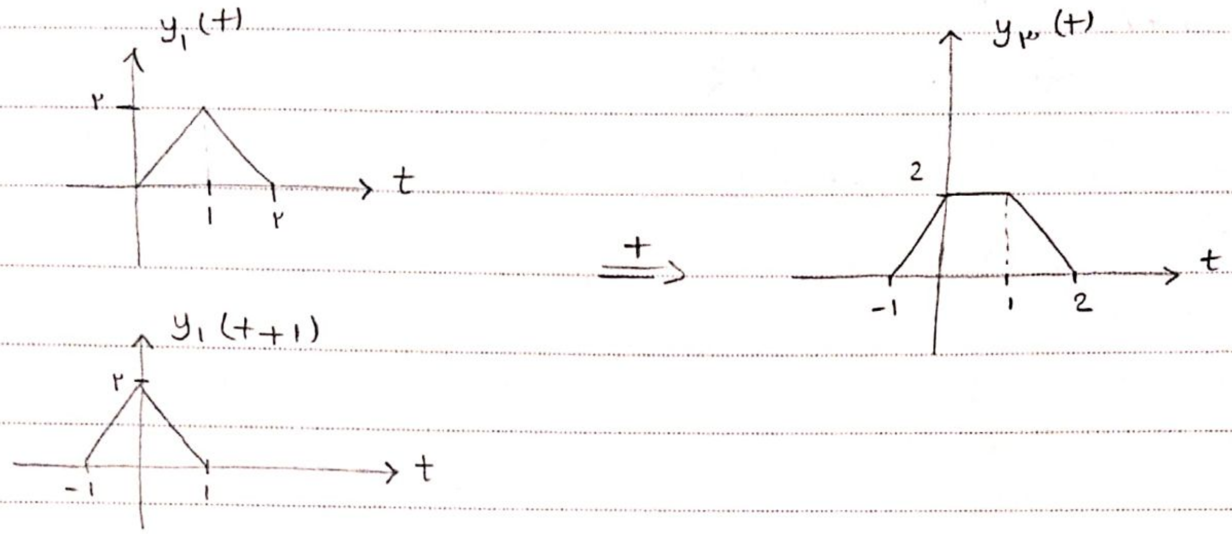


$\overset{+}{\Longrightarrow}$





چون سیستم LTI است → $y_3(t) = y_1(t) + y_1(t+1)$



س ۷ ←

a) $y[n] = n\,x[n]$ → وارون‌پذیر نیست به ازای ورودی $3\delta[n]$, $\delta[n]$
دارای خروجی یکسان است

b) $y[n] = x[n]\,x[n-1]$ → وارون‌پذیر نیست به ازای ورودی $x[n]$,
$-x[n]$ دارای خروجی یکسان است

c) $y[n] = \begin{cases} x[n-1] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$

وارون‌پذیر است ←

$x[n-1]$ $\quad n \geq 1$ $\Rightarrow$ سیستم وارون
0 $\quad n = 0$ $\quad \hookrightarrow y[n] = x[n+1] \quad n \geq 0$

$x[n]$ $\quad n \leq -1 \Rightarrow$ وارون system $\rightarrow y[n] = x[n] \quad n < 0$

d) $y(t) = \begin{cases} x^4(t) & t \geq 0 \\ x(t) & t < 0 \end{cases}$

وارون پذیر نیست ←

$x(t) = \begin{cases} \pm \sqrt[4]{y(t)} & t \geq 0 \\ y(t) & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = u(t) \\ x(t) = -u(t) \end{cases} \Rightarrow$ خروجی یکسان است

e) $y(t) = \cos[x(t)]$

وارون پذیر نیست، به ازای $x(t)$ و $x(t) + 2\pi$ خروجی یکسان داریم ←

f) $y(t) = x(t-a) \rightarrow$ وارون پذیر است، این system به اندازه a شیفت خورده است اگر همین را بصورت برعکس شیفت دهیم دوباره مقدار اولیه بدست می آید ↓

وارون system $\rightarrow y(t) = x(t+a)$