حوری دهش 9821413

## سوال 1:

برای اثبات نا محدود بودن برنامه ریزی خطی داده شده باید نشان دهیم که تابع هدف بی نهایت است و مقدار بهینه ندارد. در مسئله برنامه ریزی خطی این سوال هدف از برنامه ریزی بهینه سازی کردن عبارت $\max\,(x_1 - x_2)$ است. شرایط محدودیت ها به صورت زیر است:

$$-2x_1 + x_2 \le -1$$

$$-x_1 - 2x_2 \le -2$$

$$x_1\,,\, x_2 \ge 0$$

اگر بتوانیم نشان دهیم که تابع هدف بی نهایت است می توانیم بگوییم مسئله برنامه ریزی خطی نا محدود است.

در اینجا، اگر $x_1$ و $x_2$ بی نهایت شوند تابع هدف $\max\,(x_1 - x_2)$ نیز بی نهایت می‌شود. محدودیت‌ها نیز به صورت $-2x_1 + x_2 \le -1$ و $-x_1 - 2x_2 \le -2$ تعریف شده‌اند.

حالا برای نشان دادن بی نهایت بودن تابع هدف می توانیم برای مثال در نظر بگیریم $x_1$ و $x_2$ را هر دو بسیار بزرگتر از هر مقدار دلخواه قرار دادیم مثلا $x_1 = 100000$ و $x_2 = 100000$ است در این صورت تابع هدف $\max\,(x_1 - x_2)$ بی نهایت خواهد شد.

بنابراین با توجه به نشان دادن بی نهایت بودن تابع هدف می توانیم نتیجه بگیریم که برنامه ریزی خطی این سوال نا محدود است.

## سوال 2:

----

## سوال 3:

برای یافتن کوتاه ترین مسیر بین دو رأس دلخواه در یک گراف جهت دار و بدون وزن می‌توانیم آن را به عنوان یک مسئله برنامه ریزی خطی، فرمول بندی کنیم.

به عنوان متغیرهای تصمیم، برای هر یال e در مجموعهٔ یال‌ها متغیر تصمیم دودویی x(e) را تعریف می‌کنیم اگر x(e) = 1 باشد به این معنی است که یال e به عنوان بخشی از مسیر کوتاه انتخاب شده است در غیر این صورت x(e) = 0 است.

تابع هدف:

هدف ما کمینه کردن تعداد کل یال های انتخاب شده در مسیر است بنابراین تابع هدف به صورت زیر تعریف می‌شود:

کمینه کردن: $\Sigma x(e)$

شرایط محدودیت:

1. برای هر رأس v در V به جز رأس مبدأ و مقصد:

$\Sigma x(e) = 1$، جایی که e یک یال است که به رأس v وارد می‌شود

$\Sigma x(e) = 1$، جایی که e یک یال است که از رأس v خارج می‌شود

2. برای رأس مبدأ s:

$\Sigma x(e) = 0$، جایی که e یک یال است که از رأس s خارج می‌شود

3. برای رأس مقصد d:

$\Sigma x(e) = 0$، جایی که e یک یال است که وارد رأس d می‌شود

4. شرط حفظ تعادل جریان:

برای هر رأس v در V به جز رأس مبدأ و مقصد:

$\Sigma x(e) - \Sigma x(f) = 0$، جایی که e یک یال است که وارد رأس v می‌شود و f یک یال است که از رأس v خارج می‌شود

محدودیت دودویی:

$x(e) \in \{0, 1\}$ برای هر یال e در E

این فرمول بندی برنامه ریزی خطی، تضمین می کند که یال های انتخاب شده یک مسیر معتبر، از رأس مبدأ به رأس مقصد را تشکیل می دهند و در عین حال تعداد یال ها را در مسیر به حداقل می رساند پاسخ به این مسئله برنامه ریزی خطی، مسیر کوتاه بین دو رأس دلخواه در گراف جهت دار و بدون وزن را ارائه خواهد کرد.

## سوال 4:

کاهش Vertex Cover به Set Cover:

برای کاهش مسئله Vertex Cover به مسئله Set Cover به ازای هر یال در گراف، یک مجموعه دو عنصری (زیرمجموعه) در مسئله Set Cover می‌سازیم این دو عنصر متعلق به هر یال است سپس مجموعهٔ F را تشکیل دهنده ی تمام این زیرمجموعه ها قرار می دهیم در نتیجه تعداد کمترین عناصر لازم برای پوشش تمام یال ها در مسئله Vertex Cover، تعداد کمترین زیرمجموعه های لازم برای پوشش تمام زیرمجموعه ها در مسئله Set Cover خواهد بود.

کاهش Set Cover به Vertex Cover:

برای کاهش مسئله Set Cover به مسئله Vertex Cover به ازای هر زیرمجموعهٔ مجموعه S در مسئله Set Cover، یک یال در گراف می سازیم این یال با تمام عناصر زیرمجموعه مرتبط است سپس هدف این

است که با انتخاب حداقل تعداد رئوس، تمام یال های ساخته شده را پوشش دهیم به عبارت دیگر با انتخاب حداقل تعداد رئوس، تمام زیرمجموعه ها در مسئله Set Cover را پوشش می دهیم در نتیجه تعداد کمترین زیرمجموعه های لازم برای پوشش تمام زیرمجموعه ها در مسئله Set Cover، تعداد کمترین رئوس لازم برای پوشش تمام یال ها در مسئله Vertex Cover خواهد بود.

## سوال 6:

کاهش Independent Set به Clique:

برای کاهش مسئله Independent Set به مسئله Clique باید به ازای هر رأس در گراف مورد نظر، یک رأس جدید در گراف Clique ایجاد کنیم سپس برای هر رأس u و v که در گراف اصلی با یکدیگر مجاور هستند، در گراف Clique یالی بین رئوس متناظر آنها بسازیم در نتیجه بیشترین مجموعه استقلال در گراف اصلی معادل با بیشترین کلیک در گراف Clique خواهد بود.

کاهش Clique به Independent Set:

برای کاهش مسئله Clique به مسئله Independent Set باید به ازای هر رأس در گراف مورد نظر، یک رأس جدید در گراف Independent Set ایجاد کنیم سپس برای هر دو رأس u و v که در گراف اصلی به یکدیگر وصل نیستند، در گراف Independent Set یالی بین رئوس متناظر آنها بسازیم در نتیجه بیشترین کلیک در گراف اصلی معادل با بیشترین مجموعه استقلال در گراف Independent Set خواهد بود.