

تمرین های تحویلی:

۱- الف) دو نفر هر یک سرمایه ای به میزان یک تومان در اختیار دارند و می توانند هر مقدار از آن ($0 \leq x_1, x_2 \leq 1$) را برای انجام یک کار عام المنفعه به اشتراک بگذارند. منفعت حاصل به میزان $2.5\sqrt{x_1 + x_2}$ به هر دو خواهد رسید. به این ترتیب، تابع سود بازیکنان به صورت $u_i(x_1, x_2) = 2.5\sqrt{x_1 + x_2} - x_i$ است. با فرض این که دو نفر مقادیر x_1 و x_2 را همزمان انتخاب کنند، توابع بهترین پاسخ بازیکنان و تعادل های نش را بیابید.

ب) فرض کنید نفر دوم از این کار سود بیشتری ببرد و توابع سود به صورت $u_1(x_1, x_2) = 2.5\sqrt{x_1 + x_2} - x_1$ و $u_2(x_1, x_2) = 3\sqrt{x_1 + x_2} - x_2$ قابل مدل کردن باشد. توابع بهترین پاسخ بازیکنان و تعادل های نش را بیابید.

۲- یک کمیته دو نفره، مسوول قیمت گذاری بر روی یک کالا هستند. هر عضو قیمت پیشنهادی خود x_i ($i = 1, 2$) را اعلام می کند که عددی بین صفر و ده است؛ سپس میانگین این دو قیمت، یعنی $x = (x_1 + x_2)/2$ ، به عنوان قیمت کارشناسی اعلام می شود. فرض کنید از نظر عضو اول، ارزش واقعی کالا برابر $v_1 = 6$ باشد و از نظر عضو دوم، ارزش واقعی کالا برابر $v_2 = 3$ باشد و میزان رضایت هر نفر از نتیجه، برابر باشد با $u_i(x_1, x_2) = -(x - v_i)^2$. مطلوب است الف) نمایه های تعادل نش. ب) تعیین اکشن های غالب و مغلوب اکید برای هر دو بازیکن.

۳- سه حزب A، B و C در مجلس دارای به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۴۰ نماینده (حق رای) هستند. رئیس مجلس با رای گیری روی برگه انتخاب می شود و هر حزب یک کاندیدا با نام های N_A ، N_B و N_C را معرفی کرده است. هر حزب همه نمایندگان خود را موظف می کند تا به کاندیدایی که حزب در جلسه ی درون حزبی خود مشخص می کند رای دهند. فرض کنید اولویت های کاندیداها از نظر احزاب به صورت جدول زیر باشد و این جدول را همه احزاب می دانند. اگر این وضعیت را با یک بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی مدل کنیم (که احزاب، بازیکنان هستند و کاندیدای انتخابی هر حزب برای رای دادن، استراتژی آن حزب است)، مطلوب است محاسبه همه ی تعادل های نش؛ مشخص کنید که در هر وضعیت تعادل، کدام کاندید برنده می شود.

حزب A	$N_A > N_B > N_C$
حزب B	$N_B > N_A > N_C$
حزب C	$N_C > N_A > N_B$

۴- n کشاورز در یک مزرعه شریک هستند و کار می کنند. هر کشاورز i ، به میزان $0 \leq x_i$ در مزرعه تلاش می کند و میزان کل محصول برابر $g(\sum_{k=1}^n x_k)$ است که به طور برابر بین افراد توزیع می شود و در آن، تابع $g(\cdot)$ دوبار مشتق پذیر و $g'(\cdot) > 0$ و $g''(\cdot) \leq 0$ است. همچنین، میزان تلاش x_i منجر به هزینه $\frac{1}{2}x_i^2$ برای کشاورز i ام می شود. به این ترتیب، تابع سود کشاورز i ام به صورت $u_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n}g(\sum_{k=1}^n x_k) - \frac{1}{2}x_i^2$ است. هر کشاورز می خواهد با تنظیم میزان تلاش خود، یعنی x_k ، سود خود را بیشینه کند. نشان دهید این بازی تنها یک تعادل نش دارد که آن هم متقارن است، یعنی، $x_1^* = x_2^* = \dots = x_n^* = x^*$ و مقدار x^* را بر حسب $g(\cdot)$ به دست آورید. (تا جای ممکن در استدلال ها دقت کنید. مثلاً شرایط $g'(\cdot) > 0$ و $g''(\cdot) \leq 0$ چه تاثیری روی جواب دارند؟)

۵- در یک بازی دو نفره، هر شرکت کننده یک عدد صحیح از ۱ تا ۴ روی یک کاغذ نوشته و به داور می دهد. هر کس عددش به $\frac{2}{3}$ مجموع دو عدد نزدیک تر باشد، مبلغ دو دلار برنده می شود (فرد دیگر هیچ مقداری نمی برد) اما در صورت تساوی فاصله با $\frac{2}{3}$ ، هر کس یک دلار می برد. اگر بازی را به صورت بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی مدل نماییم، ابتدا اکشن های مغلوب اکید و ضعیف را مشخص کرده و سپس نمایه های تعادل نش را به دست آورید.

۶- مساله ی بالا را برای حالتی که عدد انتخابی یک عدد حقیقی (نه الزاما صحیح) بین ۱ تا ۴ باشد تکرار کنید.

۷- جدول زیر، جدول سود بازیکنان در یک بازی استراتژیک است. الف) با کمک حذف مکرر اکشن های مغلوب اکید، جدول را ساده کرده و سپس نقاط تعادل نش را بیابید. ب) با کمک حذف مکرر اکشن های مغلوب ضعیف، جدول را ساده کرده و سپس نقاط تعادل نش اکید را بیابید.

3,1	2,2	1,1	2,3
2,2	1,3	1,1	1,0
2,3	0,2	0,4	-1,3
4,0	-1,1	0,6	0,4

تمرین های غیر تحویلی:

۸- قیمت گذاری دسته جمعی با محاسبه میانگین: یک کمیته با ۳ عضو، مسوول قیمت گذاری بر روی یک کالا هستند. فرض کنید از نظر اعضای اول تا سوم، ارزش واقعی کالا به ترتیب برابر است با $v_1 = 3$ ، $v_2 = 9$ و $v_3 = 9$ ، ارزش واقعی کالا برابر i باشد. مکانیزم تعیین قیمت به این صورت تعیین شده است که هر عضو i ($i = 1, 2, 3$)، قیمت پیشنهادی خود x_i ، که می تواند هر مقداری بین صفر تا ده باشد، را بر روی یک برگه نوشته و در یک صندوق می اندازد. سپس میانگین این قیمت ها به عنوان قیمت کارشناسی اعلام می شود، یعنی $x = (x_1 + x_2 + x_3)/3$. فرض کنید که میزان رضایت عضو i از نتیجه، برابر با $u_i(x_1, x_2, x_3) = -|x - v_i|$ باشد (هر چه قیمت نهایی به ارزش واقعی مد نظر او نزدیکتر باشد برای آن فرد، بهتر است). مطلوب است:

الف) تابع بهترین پاسخ، (ب) نقاط تعادل نش، و (ج) اکشن های غالب-مغلوب اکید و ضعیف.

۹- قیمت گذاری دسته جمعی با محاسبه میانه: سوال بالا را با این تغییر مجددا حل نمایید که به جای میانگین، میانه (median) قیمت ها به عنوان قیمت کارشناسی اعلام می شود، یعنی $x = \text{median}(x_1, x_2, x_3)$.

۱۰- حراج با پاکت در بسته: در یک مزایده برای خرید یک شی عتیقه، n متقاضی شرکت کرده اند و هر نفر، قیمت پیشنهادی خود x_i را در پاکت مهر و موم شده تحویل می دهد و فردی که بالاترین قیمت را پیشنهاد بدهد برنده مزایده خواهد شد. از نظر نفر i ام (که $i = 1, 2, \dots, n$)، ارزش کالا حداکثر برابر v_i است و فرد به هیچ عنوان حاضر نیست مبلغی بیشتر برای کالا بپردازد. همچنین، از نظر نفر i ام، تصاحب کالا با هر قیمتی کمتر از v_i بهتر از عدم تصاحب آن است. و نیز واضح است که هر فرد ترجیح می دهد با قیمت پایین تری کالا را تصاحب نماید. در دو حالت زیر، تابع بهترین پاسخ و تعادل نش های سیستم را بیابید.

الف) حراج با قیمت اول (First-price sealed-bid auctions): در این حالت برنده مزایده باید مبلغ پیشنهادی خود (که بالاترین مبلغ پیشنهادی بوده است) راپردازد.

ب) حراج با قیمت دوم (Second-price sealed-bid auctions): در این حالت برنده باید دومین مبلغ پیشنهادی راپردازد.

- برای ساده سازی از حالت هایی که چند قیمت پیشنهادی، با هم حداکثر شده اند صرف نظر کنید؛ همچنین فرض کنید $n=2$ نابرابر هستند.

- پیشنهاد: ابتدا مساله را برای $n = 2$ حل نمایید و سپس جواب را به حالت کلی بسط دهید.

پیشنهاد برای مطالعه بیشتر: در مورد بازی های پتانسیل (Potential Games) و خواص اصلی و مهم آنها، جستجوی کوتاهی انجام دهید.

موفق باشید

