

به نام خدا

طراحی سیستم های دیجیتال ۱

فصل سوم

ساده سازی با استفاده از جدول کارنو (K-Map)

✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ یک نمایش گرافیکی از جدول صحت است.

❖ جدول کارنو تابع دو متغیره:

		A		AB	$f(AB)$
		B			
0	0	0	2	00	
	1	1	3	01	
1	0	1	3	10	
	1	0	2	11	

		A	
B	0	m_0	m_2
	1	m_1	m_3

❖ جدول کارنوی تابع سه متغیره:

		AB			
		C			
0	00	0	2	6	4
	01	1	3	7	5
1	11				
	10				

		A			
C	0	m_0	m_2	m_6	m_4
	1	m_1	m_3	m_7	m_5
		B			

✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ جدول کارنو تابع چهار متغیره:

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	4	2	8
01	1	5	3	9
11	6	7	5	11
10	12	13	14	15

		A			
		0	1	2	3
C	D	0	1	2	3
	1	4	5	6	7
	2	8	9	10	11
	3	12	13	14	15
		B			
		0	1	2	3

ABC \ DE	000	001	011	010
00	0	4	2	8
01	1	5	3	9
11	6	7	5	11
10	12	13	14	15

ABC \ DE	100	101	111	110
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

❖ جدول کارنوی تابع پنج متغیره:

✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ رسم جدول کارنوی یک تابع:

$$f(A, B, C) = m(0, 3, 5) = m_0 + m_3 + m_5$$

$$= \prod M(1, 2, 4, 6, 7) = M_1 M_2 M_4 M_6 M_7$$

AB \ C		A			
		00	01	11	10
C	0	1	0	0	0
	1	0	1	0	1

AB \ C		A			
		00	01	11	10
C	0	1			
	1		1		1

AB \ C		A			
		00	01	11	10
C	0		0	0	0
	1	0		0	

✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ رسم جدول کارنوی یک تابع:

یافتن لیست جملات مینیمم یا ماکزیمم یک تابع

$$f(A, B, C) = AB + B\bar{C}$$

AB \ C		A			
		00	01	11	10
C	0	0	1	1	0
	1	0	0	1	0

Diagram illustrating the Karnaugh map for the function $f(A, B, C) = AB + B\bar{C}$. The map shows the function value (0 or 1) for each combination of A, B, and C. The variables A, B, and C are labeled on the axes. The function is 1 for the combinations (A,B,C) = (0,1,0), (1,1,0), (1,1,1), and (1,0,1). The map is divided into four groups: $B\bar{C}$ (top-left), AB (bottom-right), AB (bottom-left), and $B\bar{C}$ (top-right).

$$f(A, B, C) = \sum m(2, 6, 7)$$

AB \ C		A			
		00	01	11	10
C	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0

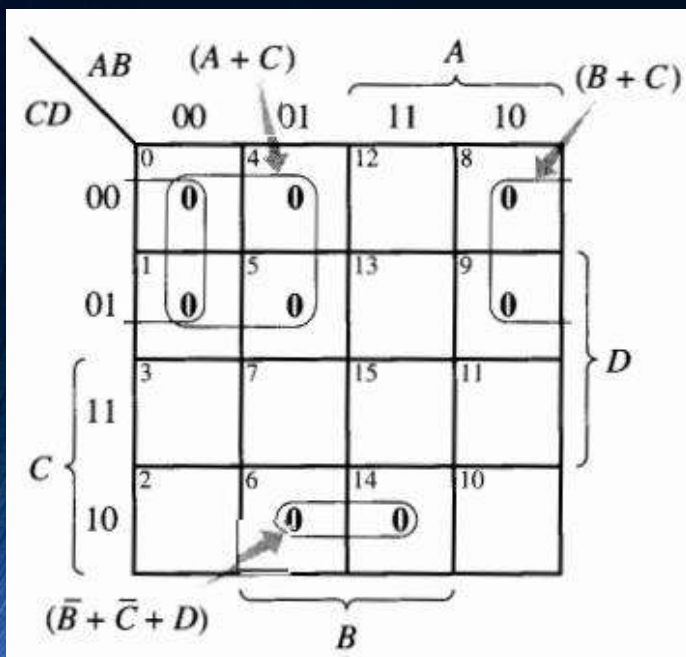
Diagram illustrating the Karnaugh map for the function $f(A, B, C) = \prod M(0, 1, 3, 4, 5)$. The map shows the function value (0 or 1) for each combination of A, B, and C. The variables A, B, and C are labeled on the axes. The function is 0 for the combinations (A,B,C) = (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), and (1,1,1). The map is divided into four groups: $B\bar{C}$ (top-left), AB (bottom-right), AB (bottom-left), and $B\bar{C}$ (top-right).

$$f(A, B, C) = \prod M(0, 1, 3, 4, 5)$$

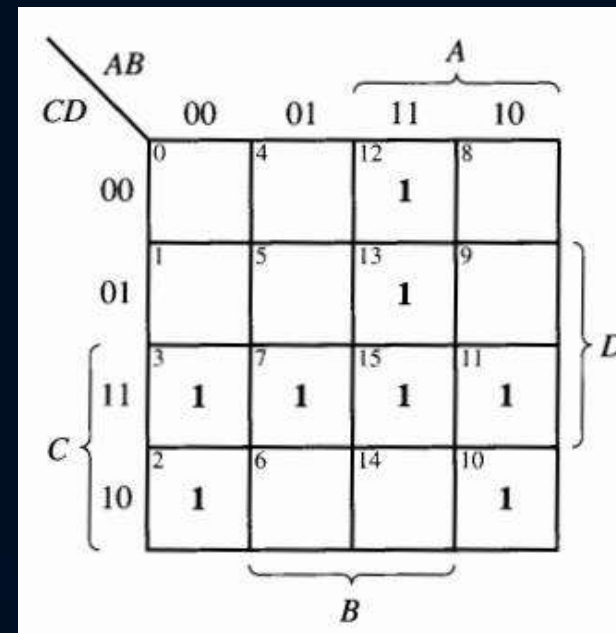
✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ رسم جدول کارنوی یک تابع به فرم POS:

$$f(A, B, C, D) = (A + C)(B + C)(\bar{B} + \bar{C} + D)$$



$$f(A, B, C, D) = \prod M(0, 1, 4, 5, 6, 8, 9, 14)$$

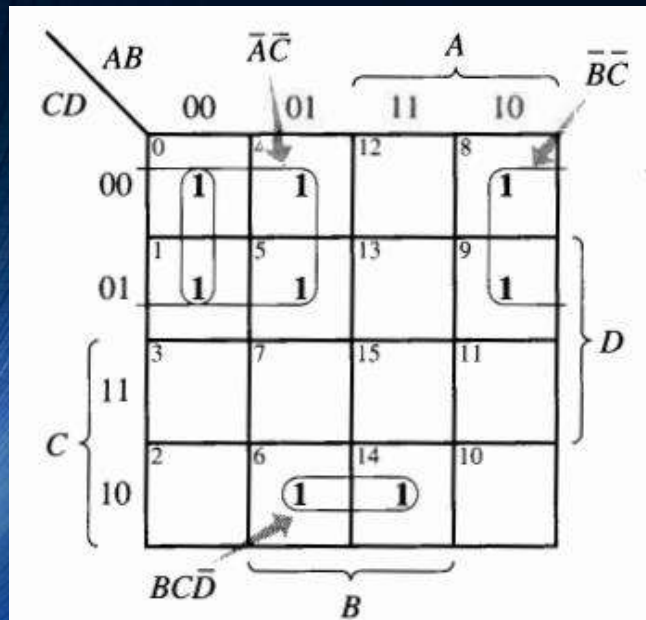


$$f(A, B, C, D) = \sum m(2, 3, 7, 10, 11, 12, 13, 15)$$

✓ جدول کارنو (K-Map)

$$f(A, B, C, D) = (A + C)(B + C)(\bar{B} + \bar{C} + D)$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(A, B, C, D) &= \overline{(A + C)(B + C)(\bar{B} + \bar{C} + D)} \\ &= \overline{(A + C)} + \overline{(B + C)} + \overline{(\bar{B} + \bar{C} + D)} \\ &= \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} + BCD\end{aligned}$$



❖ رسم جدول کارنوی یک تابع به فرم POS:

روش دیگر برای نشان دادن توابع به فرم POS در جدول کارنو، گرفتن متمم و استفاده از قضیه دمورگان است.

❖ یک های تابع \bar{f} در جدول کارنو همان صفرهای تابع f می باشند که معادل با لیست جملات ماکزیمم تابع f هستند.

❖ صفر های تابع \bar{f} در جدول کارنو همان یک های تابع f می باشند که معادل با لیست جملات مینیمم تابع f هستند.

$$f(A, B, C, D) = \prod M(0,1,4,5,6,8,9,14) = \sum m(2,3,7,10,11,12,13,15)$$

✓ جدول کارنو (K-Map)

❖ مثال: لیست جملات مینیمم تابع را بیابید.

$$f(A, B, C, D) = (\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + C + \bar{D})(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})$$

$$\begin{aligned}\bar{f}(A, B, C, D) &= \overline{(\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} + C + \bar{D})(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})} \\ &= \overline{(\bar{A} + \bar{B})} + \overline{(\bar{A} + C + \bar{D})} + \overline{(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})} \\ &= AB + A\bar{C}D + BCD\end{aligned}$$

AB \ CD		A			
		00	01	11	10
CD	00	0	4	12	8
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

Groupings in the K-map:

- Vertical group (CD=00, 01, 11, 10) for A=11: 12, 13, 15, 14
- Horizontal group (AB=01, 11) for CD=01: 5, 13
- Horizontal group (AB=11, 10) for CD=11: 15, 11
- Vertical group (AB=11, 10) for CD=00, 01, 11, 10: 12, 13, 15, 14

AB \ CD		A			
		00	01	11	10
CD	00	0	4	12	8
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

Groupings in the K-map:

- Vertical group (CD=00, 01, 11, 10) for A=11: 12, 13, 15, 14
- Horizontal group (AB=01, 11) for CD=01: 5, 13
- Horizontal group (AB=11, 10) for CD=11: 15, 11
- Vertical group (AB=11, 10) for CD=00, 01, 11, 10: 12, 13, 15, 14

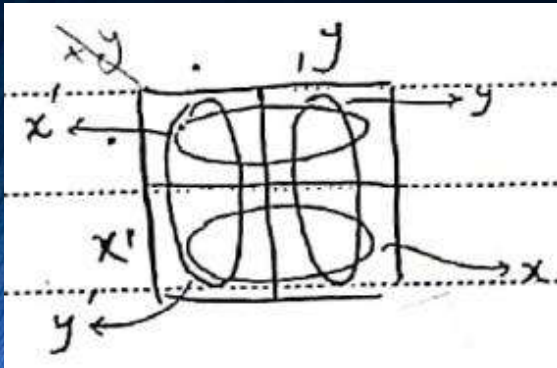
$$f(A, B, C, D) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11)$$

✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

❖ تعریف همسایگی: دو جمله مینیم m_i و m_j بصورت منطقی همسایه هستند (Logically Adjacent) اگر آنها تنها در یک متغیر باهم متفاوت باشند. مانند $(m_{14}) ABC\bar{D}$ و $(m_{12}) AB\bar{C}\bar{D}$.

❖ در این حالت این دو می توانند باهم ترکیب شوند که نتیجه آن $AB\bar{D}$ می شود.

❖ بطور کلی هر دو ترم همسایه می توانند ترکیب شده و یک متغیر را حذف کنند.



$$f(x, y) = \sum m(1, 2, 3)$$

		y	
		0	1
x	0	m_0	m_1
	1	m_2	m_3

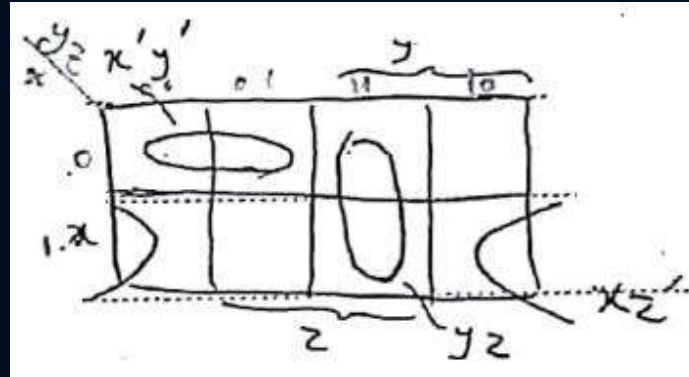
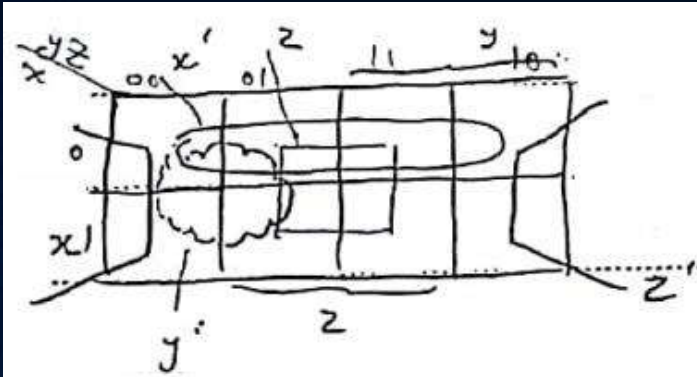
❖ تعداد خانه های یک همسایگی توان هایی از ۲ هستند.

$$f(x, y) = \bar{x}y + x\bar{y} + xy = x + y$$

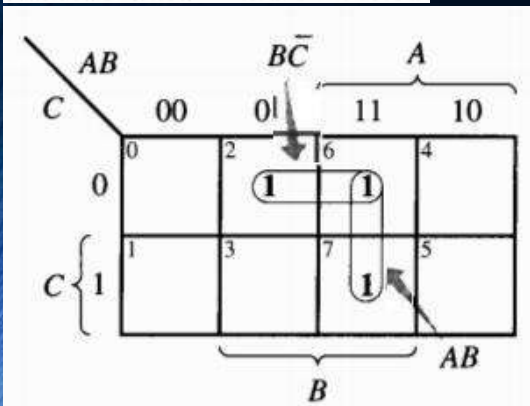
❖ عبارت معادل همسایگی ها می شود آن متغیرهایی که تغییر نکرده اند.

✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

❖ کارنوی ۳ متغیره:

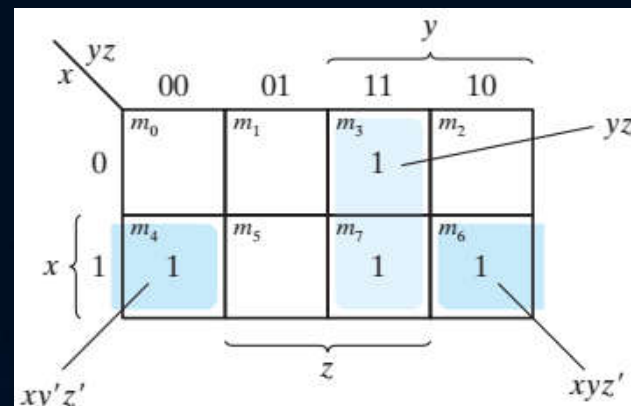


$$f(A, B, C) = AB + B\bar{C}$$



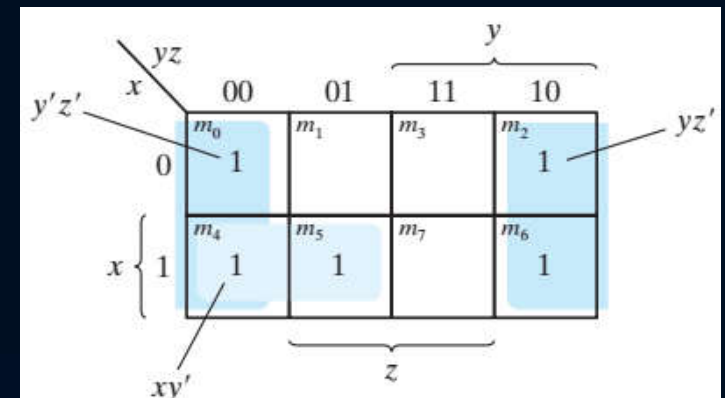
$$f(A, B, C) = B\bar{C} + AB$$

$$F(x, y, z) = \Sigma(3, 4, 6, 7)$$



$$f(x, y, z) = x\bar{z} + yz$$

$$F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$$



$$f(x, y, z) = \bar{z} + x\bar{y}$$

✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

$$f(A, B, C) = AB + B\bar{C}$$

C \ AB	A			
	00	01	11	10
0		1	1	
1			1	

Groupings: $B\bar{C}$ (cells 2, 3) and AB (cells 3, 7).

$$f(A, B, C) = B\bar{C} + AB$$

$$F(x, y, z) = \Sigma(3, 4, 6, 7)$$

x \ yz	y			
	00	01	11	10
0	m_0	m_1	1 (m_3)	m_2
1	1 (m_4)	m_5	1 (m_7)	1 (m_6)

Groupings: yz (cells 3, 2) and $xy'z'$ (cells 4, 5).

$$f(x, y, z) = x\bar{z} + yz$$

$$F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$$

x \ yz	y			
	00	01	11	10
0	1 (m_0)	m_1	m_3	1 (m_2)
1	1 (m_4)	1 (m_5)	m_7	1 (m_6)

Groupings: \bar{z} (cells 0, 2, 4, 6) and xy' (cells 4, 5).

$$f(x, y, z) = \bar{z} + xy'$$

❖ در کارنوی ۳ متغیره:

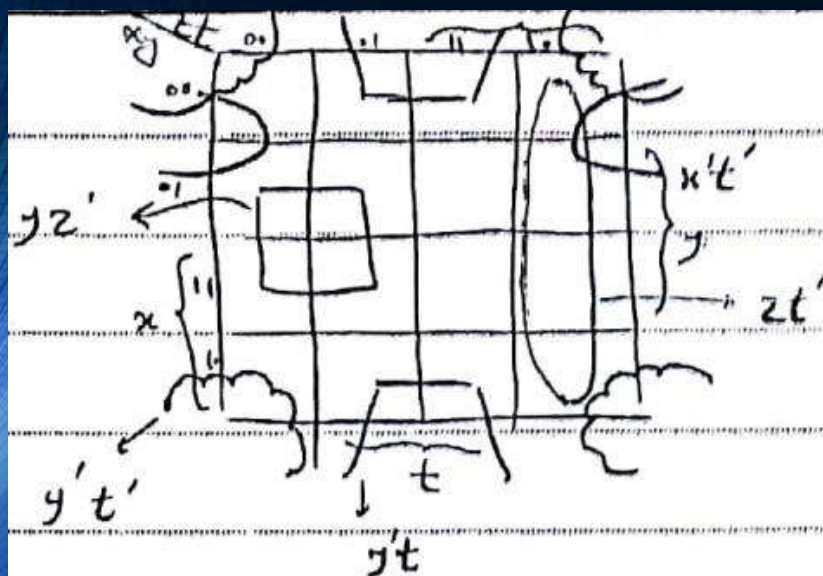
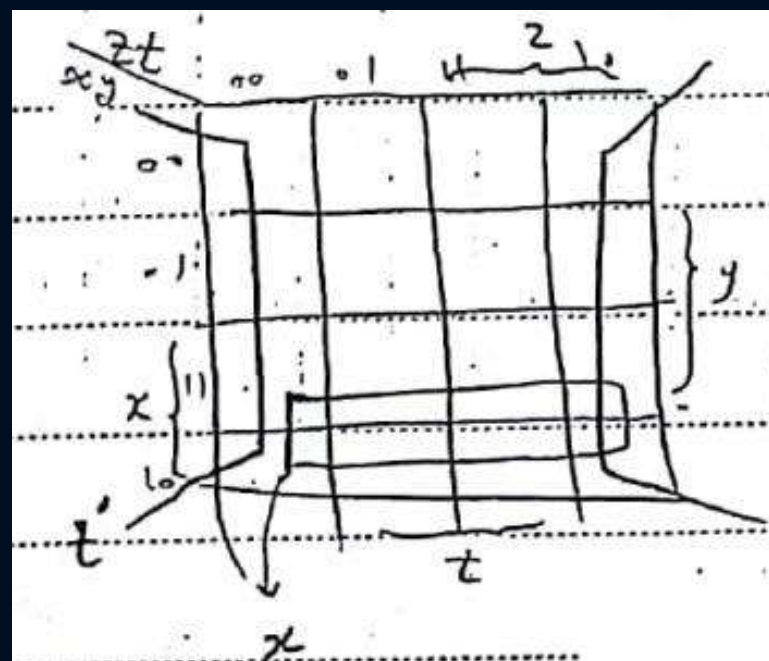
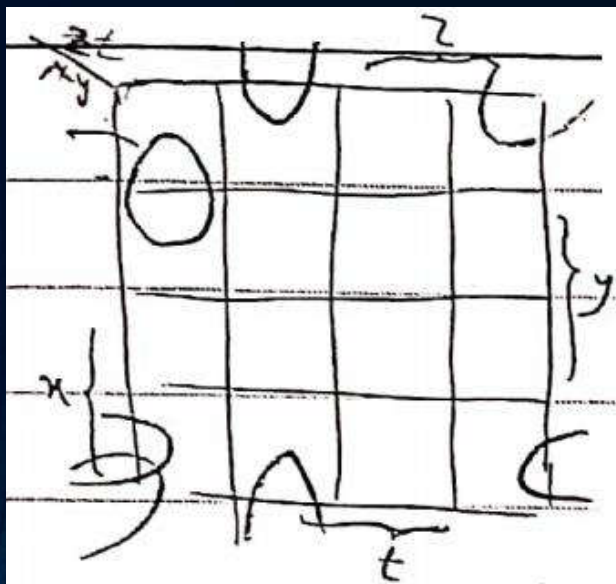
✓ هر ۲ خانه همسایه معادل می شود با ۲ متغیر (حذف یک متغیر)

✓ هر ۴ خانه همسایه معادل می شود با ۱ متغیر (حذف دو متغیر)

✓ ۸ خانه همسایه معادل است با تابعی که همیشه یک است

✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

❖ کارنوی ۴ متغیره:



✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

$$f(A, B, C, D) = \sum m(1, 2, 4, 6, 9)$$

AB \ CD		A			
		00	01	11	10
C	00	0	1	12	8
	01	1	5	13	9
11	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

$$f(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{C}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{D}$$

$$F(w, x, y, z) = \sum(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$

wx \ yz		y			
		00	01	11	10
w'y'z'	00	1	1		1
	01	1	1		1
xy'z'	11	1	1		1
	10	1	1		

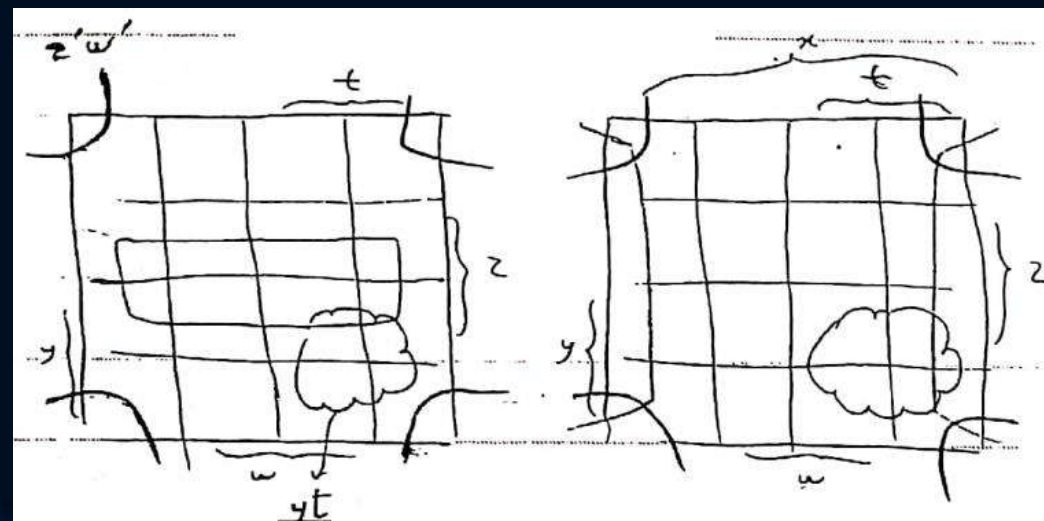
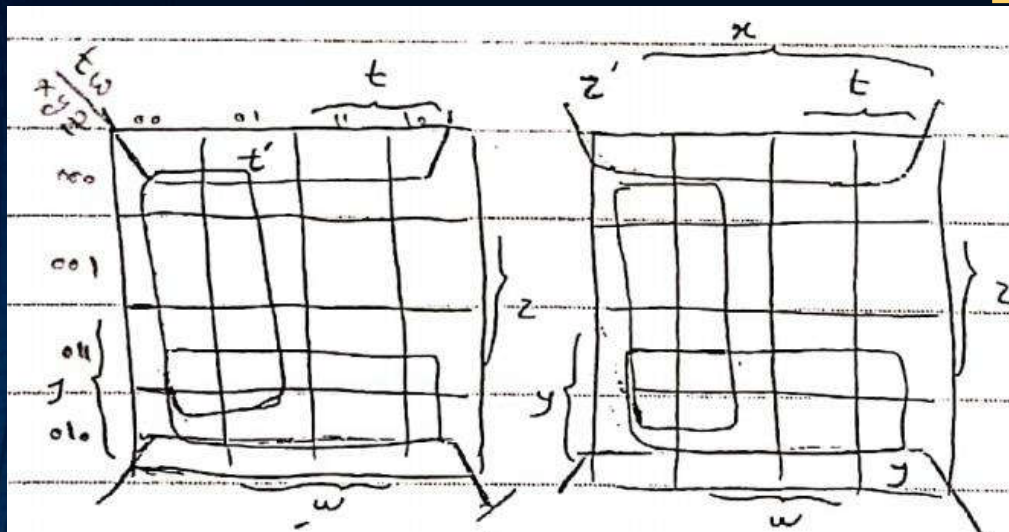
$$F = y' + w'z' + xz'$$

❖ در کارنوی ۴ متغیره:

- ✓ هر ۲ خانه همسایه معادل می شود با ۳ متغیر (حذف یک متغیر)
- ✓ هر ۴ خانه همسایه معادل می شود با ۲ متغیر (حذف دو متغیر)
- ✓ هر ۸ خانه همسایه معادل می شود با ۱ متغیر (حذف سه متغیر)

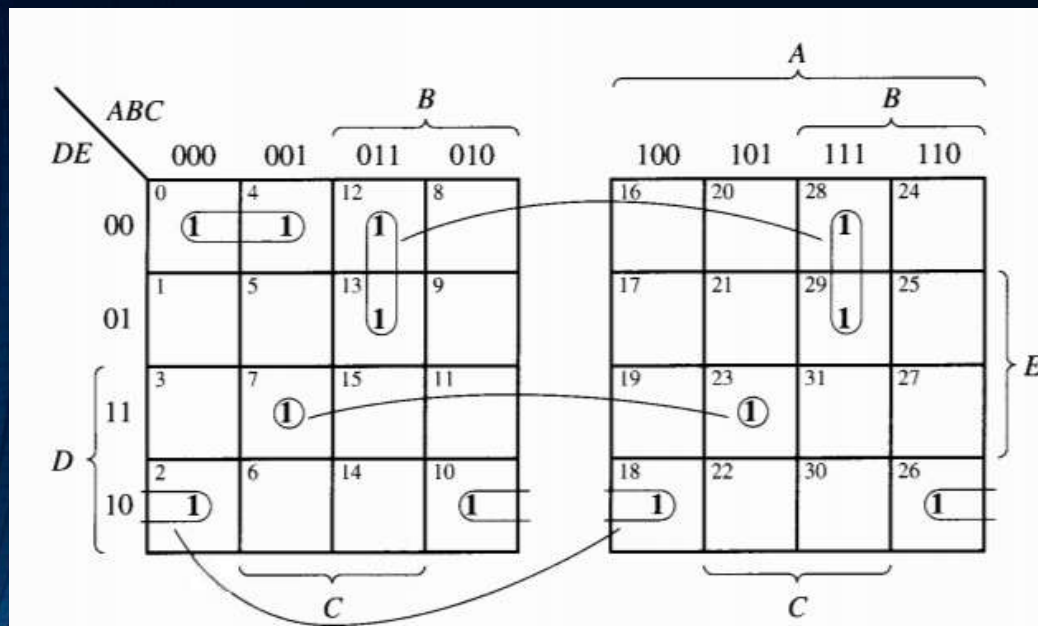
✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

❖ کارنوی ۵ متغیره:



✓ همسایگی در جدول کارنو (K-Map)

❖ کارنوی ۵ متغیره:



- ✓ هر ۲ خانه همسایه معادل می شود با ۴ متغیر (حذف یک متغیر)
- ✓ هر ۴ خانه همسایه معادل می شود با ۳ متغیر (حذف دو متغیر)
- ✓ هر ۸ خانه همسایه معادل می شود با ۲ متغیر (حذف سه متغیر)
- ✓ هر ۱۶ خانه همسایه معادل می شود با ۱ متغیر (حذف چهار متغیر)