

## به نام خدا

### تمرین تئوری سری اول ساختمان های داده

=====

۱- آرایه‌ی [۱۳, ۱, ۶, ۱۰, ۲, ۳, ۱۱, ۵, ۱۲, ۹, ۸, ۷, ۴] را در نظر بگیرید. (۲۰ + ۱۵ امتیاز)

الف) مرتب‌سازی درجی را با ذکر تمام مراحل و تعداد مقایسه در هر مرحله بر روی آرایه‌ی فوق بنویسید.

ب) مرتب‌سازی ادغامی را با ذکر تمام مراحل و تعداد مقایسه در هر مرحله بر روی آرایه‌ی فوق بنویسید.

ج) مرتب‌سازی خوابی را با ذکر تمام مراحل بر روی آرایه‌ی فوق بنویسید. (امتیازی)

د) پیچیدگی زمانی قسمت ج را با ذکر دلیل بنویسید (امتیازی)

=====

۲- پیچیدگی زمانی موارد زیر را محاسبه کنید. (۵۰ امتیاز)

الف)

```
for(i= 0; i < n; i++){  
    for(j = 1; j < n; j = j*2){  
        cout << i << " ";  
    }  
}
```

ب)

```
int count = 0;  
for (int i = N; i > 0; i /= 2)  
    for (int j = 0; j < i; j++)  
        count++;
```

ج)

```
int i, j ;  
for(int i = 1 ; i <= n ; i++){  
    for(j = 1; j <= log(i) ; j++){  
        cout<<i<<" "<<j;  
    }  
}
```

د)

```

for (i = 0 ; i<n ; i++){
    if (n % 2 == 0)
    {
        for ( j=i ; j>0 ; j/=2)
            cout << 'Hello';
    }
    else{
        for(k=1 ; k<i ; k*=2)
            cout << "by";
    }
}

```

۰)

```

function a(n)
{
    If( n == 0)
        Return "=";
    a(n/=2);
    for(j=n;j>0;j--)
        print ":";
    a(n/=3);
    for(j=n;j>0;j--)
        print ":";
}

```

=====

۳- روابط بازگشتی زیر را حل کنید. (به صورت نماد مجانبی مناسب بنویسید) (۶۰ امتیاز)

- a)  $T(n) = 4T(n/5) + (\log n)^2$
- b)  $T(n) = 9T(n/3) + \log(n!)$
- c)  $T(n) = T(n/4) + T(3n/4) + n^2$  ,  $T(1) = 1$
- d)  $T(n) = T(\sqrt[3]{n}) + \log(n)$
- e)  $T(n) = 2T(n-2) + 1$  ,  $T(0) = T(1) = 1$
- f)  $T(2^k) = 7T(2^{k-2}) + 2^k$

۴- با توجه به جدول زیر که بعضی از ویژگی های  $O$  را نشان می دهد، مشخص کنید که هر کدام از ویژگی های ذکر شده درست یا نادرست هستند و برای ویژگی های نادرست، عبارت صحیح را بنویسید. (۳۵ نمره)

عبارت صحیح در صورت نادرست بودن عبارت	درستی یا نادرستی	عبارت
		قانون جمع: $O(f + g) = O(f) + O(g)$
		قانون ضرب: $O(f \cdot g) = O(f) \cdot O(g)$
		تراگذاری: $\text{if } g = O(f) \text{ and } h = O(f) \text{ then } g = O(h)$
		$5n^2 + 100n^3 + 4n = O(n^4)$
		$5n^2 + 100n^3 + 4n = O(n^2 \log n)$

=====

۵- توابع زیر را از نظر باتوجه به پیچیدگی زمانی از بزرگ به کوچک مرتب کنید (۳۰ نمره)

$$n^n, 2^n, n^2, n!, n^\pi, \pi^n, \sqrt{2\sqrt{n}}, n^4(n_4), 2^{\log^4 n}, (\log n)^n, n \log n, (\log n)^{\log n}$$

=====

۶- رابطه بازگشتی مقابل را در نظر بگیرید: (۲۰ نمره)

$$T(n, k) = T(n/3, k) + T(n, k/9) + kn$$

$$T(*, 1) = T(1, *) = 1$$

اگر از درخت بازگشتی برای حل سؤال استفاده کنیم به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) ارتفاع درخت ایجاد شده را بدست آورید؟

ب) پیچیدگی زمانی رابطه بازگشتی را به صورت نماد مجانبی  $O$  بدست آورید.

۷- فرض کنید هزینه‌ی جمع و ضرب دو عدد  $a$  و  $b$  بیتی از  $O(\max(a,b))$  باشد ( $20 + 10$  نمره)

الف) می‌خواهیم  $n$  عدد یک بیتی را با هم جمع کنیم. هزینه این کار در بهترین و بدترین حالت چقدر است؟

ب) می‌خواهیم  $n$  عدد دو ( $10$ ) را درهم ضرب کنیم. هزینه این کار در بهترین و بدترین حالت چقدر است؟

نکته: در حالتی خواص این سؤال  $10$  نمره‌ی اضافه خواهد داشت ((

نکته ۲: تمامی نوشته‌ها باید با اثبات مرحله به مرحله باشند ((

=====

۸- عدد هارمونیک را اینگونه تعریف می‌کنیم:  $H_n = \sum_{i=1}^n 1/i$ . ( $40$  نمره امتیازی)

الف) استدلال کنید که:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

یا به عبارتی دیگر، اثبات کنید که  $H_n = \Theta(\ln n)$ .

ب) در این قسمت تلاش می‌کنیم که رشد  $n!$  را پیدا کنیم. مانند قسمت قبل استدلال کنید که:

$$\int_1^n \ln x dx \leq \ln n! \leq \int_1^{n+1} \ln x dx$$

سپس اثبات کنید که  $n! = \Theta(n \ln n)$ .

ج) می‌خواهیم تخمین قسمت قبل را بهبود ببخشیم تا به فرم تخمین استرلینگ برسیم. ابتدا، استدلال کنید که برای هر عدد صحیح

$i \geq 1$  داریم:

$$\int_i^{i+1} \log x dx \geq \frac{\log(i) + \log(i+1)}{2}$$

از این عبارت برای نشان دادن  $n! \leq e\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$  استفاده کنید.

=====

**بخش عملی:**

برای پاسخ دادن به بخش عملی تکلیف وارد آدرس کوثرای درس شوید:

[لینک کلاس](#)

نحوه تحویل:

پاسخ خود به سوالات را به صورت یک فایل PDF قرار دهید و آن را در قالب یک فایل فشرده ( با پسوند zip یا rar ) با فرمت HW1-StudentNumber بر روی سامانه آپلود کنید.

موفق باشید.