به نام خدا

طراحی سیستم های دیجیتال ۱

فصل دوم

جبر بول و گیت های منطقی

(Boolean Algebra & Logic Gates)

Dr. M. Beigizadeh

✓ گیت های منطقی (Logic Gates)

- ❖ مدارهای الکترونیکی هستند که دارای حداقل یک ورودی و فقط یک خروجی می باشند.
- ❖ گیت های منطقی روی یک یا چند سیگنال ورودی عمل کرده و یک سیگنال خروجی ایجاد می کنند.
- ❖ در یک سیستم دیجیتال، سیگنال های الکتریکی ولتاژ دارای دو سطح High و Low هستند که با صفر و یک منطقی مشخص می شوند.
- ❖ از گیت های منطقی برای ساخت توابع استفاده می شود.

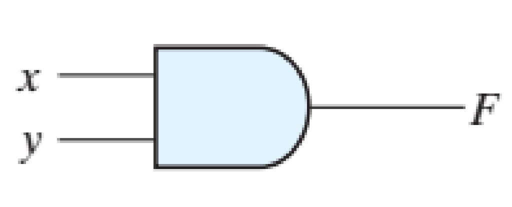
✓ گیت های منطقی (Logic Gates)

❖ گیت AND:

✓ جدول صحت یا درستی (Truth Table):

جدولی است که خروجی تابع را به ازای ترکیبات مختلف ورودی ها مشخص می کند.

✓ گیت AND مانند اتصال سری دو کلید می باشد.



$$F = x \cdot y$$

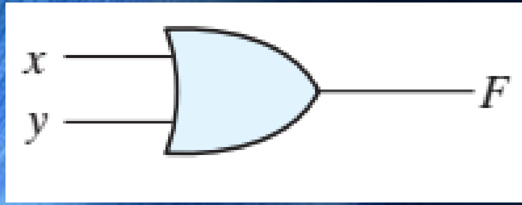
x	y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$x.x = x$$
$$x.0 = 0$$
$$x.1 = x$$

❖ گیت OR:

✓ گیت OR مانند اتصال موازی دو کلید می باشد.

$$x + x = x$$
$$x + 0 = x$$
$$x + 1 = 1$$

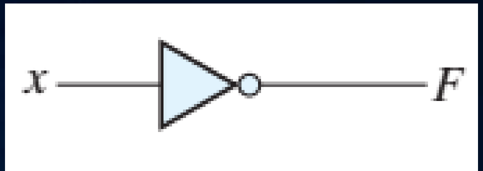


$$F = x + y$$

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

✓ گیت های منطقی (Logic Gates)

❖ **گیت NOT:**



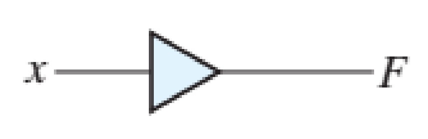
$$F = x' = \bar{x}$$

x	F
0	1
1	0

$$x.x' = 0$$

$$x + x' = 1$$

❖ **Buffer:**



$$F = x$$

x	F
0	0
1	1

✓ گیت های AND، OR و NOT گیت های اصلی هستند.

✓ اولویت عملگرها: پرانتز، NOT، AND، OR

✓ جبر بول (Boolean Algebra)

❖ جبر بول دارای تعدادی متغیر، عملگر است که از یکسری اصول و قضایا پیروی می کنند.

❖ در سیستم های دیجیتال به توابعی که از جبر بول پیروی می کنند، توابع Switching نیز گویند.

❖ متغیرهای توابع switching، صفر و یک منطقی هستند که با F یا T هم نشان داده می شوند.

$$f_0(A, B) = 0$$
$$f_1(A, B) = \bar{A}\bar{B}$$
$$f_2(A, B) = \bar{A}B$$
$$f_3(A, B) = \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}$$
$$f_4(A, B) = A\bar{B}$$

AB	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4
00	0	1	0	1	0
01	0	0	1	1	0
10	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0

$$f(A, B, C) = AB + \bar{A}C + A\bar{C}$$

A, B, C	$f(A, B, C)$
000	0
001	1
010	0
011	1
100	1
101	0
110	1
111	1

✓ جبر بول (Boolean Algebra)

❖ اصول جبر بول:

۱) اصل بسته بودن $if\ x \in B\ ,y \in B \ \ \rightarrow x + y \in B\ , x.y \in B$

۲) عضو خنثی $x + 0 = x \ \ ,\ \ x\ .\ 1 = x$

۳) جابجایی $x + y = y + x \ \ ,\ \ x\ .\ y = y\ .\ x$

۴) شرکت پذیری $x + (y + z) = (x + y) + z \ \ ,\ \ x\ .\ (y\ .\ z) = (x\ .\ y)\ .\ z$

۵) پخشی (توزیع پذیری) $x\ .\ (y + z) = (x.y) + (x.z) \ \ ,\ \ x + (y.z) = (x + y).(x + z)$

۶) عضو متمم $x + \bar{x} = 1\ ,\ \ x.\bar{x} = 0$

✓ جبر بول (Boolean Algebra)

❖ قضایای جبر بول (Theorems of Boolean Algebra):

۱) خودکفایی (Idempotency): $x + x = x \quad , x.x = x$

۲) Null Elements: $x + 1 = 1 \ , \ x \,.\, 0 = 0$

۳) Involution: $\overline{(\bar{x})} = x$

۴) قضیه جذب (Absorption): $x + xy = x \quad , \ x(x + y) = x$

۵) قضیه شبه جذب (Semi-Absorption): $x + \bar{x}y = x + y \quad , \ x(\bar{x} + y) = xy$

۶) $xy + x\bar{y} = x \quad , \ (x + y)(x + \bar{y}) = x$

۷) $xy + x\bar{y}z = xy + xz \quad , \ (x + y)(x + \bar{y} + z) = (x + y)(x + z)$

✓ جبر بول (Boolean Algebra)

❖ **قضایای جبر بول (Theorems of Boolean Algebra):**

۸) تئوری دمرگان (DeMorgan's Theorem): $\overline{x.y} = \bar{x} + \bar{y}$, $\overline{(x+y)} = \bar{x}.\bar{y}$

$$\overline{x + y \ldots + z} = \bar{x}.\bar{y} \ldots . \bar{z}$$

$$\overline{x.y \ldots . z} = \bar{x} + \bar{y} + \cdots + \bar{z}$$

۹) قضیه اجماع (Consensus): $(x+y)(y+z)(\bar{x}+z) = (x+y)(\bar{x}+z)$, $xy + yz + \bar{x}z = xy + \bar{x}z$

❖ **اصل Duality:** اگر یک عبارت از جبر بول پیروی کند، Dual آن نیز از جبر بول پیروی می کند.

✓ Dual یک عبارت با تبدیل تمامی "+" به "."، تمامی "." به "+"، تمامی یک ها به صفر و تمامی صفرها به یک بدست می آید.

$$x.0 = 0 \iff x + 1 = 1$$

✓ جبر بول (Boolean Algebra)

❖ چند نمونه مثال از ساده سازی توابع:

$$\overline{a(b+z(x+\bar{a}))} = \bar{a} + \overline{(b+z(x+\bar{a}))}$$
$$= \bar{a} + \bar{b}\,\overline{(z(x+\bar{a}))}$$
$$= \bar{a} + \bar{b}(\bar{z} + \overline{(x+\bar{a})})$$
$$= \bar{a} + \bar{b}(\bar{z} + \bar{x}\cdot\bar{\bar{a}})$$
$$= \bar{a} + \bar{b}(\bar{z} + \bar{x}a)$$
$$= \bar{a} + \bar{b}(\bar{z} + \bar{x})$$

$$f(A,B,C) = A\bar{B}C + ABC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

$$= AC(\bar{B}+B) + \bar{A}\bar{C}(B+\bar{B}) = AC + \bar{A}\bar{C}$$

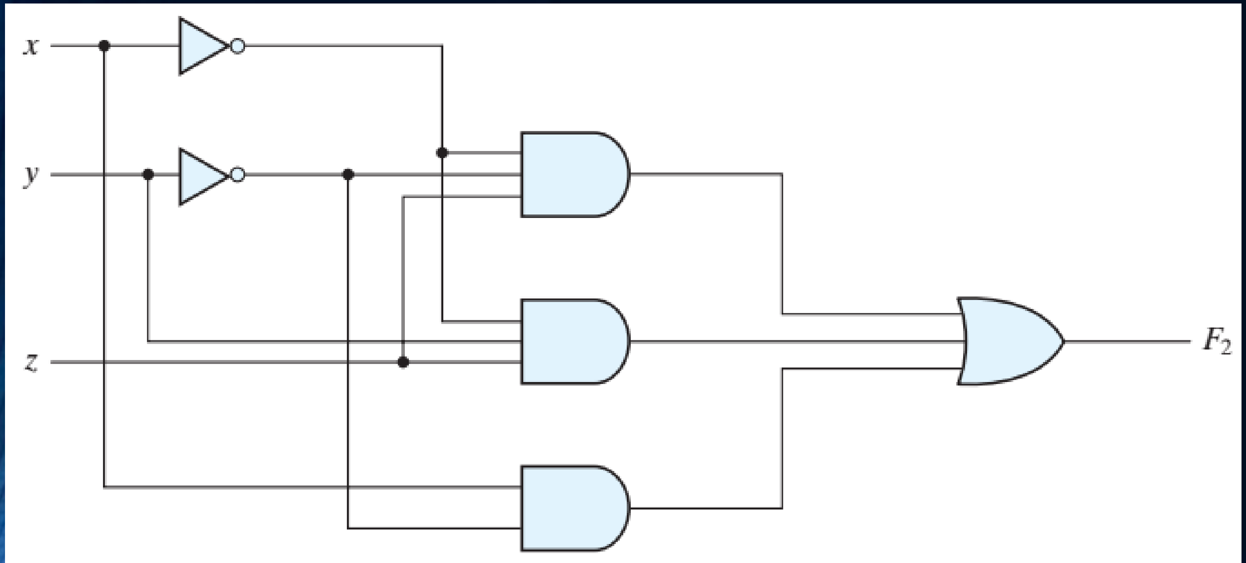
$$\bar{y}w + \bar{x}yw + xyzw + x\bar{z}w \stackrel{?}{=} w$$

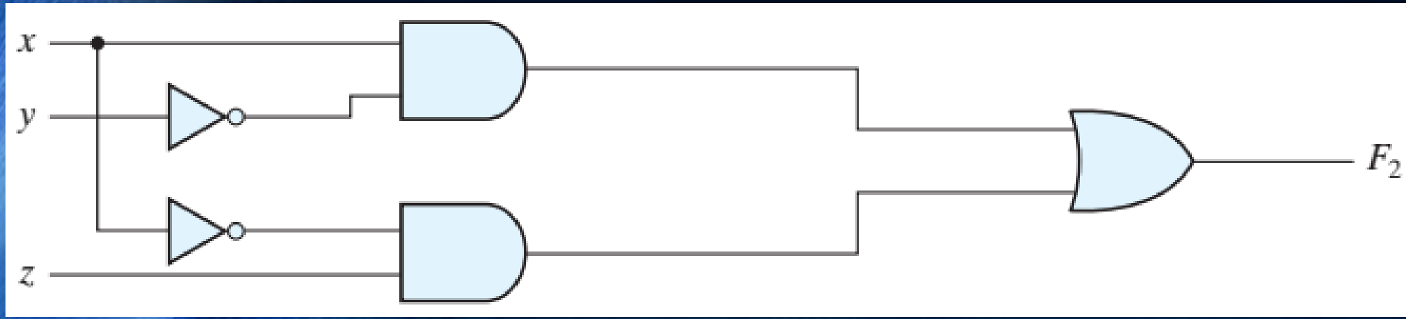
$$w(\bar{y} + y\bar{x}) + xw(\bar{z} + zy) = w(\bar{y} + \bar{x}) + xw(\bar{z} + y) = w(\bar{y} + \bar{x} + x\bar{z} + xy)$$
$$= w(\bar{y} + \bar{x} + y + x\bar{z}) = w(1 + \bar{x} + x\bar{z}) = w.1 = w$$

✓ جبر بول (Boolean Algebra)

❖ چند نمونه مثال از ساده سازی توابع:

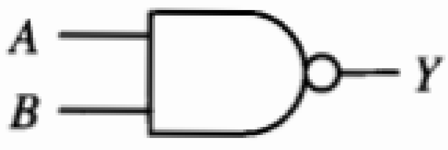
$$F_2 = x'y'z + x'yz + xy' = x'z(y' + y) + xy' = x'z + xy'$$





✓ ادامه معرفی گیت های منطقی

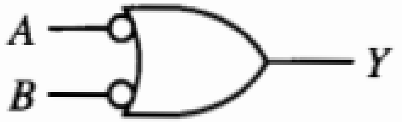
❖ گیت NAND:



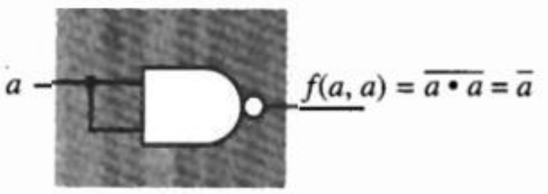
$$f_{\text{NAND}}(a,b)=\overline{ab}$$

a	b	$f_{\text{NAND}}(a,b)=\overline{ab}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

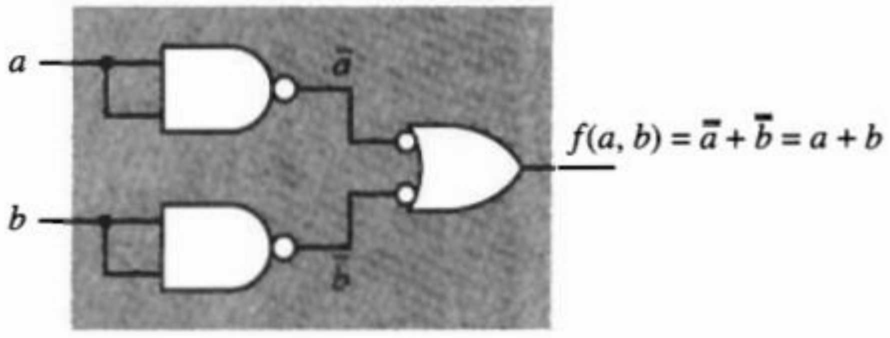
$$f_{\text{NAND}}(a,b)=\overline{ab}=\bar{a}+\bar{b}$$



$$f_{\text{NAND}}(a,a)=\overline{a\cdot a}=\bar{a}\qquad=f_{\text{NOT}}(a)$$
$$\bar{f}_{\text{NAND}}(a,b)=\overline{\overline{a\cdot b}}=a\cdot b\;=f_{\text{AND}}(a,b)$$
$$f_{\text{NAND}}(\bar{a},\bar{b})=\overline{\bar{a}\cdot\bar{b}}=a+b=f_{\text{OR}}(a,b)$$



NOT gate

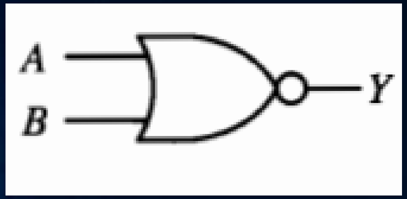


OR gate

$$f_{NAND}(a,1)=\overline{a.1}=\bar{a}=f_{NOT}(a)$$
$$f_{NAND}(a,0)=\overline{a.0}=1$$
$$f_{NAND}(a,\bar{a})=\overline{a.\bar{a}}=\bar{0}=1$$

✓ ادامه معرفی گیت های منطقی

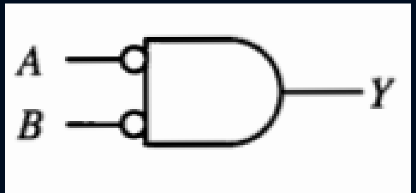
❖ گیت NOR:



$$f_{\mathrm{NOR}}(a,b) = \overline{a+b}$$

a	b	$f_{\mathrm{NOR}}(a,b) = \overline{a+b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

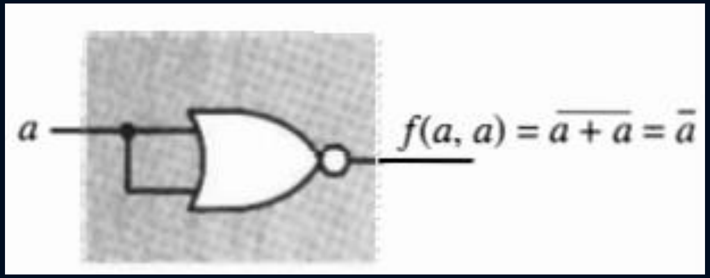
$$f_{\mathrm{NOR}}(a,b) = \overline{a+b} = \bar{a}\cdot\bar{b}$$

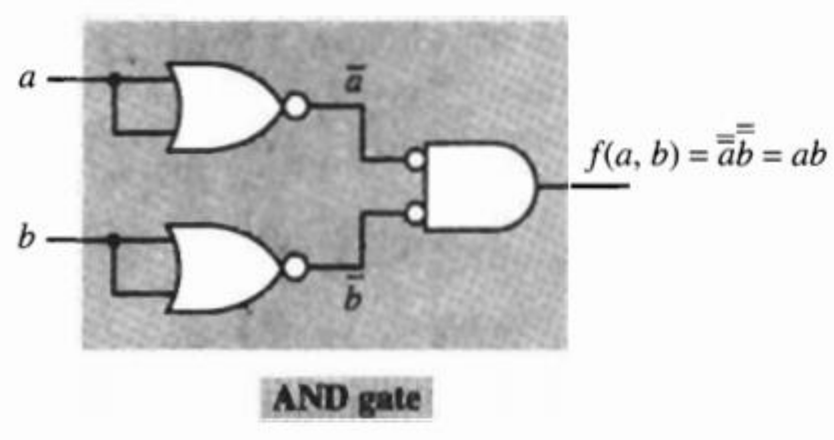


$$f_{\mathrm{NOR}}(a,a) = \overline{a+a} = \bar{a} \quad = f_{\mathrm{NOT}}(a)$$

$$\bar{f}_{\mathrm{NOR}}(a,b) = \overline{\overline{a+b}} = a+b = f_{\mathrm{OR}}(a,b)$$

$$f_{\mathrm{NOR}}(\bar{a},\bar{b}) = \overline{\bar{a}+\bar{b}} = a\cdot b \quad = f_{\mathrm{AND}}(a,b)$$





$$f_{NOR}(a,1) = \overline{a+1} = \bar{1} = 0$$

$$f_{NOR}(a,0) = \overline{a+0} = \bar{a}$$

$$f_{NOR}(a,\bar{a}) = \overline{a+\bar{a}} = \bar{1} = 0$$

✓ ادامه معرفی گیت های منطقی

❖ **گیت XOR (Exclusive-OR):**

یک تابع فرد است.

$$f_{XOR}(a, b) = a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b$$

a	b	$f_{XOR}(a, b) = a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \bar{a}b + a\bar{b} \\ &= \bar{a}a + \bar{a}b + a\bar{b} + b\bar{b} \\ &= \bar{a}(a+b) + \bar{b}(a+b) \\ &= (\bar{a}+\bar{b})(a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \oplus a &= 0 \\ a \oplus \bar{a} &= 1 \\ a \oplus 0 &= a \\ a \oplus 1 &= \bar{a} \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \bar{a} \oplus \bar{b} = a \oplus b \\ a \oplus b = b \oplus a \\ a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \end{gathered}$$

✓ ادامه معرفی گیت های منطقی

❖ گیت XNOR (Exclusive-NOR):

$$f_{\mathrm{XNOR}}(a,b) = \overline{a \oplus b} = a \odot b = ab + \bar{a}\bar{b}$$

یک تابع زوج است.

a	b	$f_{\mathrm{XNOR}}(a,b) = a \odot b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$a \odot a = 1$$

$$a \odot 1 = a$$

$$a \odot 0 = \bar{a}$$

$$a \odot \bar{a} = 0$$

می توان یک گیت NOT کنترل شده ساخت.

✓ آنالیز و طراحی مدار منطقی

❖ **آنالیز (Analysis):**

✓ در آنالیز، مدار پیاده سازی شده داده می شود و ضابطه تابع خواسته خواهد شد.

❖ **طراحی (Design):**

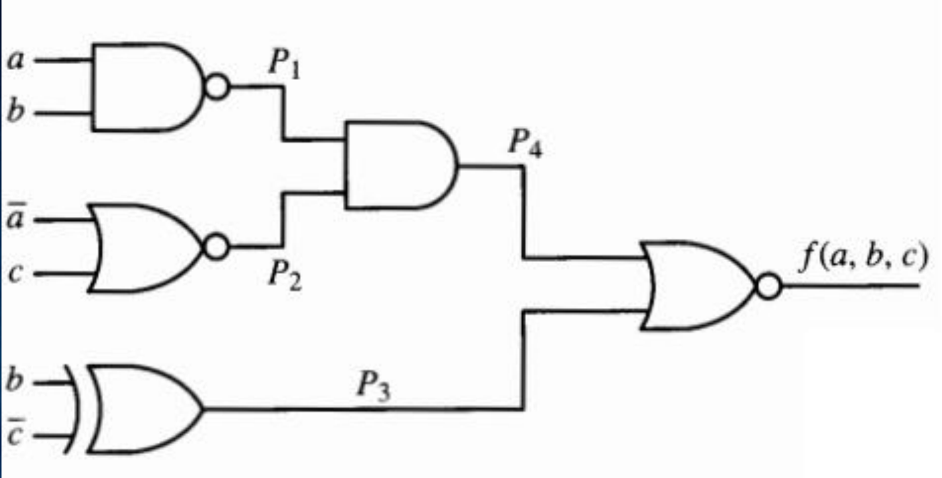
✓ در طراحی، صورت مسئله داده می شود و باید با استفاده از گیت های منطقی تابع مربوط به آن را پیاده سازی کرد.

✓ روند طراحی (Design Procedure):

- درک و فهمیدن درست صورت مسئله
- رسم جدول صحت بر اساس صورت مسئله
- استخراج ضابطه تابع از روی جدول صحت
- ساده سازی ضابطه بدست آمده
- پیاده سازی ضابطه ساده شده با استفاده از گیت های منطقی

✓ مثال آنالیز

❖ **مثال:** ضابطه ساده شده برای تابع f را بیابید.



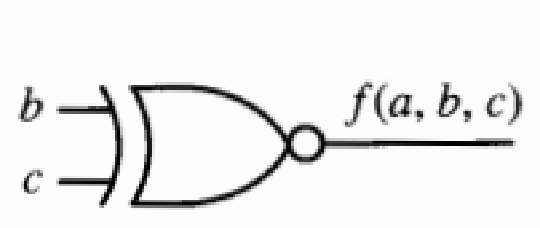
$$P_1 = \overline{ab}$$
$$P_2 = \overline{\bar{a} + c}$$

$$P_3 = b \oplus \bar{c}$$
$$P_4 = P_1 \cdot P_2 = \overline{ab}\;\overline{(\bar{a} + c)}$$

$$f(a, b, c) = \overline{P_3 + P_4}$$
$$= \overline{(b \oplus \bar{c}) + \overline{ab}\;\overline{(\bar{a} + c)}}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}(a, b, c) &= (b \oplus \bar{c}) + \overline{ab}\;\overline{\bar{a} + c} \\
&= bc + \bar{b}\bar{c} + \overline{ab}\;\overline{\bar{a} + c} \\
&= bc + \bar{b}\bar{c} + (\bar{a} + \bar{b})a\bar{c} \\
&= bc + \bar{b}\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} \\
&= bc + \bar{b}\bar{c}
\end{aligned}$$
$$\bar{f}(a, b, c) = b \odot c$$

$$f(a, b, c) = \overline{b \odot c} = b \oplus c$$



✓ تاخیر انتشار (Propagation Delay)

- به مدت زمانی که خروجی به تغییرات ورودی پاسخ می دهد، تاخیر انتشار (t_p) گویند.
- هر گیت منطقی بسته به تکنولوژی ساخت آن دارای یک تاخیر مشخص می باشد.
- در یک مدار منطقی، تاخیر مدار را بصورت تعداد سطح تاخیر بیان می کنند.