حوری دهش ۹۸۲۱۴۱۳

س ۱ ←

$4^{\log n} = n^{\log_2^4} = n^2$

$e \rightarrow 2/7\_\_$

$2^{2^n} = 4^n$

$\sqrt{2}^{\log n} = (2^{\frac{1}{2}})^{\log n} = (\underbrace{2^{\log n}}_{n})^{\frac{1}{2}}$

$\binom{100}{n} = \frac{100!}{(100-n)!\, n!} \longrightarrow$ n باید بین صفر و صد باشد $0 < n < 100$

$\underbrace{\binom{100}{n} < 2^{3^{5^{10000}}}}_{?} < \sqrt{2}^{\log n} < 4^{\log n} < n^3 < \log n^{\log n} < e^n <$

$n2^n < n! < 2^{2^n}$

← س۲

$f(n)$	$g(n)$	O	o	ω	Ω	Θ
n^k	c^n	yes	yes	No	No	No
2^n	$2^{n/2}$	No	No	yes	yes	No
$\log n!$	$\log n^n$	yes	No	No	yes	yes
2^n	2^{n-2}	yes	No	No	yes	yes
$n2^n$	3^n	yes	yes	No	No	No
α? $\log n$	$\log^2 n$	yes	No	No	yes	yes
$\log n$	$\log n^2$	yes	No	No	yes	yes
α? $n\log^2 n$	$\frac{n^2}{\log n}$	yes	yes	No	No	No

① $n^K =? c^n \rightarrow$ O/o ← است $\overset{n^K}{\text{polynomial}} < \overset{c^n}{\text{exponential}}$ سرعت رشد

② $2^n =? 2^{n/2} \rightarrow$ تعریف ← فرض می کنیم $2^n \in \omega\, 2^{n/2}$ ↙

$\forall c , n \ge n_0 \rightarrow 2^n > c\, 2^{n/2}$ $c=1 , n \ge ۲$ ✓ $\omega \rightarrow \Omega$ ✓

③ $\underbrace{\log n!}_{\downarrow} =? \underbrace{\log n^n}_{\hookrightarrow n\log n}$ → هست $\log n! \in O(n \log n) \rightarrow \log n! \le n\log n$

$\sum_{i=1}^{n} \log i$

یعنی واضحه ↙

آیا $\log n! \ge c\, n\log n \overset{?}{=}$

$$\log n! = \sum_{i=1}^{n} \log i = \log 1 + \log ۲ + \dots + \log \frac{n}{۲} + \dots \log n \ge \frac{n}{۲} \log n$$

↲ اگر $c = \frac{۱}{۲}$ رابطه برقرار می شود ← Ω , O , Θ ✓

④ $2^n =? 2^{n-2} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n-2}} = ۴$ Θ , O , Ω ✓

⑤ $n2^n =? 3^n \rightarrow$ فرض می کنیم رابطه $n2^n \in o(3^n)$ برقرار است

تعریف → $\forall c \in R^+ \quad \exists n_0 \in Z^+$ s.t. $n \ge n_0 \quad n2^n < c(3^n)$

$c=1$, $n_0=1$ برقراره ← O/o ✓

⑥ $\log n =? \log^{۲} n$

$\log n \times \log n$ ↲

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\log n}}{\cancel{\log n} \times \underbrace{\log n}_{\infty}} = 0 \longrightarrow \theta \to O , \Omega$$

⑦ $\log n =? \underbrace{\log n^{۲}}_{۲\log n} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{۲\log n} = \frac{1}{۲} \to \theta \to O , \Omega$ ✓

⑧ $n\log^2 n =? \frac{n^2}{\log n}$

فرض می کنیم رابطهٔ $n\log^2 n \in o\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ برقرار است

تعریف $\to \forall c \in R^{+} , \exists n_0 \in Z^{+} \quad s.t. \quad n \geq n_0$

$$n\log^2 n < c\left(\frac{n^2}{\log n}\right) \longrightarrow \log^2 n < c\frac{n}{\log n} \longrightarrow \underset{\nearrow\ \log n \times \log n \times \log n}{\log^3 n} < cn$$

↲ $n_0 = 2$, $c = 1$ برقراره ← O / o

س۳ ←

① → $\max(f(n), g(n)) \in \Theta(f(n)+g(n))$ ✓

فرض می کنیم این رابطه برقرار است پس:

$\exists c_1, c_2 \in R^+ , \exists n_0 \in Z^+ \quad s.t. \quad \forall n \geq n_0$

$0 \leq c_2(f(n)+g(n)) \leq \max(f(n), g(n)) \leq c_1(f(n)+g(n))$

از طرفی می دانیم ماکزیمم ۲ تابع همیشه از مجموع آن ۲ تابع کمتر است و همیشه از میانگین آن ۲ تابع بیشتر است پس می توانیم $c_1 = 1$ و $c_2 = \frac{1}{2}$ در نظر بگیریم که به ازای این مقادیر گزارهٔ بالا صحیح است

② → $1 + c + c^2 + \dots + c^n \in \Theta(c^n) \quad , \quad c > 1$ ✓

فرض می کنیم این رابطه برقرار است پس:

$\exists c_1, c_2 \in R^+ , E n_0 \in Z^+ , \forall n \geq n_0$

برای اینکه رابطه $f(n) \leq c_1 g(n)$ برقرار باشد c_1 باید با مجموع تمام ضرایب جملات $F(n)$

برابر باشد یعنی : $c_1 = 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$

همین طور برای اینکه رابطه $c_2 g(n) \le f(n)$ هم برقرار باشد فقط کافی است $c_2 = 1$ در نظر

بگیریم در این حالت ←

$$1 + c + c^2 + \dots + c^n \ge \underset{1}{c_2}(c^n) \rightarrow 1 + c + c^2 + \dots + \cancel{c^n} - \cancel{c^n} \ge 0$$

طبق فرض چون $1 < c$ است پس رابطه بالا همیشه بزرگتر از صفر است

در نهایت به ازای این مقادیر گزاره بالا صحیح می باشد

③ → $\log n \in O(\sqrt[3]{n})$ ✓

فرض می کنیم این رابطه برقرار است پس :

$$\exists c \in R^+ , \exists n_0 \in Z^+ \ s.t. \ \forall n \ge n_0 \rightarrow \log n \le c(n^{\frac{1}{3}})$$

اگر $c = 2$ و $n_0 = 1000$ بگیریم رابطه برقرار می شود پس به ازای این مقادیر گزاره بالا صحیح می باشد

④ $\rightarrow f(n) \in O(s(n)) \quad , \quad g(n) \in O(r(n)) \Rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \in O(\frac{s(n)}{r(n)})$

$f(n) = n^{۲} \qquad s(n) = n^{۴}$ ← نادرست است ← مثال نقض ←

$g(n) = n \qquad r(n) = n^{۵}$

$\rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n^{۲}}{n} = n \notin O(\frac{s(n)}{r(n)} = \frac{n^{۴}}{n^{۵}} = \frac{1}{n})$

⑤ $\rightarrow f(n) \in O(s(n)) \quad , \quad g(n) \in O(r(n)) \Rightarrow f(n) - g(n) \in O(s(n) - r(n))$

$f(n) = n \log n \qquad s(n) = n^2 + 1$ ← نادرست است ← مثال نقض ←

$g(n) = \log n \qquad r(n) = n^2$

$f(n) - g(n) = \log n (n-1)$

$\Rightarrow \log n (n-1) \notin O(c)$

$s(n) - r(n) = \underset{\hookrightarrow c}{\underline{1}}$

س ۴ ←

گام ۱ ← پیچیدگی درون تابع f ←

$$T(n,m) = \sum_{i=1}^{\log n}\sum_{j=1}^{m/۲}\sum_{k=1}^{۲j} 1 = \sum_{i=1}^{\log n}\sum_{j=1}^{m/۲}\underbrace{(۲j-1+1)}_{۲j} = \textcircled{I}$$

یادآوری → $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/۲$

ادامه

$$\textcircled{I} \rightarrow \sum_{i=1}^{\log n} ۲\left(\frac{\frac{m}{۲}(\frac{m}{۲}+1)}{\cancel{۲}}\right) = \frac{m}{۲}\left(\frac{m}{۲}+1\right)\underbrace{\sum_{i=1}^{\log n} 1}_{\log n \cancel{-1}+1} =$$

$$O(m^2 \times \log n)$$

گام ۲ ← پیچیدگی کل برنامه ←

$$T(k) = \sum_{i=0}^{a-1} T(۲^i, i) = \sum_{i=0}^{a-1} (\underbrace{\log ۲^i}_{i} \times i^۲) = \sum_{i=0}^{a-1} i^3 = \textcircled{II}$$

یادآوری → $\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4$

ادامه

$$\textcircled{II} \rightarrow \frac{a^2(a-1)^2}{۴} = \boxed{O(a^۴)} \rightarrow$$ جواب کل