

## 38. METODA OPERAȚIONALĂ (TRANSFORMAREA LAPLACE)

### 38.1. METODE SIMBOLICE ȘI METODE OPERAȚIONALE

Prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff în valori instantanee la studiul circuitelor electrice liniare, se obține un sistem de ecuații algebrice și integro-diferențiale liniare, cu coeficienți constanți, în care necunoscutele sunt de obicei valorile instantanee ale curenților.

În regim permanent sinusoidal acești curenți sunt complet determinați de valorile instantanee ale tensiunilor de alimentare. În cap. 27 s-a arătat că rezolvarea sistemului de ecuații se simplifică în mod esențial prin utilizarea metodelor simbolice, de exemplu cea a reprezentării în complex a mărimilor sinusoidale. Aceasta din urmă asociază fiecărei mărimi sinusoidale  $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma)$  o imagine complexă unică  $\underline{I}$ , prin regula

$$C(i) = C(I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma)) = I \exp(j\gamma) = \underline{I}, \quad (38.1-1)$$

cu următoarele proprietăți:

a) reprezentarea este *biunivocă*, adică fiecărei mărimi sinusoidale îi corespunde o singură imagine complexă și fiecărei imagini complexe îi corespunde o singură mărime sinusoidală, prin regula

$$C^{-1}(\underline{I}) \equiv \Im(\sqrt{2} \exp(j\omega t) \underline{I}) = |\underline{I}| \sqrt{2} \sin(\omega t + \arg(\underline{I})) \equiv i(t); \quad (38.1-2)$$

b) reprezentarea este *liniară*

$$C(\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2) = \lambda_1 C(i_1) + \lambda_2 C(i_2); \quad (38.1-3)$$

c) operația de *derivare* în raport cu timpul este reprezentată printr-o operație algebrică: înmulțirea cu un număr (imaginar)

$$C\left(\frac{di}{dt}\right) = j\omega C(i); \quad (38.1-4)$$

Avantajele metodei reprezentării în complex rezultă din aceste proprietăți și derivă din faptul că sistemul de ecuații integro-diferențiale, satisfăcute de valorile instantanee sinusoidale, se reprezintă biunivoc într-un sistem de ecuații algebrice liniare, satisfăcute de imaginile lor complexe. Ca urmare calculele de rezolvare a circuitelor devin mai simple și mai sistematice. Rezolvând acest sistem de ecuații algebrice (complexe), se determină imaginile complexe ale funcțiilor necunoscute și, cu ajutorul transformării inverse (38.1-2), se pot determina originalele funcțiilor necunoscute.

O prescripție de calcul  $G$ , definită pe o clasă de funcțiuni, care asociază fiecărei funcțiuni  $i(t)$  o anumită imagine  $g(i)$  se numește *operator*. Operatorul  $C$  al reprezentării în complex este un operator liniar (proprietatea 38.1-3), definit pe clasa funcțiilor sinusoidale, cu valori în mulțimea numerelor complexe, care admite un *operator invers*  $C^{-1}$  (38.1-2) și care are proprietatea remarcabilă (38.1.4) de a transforma operațiile de derivare în operații algebrice. Metoda reprezentării în complex este un exemplu elementar de *metodă operațională*.

În regim tranzitoriu, curenții sunt funcțiuni de timp dintr-o clasă mult mai largă, fiind complet determinați nu numai de valorile instantanee ale tensiunilor, ci și de condițiile inițiale. Rezolvarea sistemului de ecuații integro-diferențiale ale circuitelor liniare se poate

simplifica cu o metodă operațională, dacă se găsește un operator liniar  $L$ , care să asocieze biunivoc fiecărei funcțiuni de timp  $i(t)$  din clasa dată o imagine  $L\{i\}$ , astfel încât operația de derivare a funcțiunii de timp să se transforme într-o operație algebrică liniară efectuată asupra imaginii.

Dacă sunt satisfăcute aceste condiții, ecuațiile integro-diferențiale liniare (ale circuitelor electrice) se vor reprezenta prin ecuații algebrice. În acest fel, avantajele metodei simbolice (în complex), folosite la studiul regimului permanent, se pot extinde la studiul regimului tranzitoriu. Metoda operațională este tot o metodă de reprezentare simbolică.

Există mai mulți operatori care satisfac condițiile de mai sus, pentru diferite clase de funcțiuni de timp, susceptibile de a prezenta interes în problemele de electrotehnică. Astfel, de exemplu, *metoda descompunerii spectrale* (v. subcap. 37.2), poate fi prezentată ca o metodă operațională, în care operatorul, definit de transformarea Fourier directă, asociază fiecărei funcțiuni de timp  $f(t)$  – pentru care există integrala Fourier – o imagine complexă  $\underline{F}(j\omega)$ , funcțiune de o variabilă imaginară. Se verifică ușor că acest operator este liniar, că reprezentarea este biunivocă și că derivarea se transformă în înmulțirea cu  $j\omega$ . Clasa funcțiunilor de timp cărora li se poate aplica integrala Fourier este însă prea restrânsă, din cauza condițiilor de anulare la infinit și integrabilitate absolută, care exclud aplicarea acestei metode la studiul regimurilor tranzitorii cu mărimi de regim permanent diferite de zero.

În electrotehnică, cel mai mult se utilizează metoda operațională, în care operatorul  $L$  este definit cu ajutorul transformării funcționale numită *transformarea lui Laplace*. Această metodă este aplicabilă unei clase de funcțiuni de timp mult mai largi decât cea susceptibilă de transformarea Fourier. Metoda se utilizează mai ales pentru studiul regimurilor tranzitorii ale circuitelor liniare cu parametri *concentrați* (în care apar ecuații diferențiale ordinare, liniare, cu coeficienți constanți), dar se poate aplica și la studiul regimurilor tranzitorii în circuite liniare cu parametri *repartizați*, cum sunt liniile electrice lungi (în care apar ecuații cu derivate parțiale, liniare și cu coeficienți constanți) și chiar la studiul regimurilor tranzitorii ale unor circuite *parametrice* sau *neliniare*, cu condiția ca operațiile neliniare care apar în ecuațiile în valori instantanee să aibă un corespondent între operațiile care se pot efectua cu imaginile. În aceste ultime situații avantajele metodei nu mai sunt evidente, întrucât nu se mai obțin ecuații algebrice pentru imagini.

## 38.2. TRANSFORMAREA LAPLACE ȘI PROPRIETĂȚILE SALE

### 38.2.1. FUNCȚIUNILE ORIGINAL

Transformarea lui Laplace este definită de integrala

$$\int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt, \quad (38.2-1)$$

în care  $f(t)$  este o funcțiune reală de timp, iar  $s = p + j\omega$  este o variabilă complexă. Această integrală este convergentă în următoarele condiții:

- a) pentru  $t > 0$ ,  $f(t)$  să fie netedă pe porțiuni;
- b) pentru  $t > t_0 > 0$ ,  $f(t)$  să nu crească mai repede decât o exponențială, adică să existe constantele pozitive  $A_0$ ,  $\sigma_0$  și  $t_0$  astfel încât

$$|f(t)| < A_0 \exp(\sigma_0 t), \text{ dacă } t > t_0; \quad (38.2-2)$$

- c) variabila complexă  $s$  să aibă partea reală suficient de mare, adică

$$\sigma = \Re(s) > \sigma_a, \quad (38.2-3)$$

unde  $\sigma_a$  este *abscisa absolută de convergență*, adică marginea inferioară a constantelor  $\sigma_0$ , pentru care este satisfăcută condiția (38.2-2).

Clasa funcțiilor de timp pentru care se utilizează metoda operațională cu transformarea Laplace este definită în sens restrâns de condițiile a și b de mai sus și de intervalul de definiție al variabilei

$$0 \leq t \leq \infty. \quad (38.2-4)$$

Funcțiunile din această clasă se numesc *funcțiuni original*. Dacă această clasă se întregește cu funcțiunea generalizată a lui Dirac  $\delta(t)$ , studiată ca limită a impulsiei finite – deosebit de utilă pentru prezentarea fenomenelor tranzitorii în anumite circuite idealizate în care apar discontinuități – și cu "derivatele" ei  $\delta'(t)$  și  $\delta''(t)$ , se obține o clasă de funcțiuni de timp suficient de largă pentru aplicații întâlnite în electrotehnică.

### 38.2.2. FUNCȚIUNILE IMAGINE (TRANSFORMATELE LAPLACE)

Fiind dată o funcțiune original  $f(t)$ , se numește *image Laplace*, sau *transformată Laplace* a sa funcțiunea  $F(s)$ , de variabilă complexă  $s$ , univoc asociată funcțiunii  $f(t)$  prin relația

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt, \text{ cu } \Re(s) > \sigma_0. \quad (38.2-5)$$

Când  $\Re\{s\} < \sigma_0$  și integrala (38.2-5) este divergentă, imaginea Laplace este definită prin *prelungirea analitică* a funcțiunii de  $s$  astfel obținută (ceea ce, practic, înseamnă *prin expresia* în  $s$  obținută cu (38.2-5)). Astfel, transformata Laplace este definită ca o funcțiune analitică de  $s$  în întreg planul complex, cu excepția singularităților care există în semiplanul  $\Re\{s\} \leq \sigma_a$ . Se demonstrează că această regulă de asociere este univocă, definind un operator notat cu simbolul  $L$

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{f\}. \quad (38.2-6)$$

Operatorul  $L$  asociază fiecărei funcțiuni original  $f(t)$  (cu  $t > 0$ ) o imagine complexă  $F(s)$ . Operatorul invers se notează cu  $L^{-1}$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{F\} \quad (38.2-7)$$

și asociază fiecărei imagini complexe  $F(s)$  o funcțiune de timp  $f(t)$ , univoc determinată pentru  $t \geq 0$ .

### 38.2.3. TRANSFORMATELE LAPLACE ALE UNOR FUNCȚIUNI UZUALE

Folosind relația (38.2-6) se vor calcula imaginile unor funcțiuni frecvent întâlnite în studiul regimurilor tranzitorii.

*Imaginea unei constante C.* Luând  $\sigma_a = 0$  și  $\Re\{s\} > 0$ , rezultă

$$L(C) = \int_0^{\infty} C \exp(-st) dt = -\frac{C}{s} \exp(-st) \Big|_0^{\infty} = \frac{C}{s}. \quad (38.2-8)$$

Se observă că integrala este divergentă pentru  $\operatorname{Re}\{s\} \leq 0$ . Expresia (38.2-8) definește însă univoc o funcțiune analitică de  $s$  în tot planul complex, cu excepția originii, unde are un pol.

*Imaginea funcțiunii treaptă unitate  $1(t)$ .* Deoarece pentru  $t > 0$  funcțiunea treaptă este o constantă de valoare unitate

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t) \exp(-st) dt = \int_0^{\infty} \exp(-st) dt = \frac{1}{s}. \quad (38.2-9)$$

*Imaginea unei exponențiale  $\exp(\alpha t)$ .* Considerând  $\operatorname{Re}\{s\} > \alpha$ , se obține

$$\mathcal{L}\{\exp(\alpha t)\} = \int_0^{\infty} \exp(\alpha t) \exp(-st) dt = -\frac{1}{s-\alpha} \exp(-(s-\alpha)t) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha}. \quad (38.2-10)$$

Si în acest caz integrala este divergentă pentru  $\operatorname{Re}\{s\} \leq \alpha$ , dar expresia (38.2-10) definește în mod univoc o funcțiune analitică de  $s$  în întreg planul complex, cu excepția punctului  $s = \alpha$ , unde are un pol.

*Imaginile funcțiunilor  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ ,  $\sinh t$ ,  $\cosh t$*  se obțin simplu, exprimând aceste funcțiuni cu ajutorul unor funcțiuni exponențiale. De exemplu,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} &= \int_0^{\infty} \sin(\omega t) \exp(-st) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\exp(j\omega t) - \exp(-j\omega t)}{2j} \exp(-st) dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (38.2-11)$$

*Imaginea impulsiei dreptunghiulare finite, neretardate.* Impulsia dreptunghiulară finită, de durată  $T$  (fig. 38.2-1a), este definită prin relațiile:  $f(t) = 0$  pentru  $t < 0$  și  $t > T$ ,  $f(t) = H = A/T$ , dacă  $0 < t < T$ . Cu  $H$  s-a notat amplitudinea impulsiei, iar cu  $A = HT$  – aria sa. Se observă că această funcțiune poate fi exprimată cu ajutorul funcțiunii treaptă unitate, sub forma  $H[1(t) - 1(t-T)]$ . Atunci transformata sa Laplace va fi

$$\mathcal{L}\{H[1(t) - 1(t-T)]\} = H \frac{1 - \exp(-sT)}{s} = A \frac{1 - \exp(-sT)}{sT}. \quad (38.2-12)$$

Impulsia dreptunghiulară de durată  $T$  și arie unitate se notează  $\delta_T(t)$  (fig. 38.2-1b), cu expresia în domeniul timp

$$\delta_T = \frac{1}{T} [1(t) - 1(t-T)], \quad (38.2-13)$$

iar imaginea Laplace este (38.2-12), pentru  $A = 1$ .

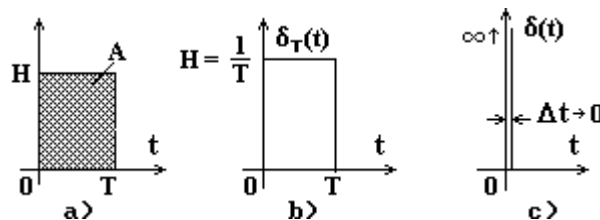


Fig. 38.2-1. a) Impulsia dreptunghiulară, b) impulsia de arie unitate și c) funcțiunea delta a lui Dirac.

*Imaginea impulsiei delta* (Dirac). În aplicații prezintă interes adesea cazul limită idealizat al impulsiei dreptunghiulare, de durată  $\Delta T$  extrem de scurtă  $\Delta T \rightarrow 0$  și infinit înaltă ( $H = 1/\Delta T \rightarrow \infty$ ), având aria finită și egală cu unitatea (fig.38.2-1c). Acest caz limită definește o funcțiune  $\delta(t)$ , numită impulsie delta, sau funcțiunea lui Dirac, sau funcțiunea impulsie unitate.

Cu această funcțiune se poate opera corect, dacă se efectuează calculele cu impulsia unitate finită și se trece la limită numai în expresiile finale. Formal se scrie

$$\delta(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \delta_{\Delta T}(t). \quad (38.2-14)$$

Imaginea funcțiunii  $\delta(t)$  se obține din (38.2-12) prin aplicarea regulii lui l'Hôpital

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-\alpha \Delta T)}{\alpha \Delta T} = 1. \quad (38.2-15)$$

Observație. Impulsia unitate  $\delta(t)$  nu este o funcțiune original și nici măcar o funcțiune în sensul uzual. Fără a intra în detaliile calculelor cu această funcțiune și cu derivatele ei, observăm că folosind trecerea la limită arătată se pot interpreta totdeauna aceste calcule. Deoarece  $\delta(t)$  are o singularitate integrabilă în origine

$$\int_0^\infty \delta(t) dt = 1, \quad (38.2-16)$$

la operarea cu  $\delta(t)$  transformarea Laplace trebuie considerată în forma

$$\mathcal{L}\{f\} = F(s) = \int_{-\infty}^\infty f(t) \exp(-st) dt, \quad (38.2-17)$$

adică incluzând originea timpului.

Pe baza rezultatelor calculelor anterioare se poate întocmi un tabel de corespondență între funcțiunile de timp întâlnite mai frecvent în studiul circuitelor electrice și imaginile lor.

$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
1	$\delta(t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$	$\sin \omega t$
$\exp(-sT)$	$\delta(t-T)$	$s/(s^2+\omega^2)$	$\cos \omega t$
$1/s$	$1(t)$	$a/(s^2+a^2)$	$\text{sh } at$
$\exp(-sT)/s$	$1(t-T)$	$s/(s^2+a^2)$	$\text{ch } at$
$1/(s+\alpha)$	$\exp(-\alpha t)$	$\omega/((s+\alpha)^2+\omega^2)$	$\exp(-\alpha t) \sin \omega t$
$1/(s+\alpha)^2$	$t \exp(-\alpha t)$	$(s+\alpha)/((s+\alpha)^2+\omega^2)$	$\exp(-\alpha t) \cos \omega t$

#### 38.2.4. CORESPONDENȚA OPERAȚIILOR FUNDAMENTALE PRIN TRANSFORMAREA LAPLACE

Operațiile fundamentale cu funcțiuni de timp care intervin în ecuațiile circuitelor liniare sunt înmulțirea cu un scalar, adunarea, derivarea și integrarea. Se vor prezenta operațiile corespunzătoare cu imagini, pe care le implică corespondența stabilită de transformarea Laplace.

1. Transformata Laplace a *produsului cu o constantă*  $\lambda$  a funcțiunii de timp  $f(t)$  este egală cu produsul dintre constantă și transformata funcțiunii  $F(s)$

$$\int_0^{\infty} \lambda f(t) \exp(-st) dt = \lambda \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt,$$

adică

$$\mathbf{L}\{\lambda f\} = \lambda \mathbf{L}\{f\}, \quad (38.2-18)$$

2. Transformata Laplace a *sume* a două funcțiuni de timp este egală cu suma transformatelor fiecărei funcțiuni în parte

$$\int_0^{\infty} [f_1(t) + f_2(t)] \exp(-st) dt = \int_0^{\infty} f_1(t) \exp(-st) dt + \int_0^{\infty} f_2(t) \exp(-st) dt,$$

adică

$$\mathbf{L}\{f_1 + f_2\} = \mathbf{L}\{f_1\} + \mathbf{L}\{f_2\}. \quad (38.2-19)$$

Aceste două proprietăți se prezintă compact sub forma care exprimă *liniaritatea transformării Laplace*: transformata Laplace a unei combinații liniare de funcțiuni original este egală cu combinația liniară a transformatelor Laplace ale acestor funcțiuni

$$\mathbf{L}\left\{\sum_k \lambda_k f_k\right\} = \sum_k \lambda_k \mathbf{L}\{f_k\}. \quad (38.2-20)$$

3. Transformata Laplace a *derivatei* unei funcțiuni de timp este egală cu produsul imaginii funcțiunii prin  $s$ , mai puțin valoarea inițială a funcțiunii (*teorema derivării*)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} &= \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \exp(-st) dt = f(t) \exp(-st) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f \exp(-st) dt = \\ &= s \int_0^{\infty} f \exp(-st) dt - f(0), \end{aligned}$$

întrucât, în baza condițiilor impuse funcțiunii  $f(t)$ , cu  $\text{Re}\{s\} = \sigma$  rezultă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) \exp(-st)| \leq A_0 \lim_{t \rightarrow \infty} |\exp(-(s - \sigma_a)t)| = A_0 \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-(\sigma - \sigma_a)t) = 0, \text{ c\acirc{a}ci } \sigma > \sigma_a.$$

Așadar

$$\mathbf{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s \mathbf{L}\{f\} - f(0). \quad (38.2-21)$$

În cazul unei derivate de ordinul  $n$ , aplicând de  $n$  ori regula de mai sus, se obține relația

$$\mathbf{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = \mathbf{L}\{f^{(n)}\} = s^n \mathbf{L}\{f\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (38.2-22)$$

În cazul condițiilor inițiale "de repaus"  $f(0) = 0$  și rezultă

$$\mathbf{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s \mathbf{L}\{f\}. \quad (38.2-23)$$

Adică, derivarea funcțiunii original în raport cu timpul se reprezintă prin înmulțirea imaginii cu variabila complexă  $s$  (analogie cu reprezentarea în complex, unde se înmulțește cu  $j\omega$ ).

4. Transformata Laplace a *integrălei* în  $(0, t)$  a unei funcțiuni de timp este egală cu produsul imaginii funcțiunii prin  $1/s$  (teorema integrării). Într-adevăr, dacă

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad (38.2-24)$$

atunci avem  $dg/dt = f(t)$  și  $g(0) = 0$ . Atunci cu (38.2-23) avem

$$\mathbf{L}\{f\} = \mathbf{L}\left\{\frac{dg}{dt}\right\} = s\mathbf{L}\{g\},$$

de unde rezultă

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathbf{L}\{f\}. \quad (38.2-25)$$

Integrarea funcțiunii original în timp de la 0 la  $t$  se reprezintă prin împărțirea imaginii cu variabila complexă  $s$  (analogie cu reprezentarea în complex, unde se împarte cu  $j\omega$ ).

\* \* \*

Teoremele de mai sus arată că transformarea Laplace îndeplinește condițiile cerute de a asigura reprezentarea ecuațiilor integro-diferențiale ale circuitelor electrice prin ecuații algebrice.

Observație. Teorema derivării (38.2-22) se aplică deobicei funcțiunilor continue și derivabile de timp în intervalul  $0 < t < \infty$  și în acest caz

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0+),$$

timpul  $t$  tinzând spre zero prin valori pozitive. Formula (38.2-22) rămâne valabilă și atunci când funcțiunile  $f(t)$  au discontinuități de prima specie în  $0 \leq t \leq \infty$ , interpretând derivarea în sens generalizat, astfel că în punctul de discontinuitate  $t = t_0 \geq 0$  avem

$$f'(t)\big|_{t=t_0} = [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

În acest caz transformarea Laplace este (38.2-17), iar în (38.2-22) se înlocuiește  $f(0)$  cu  $f(0-)$ .

### 38.2.5. ALTE TEOREME PRIVIND TRANSFORMAREA LAPLACE

1. *Teorema retardării* (întârzierii) Dacă  $\varphi(t)$  este o funcțiune original identic nulă pentru  $t < 0$ , atunci imaginea funcțiunii retardate  $\varphi(t - \tau)$  (v. fig. 38.2-2), se obține din imaginea funcțiunii neretardate  $\varphi(t)$  prin înmulțire cu  $\exp(-s\tau)$

$$\mathbf{L}\{\varphi(t - \tau)\} = \exp(-s\tau) \mathbf{L}\{\varphi(t)\}, \text{ cu } \varphi(t) = 0 \text{ pentru } t < 0. \quad (38.2-26)$$

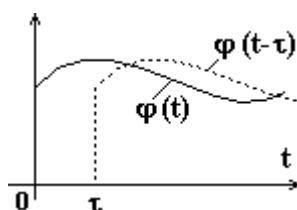


Fig. 38.2-2. Teorema retardării.

Demonstrația este simplă. Întrucât  $\varphi(t-\tau)=0$  pentru  $t < \tau$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\{\varphi(t-\tau)\} &= \int_0^\infty \varphi(t-\tau)\exp(-st)dt = \int_{t=\tau}^\infty \varphi(t-\tau)\exp(-st)dt = \\ &= \exp(-s\tau)\int_0^\infty \varphi(t-\tau)\exp(-s(t-\tau))dt = \exp(-s\tau)\int_0^\infty \varphi(\xi)\exp(-s\xi)d\xi = \exp(-s\tau)\mathbf{L}\{\varphi(t)\}.\end{aligned}$$

2. *Teorema deplasării.* Dacă  $F(s)$  este imaginea funcțiunii  $f(t)$ , atunci  $F(s+\lambda)$  este imaginea produsului dintre funcțiunea  $f(t)$  și  $\exp(-\lambda t)$

$$\mathbf{L}\{\exp(-\lambda t)f(t)\} = F(s+\lambda), \text{ dacă } \mathbf{L}\{f(t)\} = F(s). \quad (38.2-27)$$

Se demonstrează prin calcul direct

$$\mathbf{L}\{\exp(-\lambda t)f(t)\} = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)f(t)\exp(-st)dt = \int_0^\infty f(t)\exp(-(s+\lambda)t)dt = F(s+\lambda).$$

3. *Teorema lui Borel* (a produsului imaginilor, a convoluției). Produsul imaginilor  $F_1(s)$  și  $F_2(s)$  a două funcțiuni  $f_1(t)$  și  $f_2(t)$  este imaginea funcțiunii

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau, \quad (38.2-28)$$

numită *produs de convoluție* al funcțiunilor  $f_1(t)$  și  $f_2(t)$

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \mathbf{L}\{f_1\} \cdot \mathbf{L}\{f_2\} = F_1(s) \cdot F_2(s). \quad (38.2-29)$$

Pentru demonstrație se folosește o formulă a lui Dirichlet

$$\int_{t=0}^\infty dt \int_{\tau=0}^t \varphi(t, \tau) d\tau = \int_{\tau=0}^\infty d\tau \int_{t=\tau}^\infty \varphi(t, \tau) dt.$$

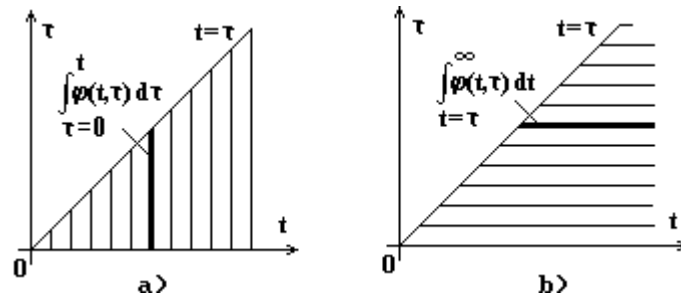


Fig. 38.2-3. Demonstraregrafică a teoremei lui Dirichlet.

Această formulă poate fi demonstrată cu ajutorul graficelor din fig. 36.2-3 a și b. Într-adevăr, în expresia din stânga, funcția  $\varphi(t, \tau)$  se integrează întâi pe segmentul-suport  $\{t, \tau \in [0, t]\}$ , iar apoi cu acest segment se generează suprafața cuprinsă între dreapta  $\tau = t$  și axa  $Ot$  (fig. 38.2-3a). În dreapta, funcția  $\varphi(t, \tau)$  se integrează întâi pe semidreapta-suport  $\{t \in [\tau, \infty], \tau\}$ , cu care apoi se generează aceeași suprafață, cuprinsă între dreapta  $\tau = t$  și axa  $Ot$  (fig. 38.2-3b). Domeniul de integrare fiind același, rezultă egalitatea celor două expresii.

Folosind formula lui Dirichlet, se obține succesiv



$$\begin{aligned}
\mathbf{L} \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right\} &= \int_{t=0}^{\infty} \exp(-st) d t \int_{\tau=0}^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \\
&= \int_{\tau=0}^{\infty} d\tau \int_{t=\tau}^{\infty} \exp(-st) f_1(\tau) f_2(t-\tau) d t = \int_{\tau=0}^{\infty} d\tau \int_{\xi=\tau}^{\infty} \exp(-s(\xi+\tau)) f_1(\tau) f_2(\xi) d\xi = \\
&= \left[ \int_{\xi=0}^{\infty} \exp(-s\xi) f_2(\xi) d\xi \right] \cdot \left[ \int_{\tau=0}^{\infty} \exp(-s\tau) f_1(\tau) d\tau \right].
\end{aligned}$$

4. *Teorema asemănării.* Schimbarea variabilei  $t$  cu  $at$  corespunde împărțirii variabilei  $s$  și a imaginii cu  $a$

$$\mathbf{L} \{f(at)\} = \frac{1}{a} F(s/a). \quad (38.2-30)$$

Demonstrația este directă

$$\mathbf{L} \{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at) \exp(-st) d t = \int_0^{\infty} f(at) \exp(-(s/a)at) \frac{1}{a} d(at) = \frac{1}{a} F(s/a).$$

5. *Teoremele valorilor limită.* De multe ori este utilă deducerea valorii inițiale (la  $t = 0$ ) sau finale (la  $t \rightarrow \infty$ ) a unei funcțiuni original, atunci când se cunoaște transformata ei. Se demonstrează următoarele relații

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathbf{L} \{f(t)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s), \quad (38.2-31)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathbf{L} \{f(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s). \quad (38.2-32)$$

Pentru demonstrație se prelucrează expresia  $s F(s)$

$$s F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) d(st) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{\xi}{s}\right) \exp(-\xi) d\xi.$$

Apoi se pot calcula limitele

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = f(0) \int_0^{\infty} \exp(-\xi) d\xi = f(0),$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = f(\infty) \int_0^{\infty} \exp(-\xi) d\xi = f(\infty).$$

### 38.3. DETERMINAREA FUNCȚIUNII ORIGINAL CORESPUNZĂTOARE UNEI TRANSFORMATE LAPLACE DATE

#### 38.3.1. METODE DE INVERSIUNE

Determinarea funcțiunii original corespunzătoare unei transformate Laplace date se mai numește *inversiunea transformării Laplace*. Există mai multe metode de inversiune, care vor fi examinate în ordinea frecvenței utilizării lor în aplicații.

1. *Folosirea tabelelor de transformări.* Datorită caracterului biunivoc al transformării, toate funcțiunile original identice pentru  $t \geq 0$  au aceeași imagine și reciproc, toate funcțiunile cu aceeași imagine sunt identice pentru  $t \geq 0$ .

O primă posibilitate de determinare a funcțiunilor original constă în folosirea unor tabele de corespondență, care conțin imaginile calculate ale unui mare număr de funcțiuni

original. Folosirea tabelor se completează (și se lărgeste) cu utilizarea teoremelor enunțate anterior.

2. *Teoremele dezvoltării ale lui Heaviside*. În cazul în care funcțiunea imagine are forma raportului a două polinoame (în variabila  $s$ ), dintre care numărătorul are un grad mai mic, se descompune această imagine în fracții simple, care pot fi inversate cu ajutorul tabelor de corespondență (v. subcap. 38.3.2).

3. *Formula de inversiune Mellin-Fourier* (numită și formula Riemann-Mellin). În cazul general, funcțiunea original  $f(t)$ , cu  $t \geq 0$ , care are ca imagine o funcțiune  $F(s)$  dată, analitică în semiplanul  $\text{Re}\{s\} \geq \sigma_0$ , este

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) \exp(st) ds, \quad (38.3-1)$$

integrarea făcându-se de-a lungul dreptei  $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ , care lasă la stânga toate singularitățile funcțiunii imagine, iar  $\sigma_0 \geq \sigma_a$ , adică dreapta este la dreapta abscisei absolute de convergență.

Integrala Mellin-Fourier se calculează, de obicei, cu teorema reziduurilor, folosind un contur de integrare format din dreapta  $s = \sigma_0$  și un semicerc de rază tinzând spre infinit, ales astfel încât contribuția sa să fie nulă (în acord cu lema lui Jordan).

### 38.3.2. TEOREMA DEZVOLTĂRII (PRIMA FORMĂ)

Se consideră cazul în care funcțiunea imagine este raportul a două polinoame, prime între ele, gradul polinomului de la numărător fiind mai mic decât gradul polinomului de la numitor

$$F(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)}. \quad (38.3-2)$$

Raportul a două polinoame oarecare se poate aduce la această formă prin împărțire, după separarea unui eventual termen aditiv – polinomul cât.

Fie  $n$  gradul polinomului  $P_2(s)$  de la numitor și să considerăm cazul în care toate rădăcinile  $s_k$  ale acestui polinom sunt distincte. În acest caz funcțiunea imagine se poate descompune într-o sumă de fracții simple

$$F(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + \dots + \frac{C_n}{s - s_n}. \quad (38.3-3)$$

Pentru a calcula coeficientul  $C_k$  al acestei descompuneri se formează produsul  $(s - s_k)F(s)$  și se calculează limita acestui produs când  $s$  tinde către  $s_k$ , aplicând regula lui l'Hôpital. Se obține

$$C_k = \lim_{s \rightarrow s_k} \left( (s - s_k) \frac{P_1(s)}{P_2(s)} \right) = P_1(s_k) \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{s - s_k}{P_2(s)} = \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)}.$$

Cu aceste valori ale coeficienților, descompunerea în fracții simple devine

$$F(s) = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} \frac{1}{s - s_k} = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} \mathbf{L} \{ \exp(s_k t) \}.$$

În baza teoremei liniarității rezultă

$$F(s) = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} \mathbf{L} \{ \exp(s_k t) \} = \mathbf{L} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} \exp(s_k t) \right\}$$

și se obține funcțiunea originală

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1} \{ F(s) \} = \sum_{k=1}^n \frac{P_1(s_k)}{P_2'(s_k)} \exp(s_k t). \quad (38.3-4)$$

Această relație se numește prima formă a teoremei dezvoltării (a lui Heaviside).

### 38.3.3. TEOREMA DEZVOLTĂRII (A DOUA FORMĂ)

Se consideră cazul particular în care polinomul  $P_2(s)$  are o rădăcină nulă, deci se poate pune sub forma

$$P_2(s) = sP_3(s),$$

iar polinomul  $P_3(s)$  are rădăcinile  $s_k, k = 1, 2, \dots, n-1$ , distincte.

Pentru găsirea funcțiunii original se aplică prima formă a teoremei dezvoltării, observând că

$$P_2'(s) = sP_3'(s) + P_3(s), \text{ deci } P_2'(0) = P_3(0) \text{ și } P_2'(s_k) = s_k P_3'(s_k).$$

Cu aceste valori, în final se obține relația

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{P_1(s)}{sP_3(s)} \right\} = \frac{P_1(0)}{P_3(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_1(s_k)}{s_k P_3'(s_k)} \exp(s_k t). \quad (38.3-5)$$

Această relație se numește a doua teoremă a dezvoltării (a lui Heaviside).

## 38.4. APLICAREA TRANSFORMĂRII LAPLACE LA STUDIUL UNOR REGIMURI TRANZITORII

Din egalitatea celor doi membri ai unei ecuații integro-diferențiale rezultă egalitatea imaginilor acestor membri. Pentru ecuații integro-diferențiale liniare și cu coeficienți constanți, în baza teoremelor liniarității, derivării și integrării, această ultimă egalitate se exprimă sub forma unei relații liniare între imaginile funcțiunilor care intervin în ecuația integro-diferențială dată. Ca urmare, imaginile funcțiunilor necunoscute se pot determina prin rezolvarea unor ecuații algebrice.

După aflarea imaginilor funcțiunilor necunoscute, cu ajutorul metodelor de inversiune, expuse în subcap. 38.3, se determină funcțiunile de timp corespunzătoare acestor imagini. Aceste funcțiuni de timp reprezintă soluțiile căutate, care satisfac atât ecuațiile integro-diferențiale, cât și condițiile inițiale date.

Exemplul 1. Se dă circuitul inductiv din fig. 38.4-1, care pentru  $t < 0$  se află în regim permanent (de curent continuu), având curentul  $I_0 = U_0/(2R)$ . Se cere regimul tranzitoriu care apare dacă la momentul  $t = 0$  se închide întreruptorul, care scurtcircuitază elementele  $R, L$ .

Pentru  $t > 0$  ecuația circuitului este

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0.$$

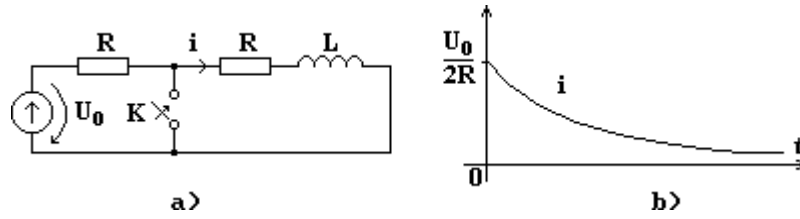


Fig. 38.4-1. Regimul tranzitoriu al circuitului  $RL$  cu condiții inițiale nenule.

Se aplică acestei ecuații transformarea Laplace, folosind teorema liniarității și derivării

$$\mathbf{L} \left\{ Ri + L \frac{di}{dt} \right\} = R\mathbf{L}\{i\} + L[s\mathbf{L}\{i\} - i(0)] = 0. \quad (38.4-1)$$

Întrucât  $i(0) = U_0/(2R)$ , se obține ecuația operațională a circuitului

$$(R + sL)\mathbf{L}\{i\} = Li(0) = \frac{L}{2R} U_0.$$

Din această ecuație se deduce imaginea curentului (funcțiunea necunoscută)

$$\mathbf{L}\{i\} = \frac{U_0 L/(2R)}{R + sL} = \frac{U_0}{2R} \frac{1}{s + R/L}. \quad (38.4-2)$$

Cu tabela de transformări se stabilește expresia curentului

$$i(t) = \frac{U_0}{2R} \exp(-t/T), \text{ unde } T = \frac{L}{R}. \quad (38.4-3)$$

În figura 38.4-1b s-a reprezentat variația în timp a curentului. Se observă continuitatea funcțiunii curent la momentul  $t = 0$ .

**Exemplul 2.** Fie circuitul capacitiv din fig. 38.4-2. La  $t < 0$  condensatorul este încărcat cu sarcina  $q_0$ . La momentul  $t = 0$  se închide întreruptorul, care aplică o tensiune  $u = U_0 \exp(-t/\tau_0)$ , cu  $U_0 > q_0/C$ . Se cere regimul tranzitoriu care apare.

Pentru  $t > 0$  ecuația circuitului este

$$u = Ri + \frac{q_0}{C} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (38.4-4)$$

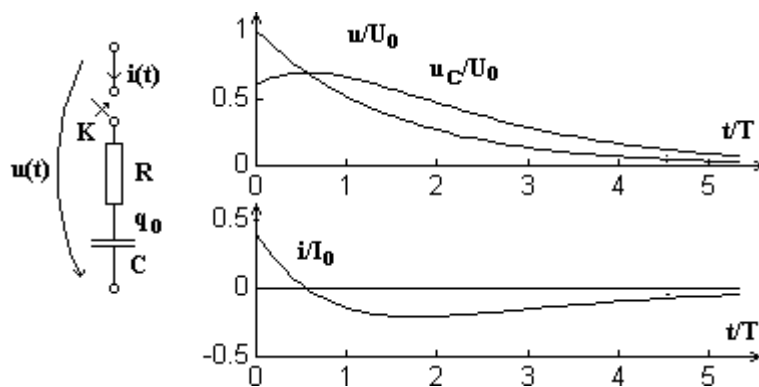


Fig. 38.4-2. Regimul tranzitoriu al circuitului  $RC$  cu condensator inițial încărcat.

Aplicând acestei ecuații transformarea Laplace și folosind teorema liniarității și teorema integrării, se obține ecuația operațională (între imagini)

$$\mathbf{L}\{u\} - \mathbf{L}\left\{\frac{q_0}{C}\right\} = \left(R + \frac{1}{sC}\right)\mathbf{L}\{i\}. \quad (38.4-5)$$

Se calculează întâi imaginile termenilor din membrul stâng

$$\mathbf{L}\{u\} = \mathbf{L}\{U_0 \exp(-t/\tau_0)\} = \frac{U_0}{s + 1/\tau_0},$$

$$\mathbf{L}\left\{\frac{q_0}{C}\right\} = \frac{q_0}{sC}.$$

Astfel, imaginea curentului va avea expresia

$$\mathbf{L}\{i\} = \frac{U_0}{R} \frac{s}{(s + 1/\tau_0)(s + 1/T)} - \frac{q_0}{T} \frac{1}{s + 1/T}, \quad \text{cu } T = RC. \quad (38.4-6)$$

Folosind teorema liniarității și prima teoremă a dezvoltării se stabilește expresia imaginii curentului, iar cu ajutorul tabeli de transformări se deduce expresia valorii instantanee a curentului

$$\mathbf{L}\{i(t)\} = \frac{U_0}{R} \frac{1/T}{1/T - 1/\tau_0} \frac{1}{s + 1/T} + \frac{U_0}{R} \frac{1/\tau_0}{1/\tau_0 - 1/T} \frac{1}{s + 1/\tau_0} - \frac{q_0}{T} \frac{1}{s + 1/T},$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \frac{1}{1/T - 1/\tau_0} \left[ \frac{1}{T} \exp(-t/T) - \frac{1}{\tau_0} \exp(-t/\tau_0) \right] - \frac{q_0}{T} \exp(-t/T),$$

sau

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \frac{T}{T - \tau_0} \exp(-t/\tau_0) - \left( \frac{U_0}{R} \frac{\tau_0}{T - \tau_0} + \frac{q_0}{T} \right) \exp(-t/T). \quad (38.4-7)$$

### 38.5. FORMA OPERAȚIONALĂ A ECUAȚIILOR CIRCUITELOR ELECTRICE

În aplicații, calculul se sistematizează scriind direct ecuațiile operaționale, care exprimă relațiile între imaginile curenților și tensiunilor. În acest scop, în studiul regimului tranzitoriu

se utilizează formele operaționale ale teoremelor lui Kirchhoff, ale ecuațiilor elementelor de circuit și ale teoremei lui Joubert.

### 38.5.1. FORMA OPERAȚIONALĂ A TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF

Prima teoremă a lui Kirchhoff, scrisă pentru un nod al rețelei, este exprimată de ecuația

$$\sum_{\text{nod}} \pm i_k(t) = 0, \quad (38.5-1)$$

cu regula de semne cunoscută. Aplicând acestei ecuații transformarea Laplace și notând cu  $I_k(s)$  imaginea curentului  $i_k(t)$

$$I_k(s) = \mathbf{L}\{i_k(t)\}, \quad (38.5-2)$$

se obține următoarea relație operațională

$$\sum_{\text{nod}} \pm I_k(s) = 0, \quad (38.5-3)$$

cunoscută ca *forma operațională a primei teoreme a lui Kirchhoff*. Aceasta se enunță astfel: suma imaginilor Laplace ale curenților laturilor concurente într-un nod al circuitului este nulă, toți curenții fiind definiți cu sensuri de referință la fel orientate față de nod; sensul de referință opus atrage schimbarea semnului curentului respectiv în sumă.

Regula de semne pentru imaginile curenților rămâne aceeași ca pentru valorile instantanee.

A doua teoremă a lui Kirchhoff, scrisă pentru un ochi, are forma fundamentală (topologică)

$$\sum_{\text{ochi}} \pm u_{bk}(t) = 0, \quad (38.5-4)$$

cu regula de semne cunoscută. Aplicând acestei relații transformarea Laplace și notând cu  $U_{bk}(s)$  imaginea tensiunii la borne  $u_{bk}(t)$

$$U_{bk}(s) = \mathbf{L}\{u_{bk}(t)\}, \quad (38.5-5)$$

se obține următoarea relație operațională

$$\sum_{\text{ochi}} \pm U_{bk}(s) = 0, \quad (38.5-6)$$

cunoscută ca *forma operațională a celei de a doua teoreme alui Kirchhoff*. Aceasta se enunță astfel: suma imaginilor Laplace ale tensiunilor la bornele laturilor unui ochi este nulă, toate tensiunile fiind definite cu sensuri de referință la fel orientate față de sensul de parcurgere al ochiului; fiecare schimbare de sens de referință atrage schimbarea semnului tensiunii respective în sumă.

Regula de semne pentru imaginile tensiunilor la borne rămâne aceeași ca pentru valorile instantanee.

Adesea a doua teoremă se folosește într-o formă dezvoltată, în care se pun în evidență separat sursele de tensiune și căderile de tensiune (tensiunile la bornele elementelor pasive)

$$\sum_{\text{ochi}} \pm u_{pk}(t) = \sum_{\text{ochi}} \pm e_{gk}(t), \quad (38.5-7)$$

cu regulile de semne cunoscute. Aplicând acestei ecuații transformarea Laplace și notând cu  $U_{p\ k}(s)$ , respectiv  $E_{g\ k}(s)$  imaginile căderii de tensiune  $u_{p\ k}(t)$ , respectiv a tensiunii electromotoare  $e_{g\ k}(t)$

$$U_{p\ k}(s) = \mathbf{L}\{u_{p\ k}(t)\}, \quad E_{g\ k}(s) = \mathbf{L}\{e_{g\ k}(t)\}, \quad (38.5-8)$$

se obține ecuația operațională

$$\sum_{\text{ochi}} \pm U_{p\ k}(s) = \sum_{\text{ochi}} \pm E_{g\ k}(s), \quad (38.5-9)$$

cunoscută ca *forma operațională dezvoltată a celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff*. Teorema se enunță în forma: suma imaginilor Laplace ale căderilor de tensiune la bornele elementelor pasive ale unui ochi este egală cu suma imaginilor Laplace ale tensiunilor electromotoare ale surselor ochiului, toate tensiunile fiind definite cu sensuri de referință la fel orientate față de sensul de parcurgere al ochiului; fiecare schimbare de sens de referință atrage schimbarea semnului tensiunii respective în sume.

Regulile de semne pentru imaginile tensiunilor electromotoare ale surselor și pentru căderile de tensiune rămân aceleași ca pentru valorile instantanee.

### 38.5.2. ECUAȚIILE ȘI SCHEMELE ECHIVALENTE OPERAȚIONALE ALE ELEMENTELOR DE CIRCUIT PASIVE

La elementele de circuit pasive, sensurile de referință ale tensiunii la borne și curentului sunt asociate după regula de la receptoare.

*Rezistorul ideal* are relația dintre tensiunea la borne și curent (în valori instantanee)

$$u_R = Ri, \quad \text{sau} \quad i = Gu_R. \quad (38.5-10)$$

Aplicând transformarea Laplace acestor relații, se obțin ecuațiile operaționale echivalente

$$U_R(s) = RI(s), \quad \text{sau} \quad I(s) = GU_R(s), \quad (38.5-11)$$

unde cu  $U_R(s)$  și  $I(s)$  s-au notat imaginile tensiunii la borne și curentului

$$U_R(s) = \mathbf{L}\{u_R(t)\} \quad \text{și} \quad I(s) = \mathbf{L}\{i(t)\}. \quad (38.5-12)$$

*Bobina ideală* are relația dintre tensiunea la borne și curent (în valori instantanee)

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (38.5-13)$$

unde  $u_L$  este tensiunea la bornele bobinei, iar  $\Phi$  – fluxul magnetic al bobinei, calculat în sensul de referință al curentului (cu ajutorul relațiilor lui Maxwell referitoare la inductivități)

$$\Phi = Li + \sum_k \pm M_k i_k, \quad (38.5-14)$$

$L$  fiind inductivitatea proprie a bobinei, iar  $M_k$  - inductivități mutuale, cu alte bobine, parcurse de curenții  $i_k$ . Semnul fiecărui termen este determinat de incidența sensului de parcurgere al bobinei (aici coincide cu sensul de referință al curentului  $i$ ) cu borna marcată a bobinei, comparată cu incidența sensului de referință al curentului  $i_k$  cu borna marcată a bobinei  $k$ .

Aplicând relației (38.5-13) și (38.5-14) transformarea Laplace, se obține ecuația operațională

$$U_L(s) = sLI(s) + \sum_k \pm sM_k I_k(s) - \Phi(0), \quad (38.5-15)$$

unde cu  $U_L(s)$ ,  $I(s)$  și  $I_k(s)$  s-au notat imaginile tensiunii la bornele bobinei  $u_L(t)$ , curentului bobinei  $i(t)$  și curenților  $i_k(t)$  ai bobinelor cu care este cuplată magnetic bobina

$$U_L(s) = \mathbf{L} \{u_L(t)\}, \quad I(s) = \mathbf{L} \{i(t)\}, \quad I_k(s) = \mathbf{L} \{i_k(t)\}. \quad (38.5-16)$$

Atunci când bobina ideală nu este cuplată magnetic cu alte bobine, relația dintre tensiunea la borne și curent se poate prezenta și sub forma integrală

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau, \quad (38.5-17)$$

iar după aplicarea transformării Laplace se obține ecuația operațională

$$I(s) = \frac{i(0)}{s} + \frac{1}{sL} U_L(s). \quad (38.5-18)$$

*Condensatorul ideal* are relația dintre tensiunea la borne și curent (în valori instantanee)  
– în formă diferențială

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt}, \quad (38.5-19)$$

– sau în formă integrală

$$u_c(t) = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (38.5-20)$$

Aplicând acestor relații transformarea Laplace, se obțin ecuațiile operaționale

$$I(s) = sCU_c(s) - Cu_c(0), \quad (38.5-21)$$

respectiv

$$U_c(s) = \frac{u_c(0)}{s} + \frac{1}{sC} I(s). \quad (38.5-22)$$

Se observă că cele două expresii reprezintă aceeași relație, prezentată în forme diferite.

Din examinarea ecuațiilor operaționale ale elementelor pasive, obținute mai sus, rezultă următoarele. Ecuația operațională între imaginea tensiunii la borne și imaginea curentului este liniară, dar în general neomogenă. Mărimile care intervin în această relație se numesc generic *parametri operaționali* și se definesc astfel:

– coeficientul curentului în expresia tensiunii la borne se numește *impedanță operațională* și se notează  $Z(s)$ ;

– coeficientul tensiunii la borne în expresia curentului se numește *admitanță operațională* și se notează  $Y(s)$ ;

– termenul neomogen în expresia tensiunii la borne, cu semn schimbat, se numește *tensiune electromotoare echivalentă condițiilor inițiale* și se notează  $E_i(s)$ ;

– termenul neomogen în expresia curentului se numește *curent impus de condițiile inițiale* și se notează  $I_i(s)$ .

Parametrii operaționali ai celor trei elemente de circuit ideale pasive sunt dați în tabelul de mai jos.



Parametru	Rezistor	Bobină	Condensator
Impedanță operațională	$R$	$sL$	$1/(sC)$
Admitanță operațională	$G$	$1/(sL)$	$sC$
T.e.m. echivalentă condițiilor inițiale	0	$\Phi(0)$	$-u_C(0)/s$
Curent impus de condițiile inițiale	0	$i(0)/s$	$-C u_C(0)$

Ecuția operațională a unui element de circuit pasiv se pune sub formele echivalente

$$U_b(s) = Z(s)I(s) - E_i(s), \quad (38.5-23)$$

$$I(s) = Y(s)U_b(s) + I_i(s). \quad (38.5-24)$$

Excepție face bobina cuplată magnetic, care are ecuația operațională numai sub prima formă (a doua formă, deși formal este posibilă, nu are sens)

$$U_b(s) = Z(s)I(s) + \sum_k \pm Z_{mk}(s)I_k(s) - \Phi(0), \quad (38.5-25)$$

în care  $Z(s) = sL$  este *impedanța operațională proprie*, iar  $Z_{mk}(s) = sM_k$  sunt *impedanțe operaționale mutuale*.

Corespunzător ecuațiilor (38.5-23), (38.5-24) și (38.5-25) se pot identifica *circuitele echivalente operaționale* ale elementelor ideale pasive. Aceste scheme au fost reprezentate în fig. 38.5-1: a) pentru rezistorul ideal, b) pentru bobina ideală, c) pentru condensatorul ideal. Pentru fiecare element ideal se pot stabili două circuite echivalente: serie, cu impedanță și sursă de tensiune, sau paralel, cu admitanță și cu sursă de curent.

Se remarcă faptul că bobina ideală admite o schemă echivalentă paralel (cu sursă de curent) numai în absența cuplajelor magnetice. Se poate imagina și o schemă echivalentă paralel a bobinei cuplate magnetic, dacă se folosesc surse de curent comandate prin curent.

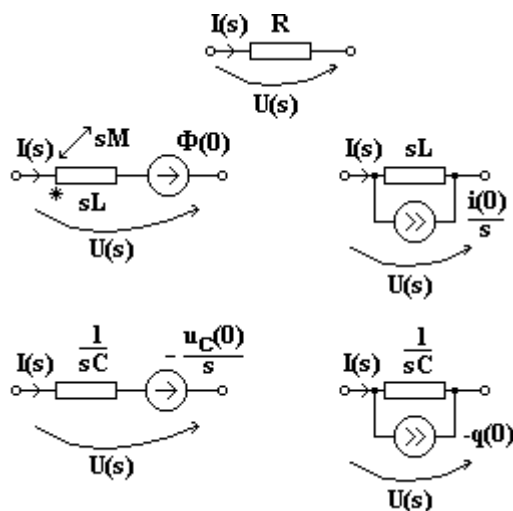


Fig. 38.5-1. Circuitele echivalente operaționale ale elementelor de circuit pasive.

### 38.5.3. FORMA OPERAȚIONALĂ A TEOREMEI LUI JOUBERT

Teorema lui Joubert exprimă tensiunea la bornele unei laturi în funcție de mărimile de circuit și de parametrii elementelor laturii. Această teoremă are mai multe forme, dintre care aici se va folosi numai forma explicită.

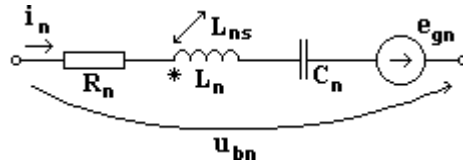


Fig. 38.5-2. Notății pentru teorema lui Joubert.

Se consideră o latură de indice  $n$  (fig. 38.5-2), parcursă de curentul  $i_n$ , care are rezistența  $R_n$ , inductivitatea proprie  $L_n$ , este cuplată magnetic prin inductivitățile  $L_{nk}$  cu alte laturi (de indici  $k \neq n$ , care au curenții  $i_k$ ), are o capacitate (serie)  $C_n$ , având tensiunea inițială (la  $t = 0$ )  $u_{Cn}(0)$ . Latura mai are o sursă cu t.e.m.  $e_{gn}$ , iar la bornele laturii se stabilește tensiunea  $u_{bn}$ , care are următoarea expresie în valori instantanee

$$u_{bn} = R_n i_n + L_n \frac{di_n}{dt} + \sum_k \pm L_{nk} \frac{di_k}{dt} + u_{Cn}(0) + \frac{1}{C_n} \int_0^t i_n(\tau) d\tau - e_{gn}. \quad (38.5-26)$$

Aplicând transformarea Laplace acestei expresii și notând

$$U_{bn}(s) = \mathbf{L}\{u_{bn}(t)\}, \quad (38.5-27)$$

$$I_n(s) = \mathbf{L}\{i_n(t)\}, \quad I_k(s) = \mathbf{L}\{i_k(t)\}, \quad (38.5-28)$$

$$Z_n(s) = R_n + sL_n + 1/(sC_n), \quad Z_{nk}(s) = sL_{nk}, \quad (38.5-29)$$

$$E_n(s) = \mathbf{L}\{e_{gn}(t)\} + \Phi_n(0) - u_{Cn}(0)/s, \quad (38.5-30)$$

după calcule simple se obține expresia operațională

$$U_{bn}(s) = Z_n(s)I_n(s) + \sum_k \pm Z_{nk}(s)I_k(s) - E_n(s), \quad (38.5-31)$$

numită *forma operațională a teoremei lui Joubert*.

În această expresie  $Z_n(s)$  se numește impedanța operațională a laturii  $n$ ,  $Z_{nk}(s)$  este impedanța operațională mutuală dintre laturile  $n$  și  $k \neq n$ , iar  $E_n(s)$  este t.e.m. operațională rezultantă a laturii  $n$ . Ultima are două componente:

- t.e.m. a surselor laturii  $\mathbf{L}\{e_{gn}(t)\}$ ,
- t.e.m. echivalentă condițiilor inițiale  $\Phi_n(0) - u_{Cn}(0)/s$ .

Cu  $\Phi_n(0)$  s-a notat fluxul magnetic al laturii  $n$  la momentul inițial  $t = 0$

$$\Phi_n(0) = L_n i_n(0) + \sum_k \pm L_{nk} i_k(0). \quad (38.5-32)$$

Ecuației (38.5-31) îi corespunde o schemă echivalentă operațională a laturii, în care apare impedanța operațională a laturii, impedanțele operaționale de cuplaj și sursa cu tensiunea electromotoare operațională rezultantă a laturii.

Notă. Pentru claritate, de obicei t.e.m. rezultantă a laturii se consideră descompusă în cele trei componente ale sale și în schema laturii se figurează trei surse "operaționale":

- una corespunzătoare sursei laturii,
- una corespunzătoare condiției inițiale a bobinei,
- una corespunzătoare condiției inițiale a condensatorului.

În baza celor de mai sus rezultă o analogie formală completă între ecuațiile operaționale ale circuitelor electrice în regim tranzitoriu și ecuațiile complexe ale aceluiași circuit în regim permanent sinusoidal. Tabelul de mai jos dă corespondența dintre mărimile și relațiile utilizate în cele două metode.

Mărimea sau relația	La reprezentarea în complex	În metoda operațională
Valoarea instantanee	$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma)$	$i(t)$ , funcțiune original
Imaginea	$C(i) = \underline{I} = I \exp(j\gamma)$	$L\{i\} = I(s) = \int_0^\infty i(t) \exp(-st) dt$
Impedanța	$\underline{Z}$	$Z(s)$
– rezistorului	$R$	$R$
– bobinei	$j \omega L$	$s L$
– de cuplaj magnetic $n \neq k$	$\underline{Z}_{n k} = j \omega L_{n k}$	$Z_{n k}(s) = s L_{n k}$
– condensatorului	$1/(j \omega C)$	$1/(s C)$
Tensiunea elementelor pasive	$\underline{U}_{p n} = \underline{Z}_n \underline{I}_n + \sum \underline{Z}_{n k} \underline{I}_k$	$U_{p n}(s) = Z_n(s) I_n(s) + \sum Z_{n k}(s) I_k(s)$
Prima teoremă a lui Kirchhoff	$\sum \underline{I} = 0$	$\sum I(s) = 0$
A doua teoremă a lui Kirchhoff	$\sum \underline{U}_p = \sum \underline{E}$	$\sum U_p(s) = \sum E(s)$

Ca urmare a acestei corespondențe, metodele și teoremele cunoscute din cadrul studiului în complex al circuitelor în regim sinusoidal se pot extinde, formal neschimbate, la studiul regimurilor tranzitorii cu metoda operațională. Astfel se pot folosi metoda curenților de ochiuri, metoda potențialelor de noduri, teoremele impedanțelor echivalente, teoremele generatoarelor echivalente, teoremele de transfigurare etc. Singura precauție deosebită se referă la luarea în considerație a condițiilor inițiale, prin tensiunile electromotoare operaționale echivalente lor.

Atunci când se studiază regimul tranzitoriu al circuitelor în condiții inițiale "de repaus", toate relațiile liniare stabilite la studiul circuitelor de curent alternativ sinusoidal între imaginile complexe ale curenților și tensiunilor se pot transcrie în relații corespondente între imaginile Laplace, dacă se înlocuiesc impedanțele complexe cu impedanțele operaționale.

Când se trece la calcule numerice, apare deosebirea esențială între cele două metode: pe când operatorul complex  $j\omega$  are o valoare (numerică) bine definită, deci expresiile care-l conțin pot fi calculate numeric înainte de rezolvarea sistemului, operatorul corespunzător  $s$  (de la calculul operațional) rămâne o variabilă, care poate lua valori pe un domeniu al planului complex, fapt pentru care expresiile care-l conțin trebuie păstrate în formă analitică.

### 38.6. METODA OPERAȚIONALĂ DE REZOLVARE A CIRCUITELOR ÎN REGIM TRANZITORIU

### 38.6.1. METODA GENERALĂ

Ținând seama de cele stabilite în subcapitolul precedent, metoda de rezolvare operațională a circuitelor electrice liniare cuprinde următoarele etape:

a) Se formează schema echivalentă operațională a circuitului, cu sursele date și cu sursele fictive echivalente condițiilor inițiale. În schemă mărimile se notează, de obicei, cu simbolurile operaționale.

b) Se aplică forma operațională a ecuațiilor lui Kirchhoff, obținându-se ecuațiile operaționale ale circuitului. Aceste ecuații se rezolvă în raport cu imaginile funcțiilor necunoscute.

c) Se calculează imaginile funcțiilor de timp date (de obicei, tensiuni electromotoare) cu transformarea directă sau cu tabele de transformări. Introducând aceste imagini în expresiile funcțiilor necunoscute, se obțin imaginile funcțiilor necunoscute ca funcțiuni explicite de variabila complexă  $s$ .

d) Se determină funcțiunile original (de timp) necunoscute, folosind metodele de inversiune.

### 38.6.2. APLICAȚIE LA SCRIEREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE PENTRU O REȚEA CU CONDIȚII INIȚIALE DATE

Se consideră circuitul din fig. 38.6-1a, care la  $t < 0$ , cu întreruptorul K deschis, se află în regimul permanent determinat de acțiunea sursei cu t.e.m. constantă  $e_1 = E_0$ , iar condensatorul este încărcat la tensiunea  $U_{C0}$ . Se cere să se scrie ecuațiile operaționale ale regimului tranzitoriu determinat de închiderea la momentul  $t = 0$  a întreruptorului K (fig. 38.6-1b).

Se determină întâi regimul permanent anterior comutației. Curenții continui stabiliți în acest regim sunt

$$I_1 = I_2 = I_0 = \frac{E_0}{R_1 + R_2}, \quad I_3 = I_4 = 0. \quad (38.6-1)$$

Se formează schema echivalentă operațională a circuitului (fig. 38.6-1c). Tensiunile electromotoare ale surselor corespunzătoare condițiilor inițiale au expresiile

$$E_2(s) = \Phi_2(0) = L_2 I_0; \quad E_3(s) = \Phi_3(0) = L_{23} I_0; \quad E_4(s) = -u_{C4}(0)/s = -U_{C0}/s. \quad (30.6-2)$$

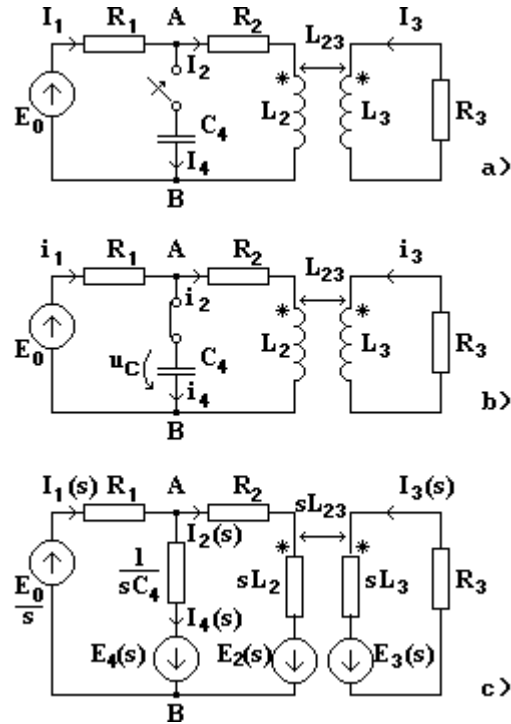


Fig. 38.6-1. Rețea electrică: a) starea inițială, b) starea pentru care se scriu ecuațiile, c) rețeaua operațională.

Imaginea Laplace a sursei din latura 1 (constantă) este

$$E_1(s) = \mathbf{L} \{e_1(t)\} = \mathbf{L} \{E_0\} = \frac{E_0}{s}. \quad (38.6-3)$$

Ecuația corespunzătoare nodului A este

$$I(s) - I_2(s) - I_4(s) = 0. \quad (38.6-4)$$

Ecuațiile corespunzătoare ochiurilor 1, 2, 3 sunt

$$\begin{aligned} R_1 I_1(s) + \frac{I_4(s)}{sC_4} &= \frac{E_0}{s} - \frac{U_{C0}}{s}, \\ -\frac{I_4(s)}{sC_4} + (R_2 + sL_2)I_2(s) + sL_{23}I_3(s) &= L_2 I_0 + \frac{U_{C0}}{s}, \\ (R_3 + sL_3)I_3(s) + sL_{23}I_2(s) &= L_{23} I_0. \end{aligned} \quad (38.6-5)$$

Acest sistem urmează a fi rezolvat în raport cu imaginile curenților  $I_1(s)$ ,  $I_2(s)$ ,  $I_3(s)$ ,  $I_4(s)$ . Apoi cu teorema dezvoltării se pot deduce funcțiunile original ale curenților.

### 38.6.3. APLICAȚIE LA UTILIZAREA FORMEI OPERAȚIONALE A TEOREMEI GENERATORULUI DE TENSIUNE ECHIVALENT

Se consideră un transformator cu inductivitate de dispersie neglijabilă (adică  $L_{12}^2 = L_1 L_2$ ) și cu rezistențe neglijabile ale înfășurărilor. La bornele primare 1-1' (fig. 38.6-2a), transformatorul este alimentat de la un generator cu rezistența interioară  $R_1$ , care produce impulsii dreptunghiulare de forma

$$e_1(t) = E_0(1(t) - 1(t - T)) = E_0 T \delta_T(t). \quad (38.6-6)$$

Se cere tensiunea secundară  $u_2(t) = R_2 i_2(t)$ , la bornele rezistenței de sarcină  $R_2$ .

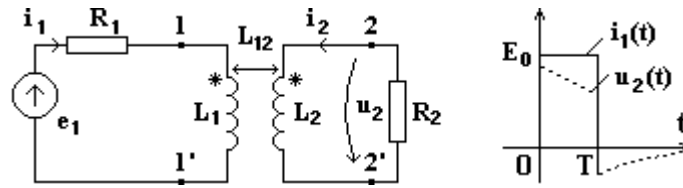


Fig. 38.6-2. Transformator în regim de impuls.

În baza analogiei prezentate în subcap. 38.5.3 se poate aplica teorema generatorului de tensiune echivalent, sub forma

$$I_2(s) = \frac{U_{20}(s)}{R_2 + Z_{22'}(s)}, \quad (38.6-7)$$

și apoi rezultă

$$U_2(s) = R_2 I_2(s) = \frac{R_2}{R_2 + Z_{22'}(s)} U_{20}(s). \quad (38.6-8)$$

În expresiile de mai sus,  $U_{20}(s)$  este imaginea Laplace a tensiunii secundare de mers în gol (cu circuitul secundar întrerupt), iar  $Z_{22'}(s)$  este impedanța operațională echivalentă a rețelei pasivizate între bornele 2-2' (fără sarcina  $R_2$ ).

Tensiunea secundară în gol este

$$U_{20}(s) = sL_{12} I_{10}(s) = sL_{12} \frac{E_1(s)}{R_1 + sL_1}, \quad (38.6-9)$$

iar impedanța  $Z_{22'}(s)$  se poate calcula din relația

$$Z_{22'}(s) = \frac{U_{20}(s)}{I_{2sc}(s)}, \quad (38.6-10)$$

în care  $I_{2sc}(s)$  este imaginea Laplace a curentului de scurtcircuit al bornelor secundare.

Când bornele secundare sunt scurtcircuitate, ecuațiile circuitului sunt

$$\begin{aligned} (R_1 + sL_1) I_{1sc}(s) - sL_{12} I_{2sc}(s) &= E_1(s), \\ sL_2 I_{2sc}(s) - sL_{12} I_{1sc}(s) &= 0. \end{aligned}$$

Eliminând curentul  $I_{1sc}(s)$  între aceste ecuații și ținând seama de proprietatea de dispersie nulă, în final se obține

$$I_{2sc}(s) = \frac{L_{12}}{L_2} \frac{E_1(s)}{R_1}, \quad (38.6-11)$$

respectiv

$$Z_{22'}(s) = \frac{R_1 s L_2}{R_1 + s L_1}. \quad (38.6-12)$$

Cu expresiile stabilite, după unele calcule simple se obține imaginea tensiunii secundare

$$U_2(s) = \frac{R_2 s L_{12} E_1(s)}{R_1 R_2 + s(L_1 R_2 + L_2 R_1)}. \quad (38.6-13)$$

Se introduc notațiile

$$\tau_1 = L_1/R_1, \quad \tau_2 = L_2/R_2. \quad (38.6-14)$$

Imaginea tensiunii electromotoare a generatorului este

$$E_1(s) = E_0/s(1 - \exp(-sT)). \quad (38.6-15)$$

Astfel, imaginea tensiunii secundare devine

$$U_2(s) = \frac{L_{12} \tau_1 E_0}{L_1(\tau_1 + \tau_2)} \frac{1 - \exp(-sT)}{s + 1/(\tau_1 + \tau_2)}. \quad (38.6-16)$$

Cu teorema retardării se deduce funcțiunea originală

$$u_2(t) = E_0 \frac{L_{12}}{L_2} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau_1 + \tau_2}\right) - 1(t-T) \exp\left(-\frac{t-T}{\tau_1 + \tau_2}\right) \right]. \quad (38.6-17)$$

În fig. 38.6-2b s-au reprezentat curbele t.e.m. a generatorului  $e_1(t)$  și a tensiunii secundare  $u_2(t)$ .

#### 38.6.4. STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU PRIN SEPARAREA COMPONENTEI DE REGIM PERMANENT

În numeroase aplicații soluția de regim permanent se poate determina fără dificultăți, cu metodele cunoscute și este preferabil să se utilizeze calculul operațional numai pentru studiul regimului liber, cu condițiile inițiale corespunzătoare regimului tranzitoriu. Ecuațiile operaționale ale regimului liber sunt ecuațiile obținute prin anularea imaginilor t.e.m. ale generatoarelor și prin introducerea t.e.m. operaționale echivalente condițiilor inițiale pentru componentele de regim liber ale curenților.

Pentru exemplificare se va studia regimul tranzitoriu al unui circuit  $R, L$  (fig. 38.6-3), căruia la momentul  $t = 0$  i se aplică tensiunea sinusoidală

$$e = E\sqrt{2} \sin \omega t. \quad (38.6-18)$$

Înainte de aplicarea tensiunii sinusoidale, circuitul era în repaus:  $i(0) = 0$ .

Se știe că, în general,

$$i(t) = i_p(t) + i_l(t), \quad (38.6-19)$$

unde

$$i_p(t) = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi), \quad \text{cu} \quad \sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad (38.6-20)$$

este curentul de regim permanent. Atunci pentru curentul liber rezultă valoarea inițială

$$i_l(0) = i(0) - i_p(0) = -i_p(0) = \frac{E\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (38.6-21)$$

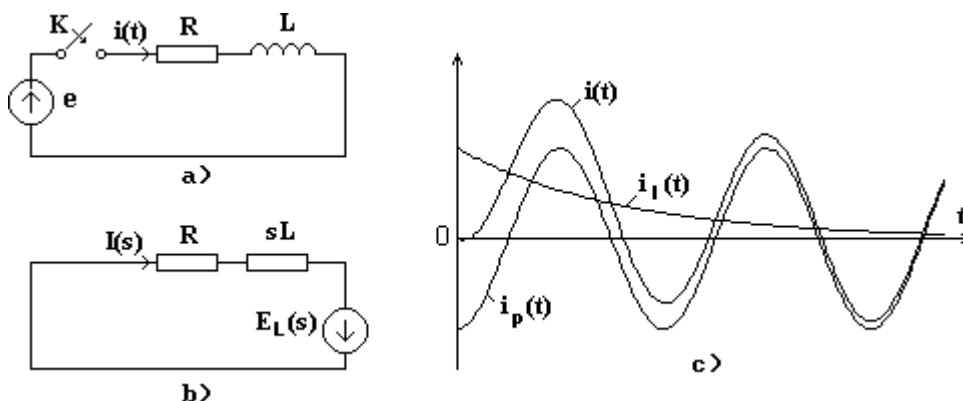


Fig. 38.6-3. Regimul tranzitoriu al circuitului  $RL$  studiat prin separarea componentei de regim permanent.

Schema operațională pentru curentul de regim liber este reprezentată în fig. 38.6-3b și se obține din schema inițială a circuitului, pasivizând-o și introducând apoi o sursă fictivă, cu t.e.m. operațională echivalentă  $E_L(s) = L i_l(0)$ , corespunzătoare condiției inițiale (38.6-21). Pe baza acestei scheme se determină imaginea curentului de regim liber

$$I_l(s) = \frac{E_L(s)}{R + sL} = \frac{E\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \frac{1}{s + R/L}. \quad (38.6-22)$$

Se obține curentul liber

$$i_l(t) = \frac{E_L(s)}{R + sL} = \frac{E\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \exp(-tR/L). \quad (38.6-23)$$

Curentul instantaneu total are expresia

$$i(t) = i_p(t) + i_l(t) = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} [\sin(\omega t - \varphi) - \sin \varphi \exp(-tR/L)]. \quad (38.6-24)$$

În fig. 38.6-3c au fost reprezentate curbele curentului de regim permanent, a curentului liber și a curentului de regim tranzitoriu. Se remarcă faptul că în regim tranzitoriu curba curentului nu mai este simetrică față de axa absciselor, din cauza componentei aperiodice, de regim liber.

**Observație.** Aplicând metoda operațională pentru determinarea directă a curentului de regim tranzitoriu, se ajunge la același rezultat după un calcul mai lung, din cauza formei mai complicate a imaginii curentului total, care se exprimă cu ajutorul imaginii tensiunii sinusoidale a sursei

$$E(s) = E\sqrt{2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad I(s) = \frac{E(s)}{R + sL} = \frac{E\sqrt{2}}{L} \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(s + R/L)}.$$

Aplicând teorema dezvoltării, după calcule destul de lungi se regăsește rezultatul anterior.