数学分析杂题

整理: CHEN

目录

Part I

上册

Chapter 1

级数

1.1 Demo

PROBLEM

1. 证明 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Solution

当 $0<x<1$ 时, 作代换 $\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}=u\in[\sqrt{1-x^2},1]$, 即 $\theta=\arcsin\frac{\sqrt{1-u^2}}{x}$, 于是

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}d\theta &= \int_1^{\sqrt{1-x^2}}\frac{-2}{x\sqrt{u^2-(1-x^2)}}du\\
&= \frac{1}{x}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{u^2-(1-x^2)}}du\\
&= \frac{1}{x}\left[\ln\left|u+\sqrt{u^2-(1-x^2)}\right|\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{1}\\
&= \frac{1}{x}\left(\ln(1+x)-\ln\sqrt{1-x^2}\right)\\
&= \frac{1}{2x}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}\ln(1-x)\\
&= \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}-\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}+x^{n-1}}{2n}\qquad(\text{令 } n=2m+1)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{2m+1}\qquad(0<x<1).
\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}} d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2m+1}$$

仍然成立. 考虑瑕点为 $x=1$ 的广义积分, 有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}} d\theta &= \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2m+1} dx && (1.1)\\
&= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2m+1} dx && (1.2)\\
&= \lim_{t\to 1^-} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t \frac{x^{2m}}{2m+1} dx && (1.3)\\
&= \lim_{t\to 1^-} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t}{(2m+1)^2} && (1.4)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{t\to 1^-} \frac{t}{(2m+1)^2} && (1.5)\\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}. && (1.6)
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\arcsin(x\sin\theta)\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{8}.$$

这表明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

注 1：由 1.2 式至 1.3 式交换了积分号与求和号, 这里逐项积分的合法性由幂级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2m+1}$$

在 $[0,t]$ 上一致收敛所保证. 事实上, 该幂级数的收敛域为 $(-1,1)$. 注意到在 $t\to 1^-$ 时有 $t<1$, 由 Abel 第二定理可知幂级数于其收敛域中内闭一致收敛.

注 2：由 1.4 式至 1.5 式交换了极限符号与求和号. 为此, 我们可以验证以 t 为变元的级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t}{(2m+1)^2}$$

在 $[0,2]$ 上一致收敛. 因为

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t}{(2m+1)^2}\leq\sum_{m=0}^{\infty}\frac{3}{(2m+1)^2}\leq 3+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3}{(2m-1)(2m+1)}<6,$$

运用 Weierstrass 判别法即可得到证明.

另证:

我们另外给出一个证明, 作为对极限交换技巧的一种展示.

定义双阶乘记号

$$(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1,$$

$$(2n)!!=(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2.$$

写出 $(1+z)^{-\frac{1}{2}}$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 级数展开式

$$\begin{aligned}(1+z)^{-\frac{1}{2}}&=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}z+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}z^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}z^3+\cdots\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}z^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}z^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}z^n\quad(-1<z\leq 1).\end{aligned}$$

令 $z=-x^2\sin^2\theta$, 则得到 $f(x)=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 级数展开式

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}&=\sin\theta\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}(-x^2\sin^2\theta)^n\right)\\&=\sin\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\sin^{2n+1}\theta\quad(-1<x<1).\end{aligned}$$

进一步有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}} dx && (1.7)\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \left(\sin\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \sin^{2n+1}\theta\right) dx && (1.8)\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \lim_{t\to 1^-} \left(\int_0^t \sin\theta dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sin^{2n+1}\theta \int_0^t x^{2n} dx\right) && (1.9)\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\theta + \lim_{t\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} t^{2n+1} \sin^{2n+1}\theta\right) d\theta && (1.10)\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to 1^-} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} t^{2n+1} \sin^{2n+1}\theta\right) d\theta && (1.11)\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} \sin^{2n+1}\theta\right) d\theta && (1.12)\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta d\theta && (1.13)\\
=&1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} && (1.14)\\
=&1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} && (1.15)\\
=&\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}. && (1.16)
\end{aligned}
$$

接着证明上述所有交换极限的行为都是合理的.

I. (1.8) 至 (1.9). 运用 Cauchy 根值判别法以及 Wallis 公式, 可得 $|x| < 1$ 时,

$$
\rho = 1 \Bigg/ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sin^{2n+1}\theta} = 1 \Bigg/ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{\sin^{2n+1}\theta}{\sqrt{n\pi}}} = \frac{1}{\sin^2\theta} \geq 1,
$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \sin^{2n+1}\theta$ 在 $(-1, 1)$ 上收敛, 从而在 $[0, t]$ 上一致收敛.

II. (1.10) 至 (1.11). 当 $t \in [0, 1]$ 时, 以 t 为变元的幂级数

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} t^{2n+1} \sin^{2n+1}\theta \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} = \frac{\pi}{2} - 1
$$

满足 Weierstrass 判别法的条件, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}t^{2n+1}\sin^{2n+1}\theta$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

III. (1.12) 至 (1.13). 同理, 根据 Weierstrass 判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\sin^{2n+1}\theta$$

在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上一致收敛.

之后的证明是相同的.