Collections Of Math

数学 收集箱

If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is.

整理：Huyi Chen

整理时间：September 16, 2018

Email: hooyuser@outlook.com

Version: 1.00

目 录

第 1 章 数论

1.1 中国剩余定理

1.1.1 历史背景

《孙子算经》是中国南北朝时期（公元 5 世纪）的数学著作 [1]. 其卷下第二十六题, 叫做“物不知数”问题, 原文如下:

> 有物不知其数, 三三数之剩二, 五五数之剩三, 七七数之剩二。问物几何？

翻译成白话文, 即一个整数除以三余二, 除以五余三, 除以七余二, 求这个整数. 《孙子算经》中首次提到了同余方程组问题, 并给出了以上具体问题的解法, 因此在一些中文数学文献中, 中国剩余定理也会被称为孙子定理.

宋朝数学家秦九韶于 1247 年《数书九章》卷一、二《大衍类》对“物不知数”问题做出了完整系统的解答。明朝数学家程大位将解法编成易于上口的《孙子歌诀》[2]:

> 三人同行七十希, 五树梅花廿一支, 七子团圆正半月, 除百零五使得知.

这个歌诀给出了模数为 3、5、7 时候的同余方程的秦九韶解法。意思是：将除以 3 得到的余数乘以 70, 将除以 5 得到的余数乘以 21, 将除以 7 得到的余数乘以 15, 全部加起来后除以 105, 得到的余数就是答案。比如说在以上的物不知数问题里面, 使用以上的方法计算就得到

$$70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 = 233 = 2 \times 105 + 23.$$

因此按歌诀求出的结果就是 23.

1.1.2 定理陈述

中国剩余定理有三种常见的表述方式, 将在下面一一给出. 第一种是以余数的形式. 我们首先引入带余除法的概念.

Proposition 1.1 带余除法

设 $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^+$. 一定存在唯一的整数对 (q, r), 使 $a = bq + r$, 且 $0 \le r < b$. 其中 $b = \left[\frac{a}{b}\right]$ 称作 a 除以 b 的不完全商, $r = a - b\left[\frac{a}{b}\right]$ 称作 a 除以 b 的余数, r 也常常被记作 $a \bmod b$.

命题的证明是平凡的, 这里略去. 在下面定理的叙述中, 我们总是假定 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 是大于 1 的整数, 而 n_i 常常称作模. 同时, 我们记 $N = n_1 n_2 \cdots n_k$ 为所有模的积. 现在给出中国剩余定理的第一种表述.

Theorem 1.1 中国剩余定理 I

如果 n_i 两两互素, 且整数 r_i 满足 $0 \le r < n_i$, 则存在唯一满足 $0 \le x < N$ 的整数 x, 使得对每一个 $i(1 \le i \le k)$, 都有 $x \bmod n_i = r_i$.

上述表述是《孙子算经》中具体问题的一般化描述, 但直接处理余数往往并不方便. 若引入同余记号, 这个问题实际上就变成如何去求解一个一元一次同余方程组, 这也是中国剩余定理的第二种表述, 而它与第一种描述是完全等价的.

Theorem 1.2 中国剩余定理 II

如果 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 两两互素, 且 $r_1, r_2, \cdots, r_k \in \mathbb{Z}$, 则同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{n_2} \\ \quad\vdots \\ x \equiv r_k \pmod{n_k} \end{cases}$$

有无穷多解, 且任意两个解模 N 同余.

☞ **Proof:** 先证存在性. 记除了 n_i 外所有模的乘积为 $N_i = \dfrac{N}{n_i}$. 因为 n_i 两两互素, 故 N_i 也与 n_i 互素. 由 Bézout 等式, 存在整数 M_i, m_i, 使得

$$M_i N_i + m_i n_i = 1.$$

因此

$$N_i M_i \equiv 1 \pmod{n_i}.$$

记 $M_i = N_i^{-1}$ 为 N_i 的数论倒数, 则 x 可以构造为 $\sum\limits_{i=1}^{k} r_i N_i N_i^{-1}$. 事实上, 只要注意到 $j \ne i$ 时

$n_i|N_j$, 于是有

$$x \equiv \sum_{i=1}^{k} r_i N_i N_i^{-1} \equiv r_i N_i N_i^{-1} \equiv r_i \pmod{n_i}.$$

再证唯一性. 若 y 也是一个解, 则 $x \equiv y \equiv r_i \pmod{n_i}$. 又因为 n_i 两两互素, 由算术基本定理知 $x \equiv y \pmod{N}$. 综上可得, 同余方程组的通解是

$$x = \sum_{i=1}^{k} r_i N_i N_i^{-1} + mN \quad (m \in \mathbb{Z}). \tag{1.1}$$

□

因为模 n_i 的剩余类构成一个环 $\mathbb{Z}_{n_i} = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$, 运用抽象代数的语言, 中国剩余定理可以描述成一个环同构. 在此之前, 我们有必要先明确环的直积的定义.

Definition 1.1 环的直积

给定两个环 $(G, +, *)$ 和 $(H, \oplus, \odot)$, 它们的直积仍是一个环 $(G \times H, +, \cdot)$, 其中集合 $G \times H = \{(g, h)|g \in G, h \in H\}$ 是 G 与 H 的笛卡儿积; 环上的运算 $+, \cdot$ 定义为

- $(g_1, h_1) + (g_2, h_2) = (g_1 + g_2, h_1 \oplus h_2)$
- $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \odot h_2)$

在不会引起误解的情形下, 环 $(G \times H, +, *)$ 可简记 $G \times H$, 其乘法单位元为 $(1_G, 1_H)$. 类似地, 对于可数个环, 我们也可通过这种分量加法和分量乘法的方式, 定义 $\{R_i\}_{i \in I}$ 的直积 $\prod\limits_{i \in I} R_i$.

♡

有了环的直积这一个概念后, 就可以正式介绍定理的第三种表述了. 这将为我们提供一个更加清晰的视角.

Theorem 1.3 中国剩余定理 III

若 $n_1 n_2 \cdots n_k$ 两两互素, 则映射

$$\varphi : (x \bmod n_1, x \bmod n_2, \cdots, x \bmod n_k) \longmapsto x \bmod N$$

确定一个环同构

$$\varphi : \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

♣

☞ **Proof:** 在下面的证明中为了书写简便, 对于模 m 剩余类 $\bar{x} = x + m\mathbb{Z} = \{x + km|k \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, 我们将它与剩余类的代表元 x 不做区分. 首先证明 φ 是一个双射. 事实上, 如果

$$\varphi(r_1, r_2, \cdots, r_k) = \varphi(r_1', r_2', \cdots, r_k') = R,$$

则有 $r_i \equiv r_i' \equiv R \pmod{n_i}$, 或 $(r_1, r_2, \cdots, r_k) = (r_1', r_2', \cdots, r_k')$. 这说明 φ 是单射. 又注意到基数 $|\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}| = N$, 所以 φ 一定是双射. 此外, 我们还需验证双射 φ 保持运算。根据环的直积的定义, 我们有

$$
\begin{aligned}
\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_k) + \varphi(b_1, b_2, \cdots, b_k) &= \sum_{i=1}^{k} a_i N_i N_i^{-1} + \sum_{i=1}^{k} b_i N_i N_i^{-1} = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) N_i N_i^{-1} \\
&= \varphi(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_k + b_k) \\
&= \varphi[(a_1, a_2, \cdots, a_k) + (b_1, b_2, \cdots, b_k)].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_k) \cdot \varphi(b_1, b_2, \cdots, b_k) &= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i N_i N_i^{-1}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} b_i N_i N_i^{-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i b_i (N_i N_i^{-1})^2 + \sum_{i \neq j} a_i N_i N_i^{-1} b_j N_j N_j^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i b_i N_i N_i^{-1} \\
&= \varphi(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \cdots, a_k \cdot b_k) \\
&= \varphi[(a_1, a_2, \cdots, a_k) \cdot (b_1, b_2, \cdots, b_k)].
\end{aligned}
$$

这就证明了 φ 是 $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上的环同构.

□

从环同构的观点出发, 我们可以将定理自然地推广到一般的 PID（主理想整环）上, 这时 R 模掉极大理想 I 得到的的商环 R/I 代替了原先的剩余类环 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. 原因是证明中用到的 Bézout 等式在 PID 上有对应的推广, 而算术基本定理（唯一分解定理）在更一般的 UFD（唯一分解整环）上也成立. 进一步地, 通过定义互素理想, 我们还可以将定理推广到任意环上.

第 2 章 代数

2.1 基础概念

2.1.1 等价关系

Definition 2.1 二元关系

设 X, Y 是任意两个集合, 其任意子集 $\mathcal{R} \in X \times Y$ 叫做 X 与 Y 之间的一个**二元关系**. 若 $X = Y$, 则简称为 X 上的一个二元关系.

有序对 $(x, y) \in \mathcal{R}$ 可简记为 $x\mathcal{R}y$.

Definition 2.2 等价关系

集合 X 上的二元关系 $\sim$ 叫作**等价关系**, 如果任取 $x, x', x'' \in X$, 满足:

1. 反身性: $x \sim x$;
2. 对称性: $x \sim x' \implies x' \sim x$;
3. 传递性: $x \sim x'$ 且 $x' \sim x'' \implies x \sim x''$.

元素 $a, b \in X$ 不具有等价关系记作 $a \nsim b$.

Definition 2.3 等价类

在集合 X 中, 与给定元素 x 等价的所有元素的集合, 叫作包含 x 的**等价类**, 记为

$$\overline{x} := \{x' \in X | x' \sim x\} \subset X.$$

任意元素 $x' \in \overline{x}$ 叫作 $\overline{x}$ 的**代表元**.

我们将在下述两个对偶的命题中看到, 等价关系与集合的分类有着密切的联系. 先叙述一下记号. 集合 X 的所有子集组成的集合称为 X 的幂集, 记作

$$\mathcal{P}(X) := \{S | S \subset X\} = \bigcup_{S \subset X} \{S\}.$$

如果集合 X 能够表示成其若干非空子集的不交并, 那么这些称这些子集的集合为 X 的一个划分, 并记作 $\pi(X)$.

Proposition 2.1

由关系 $\sim$ 确定的所有等价类的集合是集合 X 的一个划分, 即 X 是这些等价类的不交并, 记作

$$\pi_{\sim}(X) := \{\overline{x} \in \mathcal{P}(X) | x \in X\}.$$

Proof: 注意到 $x \in \overline{x}$, 因此 $\bigcup_{x\in X} \overline{x} = X$. 如果存在两个不同的等价类 $\overline{x_1}, \overline{x_2}$, 使得 $\overline{x_1} \bigcap \overline{x_2} = x'$, 那么有 $x' \sim x_1$ 和 $x' \sim x_2$. 由等价关系的传递性知 $x_1 \sim x_2$, 即 $\overline{x_1} = \overline{x_2}$, 矛盾！故对任意两个不同的等价类 $\overline{x_1}, \overline{x_2}$, 都有 $\overline{x_1} \bigcap \overline{x_2} = \varnothing$.

□

Proposition 2.2

如果 $\pi(X)$ 是将集合 X 分成不相交子集的一个划分, 则这些子集是由某一等价关系 $\sim$ 确定的全部等价类.

Proof: 根据划分的定义, 集合 $X = \bigcup_{C_t \in \pi(X)} C_t$. 且每个元素 $x \in X$ 仅被包含在一个子集 C_a 中. 定义 $x \sim x'$ 当且仅当 x 与 x' 属于同一个集合 C_a. 容易验证这个关系是反身、对称且传递的, 即 $\sim$ 是一个等价关系. 进一步根据等价类的定义, 若 $x \in C_a$, 则 C_a 就是等价类 $\overline{x}$. 所以对于我们定义的这种等价关系 $\sim$, 有 $\pi(X) = \pi_{\sim}(X)$.

□

由于等价关系与集合的划分是一一对应的, 因此对应于等价关系 $\sim$ 的划分 $\pi_{\sim}(X)$ 通常记作 $X/\sim$, 也叫作 X 关于 $\sim$ 的商集. 定义满射 $\pi : x \longmapsto \overline{x}$, 并称之为 X 到商集 $X/\sim$ 上的自然映射 (natural map) 或典范映射 (canonical map) 或自然投影 (natural projection).

方便起见, 我们引入交换图 (commutative diagram) 作为工具. 例如下图:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\varphi"] \\ C \arrow[r, "\psi"'] & D \end{tikzcd}$$

我们称这个图表交换, 当且仅当 $\varphi \circ f = \psi \circ g$, 即 A 中的元沿着图中两条路到达 D 得到同一个元.

Proposition 2.3

给定映射 $f : X \longrightarrow Y$. 在 X 上定义等价关系 ω_f 如下

$$a\omega_f b \iff f(a) = f(b).$$

设 $\pi : X \longrightarrow X/\omega_f$ 为自然映射. 则存在唯一映射 $\overline{f} : X/\omega_f \longrightarrow Y$, 使得下图交换, 并且 $\overline{f}$ 是单射.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\omega_f \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Proof: 令 $\overline{f} : \overline{x} \longmapsto f(x)$. 首先验证 $\overline{f}$ 是良定义的, 即无论 $\overline{x}$ 的代表元如何选取, $f(\overline{x})$ 的值是唯一确定的. 事实上, 若 x_1, x_2 属于同一等价类, 则 $\overline{x_1} = \overline{x_2}$. 由 ω_f 的定义立知 $f(x_1) = f(x_2)$. 接着说明这样构造的 $\overline{f}$ 的确使得 $f = \overline{f} \circ \pi$. 因为对任意 $x \in X$, 都有

$$\overline{f} \circ \pi(x) = \overline{f}(\pi(x)) = \overline{f}(\overline{x}) = f(x).$$

$\overline{f}$ 的存在性也得到了证明. 若存在一个映射 $\overline{\varphi}$ 满足 $\overline{\varphi} \circ \pi = f$, 则对任意 $\overline{x} \in X/\omega_f$, 有

$$\overline{\varphi}(\overline{x}) = \overline{\varphi}(\pi(x)) = \overline{\varphi} \circ \pi(x) = f(x) = \overline{f}(\overline{x}),$$

即 $\overline{\varphi} = \overline{f}$, 因此 $\overline{f}$ 是唯一的. $\overline{f}$ 是单射由下述事实给出: $\forall\, \overline{x_1}, \overline{x_2} \in X/\omega_f$,

$$\overline{f}(\overline{x_1}) = \overline{f}(\overline{x_2}) \iff f(x_1) = f(x_2) \iff \overline{x_1} = \overline{x_2}.$$

□

现在我们知道, 这个交换图直观地描述了一个分解式

$$f = \overline{f} \circ \pi, \tag{2.1}$$

映射 f 总可以写成一个满射 $\pi : x \longmapsto \overline{x}$ 和一个单射 $\overline{f} : \overline{x} \longmapsto f(x)$ 的乘积.

2.2 基本定理

2.2.1 同态基本定理

同态基本定理在幺半群, 群, 环, 模, 线性空间上都成立. 这里给出的是线性空间上的版本, 也叫做线性映射基本定理. 但在叙述时, 对同态和线性映射不做区分.

Theorem 2.1 同态基本定理 Fundamental Homomorphism Theorem

设 V, V' 是域 F 上的线性空间, $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$. 定义自然同态

$$\pi : V \longrightarrow V/\mathrm{Ker}\, f,\ \alpha \longmapsto \alpha + \mathrm{Ker}\, f.$$

则存在唯一同态 $\overline{f} : V/\mathrm{Ker}\, f \longrightarrow V'$, 使得 $f = \overline{f} \circ \pi$, 即下图交换. 且 $\overline{f}$ 是一个单同态.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V' \\ V/\mathrm{Ker}\, f \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Proof: 首先证明由商空间 $V/\mathrm{Ker}\, f$ 确定的等价关系 $\alpha_1 \sim \alpha_2 \iff \alpha_1 - \alpha_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ 满足 $\alpha_1 \sim \alpha_2 \iff f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$. 若 $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathrm{Ker}\, f$, 设 $\alpha_1 = \alpha_2 + k$ $(k \in \mathrm{Ker}\, f)$, 则有

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_2 + k) = f(\alpha_2) + f(k) = f(\alpha_2).$$

反之, 若 $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$, 则

$$f(\alpha_1 - \alpha_2) = f(\alpha_1) - f(\alpha_2) = 0.$$

于是 $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathrm{Ker}\, f$. 这就证明了 $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathrm{Ker}\, f \iff f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$. 结合 Proposition 2.3, 只需验证 $\overline{f}$ 是一个线性映射. 对任意 $k, l \in F, \overline{\alpha}$ 和 $\overline{\beta} \in V/\mathrm{Ker}\, f$, 有

$$\begin{aligned} \overline{f}(k\overline{\alpha} + l\overline{\beta}) &= \overline{f}(\overline{k\alpha + l\beta}) \\ &= kf(\alpha) + lf(\beta) \\ &= f(k\alpha + l\beta) \\ &= k\overline{f}(\overline{\alpha}) + l\overline{f}(\overline{\beta}). \end{aligned}$$

因此定理成立.

□

一个自然的问题是: 如果 V 模去的子空间不是 $\mathrm{Ker}\, f$, 是否也有类似的交换图? 下面的Proposition 2.4回答了这个问题. 作为预备, 我们先证明一个引理.

Lemma 2.1

设 W, U 都是域 F 线性空间上 V 的子空间, 且 $W \subset U \subset V$. 定义

$$\begin{aligned} \eta : V/W &\longrightarrow V/U \\ v + W &\longmapsto v + U. \end{aligned}$$

则 η 是一个满同态.

☞ **Proof:** 证明 η 是良定义的. 由 $W \subset U \subset V$ 知: 对任意 $v_1, v_2 \in V$, 若 $v_1 - v_2 \in W$, 则 $v_1 - v_2 \in U$. 这表明

$$\eta(v_1 + W) = v_1 + U = v_2 + U = \eta(v_2 + W),$$

即 $v + W$ 的像与代表元 v 的选取无关.
证明 η 是线性映射. 对任意 $v_1, v_2 \in V$ 和 $k \in F$, 有

$$\eta(v_1 + v_2 + W) = (v_1 + v_2) + U = (v_1 + U) + (v_2 + U) = \eta(v_1 + W) + \eta(v_2 + W).$$

$$\eta(kv_1 + W) = kv_1 + U = k(v_1 + U) = k\eta(v_1 + v_2 + W).$$

证明 η 是满射. 对任意 $v + U \in V/U$, 有 $\eta(v + W) = v + U$.

综上所述, η 是一个满同态.

□

Proposition 2.4

设 V, V' 是域 F 上的线性空间, $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$, W 是 V 的一个子空间. 记 $\pi_1 : \alpha \longmapsto \alpha + W$ 为 V 到 V/W 上的自然同态. 当且仅当 $W \subset \mathrm{Ker}\, f$ 时, 存在唯一同态 $\overline{f_1} : V/W \longrightarrow V'$, 使得 $f = \overline{f_1} \circ \pi_1$, 即下图交换.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & V' \\ V/W \arrow[ur, dashed, "\overline{f_1}"'] & \end{tikzcd}$$

☞ **Proof:** 若 $W \subset \mathrm{Ker}\, f$, 考虑如下图表

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi"] & V' \\ V/W \arrow[r, "\eta"'] \arrow[ur, dashed, "\overline{f_1}"] & V/\mathrm{Ker}\, f \arrow[u, dashed, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

其中 π 与 $\overline{f}$ 的定义继承于 Theorem 2.1, η 则依照 Lemma 2.1 定义为 $\eta : v+W \mapsto v+\mathrm{Ker}\ f$. 为了确定该图交换, 只需验证 $\eta\circ\pi_1=\pi$. 事实上, 对任意 $\alpha\in V$,

$$\eta\circ\pi_1(\alpha)=\eta(\pi_1(\alpha))=\eta(\alpha+W)=\alpha+\mathrm{Ker}\ f=\pi(\alpha).$$

令 $\overline{f_1}=\overline{f}\circ\eta$, 则有

$$\overline{f_1}\circ\pi_1=(\overline{f}\circ\eta)\circ\pi_1=\overline{f}\circ(\eta\circ\pi_1)=\overline{f}\circ\pi=f.$$

注意到 $\overline{f_1}(\alpha+W)=\overline{f_1}(\pi_1(\alpha))=\overline{f_1}\circ\pi_1(\alpha)=f(\alpha)$, 即 $\overline{f_1}$ 若存在, 其在任意点处的取值是确定的. 这说明 $\overline{f_1}$ 是唯一的. 特别地, $\overline{f_1}(W)=f(0)=0$.

反之, 若存在同态 $\overline{f_1}:V/W\longrightarrow V'$, 使得 $f=\overline{f_1}\circ\pi_1$, 则对任意 $\alpha\in W$, 有 $f(\alpha)=\overline{f_1}(\pi_1(\alpha))=\overline{f_1}(W)=0$, 即 $W\subset\mathrm{Ker}\ f$.

□

完成同态基本定理的推广后, 再来看它的一个特例. 若将 f 看成 V 到 $\mathrm{Im}f$ 上的同态, 则 f 为满射. 由 $\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}\overline{f}$ 知 $\overline{f}$ 此时也是满射. 于是下面的定理成立.

Theorem 2.2 第一同构定理 First Isomorphism Theorem

设 V,V' 是域 F 上的线性空间, $f\in\mathrm{Hom}(V,V')$, 则 $V/\mathrm{Ker}\ f\cong\mathrm{Im}f$. 即下图交换.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Im}f \\ V/\mathrm{Ker}\ f \arrow[ur, dashed, "\cong", "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

第一同构定理的应用相当广泛, 下面的 Proposition 2.5 就是一个例子. 在此之前, 先证明一个引理是有帮助的. 在后文中会用到以下记号. 设 f 是 V 到 V' 的映射, $U\subset V$, $H\subset V'$. $f|_U$ 的像集记作 $f(U):=\{f(u)\in V'|u\in U\}$. H 中各元素的所有原像构成的集合记作 $f^{-1}(H):=\{v\in V|f(v)\in H\}$. 对于单元素集 $\{a\}$, $f(\{a\}), f^{-1}(\{a\})$ 可简记为 $f(a), f^{-1}(a)$.

Lemma 2.2

设 V,V' 是域 F 上的线性空间, f 是 V 到 V' 上的线性映射. 记

$$S_f(V)=\{U|\,U\text{是}V\text{的子空间},\ \mathrm{Ker}\ f\subset U\},$$

$$S_f(V')=\{U'|\,U'\text{是}f(V)\text{的子空间}\},$$

则映射 $\sigma:S_f(V)\to S_f(V'), U\mapsto f(U)$ 是双射.

Proof:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[d, "f"'] \\
0 \arrow[r, phantom, "\subset"] & f(U) \arrow[r, phantom, "\subset"] & f(V)
\end{tikzcd}$$

先证 σ 是满的. 设 $U \in S_f(V')$, 只需证 $f^{-1}(U) \in S_f(V)$. 任取 $\alpha, \beta \in f^{-1}(U), k, l \in F$, 因为 $f(\alpha), f(\beta) \in U$, 所以

$$f(k\alpha + l\beta) = kf(\alpha) + lf(\beta) \in U,$$

即 $k\alpha + l\beta \in f^{-1}(U)$. 这说明 $f^{-1}(U)$ 是 V 的子空间. 又因为 $f(\mathrm{Ker}\ f) = \{0\} \subset f(U)$, 故 $\mathrm{Ker}\ f \subset f^{-1}(U)$, 从而有 $f^{-1}(U) \in S_f(V)$.

再证 σ 是单的. 若 $\sigma(U_1) = \sigma(U_2)$, 即 $f(U_1) = f(U_2)$, 则对任意 $u_1 \in U_1$, $f(u_1) \in f(U_1) = f(U_2)$, 因此存在 $u_2 \in U_2$, 使得 $f(u_2) = f(u_1)$. 于是 $f(u_1) - f(u_2) = f(u_1 - u_2) = 0$, $u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker}\ f \subset U_2$. 从而 $u_1 = u_2 + (u_1 - u_2) \in U_2$, 故 $U_1 \subset U_2$. 同理可得 $U_2 \subset U_1$. 因此 $U_1 = U_2$.

□

Proposition 2.5

设 V, V' 是域 F 上的线性空间, $f : V \longrightarrow V'$ 是满同态, V 的子空间 U 满足 $\mathrm{Ker}\ f \subset U$. 则

$$V/U \cong V'/f(U).$$

Proof: 设 $\pi' : V' \to V'/f(H)$ 是自然同态. 因为 f 和 π' 都是满射, 复合同态

$$\pi' \circ f : V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{\pi'} V'/f(U)$$

显然是满射. 由 Lemma 2.2 知

$$\mathrm{Ker}\ (\pi' \circ f) = (\pi' \circ f)^{-1}(0 + f(U)) = f^{-1} \circ \pi'^{-1}(0 + f(U)) = f^{-1}(f(U)) = U.$$

运用第一同构定理, 就得到了 $V/U \cong V'/f(U)$. 同构映射 $\bar{g}$ 满足交换图

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V' \arrow[r, two heads, "\pi'"] & V'/f(U) \\
V/U \arrow[urr, dashed, "\bar{g}"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

我们继续运用第一同构定理证明第二同构定理和第三同构定理.

Proof: 设 i 是嵌入映射, $\pi' : U + W \to (U + W)/W$ 是自然同态. 复合同态

$$\pi' \circ i : U \xrightarrow{i} U + W \xrightarrow{\pi'} (U + W)/W$$

Theorem 2.3 第二同构定理 Second Isomorphism Theorem

设 U 和 W 是域 F 上线性空间 V 的子空间, 则

$$(U+W)/U = W/(U\cap W).$$

是满射. 记 $f=\pi'\circ i$,

$$\operatorname{Ker} f = (\pi'\circ i)^{-1}(0+W) = i^{-1}\circ\pi'^{-1}(0+W) = i^{-1}(W) = U\cap W.$$

运用第一同构定理, 就得到了 $U/\operatorname{Ker} f = U/U\cap W \cong (U+W)/W$. 同构映射 $\overline{f}$ 满足交换图

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & U+W \arrow[r, two heads, "\pi'"] & (U+W)/W \\
V/U \arrow[urr, dashed, "\overline{f}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Theorem 2.4 第三同构定理 Third Isomorphism Theorem

设 W,U 都是域 F 上线性空间 V 的子空间, 且 $W\subset U\subset V$, 则

$$V/U \cong (V/W)/(V/W)$$

Proof: 由 Lemma 2.1 知 $\eta : V/W \longrightarrow V/U,\ v+W \longmapsto v+U$ 是满同态. 下证 $\operatorname{Ker}\eta = \eta^{-1}(0+U) = U/W$.
任取 $u+W\in U/W$,

$$\eta(u+W) = u+U = 0+U \in V/U$$

即 $u+W\in\operatorname{Ker}\eta$, 故 $U/W\subset\operatorname{Ker}\eta$. 任取 $x+W\in\operatorname{Ker}\eta$, 有 $\eta(x+W)=x+U=0+U$, 故 $x\in U$, 从而有 $x+W\in U/W$. 于是 $\operatorname{Ker}\eta\subset U/W$. 因此有 $\operatorname{Ker}\eta = U/W$.
由第一同构定理, 得到 $(V/W)/\operatorname{Ker}\eta = (V/W)/(U/W)\cong V/U$. 同构映射 $\overline{\eta}$ 满足交换图

$$\begin{tikzcd}
V/W \arrow[r, two heads, "\eta"] \arrow[d, "\pi"] & V/U \\
(V/W)/(U/W) \arrow[ur, dashed, "\overline{\eta}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

参考文献

[1] J. W. Dauben, “The mathematics of egypt, mesopotamia, china, india and islam：A sourcebook,” 2007.

[2] 李俨, “大衍求一术的过去和未来,” 1998.