

# Problem Set

## 1 Finite-Sample Properties of OLS

### 1.1 新增样本点

▷ 问题. 给定简单线性模型

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

其中

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)', \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)', \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'.$$

设该模型在 Gauss-Markov 假设下, OLS 估计量为  $\mathbf{b} = (b_0, b_1)'$ . 若新增一个样本点

$$y_{n+1} = \beta_0 + \beta_1 x_{n+1} + \varepsilon_{n+1},$$

求  $\text{Var}(\hat{y}_{n+1} - y_{n+1} | \mathbf{X}, x_{n+1})$ , 其中  $\hat{y}_{n+1} = b_0 + x_{n+1}b_1$ . 在给定  $\mathbf{X}$  的情况下, 求出当  $x_{n+1}$  为何值时,  $\text{Var}(\hat{y}_{n+1} - y_{n+1} | \mathbf{X}, x_{n+1})$  有最小值.

▷ 解答.

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+1} - y_{n+1} &= (b_0 + x_{n+1}b_1) - (\beta_0 + x_{n+1}\beta_1 + \varepsilon_{n+1}) \\ &= (b_0 - \beta_0) + x_{n+1}(b_1 - \beta_1) - \varepsilon_{n+1} \end{aligned}$$

记  $\bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$ . 因为

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{b} | \mathbf{X}, x_{n+1}) &= \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \begin{pmatrix} n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{Var}(b_0 - \beta_0 | \mathbf{X}, x_{n+1}) &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \\ \text{Var}[x_{n+1}(b_1 - \beta_1) | \mathbf{X}, x_{n+1}] &= \frac{\sigma^2 x_{n+1}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \\ \text{Var}(\varepsilon_{n+1} | \mathbf{X}, x_{n+1}) &= \sigma^2, \end{aligned}$$

$$\text{Cov}[b_0 - \beta_0, x_{n+1}(b_1 - \beta_1)|\mathbf{X}, x_{n+1}] = -\frac{\sigma^2 \bar{x} x_{n+1}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

$$\text{Cov}(b_0 - \beta_0, \varepsilon_{n+1}|\mathbf{X}, x_{n+1}) = \text{Cov}[x_{n+1}(b_1 - \beta_1), \varepsilon_{n+1}|\mathbf{X}, x_{n+1}] = 0.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}|\mathbf{X}, x_{n+1}) &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + n\sigma^2 x_{n+1}^2 - 2n\sigma^2 \bar{x} x_{n+1}}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} + \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \left( x_{n+1}^2 - 2\bar{x} x_{n+1} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + \sigma^2.\end{aligned}$$

当  $x_{n+1} = \bar{x}$  时,  $\text{Var}(\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}|\mathbf{X}, x_{n+1})$  有最小值.

## 1.2 增加解释变量个数会提高 $R^2$

▷ 问题. 证明对简单线性模型

$$\mathbf{y}_{n \times 1} = \mathbf{X}_{n \times K} \boldsymbol{\beta}_{K \times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n \times 1},$$

进行 OLS 回归时, 使用  $K-1$  个解释变量的  $R^2$  小于等于使用  $K$  个解释变量时的  $R^2$ .

▷ 解答. 使用  $K$  个自变量时, OLS 估计量  $\mathbf{b}$  最小化了残差平方和

$$\mathbf{b} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^K} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

因此, 对任意  $\hat{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{R}^K$ , 有

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2 \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}\|^2 = SSR_K.$$

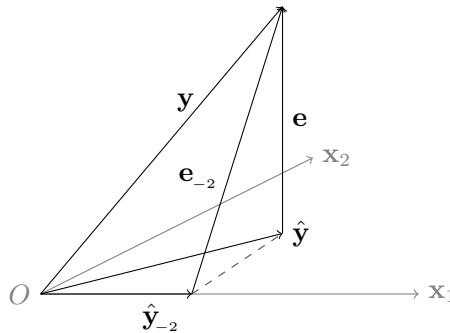
设使用  $K-1$  个自变量时对应的 OLS 估计量为  $\mathbf{b}_{-K} \in \mathbb{R}^{K-1}$ . 令  $\mathbf{b}_{-K}^* = (\mathbf{b}_{-K}, 0)$ , 利用上式得到

$$SSR_{K-1} = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}_{-K}\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}_{-K}^*\|^2 \geq SSR_K.$$

由  $R^2$  的表达式

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

可知使用  $K-1$  个解释变量的  $R^2$  小于等于使用  $K$  个解释变量时的  $R^2$ . 该结果的几何解释如下图所示.



这幅图展示了  $K = 2$  的低维情形，其中  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  是  $\mathbf{X}$  的列向量， $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}$ 。根据直角三角形的斜边长度大于直角边这一性质可以得到

$$SSR_1 = \|\mathbf{e}_{-2}\|^2 \geq \|\mathbf{e}\|^2 = SSR_2.$$

除非  $\mathbf{y}$  在  $\mathbf{x}_2$  上的投影为 0，以上不等式严格成立。沿着这个思路，我们可以给出另一种证明。因为

$$\|\mathbf{e}_{-K}\|^2 = \|(\mathbf{e}_{-K} - \mathbf{e}) + \mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{e}_{-K} - \mathbf{e}\|^2 + \|\mathbf{e}\|^2 + 2(\mathbf{e}_{-K} - \mathbf{e})'\mathbf{e},$$

故只需证明  $(\mathbf{e}_{-K} - \mathbf{e})'\mathbf{e} = 0$ 。设使用  $K$  个自变量时回归时，零化子  $\mathbf{M} = \mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ ，使用  $K - 1$  个自变量时对应的零化子为  $\mathbf{M}_{-K} = \mathbf{I}_n - \mathbf{X}_{-K}(\mathbf{X}_{-K}'\mathbf{X}_{-K})^{-1}\mathbf{X}_{-K}'$ 。注意到

$$\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{0}_{K \times 1} \implies \mathbf{X}_{K-1}'\mathbf{e} = \mathbf{0}_{(K-1)},$$

我们有

$$(\mathbf{e}_{-K} - \mathbf{e})'\mathbf{e} = (\mathbf{y}'\mathbf{M}_{-K}' - \mathbf{y}'\mathbf{M}')\mathbf{e} = \mathbf{y}'(\mathbf{M}_{-K}'\mathbf{e} - \mathbf{M}'\mathbf{e}).$$

一方面，

$$\mathbf{M}_{-K}'\mathbf{e} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{X}_{-K}(\mathbf{X}_{-K}'\mathbf{X}_{-K})^{-1}\mathbf{X}_{-K}')\mathbf{e} = \mathbf{e},$$

另一方面，

$$\mathbf{M}'\mathbf{e} = \mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{e},$$

故可得

$$(\mathbf{e}_{-K} - \mathbf{e})'\mathbf{e} = \mathbf{y}'(\mathbf{e} - \mathbf{e}) = 0.$$

于是我们证明了

$$\|\mathbf{e}_{-K}\|^2 = \|\mathbf{e}_{-K} - \mathbf{e}\|^2 + \|\mathbf{e}\|^2 \geq \|\mathbf{e}\|^2.$$

### 1.3 模型误设：加入无关变量

▷ 问题. 已知 DGP（数据生成过程）

$$\mathbf{y} = \underset{(n \times K_1)}{\mathbf{X}_1} \beta_1 + \varepsilon$$

满足 Gauss-Markov 假设。若使用如下模型进行估计

$$\mathbf{y} = \underset{(n \times K_1)}{\mathbf{X}_1} \beta_1 + \underset{(n \times K_2)}{\mathbf{X}_2} \beta_2 + \varepsilon^*,$$

得到对应的 OLS 估计量  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ ，证明  $E[\mathbf{b}_1 | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \beta_1$ ， $\text{Var}[\mathbf{b}_1 | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \geq \sigma^2(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}$ 。

▷ 解答. 设  $\mathbf{M} = \mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ ， $\mathbf{M}_2 = \mathbf{I}_n - \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'$ 。用  $\mathbf{X}_1'\mathbf{M}_2$  左乘

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{X}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{e}.$$

得到

$$\mathbf{X}_1'\mathbf{M}_2\mathbf{y} = \mathbf{X}_1'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{X}_1'\mathbf{M}_2\mathbf{X}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{X}_1'\mathbf{M}_2\mathbf{e}. \quad (1)$$

因为  $\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{0} \implies \mathbf{X}'_1\mathbf{e} = \mathbf{X}'_2\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , 类似 1.2 可以得到

$$\mathbf{M}_2\mathbf{e} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{X}_2(\mathbf{X}'_2\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}'_2)\mathbf{e} = \mathbf{e} - \mathbf{X}_2(\mathbf{X}'_2\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}'_2\mathbf{e} = \mathbf{e},$$

从而有  $\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{e} = \mathbf{X}'_1\mathbf{e} = \mathbf{0}$ . 又由  $\mathbf{M}_2\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$  知  $\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ . 于是 (1) 式简化为

$$\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{y} = \mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1\mathbf{b}_1.$$

由此解出

$$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{y}.$$

于是我们可以将  $\mathbf{b}_1 - \beta_1$  表示成  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  和  $\varepsilon$  的函数

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 - \beta_1 &= (\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{y} - \beta_1 \\ &= (\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2(\mathbf{X}\beta_1 + \varepsilon) - \beta_1 \\ &= (\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}\beta_1 + (\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\varepsilon - \beta_1 \\ &= \beta_1 + (\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\varepsilon - \beta_1 \\ &= (\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\varepsilon \\ &= \mathbf{C}\varepsilon \quad (\text{令 } \mathbf{C} = (\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2). \end{aligned}$$

故

$$\mathbb{E}[\mathbf{b}_1 - \beta_1 | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbb{E}[\mathbf{C}\varepsilon | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{C}\mathbb{E}[\varepsilon | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{0},$$

即  $\mathbb{E}[\mathbf{b}_1 | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \beta_1$ . 下面证明一个引理:

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \implies \mathbf{B}^{-1} \geq \mathbf{A}^{-1}.$$

事实上, 这可由恒等式

$$\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}$$

直接得到.

$$\begin{aligned} \text{Var}[\mathbf{b}_1 | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] &= \text{Var}[\mathbf{b}_1 - \beta_1 | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \\ &= \text{Var}[\mathbf{C}\varepsilon | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \\ &= \mathbf{C}\text{Var}[\varepsilon | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]\mathbf{C}' \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}'_2\mathbf{X}_1(\mathbf{X}'_1\mathbf{M}'_2\mathbf{X}_1)^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1} \end{aligned}$$

要证明

$$\sigma^2(\mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1} \geq \sigma^2(\mathbf{X}'_1\mathbf{X}_1)^{-1},$$

只需证明

$$\mathbf{X}'_1\mathbf{X}_1 \geq \mathbf{X}'_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1.$$

设投影矩阵  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{X}_2(\mathbf{X}'_2\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}'_2 = \mathbf{I}_n - \mathbf{M}$ , 则只需证

$$\mathbf{X}'_1\mathbf{P}_2\mathbf{X}_1 = (\mathbf{P}_2\mathbf{X}_1)'(\mathbf{P}_2\mathbf{X}_1) \geq \mathbf{0}.$$

上式确实成立, 因此我们证明了  $\text{Var}[\mathbf{b}_1 | \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \geq \sigma^2(\mathbf{X}'_1\mathbf{X}_1)^{-1}$ .