
高等代数简明教程习题解答

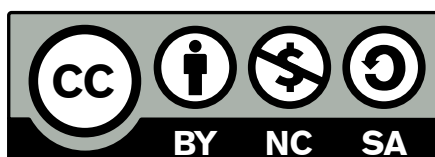
整理: CHEN



2017 年 12 月 8 日



版权声明: 本作品采用[知识共享署名-非商业性使用-相同方式共享 3.0 中国大陆许可协议](#)进行许可。



目录

I 上册 4

Chapter 1 代数学的经典课题 5

- 1.1 习题一 若干准备知识 5
- 1.2 习题二 一元高次代数方程的基础知识 5
- 1.3 习题三 线性方程组 5

Chapter 2 向量空间与矩阵 6

- 2.1 习题一 m 维向量空间 6
- 2.2 习题二 矩阵的秩 6
- 2.3 习题三 线性方程组的理论课题 6
- 2.4 习题四 矩阵的运算 6
- 2.5 习题五 n 阶方阵 6
- 2.6 习题六 分块矩阵 6

Chapter 3 行列式 7

- 3.1 习题一 n 阶方阵的行列式 7
- 3.2 习题二 行列式的初步应用 7
- 3.3 习题三 Laplace 展开式与 Binet-Cauchy 公式 7

Chapter 4 线性空间与线性变换 8

- 4.1 习题一 线性空间的基本概念 8

4.2	习题二	子空间与商空间	19
4.3	习题三	线性映射与线性变换	83
4.4	习题四	线性变换的特征值与特征向量	83

Chapter 5 双线性函数与二次型 84

5.1	习题一	双线性函数	84
5.2	习题二	二次型	84
5.3	习题三	实与复二次型的分类	84
5.4	习题四	正定二次型	84

II 下册 85

Chapter 6 带度量的线性空间 86

6.1	习题一	欧几里得空间的定义和基本性质	86
6.2	习题二	欧几里得空间中的特殊线性变换	86
6.3	习题三	酉空间	86

Chapter 7 线性变换的 Jordan 标准形 87

7.1	习题一	幂零线性变换的 Jordan 标准形	87
7.2	习题二	一般线性变换的 Jordan 标准形	87

Chapter 8 问题 88

8.1	插值问题	88
8.2	基与同构	90

Part I

上册

Chapter 1

代数学的经典课题

1.1 习题一 若干准备知识

1.2 习题二 一元高次代数方程的基础知识

1.3 习题三 线性方程组

Chapter 2

向量空间与矩阵

2.1 习题一 m 维向量空间

2.2 习题二 矩阵的秩

2.3 习题三 线性方程组的理论课题

2.4 习题四 矩阵的运算

2.5 习题五 n 阶方阵

2.6 习题六 分块矩阵

Chapter 3

行列式

3.1 习题一 n 阶方阵的行列式

3.2 习题二 行列式的初步应用

3.3 习题三 Laplace 展开式与 Binet-Cauchy 公式

Chapter 4

线性空间与线性变换

4.1 习题一 线性空间的基本概念

PROBLEM

2. 检验以下集合对于所指定的运算是否构成实数域上的线性空间:

(5) 全体实数的二元有序数组所成的集合关于下面定义的运算:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2),$$

$$k \circ (a, b) = \left[ka, kb + \frac{k(k-1)}{2} a^2 \right];$$

Solution

(5) 容易验证本题定义的加法 \oplus 和数乘 \circ 运算在 \mathbb{R}^2 中的封闭性. 下面依次检验线性空间的八条法则.

(i) 加法结合律

$$\begin{aligned} & [(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2)] \oplus (a_3, b_3) \\ &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2) \oplus (a_3, b_3) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) \\ &= (a_1, b_1) \oplus (a_2 + a_3, b_2 + b_3 + a_2 a_3) \\ &= (a_1, b_1) \oplus [(a_2, b_2) \oplus (a_3, b_3)]; \end{aligned}$$

(ii) 加法交换律

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2) = (a_2, b_2) \oplus (a_1, b_1);$$

(iii) 存在加法零元 $(0, 0)$,

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}, (a, b) \oplus (0, 0) = (a, b);$$

(iv) 对任意 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, 存在加法负元 $(-a, a^2 - b)$, 使得

$$(a, b) \oplus (-a, a^2 - b) = (0, b + a^2 - b + a(-a)) = (0, 0);$$

(v) 对任意 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$1 \circ (a, b) = \left[1a, 1b + \frac{1 \times (1-1)}{2} a^2 \right] = (a, b);$$

(vi) 数乘与域乘法相容, 即 $\forall k, l \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} k \circ (l \circ (a, b)) &= k \circ \left[la, lb + \frac{l(l-1)}{2} a^2 \right] \\ &= \left[kla, klb + \frac{kl(l-1)}{2} a^2 + \frac{k(k-1)}{2} (la)^2 \right] \\ &= \left[kla, klb + \frac{kl(kl-1)}{2} a^2 \right] \\ &= (kl) \circ (a, b); \end{aligned}$$

(vii) 数乘关于域加法的分配律. $\forall k, l \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (k+l) \circ (a, b) &= \left[(k+l)a, (k+l)b + \frac{(k+l)(k+l-1)}{2} a^2 \right] \\ &= \left[ka + la, kb + lb + \frac{k(k-1)}{2} a^2 + \frac{l(l-1)}{2} a^2 + kla^2 \right] \\ &= \left[ka, kb + \frac{k(k-1)}{2} a^2 \right] \oplus \left[la, lb + \frac{l(l-1)}{2} a^2 \right] \\ &= k \circ (a, b) \oplus l \circ (a, b); \end{aligned}$$

(viii) 数乘关于线性空间加法的分配律. $\forall k \in \mathbb{R}, \forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
 & k \circ [(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2)] \\
 &= k \circ (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2) \\
 &= \left[k(a_1 + a_2), k(b_1 + b_2 + a_1 a_2) + \frac{k(k-1)}{2}(a_1 + a_2)^2 \right] \\
 &= \left[ka_1 + ka_2, kb_1 + kb_2 + \frac{k(k-1)}{2}a_1^2 + \frac{k(k-1)}{2}a_2^2 + k^2 a_1 a_2 \right] \\
 &= \left[ka_1, kb_1 + \frac{k(k-1)}{2}a_1^2 \right] \oplus \left[ka_2, kb_2 + \frac{k(k-1)}{2}a_2^2 \right] \\
 &= [k \circ (a_1, b_1)] \oplus [k \circ (a_2, b_2)].
 \end{aligned}$$

PROBLEM

7. 在 \mathbb{Q} 上的线性空间 $\mathbb{Q}(\omega)$ 内判断下列向量组是否线性相关:

(1) $\frac{1}{2}, 3, -7$; (2) $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$; (3) $\omega, \bar{\omega}, \sqrt{3}i$.

其中, $\mathbb{Q}(\omega) = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Q}\}$, $w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.

Solution

(1) 线性相关. 因为 $8 \times \frac{1}{2} + 1 \times 3 + 1 \times (-7) = 0$. $r(\frac{1}{2}, 3, -7) = 1$.

(2) 线性相关. 因为 $1 \times 1 + (-1) \times \omega^3 = 0$. $r(1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4) = 2$.

(3) 线性相关. 因为 $1 \times w + (-1) \times \bar{w} + (-1) \times \sqrt{3}i = 0$. $r(\omega, \bar{\omega}, \sqrt{3}i) = 2$.

PROBLEM

8. 求 \mathbb{Q} 上线性空间 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的维数和一组基.

Solution

注意到对任意 $q \in \mathbb{Q}(\omega)$, 有

$$q = a + b\omega \quad (a, b \in \mathbb{Q}),$$

即 $\mathbb{Q}(\omega)$ 中任意向量 q 都可由 $\{1, \omega\}$ 线性表出. 设存在 $k_1, k_2 \in \mathbb{Q}$, 使得

$k_1 1 + k_2 \omega = 0$, 则有

$$\begin{cases} k_1 - \frac{k_2}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} k_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \end{cases}.$$

因此 $1, \omega$ 线性无关. 于是 $\{1, \omega\}$ 是 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的一组基, 并且 $\dim \mathbb{Q}(\omega) = 2$.

PROBLEM

14. 给定数域 K 上的一个 n 阶方阵 $A \neq 0$. 设

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_m \quad (a_0 \neq 0, a_i \in K)$$

是使 $f(A) = 0$ 的最低次多项式. 设 V 是由系数在 K 内的 A 的多项式的全体关于矩阵加法、数乘所组成的 K 上的线性空间, 证明:

$$E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$$

是 V 的一组基, 从而 $\dim V = m$. 求 V 中向量

$$(A - aE)^k \quad (a \in K, 0 \leq k \leq m)$$

在这组基下的坐标.

Solution

由于 $a_0 \neq 0$, 记 $m(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{a_0} = \lambda^m + b_1 \lambda^{m-1} + \cdots + b_m$, 所以

$$m(A) = A^m + b_1 A^{m-1} + \cdots + b_m E = 0 \implies A^m = -b_1 A^{m-1} - \cdots - b_m A - b_m E.$$

继续迭代, 便可用 $E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$ 线性表出 A^{m+1}, A^{m+2}, \dots .

从而 V 中的任一元素都可以表示为

$$c_0 E + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{m-1} A^{m-1}.$$

设 $k_0 E + k_1 A + k_2 A^2 + \cdots + k_{m-1} A^{m-1} = 0$, 则

$$h(\lambda) = k_0 + k_1 \lambda + k_2 \lambda^2 + \cdots + k_{m-1} \lambda^{m-1}$$

也是 A 的一个零化多项式. 但是注意到 $\deg(h(\lambda)) < \deg(f(\lambda))$, 由 $m(\lambda)$ 的定义可知

$$h(\lambda) = k_0 + k_1 \lambda + k_2 \lambda^2 + \cdots + k_{m-1} \lambda^{m-1} \equiv 0 \implies k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0,$$

即 $E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$ 线性无关. 从而 $E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$ 是 V 的一组基, 且有 $\dim V = m$.

由于 A 与 aE 可交换, 故

$$(A - aE)^k = A^k + k(-a)A^{k-1} + \dots + (-aE)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i (-a)^i A^{k-i}.$$

所以向量 $(A - aE)^k$ ($a \in K, 0 \leq k \leq m$) 在基 $E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$ 下的坐标为

$$\begin{aligned} & \left((-1)^k a^k, \dots, (-1)^i C_k^i a^i, \dots, 1, 0, \dots, 0 \right) \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \\ & \left(-\frac{a_m}{a_0} + (-1)^m a^m, \dots, -\frac{a_i}{a_0} + (-1)^i C_m^i a^i, \dots, -\frac{a_1}{a_0} - C_m^1 a \right) \quad (k = m). \end{aligned}$$

PROBLEM

15. 接上题, 证明

$$(A - aE)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

也是 V 的一组基. 求两组基之间的过渡矩阵 T :

$$(E, A - aE, \dots, (A - aE)^{m-1}) = (E, A, \dots, A^{m-1})T$$

Solution

假设

$$k_0 E + k_1 (A - aE) + k_2 (A - aE)^2 + \dots + k_{m-1} (A - aE)^{m-1} = 0,$$

则

$$g(\lambda) = k_0 + k_1(\lambda - a) + k_2(\lambda - a)^2 + \dots + k_{m-1}(\lambda - a)^{m-1}$$

也是 A 的一个零化多项式.

但是注意到 $\deg(g(\lambda)) = m-1 < m = \deg(f(\lambda))$, 所以由 $f(\lambda)$ 的定义可知

$$k_0 + k_1(\lambda - a) + k_2(\lambda - a)^2 + \dots + k_{m-1}(\lambda - a)^{m-1} \equiv 0.$$

因此 $k_0 = k_1 = k_2 = \dots = k_{m-1} = 0$, 即

$$E, (A - aE), (A - aE)^2, \dots, (A - aE)^{m-1}$$

线性无关. 而 $\dim V = m$, 这就证明 $(A - aE)^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$) 也是 V 的一组基.

由习题 4.1.14 的结论可知, 向量 $(A - aE)^k$ 在基 $E, A, A^2, \dots, A^{m-1}$ 下的坐标为

$$\left((-1)^k a^k, \dots, (-1)^i C_k^i a^i, \dots, 1, 0, \dots, 0 \right).$$

于是过渡矩阵 T 的第 $k+1$ 列 ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$) 为

$$(-1)^k a^k, \dots, (-1)^i C_k^i a^i, \dots, 1, 0, \dots, 0.$$

所以可以写出两组基之间的过渡矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 & \cdots & (-1)^{m-1} a^{m-1} \\ 0 & 1 & -2a & \cdots & (-1)^{m-2} C_{m-1}^{m-2} a^{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{m-3} C_{m-1}^{m-3} a^{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{m-1}^2 a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -C_{m-1}^1 a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

PROBLEM

16. 在 K^4 求由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵, 并求向量 β 在指定的基下的坐标.

$$(1) \quad \varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \eta_1 = (2, 1, -1, 1),$$

$$\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \eta_2 = (0, 3, 1, 0),$$

$$\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \eta_3 = (5, 3, 2, 1),$$

$$\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1), \quad \eta_4 = (6, 6, 1, 3).$$

求 $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标.

$$(3) \quad \varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \eta_1 = (1, 1, 0, 1),$$

$$\varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1), \quad \eta_2 = (2, 1, 3, 1),$$

$$\varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1), \quad \eta_3 = (1, 1, 0, 0),$$

$$\varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \eta_4 = (0, 1, -1, -1).$$

求 $\beta = (1, 0, 0, -1)$ 在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标.

Solution

- (1) 分别以 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 和 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 作列向量组排列成两个矩阵 A 及 B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

可以看出, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

设 β 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标为 $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)'$, 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)'$. 注意到 $X = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, 所以

$$X = TY \implies Y = T^{-1}X$$

又因为

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{11}{9} \\ \frac{1}{27} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{23}{27} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{26}{27} \end{bmatrix}$$

所以 β 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标为 $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)'$, 其中

$$\begin{cases} y_1 &= \frac{4}{9}b_1 & +\frac{1}{3}b_2 & -b_3 & -\frac{11}{9}b_4 \\ y_2 &= \frac{1}{27}b_1 & +\frac{4}{9}b_2 & -\frac{1}{3}b_3 & -\frac{23}{27}b_4 \\ y_3 &= \frac{1}{3}b_1 & & & -\frac{2}{3}b_4 \\ y_4 &= -\frac{7}{27}b_1 & +\frac{1}{9}b_2 & +\frac{1}{3}b_3 & +\frac{26}{27}b_4 \end{cases}$$

(3) 分别以 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 和 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 作列向量组排列成两个矩阵 A, B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

对 (A, B) 做初等行变换

$$\begin{aligned} (A, B) &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array} \right] \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

所以, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵为

$$T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

设 β 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标为 $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)'$, 从而

$$\beta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

解该非齐次线性方程组可得

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (-2, -\frac{1}{2}, 4, -\frac{3}{2}),$$

即

$$\beta = -2\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 + 4\eta_3 - \frac{3}{2}\eta_4.$$

PROBLEM

17. 接上题 (1), 求一非零向量 ξ , 使得它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 与 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下有相同的坐标.

Solution

设 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 与 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标都为 (z_1, z_2, z_3, z_4) , 则

$$\xi = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - B) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = 0.$$

解上述齐次线性方程组:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以, 取 $\xi = (-a, -a, -a, a)$ ($a \neq 0$) 即可满足题意.

PROBLEM

18. 考察数域 K 上的线性空间 $K[x]_n$. 给定 K 上 n 个两两不等的数 a_1, a_2, \dots, a_n . 令

$$f_i(x) = (x - a_1) \cdots (\widehat{x - a_i}) \cdots (x - a_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(记号 “ $\widehat{}$ ” 表示去掉该项). 证明: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 为 $K[x]_n$ 的一组基.

Solution

方法一

设 $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0$. 假设存在不全为 0 的 k_1, k_2, \dots, k_n 使得左式成立.

记 $k_i \neq 0$, 则

$$0 = k_1 f(a_i) + k_2 f(a_i) + \cdots + k_i f(a_i) = k_i f_i(a_i) \neq 0,$$

矛盾! 所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, 即 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 线性无关.

又由于 $\dim K_n[x] = n$, 所以 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 是 $K_n[x]$ 的一组基.

方法二

对于 $\forall f(x) \in K[x]_n$, 考虑如下插值函数 (Lagrange 插值函数):

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(a_i) l_i(x) \quad \text{其中, } l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}.$$

引入记号: $\omega_n(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, 则拉格朗日插值多项式的余项为

$$R_{n-1}(x) = f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x) \equiv 0 \quad (\text{因为 } f^{(n)}(\xi) \equiv 0).$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) = L_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^n \left(f(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{f(a_i)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)} \prod_{j \neq i} (x - a_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n k_i f_i(x), \end{aligned}$$

其中 $k_i = \frac{f(a_i)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$, $f_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - a_j)$, 即 $\forall f \in K[x]_n$, f 可以由 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 线性表出.

另一方面, $\dim K[x]_n = n$, 由此知 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 是 $K[x]_n$ 的一组基.

PROBLEM

18. 证明线性空间定义的八条公理, 其中向量加法的交换律可以由其他七条公理推导出来.

Solution

公理 (iv) 保证右逆存在, 即对任一 $\alpha \in V$ 都存在 $\beta \in V$, 使 $\alpha + \beta = 0$.

$$\begin{aligned} (\beta + \alpha) + (\beta + \alpha) &= \beta + (\alpha + \beta) + \alpha && \text{(结合律)} \\ &= (\beta + 0) + \alpha \\ &= \beta + \alpha. && \text{(右零元)} \end{aligned}$$

由右消去律得 $\beta + \alpha = 0$. 这说明左逆存在且等于右逆. 公理 (iii) 保证右单位元存在, 即存在一个元素 $0 \in V$, 使得对一切 $\alpha \in V$, 有 $\alpha + 0 = \alpha$. 因为 $0 + \alpha = \alpha + (-\alpha) + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$, 所以左单位元存在, 且等于右单位元, 从而有左消去律成立.

一方面,

$$(1+1)(\alpha + \beta) = (1+1)\alpha + (1+1)\beta = \alpha + \alpha + \beta + \beta.$$

另一方面,

$$(1+1)(\alpha + \beta) = 1(\alpha + \beta) + 1(\alpha + \beta) = \alpha + \beta + \alpha + \beta.$$

再由消去律得 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. 这就证明了向量加法满足交换律.

4.2 习题二 子空间与商空间

PROBLEM

1. 设 $A \in M_n(K)$.

(1) 证明: 与 A 可交换的 n 阶方阵的全体组成 $M_n(K)$ 的一个子空间. 记此子空间为 $C(A)$.

(2) 给定对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix},$$

求 $C(A)$ 的维数和一组基.

Solution

(1) 由于 E 与 A 可交换, 因此 $C(A)$ 非空集. 设 $B_1, B_2 \in C(A)$, 则 $B_1A = AB_1, B_2A = AB_2$. 从而

$$(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A = AB_1 + AB_2 = A(B_1 + B_2)$$

$$(kB_1)A = k(B_1A) = k(AB_1) = A(kB_1), \quad \forall k \in K$$

所以与 A 可交换的 n 阶方阵的全体组成 $M_n(K)$ 的一个子空间.

(2) 令 $P = (x_{ij})_{n \times n} \in C(A)$, 则

$$(AP)_{ij} = ix_{ij} = x_{ij}j = (PA)_{ij} \implies (i-j)x_{ij} = 0.$$

所以

$$x_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad x_{ij} \in K \quad (i = j),$$

即与 A 可交换的矩阵为任意对角矩阵.

由于任意对角矩阵 $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 均可由 $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$ 线性表出, 即

$$D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1E_{11} + a_2E_{22} + \dots + a_nE_{nn},$$

其中 E_{ii} 为第 i 行第 i 列元素为 1, 其它元素为 0 的 n 阶矩阵.

且 $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$ 线性无关. 所以 $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$ 是 $C(A)$ 的一组基, $\dim C(A) = n$.

PROBLEM

2. 接上题. 取 $n = 3$, 令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

求 $C(A)$ 的维数和一组基.

Solution

设 $P = (x_{ij})_{3 \times 3}$, 则

$$\begin{aligned} PA &= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + 3x_{13} & x_{12} + x_{13} & 2x_{13} \\ x_{21} + 3x_{23} & x_{22} + x_{23} & 2x_{23} \\ x_{31} + 3x_{33} & x_{32} + x_{33} & 2x_{33} \end{bmatrix}, \\ AP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 3x_{11} + x_{21} + 2x_{31} & 3x_{12} + x_{22} + 2x_{32} & 3x_{13} + x_{23} + 2x_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由于 $PA = AP$, 则

$$x_{13} = 0, \quad x_{23} = 0, \quad x_{31} + 3x_{33} = 3x_{11} + x_{21} + 2x_{31}, \quad x_{32} + x_{33} = 3x_{12} + x_{22} + 2x_{32}.$$

整理可得

$$x_{31} = -3x_{11} + 9x_{12} - x_{21} + 3x_{22} + 3x_{32}, \quad x_{33} = 3x_{12} + x_{22} + x_{32}.$$

所以

$$P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ -3x_{11} + 9x_{12} - x_{21} + 3x_{22} + 3x_{32} & x_{32} & 3x_{12} + x_{22} + x_{32} \end{bmatrix}$$

$$= x_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} + x_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x_{32} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

又由于

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

线性无关, 所以 $\dim C(A) = 5$, $C(A)$ 的一组基为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

PROBLEM

3. 在习题一第 2 题 (5) 的线性空间中给定子集 $M = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$, $N = \{(0, b) | b \in \mathbb{R}\}$. 问 M, N 是否为子空间?

Solution

(1) $M = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$ 不是子空间.

因为取 $(a_1, 0), (a_2, 0) \in M$ 且满足 $a_1 a_2 \neq 0$, 则:

$$(a_1, 0) \oplus (a_2, 0) = (a_1 + a_2, a_1 a_2) \notin M$$

即对加法运算不封闭. 所以 M 不是子空间.

(2) $N = \{(0, b) | b \in \mathbb{R}\}$ 是子空间.

显然, N 非空集. 任取 $(0, b_1), (0, b_2) \in N$, 有:

$$(0, b_1) \oplus (0, b_2) = (0, b_1 + b_2) \in N$$

$$k \circ (0, b) = [0, kb], \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

即对加法、数乘运算封闭. 所以 N 是子空间.

PROBLEM

4. 在数域 K 上的 n 维向量空间 K^n 中考察坐标全为有理数的向量所成的子集

$$M = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n \mid a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

问 M 是否为 K^n 的子空间.

Solution

(1) 当 $K = \mathbb{Q}$ 时, M 是 K^n 的子空间. 显然 M 非空集.

任取 $(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}), (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}) \in K^n, a_i^{(j)} \in \mathbb{Q}$, 有:

$$(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}) + (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}) \in M$$

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n) \in M, \quad \forall k \in K = \mathbb{Q}$$

即对加法运算和数乘运算封闭. 所以 M 是 K^n 的子空间.

(2) 当 $\mathbb{Q} \subsetneq K$ 时, N 不是 K^n 的子空间. 取 $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}, k \in K \setminus \mathbb{Q}$, 则

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n) \notin M, \quad (\text{因为 } ka_i \notin \mathbb{Q})$$

即对数乘运算不封闭. 所以 M 不是 K^n 的子空间.

PROBLEM

5. 把复数域 \mathbb{C} 看做有理数域 \mathbb{Q} 上的线性空间(加法为复数加法, 与 \mathbb{Q} 中元素的数乘为有理数与复数的乘法), 问全体实数所成的子集 \mathbb{R} 是否是一个子空间?

Solution

显然, \mathbb{R} 不是空集. 任取 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, 则:

$$a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$$

$$ka \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Q}$$

所以, 全体实数所成的子集 \mathbb{R} 是该线性空间的一个子空间.

PROBLEM

6. 把复数域 \mathbb{C} 看做数域 $\mathbb{Q}(i)$ 上的线性空间(加法为复数加法,数乘为复数乘法). 问全体实数所成的子集 \mathbb{R} 是否是一个子空间?

Solution

全体实数所成的子集 \mathbb{R} 不是一个子空间. 任取 $a \in \mathbb{R}$, 有

$$(x + iy)a = ax + i(ay), \quad x + iy \in \mathbb{Q}(i)$$

当 $ay \neq 0$ 时, $(x + iy)a \notin \mathbb{R}$. 所以全体实数所成的子集 \mathbb{R} 不是一个子空间.

PROBLEM

10. 证明: 有限维向量空间 V 上的任一子空间 M 都可以看作是 V 内一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 生成的子空间.

Solution

由于子空间 M 也是线性空间, 而线性空间必有基.

记 $\dim M = s \leq \dim V$, 可以找到 M 中的一组向量:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in M \subset V$$

它们是线性空间 M 的一组基. 记 $M_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

任取 $\beta \in M$, 由基的定义可知, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出. $\Rightarrow \beta \in M_1$

$$\Rightarrow M \subset M_1$$

任取 $\gamma \in M_1$, 则 $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$

由于线性空间 M 对加法和数乘运算封闭, 则: $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \in M$

$$\Rightarrow M_1 \subset M$$

即:

$$M_1 = M$$

综上所述: 有限维向量空间 V 上的任一子空间 M 都可以看作是 V 内一个向量组.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 生成的子空间.

PROBLEM

14. 求下列向量 α_i 所生成的子空间与下列由 β_i 生成的子空间的交与和的维数和一组基:

$$(3) \alpha_1 = (1, 2, -1, -2), \alpha_2 = (3, 1, 1, 1), \alpha_3 = (-1, 0, 1, -1) \\ \beta_1 = (2, 5, -6, -5), \beta_2 = (-1, 2, -7, 3)$$

Solution

(i) 求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2)$ 的维数和一组基. 因为

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$$

只要求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 的一个极大线性无关组即可.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & \alpha_2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & \alpha_3 \\ 2 & 5 & -6 & -5 & \beta_1 \\ -1 & 2 & -7 & 3 & \beta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & -5 & 4 & 7 & \alpha_2 - 3\alpha_1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 4 & -8 & 1 & \beta_2 + \alpha_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 & -5 & 4 & 7 & \alpha_2 - 3\alpha_1 \\ 0 & 4 & -8 & 1 & \beta_2 + \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 5\alpha_1 + \alpha_3 - 2\beta_1 \\ 0 & 0 & -16 & 2 & -13\alpha_1 + \alpha_2 + 5\beta_1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 9\alpha_1 - 4\beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 5\alpha_1 + \alpha_3 - 2\beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4\alpha_1 - \alpha_3 - 2\beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - \beta_1 \end{bmatrix}$$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 的秩为4. 又因为

$$-3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - \beta_1 = 0 \implies \beta_1 = -3\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_2$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2)$ 的一组基, 其维数为4.

(ii) 求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cap L(\beta_1, \beta_2)$ 的维数和一组基. 因为

$$\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3, \quad \dim L(\beta_1, \beta_2) = 2$$

从而: $\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cap L(\beta_1, \beta_2) = 1$

从(i)中可知:

$$-3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - \beta_1 = 0 \implies -3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = \beta_1 \in L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cap L(\beta_1, \beta_2)$$

而 $\beta_1 = (2, 5, -6, -5) \neq (0, 0, 0, 0)$, 所以 β_1 是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cap L(\beta_1, \beta_2)$ 的一组基.

PROBLEM

16. 设 M 是线性空间 $M_n(K)$ 内全体对称矩阵所成的子空间, N 是由全体反对称矩阵所成的子空间. 证明:

$$M_n(K) = M \oplus N$$

Solution

任取 $A \in M_n(K)$, 有:

$$(A + A')' = A' + A, \quad (A - A')' = A' - A = -(A - A')$$

即: $A + A' \in M$, $A - A' \in N$. 又因为:

$$A = \frac{A + A'}{2} + \frac{A - A'}{2}$$

所以: $A \in M + N$. 从而 $M_n(K) \subset M + N$. 而 $M + N \subset M_n(K)$, 所以 $M_n(K) = M + N$.

再证明 $M_n(K) = M \oplus N$, 只需要证明 $M \cap N = 0$. 任取 $B \in M \cap N$, 则:

$$B' = B, \quad B' = -B \implies -B = B \implies B = 0$$

从而 $M \cap N = 0$. 综上: $M_n(K) = M \oplus N$.

PROBLEM

17. 在线性空间 $M_n(K)$ 中, 命 M, N 分别表示全体上三角、下三角矩阵所成的子空间. 问是否有 $M_n(K) = M \oplus N$? 为什么?

Solution

$M_n(K)$ 不是 M 与 N 的直和. 因为对于任意对角矩阵 $D = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 都有:

$$D \in M \cap N$$

当 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ 时, $0 \neq D \in M \cap N$. 所以 $M_n(K) \neq M \oplus N$.

PROBLEM

18. 设 M_1 是齐次方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

的解空间, 而 M_2 是齐次线性方程组

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

的解空间. 证明: $K^n = M_1 \oplus M_2$.

Solution

任取 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$, 下证明: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in M_1$, $\alpha_2 \in M_2$

考虑到 M_1, M_2 中向量坐标的特点, 设 $\alpha_1 = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\alpha_2 = (c, c, \dots, c)$. 则:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1 + c, b_2 + c, \dots, b_n + c) \text{ 且 } b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0$$

即:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nc = 0 \implies c = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

即对于 $\forall \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$, 可以找到

$$\alpha_1 = \left(a_1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, a_2 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \dots, a_n - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \right) \in M_1, \alpha_2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \right) \in M_2$$

使得 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

从而 $K^n \subset M_1 + M_2$. 显然, $M_1 + M_2 \subset K^n$, 所以 $K^n = M_1 + M_2$.

下证明: $M_1 \cap M_2 = 0$. 任取 $\beta = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in M_1 \cap M_2$, 有:

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = 0, \quad d_1 = d_2 = \dots = d_n$$

解得: $d_1 = d_2 = \dots = d_n$. 即: $M_1 \cap M_2 = 0$.

综上所述: $K^n = M_1 \oplus M_2$.

PROBLEM

21. 设 M, N 是数域 K 上线性空间 V 的两个子空间且 $M \subseteq N$. 设 M 的另一个补空间为 L , 即 $V = M \oplus L$, 证明: $N = M \oplus (N \cap L)$.

Solution

先证明: $N = M + (N \cap L) = N \cap M + N \cap L$. 由于 $V = M \oplus L$, 所以 $N \subset M + L$, 从而:

$$N = N \cap (M + L)$$

任取 $\alpha \in N$, 由于 $N \subset M + L$, 所以 $\alpha \in M + L$. 从而:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in M, \quad \alpha_2 \in L$$

由于 $\alpha_1 \in M \subset N$, 所以 $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 \in N$. 即: $\alpha_2 \in N \cap L$

所以 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in (N \cap M) + (N \cap L)$. 进而: $N \subset (N \cap M) + (N \cap L)$

任取 $\beta_1 \in (N \cap M) \subset N$, $\beta_2 \in (N \cap L) \subset N$, 由线性空间对加法封闭可知 $\beta_1 + \beta_2 \in N$

所以 $(N \cap M) + (N \cap L) \subset N$.

综上所述, $N = (N \cap M) + (N \cap L) = M + (N \cap L)$

另一方面,

$$M \cap (N \cap L) = N \cap (M \cap L) = N \cap 0 = 0 \quad (\text{因为 } M + L \text{ 是直和})$$

$$\text{所以 } N = M \oplus (N \cap L)$$

PROBLEM

23. 设 M_1, M_2, \dots, M_k 为数域 K 上线性空间 V 的子空间. 证明和 $\sum_{i=1}^k M_i$ 为直和的充分必要条件是

$$M_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} M_j \right) = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, k)$$

Solution

必要性:

设 $\sum_{i=1}^k M_i$ 是直和, 则:

$$M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = 0 \quad i = \{1, 2, \dots, k\}$$

注意到:

$$M_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} M_j \right) \subset M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j \right) = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, k)$$

从而: $M_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} M_j \right) = 0, \quad i = (2, 3, \dots, k).$

充分性:

设 $\alpha_i \in M_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$, 使得:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 0 \in \sum_{i=1}^k M_i$$

从而, $\alpha_k = -\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{k-1} \in M_k \cap \left(\sum_{i=1}^{k-1} M_i \right).$

又因为 $M_k \cap \left(\sum_{i=1}^{k-1} M_i \right) = 0$, 所以, $\alpha_k = 0$. 从而, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} = 0$.

继续做上述步骤, 可以得到: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$. 即: $\sum_{i=1}^k M_i$ 中 0 向量表示方法唯一.

所以, $\sum_{i=1}^k M_i$ 是直和.

PROBLEM

26

令 M 为 $M_n(K)$ 内全体反对称矩阵所成的子空间. 试求 $M_n(K)/M$ 的维数和一组基.

Solution

由于 $\dim M_n(K) = n^2$, $\dim M = \frac{n(n-1)}{2}$, 所以:

$$\dim(M_n(K)/M) = \dim M_n(K) - \dim M = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

取 M 的一组基 $E_{ij} - E_{ji}$ ($1 \leq i < j \leq n$), 将它扩充为 $M_n(K)$ 中的向量组:

$$E_{ij} - E_{ji}, E_{ji}, E_{kk} \quad (1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n) \quad (*)$$

下证明该向量组是 $M_n(K)$ 的一组基. 设:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} [k_{ij}(E_{ij} - E_{ji}) + k_{ji}E_{ji}] + \sum_{s=1}^n k_s E_{ss} = 0$$

可得到如下矩阵:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} - k_{12} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} - k_{13} & k_{32} - k_{23} & k_{33} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} - k_{1n} & k_{n2} - k_{2n} & k_{n3} - k_{3n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

从而 $k_{ij} = 0$, ($1 \leq i, j \leq n$). 从而向量组 (*) 线性无关.

而 $\dim M_n(K) = n^2$, 所以 (*) 是 $M_n(K)$ 的一组基.

对于 $M_n(K)/M$ 中任意向量 $A + M$, 有:

$$A + M = \sum_{1 \leq i < j \leq n} [c_{ij}(E_{ij} - E_{ji}) + c_{ji}E_{ji}] + \sum_{s=1}^n c_{ss}E_{ss} + M = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ji}E_{ji} + M = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ji}(E_{ji} + M)$$

而 $\dim(M_n(K)/M) = \frac{n(n+1)}{2}$, 所以 $E_{ji} + M$ ($1 \leq i \leq j \leq n$) 是 $M_n(K)/M$ 的一组基.

PROBLEM

27. 设 M 为线性空间 V 的一个子空间. 在 M 内取定一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$, 用两种方式扩充为 V 的基

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \eta_{r+1}, \dots, \eta_n$$

这两组基之间的过渡矩阵为 T , 即

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \eta_{r+1}, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)T$$

其中,

$$T = \begin{bmatrix} E_r & * \\ 0 & T_0 \end{bmatrix}$$

证明: V/M 内两组基

$$\bar{\varepsilon}_{r+1} = \varepsilon_{r+1} + M, \bar{\varepsilon}_{r+2} = \varepsilon_{r+2} + M, \dots, \bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_n + M,$$

$$\bar{\eta}_{r+1} = \eta_{r+1} + M, \bar{\eta}_{r+2} = \eta_{r+2} + M, \dots, \bar{\eta}_n = \eta_n + M,$$

之间的过渡矩阵为:

$$(\bar{\eta}_{r+1}, \dots, \bar{\eta}_n) = (\bar{\varepsilon}_{r+1}, \dots, \bar{\varepsilon}_n)T_0$$

Solution

由题目条件可知:

$$\eta_i = t_{1,i}\varepsilon_1 + t_{2,i}\varepsilon_2 + \dots + t_{n,i}\varepsilon_n \quad (i = r+1, r+2, \dots, n)$$

其中, $t_{i,j}$ 表示矩阵 T 的第 i 行第 j 列元素. 从而:

$$\bar{\eta}_i = \eta_i + M = t_{1,i}\varepsilon_1 + t_{2,i}\varepsilon_2 + \dots + t_{n,i}\varepsilon_n + M = \sum_{j=r+1}^n t_{j,i}\varepsilon_j + M = \sum_{j=r+1}^n t_{j,i}(\varepsilon_j + M) = \sum_{j=r+1}^n t_{j,i}\bar{\varepsilon}_j.$$

即 T_0 是一个 $(n-r) \times (n-r)$ 矩阵, 它为基 $\bar{\varepsilon}_{r+1}, \dots, \bar{\varepsilon}_n$ 到基 $\bar{\eta}_{r+1}, \dots, \bar{\eta}_n$ 的

过渡矩阵, 即:

$$(\bar{\eta}_{r+1}, \dots, \bar{\eta}_n) = (\bar{\varepsilon}_{r+1}, \dots, \bar{\varepsilon}_n)T_0$$

PROBLEM

4.3.1

设 m, n 为正整数且 $m < n$. 定义 K^n 到 K^m 的映射 f 如下: 若 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 则令

$$f(\alpha) = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in K^m.$$

又定义 K^m 到 K^n 的映射 g 如下: 若 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, 则令

$$g(\alpha) = (a_1, a_2, \dots, a_m, 0, \dots, 0) \in K^n$$

证明 f, g 均为线性映射, 并求 $\text{Ker} f, \text{Im} f, \text{Coker} f, \text{Ker} g, \text{Im} g, \text{Coker} g$.

Solution

(1) 对于 $\forall \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n, k_1, k_2 \in K$, 有:

$$\begin{aligned} f(k_1\alpha + k_2\beta) &= (k_1a_1 + k_2b_1, k_1a_2 + k_2b_2, \dots, k_1a_m + k_2b_m) \\ &= k_1(a_1, a_2, \dots, a_m) + k_2(b_1, b_2, \dots, b_m) \\ &= k_1f(\alpha) + k_2f(\beta) \end{aligned}$$

所以 f 为线性映射. 下求 $\text{Ker} f, \text{Im} f, \text{Coker} f$.

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$$

所以 $\text{Ker} f = \{(0, 0, \dots, 0, a_{m+1}, \dots, a_n) | a_{m+i} \in K\}$;

并且 $\text{Im} f = K^m, \text{Coker} f = V/\text{Im} f = \{0 + K^m\}$.

(2) 对于映射 g 的证明求解与(1)类似, 便不赘述.

$$\text{Ker} g = \{0\}, \quad \text{Im} g = \{(a_1, \dots, a_m, 0, \dots, 0) | a_i \in K\}, \quad \text{Coker} g = L\{\varepsilon_{m+1} + \text{Im} g, \dots, \varepsilon_n + \text{Im} g\}$$

其中, ε_i 是 K^n 中的坐标向量.

PROBLEM

5. 将数域 $\mathbb{Q}(i)$ 与 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 都看作 \mathbb{Q} 上的线性空间(加法为复数加法, 数乘为有理数与复数的乘法), 找出它们之间的一个同构映射.

Solution

注意到 $\mathbb{Q}(i) = a + bi$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$, 其中, $a, b \in \mathbb{Q}$. 建立如下映射

$$\begin{aligned}\tau: \quad \mathbb{Q}(i) &\longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ a + bi &\longmapsto a + b\sqrt{2}\end{aligned}$$

下证 τ 为 $\mathbb{Q}(i)$ 到 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的同构映射. 任取 $a + bi, c + di \in \mathbb{Q}(i)$, 有

$$\begin{aligned}\tau((a + bi) + (c + di)) &= \tau((a + c) + (b + d)i) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \\ &= (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) \\ &= \tau(a + bi) + \tau(c + di)\end{aligned}$$

任取 $a + bi \in \mathbb{Q}(i), k \in \mathbb{Q}$, 有

$$\tau(k(a + bi)) = \tau(ka + kbi) = ka + kb\sqrt{2} = k(a + b\sqrt{2}) = k\tau(a + bi)$$

所以 τ 是线性映射. τ 显然是一个双射, 所以 τ 是 $\mathbb{Q}(i)$ 到 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的同构映射.

PROBLEM

4.3.6

定义 K^4 到 K^3 的映射

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -2x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

证明 f 是一个线性映射, 求 $\text{Ker } f, \text{Im } f, \text{Coker } f$. 在 K^4 内取一组基

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 1, 1)', \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 1)', \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)', \quad \varepsilon_4 = (0, 0, 2, 1)'$$

又在 K^3 内取定一组基

$$\eta_1 = (1, 1, 1)', \quad \eta_2 = (1, 0, -1)', \quad \eta_3 = (0, 1, 0)'$$

求 f 在给定基下的矩阵.

Solution

对于 $\forall X = (x_1, x_2, x_3, x_4)' \in K^4$

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -2x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = AX$$

所以对于 $\forall X, Y \in K^4, \forall k_1, k_2 \in K$, 有:

$$f(k_1X + k_2Y) = A(k_1X + k_2Y) = k_1AX + k_2AY = k_1f(X) + k_2f(Y)$$

所以, f 是 K^4 到 K^3 的线性映射. 根据线性映射的核与象的定义, $\text{Ker } f$ 与 $\text{Im } f$ 实际上分别为为四元齐次方程组 $AX = 0$ 的解空间与矩阵 A 的列空间, 于是:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是 $AX = 0$ 的一个基础解系为:

$$\alpha_1 = (5, 1, 2, 0)', \quad \alpha_2 = (1, 0, 0, 1)'$$

从而 $\text{Ker } f = L(\alpha_1, \alpha_2)$. 同时, 从 A 的约化阶梯型矩阵可以看出, A 的列向量的一个极大线性无关组是:

$$\beta_1 = (1, 0, -1)', \quad \beta_2 = (1, -2, -1)'$$

所以, $\text{Im } f = L(\beta_1, \beta_2)$. 考虑 $(\beta_1, \beta_2)'$

$$(\beta_1, \beta_2)' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{EILB}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

所以, 可以添加 $\beta_3 = (0, 0, 1)'$ 进入 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 中, 使得 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 成为 K^3 的一组基.

从而, $\text{Coker } f = L(\beta_3 + \text{Im } f)$

又由于:

$$f\varepsilon_1 = (2, 1, 3)', \quad f\varepsilon_2 = (2, -2, 0)', \quad f\varepsilon_3 = (2, 1, 3)', \quad f\varepsilon_4 = (5, 2, 7)'$$

并且,

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)T$$

从而 f 在 K^4 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 和 K^3 的基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵 T 为:

$$T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^{-1} f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 6 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{3}{2} & -4 \end{bmatrix}$$

PROBLEM

4.3.7

定义 K^3 到 K^4 的映射 f 如下:

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

(1) 证明 f 是一个线性映射, 求 $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$, $\text{Coker } f$.

(2) 在 K^3 内取定一组基

$$\eta_1 = (1, 1, 1), \quad \eta_2 = (1, 0, -1), \quad \eta_3 = (0, 1, 1)$$

在 K^4 内取一组基

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 1), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \varepsilon_4 = (0, 0, 2, 1)$$

求 f 在给定基下的矩阵.

Solution

(1) 对于 $\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in K^3$, 有:

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = AX$$

对于 $\forall X, Y \in K^3, k_1, k_2 \in K$, 有:

$$f(k_1X + k_2Y) = A(k_1X + k_2Y) = k_1AX + k_2AY = k_1f(X) + k_2f(Y)$$

所以, f 是 K^3 到 K^4 的一个线性映射. 根据线性映射的核与象的定义, $\text{Ker} f$ 与 $\text{Im} f$ 实际上分别为三元齐次方程组 $AX = 0$ 的解空间与矩阵 A 的列空间, 于是:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是, $\text{Ker} f = \{0\}$, 从 A 的约化阶梯型矩阵可以看出, A 的列向量的一个极大线性无关组为:

$$\alpha_1 = (1, -1, 2, 0), \quad \alpha_2 = (0, 1, 0, 1), \quad \alpha_3 = (1, 1, 1, 2)$$

所以, $\text{Im} f = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 考虑 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)'$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{EILB}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以可以添加 $\alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$ 进入 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, 使得 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 成为 K^4 的一组基.

从而, $\text{Coker} f = L(\alpha_4 + \text{Im} f)$.

(2)注意到:

$$f\eta_1 = (2, 1, 3, 3)', \quad f\eta_2 = (0, -2, 1, -2)', \quad f\eta_3 = (0, 1, 0, 1)$$

并且

$$f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)T$$

从而, f 在 K^3 的基 η_1, η_2, η_3 和 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵 T 为:

$$T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^{-1} f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEM

4.3.9 判断下面定义的变换哪些是线性的, 哪些则不是:

- (1) 在线性空间 V 中, $\mathcal{A}\xi = \xi + \alpha$, 其中 $\alpha \in V$ 是一个固定的向量;
- (2) 在线性空间 V 中, 令 $\mathcal{A}\xi = \alpha$, 其中 $\alpha \in V$ 是一个固定的向量;
- (3) 在 K^3 中, 令 $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2 + x_3, x_3^2)$;
- (4) 在 K^3 中, 令 $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)$;
- (5) 在 $K[x]$ 中, 令 $\mathcal{A}f(x) = f(x+1)$;
- (6) 在 $K[x]$ 中, 令 $\mathcal{A}f(x) = f(x_0)$, 其中 $x_0 \in K$ 是一个固定的数;
- (7) 把复数域看做复数域上的线性空间, 令 $\mathcal{A}\xi = \bar{\xi}$;
- (8) 在 $M_n(K)$ 中, 令 $\mathcal{A}(X) = BXC$, 其中 B, C 是 K 上两个固定的 n 阶方阵.

Solution

(1) 当 $\alpha \neq 0$ 时, 不是线性的, 因为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) &= k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \alpha \\ k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2 &= k_1(\xi_1 + \alpha) + k_2(\xi_2 + \alpha) \\ \implies \mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) &\neq k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2\end{aligned}$$

当 $\alpha = 0$ 时, 是线性的, 因为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) &= k_1\xi_1 + k_2\xi_2 \\ k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2 &= k_1\xi_1 + k_2\xi_2 \\ \implies \mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) &= k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2\end{aligned}$$

(2) 当 $\alpha \neq 0$ 时, 不是线性的, 因为

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = \alpha$$

$$k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2 = k_1\alpha + k_2\alpha$$

$$\implies \mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) \neq k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2$$

当 $\alpha = 0$ 时, 是线性的, 因为

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = 0$$

$$k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2 = 0$$

$$\implies \mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2$$

(3) 不是线性的, 取 $\alpha_1 = (1, 0, 1)'$, $\alpha_2 = (2, 0, 3)'$, 则 $\alpha_1 + \alpha_2 = (3, 0, 4)'$

$$\mathcal{A}\alpha_1 = (1, 1, 1), \quad \mathcal{A}\alpha_2 = (4, 2, 9), \quad \mathcal{A}(\alpha_1 + \alpha_2) = (9, 3, 16)$$

$$\implies \mathcal{A}(\alpha_1 + \alpha_2) \neq \mathcal{A}\alpha_1 + \mathcal{A}\alpha_2$$

(4) 是线性的, 因为:

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

对于 $\forall \xi_1, \xi_2 \in K^3, \forall k_1, k_2 \in K$, 有

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = k_1A\xi_1 + k_2A\xi_2 = k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2$$

所以映射 \mathcal{A} 是线性的.

(5) 是线性的, 因为对于 $\forall f, g \in K[x], \forall k \in K$, 有:

$$\mathcal{A}(f(x) + g(x)) = (f + g)(x + 1) = f(x + 1) + g(x + 1) = \mathcal{A}f(x) + \mathcal{A}g(x)$$

$$\mathcal{A}(kf(x)) = (kf)(x + 1) = kf(x + 1) = k\mathcal{A}f(x)$$

所以, 映射 \mathcal{A} 是线性的.

(6) 是线性的, 因为对于 $\forall f, g \in K[x], \forall k \in K$, 有:

$$\mathcal{A}(f(x) + g(x)) = (f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = \mathcal{A}f(x) + \mathcal{A}g(x)$$

$$\mathcal{A}(kf(x)) = (kf)(x_0) = kf(x_0) = k\mathcal{A}f(x)$$

所以, 映射 \mathcal{A} 是线性的.

(7) 不是线性的, 因为:

$$\mathcal{A}(k\xi) = \overline{k\xi} = \overline{k}\xi$$

当 $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 时, $\mathcal{A}(k\xi) \neq k\mathcal{A}\xi$.

(8) 是线性的, 因为 $\forall X_1, X_2 \in M_n(K), \forall k_1, k_2 \in K$, 有

$$\mathcal{A}(k_1X_1 + k_2X_2) = B(k_1X_1 + k_2X_2)C = k_1BX_1C + k_2BX_2C = k_1\mathcal{A}(X_1) + k_2\mathcal{A}(X_2)$$

PROBLEM

4.3.10

在实数域上线性空间 $D_0(a, b)$ ($D_0(a, b)$ 是区间 (a, b) 内全体任意次可微的实函数 $f(x)$ 所成的集合) 中定义变换如下

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} + x \cdot \frac{df(x)}{dx} + \sin x \cdot f(x)$$

证明 \mathcal{A} 是一个线性变换. 定义

$$\mathcal{B}f(x) = \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2} \right]^2 + x \cdot \frac{df(x)}{dx} + \sin x \cdot f(x)$$

举例说明 \mathcal{B} 不是线性变换.

Solution

(1) 对于 $\forall f, g \in D_0(a, b), \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, 有:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(k_1 f(x) + k_2 g(x)) \\ &= \frac{d^2(k_1 f(x) + k_2 g(x))}{dx^2} + x \cdot \frac{dk_1(f(x) + k_2 g(x))}{dx} + \sin x \cdot (k_1 f(x) + k_2 g(x)) \\ &= k_1 \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x \cdot \frac{df(x)}{dx} + \sin x \cdot f(x) \right) + k_2 \left(\frac{d^2 g(x)}{dx^2} + x \cdot \frac{dg(x)}{dx} + \sin x \cdot g(x) \right) \\ &= k_1 \mathcal{A}f(x) + k_2 \mathcal{A}g(x) \end{aligned}$$

所以, \mathcal{A} 是一个线性变换.

(2) 取 $f(x) = x^3, g(x) = x^2$, 则:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}f(x) &= \left[\frac{d^2 x^3}{dx^2} \right]^2 + x \cdot \frac{dx^3}{dx} + \sin x \cdot x^3 = 3x^3 + 36x^2 + x^3 \sin x \\ \mathcal{B}g(x) &= \left[\frac{d^2 x^2}{dx^2} \right]^2 + x \cdot \frac{dx^2}{dx} + \sin x \cdot x^2 = 2x^2 + x^2 \sin x + 4 \\ \mathcal{B}(f(x) + g(x)) &= \left[\frac{d^2(x^3 + x^2)}{dx^2} \right]^2 + x \cdot \frac{d(x^3 + x^2)}{dx} + \sin x \cdot (x^3 + x^2) = 3x^3 + 38x^2 + 24x + 4 + (x^3 + x^2) \sin x \\ &\implies \mathcal{B}(f(x) + g(x)) \neq \mathcal{B}f(x) + \mathcal{B}g(x) \end{aligned}$$

所以, \mathcal{B} 不是线性变换.

PROBLEM

4.3.11

在实数域上线性空间 $C[a, b]$ 中定义变换如下

$$\mathcal{A}f(x) = \int_a^x K(t)f(t)dt$$

其中, $K(x)$ 是 $[a, b]$ 上的一个连续函数. 证明 \mathcal{A} 是一个线性变换.

Solution

对于 $\forall f(x), g(x) \in C[a, b], \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, 有:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k_1 f(x) + k_2 g(x)) &= \int_a^x K(t)(k_1 f(t) + k_2 g(t))dt \\ &= k_1 \int_a^x K(t)f(t)dt + k_2 \int_a^x K(t)g(t)dt = k_1 \mathcal{A}f(x) + k_2 \mathcal{A}g(x) \end{aligned}$$

又由于被积函数 $K(t)f(t)$ 连续, 所以变上限函数 $\mathcal{A}f(x) = \int_a^x K(t)f(t)dt$ 也连续,

即: $\mathcal{A}f(x) \in C[a, b]$. 从而 \mathcal{A} 是 $C[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 上的一个映射.

综上, \mathcal{A} 是 $C[a, b]$ 上一个线性变换.

PROBLEM

4.3.13

在 $K[x]$ 中定义

$$\mathcal{A}f(x) = f'(x) \quad \mathcal{B}f(x) = xf(x)$$

证明 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 是两个线性变换, 且 $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \mathcal{E}$.

Solution

对于 $\forall f(x), g(x) \in K[x], \forall k_1, k_2 \in K$, 有

$$\mathcal{A}(k_1f(x) + k_2g(x)) = (k_1f(x) + k_2g(x))' = k_1f'(x) + k_2g'(x) = k_1\mathcal{A}f(x) + k_2\mathcal{A}g(x)$$

$$\mathcal{B}(k_1f(x) + k_2g(x)) = x(k_1f(x) + k_2g(x)) = k_1xf(x) + k_2xg(x) = k_1\mathcal{B}f(x) + k_2\mathcal{B}g(x)$$

而 \mathcal{A}, \mathcal{B} 都是 $K[x]$ 到 $K[x]$ 的映射. 所以 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 是两个线性变换.

任取 $h(x) \in K[x]$, 有:

$$\begin{aligned} (\mathcal{AB} - \mathcal{BA})(h(x)) &= \mathcal{AB}(h(x)) - \mathcal{BA}(h(x)) \\ &= \mathcal{A}(xh(x)) - \mathcal{B}(h'(x)) \\ &= h(x) + xh'(x) - xh'(x) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

所以, $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \mathcal{E}$.

PROBLEM

4.3.20

求下列线性变换在指定基下的坐标:

(5) 已知 K^3 中线性变换 \mathcal{A} 在基

$$\eta_1 = (-1, 1, 1), \quad \eta_2 = (1, 0, -1), \quad \eta_3 = (0, 1, 1)$$

下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

求 \mathcal{A} 在基

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$$

PROBLEM

下的矩阵.

Solution

设基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 下的过渡矩阵为 T , 则

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)T$$

于是, \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵 B 为:

$$B = T^{-1}AT$$

而

$$T = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以,

$$B = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(6) 在 K^3 中定义线性变换 \mathcal{A} 如下:

$$\mathcal{A}\eta_1 = (-5, 0, 3), \quad \eta_1 = (-1, 0, 2)$$

$$\mathcal{A}\eta_2 = (0, -1, 6), \quad \eta_2 = (0, 1, 1)$$

$$\mathcal{A}\eta_3 = (-5, -1, 9), \quad \eta_3 = (3, -1, 0)$$

PROBLEM

求 \mathcal{A} 在基

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$$

下的矩阵.

Solution

首先, 用基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 线性表出 η_1, η_2, η_3 :

$$\eta_1 = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3, \quad \eta_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \eta_3 = 3\varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

从而

$$\mathcal{A}\eta_1 = \mathcal{A}(-\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3) = -\mathcal{A}\varepsilon_1 + 2\mathcal{A}\varepsilon_3 = (-5, 0, 3)$$

$$\mathcal{A}\eta_2 = \mathcal{A}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \mathcal{A}\varepsilon_2 + \mathcal{A}\varepsilon_3 = (0, -1, 6)$$

$$\mathcal{A}\eta_3 = \mathcal{A}(3\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 3\mathcal{A}\varepsilon_1 - \mathcal{A}\varepsilon_2 = (-5, -1, 9)$$

解得:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1 = \frac{1}{7}(-\mathcal{A}\eta_1 + 2\mathcal{A}\eta_2 + 2\mathcal{A}\eta_3) = \frac{1}{7}(-5, -4, 27)$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_2 = \frac{1}{7}(-3\mathcal{A}\eta_1 + 6\mathcal{A}\eta_2 - \mathcal{A}\eta_3) = \frac{1}{7}(20, -5, 18)$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_3 = \frac{1}{7}(3\mathcal{A}\eta_1 + \mathcal{A}\eta_2 + \mathcal{A}\eta_3) = \frac{1}{7}(-20, -2, 24)$$

所以, \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为:

$$A = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^{-1}(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \mathcal{A}\varepsilon_3) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix}$$

PROBLEM

21 在 $M_2(K)$ 中定义变换如下:

$$\mathcal{A}X = AX - XA, \quad X \in M_2(K)$$

其中 A 是 K 上一个固定的二阶方阵, 证明:

(1) \mathcal{A} 是 $M_2(K)$ 上的一个线性变换;

(2) 在 $M_2(K)$ 中取一组基

$$\varepsilon_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 \mathcal{A} 在这组基下的矩阵.

Solution

(1) 首先, $\forall X \in M_2(K)$, 有

$$\mathcal{A}X = AX - XA \in M_2(K)$$

所以, \mathcal{A} 是 $M_2(K)$ 到 $M_2(K)$ 的一个映射. 对于 $\forall X, Y \in M_2(K)$, $k_1, k_2 \in K$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k_1X + k_2Y) &= A(k_1X + k_2Y) - (k_1X + k_2Y)A \\ &= k_1AX + k_2AY - k_1XA - k_2YA \\ &= k_1(AX - XA) + k_2(AY - YA) \\ &= k_1\mathcal{A}X + k_2\mathcal{A}Y \end{aligned}$$

所以, \mathcal{A} 是 $M_2(K)$ 上的线性变换.

(2) 不妨设:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

则有:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = -a_{12}\varepsilon_2 + a_{21}\varepsilon_3$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} -a_{21} & a_{11} - a_{22} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix} = -a_{21}\varepsilon_1 + (a_{11} - a_{22})\varepsilon_2 + a_{21}\varepsilon_4$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_3 = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} - a_{11} & -a_{12} \end{bmatrix} = a_{12}\varepsilon_1 + (a_{22} - a_{11})\varepsilon_3 - a_{12}\varepsilon_4$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_4 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{bmatrix} = a_{12}\varepsilon_2 - a_{21}\varepsilon_3$$

所以, \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0 \\ -a_{21} & a_{11} - a_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} - a_{11} & -a_{21} \\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEM

4.3.26

设四维线性空间 V 内的一个线性变换 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

求 \mathcal{A} 在 $\eta_1 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4, \eta_2 = 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \eta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \eta_4 = 2\varepsilon_4$ 下的矩阵.

Solution

首先, 对于基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 与基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, 有如下关系:

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)T$$

注意到 T 实际上为可逆矩阵 (因为 $\det(T) \neq 0$), 所以 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 实际上也为线性空间的基. 从而 \mathcal{A} 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的矩阵 B 为

$$B = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{40}{3} & \frac{40}{3} \\ 0 & 1 & -7 & -8 \end{bmatrix}$$

PROBLEM

4.3.28

在 K^3 中给定两组基

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1, 0, 1), & \eta_1 &= (1, 2, -1) \\ \varepsilon_2 &= (2, 1, 0), & \eta_2 &= (2, 2, -1) \\ \varepsilon_3 &= (1, 1, 1), & \eta_3 &= (2, -1, -1) \end{aligned}$$

定义线性变换

$$\mathcal{A}\varepsilon_i = \eta_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

- (1) 求 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵;
- (2) 求 \mathcal{A} 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵.

Solution

首先, 求出基 η_1, η_2, η_3 到基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的过渡矩阵 T :

$$T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^{-1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

(1) $\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)T$ 所以, \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵即为 T :

$$T = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

(2)由题意

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) &= \mathcal{A}[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)T] \\ &= [\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)]T \\ &= (\eta_1, \eta_2, \eta_3)T\end{aligned}$$

所以, \mathcal{A} 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵即为 T :

$$T = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

PROBLEM

4.3.32

设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, 证明:

- (1) V 内全体线性变换所成的 K 上的线性空间 $End(V)$ 的维数等于 n^2 ;
- (2) 对 V 内任一线性变换 \mathcal{A} , 存在一个次数 $\leq n^2$ 的多项式 $f(\lambda)$ (系数在 K 内), 使 $f(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$.

Solution

(1) 由于 $Hom(U, V)$ 与 $M_{m,n}$ 同构, 所以 $End(V) = Hom(V, V)$ 与 $M_n(K)$ 同构. 所以,

$$\dim(End(V)) = \dim(Hom(V, V)) = \dim(M_n(K)) = n^2$$

(2) 由于 $\dim(End(V)) = n^2$, 所以对于 $\forall \mathcal{A} \in End(V)$, $End(V)$ 中的 $n^2 + 1$ 个向量:

$$E, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^{n^2}$$

必定线性相关. 所以存在不全为 0 的 $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{n^2} \in K$, 使得:

$$k_0 E + k_1 \mathcal{A} + k_2 \mathcal{A}^2 + \dots + k_{n^2} \mathcal{A}^{n^2} = 0$$

所以, 存在次数不超过 n^2 的多项式 $f(\lambda) = k_0 + k_1\lambda + k_2\lambda^2 + \cdots + k_{n^2}\lambda^{n^2}$, 使得 $f(\mathcal{A}) = 0$.

PROBLEM

4.3.35 设 \mathcal{A} 是数域 K 上 n 维线性空间 V 内的线性变换. 证明下面的命题互相等价:

- (1) \mathcal{A} 是可逆变换;
- (2) 对 V 内任意非零向量 α , $\mathcal{A}\alpha \neq 0$;
- (3) 若 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 则 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是 V 的一组基;
- (4) 如果 V 分解为子空间 M, N 的直和: $V = M \oplus N$, 那么有 $V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$.

Solution

(1) \implies (2)

由于 \mathcal{A} 是可逆变换, 所以 \mathcal{A} 是单射. 任取 $\alpha \in V$, 则:

$$\mathcal{A}(\alpha) = 0 = \mathcal{A}(0)$$

从而 $\alpha = 0$, 得证.

(2) \implies (1)

假设 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, 且 $\mathcal{A}\alpha_1 = \mathcal{A}\alpha_2$, 则:

$$0 = \mathcal{A}\alpha_1 - \mathcal{A}\alpha_2 = \mathcal{A}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

由于 V 内任意非零向量 α , $\mathcal{A}\alpha \neq 0$, 所以 $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, 即 $\alpha_1 = \alpha_2$. 即 \mathcal{A} 是单射.

另一方面, V 内任意非零向量 α , $\mathcal{A}\alpha \neq 0$ 意味着 $\text{Ker}\mathcal{A} = 0$. 于是:

$$\dim(\text{Im}\mathcal{A}) = \dim V - \dim(\text{Ker}\mathcal{A}) = n$$

而 $\text{Im}\mathcal{A} \subset V$, 所以 $\text{Im}\mathcal{A} = V$. 即: \mathcal{A} 是满射.

所以 \mathcal{A} 是双射, 从而 \mathcal{A} 是可逆映射.

(1) \implies (3)

由于 \mathcal{A} 是可逆映射, 所以 \mathcal{A} 是双射. 若 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 由命题3.2可知:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$$

也是 V 的一组基.

(3) \implies (1)

设 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$, $\beta = \sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i$. 下证明: \mathcal{A} 是双射.

若 $\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}\beta$, 则有 $\mathcal{A}(\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i) = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i)$, 即 $\sum_{i=1}^n a_i \mathcal{A}\varepsilon_i = \sum_{i=1}^n b_i \mathcal{A}\varepsilon_i$. 由于 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 所以 $a_i = b_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

从而有 $\alpha = \beta$. 即 \mathcal{A} 是单射. 任取 $\gamma \in V$, 由于 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 则:

$$\gamma = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{A}\varepsilon_i = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n c_i \varepsilon_i)$$

所以 \mathcal{A} 是满射. 所以 \mathcal{A} 是双射. 从而 \mathcal{A} 可逆.

(1) \implies (4)

由于 \mathcal{A} 是 V 上可逆的线性变换, M, N 是 V 的子空间, 所以 \mathcal{A}^{-1} 也是 V 上的可逆线性变换, 且 $\mathcal{A}(M), \mathcal{A}(N)$ 也是 V 的子空间.

任取 $\alpha \in V$, 由于 $V = M \oplus N$, 所以有:

$$\mathcal{A}^{-1}\alpha = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_1 \in M, \quad \beta_2 \in N$$

从而 $\forall \alpha \in V, \alpha = \mathcal{A}(\beta_1 + \beta_2) = \mathcal{A}\beta_1 + \mathcal{A}\beta_2$, 其中 $\mathcal{A}\beta_1 \in \mathcal{A}(M), \mathcal{A}\beta_2 \in \mathcal{A}(N)$. 由子空间的和的定义可知, $V = \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}(N)$.

下证明该和为直和, 只需要证明两个子空间的交集为 0.

任取 $\gamma \in \mathcal{A}(M) \cap \mathcal{A}(N)$, 则存在 $\eta_1 \in M, \eta_2 \in N$, 使得:

$$\gamma = \mathcal{A}\eta_1 = \mathcal{A}\eta_2 \implies \eta_1 = \mathcal{A}^{-1}(\gamma), \eta_2 = \mathcal{A}^{-1}(\gamma)$$

由于 \mathcal{A}^{-1} 也是双射, 所以 $\eta_1 = \eta_2$. 而 $M \cap N = 0$, 所以 $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

从而 $\beta = \mathcal{A}\eta_1 = \mathcal{A}\eta_2 = 0$. 由于 β 是从 $\mathcal{A}(M) \cap \mathcal{A}(N)$ 中任取的向量, 所以 $\mathcal{A}(M) \cap \mathcal{A}(N) = 0$.

综上, $V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$.

(4) \implies (1)

设 $V = M \oplus N$ 且 $V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$.

任取 $\mathcal{A}\alpha \in \mathcal{A}(V)$, 由于 $V = M \oplus N$, 所以 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N$.

所以, $\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}\alpha_1 + \mathcal{A}\alpha_2$, 其中, $\mathcal{A}\alpha_1 \in \mathcal{A}(M), \mathcal{A}\alpha_2 \in \mathcal{A}(N)$. 从而, $\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}(N)$.

由于 $V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$, 所以 $\mathcal{A}(M) \cap \mathcal{A}(N) = 0$. 所以:

$$\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N) = V$$

即: $\mathcal{A}(V) = V$. 即, 线性变换 \mathcal{A} 是满射. 从而,

$$\dim(\text{Ker } \mathcal{A}) = \dim V - \dim(\text{Im } \mathcal{A}) = n - n = 0$$

所以, $\text{Ker } \mathcal{A} = 0$. 由(2) \implies (1)的证明过程可知, \mathcal{A} 是单射.

综上, \mathcal{A} 是双射. 从而, \mathcal{A} 是可逆变换.

(2) \implies (3)

取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基. 令 $0 = k_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + k_2\mathcal{A}\varepsilon_2 + \dots + k_n\mathcal{A}\varepsilon_n = \mathcal{A}(k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \dots + k_n\varepsilon_n)$

由(2)可知: $k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \dots + k_n\varepsilon_n = 0$, 而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基

所以, $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. 所以 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 线性无关.

而 $\dim V = n$, 所以 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是 V 的一组基.

(3) \implies (4)

取 M 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$, 将其扩充为 V 的基:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_n$$

由于 $V = M \oplus N$, 所以 $\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_n$ 是 N 的一组基.

记 $\mathcal{A}(M) = \{\mathcal{A}\alpha | \alpha \in M\}$, 由于 $M = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$, 易证明: $\mathcal{A}(M) = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_m)$

从而:

$$\mathcal{A}(M) = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_m), \quad \mathcal{A}(N) = L(\mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \mathcal{A}\varepsilon_{m+2}, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n)$$

所以:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}(N) &= L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_m) + L(\mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \mathcal{A}\varepsilon_{m+2}, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n) \\ &= L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_m, \mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n) \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是 V 的一组基, 所以

$$V = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_m, \mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n) = \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}(N)$$

而 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 线性无关, 所以:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_m$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \mathcal{A}\varepsilon_{m+2}, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$$

都是线性无关的向量组. 又由于 $\mathcal{A}(M) = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_m)$, $\mathcal{A}(N) = L(\mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \mathcal{A}\varepsilon_{m+2}, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n)$

所以 $\{\mathcal{A}\varepsilon_1, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_m\}, \{\mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n\}$ 分别是 $\mathcal{A}(M), \mathcal{A}(N)$ 的基.

所以 $\mathcal{A}(M)$ 的基与 $\mathcal{A}(N)$ 的基合起来是 $V = \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}(N)$ 的基, 所以

$$V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$$

作业反馈:

1. 本次作业错的最多的是4.3.9(7), 90多份作业只有不到十个人写对. 有以下两种错误:

$$(i) \mathcal{A}(k\xi) = \overline{k\xi} = k\bar{\xi}$$

$$(ii) \mathcal{A}(\xi_1 + \xi_2) = \overline{\xi_1 + \xi_2} \neq \overline{\xi_1} + \overline{\xi_2}$$

错误的原因是对共轭运算不理解. 对于 $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, 有

$$\overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}, \quad \overline{c_1 c_2} = \overline{c_1} \overline{c_2}, \quad \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$$

这些基本运算的证明通过设 $c_1 = a_1 + ib_1, c_2 = a_2 + ib_2, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ 都可以很容易的得到证明.

2. 4.3.6与4.3.7这样的证明 f 是一个线性映射, 建议先把 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 写成矩阵乘以向量的形式, 这样验证线性的时候会方便很多. 如:

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -2x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = AX$$

在求 $\text{Im} f$ 的时候, 要清楚 $\text{Im} f$ 实际上是矩阵 A 的列向量生成的空间, 因为:

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

只要求出矩阵 A 的列向量的极大无关组, 它们生成的子空间即为 $\text{Im} f$.

另外, 在求 $\text{Coker} f$ 时需要把矩阵 A 的列向量的极大无关组补全为整个线性空间的基, 大部分同学都补对了, 但是只有一位同学说明了添加的向量与原向量组线性无关. 对于基扩充, 以4.3.6为例, 有如下办法:

$\beta_1 = (1, 0, -1), \beta_2 = (1, -2, -1)$ 为矩阵 A 的列向量的极大无关组, 作以下矩阵并作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{AELb}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

此时, 对上述矩阵补上一行, 使得新矩阵的行列式不为0的添加行, 即为与原向量组线性无关的向量. 一个很自然的添加方法就是添加 $(0, 0, 1)$, 使得新矩阵成为对角阵. 当然添加 $(1, 0, 0)$ 也可以, 但是 $(0, 1, 0)$ 不行.

3. 4.3.35, 证明四个命题的等价性, 可以采用“循环”的证明, 通过如下路径: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$, 很多同学从 (1) 证明到 (4) 就结束了, 没有证明 $(4) \Rightarrow (1)$. 如果有别的路径证明比较简单的话, 也可以从别的路径证明, 如 $(1) \Leftrightarrow (2), (1) \Leftrightarrow (3), (1) \Leftrightarrow (4)$, 只要保证任意两个命题都可以互相推导即可. 根据同学们的作业, 整理了以上两个路径的证明.

4. 计算问题. 大部分同学的作业都是自己算过的, 但是正确率却不太高. 希望大家在平时的练习中既要自己好好算一算, 也要注意计算的准确性.

5. 希望大家可以自己完成作业, 不会的题可以和同学一起讨论一下, 但是完全copy不可取. 15, 16级中都有高度相似的作业, 步骤一样, 错的也一样, 这样很尴尬.

PROBLEM

1.

设 \mathcal{A} 是数域 K 上线性空间 V 内的线性变换, 若 $\mathcal{A}\alpha = \lambda_0\alpha$, 又设 $f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_m$ 为 K 上一多项式. 证明:

$$f(\mathcal{A})\alpha = f(\lambda_0)\alpha$$

Solution

由于 $\mathcal{A}\alpha = \lambda_0\alpha$, 所以有:

$$\mathcal{A}^2\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A}\alpha) = \mathcal{A}(\lambda_0\alpha) = \lambda_0\mathcal{A}\alpha = \lambda_0^2\alpha$$

$$\mathcal{A}^3\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A}^2\alpha) = \mathcal{A}(\lambda_0^2\alpha) = \lambda_0^2\mathcal{A}\alpha = \lambda_0^3\alpha$$

... ..

$$\mathcal{A}^m\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{m-1}\alpha) = \mathcal{A}(\lambda_0^{m-1}\alpha) = \lambda_0^{m-1}\mathcal{A}\alpha = \lambda_0^m\alpha$$

所以,

$$\begin{aligned}
 f(\mathcal{A})\alpha &= (a_0\mathcal{A}^m + a_1\mathcal{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\mathcal{A} + a_m\mathcal{E})\alpha \\
 &= a_0\mathcal{A}^m\alpha + a_1\mathcal{A}^{m-1}\alpha + \cdots + a_{m-1}\mathcal{A}\alpha + a_m\mathcal{E}\alpha \\
 &= a_0\lambda_0^m\alpha + a_1\lambda_0^{m-1}\alpha + \cdots + a_{m-1}\lambda_0\alpha + a_m\alpha \\
 &= f(\lambda_0)\alpha
 \end{aligned}$$

PROBLEM

2. 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 是线性空间 V 内的两个线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. 证明: 若 $\mathcal{A}\alpha = \lambda_0\alpha$, 则 $\mathcal{B}\alpha \in V_{\lambda_0}$, 这里 V_{λ_0} 为 \mathcal{A} 的特征值 λ_0 的特征子空间.

Solution

由题意, 有:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha) &= (\mathcal{A}\mathcal{B})\alpha = (\mathcal{B}\mathcal{A})\alpha \\
 &= \mathcal{B}(\mathcal{A}\alpha) \\
 &= \mathcal{B}(\lambda_0\alpha) \\
 &= \lambda_0\mathcal{B}\alpha
 \end{aligned}$$

根据 V_{λ_0} 的定义可知, $\mathcal{B}\alpha \in V_{\lambda_0}$.

PROBLEM

5. 设 \mathcal{A} 是复数域上线性空间 V 内的一个线性变换, 且它在某一组基 $\{\varepsilon_i\}$ 下的矩阵为 A . 求 A 的全部特征值和每个特征值 λ_i 所属特征子空间 V_{λ_i} 的一组基, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution

先求出 A 的特征多项式 $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(\lambda E - A) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ 2 & \lambda & -3 \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ 0 & \lambda - 6 & -3 - 2\lambda \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3\lambda & -\lambda & 2\lambda \\ 0 & \lambda - 6 & -3 - 2\lambda \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{\lambda}{3} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda - 6 & -3 - 2\lambda \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \frac{\lambda}{3} \begin{vmatrix} 0 & -10 & 2 - 3\lambda \\ 0 & \lambda - 6 & -3 - 2\lambda \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \frac{\lambda}{3} \begin{vmatrix} -10 & 2 - 3\lambda \\ \lambda - 6 & -3 - 2\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda^2 + 14) = 0 \end{aligned}$$

解得 $\lambda = 0, \pm\sqrt{14}i$. 接下来求每个特征值对应的特征向量:

(i) $\lambda_1 = 0$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$, 有:

$$\lambda_1 E - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $x_3 = 2$, 得基础解系 $\eta_1 = (3, -1, 2)$, 它对应于特征向量

$$3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$$

. 所以, $V_{\lambda_1} = L(3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)$.

(ii) $\lambda_2 = \sqrt{14}i$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$, 有:

$$\lambda_2 E - A = \begin{bmatrix} \sqrt{14}i & -2 & -1 \\ 2 & \sqrt{14}i & -3 \\ 1 & 3 & \sqrt{14}i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6+\sqrt{14}i}{10} \\ 0 & 1 & \frac{-2+3\sqrt{14}i}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $x_3 = 2 + 3\sqrt{14}i$, 得基础解系 $\eta_2 = (3 - 2\sqrt{14}i, 13, 2 + 3\sqrt{14}i)$, 它对应于特征向量

$$(3 - 2\sqrt{14}i)\varepsilon_1 + 13\varepsilon_2 + (2 + 3\sqrt{14}i)\varepsilon_3$$

所以, $V_{\lambda_2} = L((3 - 2\sqrt{14}i)\varepsilon_1 + 13\varepsilon_2 + (2 + 3\sqrt{14}i)\varepsilon_3)$.

(iii) $\lambda_3 = -\sqrt{14}i$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_3 E - A)X = 0$, 有:

$$\lambda_3 E - A = \begin{bmatrix} -\sqrt{14}i & -2 & -1 \\ 2 & \sqrt{14}i & -3 \\ 1 & 3 & -\sqrt{14}i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6-\sqrt{14}i}{10} \\ 0 & 1 & \frac{-2-3\sqrt{14}i}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $x_3 = 2 - 3\sqrt{14}i$, 得基础解系 $\eta_2 = (3 + 2\sqrt{14}i, 13, 2 - 3\sqrt{14}i)$, 它对应于特征向量

$$(3 + 2\sqrt{14}i)\varepsilon_1 + 13\varepsilon_2 + (2 - 3\sqrt{14}i)\varepsilon_3$$

所以, $V_{\lambda_3} = L((3 + 2\sqrt{14}i)\varepsilon_1 + 10\varepsilon_2 + (2 - 3\sqrt{14}i)\varepsilon_3)$.

PROBLEM

6.

给定数域 K 上 3 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & x & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

(1) 求 K 上 3 阶可逆方阵 T , 使 $T^{-1}AT = D$ 为对角阵.

(2) 如已知 B 与 C 特征多项式相同, 求 x, y 的值, 判断 B 与 C 是否相似.

Solution

(1) 首先, 求出 A 的特征多项式 $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \det(\lambda E - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 9 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda - 10) = 0 \end{aligned}$$

解得 $\lambda = 1$ (二重), 10 . 接下来求特征值对应的特征向量.

(i) $\lambda_1 = 1$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$, 有:

$$\lambda_1 E - A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{AEILb}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $x_2 = 1, x_3 = 0$ 与 $x_2 = 0, x_3 = 1$ 可以得到基础解系 $\eta_1 = (-2, 1, 0), \eta_2 = (2, 0, 1)$, 同时, 这也为矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量.

(ii) $\lambda_2 = 10$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$, 有:

$$\lambda_2 E - A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $x_3 = 2$, 可以得到基础解系 $\eta_3 = (-1, -2, 2)$, 同时, 这也为矩阵 A 属于特征值 $\lambda_2 = 10$ 的特征向量.

所以, 矩阵 A 可对角化, 取

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{使得} \quad T^{-1}AT = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

(2) 由于 B 与 C 的特征多项式相同, 所以

$$\det(B) = -16 = \det(C) = 4y, \operatorname{Tr}(B) = 2+x = \operatorname{Tr}(C) = 4+y \implies x = -2, y = -4$$

从而, 可以求得 B 的特征多项式为: $f_B(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4) = 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$. 对于 $\lambda_1 = 2$,

$$\lambda_1 E - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$r(\lambda_1 E - B) = 2$, 所以 $\dim V_{\lambda_1} = 3 - r(\lambda_1 E - B) = 1 \neq 2$, 即几何重数 \neq 代数重数. 所以矩阵 B 不可对角化. 注意到 C 是一个对角矩阵, 所以 B 与 C 不相似.

PROBLEM

8.

设 λ_1, λ_2 是线性变换 \mathcal{A} 的两个不同特征值, ξ_1, ξ_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明: $\xi_1 + \xi_2$ 不是 \mathcal{A} 的特征向量.

Solution

假设 ξ_1, ξ_2 是 \mathcal{A} 属于特征值 λ_3 的特征向量, 那么有:

$$\mathcal{A}(\xi_1 + \xi_2) = \lambda_3(\xi_1 + \xi_2) = \lambda_3\xi_1 + \lambda_3\xi_2$$

而 ξ_1, ξ_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以:

$$\mathcal{A}(\xi_1 + \xi_2) = \mathcal{A}\xi_1 + \mathcal{A}\xi_2 = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2$$

两式相减, 可得:

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\xi_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\xi_2 = 0$$

由命题4.3可知, ξ_1, ξ_2 线性无关. 所以 $\lambda_3 - \lambda_1 = \lambda_3 - \lambda_2 = 0$, 即 $\lambda_1 = \lambda_2$, 矛盾!

所以, $\xi_1 + \xi_2$ 不是 \mathcal{A} 的特征向量.

PROBLEM

15. 设 \mathcal{A} 是线性空间 V 内的一个线性变换, M, N 是 \mathcal{A} 的两个不变子空间. 证明: $M + N$ 与 $M \cap N$ 都是 \mathcal{A} 的不变子空间.

Solution

(1) 任取 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in (M + N)$, 其中, $\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N$, 有:

$$\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathcal{A}\alpha_1 + \mathcal{A}\alpha_2$$

由于 M, N 是 \mathcal{A} 的不变子空间, 所以 $\mathcal{A}\alpha_1 \in M, \mathcal{A}\alpha_2 \in N$.

从而, $\mathcal{A}\alpha \in (M + N)$. 所以 $M + N$ 是 \mathcal{A} 的不变子空间.

(2) 任取 $\beta \in M \cap N$, 有 $\beta \in M$ 且 $\beta \in N$. 由于 M, N 都是 \mathcal{A} 的不变子空间, 所以:

$$\mathcal{A}\beta \in M, \mathcal{A}\beta \in N \implies \mathcal{A}\beta \in M \cap N$$

所以, $M \cap N$ 也是 \mathcal{A} 的不变子空间.

PROBLEM

16. 设 \mathcal{A} 是数域 K 上 n 维线性空间 V 内的一个线性变换, 在 V 的一组基下其矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

证明: 当 $n > 1$ 时, 对 \mathcal{A} 的任意非平凡不变子空间 M , 都不存在 \mathcal{A} 的不变子空间 N , 使

$$V = M \oplus N.$$

Solution

设 \mathcal{A} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 J . 取 $\alpha \in M$, 且记:

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_k\varepsilon_k \quad \text{其中, } a_k \neq 0$$

于是, 有(取 $\varepsilon_0 = 0$):

$$\mathcal{A}\alpha = \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{A}\varepsilon_i = \sum_{i=1}^k a_i (\lambda_0 \varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}) = \lambda_0 \alpha + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \varepsilon_i \in M$$

所以,

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \varepsilon_i = \mathcal{A}\alpha - \lambda_0 \alpha \in M$$

继续做以上步骤, 可以得到: $k_s \varepsilon_1 \in M$, 所以: $\varepsilon_1 \in M$.

这说明, 对于 \mathcal{A} 的任意非平凡不变子空间 M , 都有 $\varepsilon_1 \in M$. 即: \mathcal{A} 的任意两个非平凡不变子空间都含有公共向量 ε_1 , 所以 V 不能分解为 \mathcal{A} 的两个非平凡不变子空间的直和.

PROBLEM

20. \mathcal{A}, \mathcal{B} 是 n 维线性空间 V 内的两个线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. λ 是 \mathcal{A} 的一个特征值, V_λ 是属于特征值 λ 的特征子空间. 则 V_λ 是 \mathcal{B} 的不变子空间.

Solution

任取 $\alpha \in V_\lambda$, 有 $\mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha$, 从而:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha) = \mathcal{B}\mathcal{A}\alpha = \mathcal{B}(\lambda\alpha) = \lambda\mathcal{B}\alpha$$

即: $\mathcal{B}\alpha \in V_\lambda$. 所以 V_λ 是 \mathcal{B} 的不变子空间.

PROBLEM

21. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, \mathcal{A}, \mathcal{B} 是 V 内两个线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. 如果 \mathcal{A}, \mathcal{B} 的矩阵都可对角化, 证明: V 内存在一组基, 使 \mathcal{A}, \mathcal{B} 在这组基下的矩阵同时成对角形.

Solution

由于 \mathcal{A} 可以对角化, 所以空间 V 可以分解为 \mathcal{A} 的特征子空间的直和:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$$

由上题结论可知, $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_r}$ 是 \mathcal{B} 的不变子空间. 所以, $\mathcal{B}|_{V_{\lambda_1}}, \mathcal{B}|_{V_{\lambda_2}}, \cdots, \mathcal{B}|_{V_{\lambda_r}}$ 的矩阵也可对角化. 对于 V_{λ_i} , 将其分解为 $\mathcal{B}|_{V_{\lambda_i}}$ 的特征子空间的直和:

$$V_{\lambda_i} = V_{\xi_{i1}} \oplus V_{\xi_{i2}} \oplus \cdots \oplus V_{\xi_{is_i}}$$

则:

$$V = V_{\xi_{11}} \oplus \cdots \oplus V_{\xi_{1s_1}} \oplus \cdots \oplus V_{\xi_{r1}} \oplus \cdots \oplus V_{\xi_{rs_r}}$$

在 $V_{\xi_{i1}}, V_{\xi_{i2}}, \cdots, V_{\xi_{is_i}}$ 各取一组基合成为 V_{λ_i} 一组基:

$$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{is_i}$$

则 $\mathcal{B}|_{V_{\lambda_i}}$ 在这组基下可以对角化, 对所有的 V_{λ_i} , ($i = 1, 2, \cdots, r$) 做如上步骤, 则 \mathcal{B} 在

$$\eta_{11}, \eta_{12}, \cdots, \eta_{1s_1}, \cdots, \eta_{r1}, \eta_{r2}, \cdots, \eta_{rs_r}$$

可以对角化. 注意到 \mathcal{A} 在这组基下也可以对角化, 命题得证.

PROBLEM

也有同学是用矩阵做的, 或多或少写的都有点问题. 有两位同学是直接
从矩阵 $AB = BA$ 开始写, 最后找到了矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$
同时为对角阵. 但是这样还没有和题目完全联系起来, 可以用以下方法:

Solution

取 V 的一组基 $\varepsilon_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, \mathcal{A}, \mathcal{B} 在这组基
下的矩阵分别为 A, B :

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)A$$

$$\mathcal{B}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)B$$

易证明, $AB = BA$. 下证明, A, B 可同时对角化.

因为 A 相似于对角阵, 所以必定存在 P_1 使

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 E_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{n_s} \end{bmatrix}, \quad \text{其中, } \lambda_1, \dots, \lambda_s \text{ 互异.}$$

由于 $AB = BA$, 所以:

$$P_1^{-1}ABP_1 = P_1^{-1}BAP_1 \implies (P_1^{-1}AP_1)(P_1^{-1}BP_1) = (P_1^{-1}BP_1)(P_1^{-1}AP_1)$$

设 $(P_1^{-1}BP_1) = (B_{ij})$, 其中分块方法使得 $(P_1^{-1}BP_1)(P_1^{-1}AP_1)$ 与 $(P_1^{-1}AP_1)(P_1^{-1}BP_1)$
都可乘.

由于 $(P_1^{-1}BP_1)$ 与 $(P_1^{-1}AP_1)$ 可交换, 有:

$$\lambda_i B_{ij} = B_{ij} \lambda_j$$

所以当 $i \neq j$ 时, $B_{ij} = 0$. 所以有: $P_1^{-1}BP_1 = \text{diag}\{B_{11}, B_{22}, \dots, B_{ss}\}$.

由 B 可对角化可知, B_{ii} 也可以对角化, 即 $\exists Q_i$, 使得 $Q_i^{-1}B_{ii}Q_i$ 为对角阵.
($i = 1, 2, \dots, s$). 记:

$$P_2 = \begin{bmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_s \end{bmatrix}$$

取 $P = P_1 P_2$, 有 $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ 同时为对角阵. 记 $P = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, 此时:

$$\mathcal{A}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \mathcal{A}[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)P] = [\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)]P = AP = P(P^{-1}AP) = (\eta_1, \dots, \eta_n)(P^{-1}AP)$$

$$\mathcal{B}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \mathcal{B}[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)P] = [\mathcal{B}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)]P = BP = P(P^{-1}BP) = (\eta_1, \dots, \eta_n)(P^{-1}BP)$$

矩阵 P 的列向量即为题目中要找的基.

作业反馈:

1. 4.4.6题中, 判断矩阵 B, C 是否相似, 有的同学认为特征值相同, 对应特征值的代数重数相同, 两个矩阵就应该相似. 但是实际上有一个结论: 相似矩阵有相同的特征多项式, 但是具有相同特征多项式的矩阵却不一定相似. 在本题中只需要判断矩阵 B 可否对角化即可.

关于矩阵 A 与 B 相似, 有如下一些结论:

- 必要条件: $\det(A) = \det(B)$, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$, $r(A) = r(B)$, $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$

更一般地说, 方阵的行列式, 迹, 秩, 特征值, 特征多项式, 最小多项式是方阵在相似下的不变量, 但不是全系不变量. 关于矩阵相似也有充要条件, 但是相关知识点目前还没学到, 暂且不提.

2. 4.4.21题中, 采用线性变换方法证明的同学中, 很多证明了 \mathcal{A} 的特征子空间是 \mathcal{B} 的不变子空间之后, 得到 \mathcal{B} 在这些空间上的限制也可以对角化, 然后就直接在这些特征子空间中取基, 便断言 \mathcal{B} 在这组基下可以对角化. 但是实际上, V_λ 只是 \mathcal{B} 的不变子空间而非特征子空间, 这样随意取的基, 并不一定能使 $\mathcal{B}|_{V_\lambda}$ 在该基下的矩阵是对角阵; 另外也有同学直接说在 V_λ 中一定存在 ξ_i, η_j 使得 $\mathcal{B}\eta_j = \xi_i\eta_j$, 虽然说本质上确实有这样的关系, 但总感觉这样写还是有点没写清楚.

一个能把问题说清楚的方法就是继续将 V_λ 继续分解为 $\mathcal{B}|_{V_\lambda}$ 的特征子空间的直和, 然后在这些特征子空间中取基, 再把所有的基拼成 V 的一组基, 便既可以说出这些基是怎么来的, 也可以使 \mathcal{A}, \mathcal{B} 在这组基下的矩阵同时为对角形.

3. 关于矩阵的特征值的计算. 一般的题目都是三阶矩阵, 建议先通过初等行列变换将行列式降阶, 最好能提出来一个一次式, 这样对接下来的二次多项式进行因式分解会很方便. 如果直接展开为最一般的多项式, 对三次方程的

求根方法可能令人沮丧

PROBLEM

5.1.5

在实数域上线性空间 $C[a, b]$ 内定义二元函数如下: 对 $f(x), g(x) \in$

$C[a, b]$, 令:

$$I(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

PROBLEM

证明这是一个双线性函数.

Solution

对 $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, f_1, f_2 \in C[a, b]$, 有:

$$I(k_1 f_1 + k_2 f_2, g) = \int_a^b (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x))g(x)dx = k_1 \int_a^b f_1(x)g(x)dx + k_2 \int_a^b f_2(x)g(x)dx$$

对 $\forall l_1, l_2 \in \mathbb{R}, g_1, g_2 \in C[a, b]$, 有:

$$I(f, l_1 g_1 + l_2 g_2) = \int_a^b f(x)(l_1 g_1(x) + l_2 g_2(x))dx = l_1 \int_a^b f(x)g_1(x)dx + l_2 \int_a^b f(x)g_2(x)dx$$

所以, $I(f, g)$ 是 $C[a, b]$ 上的一个双线性函数.

PROBLEM

8. 在 $M_n(K)$ 内定义函数如下:

$$f(A, B) = \text{Tr}(AB).$$

(1) 证明 $f(A, B)$ 是一个对称双线性函数;

(2) 令 $n = 2$, 在 $M_2(K)$ 内取一组基

$$\varepsilon_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 $f(A, B)$ 在这组基下的矩阵;

(3) 在 $M_2(K)$ 内另取一组基

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

求出两组基之间的过渡矩阵 T :

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22})T$$

再求 $f(A, B)$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的矩阵.

(4) 在 $n = 2$ 的情况下求 $f(A, B)$ 的秩.

Solution

(1) 对于 $\forall k_1, k_2 \in K, A_1, A_2 \in M_n(K)$, 有:

$$f(k_1 A_1 + k_2 A_2, B) = \text{Tr}((k_1 A_1 + k_2 A_2)B) = k_1 \text{Tr}(A_1 B) + k_2 \text{Tr}(A_2 B) = k_1 f(A_1, B) + k_2 f(A_2, B)$$

对于 $\forall l_1, l_2 \in K, B_1, B_2 \in M_n(K)$, 有:

$$f(A, l_1 B_1 + l_2 B_2) = \text{Tr}(A(l_1 B_1 + l_2 B_2)) = l_1 \text{Tr}(A, B_1) + l_2 \text{Tr}(A, B_2) = l_1 f(A, B_1) + l_2 f(A, B_2)$$

另外又注意到:

$$f(A, B) = \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) = f(B, A)$$

所以 $f(A, B)$ 是一个对称双线性函数.

(2) 经计算可知:

$$f(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{11}) = 1, f(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}) = 0, f(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}) = 0, f(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}) = 0$$

$$f(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{11}) = 0, f(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{12}) = 0, f(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}) = 1, f(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}) = 0$$

$$f(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{11}) = 0, f(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{12}) = 1, f(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{21}) = 0, f(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}) = 0$$

$$f(\varepsilon_{22}, \varepsilon_{11}) = 0, f(\varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}) = 0, f(\varepsilon_{22}, \varepsilon_{21}) = 0, f(\varepsilon_{22}, \varepsilon_{22}) = 1$$

所以, $f(A, B)$ 在这组基下的矩阵为:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 注意到

$$\eta_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \eta_2 = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}, \eta_3 = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}, \eta_4 = \varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}$$

所以, 两组基之间的过渡矩阵为:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $f(A, B)$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的矩阵为:

$$N = T'MT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(4) 由第(3)问的结果可知, $f(A, B)$ 的秩为 4.

PROBLEM

9. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的一个双线性函数. 证明: $f(\alpha, \beta)$ 满秩的充分必要条件是: 当对一切 $\beta \in V$ 有 $f(\alpha, \beta) = 0$ 时, 必定有 $\alpha = 0$.

Solution

记 f 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A . 任取 $\alpha, \beta \in V$, 设:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)X, \quad \beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)Y, \quad X, Y \in K^n$$

(1) 充分性:

设 $f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in V$, 则有:

$$f(\alpha, \beta) = X'AY = 0, \quad \forall Y \in K^n$$

不妨取 $Y = \varepsilon_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 则: $X'A\varepsilon_i = 0, (i = 1, 2, \dots, n)$.

所以有, $0 = X'A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = X'AE = X'A, \implies A'X = 0$.

由题目条件可知, 当对一切 $\beta \in V$ 有 $f(\alpha, \beta) = 0$ 时, 即上述方程组只有零解.

所以, $r(A) = r(A') = n$, 即 $f(\alpha, \beta)$ 满秩.

(2) 必要性:

由于 $f(\alpha, \beta)$ 满秩, 所以矩阵 A 满秩.

设对于任意 $Y \in K^n, f(\alpha, \beta) = X'AY = 0$. 下推导 X 只能为 0 向量.

取 Y 依次为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 则可得到:

$$X'A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = X'AE = 0 \implies A'X = 0$$

由于矩阵 A 满秩, 则上述线性齐次方程组只有零解. 即: 当对一切 $\beta \in V$ 有 $f(\alpha, \beta) = 0$ 时, 必定有 $\alpha = 0$.

PROBLEM

10. 证明第8题中的双线性函数 $f(A, B)$ 是满秩的.

Solution

设对于一切 $B \in M_n(K)$, $f(A, B) = \text{Tr}(AB)$. 下证明 $A = 0$. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 则:

$$f(A, B) = \text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n AB(i, i) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right)$$

依次取 $B = E_{ij}$, 则可以得到 $f(A, B) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = a_{ji} = 0$, ($1 \leq i, j \leq n$).

所以可以得到 $A = 0$. 由5.1.9结论可知, 双线性函数 $f(A, B)$ 是满秩的.

也可以直接取一组基, 求出双线性函数 f 在这组基下的矩阵, 并判断该矩阵满秩来证明此命题.

Solution

在 $M_n(K)$ 内选取一组基

$$E_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$E_{ij} + E_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, i < j)$$

$$E_{ij} - E_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, i < j)$$

下证明在这组基下 f 的矩阵成对角形. 首先, 有

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, & \text{若 } j = k; \\ 0, & \text{若 } j \neq k. \end{cases} \quad \text{Tr}(E_{ij}E_{kl}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } i = l, j = k; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (4.1)$$

(1) 对于 E_{ii} , 有:

$$f(E_{ii}, E_{jj}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } i = j; \\ 0, & \text{若 } i \neq j. \end{cases} \quad (4.2)$$

对于 $k < l$, 有:

$$f(E_{ii}, E_{kl} \pm E_{lk}) = \text{Tr}(E_{ii}E_{kl}) \pm \text{Tr}(E_{ii}E_{lk}) = 0.$$

(2) 对于 $E_{ij} + E_{ji}$, $(1 \leq i < j \leq n)$, 有

$$\begin{aligned} f(E_{ij} + E_{ji}, E_{kl} + E_{lk}) &= \text{Tr}(E_{ij}E_{kl}) + \text{Tr}(E_{ij}E_{lk}) + \text{Tr}(E_{ji}E_{kl}) + \text{Tr}(E_{ji}E_{lk}) \\ &= \text{Tr}(E_{ji}E_{kl}) + \text{Tr}(E_{ij}E_{lk}) \\ &= \begin{cases} 2, & \text{若 } i = k, j = l; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(E_{ij} + E_{ji}, E_{kl} - E_{lk}) = \text{Tr}(E_{ji}E_{kl}) - \text{Tr}(E_{ij}E_{lk}) = 0.$$

(3) 对于 $E_{ij} - E_{ji}$, $(1 \leq i, j \leq n)$, 有:

$$\begin{aligned} f(E_{ij} - E_{ji}, E_{kl} - E_{lk}) &= \text{Tr}(E_{ij}E_{kl}) - \text{Tr}(E_{ij}E_{lk}) - \text{Tr}(E_{ji}E_{kl}) + \text{Tr}(E_{ji}E_{lk}) \\ &= -\text{Tr}(E_{ji}E_{kl}) - \text{Tr}(E_{ij}E_{lk}) \\ &= \begin{cases} -2, & \text{若 } i = k, j = l; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

经过上述计算可以发现, f 在所选的基下成对角阵, 主对角线上有 n 个 1, $\frac{n(n-1)}{2}$ 个 2 和 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个 -2. 从而 f 是满秩的.

PROBLEM

5.1.18

设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $f(\alpha, \beta)$ 是 V 内的双线性函数. 对 V 的子空间 M , 定义:

$$L(M) = \{\alpha \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in M\}$$

$$R(M) = \{\alpha \in V \mid f(\beta, \alpha) = 0, \forall \beta \in M\}$$

证明 $L(M), R(M)$ 为 V 的子空间. 如果 $f(\alpha, \beta)$ 为 V 内满秩双线性函数, 证明:

$$\dim L(M) = \dim R(M) = n - \dim M$$

同时又有:

$$R(L(M)) = L(R(M)) = M$$

Solution

(1) 先证明 $L(M), R(M)$ 为 V 的子空间. 任取 $\alpha_1, \alpha_2 \in L(M), k_1, k_2 \in K$, 有:

$$f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1f(\alpha_1, \beta) + k_2f(\alpha_2, \beta) = 0$$

所以 $L(M)$ 是 V 的子空间. 同理, $R(M)$ 也是 V 的子空间.

(2) 再证明: 如果 $f(\alpha, \beta)$ 为 V 内满秩双线性函数, 则有

$$\dim L(M) = \dim R(M) = n - \dim M, \quad R(L(M)) = L(R(M)) = M$$

在 M 内取一组基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$, 将其扩充为 V 的一组基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n$.

对任意的 $\alpha \in V$, 记 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n$, 则 $\alpha \in L(M)$ 等价于:

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_i)a_1 + \dots + f(\varepsilon_r, \varepsilon_i)a_r + \dots + f(\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_i)a_{r+1} + \dots + f(\varepsilon_n, \varepsilon_i)a_n = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

f 满秩意味着系数矩阵满秩, 为 $r = \dim M$. 其解空间 W 的维数为

$$\dim W = n - r = n - \dim(M)$$

由于 α 对应到它的坐标 X 是 V 到 F^n 的一个同构映射, 且 $L(M)$ 在该映射下的象为上述方程组的解空间 W , 所以:

$$\dim L(M) = \dim W = n - \dim(M)$$

同理可得, $\dim R(M) = n - \dim(M)$. 即 $\dim L(M) = \dim R(M) = n - r$.

注意到 $R(L(M)) = \{\beta \in V | f(\alpha, \beta) = 0, \forall \alpha \in L(M)\}$, 任取 $\gamma \in M$, 当 $\alpha \in L(M)$ 时,

$$f(\alpha, \gamma) = 0 \quad (\text{由 } R(L(M)) \text{ 的定义可得})$$

所以 $M \subset R(L(M))$. 由前面的证明过程可知, $\dim R(L(M)) = n - \dim L(M) = n - (n - r) = r$, 所以 $M = R(L(M))$. 同理可得: $M = L(R(M))$. 即: $L(R(M)) = R(L(M)) = M$.

PROBLEM

5.1.19

设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, M, N 是 V 的两个子空间, $f(\alpha, \beta)$ 为 V 内双线性函数, 使用上题记号. 证明:

$$L(M + N) = L(M) \cap L(N), \quad R(M + N) = R(M) \cap R(N)$$

如果 $f(\alpha, \beta)$ 满秩, 则:

$$L(M \cap N) = L(M) + L(N), \quad R(M \cap N) = R(M) + R(N)$$

Solution

(1) 任取 $\alpha \in L(M + N)$, 则对于 $\forall \beta \in M + N$ 有 $f(\alpha, \beta) = 0$.

由于 $M \subset M + N, N \subset M + N$, 所以 $\alpha \in L(M), \alpha \in L(N)$, 即: $\alpha \in L(M) \cap L(N)$.

从而: $L(M + N) \subset L(M) \cap L(N)$.

任取 $\alpha \in L(M) \cap L(N)$, 则对于 $\forall \beta_1 \in M, \beta_2 \in N$, 有

$$f(\alpha, \beta_1) = 0, \quad f(\alpha, \beta_2) = 0$$

任取 $\beta \in M + N$, 则 $\exists \beta_1 \in M, \beta_2 \in N$, 使得 $\beta = \beta_1 + \beta_2$, 从而:

$$f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = f(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2) = 0$$

从而: $L(M) \cap L(N) \subset L(M + N)$.

综上, $L(M + N) = L(M) \cap L(N)$. 同理可得, $R(M + N) = R(M) \cap R(N)$.

(2) 对于 $\forall \alpha \in L(M) + L(N)$, 有 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in L(M), \alpha_2 \in L(N)$.

对于 $\forall \beta \in M \cap N$, 可知 $f(\alpha, \beta) = f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta) = 0$, 即: $\alpha \in L(M \cap N)$.

所以: $L(M) + L(N) \subset L(M \cap N)$.

由于 $f(\alpha, \beta)$ 满秩, 5.1.18 的结论及维数公式可得:

$$\begin{aligned}
 \dim(L(M) + L(N)) &= \dim L(M) + \dim L(N) - \dim(L(M) \cap L(N)) \\
 &= (n - \dim M) + (n - \dim N) - \dim(L(M + N)) \\
 &= 2n - (\dim M + \dim N) - (n - \dim(M + N)) \\
 &= n - (\dim M + \dim N - \dim(M + N)) \\
 &= n - \dim(M \cap N) \\
 &= \dim L(M \cap N)
 \end{aligned}$$

所以, $L(M) + L(N) = L(M \cap N)$. 同理可得, $R(M) + R(N) = R(M \cap N)$.

PROBLEM

2. 在 K^4 中给定如下对称双线性函数: 若

$$\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \beta = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

令

$$f(\alpha, \beta) = -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_2y_4 - 2x_1y_4 + x_4y_2 - 2x_4y_1 + 2x_4y_4$$

(1) 写出 $f(\alpha, \beta)$ 在基

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$$

下的矩阵, 并写出 $f(\alpha, \alpha)$ 在此组基下的解析表达式.

(2) 做基变换

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

求 $f(\alpha, \beta)$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的矩阵, 并求 $f(\alpha, \alpha)$ 在这组基下的解析表达式;

(3) 求可逆线性变数替换 $X = TY$, 使二次型

$$f = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_4 - 3x_2^2 + 2x_2x_4 + 2x_4^2$$

化成标准型.

Solution

由题意:

$$f(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

(1) 可以看出, $f(\alpha, \beta)$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

可以看出, $f(\alpha, \alpha)$ 在这组基下的解析表达式为:

$$f(\alpha, \alpha) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_4 - 3x_2^2 + 2x_2x_4 + 2x_4^2$$

(2) 设 $f(\alpha, \beta)$ 在这组基下的矩阵为 B , 则:

$$B = T'AT = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $f(\alpha, \alpha)$ 在这组基下的解析表达式为:

$$f(\alpha, \alpha) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

(3) 由第(2)问结论可知:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEM

5.2.3

给定四个变量的二次型 f , 试在 K^4 内找出对称双线性函数 $f(\alpha, \beta)$, 使 $f(\alpha, \alpha)$ 在基:

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$$

下的解析式为:

$$f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

Solution

对于该二次型, 有:

$$f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

所以, 双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 为:

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_1y_3 + x_1y_4 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_2y_4 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_4 + x_4y_1 + x_4y_2 + x_4y_3)$$

PROBLEM

5.2.7

给定二次型

$$f = \sum_{i=1}^s (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^2$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

是一个实数矩阵. 证明 f 的秩等于 $r(A)$.

Solution

记 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$, 则:

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{i=1}^s (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^s \left[(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^2 \\
 &= \sum_{i=1}^s \left[(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] \\
 &= (x_1 \quad \dots \quad x_n) \left[\sum_{i=1}^s \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X'(A'A)X
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

由于 $(A'A)' = A'A$, 即 $A'A$ 为对称矩阵, 所以 $A'A$ 即为二次型 f 的方阵. 下证明: $r(A'A) = r(A)$.

考虑两个线性齐次方程组: (1) $AX = 0$; (2) $A'AX = 0$. 即二者的解空间分别为 W_1, W_2 .

任取 $X \in W_1$, $AX = 0 \implies A'AX = 0$, 即: $X \in W_2$. 所以: $W_1 \subset W_2$.

任取 $X \in W_2$, $A'AX = 0 \implies 0 = X'A'AX = (AX)'(AX) = 0 \implies AX = 0$.

即: $X \in W_1$. 所以: $W_2 \subset W_1$.

综上, $W_1 = W_2$. 所以 $r(A) = n - \dim W_1 = n - \dim W_2 = r(A'A)$. 即: f 的秩为 $r(A)$.

PROBLEM

6.2.1

设 η 是 n 维欧氏空间 V 内的一个单位向量, 定义 V 内一个线性变换如下:

$$\mathcal{A}\alpha = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta$$

称这样的线性变换 \mathcal{A} 为一个镜面反射. 证明:

- (1) \mathcal{A} 是正交变换;
- (2) \mathcal{A} 是第二类的;
- (3) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$;
- (4) 设 \mathcal{B} 是 V 内一个第二类正交变换, 则必有:

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}_1$$

其中, \mathcal{B}_1 是 V 内的一个第一类正交变换.

Solution

(1) 对于镜面反射 \mathcal{A} , 有:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) &= (\alpha - 2(\eta, \alpha)\eta, \beta - 2(\eta, \beta)\eta) \\ &= (\alpha, \beta) - 2(\alpha, \eta)(\eta, \beta) - 2(\eta, \beta)(\eta, \alpha) + 4(\eta, \alpha)(\eta, \beta)(\eta, \eta) \\ &= (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

所以 \mathcal{A} 是正交变换.

(2) 将 $\eta = \varepsilon_1$ 扩充为 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, 有:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1 = \varepsilon_1 - 2(\eta, \varepsilon_1)\eta = \varepsilon_1 - 2\eta = -\varepsilon_1$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_i = \varepsilon_i - 2(\eta, \varepsilon_i)\eta = \varepsilon_i, \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

所以 \mathcal{A} 在这组基下的矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

可以得到, $|A| = -1$. 由于线性变换在不同基下的矩阵是相似的, 相似的矩阵行列式相等. 所以 \mathcal{A} 在任意一组基下的矩阵的行列式都为 -1 , 所以 \mathcal{A} 是第二类的.

(3) 对于 $\forall \alpha \in V$, 有:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2\alpha &= \mathcal{A}(\mathcal{A}\alpha) = \mathcal{A}\alpha - 2(\eta, \mathcal{A}\alpha)\eta \\ &= \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta - 2(\eta, \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta)\eta \\ &= \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta - 2(\eta, \alpha)\eta + 4(\eta, \alpha)(\eta, \eta)\eta \\ &= \alpha\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$.

(4) 设 \mathcal{B} 是 V 内一个第二类正交变换, 记 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$, 下证明 \mathcal{B}_1 是 V 内的第一类正交变换.

由(3)可知 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$, 所以 $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$. 则 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}\mathcal{B}$.

取 V 的一组标准正交基 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, 则 $(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$, 从而

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}_1\xi_i, \mathcal{B}_1\xi_j) &= (\mathcal{A}\mathcal{B}\xi_i, \mathcal{A}\mathcal{B}\xi_j) \\ &= (\mathcal{B}\xi_i - 2(\eta, \mathcal{B}\xi_i)\eta, \mathcal{B}\xi_j - 2(\eta, \mathcal{B}\xi_j)\eta) \\ &= (\mathcal{B}\xi_i, \mathcal{B}\xi_j) - 2(\mathcal{B}\xi_i, \eta)(\eta, \mathcal{B}\xi_j) - 2(\eta, \mathcal{B}\xi_i)(\mathcal{B}\xi_j, \eta) + 4(\eta, \mathcal{B}\xi_i)(\eta, \mathcal{B}\xi_j)(\eta, \eta) \\ &= (\mathcal{B}\xi_i, \mathcal{B}\xi_j) = (\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{B}_1\xi_1, \mathcal{B}_1\xi_2, \dots, \mathcal{B}_1\xi_n$ 也是 V 的一组标准正交基. 即线性变换 \mathcal{B}_1 把 V 的标准正交基映

成标准正交基. 所以 \mathcal{B}_1 是一个正交变换.

上述推理也可由课本P20命题2得出:

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in O(n) \implies \mathcal{A}^{-1}, \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} \in O(n)$$

设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 在 V 的基下的矩阵分别为 A, B , 则 \mathcal{B}_1 在这组基下的矩阵为 $B_1 = AB$, 从而:

$$\det(B_1) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = (-1) \times (-1) = 1$$

由于线性变换在不同基下的矩阵是相似的, 相似的矩阵行列式相等. 所以 \mathcal{B}_1 在任意一组基下的矩阵的行列式都为 1, 所以 \mathcal{B}_1 是第一类的正交变换. 且满足:

$$\mathcal{A}\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}AB = \mathcal{B}$$

PROBLEM

6.2.6 设 \mathcal{A} 是欧式空间 V 内的一个变换, 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有 $(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta)$. 证明 \mathcal{A} 是一个正交变换.

Solution

只需要证明变换 \mathcal{A} 是线性的.

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(\alpha + \beta) - (\mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta), \mathcal{A}(\alpha + \beta) - (\mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta)) \\ &= (\mathcal{A}(\alpha + \beta), \mathcal{A}(\alpha + \beta)) - 2(\mathcal{A}(\alpha + \beta), \mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta) + (\mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta, \mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta) \\ &= (\mathcal{A}(\alpha + \beta), \mathcal{A}(\alpha + \beta)) - 2(\mathcal{A}(\alpha + \beta), \mathcal{A}\alpha) - 2(\mathcal{A}(\alpha + \beta), \mathcal{A}\beta) + (\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\alpha) + 2(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) + (\mathcal{A}\beta, \mathcal{A}\beta) \\ &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) - 2(\alpha + \beta, \alpha) - 2(\alpha + \beta, \beta) + (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

由内积的正定性可知, $\mathcal{A}(\alpha + \beta) = \mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta$.

对于 $\forall k \in \mathbb{R}, \alpha \in V$, 有:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(k\alpha) - k\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}(k\alpha) - k\mathcal{A}\alpha) &= (\mathcal{A}(k\alpha), \mathcal{A}(k\alpha)) - 2k(\mathcal{A}(k\alpha), \mathcal{A}\alpha) + k^2(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\alpha) \\ &= (k\alpha, k\alpha) - 2k(k\alpha, \alpha) + k^2(\alpha, \alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

由内积的正定性可知, $\mathcal{A}(k\alpha) = k\mathcal{A}\alpha$.

所以, \mathcal{A} 是线性的. 从而 \mathcal{A} 是一个正交变换.

PROBLEM

6.2.7

设 V 是 n 维欧氏空间, \mathcal{A} 是第 1 题中定义的镜面反射, \mathcal{B} 是 V 内一正交变换. 证明 $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ 也是 V 内一镜面反射.

Solution

考查 $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ 的作用. 由于 \mathcal{B} 是正交变换, 所以 \mathcal{B}^{-1} 也是正交变换. 对于 $\forall \alpha \in V$, 有:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}(\alpha) &= \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}\alpha - 2(\eta, \mathcal{B}\alpha)\eta) \\ &= \alpha - 2(\eta, \mathcal{B}\alpha)\mathcal{B}^{-1}\eta \\ &= \alpha - 2(\mathcal{B}^{-1}\eta, \alpha)\mathcal{B}^{-1}\eta\end{aligned}$$

由于 $(\mathcal{B}^{-1}\eta, \mathcal{B}^{-1}\eta) = (\eta, \eta) = 1$, 所以 $\mathcal{B}^{-1}\eta$ 也是 V 中的一个单位向量. 由镜面反射的定义可知, $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ 是关于超平面 $L(\mathcal{B}^{-1}\eta)^\perp$ 的镜面反射.

PROBLEM

6.2.10

设 V 为 n 维欧氏空间, \mathcal{A} 与 \mathcal{A}^* 为 V 内两个线性变换. 如果对任意 $\alpha, \beta \in V$ 有

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta)$$

则称 \mathcal{A}^* 为 \mathcal{A} 的共轭变换. 证明: \mathcal{A} 与 \mathcal{A}^* 在 V 的任一组标准正交基下的矩阵互为转置.

Solution

设线性变换 \mathcal{A} 在 V 的一组标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 下的矩阵为 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 即:

$$\mathcal{A}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)A$$

则有 $\mathcal{A}\xi_i = \sum_{k=1}^n a_{ki}\xi_k$. 再设 \mathcal{A}^* 在这组基下的矩阵为 $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 即:

$$\mathcal{A}^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)B$$

于是 $\mathcal{A}^*\xi_i = \sum_{k=1}^n b_{ki}\xi_k$. 再由共轭变换的定义可得:

$$(\mathcal{A}\xi_i, \xi_j) = (\xi_i, \mathcal{A}^*\xi_j)$$

即:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_{ki} \xi_k, \xi_j\right) = \left(\xi_i, \sum_{m=1}^n b_{mj} \xi_m\right) \implies \sum_{k=1}^n a_{ki} (\xi_k, \xi_j) = \sum_{m=1}^n b_{mj} (\xi_i, \xi_m)$$

而 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 V 的一组标准正交基, 所以 $(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$. 从而:

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} \delta_{kj} = \sum_{m=1}^n b_{mj} \delta_{im} \implies a_{ji} = b_{ij}, \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

即: $B = A'$, \mathcal{A} 与 \mathcal{A}^* 在 V 的任一组标准正交基下的矩阵互为转置.

PROBLEM

6.2.11

续上题.

(1) 证明: 对 V 内每个线性变换 \mathcal{A} , 其共轭变换是存在且唯一的, 而且

$$(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}.$$

(2) 证明: \mathcal{A} 是对称变换的充分必要条件是 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

Solution

(1) 存在性:

分两个步骤去证明线性变换 \mathcal{A} 的共轭变换是存在的.

(i) 对于给定的 $\beta \in V$, 存在唯一的向量 $\tilde{\beta} \in V$, 使得对于任意 $\alpha \in V$, 有:

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \tilde{\beta})$$

利用 Euclid 空间的内积, 定义从线性空间 V 到其对偶空间 V^* 的映射 σ :

$$\begin{aligned} \sigma: V &\rightarrow V^* \\ \beta &\mapsto f_\beta(\alpha) = (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

下证明 σ 是一个双射. 首先证明 σ 是单射. 设 $\beta_1, \beta_2 \in V$, 且 $\sigma(\beta_1) = \sigma(\beta_2)$.

于是对于 $\forall \alpha \in V$, 有:

$$f_{\beta_1}(\alpha) = f_{\beta_2}(\alpha) \implies (\alpha, \beta_1) = (\alpha, \beta_2) \implies (\alpha, \beta_1 - \beta_2) = 0$$

由于 α 是任意的, 取 $\alpha = \beta_1 - \beta_2$ 可得:

$$(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) = 0 \implies \beta_1 - \beta_2 = 0$$

即: $\beta_1 = \beta_2, \sigma$ 是单射.

其次证明 σ 是满射. 事实上, 设 $f \in V^*$, 即 f 是 V 上的线性函数. 设 ξ_1, \dots, ξ_n 是 V 的一组标准正交基, 且

$$\alpha = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n$$

则有:

$$f(\alpha) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(\xi_i)$$

另一方面, 取 $\beta = f(\xi_1)\xi_1 + f(\xi_2)\xi_2 + \dots + f(\xi_n)\xi_n \in V$, 则:

$$f_\beta(\alpha) = (\alpha, \beta) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\xi_k\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i f(\xi_k)(\xi_i, \xi_k)$$

由于 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 V 的标准正交基, 所以 $(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$. 所以:

$$f_\beta(\alpha) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i f(\xi_k) \delta_{ik} = \sum_{i=1}^n x_i f(\xi_i) = f(\alpha)$$

由 α 的任意性可知 $f = f_\beta$, 即存在向量 $\beta \in V$, 使得 $\sigma(\beta) = f_\beta = f$. 所以 σ 是满射. 综上, σ 是从 V 到 V^* 的双射. (事实上, 可以进一步验证, σ 是保加法和保乘法的, 所以 σ 是从 V 到 V^* 的一个同构映射, 从而欧几里得空间 V 与它的对偶空间 V^* 同构.)

考虑函数 $f(\alpha) = (\mathcal{A}(\alpha), \beta)$, 它是 V 上的一个实函数. 对任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, 有:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2, \beta) &= (\mathcal{A}(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2), \beta) \\ &= (\lambda_1 \mathcal{A}(\alpha_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\alpha_2), \beta) \\ &= \lambda_1 (\mathcal{A}(\alpha_1), \beta) + \lambda_2 (\mathcal{A}(\alpha_2), \beta) \\ &= \lambda_1 f(\alpha_1) + \lambda_2 f(\alpha_2) \end{aligned}$$

所以 $f(\alpha)$ 是 V 的线性函数, 即 $f(\alpha) \in V^*$. 所以存在唯一的 $\tilde{\beta} \in V$, 使得 $f = f_{\tilde{\beta}}$. 因此 $f(\alpha) = f_{\tilde{\beta}}(\alpha)$, 即: $(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \tilde{\beta})$.

有同学直接用Riesz表示定理来证明 $\tilde{\beta}$ 的存在性. 那么也需要先定义 $f(\alpha) = (\mathcal{A}\alpha, \beta)$, 证明 $f(\alpha) \in V^*$, 再由Riesz表示定理得到存在唯一的 $\tilde{\beta}$, 使得 $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \tilde{\beta})$.

(ii) 建立映射 $\mathcal{A}^*(\beta) = \tilde{\beta}$, 并证明所定义的映射 \mathcal{A}^* 是线性的.

定义 $\mathcal{A}^*(\beta) = \tilde{\beta}$. 设 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_1, \beta_2 \in V$, 由定义, 有:

$$\begin{aligned} (\alpha, \mathcal{A}^*(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2)) &= (\mathcal{A}(\alpha), \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2) \\ &= \lambda_1(\mathcal{A}(\alpha), \beta_1) + \lambda_2(\mathcal{A}(\alpha), \beta_2) \\ &= \lambda_1(\alpha, \mathcal{A}^*(\beta_1)) + \lambda_2(\alpha, \mathcal{A}^*(\beta_2)) \\ &= (\alpha, \lambda_1\mathcal{A}^*(\beta_1) + \lambda_2\mathcal{A}^*(\beta_2)) \end{aligned}$$

即:

$$(\alpha, \mathcal{A}^*(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2) - \lambda_1\mathcal{A}^*(\beta_1) - \lambda_2\mathcal{A}^*(\beta_2)) = 0$$

由 α 的任意性以及内积的正定性可知, $\mathcal{A}^*(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2) = \lambda_1\mathcal{A}^*(\beta_1) + \lambda_2\mathcal{A}^*(\beta_2)$.

综上, 对于 V 内每个线性变换 \mathcal{A} , 其共轭变换是存在的.

唯一性:

假设另有线性变换 \mathcal{B} 使得:

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{B}(\beta)), \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

则:

$$(\alpha, \mathcal{A}^*(\beta)) = (\alpha, \mathcal{B}\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

由 α 的任意性可知, $\mathcal{A}^*(\beta) = \mathcal{B}(\beta)$, $\forall \beta \in V$. 从而 $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}$.

综上所述, 线性变换 \mathcal{A} 的共轭变换的存在唯一性得证.

下面证明 $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

$$(\alpha, (\mathcal{A}^*)^*(\beta)) = (\mathcal{A}^*\alpha, \beta) = (\beta, \mathcal{A}^*\alpha) = (\mathcal{A}\beta, \alpha) = (\alpha, \mathcal{A}(\beta))$$

由 α 的任意性可知(取 $\alpha = (\mathcal{A}^*)^*(\beta) - \mathcal{A}(\beta)$), 则可知:

$$(\mathcal{A}^*)^*(\beta) = \mathcal{A}(\beta), \quad \forall \beta \in V \implies (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

(2)

充分性:

若 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, 任取 $\alpha, \beta \in V$, 有:

$$(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*(\beta)) = (\alpha, \mathcal{A}(\beta))$$

所以 \mathcal{A} 是对称变换.

必要性:

若 \mathcal{A} 是对称变换, 则:

$$(\alpha, \mathcal{A}^*(\beta)) = (\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{A}(\beta)), \implies (\alpha, \mathcal{A}^*(\beta) - \mathcal{A}(\beta))$$

由于 α 是任取的, 取 $\alpha = \mathcal{A}^*(\beta) - \mathcal{A}(\beta)$, 由内积的正定性可知:

$$\mathcal{A}^*(\beta) - \mathcal{A}(\beta) = 0, \quad \forall \beta \in V$$

从而可得: $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

综上, \mathcal{A} 是对称变换的充分必要条件是 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

PROBLEM

12. 证明: 对 n 维欧式空间 V 内的任一线性变换 \mathcal{A} , $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ 是一个对称变换.

Solution

先证明两个结论: 对于 V 内的线性变换 \mathcal{A}, \mathcal{B} ,

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*, \quad (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

任取 $\alpha, \beta \in V$, 有:

$$\begin{aligned} (\alpha, (\mathcal{A} + \mathcal{B})^*(\beta)) &= ((\mathcal{A} + \mathcal{B})\alpha, \beta) = (\mathcal{A}\alpha, \beta) + (\mathcal{B}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta) + (\alpha, \mathcal{B}^*\beta) \\ &= (\alpha, (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)\beta) \end{aligned}$$

$$(\alpha, (\mathcal{A}^*)^*\beta) = (\mathcal{A}^*\alpha, \beta) = (\beta, \mathcal{A}^*\alpha) = (\mathcal{A}\beta, \alpha) = (\alpha, \mathcal{A}\beta)$$

所以由 α, β 的任意性以及内积的正定性(具体步骤自行补充完整), 可得:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*, \quad (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

于是,

$$(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^* + (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{A}$$

由 6.2.11(2) 可知, $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ 是一个对称变换.

也可以直接做, 模仿上面两个结论证明步骤即可.

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)\alpha, \beta) &= (\mathcal{A}\alpha, \beta) + (\mathcal{A}^*\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta) + (\beta, \mathcal{A}^*\alpha) \\ &= (\alpha, \mathcal{A}^*\beta) + (\mathcal{A}\beta, \alpha) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta) + (\alpha, \mathcal{A}\beta) \\ &= (\alpha, (\mathcal{A} + \mathcal{A})^*\beta) \end{aligned}$$

由对称变换的定义可知, $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ 是对称变换.

其实本质上都是用共轭变换的定义以及实内积的线性性、对称性换来换去换来换去换来换去就换出来最后的结果了.

关于共轭变换的一些性质:

设 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 是 n 维 Euclid 空间 V 的线性变换, $\lambda \in \mathbb{R}$, 则:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*, (\lambda\mathcal{A})^* = \lambda\mathcal{A}^*, (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*, (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

证明方法如上一段话所述.

PROBLEM

13. 设 \mathcal{A} 是 n 维欧氏空间 V 中的一个线性变换, 如果 $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, 即对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有:

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = -(\alpha, \mathcal{A}\beta)$$

则称 \mathcal{A} 是一个反对称变换. 证明:

- (1) \mathcal{A} 是反对称变换的充分必要条件是: \mathcal{A} 在某一组标准正交基下的矩阵是反对称矩阵.
- (2) 如果 M 是反对称变换 \mathcal{A} 的不变子空间, 则 M 的正交补 M^\perp 也是 \mathcal{A} 的不变子空间.

Solution

- (1) 取 V 的一组标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 设线性变换在这组基下的矩阵为 A , 即:

$$\mathcal{A}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)A$$

任取 $\alpha, \beta \in V$, 设 $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$, $\beta = \sum_{i=1}^n y_i \xi_i$, 则它们在这组基下的坐标分别为:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$$

且可以得到, $\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta$ 在这组基下的坐标分别为 AX, AY . 所以:

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (AX)'Y = X'A'Y = -X'AY$$

$$(\alpha, \mathcal{A}\beta) = X'AY$$

比较上面两式可知 \mathcal{A} 是反对称变换. 即: $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = -(\alpha, \mathcal{A}\beta)$ 的充分必要条件是

$$X'A'Y = -X'AY = X'(-A)Y$$

即 $A' = -A$, A 为反对称矩阵.

- (2) 任取 $\alpha \in M^\perp$, 对于 $\forall \beta \in M$, 有 $\mathcal{A}\beta \in M$, 且:

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = -(\alpha, \mathcal{A}\beta) = 0$$

即: $\mathcal{A}\alpha \in M^\perp$. 所以 M^\perp 也是 \mathcal{A} 的不变子空间.

4.3 习题三 线性映射与线性变换

4.4 习题四 线性变换的特征值与特征向量

Chapter 5

双线性函数与二次型

5.1 习题一 双线性函数

5.2 习题二 二次型

5.3 习题三 实与复二次型的分类

5.4 习题四 正定二次型

Part II

下册

Chapter 6

带度量的线性空间

6.1 习题一 欧几里得空间的定义和基本性质

6.2 习题二 欧几里得空间中的特殊线性变换

6.3 习题三 酉空间

Chapter 7

线性变换的 **Jordan** 标准形

7.1 习题一 幂零线性变换的 **Jordan** 标准形

7.2 习题二 一般线性变换的 **Jordan** 标准形

Chapter 8

问题

8.1 插值问题

插值问题

1. 基本概念

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ 且已知它在 x_i 处的函数值 $y_i = f(x_i) (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 即已知函数值表

x_i	x_0	x_1	x_2	\cdots	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	\cdots	y_n

选取较简单的函数 $y = P(x)$ 来近似表示 $y = f(x)$, 使得满足条件:

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

则 $P(x)$ 称为插值函数, $f(x)$ 称为被插值函数, x_0, x_1, \cdots, x_n 称为插值节点.

2. 插值多项式的存在唯一性

当选取插值函数 $P(x)$ 为多项式函数时, 即选取:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

使得满足插值条件

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

这样的问题称为n次多项式插值问题, $y = P_n(x)$ 称为 $y = f(x)$ 的n次插值多项式.

定理: 给定 x_i (两两不等) 以及 $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), n 次插值多项式 $P_n(x)$ 存在且唯一.

请自行证明. (Hint: 待定系数法, Vandermonde行列式).

3. 插值余项

在 $[a, b]$ 上用 $P_n(x)$ 近似表示 $f(x)$, 在插值节点 x_i 处时没有误差的, 但是在其它点 x 处, 一般 $P_n(x)$ 与 $f(x)$ 不相等. 记:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

称 $R_n(x)$ 为插值多项式的余项或截断误差. 引入记号:

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $n+1$ 阶导数存在, 则插值多项式 $P_n(x)$ 的余项为:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (*)$$

其中, $\xi \in (a, b)$ 且依赖于 x , 而 $x \in [a, b]$.

Solution

当 $x = x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 时,

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = 0$$

而 $\omega_{n+1}(x) = 0$. 所以 $(*)$ 成立.

当 $x \neq x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 时, 作辅助函数:

$$\phi(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega_{n+1}(x)} \omega_{n+1}(t)$$

则 $\phi(t)$ 在 $t \in [a, b]$ 上 $n+1$ 阶可导. 易知 $t = x, x_0, \dots, x_n$ 是 $\phi(t)$ 的 $n+2$ 个不同零点

由Rolle定理, 在 $\phi(t)$ 的每两个零点之间至少存在一个 $\phi'(t)$ 的零点.

因此 $\phi'(t)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个互异零点. 反复对 $\phi'(t), \phi''(t), \dots, \phi^n(t)$ 用Rolle定

理, 可以得到: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\phi^{(n+1)}(\xi) = 0$. 由于:

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} P_n(t) = 0, \quad \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \omega_{n+1}(t) = (n+1)!$$

因此:

$$\phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - P_n(x)}{w_{n+1}(x)} \cdot (n+1)! = 0$$

$$\text{即: } R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

4. Lagrange插值函数

(1)拉格朗日插值基函数:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{k \neq i} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

(2)拉格朗日插值函数:

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^n \frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)w'_{n+1}(x_i)} y_i$$

8.2 基与同构

PROBLEM

1. 证明 $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.