高等代数简明教程习题解答

整理: CHEN

2017 年 9 月 9 日

目录

Part I

上册

Chapter 1

代数学的经典课题

1.1 习题一 若干准备知识

1.2 习题二 一元高次代数方程的基础知识

1.3 习题三 线性方程组

Chapter 2

向量空间与矩阵

Chapter 3

行列式

3.1 习题一 n 阶方阵的行列式

3.2 习题二 行列式的初步应用

3.3 习题三 Laplace 展开式与 Binet-Cauchy 公式

Chapter 4

线性空间与线性变换

4.1 习题一 线性空间的基本概念

PROBLEM

7. 在 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间 $\mathbb{Q}(\omega)$ 内判断下列向量组是否线性相关：
(1) $\frac{1}{2}$, 3 , -7 ； (2) 1 , ω , ω^2 , ω^3 , ω^4 ； (3) $\omega, \overline{\omega}, \sqrt{3}\mathrm{i}$.
其中, $\mathbb{Q}(\omega) = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Q}\}$, $w = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

Solution

(1) 线性相关. 因为 $8 \times \frac{1}{2} + 1 \times 3 + 1 \times (-7) = 0$. $r(\frac{1}{2}, 3, -7) = 1$.
(2) 线性相关. 因为 $1 \times 1 + (-1) \times \omega^3 = 0$. $r(1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4) = 2$.
(3) 线性相关. 因为 $1 \times w + (-1) \times \overline{w} + (-1) \times \sqrt{3}i = 0$. $r(\omega, \overline{\omega}, \sqrt{3}\mathrm{i}) = 2.$

PROBLEM

8. 求 $\mathbb{Q}$ 上线性空间 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的维数和一组基.

Solution

注意到对任意 $q \in \mathbb{Q}(\omega)$, 有

$$q = a + b\omega \ (a, b \in \mathbb{Q}),$$

即 $\mathbb{Q}(\omega)$ 中任意向量 q 都可由 $\{1, \omega\}$ 线性表出. 设存在 $k_1, k_2 \in \mathbb{Q}$, 使得

$k_1 1 + k_2\omega = 0$, 则有

$$\begin{cases} k_1 - \dfrac{k_2}{2} = 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}k_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \end{cases}.$$

因此 $1, \omega$ 线性无关. 于是 $\{1, \omega\}$ 是 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的一组基, 并且 $\dim \mathbb{Q}(\omega) = 2$.

PROBLEM

14. 给定数域 K 上的一个 n 阶方阵 $A \neq 0$. 设

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_m \quad (a_0 \neq 0, a_i \in K)$$

是使 $f(A) = 0$ 的最低次多项式. 设 V 是由系数在 K 内的 A 的多项式的全体关于矩阵加法、数乘所组成的 K 上的线性空间, 证明：

$$E,\ A,\ A^2,\ \cdots,\ A^{m-1}$$

是 V 的一组基, 从而 $\dim V = m$. 求 V 中向量

$$(A - aE)^k \quad (a \in K,\ 0 \leq k \leq m)$$

在这组基下的坐标.

Solution

由于 $a_0 \neq 0$, 记 $m(\lambda) = \dfrac{f(\lambda)}{a_0} = \lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \cdots + b_m$, 所以

$$m(A) = A^m + b_1A^{m-1} + \cdots + b_mE = 0 \implies A^m = -b_1A^{m-1} - \cdots - b_{m-1}A - b_mE.$$

继续迭代, 便可用 $E, A, A^2, \cdots, A^{m-1}$ 线性表出 $A^{m+1}, A^{m+2}, \cdots$.
从而 V 中的任一元素都可以表示为

$$c_0E + c_1A + c_2A^2 + \cdots + c_{m-1}A^{m-1}.$$

设 $k_0E + k_1A + k_2A^2 + \cdots + k_{m-1}A^{m-1} = 0$, 则

$$h(\lambda) = k_0 + k_1\lambda + k_2\lambda^2 + \cdots + k_{m-1}\lambda^{m-1}$$

也是 A 的一个零化多项式. 但是注意到 $\deg(h(\lambda)) < \deg(f(\lambda))$, 由 $m(\lambda)$ 的定义可知

$$h(\lambda) = k_0 + k_1\lambda + k_2\lambda^2 + \cdots + k_{m-1}\lambda^{m-1} \equiv 0 \implies k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0,$$

即 $E, A, A^2, \cdots, A^{m-1}$ 线性无关. 从而 $E, A, A^2, \cdots, A^{m-1}$ 是 V 的一组基, 且有 $\dim V = m$.
由于 A 与 aE 可交换, 故

$$(A-aE)^k = A^k + k(-a)A^{k-1} + \cdots + (-aE)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-a)^i A^{k-i}.$$

所以向量 $(A-aE)^k$ $(a \in K,\ 0 \le k \le m)$ 在基 $E,\ A,\ A^2,\ \cdots,\ A^{m-1}$ 下的坐标为

$$\left((-1)^k a^k,\ \cdots,\ (-1)^i C_k^i a^i,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\right) \quad (k=0,1,\cdots,m-1),$$

$$\left(-\frac{a_m}{a_0}+(-1)^m a^m,\ \cdots,\ -\frac{a_i}{a_0}+(-1)^i C_m^i a^i,\ \cdots,\ -\frac{a_1}{a_0}-C_k^1 a\right) \quad (k=m).$$

PROBLEM

15. 接上题, 证明

$$(A-aE)^k \quad (k=0,1,2,\cdots,m-1)$$

也是 V 的一组基. 求两组基之间的过渡矩阵 T:

$$(E, A-aE, \cdots, (A-aE)^{m-1}) = (E, A, \cdots, A^{m-1})T$$

Solution

假设

$$k_0E + k_1(A-aE) + k_2(A-aE)^2 + \cdots + k_{m-1}(A-aE)^{m-1} = 0,$$

则

$$g(\lambda) = k_0 + k_1(\lambda-a) + k_2(\lambda-a)^2 + \cdots + k_{m-1}(\lambda-a)^{m-1}$$

也是 A 的一个零化多项式.
但是注意到 $\deg(g(\lambda)) = m-1 < m = \deg(f(\lambda))$, 所以由 $f(\lambda)$ 的定义可知

$$k_0 + k_1(\lambda-a) + k_2(\lambda-a)^2 + \cdots + k_{m-1}(\lambda-a)^{m-1} \equiv 0.$$

因此 $k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0$, 即

$$E, (A-aE), (A-aE)^2, \cdots, (A-aE)^{m-1}$$

线性无关. 而 $\dim V = m$, 这就证明 $(A-aE)^k$ $(k=0,1,2,\cdots,m-1)$ 也是 V 的一组基.

由习题 4.1.14 的结论可知, 向量 $(A-aE)^k$ 在基 $E,\ A,\ A^2,\ \cdots,\ A^{m-1}$ 下的坐标为

$$\left((-1)^k a^k,\ \cdots,\ (-1)^i C_k^i a^i,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\right).$$

于是过渡矩阵 T 的第 $k+1$ 列 $(k=0,1,2,\cdots,m-1)$ 为

$$(-1)^k a^k,\ \cdots,\ (-1)^i C_k^i a^i,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0.$$

所以可以写出两组基之间的过渡矩阵

$$T=\begin{bmatrix}1 & -a & a^2 & \cdots & (-1)^{m-1}a^{m-1}\\ 0 & 1 & -2a & \cdots & (-1)^{m-2}C_{m-1}^{m-2}a^{m-2}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{m-3}C_{m-1}^{m-3}a^{m-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{m-1}^2a^2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -C_{m-1}^1a\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

PROBLEM

16. 在 K^4 求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵, 并求向量 β 在指定的基下的坐标.

(1) $\varepsilon_1=(1,0,0,0),\quad \eta_1=(2,1,-1,1),$
$\varepsilon_2=(0,1,0,0),\quad \eta_2=(0,3,1,0),$
$\varepsilon_3=(0,0,1,0),\quad \eta_3=(5,3,2,1),$
$\varepsilon_4=(0,0,0,1).\quad \eta_4=(6,6,1,3).$
求 $\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

(3) $\varepsilon_1=(1,1,1,1),\quad \eta_1=(1,1,0,1),$
$\varepsilon_2=(1,1,-1,-1),\quad \eta_2=(2,1,3,1),$
$\varepsilon_3=(1,-1,1,-1),\quad \eta_3=(1,1,0,0),$
$\varepsilon_4=(1,-1,-1,1).\quad \eta_4=(0,1,-1,-1).$
求 $\beta=(1,0,0,-1)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

Solution

(1) 分别以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 和 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 作列向量组排列成两个矩阵 A 及 B：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}.$$

可以看出, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}.$$

设 β 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标为 $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)'$,在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)'$. 注意到 $X=(b_1,b_2,b_3,b_4)$, 所以

$$X=TY\implies Y=T^{-1}X$$

又因为

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{9}&\frac{1}{3}&-1&-\frac{11}{9}\\\frac{1}{27}&\frac{4}{9}&-\frac{1}{3}&\frac{23}{27}\\\frac{1}{3}&0&0&-\frac{2}{3}\\-\frac{7}{27}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}&\frac{26}{27}\end{bmatrix}$$

所以 β 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标为 $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)'$, 其中

$$\begin{cases}y_1&=\frac{4}{9}b_1&+\frac{1}{3}b_2&-b_3&-\frac{11}{9}b_4\\y_2&=\frac{1}{27}b_1&+\frac{4}{9}b_2&-\frac{1}{3}b_3&-\frac{23}{27}b_4\\y_3&=\frac{1}{3}b_1&&&-\frac{2}{3}b_4\\y_4&=-\frac{7}{27}b_1&+\frac{1}{9}b_2&+\frac{1}{3}b_3&+\frac{26}{27}b_4\end{cases}$$

(3) 分别以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 和 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 作列向量组排列成两个矩阵 A,B：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{bmatrix}.$$

对 (A,B) 做初等行变换

$$\begin{aligned}(A,B)&=\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&2&1&0\\1&1&-1&-1&1&1&1&1\\1&-1&1&-1&0&3&0&-1\\1&-1&-1&1&1&1&0&-1\end{array}\right]\\
&\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&2&1&0\\0&0&-2&-2&0&-1&0&1\\0&-2&0&-2&-1&1&-1&-1\\0&-2&-2&0&0&-1&-1&-1\end{array}\right]\\
&\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&2&1&0\\0&2&0&2&1&-1&1&1\\0&2&2&0&0&1&1&1\\0&0&2&2&0&1&0&-1\end{array}\right]\\
&\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&2&1&0\\0&2&0&2&1&-1&1&1\\0&0&2&-2&-1&2&0&0\\0&0&0&4&1&-1&0&-1\end{array}\right]\\
&\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&2&1&0\\0&1&0&0&\frac14&-\frac14&\frac12&\frac34\\0&0&1&0&-\frac14&\frac34&0&-\frac14\\0&0&0&1&\frac14&-\frac14&0&-\frac14\end{array}\right]\\
&\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&\frac34&\frac74&\frac12&-\frac14\\0&1&0&0&\frac14&-\frac14&\frac12&\frac34\\0&0&1&0&-\frac14&\frac34&0&-\frac14\\0&0&0&1&\frac14&-\frac14&0&-\frac14\end{array}\right].\end{aligned}$$

所以, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵为

$$T=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&7&2&-1\\1&-1&2&3\\-1&3&0&-1\\1&-1&0&-1\end{bmatrix}.$$

设 β 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标为 $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)'$, 从而

$$\beta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}\implies\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}.$$

解该非齐次线性方程组可得

$$(y_1,y_2,y_3,y_4)=(-2,-\frac{1}{2},4,-\frac{3}{2}),$$

即

$$\beta=-2\eta_1-\frac{1}{2}\eta_2+4\eta_3-\frac{3}{2}\eta_4.$$

PROBLEM

17. 接上题 (1), 求一非零向量 ξ, 使得它在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 与 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下有相同的坐标.

Solution

设 ξ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 与 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标都为 (z_1,z_2,z_3,z_4), 则

$$\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}\implies(A-B)\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}=0.$$

解上述齐次线性方程组:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以, 取 $\xi = (-a, -a, -a, a)$ $(a \neq 0)$ 即可满足题意.

PROBLEM

18. 考察数域 K 上的线性空间 $K[x]_n$. 给定 K 上 n 个两两不等的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 令

$$f_i(x) = (x-a_1)\cdots\widehat{(x-a_i)}\cdots(x-a_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

（记号 “ ^ ” 表示去掉该项）. 证明: $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 为 $K[x]_n$ 的一组基.

Solution

方法一

设 $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x) = 0$. 假设存在不全为 0 的 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得左式成立.

记 $k_i \neq 0$, 则

$$0 = k_1f(a_i) + k_2f(a_i) + \cdots + k_if(a_i) = k_if_i(a_i) \neq 0,$$

矛盾! 所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, 即 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 线性无关.

又由于 $\dim K_n[x] = n$, 所以 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是 $K_n[x]$ 的一组基.

方法二

对于 $\forall f(x) \in K[x]_n$, 考虑如下插值函数（Lagrange插值函数）:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)l_i(x) \quad \text{其中}, l_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}.$$

引入记号: $\omega_n(x) = (x-a_1)(x-a_1)\cdots(x-a_n)$,则拉格朗日插值多项式的余项为

$$R_{n-1}(x) = f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x) \equiv 0 \quad (\text{因为} f^{(n)}(\xi)) \equiv 0).$$

所以

$$\begin{aligned}
f(x) = L_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{n}\left(f(a_i)\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(a_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}\prod_{j\neq i}(x-a_j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}k_if_i(x),
\end{aligned}$$

其中 $k_i = \dfrac{f(a_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}$, $f_i(x) = \prod\limits_{j\neq i}(x-a_j)$, 即 $\forall f \in K[x]_n$, f 可以由 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 线性表出.
另一方面, $\dim K[x]_n = n$, 由此知 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是 $K[x]_n$ 的一组基.

PROBLEM

18. 证明线性空间定义的八条公理，其中向量加法的交换律可以由其他七条公理推导出来.

Solution

公理 (iv) 保证右逆存在, 即对任一 $\alpha \in V$ 都存在 $\beta \in V$，使 $\alpha+\beta=0$.

$$\begin{aligned}
(\beta+\alpha)+(\beta+\alpha) &= \beta+(\alpha+\beta)+\alpha && \text{(结合律)}\\
&= (\beta+0)+\alpha\\
&= \beta+\alpha. && \text{(右零元)}
\end{aligned}$$

由右消去律得 $\beta+\alpha=0$. 这说明左逆存在且等于右逆. 公理 (iii) 保证右单位元存在, 即存在一个元素 $0 \in V$, 使得对一切 $\alpha \in V$, 有 $\alpha+0=\alpha$. 因为 $0+\alpha=\alpha+(-\alpha)+\alpha=\alpha+0=\alpha$, 所以左单位元存在, 且等于右单位元，从而有左消去律成立.
一方面，

$$(1+1)(\alpha+\beta) = (1+1)\alpha+(1+1)\beta = \alpha+\alpha+\beta+\beta.$$

另一方面，

$$(1+1)(\alpha+\beta) = 1(\alpha+\beta)+1(\alpha+\beta) = \alpha+\beta+\alpha+\beta.$$

再由消去律得 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$. 这就证明了向量加法满足交换律.

4.2 习题二 子空间与商空间

PROBLEM

1. 设 $A \in M_n(K)$.

(1) 证明：与 A 可交换的 n 阶方阵的全体组成 $M_n(K)$ 的一个子空间. 记此子空间为 $C(A)$.

(2) 给定对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix}$$

求 $C(A)$ 的维数和一组基.

Solution

(1) 由于 E 与 A 可交换, 因此 $C(A)$ 非空集.设 $B_1, B_2 \in C(A)$, 则 $B_1A = AB_1, B_2A = AB_2$.

从而:

$$(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A = AB_1 + AB_1 = A(B_1 + B_2)$$

$$(kB_1)A = k(B_1A) = k(AB_1) = A(kB_1), \quad \forall k \in K$$

所以：与 A 可交换的 n 阶方阵的全体组成 $M_n(K)$ 的一个子空间.

(2) 令 $P = (x_{ij})_{n\times n} \in C(A)$, 则：

$$AP(i,j) = ix_{ij} = jx_{ij} = PA(i,j) \quad \Rightarrow \quad (i-j)x_{ij} = 0$$

所以：

$$x_{ij} = 0\ (i \neq j), \quad x_{ij} \in K\ (i = j)$$

即：与 A 可交换的矩阵为任意对角矩阵.

由于任意对角矩阵 $D = \mathrm{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 均可由 $E_{11}, E_{22}, \cdots, E_{nn}$ 线性表出,即：

$$D = \mathrm{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = a_1E_{11} + a_2E_{22} + \cdots + a_nE_{nn}$$

其中, E_{ii} 为 (i,i) 元素为 1 , 其它元素为 0 的 n 级矩阵.
且 $E_{11}, E_{22}, \cdots, E_{nn}$ 线性无关.
所以, $E_{11}, E_{22}, \cdots, E_{nn}$ 是 $C(A)$ 的一组基, $\dim C(A) = n$.

PROBLEM

2. 接上题. 取 $n = 3$, 令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

求 $C(A)$ 的维数和一组基.

Solution

设 $P = (x_{ij})_{3\times 3}$, 则:

$$PA = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + 3x_{13} & x_{12} + x_{13} & 2x_{13} \\ x_{21} + 3x_{23} & x_{22} + x_{23} & 2x_{23} \\ x_{31} + 3x_{33} & x_{32} + x_{33} & 2x_{33} \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 3x_{11} + x_{21} + 2x_{31} & 3x_{12} + x_{22} + 2x_{32} & 3x_{13} + x_{23} + 2x_{33} \end{bmatrix}$$

由于 $PA = AP$, 则:

$$x_{13} = 0,\ x_{23} = 0,\ x_{31}+3x_{33} = 3x_{11}+x_{21}+2x_{31},\ x_{32}+x_{33} = 3x_{12}+x_{22}+2x_{32}$$

整理可得:

$$x_{31} = -3x_{11} + 9x_{12} - x_{21} + 3x_{22} + 3x_{32}, \quad x_{33} = 3x_{12} + x_{22} + x_{32}$$

所以,

$$P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ -3x_{11} + 9x_{12} - x_{21} + 3x_{22} + 3x_{32} & x_{32} & 3x_{12} + x_{22} + x_{32} \end{bmatrix}$$

$$= x_{11}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{bmatrix} + x_{12}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\9&0&3\end{bmatrix} + x_{21}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix} + x_{22}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix} + x_{32}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&1&1\end{bmatrix}$$

又由于

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\9&0&3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&1&1\end{bmatrix}$$

线性无关. 所以, $\dim C(A) = 5$, $C(A)$ 的一组基为：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\9&0&3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&1&1\end{bmatrix}$$

PROBLEM

3. 在习题一第 2 题 (5) 的线性空间中给定子集 $M = \{(a, 0)|a \in \mathbb{R}\}$, $N = \{(0, b)|b \in \mathbb{R}\}$. 问 M , N 是否为子空间?全体实数的二元有序数组所成的集合关于下面的定义的运算：

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1a_2)$$

$$k \circ (a, b) = \left[ka, kb + \frac{k(k-1)}{2}a^2\right]$$

Solution

(1) $M = \{(a, 0)|a \in \mathbb{R}\}$ 不是子空间.
因为取 $(a_1, 0), (a_2, 0) \in M$ 且满足 $a_1a_2 \neq 0$,则：

$$(a_1, 0) \oplus (a_2, 0) = (a_1 + a_2, a_1a_2) \notin M$$

即对加法运算不封闭. 所以 M 不是子空间.

(2) $N = \{(0, b)|b \in \mathbb{R}\}$ 是子空间.
显然, N 非空集. 任取 $(0, b_1), (0, b_2) \in N$, 有：

$$(0, b_1) \oplus (0, b_2) = (0, b_1 + b_2) \in N$$

$$k \circ (0, b) = [0, kb], \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

即对加法、数乘运算封闭. 所以 N 是子空间.

PROBLEM

4. 在数域 K 上的 n 维向量空间 K^n 中考察坐标全为有理数的向量所成的子集

$$M = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in K^n | a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

问 M 是否为 K^n 的子空间.

Solution

(1)当 $K = \mathbb{Q}$ 时, M 是 K^n 的子空间.显然 M 非空集.
任取 $(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_n^{(1)})$, $(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \cdots, a_n^{(2)}) \in K^n, a_i^{(j)} \in Q$,有:

$$(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_n^{(1)}) + (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \cdots, a_n^{(2)}) \in M$$

$$k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) \in M, \quad \forall k \in K = \mathbb{Q}$$

即对加法运算和数乘运算封闭. 所以 M 是 K^n 的子空间.

(2) 当 $\mathbb{Q} \subsetneq K$ 时, N 不是 K^n 的子空间.取 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{Q}, k \in K \setminus \mathbb{Q}$, 则:

$$k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) \notin M, \quad (\text{因为 } ka_i \notin \mathbb{Q})$$

即对数乘运算不封闭. 所以 M 不是 K^n 的子空间.

PROBLEM

5. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看做有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间(加法为复数加法,与 $\mathbb{Q}$ 中元素的数乘为有理数与复数的乘法), 问全体实数所成的子集 $\mathbb{R}$ 是否是一个子空间?

Solution

显然, $\mathbb{R}$ 不是空集. 任取 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, 则:

$$a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$$

$$ka \in R, \quad k \in \mathbb{Q}$$

所以, 全体实数所成的子集 $\mathbb{R}$ 是该线性空间的一个子空间.

PROBLEM

6. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看做数域 $\mathbb{Q}(i)$ 上的线性空间(加法为复数加法,数乘为复数乘法). 问全体实数所成的子集 $\mathbb{R}$ 是否是一个子空间?

Solution

全体实数所成的子集 $\mathbb{R}$ 不是一个子空间. 任取 $a \in \mathbb{R}$, 有

$$(x+iy)a = ax + i(ay), \quad x+iy \in \mathbb{Q}(i)$$

当 $ay \neq 0$ 时, $(x+iy)a \notin R$. 所以全体实数所成的子集 $\mathbb{R}$ 不是一个子空间.

PROBLEM

10. 证明：有限维向量空间 V 上的任一子空间 M 都可以看作是 V 内一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间.

Solution

由于子空间 M 也是线性空间, 而线性空间必有基.
记 $\dim M = s \leq \dim V$, 可以找到 M 中的一组向量:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in M \subset V$$

它们是线性空间 M 的一组基. 记 $M_1 = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$.
任取 $\beta \in M$, 由基的定义可知, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出. $\Rightarrow \beta \in M_1$

$$\Rightarrow M \subset M_1$$

任取 $\gamma \in M_1$, 则 $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$

由于线性空间 M 对加法和数乘运算封闭,则: $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \in M$

$$\Rightarrow M_1 \subset M$$

即：

$$M_1 = M$$

综上所述:有限维向量空间 V 上的任一子空间 M 都可以看作是 V 内一个向量组.

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间.

PROBLEM

14. 求下列向量 α_i 所生成的子空间与下列由 β_i 生成的子空间的交与和的维数和一组基:

(3) $\alpha_1 = (1, 2, -1, -2),\ \alpha_2 = (3, 1, 1, 1),\ \alpha_3 = (-1, 0, 1, -1)$

$\beta_1 = (2, 5, -6, -5),\ \beta_2 = (-1, 2, -7, 3)$

Solution

(i) 求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2)$ 的维数和一组基. 因为

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$$

只要求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 的一个极大线性无关组即可.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & \alpha_2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & \alpha_3 \\ 2 & 5 & -6 & -5 & \beta_1 \\ -1 & 2 & -7 & 3 & \beta_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & -5 & 4 & 7 & \alpha_2 - 3\alpha_1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 4 & -8 & 1 & \beta_2 + \alpha_1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 & -5 & 4 & 7 & \alpha_2 - 3\alpha_1 \\ 0 & 4 & -8 & 1 & \beta_2 + \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 5\alpha_1 + \alpha_3 - 2\beta_1 \\ 0 & 0 & -16 & 2 & -13\alpha_1 + \alpha_2 + 5\beta_1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 9\alpha_1 - 4\beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 5\alpha_1 + \alpha_3 - 2\beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4\alpha_1 - \alpha_3 - 2\beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - \beta_1 \end{bmatrix}$$

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 的秩为4. 又因为

$$-3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-\beta_1=0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1=-3\alpha_1+2\alpha_3+\alpha_2$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$ 是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+L(\beta_1,\beta_2)$ 的一组基, 其维数为4.

(ii) 求 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的维数和一组基. 因为

$$\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3,\quad \dim L(\beta_1,\beta_2)=2$$

从而: $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)=1$
从(i)中可知:

$$-3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-\beta_1=0 \quad \Rightarrow \quad -3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=\beta_1\in L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$$

而 $\beta_1=(2,5,-6,-5)\neq(0,0,0,0)$, 所以 β_1 是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的一组基.

PROBLEM

16. 设 M 是线性空间 $M_n(K)$ 内全体对称矩阵所成的子空间, N 是由全体反对称矩阵所成的子空间. 证明:

$$M_n(K)=M\oplus N$$

Solution

任取 $A\in M_n(K)$, 有:

$$(A+A')'=A'+A,\quad (A-A')'=A'-A=-(A-A)'$$

即: $A+A'\in M$, $A-A'\in N$. 又因为:

$$A=\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}$$

所以: $A\in M+N$. 从而 $M_n(K)\subset M+N$. 而 $M+N\subset M_n(K)$, 所以 $M_n(K)=M+N$.

再证明 $M_n(K) = M \oplus N$, 只需要证明 $M \cap N = 0$.任取 $B \in M \cap N$, 则:

$$B' = B,\ \ B' = -B\ \ \Rightarrow -B = B\ \ \Rightarrow B = 0$$

从而 $M \cap N = 0$. 综上: $M_n(K) = M \oplus N$.

PROBLEM

17. 在线性空间 $M_n(K)$ 中,命 M , N 分别表示全体上三角、下三角矩阵所成的子空间. 问是否有 $M_n(K) = M \oplus N$?为什么?

Solution

$M_n(K)$ 不是 M 与 N 的直和. 因为对于任意对角矩阵 $D = \mathrm{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 都有:

$$D \in M \cap N$$

当 $a_1a_2 \cdots a_n \neq 0$ 时, $0 \neq D \in M \cap N$.所以 $M_n(K) \neq M \oplus N$.

PROBLEM

18. 设 M_1 是齐次方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

的解空间, 而 M_2 是齐次线性方程组

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

的解空间. 证明: $K^n = M_1 \oplus M_2$.

Solution

任取 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in K^n$, 下证明: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in M_1,\ \alpha_2 \in M_2$
考虑到 M_1, M_2 中向量坐标的特点, 设 $\alpha_1 = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $\alpha_2 = (c, c, \cdots, c)$. 则:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1 + c, b_2 + c, \cdots, b_n + c)\ \text{ 且 }\ b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0$$

即:

$$b_1+b_2+\cdots+b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n-nc=0 \ \Rightarrow \ c=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

即对于 $\forall\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in K^n$, 可以找到

$$\alpha_1=\left(a_1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n},a_2-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n},\cdots,a_n-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)\in M_1,\ \alpha_2=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n},\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n},\cdots,\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)\in M_2$$

使得 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$.
从而 $K^n\subset M_1+M_2$. 显然, $M_1+M_2\subset K^n$, 所以 $K^n=M_1+M_2$.
下证明: $M_1\cap M_2=0$. 任取 $\beta=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in M_1\cap M_2$, 有:

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=0,\ \ d_1=d_2=\cdots=d_n$$

解得: $d_1=d_2=\cdots=d_n$. 即: $M_1\cap M_2=0$.
综上所述: $K^n=M_1\oplus M_2$.

PROBLEM

21. 设 M,N 是数域 K 上线性空间 V 的两个子空间且 $M\subseteq N$. 设 M 的另一个补空间为 L , 即 $V=M\oplus L$, 证明： $N=M\oplus(N\bigcap L)$.

Solution

先证明: $N=M+(N\bigcap L)=N\cap M+N\cap L$. 由于 $V=M\oplus L$, 所以 $N\subset M+L$, 从而:

$$N=N\cap(M+L)$$

任取 $\alpha\in N$, 由于 $N\subset M+L$, 所以 $\alpha\in M+L$. 从而:

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_1\in M,\ \ \alpha_2\in L$$

由于 $\alpha_1\in M\subset N$, 所以 $\alpha_2=\alpha-\alpha_1\in N$. 即: $\alpha_2\in N\cap L$
所以 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in(N\cap M)+(N\cap L)$. 进而: $N\subset(N\cap M)+(N\cap L)$
任取 $\beta_1\in(N\cap M)\subset N$, $\beta_2\in(N\cap L)\subset N$, 由线性空间对加法封闭可知 $\beta_1+\beta_2\in N$

所以 $(N \cap M)+(N \cap L) \subset N$.
综上所述, $N=(N \cap M)+(N \cap L)=M+(N \cap L)$
另一方面,

$$M \cap (N \cap L)=N \cap (M \cap L)=N \cap 0=0 \quad (\text{因为} M+L \text{是直和})$$

所以 $N=M \oplus (N \cap L)$

PROBLEM

23. 设 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ 为数域 K 上线性空间 V 的子空间. 证明和 $\sum\limits_{i=1}^{k} M_i$ 为直和的充分必要条件是

$$M_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} M_j\right)=0 \quad (i=2,3,\cdots,k)$$

Solution

必要性:
设 $\sum\limits_{i=1}^{k} M_i$ 是直和, 则:

$$M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j\right)=0 \quad i=\{1,2,\cdots,k\}$$

注意到:

$$M_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} M_j\right) \subset M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j\right)=0 \quad (i=2,3,\cdots,k)$$

从而: $M_i \cap \left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} M_j\right)=0,\ i=(2,3,\cdots,k)$.

充分性:
设 $\alpha_i \in M_i\ (i=1,2,\cdots,k)$, 使得:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=0 \in \sum_{i=1}^{k} M_i$$

从而, $\alpha_k = -\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{k-1} \in M_k \cap \left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} M_i\right)$.

又因为 $M_k \cap \left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} M_i\right) = 0$, 所以, $\alpha_k = 0$. 从而, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} = 0$.

继续做上述步骤, 可以得到: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. 即: $\sum\limits_{i=1}^{k} M_i$ 中 0 向量表示方法唯一.

所以, $\sum\limits_{i=1}^{k} M_i$ 是直和.

PROBLEM

26

令 M 为 $M_n(K)$ 内全体反对称矩阵所成的子空间. 试求 $M_n(K)/M$ 的维数和一组基.

Solution

由于 $\dim M_n(K) = n^2$, $\dim M = \dfrac{n(n-1)}{2}$, 所以:

$$\dim\left(M_n(K)/M\right) = \dim M_n(k) - \dim M = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

取 M 的一组基 $E_{ij} - E_{ji}\ \ (1 \le i < j \le n)$, 将它扩充为 $M_n(K)$ 中的向量组:

$$E_{ij} - E_{ji},\ \ E_{ji},\ \ E_{kk} \qquad (1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n) \quad (*)$$

下证明该向量组是 $M_n(K)$ 的一组基. 设:

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \left[k_{ij}(E_{ij} - E_{ji}) + k_{ji}E_{ji}\right] + \sum_{s=1}^{n} k_s E_{ss} = 0$$

可得到如下矩阵:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} - k_{12} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} - k_{13} & k_{32} - k_{23} & k_{33} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} - k_{1n} & k_{n2} - k_{2n} & k_{n3} - k_{3n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

从而 $k_{ij} = 0,\ \ (1 \le i, j \le n)$. 从而向量组 $(*)$ 线性无关.

而 $\dim M_n(K) = n^2$, 所以 $(*)$ 是 $M_n(K)$ 的一组基.
对于 $M_n(K)/M$ 中任意向量 $A+M$,有:

$$A+M = \sum_{1\le i<j\le n}[c_{ij}(E_{ij}-Eji)+c_{ji}E_{ji}]+\sum_{s=1}^{n}c_{ss}E_{ss}+M = \sum_{1\le i\le j\le n}c_{ji}E_{ji}+M = \sum_{1\le i\le j\le n}c_{ji}(E_{ji}+M)$$

而 $\dim(M_n(K)/M) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, 所以 $E_{ji}+M \quad (1\le i\le j\le n)$ 是 $M_n(K)/M$ 的一组基.

PROBLEM

27. 设 M 为线性空间 V 的一个子空间. 在 M 内取定一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$, 用两种方式扩充为 V 的基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$$

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$$

这两组基之间的过渡矩阵为 T , 即

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n)T$$

其中,

$$T = \begin{bmatrix} E_r & * \\ 0 & T_0 \end{bmatrix}$$

证明: V/M 内两组基

$$\overline{\varepsilon}_{r+1} = \varepsilon_{r+1}+M,\ \overline{\varepsilon}_{r+2} = \varepsilon_{r+2}+M,\ \cdots,\ \overline{\varepsilon}_n = \varepsilon_n+M,$$

$$\overline{\eta}_{r+1} = \eta_{r+1}+M,\ \overline{\eta}_{r+2} = \eta_{r+2}+M,\ \cdots,\ \overline{\eta}_n = \eta_n+M,$$

之间的过渡矩阵为:

$$(\overline{\eta}_{r+1},\cdots,\overline{\eta}_n) = (\overline{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\overline{\varepsilon}_n)T_0$$

Solution

由题目条件可知:

$$\eta_i = t_{1,i}\varepsilon_1 + t_{2,i}\varepsilon_2 + \cdots + t_{n.i}\varepsilon_n \quad (i = r+1, r+2, \cdots, n)$$

其中, $t_{i,j}$ 表示矩阵 T 的第 i 行第 j 列元素. 从而:

$$\overline{\eta}_i = \eta_i + M = t_{1,i}\varepsilon_1 + t_{2,i}\varepsilon_2 + \cdots + t_{n.i}\varepsilon_n + M = \sum_{j=r+1}^{n} t_{j,i}\varepsilon_j + M = \sum_{j=r+1}^{n} t_{j,i}(\varepsilon_j + M) = \sum_{j=r+1}^{n} t_{j,i}\overline{\varepsilon}_i.$$

即 T_0 是一个 $(n-r)\times(n-r)$ 矩阵, 它为基 $\overline{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\overline{\varepsilon}_n$ 到基 $,\overline{\eta}_{r+1},\cdots,\overline{\eta}_n$ 的
过渡矩阵, 即:

$$(\overline{\eta}_{r+1},\cdots,\overline{\eta}_n) = (\overline{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\overline{\varepsilon}_n)T_0$$

PROBLEM

4.3.1
设 m,n 为正整数且 $m<n$. 定义 K^n 到 K^m 的映射 f 如下:若 $\alpha = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 则令

$$f(\alpha) = (a_1,a_2,\cdots,a_m)\in K^m.$$

又定义 K^m 到 K^n 的映射 g 如下:若 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$, 则令

$$g(\alpha) = (a_1,a_2,\cdots,a_m,0,\cdots,0)\in K^n$$

证明 f,g 均为线性映射, 并求 $mathrmKer\ f$, Im f , Coker f , $mathrmKer\ g$, Im g , Coker g .

Solution

(1) 对于 $\forall\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in K^n, k_1,k_2\in K$, 有:

$$\begin{aligned} f(k_1\alpha+k_2\beta) &= (k_1a_1+k_2b_1,k_1a_2+k_2b_2,\cdots,k_1a_m+k_2b_m) \\ &= k_1(a_1,a_2,\cdots,a_m)+k_2(b_1,b_2,\cdots,b_m) \\ &= k_1f(\alpha)+k_2f(\beta) \end{aligned}$$

所以 f 为线性映射. 下求 $mathrmKer\ f$, Im f , Coker f .

$$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_m=0$$

所以 $mathrmKer\ f = \{(0,0,\cdots,0,a_{m+1},\cdots,a_n)|a_{m+i}\in K\}$;
并且Im $f=K^m$, Coker f = V /Im $f=\{0+K^m\}$.

(2)对于映射 g 的证明求解与(1)类似, 便不赘述.

$\mathrm{Ker}g=\{0\}$, $\mathrm{Im}g=\{(a_1,\cdots,a_m,0,\cdots,0)|a_i\in K\}$, $\mathrm{Coker}g=L\{\varepsilon_{m+1}+\mathrm{Im}g,\cdots,\varepsilon_n+\mathrm{Im}g\}$

其中, ε_i 是 K^n 中的坐标向量.

PROBLEM

4.3.5

将数域 $\mathbb{Q}(i)$ 与 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 都看作 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间(加法为复数加法, 数乘为有理数与复数的乘法), 找出它们之间的一个同构映射.

Solution

注意到 $\mathbb{Q}(i)=a+bi$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=a+b\sqrt{2}$, 其中, $a,b\in\mathbb{Q}$.建立如下映射 τ :

$$\begin{array}{cccc}\tau: & \mathbb{Q}(i) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ & a+bi & \longmapsto & a+b\sqrt{2}\end{array}$$

下证明, τ 为 $\mathbb{Q}(i)$ 到 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的同构映射. 任取 $a+bi,c+di\in\mathbb{Q}(i)$, 有

$$\begin{aligned}\tau((a+bi)+(c+di)) &= \tau((a+c)+(b+d)i)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2} \\ &= (a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2}) \\ &= \tau(a+bi)+\tau(c+di)\end{aligned}$$

任取 $a+bi\in\mathbb{Q}(i),k\in Q$, 有

$$\tau(k(a+bi))=\tau(ka+kbi)=ka+kb\sqrt{2}=k(a+b\sqrt{2})=k\tau(a+bi)$$

所以 τ 是线性映射. τ 显然是一个双射, 所以 τ 是 $\mathbb{Q}(i)$ 到 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的同构映射.

PROBLEM

4.3.6

定义 K^4 到 K^3 的映射

$$f\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+x_2+2x_3+x_4\\-2x_2+x_3\\-x_1-x_2+3x_3+x_4\end{bmatrix}$$

证明 f 是一个线性映射, 求 $mathrmKer\ f$, $\mathrm{Im}\ f$, $\mathrm{Coker}\ f$. 在 K^4 内取一组基

$$\varepsilon_1=(1,0,1,1)',\quad \varepsilon_2=(0,1,0,1)',\quad \varepsilon_3=(0,0,1,0)',\quad \varepsilon_4=(0,0,2,1)'$$

又在 K^3 内取定一组基

$$\eta_1=(1,1,1)',\quad \eta_2=(1,0,-1)',\quad \eta_3=(0,1,0)'$$

求 f 在给定基下的矩阵.

PROBLEM

Solution

对于 $\forall X=(x_1,x_2,x_3,x_4)'\in K^4$

$$f\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+x_2+2x_3+x_4\\-2x_2+x_3\\-x_1-x_2+3x_3+x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&2&1\\0&-2&1&0\\-1&-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=AX$$

所以对于 $\forall X,Y\in K^4,\forall k_1,k_2\in K$, 有:

$$f(k_1X+k_2Y)=A(k_1X+k_2Y)=k_1AX+k_2AY=k_1f(X)+k_2f(Y)$$

所以, f 是 K^4 到 K^3 的线性映射.根据线性映射的核与象的定义, $mathrmKer\ f$ 与$\mathrm{Im}\ f$ 实际上分别为为四元齐次方程组 $AX=0$ 的解空间与矩阵A的列空间, 于是:

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&2&1\\0&-2&1&0\\-1&-1&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{5}{2}&-1\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

于是 $AX=0$ 的一个基础解系为:

$$\alpha_1=(5,1,2,0)',\quad \alpha_2=(1,0,0,1)'$$

从而 $mathrmKer\ f=L(\alpha_1,\alpha_2)$. 同时, 从 A 的约化阶梯型矩阵可以看出, A 的列向量组的一个极大线性无关组是:

$$\beta_1=(1,0,-1)',\quad \beta_2=(1,-2,-1)'$$

所以, $\operatorname{Im} f=L(\beta_1,\beta_2)$. 考虑 $(\beta_1,\beta_2)'$

$$(\beta_1,\beta_2)'=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\textit{ÆILb}}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\end{bmatrix}$$

所以, 可以添加 $\beta_3=(0,0,1)'$ 进入 $\{\beta_1,\beta_2\}$ 中, 使得 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 成为 K^3 的一组基.

从而, Coker $f=L(\beta_3+\mathrm{Im}f)$

又由于:

$$f\varepsilon_1=(2,1,3)',\quad f\varepsilon_2=(2,-2,0)',\quad f\varepsilon_3=(2,1,3)',\quad f\varepsilon_4=(5,2,7)'$$

并且,

$$f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)T$$

从而 f 在 K^4 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 和 K^3 的基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵 T 为:

$$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^{-1}f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&2&2&5\\1&-2&1&2\\3&0&3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&1&\frac{5}{2}&6\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&-1\\-\frac{3}{2}&-3&-\frac{3}{2}&-4\end{bmatrix}$$

PROBLEM 4.3.7

定义 K^3 到 K^4 的映射 f 如下:

$$f\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\-x_1+x_2+x_3\\2x_1+x_3\\x_2+2x_3\end{bmatrix}$$

(1) 证明 f 是一个线性映射, 求 $mathrmKer\ f$, Im f , Coker f .
(2) 在 K^3 内取定一组基

$$\eta_1=(1,1,1),\quad \eta_2=(1,0,-1),\quad \eta_3=(0,1,1)$$

在 K^4 内取一组基

$$\varepsilon_1=(1,0,1,1),\ \ \varepsilon_2=(0,1,0,1),\ \ \varepsilon_3=(0,0,1,0),\ \ \varepsilon_4=(0,0,2,1)$$

求 f 在给定基下的矩阵.

PROBLEM

Solution

(1)对于 $\forall X=(x_1,x_2,x_3)\in K^3$, 有:

$$f\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\-x_1+x_2+x_3\\2x_1+x_3\\x_2+2x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=AX$$

对于 $\forall X,Y\in K^3$, $k_1,k_2\in K$, 有:

$$f(k_1X+k_2Y)=A(k_1X+k_2Y)=k_1AX+k_2AY=k_1f(X)+k_2f(Y)$$

所以, f 是 K^3 到 K^4 的一个线性映射.根据线性映射的核与象的定义, $mathrmKer$ f 与Im f 实际上分别为为三元齐次方程组 $AX=0$ 的解空间与矩阵A的列空间, 于是:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

于是, $mathrmKer\ f=0$, 从 A 的约化阶梯型矩阵可以看出, A 的列向量的一个极大线性无关组为:

$$\alpha_1=(1,-1,2,0),\quad \alpha_2=(0,1,0,1),\quad \alpha_3=(1,1,1,2)$$

所以,$\mathrm{Im}\ f=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 考虑 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)'$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)'=\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\0&1&0&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{ÆILb}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

所以可以添加 $\alpha_4=(0,0,0,1)$ 进入 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, 使得 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 成为 K^4 的一组基.
从而, Coker $f=L(\alpha_4+\mathrm{Im}f)$.

(2)注意到:

$$f\eta_1=(2,1,3,3)',\quad f\eta_2=(0,-2,1,-2)',\quad f\eta_3=(0,1,0,1)$$

并且

$$f(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)T$$

从而, f 在 K^3 的基 η_1,η_2,η_3 和 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵 T 为:

$$T=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)^{-1}f(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&2\\1&1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-2&1\\3&1&0\\3&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-2&1\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

PROBLEM

4.3.9

判断下面定义的变换哪些是线性的, 哪些则不是:

(1)在线性空间 V 中, $\mathcal{A}\xi=\xi+\alpha$, 其中 $\alpha\in V$ 是一个固定的向量;

(2)在线性空间 V 中, 令 $\mathcal{A}\xi=\alpha$, 其中 $\alpha\in V$ 是一个固定的向量;

(3)在 K^3 中, 令 $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$;

(4)在 K^3 中, 令 $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$;

PROBLEM

(5)在 $K[x]$ 中, 令 $\mathcal{A}f(x)=f(x+1)$;
(6)在 $K[x]$ 中, 令 $\mathcal{A}f(x)=f(x_0)$, 其中 $x_0\in K$ 是一个固定的数;
(7)把复数域看做复数域上的线性空间, 令 $\mathcal{A}\xi=\overline{\xi}$;
(8)在 $M_n(K)$ 中, 令 $\mathcal{A}(X)=BXC$, 其中 B,C 是 K 上两个固定的 n 阶方阵.

Solution

(1) 当 $\alpha\neq 0$ 时, 不是线性的, 因为

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\alpha$$

$$k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2=k_1(\xi_1+\alpha)+k_2(\xi_2+\alpha)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)\neq k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2$$

当 $\alpha=0$ 时, 是线性的, 因为

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=k_1\xi_1+k_2\xi_2$$

$$k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2=k_1\xi_1+k_2\xi_2$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2$$

(2) 当 $\alpha\neq 0$ 时, 不是线性的, 因为

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=\alpha$$

$$k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2=k_1\alpha+k_2\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)\neq k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2$$

当 $\alpha=0$ 时, 是线性的, 因为

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=0$$

$$k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2=0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2$$

(3) 不是线性的, 取 $\alpha_1=(1,0,1)',\alpha_2=(2,0,3)'$, 则 $\alpha_1+\alpha_2=(3,0,4)'$

$$\mathcal{A}\alpha_1=(1,1,1),\quad \mathcal{A}\alpha_2=(4,2,9),\quad \mathcal{A}(\alpha_1+\alpha_2)=(9,3,16)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{A}(\alpha_1+\alpha_2) \neq \mathcal{A}\alpha_1 + \mathcal{A}\alpha_2$$

(4) 是线性的, 因为:

$$\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) = (2x_1-x_2, x_2+x_3, x_1)' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

对于 $\forall \xi_1, \xi_2 \in K^3$, $\forall k_1, k_2 \in K$, 有

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = k_1A\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2$$

所以映射 $\mathcal{A}$ 是线性的.

(5)是线性的, 因为对于 $\forall f, g \in K[x]$, $\forall k \in K$, 有:

$$\mathcal{A}(f(x)+g(x)) = (f+g)(x+1) = f(x+1) + g(x+1) = \mathcal{A}f(x) + \mathcal{A}g(x)$$

$$\mathcal{A}(kf(x)) = (kf)(x+1) = kf(x+1) = k\mathcal{A}f(x)$$

所以, 映射 $\mathcal{A}$ 是线性的.

(6)是线性的, 因为对于 $\forall f, g \in K[x]$, $\forall k \in K$, 有:

$$\mathcal{A}(f(x)+g(x)) = (f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = \mathcal{A}f(x) + \mathcal{A}g(x)$$

$$\mathcal{A}(kf(x)) = (kf)(x_0) = kf(x_0) = k\mathcal{A}f(x)$$

所以, 映射 $\mathcal{A}$ 是线性的.

(7)不是线性的, 因为:

$$\mathcal{A}(k\xi) = \overline{k\xi} = \overline{k\xi}$$

当 $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 时, $\mathcal{A}(k\xi) \neq k\mathcal{A}\xi$.

(8)是线性的, 因为 $\forall X_1, X_2 \in M_n(K)$, $\forall k_1, k_2 \in K$, 有

$$\mathcal{A}(k_1X_1+k_2X_2) = B(k_1X_1+k_2X_2)C = k_1BX_1C+k_2BX_2C = k_1\mathcal{A}(X_1)+k_2\mathcal{A}(X_2)$$

PROBLEM

4.3.10

在实数域上线性空间 $D_0(a,b)$ ($D_0(a,b)$ 是区间 (a,b) 内全体任意次可微的实函数 $f(x)$ 所成的集合)中定义变换如下

$$\mathcal{A}f(x)=\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}+x\cdot\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}+\sin x\cdot f(x)$$

证明 $\mathcal{A}$ 是一个线性变换. 定义

$$\mathcal{B}f(x)=\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right]^2+x\cdot\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}+\sin x\cdot f(x)$$

举例说明 $\mathcal{B}$ 不是线性变换.

Solution

(1) 对于 $\forall f,g\in D_0(a,b)$, $\forall k_1,k_2\in\mathbb{R}$, 有:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(k_1f(x)+k_2g(x))&=\frac{\mathrm{d}^2(k_1f(x)+k_2g(x))}{\mathrm{d}x^2}+x\cdot\frac{\mathrm{d}k_1(f(x)+k_2g(x))}{\mathrm{d}x}+\sin x\cdot(k_1f(x)+k_2g(x)\\&=k_1(\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}+x\cdot\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}+\sin x\cdot f(x))+k_2(\frac{\mathrm{d}^2g(x)}{\mathrm{d}x^2}+x\cdot\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}+\sin x\cdot g(x))\\&=k_1\mathcal{A}f(x)+k_2\mathcal{A}g(x)\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{A}$ 是一个线性变换.

(2) 取 $f(x)=x^3,g(x)=x^2$, 则:

$$\mathcal{B}f(x)=\left[\frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}x^2}\right]^2+x\cdot\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x}+\sin x\cdot x^3=3x^3+36x^2+x^3\sin x$$

$$\mathcal{B}g(x)=\left[\frac{\mathrm{d}^2x^2}{\mathrm{d}x^2}\right]^2+x\cdot\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}+\sin x\cdot x^2=2x^2+x^2\sin x+4$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(f(x)+g(x))&=\left[\frac{\mathrm{d}^2(x^3+x^2)}{\mathrm{d}x^2}\right]^2+x\cdot\frac{\mathrm{d}(x^3+x^2)}{\mathrm{d}x}+\sin x\cdot(x^3+x^2)=3x^3+38x^2+24x+4+(x^3+x^2)\sin x\\&\implies\mathcal{B}(f(x)+g(x))\neq\mathcal{B}f(x)+\mathcal{B}g(x)\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{B}$ 不是线性变换.

PROBLEM

4.3.11

在实数域上线性空间 $C[a,b]$ 中定义变换如下

$$\mathcal{A}f(x)=\int_a^x K(t)f(t)dt$$

其中, $K(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个连续函数. 证明 $\mathcal{A}$ 是一个线性变换.

Solution

对于 $\forall f(x),g(x)\in C[a,b]$, $\forall k_1,k_2\in R$, 有:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(k_1f(x)+k_2g(x))&=\int_a^x K(t)(k_1f(t)+k_2g(t))dt\\&=k_1\int_a^x K(t)f(t)dt+k_2\int_a^x K(t)g(t)dt=k_1\mathcal{A}f(x)+k_2\mathcal{A}g(x)\end{aligned}$$

又由于被积函数 $K(t)f(t)$ 连续, 所以变上限函数 $\mathcal{A}f(x)=\int_a^x K(t)f(t)dt$ 也连续,

即: $\mathcal{A}f(x)\in C[a,b]$.从而 $\mathcal{A}$ 是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 上的一个映射.

综上, $\mathcal{A}$ 是 $C[a,b]$ 上一个线性变换.

PROBLEM

4.3.13

在 $K[x]$ 中定义

$$\mathcal{A}f(x)=f'(x)\qquad \mathcal{B}f(x)=xf(x)$$

证明 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 是两个线性变换, 且 $\mathcal{AB}-\mathcal{BA}=\mathcal{E}$.

Solution

对于 $\forall f(x),g(x)\in K[x]$, $\forall k_1,k_2\in K$, 有

$$\mathcal{A}(k_1f(x)+k_2g(x))=(k_1f(x)+k_2g(x))'=k_1f'(x)+k_2g'(x)=k_1\mathcal{A}f(x)+k_2\mathcal{A}g(x)$$

$$\mathcal{B}(k_1f(x)+k_2g(x))=x(k_1f(x)+k_2g(x))=k_1xf(x)+k_2xg(x)=k_1\mathcal{B}f(x)+k_2\mathcal{B}g(x)$$

而 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 都是 $K[x]$ 到 $K[x]$ 的映射. 所以 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 是两个线性变换.

任取 $h(x) \in K[x]$, 有:

$$\begin{aligned}(\mathcal{AB}-\mathcal{BA})(h(x)) &= \mathcal{AB}(h(x))-\mathcal{BA}(h(x)) \\ &= \mathcal{A}(xh(x))-\mathcal{B}(h'(x)) \\ &= h(x)+xh'(x)-xh'(x) \\ &= h(x)\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{AB}-\mathcal{BA}=\mathcal{E}$.

PROBLEM

4.3.20

求下列线性变换在指定基下的坐标:

(5)已知 K^3 中线性变换 $\mathcal{A}$ 在基

$$\eta_1=(-1,1,1),\quad \eta_2=(1,0,-1),\quad \eta_3=(0,1,1)$$

下的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

求 $\mathcal{A}$ 在基

$$\varepsilon_1=(1,0,0),\quad \varepsilon_2=(0,1,0),\quad \varepsilon_3=(0,0,1)$$

下的矩阵.

Solution

设基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 下的过渡矩阵为T, 则

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)T$$

于是, $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 B 为:

$$B=T^{-1}AT$$

而

$$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^{-1}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

所以,

$$B=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{bmatrix}$$

(6)在 K^3 中定义线性变换 $\mathcal{A}$ 如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\eta_1&=(-5,0,3)\,, & \eta_1&=(-1,0,2)\\ \mathcal{A}\eta_2&=(0,-1,6)\,, & \eta_2&=(0,1,1)\\ \mathcal{A}\eta_3&=(-5,-1,9)\,, & \eta_3&=(3,-1,0)\end{aligned}$$

PROBLEM

求 $\mathcal{A}$ 在基

$$\varepsilon_1=(1,0,0),\quad \varepsilon_2=(0,1,0),\quad \varepsilon_3=(0,0,1)$$

下的矩阵.

Solution

首先, 用基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性表出 η_1,η_2,η_3 :

$$\eta_1=-\varepsilon_1+2\varepsilon_3,\quad \eta_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3,\quad \eta_3=3\varepsilon_1-\varepsilon_2$$

从而

$$\mathcal{A}\eta_1=\mathcal{A}(-\varepsilon_1+2\varepsilon_3)=-\mathcal{A}\varepsilon_1+2\mathcal{A}\varepsilon_3=(-5,0,3)$$

$$\mathcal{A}\eta_2=\mathcal{A}(\varepsilon_2+\varepsilon_3)=\mathcal{A}\varepsilon_2+\mathcal{A}\varepsilon_3=(0,-1,6)$$

$$\mathcal{A}\eta_3=\mathcal{A}(3\varepsilon_1-\varepsilon_2)=3\mathcal{A}\varepsilon_1-\mathcal{A}\varepsilon_2=(-5,-1,9)$$

解得:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1=\frac{1}{7}(-\mathcal{A}\eta_1+2\mathcal{A}\eta_2+2\mathcal{A}\eta_3)=\frac{1}{7}(-5,-4,27)$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_2=\frac{1}{7}(-3\mathcal{A}\eta_1+6\mathcal{A}\eta_1-\mathcal{A}\eta_3)=\frac{1}{7}(20,-5,18)$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_3 = \frac{1}{7}(3\mathcal{A}\eta_1 + \mathcal{A}\eta_2 + \mathcal{A}\eta_3) = \frac{1}{7}(-20, -2, 24)$$

所以, $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为:

$$A = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2)^{-1}(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \mathcal{A}\varepsilon_3) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix}$$

PROBLEM

4.3.21

在 $M_2(K)$ 中定义变换如下:

$$\mathcal{A}X = AX - XA, \quad X \in M_2(K)$$

其中 A 是 K 上一个固定的二阶方阵, 证明:

(1) $\mathcal{A}$ 是 $M_2(K)$ 上的一个线性变换;

(2)在 $M_2(K)$ 中取一组基

$$\varepsilon_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵.

Solution

(1)首先, $\forall X \in M_2(K)$, 有

$$\mathcal{A}X = AX - XA \in M_2(K)$$

所以, $\mathcal{A}$ 是 $M_2(K)$ 到 $M_2(K)$ 的一个映射. 对于 $\forall X, Y \in M_2(K)$, $k_1, k_2 \in K$, 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(k_1X + k_2Y) &= A(k_1X + k_2Y) - (k_1X + k_2Y)A \\
&= k_1AX + k_2AY - k_1XA - k_2YA \\
&= k_1(AX - XA) + k_2(AY - YA) \\
&= k_1\mathcal{A}X + k_2\mathcal{A}Y
\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{A}$ 是 $M_2(K)$ 上的线性变换.

(2) 不妨设:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

则有:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = -a_{12}\varepsilon_2 + a_{21}\varepsilon_3$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} -a_{21} & a_{11} - a_{22} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix} = -a_{21}\varepsilon_1 + (a_{11} - a_{22})\varepsilon_2 + a_{21}\varepsilon_4$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_3 = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} - a_{11} & -a_{12} \end{bmatrix} = a_{12}\varepsilon_1 + (a_{22} - a_{11})\varepsilon_3 - a_{12}\varepsilon_4$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_4 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{bmatrix} = a_{12}\varepsilon_2 - a_{21}\varepsilon_3$$

所以, $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0 \\ -a_{21} & a_{11} - a_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} - a_{11} & -a_{21} \\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEM 4.3.26

设四维线性空间 V 内的一个线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

求 $\mathcal{A}$ 在 $\eta_1 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4, \eta_2 = 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \eta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \eta_4 = 2\varepsilon_4$ 下的矩阵.

PROBLEM

Solution

首先, 对于基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 与基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, 有如下关系:

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)T$$

注意到 T 实际上为可逆矩阵(因为 $det(T) \neq 0$),所以 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 实际上也为线性空间的基.从而 $\mathcal{A}$ 在基 $\eta_1 . \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的矩阵B为:

$$B = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{40}{3} & \frac{40}{3} \\ 0 & 1 & -7 & -8 \end{bmatrix}$$

PROBLEM

4.3.28

在 K^3 中给定两组基

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1, 0, 1)\,, & \eta_1 &= (1, 2, -1) \\ \varepsilon_2 &= (2, 1, 0)\,, & \eta_2 &= (2, 2, -1) \\ \varepsilon_3 &= (1, 1, 1)\,, & \eta_3 &= (2, -1, -1) \end{aligned}$$

PROBLEM

定义线性变换

$$\mathcal{A}\varepsilon_i = \eta_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵;

(2) 求 $\mathcal{A}$ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵.

Solution

首先, 求出基 η_1, η_2, η_3 到基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的过渡矩阵 T :

$$T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^{-1}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

(1) $\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)T$ 所以, $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵即为 T :

$$T = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

(2)由题意

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) &= \mathcal{A}[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)T] \\ &= [\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)]T \\ &= (\eta_1, \eta_2, \eta_3)T \end{aligned}$$

所以, $\mathcal{A}$ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵即为 T :

$$T = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

PROBLEM

4.3.32

设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, 证明:

(1) V 内全体线性变换所成的 K 上的线性空间 $End(V)$ 的维数等于 n^2
;

(2)对 V 内任一线性变换 $\mathcal{A}$, 存在一个次数 $\leq n^2$ 的多项式 $f(\lambda)$ (系数在 K 内), 使 $f(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$.

Solution

(1)由于 $Hom(U,V)$ 与 $M_{m,n}$ 同构, 所以 $End(V) = Hom(V,V)$ 与 $M_n(K)$ 同构. 所以,

$$\dim(End(V)) = \dim(Hom(V,V)) = \dim(M_n(K)) = n^2$$

(2)由于 $\dim(End(V)) = n^2$, 所以对于 $\forall \mathcal{A} \in End(V)$, $End(V)$ 中的 n^2+1 个向量:

$$E, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \cdots, \mathcal{A}^{n^2}$$

必定线性相关. 所以存在不全为 0 的 $k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{n^2} \in K$, 使得:

$$k_0E + k_1\mathcal{A} + k_2\mathcal{A}^2 + \cdots + k_{n^2}\mathcal{A}^{\backslash\in} = 0$$

所以, 存在次数不超过 n^2 的多项式 $f(\lambda) = k_0 + k_1\lambda + k_2\lambda^2 + \cdots + k_{n^2}\lambda^{n^2}$, 使得 $f(\mathcal{A}) = 0$.

PROBLEM

4.3.35

设 $\mathcal{A}$ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 内的线性变换. 证明下面的命题互相等价:

(1) $\mathcal{A}$ 是可逆变换;

(2)对 V 内任意非零向量 α , $\mathcal{A}\alpha \neq 0$;

(3)若 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 则 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是 V 的一组基;

(4)如果 V 分解为子空间 M, N 的直和: $V = M \oplus N$, 那么有 $V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$.

Solution

(1) $\Longrightarrow$ (2)
由于 $\mathcal{A}$ 是可逆变换, 所以 $\mathcal{A}$ 是单射.任取 $\alpha \in V$, 则:

$$\mathcal{A}(\alpha) = 0 = \mathcal{A}(0)$$

从而 $\alpha = 0$, 得证.

(2) $\Longrightarrow$ (1)
假设 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, 且 $\mathcal{A}\alpha_1 = \mathcal{A}\alpha_2$, 则:

$$0 = \mathcal{A}\alpha_1 - \mathcal{A}\alpha_2 = \mathcal{A}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

由于 V 内任意非零向量 α , $\mathcal{A}\alpha \neq 0$, 所以 $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, 即 $\alpha_1 = \alpha_2$. 即 $\mathcal{A}$ 是单射.
另一方面, V 内任意非零向量 α , $\mathcal{A}\alpha \neq 0$ 意味着 $mathrmKer\,\mathcal{A} = 0$. 于是:

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim V - \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = n$$

而Im $\mathcal{A} \subset V$, 所以Im $\mathcal{A} = V$. 即: $\mathcal{A}$ 是满射.
所以 $\mathcal{A}$ 是双射, 从而 $\mathcal{A}$ 是可逆映射.

(1) $\Longrightarrow$ (3)
由于 $\mathcal{A}$ 是可逆映射, 所以 $\mathcal{A}$ 是双射. 若 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 由命题3.2可知:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$$

也是 V 的一组基.

(3) $\Longrightarrow$ (1)
设 $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i$, $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\varepsilon_i$. 下证明: $\mathcal{A}$ 是双射.
若 $\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}\beta$, 则有 $\mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i) = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\varepsilon_i)$, 即 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathcal{A}\varepsilon_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\mathcal{A}\varepsilon_i$. 由于 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 所以 $a_i = b_i$, (i = 1, 2, $\cdots$, n).
从而有 $\alpha = \beta$. 即 $\mathcal{A}$ 是单射. 任取 $\gamma \in V$, 由于 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 则:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathcal{A}\varepsilon_i = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{n} c_i\varepsilon_i)$$

所以 $\mathcal{A}$ 是满射. 所以 $\mathcal{A}$ 是双射. 从而 $\mathcal{A}$ 可逆.

(1) $\Longrightarrow$ (4)
由于 $\mathcal{A}$ 是 V 上可逆的线性变换, M, N 是 V 的子空间,所以 $\mathcal{A}^{-1}$ 也是 V 上的可逆线性变换, 且 $\mathcal{A}(M), \mathcal{A}(N)$ 也是 V 的子空间.
任取 $\alpha \in V$, 由于 $V = M \oplus N$, 所以有:

$$\mathcal{A}^{-1}\alpha = \beta_1 + \beta_2,\ \ \beta_1 \in M,\ \ \beta_2 \in N$$

从而 $\forall \alpha \in V, \alpha = \mathcal{A}(\beta_1 + \beta_2) = \mathcal{A}\beta_1 + \mathcal{A}\beta_2$, 其中 $\mathcal{A}\beta_1 \in A(M), \mathcal{A}(N)$. 由子空间的和的定义可知, $V = \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}N$.
下证明该和为直和, 只需要证明两个子空间的交集为 0 .
任取 $\gamma \in \mathcal{A}(M) \bigcap \mathcal{A}(N)$, 则存在 $\eta_1 \in M, \eta_2 \in N$, 使得:

$$\gamma = \mathcal{A}\eta_1 = \mathcal{A}\eta_2 \implies \eta_1 = \mathcal{A}^{-1}(\gamma), \eta_2 = \mathcal{A}^{-1}(\gamma)$$

由于 $\mathcal{A}^{-1}$ 也是双射, 所以 $\eta_1 = \eta_2$. 而 $M \bigcap N = 0$, 所以 $\eta_1 = \eta_2 = 0$.
从而 $\beta = \mathcal{A}\eta_1 = \mathcal{A}\eta_2 = 0$. 由于 β 是从 $\mathcal{A}(M) \bigcap \mathcal{A}(N)$ 中任取的向量, 所以 $\mathcal{A}(M) \bigcap \mathcal{A}(N) = 0$.
综上, $V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$.

(4) $\Longrightarrow$ (1)
设 $V = M \oplus N$ 且 $V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$.
任取 $\mathcal{A}\alpha \in \mathcal{A}(V)$, 由于 $V = M \oplus N$, 所以 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N$.
所以, $\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}\alpha_1 + \mathcal{A}\alpha_2$, 其中, $\mathcal{A}\alpha_1 \in \mathcal{A}(M), \mathcal{A}\alpha_2 \in \mathcal{A}(N)$.从而, $\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}(N)$.
由于 $V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$, 所以 $\mathcal{A}(M) \bigcap \mathcal{A}(N) = 0$. 所以:

$$\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N) = V$$

即: $\mathcal{A}(V) = V$. 即, 线性变换 $\mathcal{A}$ 是满射.从而,

$$\dim(mathrmKer\mathcal{A}) = \dim V - \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = n - n = 0$$

所以, Ker $\mathcal{A}$ = 0. 由(2) $\Longrightarrow$ (1)的证明过程可知, $\mathcal{A}$ 是单射.
综上, $\mathcal{A}$ 是双射. 从而, $\mathcal{A}$ 是可逆变换.

(2) $\Longrightarrow$ (3)
取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基. 令 $0=k_1\mathcal{A}\varepsilon_1+k_2\mathcal{A}\varepsilon_2+\cdots+k_n\mathcal{A}\varepsilon_n=\mathcal{A}(k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n)$
由(2)可知: $k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0$, 而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基
所以, $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$. 所以 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 线性无关.
而 $\dim V=n$, 所以 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是 V 的一组基.

(3) $\Rightarrow$ (4)
取 M 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$, 将其扩充为 V 的基:

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n$$

由于 $V=M\oplus N$, 所以 $\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n$ 是 N 的一组基.
记 $\mathcal{A}(M)=\{\mathcal{A}\alpha|\alpha\in M\}$, 由于 $M=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$, 易证明: $\mathcal{A}(M)=L(\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_m)$
从而:

$$\mathcal{A}(M)=L(\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_m),\quad \mathcal{A}(N)=L(\mathcal{A}\varepsilon_{m+1},\mathcal{A}\varepsilon_{m+2},\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n)$$

所以:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(M)+\mathcal{A}(N)&=L(\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_m)+L(\mathcal{A}\varepsilon_{m+1},\mathcal{A}\varepsilon_{m+2},\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n)\\&=L(\mathcal{A}\varepsilon_1,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_m,\mathcal{A}\varepsilon_{m+1},\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n)\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是 V 的一组基, 所以

$$V=L(\mathcal{A}\varepsilon_1,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_m,\mathcal{A}\varepsilon_{m+1},\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n)=\mathcal{A}(M)+\mathcal{A}(N)$$

而 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 线性无关, 所以:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_m$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_{m+1},\mathcal{A}\varepsilon_{m+2},\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$$

都是线性无关的向量组.又由于 $\mathcal{A}(M)=L(\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_m),\mathcal{A}(N)=L(\mathcal{A}\varepsilon_{m+1},\mathcal{A}\varepsilon_{m+2},\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n)$
所以 $\{\mathcal{A}\varepsilon_1,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_m\}$, $\{\mathcal{A}\varepsilon_{m+1},\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n\}$ 分别是 $\mathcal{A}(M),\mathcal{A}(N)$ 的基.
所以 $\mathcal{A}(M)$ 的基与 $\mathcal{A}(N)$ 的基合起来是 $V=\mathcal{A}(M)+\mathcal{A}(N)$ 的基, 所以

$$V=\mathcal{A}(M)\oplus\mathcal{A}(N)$$

作业反馈:

1. 本次作业错的最多的是4.3.9(7), 90多份作业只有不到十个人写对. 有以下两种错误:

(i) $\mathcal{A}(k\xi)=\overline{k\xi}=k\overline{\xi}$

(ii) $\mathcal{A}(\xi_1+\xi_2)=\overline{\xi_1+\xi_2}\neq\overline{\xi_1}+\overline{\xi_2}$

错误的原因是对共轭运算不理解. 对于 $\forall c_1,c_2\in\mathbb{C}$, 有

$$\overline{c_1+c_2}=\overline{c_1}+\overline{c_2},\ \overline{c_1c_2}=\overline{c}_1\overline{c}_2,\ \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)}=\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$$

这些基本运算的证明通过设 $c_1=a_1+ib_1,c_2=a_2+ib_2,a_i,b_i\in\mathbb{R}$ 都可以很容易的得到证明.

2. 4.3.6与4.3.7这样的证明 f 是一个线性映射, 建议先把 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 写成矩阵乘以向量的形式, 这样验证线性的时候会方便很多. 如:

$$f\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+x_2+2x_3+x_4\\-2x_2+x_3\\-x_1-x_2+3x_3+x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&2&1\\0&-2&1&0\\-1&-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=AX$$

在求Im f 的时候, 要清楚Im f 实际上是矩阵 A 的列向量生成的空间, 因为:

$$f\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&2&1\\0&-2&1&0\\-1&-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

只要求出矩阵 A 的列向量的极大无关组, 它们生成的子空间即为Im f .

另外, 在求Coker f 时需要把矩阵 A 的列向量的极大无关组补全为整个线性空间的基, 大部分同学都补对了, 但是只有一位同学说明了添加的向量与原向量组线性无关. 对于基扩充, 以4.3.6为例, 有如下办法:

$\beta_1=(1,0,-1),\beta_2=(1,-2,-1)$ 为矩阵 A 的列向量的极大无关组, 作以下矩阵并作初等行变换:

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{Æ}ILb}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\end{bmatrix}$$

此时, 对上述矩阵补上一行, 使得新矩阵的行列式不为0的添加行, 即为与原向量组线性无关的向量. 一个很自然的添加方法就是添加 $(0,0,1)$, 使得新矩阵成为对角阵. 当然添加 $(1,0,0)$ 也可以, 但是 $(0,1,0)$ 不行.

3. 4.3.35, 证明四个命题的等价性, 可以采用"循环"的证明, 通过如下路径: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$, 很多同学从 (1) 证明到 (4) 就结束了, 没有证明 $(4) \Rightarrow (1)$. 如果有别的路径证明比较简单的话, 也可以从别的路径证明, 如 $(1) \Leftrightarrow (2), (1) \Leftrightarrow (3), (1) \Leftrightarrow (4)$, 只要保证任意两个命题都可以互相推导即可. 根据同学们的作业, 整理了以上两个路径的证明.

4.计算问题. 大部分同学的作业都是自己算过的, 但是正确率却不太高. 希望大家在平时的练习中既要自己好好算一算, 也要注意计算的准确性.

5. 希望大家可以自己完成作业, 不会的题可以和同学一起讨论一下, 但是完全copy不可取. 15, 16级中都有高度相似的作业, 步骤一样, 错的也一样, 这样很尴尬.

PROBLEM

1.

设 $\mathcal{A}$ 是数域 K 上线性空间 V 内的线性变换, 若 $\mathcal{A}\alpha = \lambda_0\alpha$, 又设 $f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_m$ 为 K 上一多项式. 证明:

$$f(\mathcal{A})\alpha = f(\lambda_0)\alpha$$

Solution

由于 $\mathcal{A}\alpha = \lambda_0\alpha$, 所以有:

$$\mathcal{A}^2\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A}\alpha) = \mathcal{A}(\lambda_0\alpha) = \lambda_0\mathcal{A}\alpha = \lambda_0^2\alpha$$

$$\mathcal{A}^3\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A}^2\alpha) = \mathcal{A}(\lambda_0^2\alpha) = \lambda_0^2\mathcal{A}\alpha = \lambda_0^3\alpha$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$\mathcal{A}^m\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{m-1}\alpha) = \mathcal{A}(\lambda_0^{m-1}\alpha) = \lambda_0^{m-1}\mathcal{A}\alpha = \lambda_0^m\alpha$$

所以,

$$\begin{aligned} f(\mathcal{A})\alpha &= \left(a_0\mathcal{A}^m + a_1\mathcal{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\mathcal{A} + a_m\mathcal{E}\right)\alpha \\ &= a_0\mathcal{A}^m\alpha + a_1\mathcal{A}^{m-1}\alpha + \cdots + a_{m-1}\mathcal{A}\alpha + a_m\mathcal{E}\alpha \\ &= a_0\lambda_0^m\alpha + a_1\lambda_0^{m-1}\alpha + \cdots + a_{m-1}\lambda_0\alpha + a_m\alpha \\ &= f(\lambda_0)\alpha \end{aligned}$$

PROBLEM

2.
设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 是线性空间 V 内的两个线性变换, 且 $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$. 证明:若 $\mathcal{A}\alpha = \lambda_0 a$, 则 $\mathcal{B}\alpha \in V_{\lambda_0}$, 这里 V_{λ_0} 为 $\mathcal{A}$ 的特征值 λ_0 的特征子空间.

Solution

由题意, 有:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha) &= (\mathcal{AB})\alpha = (\mathcal{BA})\alpha \\ &= \mathcal{B}(\mathcal{A}\alpha) \\ &= \mathcal{B}(\lambda_0\alpha) \\ &= \lambda_0\mathcal{B}\alpha \end{aligned}$$

根据 V_{λ_0} 的定义可知, $\mathcal{B}\alpha \in V_{\lambda_0}$.

PROBLEM

5.
设 $\mathcal{A}$ 是复数域上线性空间 V 内的一个线性变换, 且它在某一组基 $\{\varepsilon_i\}$ 下的矩阵为 A . 求 $\mathcal{A}$ 的全部特征值和每个特征值 λ_i 所属特征子空间 V_{λ_i} 的一组基, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution

先求出 A 的特征多项式 $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
f(\lambda)=det(\lambda E-A) &= \begin{vmatrix}\lambda & -2 & -1\\ 2 & \lambda & -3\\ 1 & 3 & \lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda & -2 & -1\\ 0 & \lambda-6 & -3-2\lambda\\ 1 & 3 & \lambda\end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix}3\lambda & -\lambda & 2\lambda\\ 0 & \lambda-6 & -3-2\lambda\\ 1 & 3 & \lambda\end{vmatrix}\\
&= \frac{\lambda}{3}\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & \lambda-6 & -3-2\lambda\\ 1 & 3 & \lambda\end{vmatrix} = \frac{\lambda}{3}\begin{vmatrix}0 & -10 & 2-3\lambda\\ 0 & \lambda-6 & -3-2\lambda\\ 1 & 3 & \lambda\end{vmatrix} = \frac{\lambda}{3}\begin{vmatrix}-10 & 2-3\lambda\\ \lambda-6 & -3-2\lambda\end{vmatrix}\\
&= \lambda(\lambda^2+14)=0
\end{aligned}$$

解得 $\lambda=0,\pm\sqrt{14}i$. 接下来求每个特征值对应的特征向量:
(i) $\lambda_1=0$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_1E-A)X=0$, 有:

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{ÆILb}} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1.5\\ 0 & 1 & 0.5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

令 $x_3=2$, 得基础解系 $\eta_1=(3,-1,2)$, 它对应于特征向量

$$3\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3$$

. 所以, $V_{\lambda_1}=L(3\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3)$.

(ii) $\lambda_2=\sqrt{14}i$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_2E-A)X=0$, 有:

$$\lambda_2E-A=\begin{bmatrix}\sqrt{14}i & -2 & -1\\ 2 & \sqrt{14}i & -3\\ 1 & 3 & \sqrt{14}i\end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{ÆILb}} \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{6+\sqrt{14}i}{10}\\ 0 & 1 & \frac{-2+3\sqrt{14}i}{10}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

令 $x_3=2+3\sqrt{14}i$, 得基础解系 $\eta_2=(3-2\sqrt{14}i,13,2+3\sqrt{14}i)$, 它对应于特征向量

$$(3-2\sqrt{14}i)\varepsilon_1+13\varepsilon_2+(2+3\sqrt{14}i)\varepsilon_3$$

所以, $V_{\lambda_2}=L((3-2\sqrt{14}i)\varepsilon_1+13\varepsilon_2+(2+3\sqrt{14}i)\varepsilon_3)$.

(iii) $\lambda_3 = -\sqrt{14}i$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_3 E - A)X = 0$, 有:

$$\lambda_3 E - A = \begin{bmatrix} -\sqrt{14}i & -2 & -1 \\ 2 & \sqrt{14}i & -3 \\ 1 & 3 & -\sqrt{14}i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Æ}ILb} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6-\sqrt{14}i}{10} \\ 0 & 1 & \frac{-2-3\sqrt{14}i}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $x_3 = 2 - 3\sqrt{14}i$, 得基础解系 $\eta_2 = (3 + 2\sqrt{14}i, 13, 2 - 3\sqrt{14}i)$, 它对应于特征向量

$$(3 + 2\sqrt{14}i)\varepsilon_1 + 13\varepsilon_2 + (2 - 3\sqrt{14}i)\varepsilon_3$$

所以, $V_{\lambda_3} = L((3 + 2\sqrt{14}i)\varepsilon_1 + 10\varepsilon_2 + (2 - 3\sqrt{14}i)\varepsilon_3)$.

PROBLEM

6.

给定数域 K 上 3 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & x & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

(1)求 K 上 3 阶可逆方阵 T , 使 $T^{-1}AT = D$ 为对角阵.

(2)如已知 B 与 C 特征多项式相同, 求 x, y 的值, 判断 B 与 C 是否相似.

Solution

(1)首先, 求出 A 的特征多项式 $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda) = det(\lambda E - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 2 & \lambda-9 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda-10) = 0 \end{aligned}$$

解得 $\lambda = 1$(二重), 10 . 接下来求特征值对应的特征向量.

(i) $\lambda_1 = 1$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_1 E - A)X = 0$, 有:

$$\lambda_1 E - A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{ÆILb} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $x_2 = 1, x_3 = 0$ 与 $x_2 = 0, x_3 = 1$ 可以得到基础解系 $\eta_1 = (-2, 1, 0), \eta_2 = (2, 0, 1)$, 同时, 这也为矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量.

(ii) $\lambda_2 = 10$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_2 E - A)X = 0$, 有:

$$\lambda_2 E - A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{ÆILb} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $x_3 = 2$, 可以得到基础解系 $\eta_3 = (-1, -2, 2)$, 同时, 这也为矩阵 A 属于特征值 $\lambda_2 = 10$ 的特征向量.
所以, 矩阵 A 可对角化, 取

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ 使得 } T^{-1}AT = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

(2) 由于 B 与 C 的特征多项式相同, 所以

$det(B) = -16 = det(C) = 4y, \ tr(B) = 2+x = tr(C) = 4+y \ \Rightarrow \ x = -2, \ y = -4$

从而, 可以求得 B 的特征多项式为: $f_B(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$. 对于 $\lambda_1 = 2$,

$$\lambda_1 E - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$rank(\lambda_1 E - B) = 2$, 所以 $\dim V_{\lambda_1} = 3 - rank(\lambda_1 E - B) = 1 \neq 2$, 即几何重数 $\neq$ 代数重数. 所以矩阵 B 不可对角化. 注意到 C 是一个对角矩阵, 所以 B 与 C 不相似.

PROBLEM

8.

设 λ_1, λ_2 是线性变换 $\mathcal{A}$ 的两个不同特征值, ξ_1, ξ_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明: $\xi_1 + \xi_2$ 不是 $\mathcal{A}$ 的特征向量.

Solution

假设 ξ_1, ξ_2 是 $\mathcal{A}$ 属于特征值 λ_3 的特征向量, 那么有:

$$\mathcal{A}(\xi_1 + \xi_2) = \lambda_3(\xi_1 + \xi_2) = \lambda_3\xi_1 + \lambda_3\xi_2$$

而 ξ_1, ξ_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以:

$$\mathcal{A}(\xi_1 + \xi_1) = \mathcal{A}\xi_1 + \mathcal{A}\xi_2 = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2$$

两式相减, 可得:

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\xi_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\xi_2 = 0$$

由命题4.3可知, ξ_1, ξ_2 线性无关. 所以 $\lambda_3 - \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1 = 0$, 即 $\lambda_1 = \lambda_2$, 矛盾!

所以, $\xi_1 + \xi_2$ 不是 $\mathcal{A}$ 的特征向量.

PROBLEM

15.

设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 内的一个线性变换, M, N 是 $\mathcal{A}$ 的两个不变子空间. 证明: $M + N$ 与 $M \bigcap N$ 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

Solution

(1) 任取 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in (M + N)$, 其中, $\alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N$, 有:

$$\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathcal{A}\alpha_1 + \mathcal{A}\alpha_2$$

由于 M, N 是 A 的不变子空间, 所以 $\mathcal{A}\alpha_1 \in M, \mathcal{A}\alpha_2 \in N$.

从而, $\mathcal{A}\alpha \in (M + N)$. 所以 $M + N$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

(2) 任取 $\beta \in M \bigcap N$, 有 $\beta \in M$ 且 $\beta \in N$. 由于 M, N 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 所以:

$$\mathcal{A}\beta \in M,\ \mathcal{A}\beta \in N \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}\beta \in M \bigcap N$$

所以, $M\bigcap N$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

PROBLEM

16.

设 $\mathcal{A}$ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 内的一个线性变换, 在 V 的一组基下其矩阵为

$$J=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0\end{bmatrix}$$

证明: 当 $n>1$ 时, 对 $\mathcal{A}$ 的任意非平凡不变子空间 M , 都不存在 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 N , 使:

$$V=M\oplus N$$

Solution

设 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 J . 取 $\alpha\in M$, 且记:

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_k\varepsilon_k \text{ 其中, } a_k\neq 0$$

于是, 有(取 $\varepsilon_0=0$):

$$\mathcal{A}\alpha=\sum_{i=1}^{k}a_i\mathcal{A}\varepsilon_i=\sum_{i=1}^{k}a_i(\lambda_0\varepsilon_i+\varepsilon_{i-1})=\lambda_0\alpha+\sum_{i=1}^{k-1}a_i\varepsilon_i\in M$$

所以,

$$\alpha_1=\sum_{i=1}^{k-1}a_i\varepsilon_i=\mathcal{A}\alpha-\lambda_0\alpha\in M$$

继续做以上步骤, 可以得到: $k_s\varepsilon_1\in M$, 所以: $\varepsilon_1\in M$.
这说明, 对于 $\mathcal{A}$ 的任意非平凡不变子空间 M , 都有 $\varepsilon_1\in M$. 即: $\mathcal{A}$ 的任意两个非平凡不变子空间都含有公共向量 ε_1 , 所以 V 不能分解为 $\mathcal{A}$ 的两个非平凡不变子空间的直和.

PROBLEM

20.

$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 n 维线性空间 V 内的两个线性变换, 且 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$. λ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, V_λ 是属于特征值 λ 的特征子空间. 则 V_λ 是 B 的不变子空间.

Solution

任取 $\alpha \in V_\lambda$, 有 $\mathcal{A}\alpha=\lambda\alpha$, 从而:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha)=\mathcal{BA}\alpha=\mathcal{B}(\lambda\alpha)=\lambda\mathcal{B}\alpha$$

即: $\mathcal{B}\alpha \in V_\lambda$. 所以 V_λ 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间.

PROBLEM

21.

设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 V 内两个线性变换, 且 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$. 如果 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 的矩阵都可对角化, 证明: V 内存在一组基, 使 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 在这组基下的矩阵同时成对角形.

Solution

由于 $\mathcal{A}$ 可以对角化, 所以空间 V 可以分解为 $\mathcal{A}$ 的特征子空间的直和:

$$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_r}$$

由上题结论可知, $V_{\lambda_1}.V_{\lambda_2},\cdots,V_{\lambda_r}$ 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间. 所以, $\mathcal{B}|_{V_{\lambda_1}},\mathcal{B}|_{V_{\lambda_2}},\cdots,\mathcal{B}|_{V_{\lambda_r}}$ 的矩阵也可对角化.对于 V_{λ_i} , 将其分解为 $\mathcal{B}|_{V_{\lambda_i}}$ 的特征子空间的直和:

$$V_{\lambda_i}=V_{\xi_{i1}}\oplus V_{\xi_{i2}}\oplus\cdots\oplus V_{\xi_{is_i}}$$

则:

$$V=V_{\xi_{11}}\oplus\cdots\oplus V_{\xi_{1s_1}}\oplus\cdots\oplus V_{\xi_{r1}}\oplus\cdots\oplus V_{\xi_{rs_r}}$$

在 $V_{\xi_{i1}},V_{\xi_{i2}},\cdots,V_{\xi_{is_i}}$ 各取一组基合成为 V_{λ_i} 一组基:

$$\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{im_i}$$

则 $\mathcal{B}|_{\lambda_i}$ 在这组基下可以对角化, 对所有的 V_{λ_i}, $(i=1,2,\cdots,r)$ 做如上步骤, 则 $\mathcal{B}$ 在

$$\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1m_1},\cdots,\eta_{r1},\eta_{r2},\cdots,\eta_{rm_r}$$

可以对角化. 注意到 $\mathcal{A}$ 在这组基下也可以对角化, 命题得证.

PROBLEM

******

也有同学是用矩阵做的, 或多或少写的都有点问题. 有两位同学是直接从矩阵 $AB=BA$ 开始写, 最后找到了矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 同时为对角阵. 但是这样还没有和题目完全联系起来, 可以用以下方法:

Solution

取 V 的一组基 $\varepsilon_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 在这组基下的矩阵分别为 A,B:

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

$$\mathcal{B}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B$$

易证明, $AB=BA$. 下证明, A,B 可同时对角化.
因为 A 相似于对角阵, 所以必定存在 P_1 使

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}\lambda_1E_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_{n_s}\end{bmatrix},\quad 其中, \lambda_1,\ldots,\lambda_s互异.$$

由于 $AB=BA$, 所以:

$$P_1^{-1}ABP_1=P_1^{-1}BAP_1 \quad\Rightarrow\quad (P_1^{-1}AP_1)(P_1^{-1}BP_1)=(P_1^{-1}BP_1)(P_1^{-1}AP_1)$$

设 $(P_1^{-1}BP_1)=(B_{ij})$, 其中分块方法使得 $(P_1^{-1}BP_1)(P_1^{-1}AP_1)$ 与 $(P_1^{-1}AP_1)(P_1^{-1}BP_1)$ 都可乘.
由于 $(P_1^{-1}BP_1)$ 与 $(P_1^{-1}AP_1)$ 可交换, 有:

$$\lambda_iB_{ij}=B_{ij}\lambda_j$$

所以当 $i \neq j$ 时, $B_{ij} = 0$. 所以有: $P_1^{-1}BP_1 = \mathrm{diag}\{B_{11}, B_{22}, \cdots, B_{ss}\}$.
由 B 可对角化可知, B_{ii} 也可以对角化, 即 $\exists Q_i$, 使得 $Q_i^{-1}B_{ii}Q_i$ 为对角阵. $(i = 1, 2, \cdots, s)$. 记:

$$P_2 = \begin{bmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_s \end{bmatrix}$$

取 $P = P_1P_2$, 有 $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ 同时为对角阵. 记 $P = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$, 此时:

$$\mathcal{A}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = \mathcal{A}[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P] = [\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)]P = AP = P(P^{-1}AP) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)(P$$

$$\mathcal{B}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = \mathcal{B}[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P] = [\mathcal{B}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)]P = BP = P(P^{-1}BP) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)(P$$

矩阵 P 的列向量即为题目中要找的基.

作业反馈:

1. 4.4.6题中, 判断矩阵 B, C 是否相似, 有的同学认为特征值相同, 对应特征值的代数重数相同, 两个矩阵就应该相似. 但是实际上有一个结论: 相似矩阵有相同的特征多项式, 但是具有相同特征多项式的矩阵却不一定相似. 在本题中只需要判断矩阵 B 可否对角化即可.
关于矩阵 A 与 B 相似, 有如下一些结论:

- 必要条件: $det(A) = det(B)$, $tr(A) = tr(B)$, $rank(A) = rank(B)$, $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$

更一般地说, 方阵的行列式, 迹, 秩, 特征值, 特征多项式, 最小多项式是方阵在相似下的不变量, 但不是全系不变量. 关于矩阵相似也有充要条件, 但是相关知识点目前还没学到, 暂且不提.

2. 4.4.21题中, 采用线性变换方法证明的同学中, 很多证明了 $\mathcal{A}$ 的特征子空间是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间之后, 得到 $\mathcal{B}$ 在这些空间上的限制也可以对角化, 然后就直接在这些特征子空间中取基, 便断言 $\mathcal{B}$ 在这组基下可以对角化. 但是实际上, V_λ 只是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间而非特征子空间, 这样随意取的基, 并不一定能使 $\mathcal{B}|_{V_\lambda}$ 在该基下的矩阵是对角阵; 另外也有同学直接说在 V_λ 中一定存在 ξ_i, η_j 使得 $\mathcal{B}\eta_j = \xi_i\eta_j$, 虽然说本质上确实有这样的关系, 但总感觉这样写还是有点没写清楚.
一个能把问题说清楚的方法就是继续将 V_λ 继续分解为 $\mathcal{B}|_{V_\lambda}$ 的特征子空间的直和, 然后在这些特征子空间中取基,再把所有的基拼成 V 的一组基, 便既可以说出这些基是怎么来的, 也可以使 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 在这组基下的矩阵同时为对角形.

3. 关于矩阵的特征值的计算. 一般的题目都是三阶矩阵, 建议先通过初等行列变换将行列式降阶, 最好能提出来一个一次式, 这样对接下来的二次多项式进行因式分解会很方便. 如果直接展开为最一般的多项式, 对三次方程的求根有时候可能会很麻烦.

PROBLEM 5.1.5

在实数域上线性空间 $C[a,b]$ 内定义二元函数如下: 对 $f(x), g(x) \in$

$C[a,b]$, 令:

$$I(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

PROBLEM 证明这是一个双线性函数.

Solution

对 $\forall k_1,k_2\in\mathbb{R}, f_1,f_2\in C[a,b]$, 有:

$$I(k_1f_1+k_2f_2,g)=\int_a^b(k_1f_1(x)+k_2f_2(x))g(x)dx=k_1\int_a^b f_1(x)g(x)dx+k_2\int_a^b f_2(x)g(x)dx$$

对 $\forall l_1,l_2\in\mathbb{R}, g_1,g_2\in C[a,b]$, 有:

$$I(f,l_1g_1+l_2g_2)=\int_a^b f(x)(l_1g_1(x)+l_2g_2(x))dx=l_1\int_a^b f(x)g_1(x)dx+l_2\int_a^b f(x)g_2(x)dx$$

所以, $I(f,g)$ 是 $C[a,b]$ 上的一个双线性函数.

PROBLEM

5.1.8

在 $M_n(K)$ 内定义函数如下:

$$f(A,B)=Tr(AB).$$

(1) 证明 $f(A,B)$ 是一个对称双线性函数;

(2) 令 $n=2$, 在 $M_2(K)$ 内取一组基

$$\varepsilon_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

求 $f(A,B)$ 在这组基下的矩阵;

(3)在 $M_2(K)$ 内另取一组基

$$\eta_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \eta_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad \eta_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \eta_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

求出两组基之间的过渡矩阵 T :

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})T$$

> 再求 $f(A,B)$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵.
> (4) 在 $n=2$ 的情况下求 $f(A,B)$ 的秩.

Solution

(1) 对于 $\forall k_1,k_2\in K, A_1,A_1\in M_n(K)$, 有:

$$f(k_1A_1+k_2A_2,B)=Tr((k_1A_1+k_2A_2)B)=k_1Tr(A_1B)+k_2Tr(A_2B)=k_1f(A_1,B)+k_2f(A_2,B)$$

对于 $\forall l_1,l_2\in K, B_1,B_2\in M_n(K)$, 有:

$$f(A,l_1B_1+l_2B_2)=Tr(A(l_1B_1+l_2B_2))=l_1Tr(A,B_1)+l_2f(A,B_2)=l_1f(A,B_1)+l_2f(A,B_2)$$

另外又注意到:

$$f(A,B)=Tr(AB)=Tr(BA)=f(B,A)$$

所以 $f(A,B)$ 是一个对称双线性函数.

(2) 经计算可知:

$$f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{11})=1,\ f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12})=0,\ f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{21})=0,\ f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22})=0$$

$$f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{11})=0,\ f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{12})=0,\ f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{21})=1,\ f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{22})=0$$

$$f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{11})=0,\ f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{12})=1,\ f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{21})=0,\ f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})=0$$

$$f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{11})=0,\ f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{12})=0,\ f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{21})=0,\ f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{22})=1$$

所以, $f(A,B)$ 在这组基下的矩阵为:

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(3)注意到

$$\eta_1=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22},\ \eta_2=\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22},\ \eta_3=\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21},\ \eta_4=\varepsilon_{12}-\varepsilon_{21}$$

所以, 两组基之间的过渡矩阵为:

$$T=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{bmatrix}$$

则 $f(A,B)$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵为:

$$N=T'MT=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

(4) 由第(3)问的结果可知, $f(A,B)$ 的秩为4.

PROBLEM

5.1.9

设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的一个双线性函数.
证明: $f(\alpha,\beta)$ 满秩的充分必要条件是: 当对一切 $\beta\in V$ 有 $f(\alpha,\beta)=0$ 时, 必定有 $\alpha=0$.

Solution

记 f 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A . 任取 $\alpha,\beta\in V$, 设:

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)X,\ \ \beta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Y,\ \ X,Y\in K^n$$

(1) 充分性:
设 $f(\alpha,\beta)=0$, $\forall\beta\in V$, 则有:

$$f(\alpha,\beta)=X'AY=0,\ \ \forall Y\in K^n$$

不妨取 $Y=\varepsilon_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$, 则: $X'A\varepsilon_i=0,\ (i=1,2,\cdots,n)$.
所以有, $0=X'A(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=X'AE=X'A,\ \Rightarrow\ \ A'X=0$.
由题目条件可知, 当对一切 $\beta\in V$ 有 $f(\alpha,\beta)=0$ 时, 即上述方程组只有零解.
所以, $rank(A)=rank(A')=n$, 即 $f(\alpha,\beta)$ 满秩.

(2) 必要性:
由于 $f(\alpha,\beta)$ 满秩, 所以矩阵 A 满秩.
设对于任意 $Y\in K^n$, $f(\alpha,\beta)=X'AY=0$.下推导X只能为0向量.
取Y依次为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, 则可得到:

$$X'A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=X'AE=0 \quad\Rightarrow\quad A'X=0$$

由于矩阵 A 满秩, 则上述线性齐次方程组只有零解. 即:当对一切 $\beta\in V$ 有 $f(\alpha,\beta)=0$ 时, 必定有 $\alpha=0$.

PROBLEM

5.1.10
证明第8题中的双线性函数 $f(A,B)$ 是满秩的.

Solution

设对于一切 $B\in M_n(K)$, $f(A,B)=Tr(AB)$. 下证明 $A=0$. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$, 则:

$$f(A,B)=Tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}AB(i,i)=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji})$$

依次取 $B=E_{ij}$, 则可以得到 $f(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji})=a_{ji}=0,\ (1\le i,j\le n)$.
所以可以得到 $A=0$.由5.1.9结论可知, 双线性函数 $f(A,B)$ 是满秩的.

****
也可以直接取一组基, 求出双线性函数 f 在这组基下的矩阵, 并判断该矩阵满秩来证明此命题.

Solution

在 $M_n(K)$ 内选取一组基

$$E_{ij},\ \ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$E_{ij}+E_{ji},\ (i,j=1,2,\cdots,n,\ i<j)$$

$$E_{ij}-E_{ji},\ (i,j=1,2,\cdots,n,\ i<j)$$

下证明在这组基下 f 的矩阵成对角形. 首先, 有

$$E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}E_{il}, 若j=k;\\ \ 0,\ 若j\neq k.\end{cases}\qquad Tr(E_{ij}E_{kl})=\begin{cases}1,\ 若i=l,j=k;\\ 0,\ 其他.\end{cases}\tag{4.1}$$

(1) 对于 E_{ii} , 有:

$$f(E_{ii},E_{jj})=\begin{cases}1,\ 若i=j;\\ 0,\ 若i\neq j.\end{cases}\tag{4.2}$$

对于 $k<l$, 有:

$$f(E_{ii},E_{kl}\pm E_{lk})=Tr(E_{ii}E_{kl})\pm Tr(E_{ii}E_{lk})=0.$$

(2) 对于 $E_{ij}+E_{ji},\ (1\le i<j\le n)$, 有

$$\begin{aligned}f(E_{ij}+E_{ji},E_{kl}+E_{lk})&=Tr(E_{ij}E_{kl})+Tr(E_{ij}E_{lk})+Tr(E_{ji}E_{kl})+Tr(E_{ji}E_{lk})\\&=Tr(E_{ji}E_{kl})+Tr(E_{ij}E_{lk})\\&=\begin{cases}2,\ 若i=k,j=l;\\ 0,\ 其他.\end{cases}\end{aligned}$$

$$f(E_{ij}+E_{ji},E_{kl}-E_{lk})=Tr(E_{ji}E_{kl})-Tr(E_{ij}E_{lk})=0.$$

(3) 对于 $E_{ij}-E_{ij},\ (1\le i,j\le n)$, 有:

$$\begin{aligned}f(E_{ij}-E_{ji},E_{kl}-E_{lk})&=Tr(E_{ij}E_{kl})-Tr(E_{ij}E_{lk})-Tr(E_{ji}E_{kl})+Tr(E_{ji}E_{lk})\\&=-Tr(E_{ji}E_{kl})-Tr(E_{ij}E_{lk})\\&=\begin{cases}-2,\ 若i=k,j=l;\\ \ \ 0,\ 其他.\end{cases}\end{aligned}$$

经过上述计算可以发现, f 在所选的基下成对角阵, 主对角线上有 n 个1, $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个 2 和 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个 -2 . 从而 f 是满秩的.

PROBLEM

5.1.18

设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 内的双线性函数. 对 V 的子空间 M , 定义:

$$L(M)=\{\alpha\in V|f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in M\}$$

$$R(M)=\{\alpha\in V|f(\beta,\alpha)=0,\forall\beta\in M\}$$

证明 $L(M),R(M)$ 为 V 的子空间. 如果 $f(\alpha,\beta)$ 为 V 内满秩双线性函数, 证明:

$$\dim L(M)=\dim R(M)=n-\dim M$$

同时又有:

$$R(L(M))=L(R(M))=M$$

Solution

(1) 先证明 $L(M),R(M)$ 为 V 的子空间. 任取 $\alpha_1,\alpha_2\in L(M),k_1,k_2\in K$, 有:

$$f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)=0$$

所以 $L(M)$ 是 V 的子空间. 同理, $R(M)$ 也是 V 的子空间.

(2) 再证明: 如果 $f(\alpha,\beta)$ 为 V 内满秩双线性函数,则有

$$\dim L(M)=\dim R(M)=n-\dim M,\ \ R(L(M))=L(R(M))=M$$

在 M 内取一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$, 将其扩充为 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$
.

对任意的 $\alpha\in V$, 记 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$, 则 $\alpha\in L(M)$ 等价于:

$$f(\varepsilon_1,\varepsilon_i)a_1+\cdots+f(\varepsilon_r,\varepsilon_i)a_r+\cdots+f(\varepsilon_{r+1},\varepsilon_i)a_{r+1}+\cdots+f(\varepsilon_n,\varepsilon_i)a_n=0,\ (i=1,2\cdots,r)$$

f 满秩意味着系数矩阵满秩, 为 $r=\dim M$. 其解空间 W 的维数为

$$\dim W=n-r=n-\dim(M)$$

由于 α 对应到它的坐标 X 是 V 到 F^n 的一个同构映射, 且 $L(M)$ 在该映射下的象为上述方程组的解空间 W , 所以:

$$\dim L(M)=\dim W=n-\dim(M)$$

同理可得, $\dim R(M) = n - \dim(M)$. 即 $\dim L(M) = \dim R(M) = n - r$.
注意到 $R(L(M)) = \{\beta \in V | f(\alpha, \beta) = 0, \forall \alpha \in L(M)\}$, 任取 $\gamma \in M$, 当 $\alpha \in L(M)$ 时,

$$f(\alpha, \gamma) = 0 \quad (\text{由} R(L(M)) \text{的定义可得})$$

所以 $M \subset R(L(M))$. 由前面的证明过程可知, $\dim R(L(M)) = n - \dim L(M) = n - (n - r) = r$,所以 $M = R(L(M))$. 同理可得: $M = L(R(M))$. 即: $L(R(M)) = R(L(M)) = M$.

PROBLEM

5.1.19
设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, M, N 是 V 的两个子空间, $f(\alpha, \beta)$ 为 V 内双线性函数, 使用上题记号. 证明:

$$L(M+N) = L(M) \cap L(N), \quad R(M+N) = R(M) \cap R(N)$$

如果 $f(\alpha, \beta)$ 满秩, 则:

$$L(M \cap N) = L(M) + L(N), \quad R(M \cap N) = R(M) + R(N)$$

Solution

(1) 任取 $\alpha \in L(M+N)$, 则对于 $\forall \beta \in M+N$ 有 $f(\alpha, \beta) = 0$.
由于 $M \subset M+N, N \subset M+N$, 所以 $\alpha \in L(M), \alpha \in L(N)$, 即: $\alpha \in L(M) \cap L(N)$.
从而: $L(M+N) \subset L(M) \cap L(N)$.
任取 $\alpha \in L(M) \cap L(N)$, 则对于 $\forall \beta_1 \in M, \beta_2 \in N$, 有

$$f(\alpha, \beta_1) = 0, \quad f(\alpha, \beta_2) = 0$$

任取 $\beta \in M+N$, 则 $\exists \beta_1 \in M, \beta_2 \in N$, 使得 $\beta = \beta_1 + \beta_2$, 从而:

$$f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = f(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2) = 0$$

从而: $L(M) \cap L(N) \subset L(M+N)$.
综上, $L(M+N) = L(M) \cap L(N)$. 同理可得, $R(M+N) = R(M) \cap R(N)$.

(2)对于 $\forall \alpha \in L(M) + L(N)$, 有 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \ \alpha_1 \in L(M), \alpha_2 \in L(N)$.

对于 $\forall \beta \in M \cap N$, 可知 $f(\alpha, \beta) = f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta) = 0$, 即: $\alpha \in L(M \cap N)$
.
所以: $L(M) + L(N) \subset L(M \cap N)$.
由于 $f(\alpha, \beta)$ 满秩, 5.1.18的结论及维数公式可得:

$$\begin{aligned} \dim(L(M) + L(N)) &= \dim L(M) + \dim L(N) - \dim(L(M) \cap L(n)) \\ &= (n - \dim M) + (n - \dim N) - \dim(L(M + N)) \\ &= 2n - (\dim M + \dim N) - (n - \dim(M + N)) \\ &= n - (\dim M + \dim N - \dim(M + N)) \\ &= n - \dim(M \cap N) \\ &= \dim L(M \cap N) \end{aligned}$$

所以, $L(M) + L(N) = L(M \cap N)$. 同理可得, $R(M) + R(N) = R(M \cap N)$.

PROBLEM

5.2.2
在 K^4 中给定如下对称双线性函数: 若

$$\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \beta = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

令

$$f(\alpha, \beta) = -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_2y_4 - 2x_1y_4 + x_4y_2 - 2x_4y_1 + 2x_4y_4$$

(1) 写出 $f(\alpha, \beta)$ 在基

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$$

下的矩阵, 并写出 $f(\alpha, \alpha)$ 在此组基下的解析表达式.
(2)做基变换

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

求 $f(\alpha, \beta)$ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的矩阵, 并求 $f(\alpha, \alpha)$ 在这组基下的解析表达式;

(3)求可逆线性变数替换 $X = TY$, 使二次型

$$f = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_4 - 3x_2^2 + 2x_2x_4 + 2x_4^2$$

化成标准型.

Solution

由题意:

$$f(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

(1) 可以看出, $f(\alpha, \beta)$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

可以看出, $f(\alpha, \alpha)$ 在这组基下的解析表达式为:

$$f(\alpha, \alpha) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_4 - 3x_2^2 + 2x_2x_4 + 2x_4^2$$

(2)设 $f(\alpha, \beta)$ 在这组基下的矩阵为 B , 则:

$$B = T'AT = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $f(\alpha, \alpha)$ 在这组基下的解析表达式为:

$$f(\alpha, \alpha) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

(3)由第(2)问结论可知:

$$T=\begin{pmatrix}2 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} & 0\\ 1 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$$

PROBLEM

5.2.3

给定四个变量的二次型 f，试在 K^4 内找出对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$，使 $f(\alpha,\alpha)$ 在基:

$$\varepsilon_1=(1,0,0,0),\ \ \varepsilon_2=(0,1,0,0),\ \ \varepsilon_3=(0,0,1,0),\ \ \varepsilon_4=(0,0,0,1)$$

下的解析式为:

$$f=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$$

Solution

对于该二次型, 有:

$$f=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

所以,双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 为:

$$\begin{aligned}f(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(&x_1y_2+x_1y_3+x_1y_4+x_2y_1+x_2y_3+x_2y_4+\\ &x_3y_1+x_3y_2+x_3y_4+x_4y_1+x_4y_2+x_4y_3)\end{aligned}$$

PROBLEM

5.2.7
给定二次型

$$f=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

是一个实数矩阵. 证明 f 的秩等于 $r(A)$.

Solution

记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, 则:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{s}\left[(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{s}\left[(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdots \\ a_{in} \end{pmatrix}(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\left[\sum_{i=1}^{s}\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdots \\ a_{in} \end{pmatrix}(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = X'(A'A)X \end{aligned} \tag{4.3}$$

由于 $(A'A)'=A'A$, 即 $A'A$ 为对称矩阵, 所以 $A'A$ 即为二次型 f 的方阵. 下证明: $r(A'A)=r(A)$.

考虑两个线性齐次方程组:(1) $AX=0$; (2) $A'AX=0$. 即二者的解空间分别为 W_1,W_2 .
任取 $X\in W_1$, $AX=0 \Rightarrow A'AX=0$, 即: $X\in W_2$. 所以: $W_1\subset W_2$.
任取 $X\in W_2$, $A'AX=0 \Rightarrow 0=X'A'AX=(AX)'(AX)=0 \Rightarrow AX=0$.
即: $X\in W_1$. 所以: $W_2\subset W_1$.
综上, $W_1=W_2$. 所以 $r(A)=n-\dim W_1=n-\dim W_2=r(A'A)$.即: f 的秩为 $r(A)$

PROBLEM 6.2.1

设 η 是 n 维欧式空间 V 内的一个单位向量, 定义 V 内一个线性变换如下:

$$\mathcal{A}\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$$

称这样的线性变换 $\mathcal{A}$ 为一个镜面反射. 证明:
(1) $\mathcal{A}$ 是正交变换;
(2) $\mathcal{A}$ 是第二类的;
(3) $\mathcal{A}^2=\mathcal{E}$;
(4) 设 $\mathcal{B}$ 是 V 内一个第二类正交变换, 则必有:

$$\mathcal{B}=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}_1$$

其中, $\mathcal{B}_1$ 是 V 内的一个第一类正交变换.

Solution

(1)对于镜面反射 $\mathcal{A}$, 有:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)&=(\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\beta-2(\eta,\beta)\eta)\\&=(\alpha,\beta)-2(\alpha,\eta)(\eta,\beta)-2(\eta,\beta)(\eta,\alpha)+4(\eta,\alpha)(\eta,\beta)(\eta,\eta)\\&=(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{A}$ 是正交变换.

(2) 将 $\eta=\varepsilon_1$ 扩充为 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$, 有:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1=\varepsilon_1-2(\eta,\varepsilon_1)\eta=\varepsilon_1-2\eta=-\varepsilon_1$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_i = \varepsilon_i - 2(\eta,\varepsilon_i)\eta = \varepsilon_i,\ \ (i=2,3,\cdots,n)$$

所以 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

可以得到, $|A| = -1$. 由于线性变换在不同基下的矩阵是相似的, 相似的矩阵行列式相等. 所以 $\mathcal{A}$ 在任意一组基下的矩阵的行列式都为 -1 , 所以 $\mathcal{A}$ 是第二类的.

(3)对于 $\forall \alpha \in V$, 有:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^2\alpha &= \mathcal{A}(\mathcal{A}\alpha) = \mathcal{A}\alpha - 2(\eta,\mathcal{A}\alpha)\eta \\
&= \alpha - 2(\eta,\alpha)\eta - 2(\eta,\alpha-2(\eta,\alpha)\eta)\eta \\
&= \alpha - 2(\eta,\alpha)\eta - 2(\eta,\alpha)\eta + \ 4(\eta,\alpha)(\eta,\eta)\eta \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$.

(4) 设 $\mathcal{B}$ 是 V 内一个第二类正交变换, 记 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$, 下证明 $\mathcal{B}_1$ 是 V 内的第一类正交变换.

由(3)可知 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$, 所以 $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}$. 则 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}\mathcal{B}$.

取 V 的一组标准正交基 $\{\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_n\}$, 则 $(\xi_i,\xi_j) = \delta_{ij}$, 从而

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B}_1\xi_i,\mathcal{B}_1\xi_j) &= (\mathcal{A}\mathcal{B}\xi_i,\mathcal{A}\mathcal{B}\xi_j) \\
&= (\mathcal{B}\xi_i - 2(\eta,\mathcal{B}\xi_i)\eta,\ \mathcal{B}\xi_j - 2(\eta,\mathcal{B}\xi_j)\eta) \\
&= (\mathcal{B}\xi_i,\mathcal{B}\xi_j) - 2(\mathcal{B}\xi_i,\eta)(\eta,\mathcal{B}\xi_j) - 2(\eta,\mathcal{B}_i)(\mathcal{B}\xi_j,\eta) + 4(\eta,\mathcal{B}_i)(\eta,\mathcal{B}\xi_j)(\eta,\eta) \\
&= (\mathcal{B}\xi_i,\mathcal{B}\xi_j) = (\xi_i,\xi_j) = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{B}_1\xi_1,\mathcal{B}_1\xi_2,\cdots,\mathcal{B}_1\xi_n$ 也是 V 的一组标准正交基. 即线性变换 $\mathcal{B}_1$ 把 V 的标准正交基映

成标准正交基. 所以 $\mathcal{B}_1$ 是一个正交变换.

****

上述推理也可由课本P20命题2得出:

$$\mathcal{A},\mathcal{B}\in O(n)\ \Rightarrow\ \mathcal{A}^{-1},\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\in O(n)$$

****

设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 在 V 的基下的矩阵分别为 A,B , 则 $\mathcal{B}_1$ 在这组基下的矩阵为 $B_1=AB$, 从而:

$$det(B_1)=det(AB)=det(A)det(B)=(-1)\times(-1)=1$$

由于线性变换在不同基下的矩阵是相似的, 相似的矩阵行列式相等. 所以 $\mathcal{B}_1$ 在任意一组基下的矩阵的行列式都为 1 , 所以 $\mathcal{B}_1$ 是第一类的正交变换. 且满足:

$$\mathcal{A}\mathcal{B}_1=\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}$$

PROBLEM

6.2.6

设 $\mathcal{A}$ 是欧式空间 V 内的一个变换, 对任意 $\alpha,\beta\in V$, 有 $(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta)$. 证明 $\mathcal{A}$ 是一个正交变换.

Solution

只需要证明变换 $\mathcal{A}$ 是线性的.

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}(\alpha+\beta)-(\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta),\ \mathcal{A}(\alpha+\beta)-(\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta))\\
=&(\mathcal{A}(\alpha+\beta),\mathcal{A}(\alpha+\beta))-2(\mathcal{A}(\alpha+\beta),\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta)+(\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta,\ \mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta)\\
=&(\mathcal{A}(\alpha+\beta),\mathcal{A}(\alpha+\beta))-2(\mathcal{A}(\alpha+\beta),\mathcal{A}\alpha)-2(\mathcal{A}(\alpha+\beta),\beta)+(\mathcal{A}\alpha,\ \mathcal{A}\alpha)+2(\mathcal{A}\alpha,\ \mathcal{A}\beta)+(\mathcal{A}\beta,\ \mathcal{A}\beta)\\
=&(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta)-2(\alpha+\beta,\alpha)-2(\alpha+\beta,\beta)+(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\\
=&0\end{aligned}$$

由内积的正定性可知, $\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta$.
对于 $\forall k\in\mathbb{R},\alpha\in V$, 有:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(k\alpha)-k\mathcal{A}\alpha,\ \mathcal{A}(k\alpha)-k\mathcal{A}\alpha)&=(\mathcal{A}(k\alpha),\ \mathcal{A}(k\alpha))-2k(\mathcal{A}(k\alpha),\ \mathcal{A}\alpha)+k^2(\mathcal{A}\alpha,\ \mathcal{A}\alpha)\\
&=(k\alpha,k\alpha)-2k(k\alpha,\alpha)+k^2(\alpha,\alpha)\\
&=0\end{aligned}$$

由内积的正定性可知, $\mathcal{A}(k\alpha) = k\mathcal{A}\alpha$.
所以, $\mathcal{A}$ 是线性的. 从而 A 是一个正交变换.

PROBLEM

6.2.7
设 V 是 n 维欧式空间, $\mathcal{A}$ 是第 1 题中定义的镜面反射, $\mathcal{B}$ 是 V 内一正交变换. 证明 $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ 也是 V 内一镜面反射.

Solution

考查 $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ 的作用. 由于 $\mathcal{B}$ 是正交变换, 所以 $\mathcal{B}^{-1}$ 也是正交变换. 对于 $\forall\alpha \in V$, 有:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}(\alpha) &= B^{-1}(\mathcal{B}\alpha - 2(\eta, \mathcal{B}\alpha)\eta)\\ &= \alpha - 2(\eta, \mathcal{B}\alpha)\mathcal{B}^{-1}\eta\\ &= \alpha - 2(\mathcal{B}^{-1}\eta, \alpha)\mathcal{B}^{-1}\eta\end{aligned}$$

由于 $(\mathcal{B}^{-1}\eta, \mathcal{B}^{-1}\eta) = (\eta, \eta) = 1$, 所以 $\mathcal{B}^{-1}\eta$ 也是 V 中的一个单位向量.
由镜面反射的定义可知, $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ 是关于超平面 $L(\mathcal{B}^{-1}\eta)^{\perp}$ 的镜面反射.

PROBLEM

6.2.10
设 V 为 n 维欧式空间, $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}^*$ 为 V 内两个线性变换. 如果对任意 $\alpha, \beta \in V$ 有

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta)$$

则称 $\mathcal{A}^*$ 为 $\mathcal{A}$ 的共轭变换. 证明: $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}^*$ 在 V 的任一组标准正交基下的矩阵互为转置.

Solution

设线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的矩阵为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 即 :

$$\mathcal{A}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)A$$

则有 $\mathcal{A}\xi_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\xi_k$. 再设 $\mathcal{A}^*$ 在这组基下的矩阵为 $B = (b_{ij})_{n\times n}$, 即:

$$\mathcal{A}^*(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)B$$

于是 $\mathcal{A}^*\xi_i = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki}\xi_k$. 再由共轭变换的定义可得:

$$(\mathcal{A}\xi_i, \xi_j) = (\xi_i, \mathcal{A}^*\xi_j)$$

即:

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\xi_k, \xi_j) = (\xi_i, \sum_{m=1}^{n} b_{mj}\xi_m) \;\;\Rightarrow\;\; \sum_{k=1}^{n} a_{ki}(\xi_k, \xi_j) = \sum_{m=1}^{n} b_{mj}(\xi_i, \xi_m)$$

而 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一组标准正交基, 所以 $(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$. 从而:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\delta_{kj} = \sum_{m=1}^{n} b_{mj}\delta_{im} \;\;\Rightarrow\;\; a_{ji} = b_{ij},\ (i, j = 1, \cdots, n)$$

即: $B = A'$, $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}^*$ 在 V 的任一组标准正交基下的矩阵互为转置.

PROBLEM

6.2.11

续上题.

(1)证明: 对 V 内每个线性变换 $\mathcal{A}$, 其共轭变换是存在且唯一的, 而且 $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

(2)证明: $\mathcal{A}$ 是对称变换的充分必要条件是 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

Solution

(1) **存在性:**

分两个步骤去证明线性变换 $\mathcal{A}$ 的共轭变换是存在的.

(i) 对于给定的 $\beta \in V$, 存在唯一的向量 $\widetilde{\beta} \in V$, 使得对于任意 $\alpha \in V$, 有:

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \widetilde{\beta})$$

利用Euclid空间的内积,定义从线性空间 V 到其对偶空间 V^* 的映射 σ :

$$\begin{aligned} \sigma: \quad V &\;\to\; V^* \\ \beta &\;\mapsto\; f_\beta(\alpha) = (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

下证明 σ 是一个双射. 首先证明 σ 是单射.设 $\beta_1, \beta_2 \in V$, 且 $\sigma(\beta_1) = \sigma(\beta_2)$. 于是对于 $\forall \alpha \in V$, 有:

$$f_{\beta_1}(\alpha) = f_{\beta_2}(\alpha) \;\Rightarrow\; (\alpha, \beta_1) = (\alpha, \beta_2) \;\Rightarrow\; (\alpha, \beta_1 - \beta_2) = 0$$

由于 α 是任意的, 取 $\alpha = \beta_1 - \beta_2$ 可得:

$$(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) = 0 \;\Rightarrow\; \beta_1 - \beta_2 = 0$$

即: $\beta_1 = \beta_2$, σ 是单射.
其次证明 σ 是满射. 事实上, 设 $f \in V^*$, 即 f 是 V 上的线性函数. 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一组标准正交基, 且

$$\alpha = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$$

则有:

$$f(\alpha) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\xi_i)$$

另一方面, 取 $\beta = f(\xi_1)\xi_1 + f(\xi_2)\xi_2 + \cdots + f(\xi_n)\xi_n \in V$, 则:

$$f_\beta(\alpha) = (\alpha, \beta) = (\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i, \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\xi_k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i f(\xi_k)(\xi_i, \xi_k)$$

由于 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的标准正交基, 所以 $(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$. 所以:

$$f_\beta(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i f(\xi_k)\delta_{ik} = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\xi_i) = f(\alpha)$$

由 α 的任意性可知 $f = f_\beta$, 即存在向量 $\beta \in V$, 使得 $\sigma(\beta) = f_\beta = f$. 所以 σ 是满射. 综上, σ 是从 V 到 V^* 的双射.(事实上, 可以进一步验证, σ 是保加法和保乘法的, 所以 σ 是从 V 到 V^* 的一个同构映射, 从而欧几里得空间 V 与它的对偶空间 V^* 同构.)
考虑函数 $f(\alpha) = (\mathcal{A}(\alpha), \beta)$, 它是 V 上的一个实函数.对任意的 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, 有:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2, \beta) &= (\mathcal{A}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2), \beta) \\ &= (\lambda_1\mathcal{A}(\alpha_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\alpha_2), \beta) \\ &= \lambda_1(\mathcal{A}(\alpha_1), \beta) + \lambda_2(\mathcal{A}(\alpha_2), \beta) \\ &= \lambda_1 f(\alpha_1) + \lambda_2 f(\alpha_2) \end{aligned}$$

所以 $f(\alpha)$ 是 V 的线性函数, 即 $f(\alpha) \in V^*$. 所以存在唯一的 $\widetilde{\beta} \in V$, 使得 $f = f_{\widetilde{\beta}}$. 因此 $f(\alpha) = f_{\widetilde{\beta}}(\alpha)$, 即: $(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \widetilde{\beta})$.

****
有同学直接用Riesz表示定理来证明 $\widetilde{\beta}$ 的存在性. 那么也需要先定义 $f(\alpha) = (\mathcal{A}\alpha, \beta)$, 证明 $f(\alpha) \in V^*$, 再由Riesz表示定理得到存在唯一的 $\widetilde{\beta}$, 使得 $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \widetilde{\beta})$.
****

(ii) 建立映射 $\mathcal{A}^*(\beta) = \widetilde{\beta}$, 并证明所定义的映射 $\mathcal{A}^*$ 是线性的.
定义 $A^*(\beta) = \widetilde{\beta}$. 设 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_1, \beta_2 \in V$, 由定义, 有:

$$\begin{aligned}(\alpha, \mathcal{A}^*(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2)) &= (\mathcal{A}(\alpha), \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2)\\ &= \lambda_1(\mathcal{A}(\alpha), \beta_1) + \lambda_2(\mathcal{A}(\alpha_2), \beta_2)\\ &= \lambda_1(\alpha, \mathcal{A}^*(\beta_1)) + \lambda_2(\alpha, \mathcal{A}^*(\beta_2))\\ &= (\alpha, \lambda_1\mathcal{A}^*(\beta_1) + \lambda_2\mathcal{A}^*(\beta_2))\end{aligned}$$

即:

$$(\alpha, \mathcal{A}^*(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2) - \lambda_1\mathcal{A}^*(\beta_1) - \lambda_2\mathcal{A}^*(\beta_2)) = 0$$

由 α 的任意性以及内积的正定性可知, $\mathcal{A}^*(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2) = \lambda_1\mathcal{A}^*(\beta_1) + \lambda_2\mathcal{A}^*(\beta_2)$.
综上, 对于 V 内每个线性变换 $\mathcal{A}$, 其共轭变换是存在的.

唯一性:
假设另有线性变换 $\mathcal{B}$ 使得:

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{B}(\beta)), \ \ \forall \alpha, \beta \in V$$

则:

$$(\alpha, \mathcal{A}^*(\beta)) = (\alpha, \mathcal{B}\beta), \ \ \forall \alpha, \beta \in V$$

由 α 的任意性可知, $\mathcal{A}^*(\beta) = \mathcal{B}(\beta), \ \forall \beta \in V$. 从而 $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}$.
综上所述, 线性变换 $\mathcal{A}$ 的共轭变换的存在唯一性得证.

下面证明 $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

$$(\alpha, (\mathcal{A}^*)^*(\beta)) = (\mathcal{A}^*\alpha, \beta) = (\beta, \mathcal{A}^*\alpha) = (\mathcal{A}\beta, \alpha) = (\alpha, \mathcal{A}(\beta))$$

由 α 的任意性可知(取 $\alpha = (\mathcal{A}^*)^*(\beta) - \mathcal{A}(\beta))$), 则可知:

$$(\mathcal{A}^*)^*(\beta) = \mathcal{A}(\beta),\ \forall \beta \in V \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

(2)

充分性:

若 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, 任取 $\alpha, \beta \in V$, 有:

$$(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*(\beta)) = (\alpha, \mathcal{A}(\beta))$$

所以 $\mathcal{A}$ 是对称变换.

必要性:

若 $\mathcal{A}$ 是对称变换, 则:

$$(\alpha, \mathcal{A}^*(\beta)) = (\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{A}(\beta)), \ \Rightarrow \ (\alpha, \mathcal{A}^*(\beta) - \mathcal{A}(\beta))$$

由于 α 是任取的, 取 $\alpha = \mathcal{A}^*(\beta) - \mathcal{A}(\beta)$, 由内积的正定性可知:

$$\mathcal{A}^*(\beta) - \mathcal{A}(\beta) = 0, \ \ \forall \beta \in V$$

从而可得: $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

综上, $\mathcal{A}$ 是对称变换的充分必要条件是 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

PROBLEM

6.2.12

证明: 对 n 维欧式空间 V 内的任一线性变换 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ 是一个对称变换.

Solution

先证明两个结论: 对于 V 内的线性变换 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$,

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*, \ \ (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

任取 $\alpha, \beta \in V$, 有:

$$\begin{aligned}
(\alpha, (\mathcal{A} + \mathcal{B})^*(\beta)) &= ((\mathcal{A} + \mathcal{B})\alpha, \beta) = (\mathcal{A}\alpha, \beta) + (\mathcal{B}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta) + (\alpha, \mathcal{B}^*\beta) \\
&= (\alpha, (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)\beta) \\
(\alpha, (\mathcal{A}^*)^*\beta) &= (\mathcal{A}^*\alpha, \beta) = (\beta, \mathcal{A}^*\alpha) = (\mathcal{A}\beta, \alpha) = (\alpha, \mathcal{A}\beta)
\end{aligned}$$

所以由 α, β 的任意性以及内积的正定性(具体步骤自行补充完整),可得:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*,\ \ (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

于是,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^* + (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{A}$$

由 6.2.11(2) 可知, $\mathcal{A}+\mathcal{A}^*$ 是一个对称变换.

****

也可以直接做, 模仿上面两个结论证明步骤即可.

$$\begin{aligned}((\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)\alpha, \beta) &= (\mathcal{A}\alpha, \beta) + (\mathcal{A}^*\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta) + (\beta, \mathcal{A}^*\alpha) \\ &= (\alpha, \mathcal{A}^*\beta) + (\mathcal{A}\beta, \alpha) = (\alpha, \mathcal{A}^{\beta}) + (\alpha, \mathcal{A}\beta) \\ &= (\alpha, (\mathcal{A}+\mathcal{A})^*\beta)\end{aligned}$$

由对称变换的定义可知, $\mathcal{A}+\mathcal{A}^*$ 是对称变换.

****

其实本质上都是就是用共轭变换的定义以及实内积的线性性、对称性换来换去换来换去换来换去就换出来最后的结果了.

****

关于共轭变换的一些性质:

设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 是 n 维Euclid空间 V 的线性变换, $\lambda \in \mathbb{R}$, 则:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*,\ (\lambda\mathcal{A})^* = \lambda\mathcal{A}^*,\ (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*,\ (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

证明方法如上一段话所述.

PROBLEM

6.2.13

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧式空间 V 中的一个线性变换, 如果 $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, 即对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有:

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = -(\alpha, \mathcal{A}\beta)$$

则称 $\mathcal{A}$ 是一个反对称变换. 证明:

PROBLEM

(1) $\mathcal{A}$ 是反对称变换的充分必要条件是: $\mathcal{A}$ 在某一组标准正交基下的矩阵是反对称矩阵.
(2) 如果 M 是反对称变换 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 则 M 的正交补 $M^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

Solution

(1)取 V 的一组标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 设线性变换在这组基下的矩阵为 A , 即:

$$\mathcal{A}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A$$

任取 $\alpha,\beta\in V$, 设 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\xi_i$, $\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\xi_i$, 则它们在这组基下的坐标分别为:

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)' \quad Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$$

且可以得到, $\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta$ 在这组基下的坐标分别为 AX,AY . 所以:

$$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(AX)'Y=X'A'Y=-X'AY$$

$$(\alpha,\mathcal{A}\beta)=X'AY$$

比较上面两式可知 $\mathcal{A}$ 是反对称变换. 即: $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\mathcal{A}\beta)$ 的充分必要条件是

$$X'A'Y=-X'AY=X'(-A)Y$$

即 $A'=-A$, A 为反对称矩阵.

(2) 任取 $\alpha\in M^\perp$, 对于 $\forall\beta\in M$, 有 $\mathcal{A}\beta\in M$, 且:

$$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\mathcal{A}\beta)=0$$

即: $\mathcal{A}\alpha\in M^\perp$. 所以 $M^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

4.3　习题三　线性映射与线性变换

4.4　习题四　线性变换的特征值与特征向量

Chapter 5

双线性函数与二次型

5.1 习题一 双线性函数

5.2 习题二 二次型

5.3 习题三 实与复二次型的分类

5.4 习题四 正定二次型

Part II

下册

Chapter 6

带度量的线性空间

Chapter 7

线性变换的 Jordan 标准形

7.1 习题一 幂零线性变换的 Jordan 标准形

7.2 习题二 一般线性变换的 Jordan 标准形

Chapter 8

问题

8.1 插值问题

插值问题

1. 基本概念

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$.且已知它在 x_i 处的函数值 $y_i = f(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$, 即已知函数值表

x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

选取较简单的函数 $y=P(x)$ 来近似表示 $y=f(x)$, 使得满足条件:

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

则 $P(x)$ 称为插值函数, $f(x)$ 称为被插值函数, $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为插值节点.

2. 插值多项式的存在唯一性

当选取插值函数 $P(x)$ 为多项式函数时, 即选取：

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

使得满足插值条件

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

这样的问题称为n次多项式插值问题, $y=P_n(x)$ 称为 $y=f(x)$ 的n次插值多项式.

PROBLEM

定理：给定 x_i (两两不等)以及 $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, n 次插值多项式 $P_n(x)$ 存在且唯一.

Solution

请自行证明. (Hint: 待定系数法, Vandermonde行列式).

PROBLEM

3. 插值余项

在 $[a, b]$ 上用 $P_n(x)$ 近似表示 $f(x)$, 在插值节点 x_i 处时没有误差的, 但是在其它点 x 处, 一般 $P_n(x)$ 与 $f(x)$ 不相等. 记：

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

称 $R_n(x)$ 时插值多项式的余项或截断误差.引入记号：

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

定理：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $n + 1$ 阶导数存在, 则插值多项式 $P_n(x)$ 的余项为：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (*)$$

其中, $\xi \in (a, b)$ 且依赖于 x , 而 $x \in [a, b]$.

Solution

当 $x = x_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 时,

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = 0$$

而 $\omega_{n+1}(x) = 0$. 所以 $(*)$ 成立.

当 $x \neq x_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 时, 作辅助函数：

$$\phi(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega_{n+1}(x)} \omega_{n+1}(t)$$

则 $\phi(t)$ 在 $t \in [a, b]$ 上 $n + 1$ 阶可导. 易知 $t = x, x_0, \cdots, x_n$ 是 $\phi(t)$ 的 $n + 2$ 个不同零点

由Rolle定理, 在 $\phi(t)$ 的每两个零点之间至少存在一个 $\phi'(t)$ 的零点.

因此 $\phi'(t)$ 在 (a, b) 内至少有 $n{+}1$ 个互异零点.反复对 $\phi'(t), \phi''(t), \cdots, \phi^n(t)$ 用Rolle定

理, 可以得到：至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $\phi^{(n+1)}(\xi)=0$.由于：

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}P_n(t)=0,\qquad \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}w_{n+1}(t)=(n+1)!$$

因此：

$$\phi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\frac{f(x)-P_n(x)}{w_{n+1}(x)}\cdot(n+1)!=0$$

即: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

4. Lagrange插值函数

(1)拉格朗日插值基函数：

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=\prod_{k\neq i}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

(2)拉格朗日插值函数：

$$L_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)w'_{n+1}(x_i)}y_i$$

8.2 基与同构

PROBLEM

1. 证明 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.