高等代数简明教程习题解答

整理: CHEN

2017 年 6 月 15 日

目录

Part I

上册

Chapter 1

代数学的经典课题

1.1 习题一 若干准备知识

1.2 习题二 一元高次代数方程的基础知识

1.3 习题三 线性方程组

Chapter 2

向量空间与矩阵

2.1 习题一 m 维向量空间

2.2 习题二 矩阵的秩

2.3 习题三 线性方程组的理论课题

2.4 习题四 矩阵的运算

2.5 习题五 n 阶方阵

2.6 习题六 分块矩阵

Chapter 3

行列式

3.1 习题一 n 阶方阵的行列式

3.2 习题二 行列式的初步应用

3.3 习题三 Laplace 展开式与 Binet-Cauchy 公式

Chapter 4

线性空间与线性变换

4.1 习题一 线性空间的基本概念

PROBLEM

7. 判断在$\mathbb{Q}$上的线性空间$\mathbb{Q}(\omega)$内判断下列向量组是否线性相关, 并求它们的秩:

(1) $\frac{1}{2}$，3，-7； (2) 1，ω，ω^2，ω^3，ω^4； (3) ω，$\bar{\omega}$，$\sqrt{3}i$.

其中，$\mathbb{Q}(\omega)=\{a+b\omega : a,b\in\mathbb{Q}\}, w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

Solution

(1) 线性相关. 因为 $8\times\frac{1}{2}+1\times 3+1\times(-7)=0$. $r\{\frac{1}{2},3,-7\}=1$.

(2) 线性相关. 因为 $1\times 1+(-1)\times\omega^3=0$. $r\{1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4\}=2$.

(3) 线性相关. 因为 $1\times w+(-1)\times\bar{w}+(-1)\times\sqrt{3}i=0$. $r\{\omega,\bar{\omega},\sqrt{3}i\}=2$.

PROBLEM

8. 求 $\mathbb{Q}$ 上线性空间 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的维数和一组基.

Solution

注意到 $\forall q\in\mathbb{Q}(\omega)$, $q=a+b\omega$. 其中 $a,b\in\mathbb{Q}$.即任意向量 $q\in\mathbb{Q}(\omega)$, q 可由 $\{1,\omega\}$ 线性表出. 设 $k_1,k_2\in\mathbb{Q}$, 使得：$k_1 1+k_2\omega=0$,即：

$$\begin{cases} k_1-\dfrac{k_2}{2}=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}k_2=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}k_1=0\\ k_2=0\end{cases}$$

因此，$1, \omega$ 线性无关. 所以 $\{1, \omega\}$ 是 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的一组基，$\dim \mathbb{Q}(\omega) = 2$.

PROBLEM

14. 给定数域 K 上的一个 n 阶方阵 $A \neq 0$. 设

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_m \quad (a_0 \neq 0, a_i \in K)$$

是使 $f(A) = 0$ 的最低次多项式. 设 V 是由系数在 K 内的 A 的多项式的全体关于矩阵加法、数乘所组成的 K 上的线性空间，证明：

$$E,\ A,\ A^2,\ \cdots,\ A^{m-1}$$

是 V 的一组基，从而 $\dim V = m$. 求 V 中向量

$$(A - aE)^k \quad (a \in K,\ 0 \leq k \leq m)$$

在这组基下的坐标.

Solution

由于 $a_0 \neq 0$, 记最小多项式 $m(\lambda) = \dfrac{f(\lambda)}{a_0} = \lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \cdots + b_m$. 所以：

$$m(A) = A^m + b_1A^{m-1} + \cdots + b_mE = 0 \Rightarrow A^m = -b_1A^{m-1} - \cdots - b_{m-1}A - b_mE$$

继续迭代，便可用 $E, A, A^2, \cdots, A^{m-1}$ 线性表出 $A^{m+1}, A^{m+2}, \cdots$.
从而 V 中的任一元素都可以表示为

$$c_0E + c_1A + c_2A^2 + \cdots + c_{m-1}A^{m-1}$$

设 $k_0E + k_1A + k_2A^2 + \cdots + k_{m-1}A^{m-1} = 0$, 则

$$h(\lambda) = k_0 + k_1\lambda + k_2\lambda^2 + \cdots + k_{m-1}\lambda^{m-1}.$$

也是 A 的一个零化多项式. 但是注意到 $deg(h(\lambda)) < deg(f(\lambda))$, 由 $m(\lambda)$ 的定义可知：

$$h(\lambda) = k_0 + k_1\lambda + k_2\lambda^2 + \cdots + k_{m-1}\lambda^{m-1} \equiv 0 \ \Rightarrow \ k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0.$$

即 $E, A, A^2, \cdots, A^{m-1}$ 线性无关. 从而 $E, A, A^2, \cdots, A^{m-1}$ 是 V 的一组基, $\dim V = m$.

由于 A 与 aE 可交换，则

$$(A-aE)^k = A^k + k(-a)A^{k-1} + \cdots + (-aE)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i(-a)^i A^{k-i}$$

所以向量 $(A-aE)^k$ $(a \in K,\ 0 \le k \le m)$ 在基$E,\ A,\ A^2,\ \cdots,\ A^{m-1}$下的坐标为

$$\Big((-1)^k a^k,\ \cdots,\ (-1)^i C_k^i a^i,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\Big) \quad (k = 0, 1, \cdots, m-1)$$

$$\left(-\frac{a_m}{a_0} + (-1)^m a^m,\ \cdots,\ -\frac{a_i}{a_0} + (-1)^i C_m^i a^i,\ \cdots,\ -\frac{a_1}{a_0} - C_k^1 a\right) \quad (k = m)$$

PROBLEM

15. 接上题，证明

$$(A-aE)^k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$$

也是 V 的一组基.求两组基之间的过渡矩阵 T：

$$(E, A-aE, \cdots, (A-aE)^{m-1}) = (E, A, \cdots, A^{m-1})T$$

Solution

假设

$$k_0E + k_1(A-aE) + k_2(A-aE)^2 + \cdots + k_{m-1}(A-aE)^{m-1} = 0$$

则

$$g(\lambda) = k_0 + k_1(\lambda-a) + k_2(\lambda-a)^2 + \cdots + k_{m-1}(\lambda-a)^{m-1}$$

也是 A 的一个零化多项式.

但是注意到：$deg(g(\lambda)) = m-1 < m = deg(f(\lambda))$，所以由 $f(\lambda)$ 的定义可知：

$$k_0 + k_1(\lambda-a) + k_2(\lambda-a)^2 + \cdots + k_{m-1}(\lambda-a)^{m-1} \equiv 0$$

$\therefore k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0 \ \Rightarrow\ E, (A-aE), (A-aE)^2, \cdots, (A-aE)^{m-1}$线性无关.

$\because\ \dim V = m\ \ \therefore E, (A-aE), (A-aE)^2, \cdots, (A-aE)^{m-1}$ 也是 V 的一组基.

由习题 4.1.14 的结论可知，向量 $(A-aE)^k$ 在基 $E,\ A,\ A^2,\ \cdots,\ A^{m-1}$ 下的坐标为：

$$\Big((-1)^k a^k,\ \cdots,\ (-1)^i C_k^i a^i,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\Big)$$

即过渡矩阵 T 的第 $k+1$ 列 $(k = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$ 为：

$$(-1)^k a^k,\ \cdots,\ (-1)^i C_k^i a^i,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0$$

所以两组基之间的过渡矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 & \cdots & (-1)^{m-1}a^{m-1} \\ 0 & 1 & -2a & \cdots & (-1)^{m-2}C_{m-1}^{m-2}a^{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (-1)^{m-3}C_{m-1}^{m-3}a^{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{m-1}^2 a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -C_{m-1}^1 a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

PROBLEM

16.在 K^4 中求由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵, 并求向量 β 在指定的基下的坐标.

(1) $\varepsilon_1 = (1,0,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0,0)$，$\varepsilon_3 = (0,0,1,0), \varepsilon_4 = (0,0,0,1)$.

$\eta_1 = (2,1,-1,1)$, $\eta_2 = (0,3,1,0)$，$\eta_3 = (5,3,2,1)$, $\eta_4 = (6,6,1,3)$.

求 $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标.

(3) $\varepsilon_1 = (1,1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1,1,-1,-1)$, $\varepsilon_3 = (1,-1,1,-1)$, $\varepsilon_4 = (1,-1,-1,1)$. $\eta_1 = (1,1,0,1)$, $\eta_2 = (2,1,3,1)$，$\eta_3 = (1,1,0,0)$, $\eta_4 = (0,1,-1,-1)$.

求 $\beta = (1,0,0,-1)$ 在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标.

Solution

(1) 分别以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 和 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 作列向量组排列成两个矩阵A及B：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}$$

可以看出，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵为：

$$T=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}$$

设 β 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标为 $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)'$,在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为
$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)'$. 注意到 $X=(b_1,b_2,b_3,b_4)$，所以

$$X=TY\Rightarrow Y=T^{-1}X$$

又因为(请自己计算)

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{9}&\frac{1}{3}&-1&-\frac{11}{9}\\\frac{1}{27}&\frac{4}{9}&-\frac{1}{3}&\frac{23}{27}\\\frac{1}{3}&0&0&-\frac{2}{3}\\-\frac{7}{27}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}&\frac{26}{27}\end{bmatrix}$$

所以 β 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标为 $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)'$ 坐标为

$$\begin{cases}y_1&=&\frac{4}{9}b_1&+\frac{1}{3}b_2&-b_3&-\frac{11}{9}b_4\\y_2&=&\frac{1}{27}b_1&+\frac{4}{9}b_2&-\frac{1}{3}b_3&-\frac{23}{27}b_4\\y_3&=&\frac{1}{3}b_1&&&-\frac{2}{3}b_4\\y_4&=&-\frac{7}{27}b_1&+\frac{1}{9}b_2&+\frac{1}{3}b_3&+\frac{26}{27}b_4\end{cases}$$

(3) 分别以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 和 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 作列向量组排列成两个矩阵A及B：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{bmatrix}$$

做初等变换如下：

$$(A,B)=\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&2&1&0\\1&1&-1&-1&1&1&1&1\\1&-1&1&-1&0&3&0&-1\\1&-1&-1&1&1&1&0&-1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&2&1&0\\0&0&-2&-2&0&-1&0&1\\0&-2&0&-2&-1&1&-1&-1\\0&-2&-2&0&0&-1&-1&-1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&2&1&0\\0&2&0&2&1&-1&1&1\\0&2&2&0&0&1&1&1\\0&0&2&2&0&1&0&-1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&2&1&0\\0&2&0&2&1&-1&1&1\\0&0&2&-2&-1&2&0&0\\0&0&0&4&1&-1&0&-1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&2&1&0\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{4}\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&\frac{3}{4}&\frac{7}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{4}\end{array}\right]$$

所以，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵为：

$$T=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&7&2&-1\\1&-1&2&3\\-1&3&0&-1\\1&-1&0&-1\end{bmatrix}$$

设 β 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标为 $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)'$，从而

$$\beta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}\Longrightarrow B\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

解该非齐次线性方程组可得：

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (-2, -\frac{1}{2}, 4, -\frac{3}{2})$$

即

$$\beta = -2\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 + 4\eta_3 - \frac{3}{2}\eta_4.$$

PROBLEM

17. 接上题(1), 求一非零向量 ξ, 使得它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 与 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下有相同的坐标.

Solution

设 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$与$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标都为 (z_1, z_2, z_3, z_4). 则：

$$\xi = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - B)\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = 0$$

解上述齐次线性方程组：

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以，取$\xi = (-a, -a, -a, a)$ $(a \neq 0)$.

PROBLEM

18. 考察数域 K 上的线性空间 $K[x]_n$. 给定 K 上 n 个两两不等的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 令

$$f_i(x) = (x - a_1)\cdots\widehat{(x - a_i)}\cdots(x - a_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(记号 “ $\widehat{}$ ” 表示去掉该项). 证明: $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 为 $K[x]_n$ 的一组基.

Solution

方法一:

设$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)\equiv 0$. 假设存在不全为0的$k_1,k_2,\cdots,k_n$使得左式成立.

记$k_i\neq 0$, 则当 $x=a_i$ 时,

$$0=k_1f_1(a_i)+\cdots+k_{i-1}f_{i-1}(a_i)+k_{i+1}f_{i+1}(a_i)+\cdots+k_nf_n(a_i)=-k_if_i(a_i)\neq 0$$

矛盾! 所以$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$. 即$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$线性无关.

又由于

$dimK_n[x]=n$, 所以$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$是$K_n[x]$的一组基.

方法二:

对于$\forall f(x)\in K[x]_n$，考虑如下插值函数(Lagrange插值函数):

$$L_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n}f(a_i)l_i(x)\quad \text{其中，}\ l_i(x)=\frac{f_i(x)}{f_i(a_i)}=\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}$$

引入记号：$\omega_n(x)=(x-a_1)(x-a_1)\cdots(x-a_n)$,则拉格朗日插值多项式的余项为:

$$R_{n-1}(x)=f(x)-L_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}w_n(x)\equiv 0\quad (\text{因为}f^{(n)}(\xi))\equiv 0)$$

所以

$$f(x)=L_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(f(a_i)\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(a_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}\prod_{j\neq i}(x-a_j)\right)=\sum_{i=1}^{n}k_if_i(x)$$

其中，$k_i=\dfrac{f(a_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}$, $f_i(x)=\prod\limits_{j\neq i}(x-a_j)$

即：任意$f\in K[x]_n$, f可以由$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$线性表出.

另一方面，$\dim(K[x]_n)=n$, $\therefore f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是$K[x]_n$的一组基.

PROBLEM

23. 证明线性空间定义的八条公理，其中向量加法的交换律可以由其他七条公理推导出来.

Solution

公理（iv）保证右逆存在，即对任一 $\alpha \in V$ 都存在 $\beta \in V$，使 $\alpha+\beta=0$.

$$\begin{aligned}(\beta+\alpha)+(\beta+\alpha) &= \beta+(\alpha+\beta)+\alpha\text{（结合律）}\\ &= (\beta+0)+\alpha\\ &= \beta+\alpha\text{（右零元）}\end{aligned}$$

由右消去律得 $\beta+\alpha=0$. 这说明左逆存在且等于右逆.
公理（iii）保证右单位元存在，即存在一个元素 $0 \in V$，使得对一切 $\alpha \in V$，有 $\alpha+0=\alpha$. 因为 $0+\alpha=\alpha+(-\alpha)+\alpha=\alpha+0=\alpha$，所以左单位元存在且等于右单位元，从而有左消去律成立.
一方面，

$$(1+1)(\alpha+\beta)=(1+1)\alpha+(1+1)\beta=\alpha+\alpha+\beta+\beta.$$

另一方面，

$$(1+1)(\alpha+\beta)=1(\alpha+\beta)+1(\alpha+\beta)=\alpha+\beta+\alpha+\beta.$$

再由消去律得 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$. 这就证明了向量加法满足交换律.

4.2　习题二　子空间与商空间

PROBLEM

1. 设$A \in M_n(K)$.
(1)证明：与A可交换的n阶方阵的全体组成$M_n(K)$的一个子空间. 记此子空间为$C(A)$.
(2)给定对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix}$$

求$C(A)$的维数和一组基.

Solution

(1) 由于E与A可交换，因此$C(A)$非空集.设$B_1, B_2 \in C(A)$, 则$B_1A = AB_1, B_2A = AB_2$.

从而:

$$(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A = AB_1 + AB_1 = A(B_1 + B_2)$$

$$(kB_1)A = k(B_1A) = k(AB_1) = A(kB_1),\ \ \forall k \in K$$

所以：与A可交换的n阶方阵的全体组成$M_n(K)$的一个子空间.

(2) 令$P = (x_{ij})_{n\times n} \in C(A)$, 则：

$$AP(i,j) = ix_{ij} = jx_{ij} = PA(i,j) \ \ \Rightarrow \ \ (i-j)x_{ij} = 0$$

所以：

$$x_{ij} = 0\ (i \neq j),\ \ x_{ij} \in K\ (i = j)$$

即：与A可交换的矩阵为任意对角矩阵.
由于任意对角矩阵 $D = diag\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 均可由 $E_{11}, E_{22}, \cdots, E_{nn}$ 线性表出,即：

$$D = diag\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = a_1E_{11} + a_2E_{22} + \cdots + a_nE_{nn}$$

其中，E_{ii}为(i,i) 元素为 1，其它元素为 0 的 n 阶矩阵.

且 $E_{11}, E_{22}, \cdots, E_{nn}$ 线性无关.
所以，$E_{11}, E_{22}, \cdots, E_{nn}$是$C(A)$的一组基, $\dim(C(A)) = n$.

PROBLEM

2. 接上题. 取 $n = 3$，令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

求$C(A)$的维数和一组基.

Solution

设$P = (x_{ij})_{3\times 3}$, 则：

$$PA = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + 3x_{13} & x_{12} + x_{13} & 2x_{13} \\ x_{21} + 3x_{23} & x_{22} + x_{23} & 2x_{23} \\ x_{31} + 3x_{33} & x_{32} + x_{33} & 2x_{33} \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 3x_{11} + x_{21} + 2x_{31} & 3x_{12} + x_{22} + 2x_{32} & 3x_{13} + x_{23} + 2x_{33} \end{bmatrix}$$

由于$PA = AP$，则：

$$x_{13} = 0,\ x_{23} = 0,\ x_{31} + 3x_{33} = 3x_{11} + x_{21} + 2x_{31},\ x_{32} + x_{33} = 3x_{12} + x_{22} + 2x_{32}$$

整理可得：

$$x_{31} = -3x_{11} + 9x_{12} - x_{21} + 3x_{22} + 3x_{32}, \quad x_{33} = 3x_{12} + x_{22} + x_{32}$$

所以，

$$P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ -3x_{11} + 9x_{12} - x_{21} + 3x_{22} + 3x_{32} & x_{32} & 3x_{12} + x_{22} + x_{32} \end{bmatrix}$$

$$= x_{11}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{bmatrix}+x_{12}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\9&0&3\end{bmatrix}+x_{21}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}+x_{22}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}+x_{32}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&1&1\end{bmatrix}$$

又由于

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\9&0&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&1&1\end{bmatrix}$$

线性无关. 所以，$\dim(C(A))=5$, $C(A)$的一组基为：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-3&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\9&0&3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&1&1\end{bmatrix}$$

PROBLEM

3. 在习题一第 2 题 (5) 的线性空间中给定子集 $M=\{(a,0)|a\in\mathbb{R}\}$，$N=\{(0,b)|b\in\mathbb{R}\}$. 问 M,N 是否为子空间?全体实数的二元有序数组所成的集合关于下面的定义的运算：

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)$$

$$k\circ(a,b)=\left[ka,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right]$$

Solution

(1) $M=\{(a,0)|a\in\mathbb{R}\}$ 不是子空间.
因为取$(a_1,0),(a_2,0)\in M$ 且满足$a_1a_2\neq 0$,则：

$$(a_1,0)\oplus(a_2,0)=(a_1+a_2,a_1a_2)\notin M$$

即对加法运算不封闭. 所以M不是子空间.

(2) $N=\{(0,b)|b\in\mathbb{R}\}$是子空间.
显然，N非空集. 任取$(0,b_1),(0,b_2)\in N$, 有：

$$(0,b_1)\oplus(0,b_2)=(0,b_1+b_2)\in N$$

$$k \circ (0,b) = [0,kb], \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

即对加法、数乘运算封闭. 所以N是子空间.

PROBLEM

4. 在数域 K 上的 n 维向量空间 K^n 中考察坐标全为有理数的向量所成的子集

$$M = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in K^n | a_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

问M是否为K^n的子空间.

Solution

(1)当$K = \mathbb{Q}$时，M是K^n的子空间.显然M非空集.
任取$(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_n^{(1)})$，$(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \cdots, a_n^{(2)}) \in K^n, a_i^{(j)} \in Q$,有：

$$(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_n^{(1)}) + (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \cdots, a_n^{(2)}) \in M$$

$$k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) \in M, \quad \forall k \in K = \mathbb{Q}$$

即对加法运算和数乘运算封闭. 所以M是K^n的子空间.

(2) 当$\mathbb{Q} \subsetneq K$ 时，N 不是 K^n的子空间.取$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{Q}, k \in K \setminus \mathbb{Q}$, 则：

$$k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) \notin M, \quad (\text{因为} ka_i \notin \mathbb{Q})$$

即对数乘运算不封闭. 所以M不是K^n的子空间.

PROBLEM

5. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看做有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间(加法为复数加法,与 $\mathbb{Q}$ 中元素的数乘为有理数与复数的乘法)，问全体实数所成的子集 $\mathbb{R}$ 是否是一个子空间?

Solution

显然，$\mathbb{R}$ 不是空集. 任取 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, 则：

$$a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$$

$$ka \in R, \quad k \in \mathbb{Q}$$

所以, 全体实数所成的子集$\mathbb{R}$是该线性空间的一个子空间.

PROBLEM

6. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看做数域 $\mathbb{Q}(i)$上的线性空间(加法为复数加法,数乘为复数乘法). 问全体实数所成的子集 $\mathbb{R}$ 是否是一个子空间?

Solution

全体实数所成的子集$\mathbb{R}$不是一个子空间. 任取$a \in \mathbb{R}$, 有

$$(x+iy)a = ax + i(ay), \quad x+iy \in \mathbb{Q}(i)$$

当 $ay \neq 0$ 时，$(x+iy)a \notin R$. 所以全体实数所成的子集 $\mathbb{R}$ 不是一个子空间.

PROBLEM

10. 证明：有限维向量空间 V 上的任一子空间 M 都可以看作是 V 内一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间.

Solution

由于子空间 M 也是线性空间，而线性空间必有基.
记 $\dim M = s \leq \dim V$，可以找到 M 中的一组向量：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in M \subset V$$

它们是线性空间 M 的一组基. 记 $M_1 = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$.
任取 $\beta \in M$, 由基的定义可知, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出. $\Rightarrow \beta \in M_1$

$$\Rightarrow M \subset M_1$$

任取$\gamma \in M_1$, 则$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$
由于线性空间M对加法和数乘运算封闭,则: $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \in M$

$$\Rightarrow M_1 \subset M$$

即：

$$M_1 = M$$

综上所述:有限维向量空间 V 上的任一子空间 M 都可以看作是 V 内一个向量组.
$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间.

PROBLEM

14. 求下列向量 α_i 所生成的子空间与下列由β_i生成的子空间的交与和的维数和一组基:
(3) $\alpha_1 = (1, 2, -1, -2),\ \alpha_2 = (3, 1, 1, 1),\ \alpha_3 = (-1, 0, 1, -1)$
$\beta_1 = (2, 5, -6, -5),\ \beta_2 = (-1, 2, -7, 3)$

Solution

(i) 求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2)$ 的维数和一组基. 因为

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$$

只要求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 的一个极大线性无关组即可.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & \alpha_2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & \alpha_3 \\ 2 & 5 & -6 & -5 & \beta_1 \\ -1 & 2 & -7 & 3 & \beta_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & -5 & 4 & 7 & \alpha_2 - 3\alpha_1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 4 & -8 & 1 & \beta_2 + \alpha_1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 & -5 & 4 & 7 & \alpha_2 - 3\alpha_1 \\ 0 & 4 & -8 & 1 & \beta_2 + \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 5\alpha_1 + \alpha_3 - 2\beta_1 \\ 0 & 0 & -16 & 2 & -13\alpha_1 + \alpha_2 + 5\beta_1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 9\alpha_1 - 4\beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & \beta_1 - 2\alpha_1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 5\alpha_1 + \alpha_3 - 2\beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4\alpha_1 - \alpha_3 - 2\beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - \beta_1 \end{bmatrix}$$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 的秩为4. 又因为

$$-3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - \beta_1 = 0 \implies \beta_1 = -3\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_2$$

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$是$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2)$ 的一组基, 其维数为4.

(ii) 求$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$的维数和一组基. 因为

$$\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3,\quad \dim L(\beta_1,\beta_2)=2$$

从而: $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)=1$
从(i)中可知:

$$-3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-\beta_1=0-3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=\beta_1\in L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$$

而 $\beta_1=(2,5,-6,-5)\neq(0,0,0,0)$, 所以$\beta_1$是$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$的一组基.

PROBLEM

16. 设 M 是线性空间 $M_n(K)$ 内全体对称矩阵所成的子空间, N 是由全体反对称矩阵所成的子空间. 证明:

$$M_n(K)=M\oplus N$$

Solution

任取 $A\in M_n(K)$, 有:

$$(A+A')'=A'+A,\quad (A-A')'=A'-A=-(A-A)'$$

即 $A+A'\in M,\ A-A'\in N$. 又因为:

$$A=\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}$$

所以 $A\in M+N$. 从而 $M_n(K)\subset M+N$. 而 $M+N\subset M_n(K)$, 所以 $M_n(K)=M+N$.
再证明 $M_n(K)=M\oplus N$, 只需要证明 $M\cap N=0$. 任取 $B\in M\cap N$, 则

$$B'=B,\ B'=-B\ \ \Rightarrow -B=B\ \ \Rightarrow B=0.$$

从而 $M\cap N=0$. 综上: $M_n(K)=M\oplus N$.

PROBLEM

17。 在线性空间 $M_n(K)$ 中,命 M, N 分别表示全体上三角、下三角矩阵所成的子空间. 问是否有 $M_n(K) = M \oplus N$? 为什么?

Solution

$M_n(K)$ 不是 M 与 N 的直和. 因为对于任意对角矩阵 $D = diag\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 都有:

$$D \in M \cap N$$

当 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ 时, $0 \neq D \in M \cap N$.所以 $M_n(K) \neq M \oplus N$.

PROBLEM

18. 设 M_1 是齐次方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

的解空间, 而 M_2 是齐次线性方程组

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

的解空间. 证明: $K^n = M_1 \oplus M_2$.

Solution

任取$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in K^n$, 下证明: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in M_1$, $\alpha_2 \in M_2$ 考虑到 M_1, M_2 中向量坐标的特点, 设 $\alpha_1 = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $\alpha_2 = (c, c, \cdots, c)$. 则:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1 + c, b_2 + c, \cdots, b_n + c) \text{ 且 } b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0$$

即

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nc = 0 \;\Rightarrow\; c = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

即对于$\forall \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in K^n$, 可以找到

$$\alpha_1 = \left(a_1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}, a_2 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}, \cdots, a_n - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \right) \in M_1,$$

$$\alpha_2=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n},\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n},\cdots,\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)\in M_2$$

使得$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$.
从而$K^n\subset M_1+M_2$. 显然, $M_1+M_2\subset K^n$, 所以 $K^n=M_1+M_2$.
下证明: $M_1\cap M_2=0$. 任取$\beta=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in M_1\cap M_2$, 有:

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=0,\ \ d_1=d_2=\cdots=d_n$$

解得: $d_1=d_2=\cdots=d_n=0$. 即 $M_1\cap M_2=0$.
综上所述: $K^n=M_1\oplus M_2$.

PROBLEM

21. 设M,N是数域K上线性空间V的两个子空间且$M\subseteq N$. 设M的另一个补空间为L, 即$V=M\oplus L$, 证明：$N=M\oplus(N\cap L)$.

Solution

先证明:$N=M+(N\cap L)=N\cap M+N\cap L$. 由于$V=M\oplus L$, 所以$N\subset M+L$, 从而:

$$N=N\cap(M+L)$$

任取$\alpha\in N$, 由于$N\subset M+L$, 所以$\alpha\in M+L$. 从而:

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\quad \alpha_1\in M,\quad \alpha_2\in L$$

由于$\alpha_1\in M\subset N$, 所以$\alpha_2=\alpha-\alpha_1\in N$. 即$\alpha_2\in N\cap L$
所以$\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in(N\cap M)+(N\cap L)$. 进而: $N\subset(N\cap M)+(N\cap L)$
任取$\beta_1\in(N\cap M)\subset N$, $\beta_2\in(N\cap L)\subset N$, 由线性空间对加法封闭可知$\beta_1+\beta_2\in N$.
所以$(N\cap M)+(N\cap L)\subset N$.
综上所述, $N=(N\cap M)+(N\cap L)=M+(N\cap L)$.
另一方面,

$$M\cap(N\cap L)=N\cap(M\cap L)=N\cap 0=0\ \ (\text{因为}M+L\text{是直和}).$$

所以$N=M\oplus(N\cap L)$.

注: 一般地，若 $V = M \oplus L$, N 是 V 的一个子空间, 那么$N = (N \cap M) \oplus (N \cap L)$ 不成立.

PROBLEM

23. 设 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ 为数域 K 上线性空间 V 的子空间. 证明和 $\sum\limits_{i=1}^{k} M_i$ 为直和的充分必要条件是

$$M_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} M_j\right) = 0 \quad (i = 2, 3, \cdots, k)$$

Solution

必要性:
设$\sum\limits_{i=1}^{k} M_i$是直和, 则:

$$M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j\right) = 0 \quad i == 1, 2, \cdots, k =$$

注意到:

$$M_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} M_j\right) \subset M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j\right) = 0 \quad (i = 2, 3, \cdots, k)$$

从而: $M_i \cap \left(\sum\limits_{j=1}^{i-1} M_j\right) = 0, \;\; i = (2, 3, \cdots, k)$.

充分性:
设$\alpha_i \in M_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, 使得:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 0 \in \sum_{i=1}^{k} M_i$$

从而, $\alpha_k = -\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{k-1} \in M_k \cap \left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} M_i\right)$.
又因为 $M_k \cap \left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} M_i\right) = 0$, 所以, $\alpha_k = 0$. 从而, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} = 0$.

继续做上述步骤, 可以得到: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. 即$\sum\limits_{i=1}^{k} M_i$中 0 向量表示方法唯一.
所以, $\sum\limits_{i=1}^{k} M_i$是直和.

PROBLEM

26. 令 M 为 $M_n(K)$ 内全体反对称矩阵所成的子空间. 试求 $M_n(K)/M$ 的维数和一组基.

Solution

由于$\dim M_n(K) = n^2,\ \dim M = \dfrac{n(n-1)}{2}$, 所以:

$$\dim\left(M_n(K)/M\right) = \dim M_n(k) - \dim M = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

取M的一组基$E_{ij} - E_{ji}\ \ (1 \le i < j \le n)$, 将它扩充为$M_n(K)$中的向量组:

$$E_{ij} - E_{ji},\ \ E_{ji},\ \ E_{kk} \qquad (1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n) \quad (*)$$

下证明该向量组是$M_n(K)$的一组基. 设:

$$\sum_{1 \le i < j \le n} [k_{ij}(E_{ij} - E_{ji}) + k_{ji}E_{ji}] + \sum_{s=1}^{n} k_s E_{ss} = 0$$

可得到如下矩阵:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} - k_{12} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} - k_{13} & k_{32} - k_{23} & k_{33} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} - k_{1n} & k_{n2} - k_{2n} & k_{n3} - k_{3n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

从而$k_{ij} = 0,\ \ (1 \le i, j \le n)$. 从而向量组$(*)$线性无关.
而$\dim M_n(K) = n^2$, 所以$(*)$是$M_n(K)$的一组基.
对于$M_n(K)/M$中任意向量$A + M$,有:

$$\begin{aligned} A + M &= \sum_{1 \le i < j \le n} [c_{ij}(E_{ij} - Eji) + c_{ji}E_{ji}] + \sum_{s=1}^{n} c_{ss}E_{ss} + M \\ &= \sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ji}E_{ji} + M = \sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ji}(E_{ji} + M) \end{aligned}$$

而 $\dim(M_n(K)/M) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, 所以 $E_{ji}+M \quad (1 \le i \le j \le n)$ 是 $M_n(K)/M$ 的一组基.

PROBLEM

27. 设 M 为线性空间 V 的一个子空间. 在 M 内取定一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$, 用两种方式扩充为 V 的基

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \eta_{r+1}, \cdots, \eta_n$$

这两组基之间的过渡矩阵为T, 即

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \eta_{r+1}, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n)T$$

其中,

$$T = \begin{bmatrix} E_r & * \\ 0 & T_0 \end{bmatrix}$$

证明: V/M内两组基

$$\bar{\varepsilon}_{r+1} = \varepsilon_{r+1} + M,\ \bar{\varepsilon}_{r+2} = \varepsilon_{r+2} + M,\ \cdots,\ \bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_n + M,$$

$$\bar{\eta}_{r+1} = \eta_{r+1} + M,\ \bar{\eta}_{r+2} = \eta_{r+2} + M,\ \cdots,\ \bar{\eta}_n = \eta_n + M,$$

之间的过渡矩阵为:

$$(\bar{\eta}_{r+1}, \cdots, \bar{\eta}_n) = (\bar{\varepsilon}_{r+1}, \cdots, \bar{\varepsilon}_n)T_0$$

Solution

由题目条件可知:

$$\eta_i = t_{1,i}\varepsilon_1 + t_{2,i}\varepsilon_2 + \cdots + t_{n.i}\varepsilon_n \quad (i = r+1, r+2, \cdots, n)$$

其中, $t_{i,j}$ 表示矩阵 T 的第 i 行第 j 列元素. 从而:

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_i = \eta_i + M &= t_{1,i}\varepsilon_1 + t_{2,i}\varepsilon_2 + \cdots + t_{n.i}\varepsilon_n + M \\ &= \sum_{j=r+1}^{n} t_{j,i}\varepsilon_j + M = \sum_{j=r+1}^{n} t_{j,i}\left(\varepsilon_j + M\right) = \sum_{j=r+1}^{n} t_{j,i}\bar{\varepsilon}_i.\end{aligned}$$

即 T_0 是一个 $(n-r)\times(n-r)$ 矩阵, 它为基 $\bar{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\bar{\varepsilon}_n$ 到基 $\bar{\eta}_{r+1},\cdots,\bar{\eta}_n$ 的过渡矩阵, 即

$$(\bar{\eta}_{r+1},\cdots,\bar{\eta}_n) = (\bar{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\bar{\varepsilon}_n)T_0$$

PROBLEM

29. 设 K,F,L 是三个数域, 且 $K\subset F\subset L$. 如果 F 作为 K 上的线性空间是 m 维的，L 作为 F 上的线性空间是 n 维的.（其加法，数乘都是数的加法与乘法）.证明 L 作为 K 上的线性空间是 mn 维的.

Solution

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 F 上的线性空间 L 的一组基，则对任意 $l\in L$，存在 $f_i\in F$，使得 $l=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\varepsilon_i$. 又设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 是 F 的一组基. 对 $i=1,2,\cdots,n$，存在 $k_{ij}\in K$，使得 $f_i=\sum\limits_{j=1}^{m} k_{ij}\eta_j$. 因为

$$l=\sum_{i=1}^{n} f_i\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\right)\eta_j\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\left(\eta_j\varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\gamma_{ij},$$

所以由 mn 个向量 $\gamma_{ij}=\eta_j\varepsilon_i(1\le i\le n, 1\le j\le m)$ 组成的向量组张成了 L. 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} k_{ij}\gamma_{ij}=0$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\left(\eta_j\varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} k_{ij}\eta_j\right)\varepsilon_i = 0 &\implies \sum_{j=1}^{m} k_{ij}\eta_j = 0 \\ &\implies k_{ij} = 0\ (i=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$

因此这 mn 个向量 γ_{ij} 线性无关. 于是我们证明了 K 上的线性空间 L 是 mn 维的，它的一组基是 $\{\gamma_{ij}\}$ $(1\le i\le n, 1\le j\le m)$.

4.3 习题三 线性映射与线性变换

PROBLEM

1. 设 m, n 为正整数且 $m < n$. 定义 K^n 到 K^m 的映射 f 如下:若 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 则令

$$f(\alpha) = (a_1, a_2, \cdots, a_m) \in K^m.$$

又定义 K^m 到 K^n 的映射 g 如下:若 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$, 则令

$$g(\alpha) = (a_1, a_2, \cdots, a_m, 0, \cdots, 0) \in K^n$$

证明 f, g 均为线性映射, 并求 $\operatorname{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$, $\mathrm{Coker} f$, $\operatorname{Ker} g$, $\mathrm{Im} g$, $\mathrm{Coker} g$.

Solution

(1) 对任意 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in K^n$, 和任意 $k_1, k_2 \in K$, 有:

$$\begin{aligned} f(k_1\alpha + k_2\beta) &= (k_1a_1 + k_2b_1, k_1a_2 + k_2b_2, \cdots, k_1a_m + k_2b_m) \\ &= k_1(a_1, a_2, \cdots, a_m) + k_2(b_1, b_2, \cdots, b_m) \\ &= k_1 f(\alpha) + k_2 f(\beta) \end{aligned}$$

所以 f 为线性映射. 下求 $\operatorname{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$, $\mathrm{Coker} f$.

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$$

所以 $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, \cdots, 0, a_{m+1}, \cdots, a_n) | a_{m+i} \in K\}$;
并且 $\mathrm{Im} f = K^m$, $\mathrm{Coker} f = V/\mathrm{Im} f = \{0 + K^m\}$.

(2)对于映射 g 的证明求解与(1)类似, 便不赘述.

$\operatorname{Ker} g = \{0\}$, $\mathrm{Im} g = \{(a_1, \cdots, a_m, 0, \cdots, 0) | a_i \in K\}$, $\mathrm{Coker} g = L\{\varepsilon_{m+1} + \mathrm{Im} g, \cdots, \varepsilon_n + \mathrm{Im} g\}$

其中, ε_i 是 K^n 中的坐标向量.

PROBLEM

5. 将数域 $\mathbb{Q}(i)$ 与 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 都看作 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间(加法为复数加法, 数乘为有理数与复数的乘法), 找出它们之间的一个同构映射.

Solution

注意到 $\mathbb{Q}(i)=a+bi, \mathbb{Q}(\sqrt{2})=a+b\sqrt{2}$, 其中 $a,b\in\mathbb{Q}$. 建立如下映射 τ:

$$\begin{aligned}\tau:\quad \mathbb{Q}(i) &\longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})\\ a+bi &\longmapsto a+b\sqrt{2}\end{aligned}$$

下证明, τ 为 $\mathbb{Q}(i)$ 到 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的同构映射. 任取$a+bi, c+di\in\mathbb{Q}(i)$, 有

$$\begin{aligned}\tau((a+bi)+(c+di)) &= \tau((a+c)+(b+d)i)\\ &=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\\ &=(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})\\ &=\tau(a+bi)+\tau(c+di)\end{aligned}$$

任取 $a+bi\in\mathbb{Q}(i), k\in Q$, 有

$$\tau(k(a+bi))=\tau(ka+kbi)=ka+kb\sqrt{2}=k(a+b\sqrt{2})=k\tau(a+bi)$$

所以τ是线性映射. τ显然是一个双射, 所以τ是$\mathbb{Q}(i)$到$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$的同构映射.

PROBLEM

6. 定义 K^4 到 K^3 的映射

$$f\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+x_2+2x_3+x_4\\-2x_2+x_3\\-x_1-x_2+3x_3+x_4\end{bmatrix}$$

证明 f 是一个线性映射, 求 $\mathrm{Ker}\, f, \mathrm{Im} f, \mathrm{Coker} f$. 在 K^4 内取一组基

$$\varepsilon_1=(1,0,1,1)',\quad \varepsilon_2=(0,1,0,1)',\quad \varepsilon_3=(0,0,1,0)',\quad \varepsilon_4=(0,0,2,1)'$$

又在K^3内取定一组基

$$\eta_1=(1,1,1)',\quad \eta_2=(1,0,-1)',\quad \eta_3=(0,1,0)'$$

求 f 在给定基下的矩阵.

Solution

对于任意 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)'\in K^4$

$$f\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+x_2+2x_3+x_4\\-2x_2+x_3\\-x_1-x_2+3x_3+x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&2&1\\0&-2&1&0\\-1&-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=AX$$

所以 $\forall X,Y\in K^4,\forall k_1,k_2\in K$, 有:

$$f(k_1X+k_2Y)=A(k_1X+k_2Y)=k_1AX+k_2AY=k_1f(X)+k_2f(Y)$$

所以, f是 K^4 到 K^3 的线性映射.根据线性映射的核与象的定义, Ker f 与Im f 实际上分别为为四元齐次方程组 $AX=0$ 的解空间与矩阵A的列空间, 于是:

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&2&1\\0&-2&1&0\\-1&-1&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{5}{2}&-1\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

于是 $AX=0$ 的一个基础解系为:

$$\alpha_1=(5,1,2,0)',\quad \alpha_2=(1,0,0,1)'$$

从而Ker$f=L(\alpha_1,\alpha_2)$. 同时, 从 A 的约化阶梯型矩阵可以看出, A 的列向量组的一个极大线性无关组是:

$$\beta_1=(1,0,-1)',\quad \beta_2=(1,-2,-1)'$$

所以, Im$f=L(\beta_1,\beta_2)$. 考虑 $(\beta_1,\beta_2)'$

$$(\beta_1,\beta_2)'=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\end{bmatrix}$$

所以, 可以添加 $\beta_3=(0,0,1)'$ 进入 $\{\beta_1,\beta_2\}$ 中, 使得 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 成为 K^3 的一组基.

从而, Coker$f=L(\beta_3+\text{Im}f)$

又由于:

$$f(\varepsilon_1)=(2,1,3)',\quad f(\varepsilon_2)=(2,-2,0)',\quad f(\varepsilon_3)=(2,1,3)',\quad f(\varepsilon_4)=(5,2,7)'$$

并且,

$$A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)T$$

从而 f 在 K^4 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 和 K^3 的基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵 T 为:

$$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^{-1}A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$$
$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&2&2&5\\1&-2&1&2\\3&0&3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&1&\frac{5}{2}&6\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}&-1\\-\frac{3}{2}&-3&-\frac{3}{2}&-4\end{bmatrix}$$

PROBLEM

7. 定义 K^3 到 K^4 的映射 f 如下:

$$f\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\-x_1+x_2+x_3\\2x_1+x_3\\x_2+2x_3\end{bmatrix}$$

(1) 证明 f 是一个线性映射, 求 $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Coker} f$.

(2) 在K^3内取定一组基

$$\eta_1=(1,1,1),\quad \eta_2=(1,0,-1),\quad \eta_3=(0,1,1)$$

在K^4内取一组基

$$\varepsilon_1=(1,0,1,1),\quad \varepsilon_2=(0,1,0,1),\quad \varepsilon_3=(0,0,1,0),\quad \varepsilon_4=(0,0,2,1)$$

求f在给定基下的矩阵.

Solution

(1) 对于 $\forall X=(x_1,x_2,x_3)\in K^3$, 有:

$$f\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\-x_1+x_2+x_3\\2x_1+x_3\\x_2+2x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=AX$$

对于$\forall X, Y \in K^3, k_1, k_2 \in K$, 有:

$$f(k_1X + k_2Y) = A(k_1X + k_2Y) = k_1AX + k_2AY = k_1f(X) + k_2f(Y)$$

所以, f是K^3到K^4的一个线性映射.根据线性映射的核与象的定义, $\mathrm{Ker}\, f$与$\mathrm{Im}f$实际上分别为为三元齐次方程组$AX = 0$的解空间与矩阵A的列空间, 于是:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是, $\mathrm{Ker}\, f = 0$, 从A的约化阶梯型矩阵可以看出, A的列向量的一个极大线性无关组为:

$$\alpha_1 = (1, -1, 2, 0), \quad \alpha_2 = (0, 1, 0, 1), \quad \alpha_3 = (1, 1, 1, 2)$$

所以,$\mathrm{Im}f = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 考虑$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)'$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以可以添加 $\alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$ 进入 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, 使得 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 成为 K^4 的一组基.

从而, $\mathrm{Coker}f = L(\alpha_4 + \mathrm{Im}f)$.

(2) 注意到:

$$f(\eta_1) = (2, 1, 3, 3)', \quad f(\eta_2) = (0, -2, 1, -2)', \quad f(\eta_3) = (0, 1, 0, 1)$$

并且

$$f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)T$$

从而, f 在 K^3 的基 η_1, η_2, η_3 和 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵 T 为:

$$T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^{-1}f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEM

9. 判断下面定义的变换哪些是线性的, 哪些则不是:
(1)在线性空间V中, $\mathcal{A}\xi=\xi+\alpha$, 其中$\alpha\in V$是一个固定的向量;
(2)在线性空间V中, 令$\mathcal{A}\xi=\alpha$, 其中$\alpha\in V$是一个固定的向量;
(3)在K^3中, 令$\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$;
(4)在K^3中, 令$\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$;
(5)在$K[x]$中, 令$\mathcal{A}f(x)=f(x+1)$;
(6)在$K[x]$中, 令$\mathcal{A}f(x)=f(x_0)$, 其中 $x_0\in K$是一个固定的数;
(7)把复数域看做复数域上的线性空间, 令$\mathcal{A}\xi=\bar{\xi}$;
(8)在$M_n(K)$中, 令$\mathcal{A}(X)=BXC$, 其中B,C是K上两个固定的n阶方阵.

Solution

(1) 当$\alpha\neq 0$时, 不是线性的, 因为

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\alpha$$

$$k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2=k_1(\xi_1+\alpha)+k_2(\xi_2+\alpha)$$

$$\implies \mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)\neq k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2$$

当$\alpha=0$时, 是线性的, 因为

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=k_1\xi_1+k_2\xi_2$$

$$k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2=k_1\xi_1+k_2\xi_2$$

$$\implies \mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2$$

(2) 当$\alpha\neq 0$时, 不是线性的, 因为

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=\alpha$$

$$k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2=k_1\alpha+k_2\alpha$$

$$\implies \mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)\neq k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2$$

当$\alpha=0$时, 是线性的, 因为

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=0$$

$$k_1\mathcal{A}\xi_1+k_2\mathcal{A}\xi_2=0$$

$$\Longrightarrow \ \mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2$$

(3) 不是线性的, 取$\alpha_1 = (1,0,1)'$, $\alpha_2 = (2,0,3)'$, 则$\alpha_1 + \alpha_2 = (3,0,4)'$

$$\mathcal{A}\alpha_1 = (1,1,1), \quad \mathcal{A}\alpha_2 = (4,2,9), \quad \mathcal{A}(\alpha_1+\alpha_2) = (9,3,16)$$

$$\Longrightarrow \ \mathcal{A}(\alpha_1+\alpha_2) \neq \mathcal{A}\alpha_1 + \mathcal{A}\alpha_2$$

(4) 是线性的, 因为:

$$\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

对于任意$\xi_1, \xi_2 \in K^3$, $\forall k_1, k_2 \in K$, 有

$$\mathcal{A}(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = k_1A\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1\mathcal{A}\xi_1 + k_2\mathcal{A}\xi_2$$

所以映射$\mathcal{A}$是线性的.

(5) 是线性的, 因为对于$\forall f, g \in K[x]$, $\forall k \in K$, 有:

$$\mathcal{A}(f(x) + g(x)) = (f+g)(x+1) = f(x+1) + g(x+1) = \mathcal{A}f(x) + \mathcal{A}g(x)$$

$$\mathcal{A}(kf(x)) = (kf)(x+1) = kf(x+1) = k\mathcal{A}f(x)$$

所以, 映射$\mathcal{A}$是线性的.

(6) 是线性的, 因为对于$\forall f, g \in K[x]$, $\forall k \in K$, 有:

$$\mathcal{A}(f(x) + g(x)) = (f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = \mathcal{A}f(x) + \mathcal{A}g(x)$$

$$\mathcal{A}(kf(x)) = (kf)(x_0) = kf(x_0) = k\mathcal{A}f(x)$$

所以, 映射$\mathcal{A}$是线性的.

(7) 不是线性的, 因为

$$\mathcal{A}(k\xi) = \overline{k\xi} = \bar{k}\bar{\xi},$$

$$k\mathcal{A}\xi = k\bar{\xi}.$$

当 $k \in C \setminus R$时, $\mathcal{A}(k\xi) \neq k\mathcal{A}\xi$.

(8) 是线性的, 因为 $\forall X_1, X_2 \in M_n(K), \forall k_1, k_2 \in K$, 有

$$\mathcal{A}(k_1X_1+k_2X_2) = B(k_1X_1+k_2X_2)C = k_1BX_1C+k_2BX_2C = k_1\mathcal{A}(X_1)+k_2\mathcal{A}(X_2)$$

PROBLEM

10. 在实数域上线性空间 $D_0(a,b)$ ($D_0(a,b)$是区间 (a,b) 内全体任意次可微的实函数 $f(x)$ 所成的集合) 中定义变换如下

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + x \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \sin x \cdot f(x)$$

证明$\mathcal{A}$是一个线性变换. 定义

$$\mathcal{B}f(x) = \left[\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right]^2 + x \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \sin x \cdot f(x)$$

举例说明$\mathcal{B}$不是线性变换.

Solution

(1) 对于$\forall f, g \in D_0(a,b), \forall k_1, k_2 \in R$, 有:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(k_1f(x)+k_2g(x)) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2(k_1f(x)+k_2g(x))}{\mathrm{d}x^2} + x \cdot \frac{\mathrm{d}k_1(f(x)+k_2g(x))}{\mathrm{d}x} + \sin x \cdot (k_1f(x)+k_2g(x) \\
&= k_1(\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + x \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \sin x \cdot f(x)) + k_2(\frac{\mathrm{d}^2 g(x)}{\mathrm{d}x^2} + x \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} + \sin x \cdot g(x)) \\
&= k_1\mathcal{A}f(x) + k_2\mathcal{A}g(x)
\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{A}$是一个线性变换.

(2) 取$f(x) = x^3, g(x) = x^2$, 则:

$$\mathcal{B}f(x) = \left[\frac{\mathrm{d}^2 x^3}{\mathrm{d}x^2}\right]^2 + x \cdot \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x} + \sin x \cdot x^3 = 3x^3 + 36x^2 + x^3 \sin x$$

$$\mathcal{B}g(x) = \left[\frac{\mathrm{d}^2 x^2}{\mathrm{d}x^2}\right]^2 + x \cdot \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} + \sin x \cdot x^2 = 2x^2 + x^2 \sin x + 4$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(f(x)+g(x)) &= \left[\frac{\mathrm{d}^2(x^3+x^2)}{\mathrm{d}x^2}\right]^2 + x \cdot \frac{\mathrm{d}(x^3+x^2)}{\mathrm{d}x} + \sin x \cdot (x^3+x^2) \\
&= 3x^3 + 38x^2 + 24x + 4 + (x^3+x^2)\sin x
\end{aligned}$$

$$\implies \quad \mathcal{B}(f(x)+g(x)) \neq \mathcal{B}f(x)+\mathcal{B}g(x)$$

所以, $\mathcal{B}$不是线性变换.

PROBLEM

11. 在实数域上线性空间$C[a,b]$中定义变换如下

$$\mathcal{A}f(x)=\int_a^x K(t)f(t)dt$$

其中, $K(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个连续函数. 证明 $\mathcal{A}$ 是一个线性变换.

Solution

对于$\forall f(x),g(x)\in C[a,b]$, $\forall k_1,k_2\in R$, 有:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(k_1f(x)+k_2g(x)) &= \int_a^x K(t)(k_1f(t)+k_2g(t))dt\\ &= k_1\int_a^x K(t)f(t)dt+k_2\int_a^x K(t)g(t)dt = k_1\mathcal{A}f(x)+k_2\mathcal{A}g(x)\end{aligned}$$

又由于被积函数$K(t)f(t)$ 连续, 所以变上限函数 $\mathcal{A}f(x)=\int_a^x K(t)f(t)dt$ 也连续,

即 $\mathcal{A}f(x)\in C[a,b]$.从而 $\mathcal{A}$ 是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 上的一个映射.

综上, $\mathcal{A}$ 是 $C[a,b]$ 上一个线性变换.

PROBLEM

13. 在 $K[x]$ 中定义

$$\mathcal{A}f(x)=f'(x) \qquad \mathcal{B}f(x)=xf(x)$$

证明 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 是两个线性变换, 且 $\mathcal{AB}-\mathcal{BA}=\mathcal{E}$.

Solution

对于 $\forall f(x),g(x)\in K[x]$, $\forall k_1,k_2\in K$, 有

$$\mathcal{A}(k_1f(x)+k_2g(x))=(k_1f(x)+k_2g(x))'=k_1f'(x)+k_2g'(x)=k_1\mathcal{A}f(x)+k_2\mathcal{A}g(x)$$

$$\mathcal{B}(k_1f(x)+k_2g(x)) = x(k_1f(x)+k_2g(x)) = k_1xf(x)+k_2xg(x) = k_1\mathcal{B}f(x)+k_2\mathcal{B}g(x)$$

而 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 都是 $K[x]$ 到 $K[x]$ 的映射. 所以 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 是两个线性变换.
任取 $h(x)\in K[x]$, 有:

$$\begin{aligned}(\mathcal{AB}-\mathcal{BA})(h(x)) &= \mathcal{AB}(h(x)) - \mathcal{BA}(h(x)) \\ &= \mathcal{A}(xh(x)) - \mathcal{B}(h'(x)) \\ &= h(x) + xh'(x) - xh'(x) \\ &= h(x)\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{AB}-\mathcal{BA}=\mathcal{E}$.

PROBLEM

20. 求下列线性变换在指定基下的坐标:
(5)已知 K^3 中线性变换 $\mathcal{A}$ 在基

$$\eta_1=(-1,1,1),\quad \eta_2=(1,0,-1),\quad \eta_3=(0,1,1)$$

下的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

求 $\mathcal{A}$ 在基

$$\varepsilon_1=(1,0,0),\quad \varepsilon_2=(0,1,0),\quad \varepsilon_3=(0,0,1)$$

下的矩阵.

Solution

设基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 下的过渡矩阵为T, 则

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)T$$

于是, $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 B 为:

$$B=T^{-1}AT$$

而

$$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^{-1}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

所以,

$$B=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{bmatrix}$$

PROBLEM

20. 求下列线性变换在指定基下的坐标:
(6)在 K^3 中定义线性变换 $\mathcal{A}$ 如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\eta_1&=(-5,0,3), &\eta_1&=(-1,0,2)\\ \mathcal{A}\eta_2&=(0,-1,6), &\eta_2&=(0,1,1)\\ \mathcal{A}\eta_3&=(-5,-1,9), &\eta_3&=(3,-1,0)\end{aligned}$$

求 $\mathcal{A}$ 在基

$$\varepsilon_1=(1,0,0),\quad \varepsilon_2=(0,1,0),\quad \varepsilon_3=(0,0,1)$$

下的矩阵.

Solution

首先, 用基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性表出 η_1,η_2,η_3:

$$\eta_1=-\varepsilon_1+2\varepsilon_3,\quad \eta_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3,\quad \eta_3=3\varepsilon_1-\varepsilon_2$$

从而

$$\mathcal{A}\eta_1=\mathcal{A}(-\varepsilon_1+2\varepsilon_3)=-\mathcal{A}\varepsilon_1+2\mathcal{A}\varepsilon_3=(-5,0,3)$$

$$\mathcal{A}\eta_2=\mathcal{A}(\varepsilon_2+\varepsilon_3)=\mathcal{A}\varepsilon_2+\mathcal{A}\varepsilon_3=(0,-1,6)$$

$$\mathcal{A}\eta_3=\mathcal{A}(3\varepsilon_1-\varepsilon_2)=3\mathcal{A}\varepsilon_1-\mathcal{A}\varepsilon_2=(-5,-1,9)$$

解得:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1 = \frac{1}{7}(-\mathcal{A}\eta_1 + 2\mathcal{A}\eta_2 + 2\mathcal{A}\eta_3) = \frac{1}{7}(-5, -4, 27)$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_2 = \frac{1}{7}(-3\mathcal{A}\eta_1 + 6\mathcal{A}\eta_1 - \mathcal{A}\eta_3) = \frac{1}{7}(20, -5, 18)$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_3 = \frac{1}{7}(3\mathcal{A}\eta_1 + \mathcal{A}\eta_2 + \mathcal{A}\eta_3) = \frac{1}{7}(-20, -2, 24)$$

所以, $\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵为:

$$\begin{aligned}
A &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2)^{-1}(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \mathcal{A}\varepsilon_3) \\
&= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

PROBLEM

21. 在 $M_2(K)$ 中定义变换如下:

$$\mathcal{A}X = AX - XA, \quad X \in M_2(K)$$

其中 A 是 K 上一个固定的二阶方阵, 证明:

(1)$\mathcal{A}$ 是 $M_2(K)$ 上的一个线性变换;

(2)在$M_2(K)$中取一组基

$$\varepsilon_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求$\mathcal{A}$在这组基下的矩阵.

Solution

(1)首先, $\forall X \in M_2(K)$, 有

$$\mathcal{A}X = AX - XA \in M_2(K)$$

所以, $\mathcal{A}$ 是 $M_2(K)$ 到 $M_2(K)$ 的一个映射. 对任意 $X, Y \in M_2(K), k_1, k_2 \in K$,

有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(k_1X+k_2Y)&=A(k_1X+k_2Y)-(k_1X+k_2Y)A\\&=k_1AX+k_2AY-k_1XA-k_2YA\\&=k_1(AX-XA)+k_2(AY-YA)\\&=k_1\mathcal{A}X+k_2\mathcal{A}Y.\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{A}$ 是 $M_2(K)$ 上的线性变换.

(2) 不妨设:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$$

则有:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1=\begin{bmatrix}0&-a_{12}\\a_{21}&0\end{bmatrix}=-a_{12}\varepsilon_2+a_{21}\varepsilon_3$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_2=\begin{bmatrix}-a_{21}&a_{11}-a_{22}\\0&a_{21}\end{bmatrix}=-a_{21}\varepsilon_1+(a_{11}-a_{22})\varepsilon_2+a_{21}\varepsilon_4$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_3=\begin{bmatrix}a_{12}&0\\a_{22}-a_{11}&-a_{12}\end{bmatrix}=a_{12}\varepsilon_1+(a_{22}-a_{11})\varepsilon_3-a_{12}\varepsilon_4$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_4=\begin{bmatrix}0&a_{12}\\-a_{21}&0\end{bmatrix}=a_{12}\varepsilon_2-a_{21}\varepsilon_3$$

所以, $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为:

$$\begin{bmatrix}0&-a_{21}&a_{12}&0\\-a_{12}&a_{11}-a_{22}&0&a_{12}\\a_{21}&0&a_{22}-a_{11}&-a_{21}\\0&a_{21}&-a_{12}&0\end{bmatrix}.$$

PROBLEM

24. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 内的线性变换. 如果 $\mathcal{A}\xi^{k-1} \neq 0$, 但 $\mathcal{A}\xi^{k} = 0$, 求证 $\xi, \mathcal{A}\xi, \cdots, \mathcal{A}\xi^{k-1}(k > 0)$ 线性无关.

Solution

由 $\mathcal{A}\xi^{k-1} \neq 0$ 可知 $n < k$ 时都有$\mathcal{A}\xi^{n} \neq 0$. 设

$$\lambda_1\xi + \lambda_2\mathcal{A}\xi + \cdots + \lambda_k\mathcal{A}\xi^{k-1} = 0.$$

依次用 $\mathcal{A}^{k-1}, \mathcal{A}^{k-2}, \cdots, \mathcal{A}$ 作用可得

$$\begin{aligned} \lambda_1\mathcal{A}^{k-1}\xi &= 0, \\ \lambda_1\mathcal{A}^{k-2}\xi + \lambda_2\mathcal{A}^{k-1}\xi &= 0, \\ &\vdots \\ \lambda_1\mathcal{A}^{k-2}\xi + \lambda_2\mathcal{A}^{k-1}\xi + \cdots + \lambda_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}\xi &= 0. \end{aligned}$$

自上而下依次解出 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$. 又由 $\mathcal{A}\xi^{k-1} \neq 0$ 知 $\lambda_k = 0$, 因此 $\xi, \mathcal{A}\xi, \cdots, \mathcal{A}\xi^{k-1}$ 线性无关.

PROBLEM

26. 设四维线性空间V内的一个线性变换$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

求$\mathcal{A}$在$\eta_1 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4, \eta_2 = 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \eta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \eta_4 = 2\varepsilon_4$下的矩阵.

Solution

首先, 对于基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 与基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, 有如下关系:

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)T.$$

注意到 T 实际上为可逆矩阵（因为 $det(T)\neq 0$），所以 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 实际上也为线性空间的基.从而 $\mathcal{A}$ 在基 $\eta_1.\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的矩阵 B 为:

$$
\begin{aligned}
B=T^{-1}AT&=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}2&-3&3&2\\\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{10}{3}&\frac{10}{3}\\\frac{8}{3}&-\frac{16}{3}&\frac{40}{3}&\frac{40}{3}\\0&1&-7&-8\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

PROBLEM

28. 在K^3中给定两组基

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= (1,0,1), \quad \eta_1 = (1,2,-1) \\
\varepsilon_2 &= (2,1,0), \quad \eta_2 = (2,2,-1) \\
\varepsilon_3 &= (1,1,1), \quad \eta_3 = (2,-1,-1)
\end{aligned}$$

定义线性变换

$$\mathcal{A}\varepsilon_i = \eta_i, \quad (i=1,2,3)$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵;

(2) 求 $\mathcal{A}$ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵.

Solution

首先, 求出基 η_1,η_2,η_3 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的过渡矩阵 T：

$$T = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)^{-1}(\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

(1) $\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) = (\eta_1,\eta_2,\eta_3) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T$ 所以, $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵即为 T:

$$T = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

(2)由题意

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\eta_1,\eta_2,\eta_3) &= \mathcal{A}[(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T] \\
&= [\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)]T \\
&= (\eta_1,\eta_2,\eta_3)T.
\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{A}$在基η_1,η_2,η_3下的矩阵即为T:

$$T = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

PROBLEM

32. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, 证明：
(1) V 内全体线性变换所成的 K 上的线性空间 End 的维数等于 n^2；
(2)对 V 内任一线性变换 $\mathcal{A}$, 存在一个次数 $\leq n^2$ 的多项式 $f(\lambda)$（系数在 K 内）, 使 $f(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$.

Solution

(1)由于 $\mathrm{Hom}(U, V)$ 与 $M_{m,n}$ 同构, 所以 $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ 与 $M_n(K)$同构. 所以,

$$\dim(\mathrm{End}(V)) = \dim(\mathrm{Hom}(V, V)) = \dim(M_n(K)) = n^2$$

(2)由于$\dim(\mathrm{End}(V)) = n^2$, 所以 $\forall \mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$, End(V) 中的 $n^2 + 1$ 个向量:

$$E, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \cdots, \mathcal{A}^{n^2}$$

必定线性相关. 所以存在不全为 0 的 $k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{n^2} \in K$, 使得

$$k_0 E + k_1 \mathcal{A} + k_2 \mathcal{A}^2 + \cdots + k_{n^2} \mathcal{A}^{n^2} = \mathbf{0}$$

所以, 存在次数不超过 n^2 的多项式 $f(\lambda) = k_0 + k_1\lambda + k_2\lambda^2 + \cdots + k_{n^2}\lambda^{n^2}$, 使得$f(\mathcal{A}) = 0$.

PROBLEM

35. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 内的线性变换. 证明下面的命题互相等价:
(1)$\mathcal{A}$ 是可逆变换;
(2)对V内任意非零向量α, $\mathcal{A}\alpha \neq 0$;
(3)若$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$是$V$的一组基, 则$\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$也是$V$的一组基;
(4)如果V分解为子空间M, N的直和: $V = M \oplus N$, 那么有$V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$.

Solution

(1) $\Longrightarrow$ (2)
由于$\mathcal{A}$是可逆变换, 所以$\mathcal{A}$是单射. 任取 $\alpha \in V$, 则:

$$\mathcal{A}(\alpha) = 0 = \mathcal{A}(0)$$

从而$\alpha = 0$, 得证.

$(2) \Longrightarrow (1)$
假设$\alpha_1, \alpha_2 \in V$, 且$\mathcal{A}\alpha_1 = \mathcal{A}\alpha_2$, 则:

$$0 = \mathcal{A}\alpha_1 - \mathcal{A}\alpha_2 = \mathcal{A}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

由于V内任意非零向量α, $\mathcal{A}\alpha \neq 0$, 所以$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, 即$\alpha_1 = \alpha_2$. 即$\mathcal{A}$是单射.
另一方面, V内任意非零向量α, $\mathcal{A}\alpha \neq 0$意味着$\mathrm{Ker}\mathcal{A} = 0$. 于是:

$$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim V - \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = n$$

而$\mathrm{Im}\mathcal{A} \subset V$, 所以$\mathrm{Im}\mathcal{A} = V$. 即$\mathcal{A}$是满射.
所以$\mathcal{A}$是双射, 从而$\mathcal{A}$是可逆映射.

$(1) \Longrightarrow (3)$
由于$\mathcal{A}$是可逆映射, 所以$\mathcal{A}$是双射. 若$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$是$V$的一组基, 由命题3.2可知:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$$

也是V的一组基.

$(3) \Longrightarrow (1)$
设$\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i$, $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\varepsilon_i$. 下证明:$\mathcal{A}$是双射.
若$\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}\beta$, 则有$\mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i) = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\varepsilon_i)$, 即$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathcal{A}\varepsilon_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\mathcal{A}\varepsilon_i$. 由于$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$是$V$的一组基, 所以$a_i = b_i$, (i = 1, 2, $\cdots$, n).
从而有$\alpha = \beta$. 即$\mathcal{A}$是单射. 任取$\gamma \in V$, 由于$\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$是$V$的一组基, 则:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathcal{A}\varepsilon_i = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{n} c_i\varepsilon_i)$$

所以$\mathcal{A}$是满射. 所以$\mathcal{A}$是双射. 从而$\mathcal{A}$可逆.

$(1) \Longrightarrow (4)$
由于$\mathcal{A}$是V上可逆的线性变换, M, N是V的子空间,所以$\mathcal{A}^{-1}$也是V上的可逆线性变换, 且$\mathcal{A}(M), \mathcal{A}(N)$也是$V$的子空间.

任取$\alpha \in V$, 由于$V = M \oplus N$, 所以有:

$$\mathcal{A}^{-1}\alpha = \beta_1 + \beta_2,\ \ \beta_1 \in M,\ \ \beta_2 \in N.$$

从而$\forall \alpha \in V, \alpha = \mathcal{A}(\beta_1 + \beta_2) = \mathcal{A}\beta_1 + \mathcal{A}\beta_2$, 其中$\mathcal{A}\beta_1 \in A(M), \mathcal{A}(N)$. 由子空间的和的定义可知, $V = \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}(N)$.
下证明该和为直和, 只需要证明两个子空间的交集为$\{0\}$.
任取$\gamma \in \mathcal{A}(M) \bigcap \mathcal{A}(N)$, 则存在$\eta_1 \in M, \eta_2 \in N$, 使得:

$$\gamma = \mathcal{A}\eta_1 = \mathcal{A}\eta_2 \implies \eta_1 = \mathcal{A}^{-1}(\gamma), \eta_2 = \mathcal{A}^{-1}(\gamma).$$

由于$\mathcal{A}^{-1}$也是双射, 所以$\eta_1 = \eta_2$. 而$M \bigcap N = \{0\}$, 所以$\eta_1 = \eta_2 = 0$.
从而 $\gamma = \mathcal{A}\eta_1 = \mathcal{A}\eta_2 = 0$. 由于 γ 是从 $\mathcal{A}(M) \bigcap \mathcal{A}(N)$中任取的向量, 所以 $\mathcal{A}(M) \bigcap \mathcal{A}(N) = \{0\}$.
综上, $V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$.

(4) $\Longrightarrow$ (1)
设$V = M \oplus N$且$V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$.
任取$\mathcal{A}\alpha \in \mathcal{A}(V)$, 由于$V = M \oplus N$, 所以$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N$.
所以, $\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}\alpha_1 + \mathcal{A}\alpha_2$, 其中, $\mathcal{A}\alpha_1 \in \mathcal{A}(M), \mathcal{A}\alpha_2 \in \mathcal{A}(N)$.从而, $\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}(N)$.
由于$V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N)$, 所以$\mathcal{A}(M) \bigcap \mathcal{A}(N) = 0$. 所以:

$$\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N) = V.$$

即$\mathcal{A}(V) = V$. 即, 线性变换$\mathcal{A}$是满射.从而,

$$\dim(\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}) = \dim V - \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = n - n = 0.$$

所以, Ker$\mathcal{A}$ = 0. 由(2)$\Longrightarrow$(1)的证明过程可知, $\mathcal{A}$是单射.
综上, $\mathcal{A}$是双射. 从而, $\mathcal{A}$是可逆变换.

(2) $\Longrightarrow$ (3)
取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基. 令

$$0 = k_1\mathcal{A}\varepsilon_1 + k_2\mathcal{A}\varepsilon_2 + \cdots + k_n\mathcal{A}\varepsilon_n = \mathcal{A}(k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n).$$

由(2)可知: $k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n = 0$, 而 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基.

所以, $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. 所以$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$线性无关.
而$\dim V = n$, 所以$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$也是$V$的一组基.

(3) $\Rightarrow$ (4)
取M的一组基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$, 将其扩充为$V$的基:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n$$

由于$V = M \oplus N$, 所以$\varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n$是$N$的一组基.
记$\mathcal{A}(M) = \{\mathcal{A}\alpha | \alpha \in M\}$, 由于$M = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$, 易证明:$\mathcal{A}(M) = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_m)$
从而:

$$\mathcal{A}(M) = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_m), \quad \mathcal{A}(N) = L(\mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \mathcal{A}\varepsilon_{m+2}, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n)$$

所以:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(M) + \mathcal{A}(N) &= L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_m) + L(\mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \mathcal{A}\varepsilon_{m+2}, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n) \\ &= L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_m, \mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n)\end{aligned}$$

由于$\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$也是$V$的一组基, 所以

$$V = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_m, \mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n) = \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}(N)$$

而$\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$线性无关, 所以:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_m$$

$$\mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \mathcal{A}\varepsilon_{m+2}, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$$

都是线性无关的向量组.又由于

$$\mathcal{A}(M) = L(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_m), \mathcal{A}(N) = L(\mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \mathcal{A}\varepsilon_{m+2}, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n)$$

所以$\{\mathcal{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_m\}$, $\{\mathcal{A}\varepsilon_{m+1}, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n\}$分别是$\mathcal{A}(M), \mathcal{A}(N)$的基.
所以$\mathcal{A}(M)$的基与$\mathcal{A}(N)$的基合起来是$V = \mathcal{A}(M) + \mathcal{A}(N)$的基, 所以

$$V = \mathcal{A}(M) \oplus \mathcal{A}(N).$$

PROBLEM

36. 设 V, U 是数域 K 上的线性空间. 从 V 到 U 的一个线性映射f若满足 $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)(\forall\ \alpha,\beta\in V)$，则称 f 为 V 到 U 的一个**半线性映射**. 从V 到 U 的所有半线性映射组成的集合记为 $Q(V,U)$. 对任意 $f,g\in Q(V,U)$，$k\in K$，定义

$$(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha),\quad (kf)(\alpha)=kf(\alpha)\quad (\forall\ \alpha\in V).$$

(1) 证明 $f+g\in Q(V,U), kf\in Q(V,U)$.

(2) 证明 $Q(V,U)$关于上面定义的加法、数乘运算成为 K 上的线性空间.

(3) 若 U,V是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间（即$K=\mathbb{Q}$），证明 $Q(V,U)=\mathrm{Hom}(V,U)$.

Solution

(1) 任取 $\alpha,\beta\in V$，有

$$\begin{aligned}(f+g)(\alpha+\beta)&=f(\alpha+\beta)+g(\alpha+\beta)\\&=f(\alpha)+f(\beta)+g(\alpha)+g(\beta)\\&=f(\alpha)+g(\alpha)+f(\beta)+g(\beta)\\&=(f+g)(\alpha)+(f+g)(\beta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(kf)(\alpha+\beta)&=kf(\alpha+\beta)\\&=k(f(\alpha)+f(\beta))\\&=kf(\alpha)+kf(\beta)\\&=(kf)(\alpha)+(kf)(\beta).\end{aligned}$$

因此 $f+g\in Q(V,U)$ 且 $kf\in Q(V,U)$.

(2) 设 $\alpha\in V$，依次验证线性空间的八条公理:

(i) 加法结合律：$\forall f,g,h\in Q(V,U)$,

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(\alpha)&=(f+g)(\alpha)+h(\alpha)\\&=f(\alpha)+g(\alpha)+h(\alpha)\\&=f(\alpha)+(g+h)(\alpha)=(f+(g+h))(\alpha).\end{aligned}$$

(ii) 加法交换律：$\forall f,g\in Q(V,U)$,

$$(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)=g(\alpha)+f(\alpha)=(g+f)(\alpha).$$

(iii) 加法零元：令 $\mathbf{0}:\alpha\longmapsto 0$，$\forall f\in Q(V,U)$，

$$(f+\mathbf{0})(\alpha)=f(\alpha)+\mathbf{0}(\alpha)=f(\alpha).$$

(iv) 加法负元：$\forall f\in Q(V,U)$，令 $d:\alpha\longmapsto -f(\alpha)$，则有

$$(f+d)(\alpha)=f(\alpha)+d(\alpha)=f(\alpha)+(-f(\alpha))=0.$$

(v) 数乘单位元：$\forall f\in Q(V,U)$，$(1\cdot f)(\alpha)=1\cdot f(\alpha)=f(\alpha)$.

(vi) 数乘与域乘法相容：$\forall\, k,l\in K$，$f\in Q(V,U)$，

$$(k(lf))(\alpha)=k((lf)(\alpha))=k(lf(\alpha))=(kl)f(\alpha)=((kl)f)(\alpha)$$

(vii) 向量加法分配律：$\forall\, k,l\in K$，$f\in Q(V,U)$，

$$((k+l)f)(\alpha)=(k+l)f(\alpha)=kf(\alpha)+lf(\alpha)=(kf)(\alpha)+(lf)(\alpha)=(kf+lf)(\alpha)$$

(viii) 域加法分配律：$\forall\, k\in K$，$f,g\in Q(V,U)$，

$$(k(f+g))(\alpha)=k((f+g)(\alpha))=k(f(\alpha)+g(\alpha))=kf(\alpha)+kg(\alpha)=(kf+kg)(\alpha)$$

(3) 显然有 $\mathrm{Hom}(V,U)\subset Q(V,U)$, 故只需证 $Q(V,U)\subset\mathrm{Hom}(V,U)$.
首先归纳证明 $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(n\alpha)=nf(\alpha)$. $n=0$ 时, 由 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ 知 $f(0)=0$. 故 $f(0\alpha)=0f(\alpha)=0$, 结论成立. 设 $n=k$ 时, $f(k\alpha)=kf(\alpha)$. 于是

$$f((k+1)\alpha)=f(k\alpha)+f(\alpha)=kf(\alpha)+f(\alpha)=(k+1)f(\alpha),$$

即 $n=k+1$ 时结论也成立. 这就完成了归纳.
接着证明 $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r\alpha)=rf(\alpha)$. 若 r 为正有理数, 则设 $r=\frac{p}{q}$, $p,q\in \mathbb{N}^*$. 于是有

$$f(r\alpha)=f(p\frac{\alpha}{q})=pf(\frac{\alpha}{q})=\frac{p}{q}qf(\frac{\alpha}{q})=\frac{p}{q}f(q\frac{\alpha}{q})=rf(\alpha).$$

又因为

$$f(\alpha)+f(-\alpha)=f(\alpha-\alpha)=f(0)=0,$$

所以

$$f(-\frac{p}{q}\alpha)=-f(\frac{p}{q}\alpha)=-\frac{p}{q}f(\alpha).$$

因此 $f(r\alpha)=rf(\alpha)$ 对一切有理数 $r\in\mathbb{Q}$ 成立. 这说明 $Q(V,U)\subset \mathrm{Hom}(V,U)$. 以上证明了 $Q(V,U)=\mathrm{Hom}(V,U)$.

4.4　习题四　线性变换的特征值与特征向量

PROBLEM

1. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 K 上线性空间 V 内的线性变换, 若 $\mathcal{A}\alpha=\lambda_0\alpha$, 又设 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m$ 为 K 上一多项式. 证明:

$$f(\mathcal{A})\alpha=f(\lambda_0)\alpha$$

Solution

由于 $\mathcal{A}\alpha=\lambda_0\alpha$, 所以有:

$$\mathcal{A}^2\alpha=\mathcal{A}(\mathcal{A}\alpha)=\mathcal{A}(\lambda_0\alpha)=\lambda_0\mathcal{A}\alpha=\lambda_0^2\alpha$$

$$\mathcal{A}^3\alpha=\mathcal{A}(\mathcal{A}^2\alpha)=\mathcal{A}(\lambda_0^2\alpha)=\lambda_0^2\mathcal{A}\alpha=\lambda_0^3\alpha$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$\mathcal{A}^m\alpha=\mathcal{A}(\mathcal{A}^{m-1}\alpha)=\mathcal{A}(\lambda_0^{m-1}\alpha)=\lambda_0^{m-1}\mathcal{A}\alpha=\lambda_0^m\alpha$$

所以,

$$\begin{aligned}f(\mathcal{A})\alpha&=\left(a_0\mathcal{A}^m+a_1\mathcal{A}^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\mathcal{A}+a_m\mathcal{E}\right)\alpha\\&=a_0\mathcal{A}^m\alpha+a_1\mathcal{A}^{m-1}\alpha+\cdots+a_{m-1}\mathcal{A}\alpha+a_m\mathcal{E}\alpha\\&=a_0\lambda_0^m\alpha+a_1\lambda_0^{m-1}\alpha+\cdots+a_{m-1}\lambda_0\alpha+a_m\alpha\\&=f(\lambda_0)\alpha.\end{aligned}$$

PROBLEM

2. 设 $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ 是线性空间 V 内的两个线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$. 证明:若 $\mathcal{A}\alpha=\lambda_0 a$, 则 $\mathcal{B}\alpha\in V_{\lambda_0}$, 这里 V_{λ_0} 为 $\mathcal{A}$ 的特征值 λ_0 的特征子空间.

Solution

由题意, 有:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha)=(\mathcal{A}\mathcal{B})\alpha=(\mathcal{B}\mathcal{A})\alpha=\mathcal{B}(\mathcal{A}\alpha)=\mathcal{B}(\lambda_0\alpha)=\lambda_0\mathcal{B}\alpha$$

根据 V_{λ_0} 的定义可知, $\mathcal{B}\alpha\in V_{\lambda_0}$.

PROBLEM

5. 设 $\mathcal{A}$ 是复数域上线性空间 V 内的一个线性变换, 且它在某一组基 $\{\varepsilon_i\}$ 下的矩阵为 A. 求 A 的全部特征值和每个特征值 λ_i 所属特征子空间 V_{λ_i} 的一组基, 其中:

$$A=\begin{bmatrix}0&2&1\\-2&0&3\\-1&-3&0\end{bmatrix}$$

Solution

先求出 A 的特征多项式 $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned}f(\lambda)=det(\lambda E-A)&=\begin{vmatrix}\lambda&-2&-1\\2&\lambda&-3\\1&3&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-2&-1\\0&\lambda-6&-3-2\lambda\\1&3&\lambda\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}3\lambda&-\lambda&2\lambda\\0&\lambda-6&-3-2\lambda\\1&3&\lambda\end{vmatrix}\\&=\frac{\lambda}{3}\begin{vmatrix}3&-1&2\\0&\lambda-6&-3-2\lambda\\1&3&\lambda\end{vmatrix}=\frac{\lambda}{3}\begin{vmatrix}0&-10&2-3\lambda\\0&\lambda-6&-3-2\lambda\\1&3&\lambda\end{vmatrix}\\&=\frac{\lambda}{3}\begin{vmatrix}-10&2-3\lambda\\\lambda-6&-3-2\lambda\end{vmatrix}\\&=\lambda(\lambda^2+14)=0\end{aligned}$$

解得 $\lambda=0,\pm\sqrt{14}i$. 接下来求每个特征值对应的特征向量:

(i)$\lambda_1=0$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_1E-A)X=0$, 有:

$$\lambda_1E-A=\begin{bmatrix}0&-2&-1\\2&0&-3\\1&3&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&-1.5\\0&1&0.5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

令 $x_3=2$, 得基础解系 $\eta_1=(3,-1,2)$, 它对应于特征向量

$$3\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3.$$

所以, $V_{\lambda_1}=L(3\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3)$.

(ii)$\lambda_2=\sqrt{14}i$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_2E-A)X=0$, 有:

$$\lambda_2E-A=\begin{bmatrix}\sqrt{14}i&-2&-1\\2&\sqrt{14}i&-3\\1&3&\sqrt{14}i\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&\frac{6+\sqrt{14}i}{10}\\0&1&\frac{-2+3\sqrt{14}i}{10}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

令 $x_3 = 2+3\sqrt{14}i$, 得基础解系 $\eta_2 = (3-2\sqrt{14}i, 13, 2+3\sqrt{14}i)$, 它对应于特征向量

$$(3-2\sqrt{14}i)\varepsilon_1 + 13\varepsilon_2 + (2+3\sqrt{14}i)\varepsilon_3$$

所以, $V_{\lambda_2} = L((3-2\sqrt{14}i)\varepsilon_1 + 13\varepsilon_2 + (2+3\sqrt{14}i)\varepsilon_3)$.

(iii)$\lambda_3 = -\sqrt{14}i$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_3 E - A)X = 0$, 有:

$$\lambda_3 E - A = \begin{bmatrix} -\sqrt{14}i & -2 & -1 \\ 2 & \sqrt{14}i & -3 \\ 1 & 3 & -\sqrt{14}i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6-\sqrt{14}i}{10} \\ 0 & 1 & \frac{-2-3\sqrt{14}i}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $x_3 = 2-3\sqrt{14}i$, 得基础解系 $\eta_2 = (3+2\sqrt{14}i, 13, 2-3\sqrt{14}i)$, 它对应于特征向量

$$(3+2\sqrt{14}i)\varepsilon_1 + 13\varepsilon_2 + (2-3\sqrt{14}i)\varepsilon_3.$$

所以, $V_{\lambda_3} = L((3+2\sqrt{14}i)\varepsilon_1 + 10\varepsilon_2 + (2-3\sqrt{14}i)\varepsilon_3)$.

PROBLEM

6. 给定数域 K 上 3 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & x & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}.$$

(1) 求 K 上 3 阶可逆方阵 T, 使 $T^{-1}AT = D$ 为对角阵.

(2) 如已知 B 与 C 特征多项式相同, 求 x, y 的值, 判断 B 与 C 是否相似.

Solution

(1) 首先, 求出 A 的特征多项式 $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
f(\lambda)=det(\lambda E-A) &= \begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & \lambda-9\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & 4\\ 2 & \lambda-9\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-1)^2(\lambda-10)=0.
\end{aligned}$$

解得 $\lambda_1=1$(二重), $\lambda_2=10$. 接下来求特征值对应的特征向量.

(i)$\lambda_1=1$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_1 E-A)X=0$, 有:

$$\lambda_1 E-A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

令 $x_2=1, x_3=0$ 与 $x_2=0, x_3=1$ 可以得到基础解系 $\eta_1=(-2,1,0), \eta_2=(2,0,1)$, 同时, 这也为矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量.

(ii)$\lambda_2=10$ 时, 解线性齐次方程组 $(\lambda_2 E-A)X=0$, 有:

$$\lambda_2 E-A=\begin{bmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

令 $x_3=2$, 可以得到基础解系 $\eta_3=(-1,-2,2)$, 同时, 这也为矩阵 A 属于特征值 $\lambda_2=10$ 的特征向量.

所以, 矩阵 A 可对角化, 取

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ 使得 } T^{-1}AT = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

(2) 由于 B 与 C 的特征多项式相同, 所以

$$det(B) = -16 = det(C) = 4y, \ tr(B) = 2+x = tr(C) = 4+y \ \Rightarrow \ x = -2, y = -4$$

从而, 可以求得 B 的特征多项式为:$f_B(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$. 对于 $\lambda_1 = 2$,

$$\lambda_1 E - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$rank(\lambda_1 E - B) = 2$, 所以 $\dim V_{\lambda_1} = 3 - rank(\lambda_1 E - B) = 1 \neq 2$, 即几何重数 $\neq$ 代数重数. 所以矩阵 B 不可对角化. 注意到 C 是一个对角矩阵, 所以 B 与 C 不相似.

PROBLEM

8. 设 λ_1, λ_2 是线性变换 $\mathcal{A}$ 的两个不同特征值, ξ_1, ξ_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明: $\xi_1 + \xi_2$ 不是 $\mathcal{A}$ 的特征向量.

Solution

假设 ξ_1, ξ_2 是 $\mathcal{A}$ 属于特征值 λ_3 的特征向量, 那么有:

$$\mathcal{A}(\xi_1 + \xi_2) = \lambda_3(\xi_1 + \xi_2) = \lambda_3\xi_1 + \lambda_3\xi_2$$

而 ξ_1, ξ_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 所以:

$$\mathcal{A}(\xi_1 + \xi_1) = \mathcal{A}\xi_1 + \mathcal{A}\xi_2 = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2$$

两式相减, 可得:

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\xi_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\xi_2 = 0$$

由命题4.3可知, ξ_1, ξ_2 线性无关. 所以 $\lambda_3 - \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1 = 0$, 即 $\lambda_1 = \lambda_2$, 矛盾!

所以, $\xi_1 + \xi_2$ 不是 $\mathcal{A}$ 的特征向量.

PROBLEM

11. 给定复数域上的 n 阶循环矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix},$$

证明存在复数域上 n 阶可逆矩阵 T，使对任意上述循环矩阵 A，$T^{-1}AT$ 都是对角矩阵.

Solution

记基本循环矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

不难验证

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \cdots, P^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, P^n = E,$$

其中 E 为单位矩阵. 设 $f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$，则

$$A = f(P) = a_1E + a_2P + \cdots + a_nP^{n-1}.$$

基本循环矩阵 P 的特征多项式

$$|\lambda E-P|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^n-1,$$

特征值为 n 次单位根 $\varepsilon_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$. ε_k 两两不同，故 P 可对角化.

分别求出 P 相对于 n 个特征值 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 的 n 个特征向量

$$\begin{aligned}X_0&=(1,1,1,\cdots,1),\\ X_1&=(1,\varepsilon_1,\varepsilon_1^2,\cdots,\varepsilon_1^{n-1}),\\ &\ \ \vdots\\ X_1&=(1,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_{n-1}^2,\cdots,\varepsilon_{n-1}^{n-1}),\end{aligned}$$

作矩阵

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1}\\ 1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_{n-1}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1}\end{bmatrix},$$

则 $T^{-1}PT=\mathrm{diag}(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1})=\Lambda$. 因此

$$\begin{aligned}T^{-1}AT=T^{-1}f(P)T=T^{-1}&\left(\sum_{i=1}^{n}a_iP^{i-1}\right)T\\ &=\sum_{i=1}^{n}a_iT^{-1}P^{i-1}T\\ &=\sum_{i=1}^{n}a_i\left(T^{-1}PT\right)^{i-1}=\sum_{i=1}^{n}a_i\Lambda^{i-1}=f(\Lambda),\end{aligned}$$

即 $T^{-1}AT=f(\Lambda)=\mathrm{diag}(f(\varepsilon_0),f(\varepsilon_1),\cdots,f(\varepsilon_{n-1}))$ 是对角矩阵. 于是命题成立.

PROBLEM

15. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 内的一个线性变换, M, N 是 $\mathcal{A}$ 的两个不变子空间. 证明:$M+N$ 与 $M\cap N$ 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

Solution

(1) 任取 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in(M+N)$, 其中, $\alpha_1\in M, \alpha_2\in N$, 有:

$$\mathcal{A}\alpha=\mathcal{A}(\alpha_1+\alpha_2)=\mathcal{A}\alpha_1+\mathcal{A}\alpha_2$$

由于 M, N 是 A 的不变子空间, 所以 $\mathcal{A}\alpha_1\in M, \mathcal{A}\alpha_2\in N$.
从而, $\mathcal{A}\alpha\in(M+N)$. 所以 $M+N$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

(2) 任取 $\beta\in M\cap N$, 有 $\beta\in M$ 且 $\beta\in N$. 由于 M, N 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 所以:

$$\mathcal{A}\beta\in M,\ \mathcal{A}\beta\in N \implies \mathcal{A}\beta\in M\cap N$$

所以, $M\bigcap N$也是$\mathcal{A}$的不变子空间.

PROBLEM

16. 设$\mathcal{A}$是数域K上n维线性空间V内的一个线性变换, 在V的一组基下其矩阵为

$$J=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0\end{bmatrix}$$

证明: 当 $n>1$ 时, 对 $\mathcal{A}$ 的任意非平凡不变子空间 M, 都不存在 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 N, 使:

$$V=M\oplus N$$

Solution

设 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 J. 取 $\alpha\in M$, 且记:

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_k\varepsilon_k\ \ 其中, a_k\neq 0$$

于是, 有(取$\varepsilon_0 = 0$):

$$\mathcal{A}\alpha = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{A}\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{k} a_i(\lambda_0\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}) = \lambda_0\alpha + \sum_{i=1}^{k-1} a_i\varepsilon_i \in M$$

所以

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{k-1} a_i\varepsilon_i = \mathcal{A}\alpha - \lambda_0\alpha \in M.$$

对 α_1 继续做以上步骤, 可以得到

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{k-2} a_i\varepsilon_i = \mathcal{A}\alpha_1 - \lambda_0\alpha_1 \in M.$$

以此类推, $\alpha_{k-1} = a_1\varepsilon_1 \in M$, 所以 $\varepsilon_1 \in M$.

这说明, 对于 $\mathcal{A}$ 的任意非平凡不变子空间 M, 都有基向量 $\varepsilon_1 \in M$. 即 $\mathcal{A}$ 的任意两个非平凡不变子空间都含有公共向量 ε_1, 所以 V 不能分解为 $\mathcal{A}$ 的两个非平凡不变子空间的直和.

PROBLEM

19. 设 V 是实数域上的一个 n 维线性空间 $(n > 0)$, $\mathcal{A}$ 是 V 内的一个线性变换. 证明 $\mathcal{A}$ 必有一维或二维的不变子空间.

Solution

取非零向量 $v \in V$. 因为 V 是 n 维的, 所以 $n+1$ 个向量

$$(v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2v, \cdots, \mathcal{A}^n v)$$

线性相关. 于是有不全为零的实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 使得

$$0 = a_0 v + a_1\mathcal{A}v + \cdots + a_n\mathcal{A}^n v.$$

设

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \\ &= k(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m)(x^2+b_1x+c_1)\cdots(x^2+b_Mx+c_M). \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0 + a_1\mathcal{A} + \cdots + a_n\mathcal{A}^n)v = f(\mathcal{A})v \\ &= k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\cdots(\mathcal{A}-\lambda_m\mathcal{E})(\mathcal{A}^2+b_1\mathcal{A}+c_1\mathcal{E})\cdots(\mathcal{A}^2+b_M\mathcal{A}+c_M\mathcal{E})v. \end{aligned}$$

这意味着至少有一个 j 使得 $\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{E}$ 不是单的或 $\mathcal{A}^2+b_j\mathcal{A}+c_j\mathcal{E}$ 不是单的, 否则将产生 $v=0$ 的矛盾. 若存在 j 使得 $\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{E}$ 非单, 则 $\mathcal{A}$ 有特征子空间 $V_{\lambda_j}=\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}-\lambda_j E)$, V_{λ_j} 中任意非零向量张成的子空间都是 $\mathcal{A}$ 的一维不变子空间.

若存在 j 使得 $\mathcal{A}^2+b_j\mathcal{A}+c_j\mathcal{E}$ 非单, 则有非零向量 $u\in V$ 使得

$$\mathcal{A}^2u+b_j\mathcal{A}u+c_ju=0.$$

若 u 和 $\mathcal{A}u$ 线性相关, 则找到了一维不变子空间 $L(u)$. 设 u 和 $\mathcal{A}u$ 线性无关, 下面证明 $L(u,\mathcal{A}u)$ 在 $\mathcal{A}$ 作用下不变. 对 $L(u,\mathcal{A}u)$ 中任意形如 $ku+l\mathcal{A}u$ 的元素, 有

$$\mathcal{A}(ku+l\mathcal{A}u)=k\mathcal{A}u+l\mathcal{A}^2u=k\mathcal{A}u-lb_j\mathcal{A}u-lc_ju.$$

即 $\mathcal{A}(ku+l\mathcal{A}u)\in L(u,\mathcal{A}u)$. 故 $L(u,\mathcal{A}u)$ 是 $\mathcal{A}$ 的二维不变子空间. 综上可知, $\mathcal{A}$ 存在一维或二维的不变子空间.

PROBLEM

20. $\mathcal{A},\mathcal{B}$是 n 维线性空间 V 内的两个线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$. λ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, V_λ 是属于特征值 λ 的特征子空间. 则 V_λ 是 B 的不变子空间.

Solution

任取 $\alpha\in V_\lambda$, 有 $1\mathcal{A}\alpha=\lambda\alpha$, 从而:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha)=\mathcal{B}\mathcal{A}\alpha=\mathcal{B}(\lambda\alpha)=\lambda\mathcal{B}\alpha$$

即 $\mathcal{B}\alpha\in V_\lambda$. 所以$V_\lambda$是$\mathcal{B}$的不变子空间.

PROBLEM

21. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 V 内两个线性变换, 且 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$. 如果 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 的矩阵都可对角化, 证明:V 内存在一组基, 使 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 在这组基下的矩阵同时成对角形.

Solution

证明一：

由于$\mathcal{A}$ 的矩阵可以对角化, 所以线性空间 V 可以分解为 $\mathcal{A}$ 的特征子空间的直和:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$$

由上题结论可知, $V_{\lambda_1}.V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_r}$ 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间, 而 $\mathcal{B}$ 的矩阵是可对角化的, 所以根据教材命题 4.6, $\mathcal{B}|_{V_{\lambda_1}}, \mathcal{B}|_{V_{\lambda_2}}, \cdots, \mathcal{B}|_{V_{\lambda_r}}$ 的矩阵也可对角化. 于是, 对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$, 在 $\mathcal{B}|_{V_{\lambda_i}}$ 中选取适当的一组基 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{im_i}$, 使 $\mathcal{B}|_{V_{\lambda_i}}$ 在这组基下的矩阵为对角阵. 一方面, $\mathcal{B}$ 在基

$$\begin{gathered}\eta_{11}, \eta_{12}, \cdots, \eta_{1m_1}, \\ \eta_{21}, \eta_{22}, \cdots, \eta_{2m_2}, \\ \vdots \\ \eta_{r1}, \eta_{r2}, \cdots, \eta_{rm_r}\end{gathered}$$

下的矩阵为对角阵. 另一方面, 注意到这组基实际上由 $\mathcal{A}$ 各特征子空间的基拼和而成, 因此 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵也为对角阵.

证明二：

取V的一组基$\varepsilon_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0),\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$在这组基下的矩阵分别为A, B:

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A$$

$$\mathcal{B}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)B$$

易证明, $AB = BA$. 下证明, A, B可同时对角化.

因为A相似于对角阵, 所以必定存在P_1使

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 E_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{n_s} \end{bmatrix}, \quad \text{其中}, \lambda_1, \ldots, \lambda_s\text{互异}.$$

由于$AB = BA$, 所以:

$$P_1^{-1}ABP_1 = P_1^{-1}BAP_1 \ \Rightarrow\ (P_1^{-1}AP_1)(P_1^{-1}BP_1) = (P_1^{-1}BP_1)(P_1^{-1}AP_1)$$

设$(P_1^{-1}BP_1) = (B_{ij})$, 其中分块方法使得$(P_1^{-1}BP_1)(P_1^{-1}AP_1)$与$(P_1^{-1}AP_1)(P_1^{-1}BP_1)$都可乘.

由于$(P_1^{-1}BP_1)$与$(P_1^{-1}AP_1)$可交换, 有:

$$\lambda_i B_{ij} = B_{ij}\lambda_j$$

所以当 $i \neq j$ 时, $B_{ij} = 0$. 所以有: $P_1^{-1}BP_1 = diag\{B_{11}, B_{22}, \cdots, B_{ss}\}$.
由 B 可对角化可知, B_{ii}也可以对角化, 即 $\exists Q_i$, 使得 $Q_i^{-1}B_{ii}Q_i$ 为对角阵.$(i = 1, 2, \cdots, s)$. 记:

$$P_2 = \begin{bmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_s \end{bmatrix}$$

取 $P = P_1P_2$, 有 $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$同时为对角阵. 记 $P = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$, 此时:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) &= \mathcal{A}[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P] = [\mathcal{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)]P \\
&= AP = P(P^{-1}AP) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)(P^{-1}AP) \\
\mathcal{B}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) &= \mathcal{B}[(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P] = [\mathcal{B}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)]P \\
&= BP = P(P^{-1}BP) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)(P^{-1}BP)
\end{aligned}$$

矩阵P的列向量即为题目中要找的基.

PROBLEM

22. 设 $\mathcal{A}$ 是数域 K 上的 n 维线性空间 V 内的线性变换. 如果 $\mathcal{A}$ 的矩阵可对角化, 证明对 $\mathcal{A}$ 的任意不变子空间 M, 必存在 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 N, 使 $V = M \oplus N$.

Solution

设 $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$. 令 $M_i = M \cap V_{\lambda_i} (i = 1, 2, \cdots, k)$, 由命题4.6知

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k.$$

设 $V_{\lambda_i} = M_i \oplus N_i$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{k} N_i$ 是直和. 这是因为 $N_i \subset V_{\lambda_i}$. 若

$$0 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \ (\alpha_i \in N_i),$$

则 $\alpha_i \in V_{\lambda_i}$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$ 是直和, 从而有 $\alpha_i = 0$.
令 $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$. 对任意 $\alpha \in N$, 有

$$\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_k\alpha_k \in N,$$

即 N 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间. 又有

$$\begin{aligned} V &= V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} \\ &= (M_1 \oplus N_1) \oplus \cdots \oplus (M_k \oplus N_k) \\ &= (M_1 \oplus \cdots \oplus M_k) \oplus (N_1 \oplus \cdots \oplus N_k) \\ &= M \oplus N. \end{aligned}$$

因此我们找到了 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间 N, 使 $V = M \oplus N$.

PROBLEM

23. 设 $\mathcal{A}$ 是复数域上 n 维线性空间 V 内的线性变换. 如果对 $\mathcal{A}$ 的任意不变子空间 M, 都存在 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 N, 使 $V = M \oplus N$. 证明 $\mathcal{A}$ 的矩阵可对角化.

Solution

对维数 n 作归纳. $n = 0$ 时, $\mathcal{A}$ 在任意一组基下的矩阵都是零矩阵, 自然也是对角阵.
设 $n = k-1$ 时, 命题成立. 设 $\mathcal{A}$ 是复数域上 k 维线性空间 V 内的线性变换. 因为复线性空间上的线性变换总有特征值, 可设 $\mathcal{A}\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$ $(\alpha_1 \neq 0)$. 假设对 $\mathcal{A}$ 的任意不变子空间 M, 都存在 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 N, 使 $V = M \oplus N$. 取 $M = L(\alpha_1)$, 则存在 $\mathcal{A}$−不变子空间 N, 使得 $V = L(\alpha_1) \oplus N$.
$\mathcal{A}|_N$ 是 $k-1$ 维线性空间 N 内的线性变换, 根据归纳假设, $\mathcal{A}|_N$ 可对角化. 于是存在 N 的一组基 $\alpha_2, \cdots, \alpha_k$, 使得

$$\mathcal{A}|_N(\alpha_2, \cdots, \alpha_k) = (\alpha_2, \cdots, \alpha_k)\begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

所以 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 下的矩阵是 $diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$. 这说明 $n = k$ 时, 命题也成立. 因此命题得证.

PROBLEM

24. 设 V 是数域 K 上 n 维线性空间 V 内的线性变换. $\alpha \in V, \alpha \neq 0$. 证明存在正整数 k, 使得 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha$ 线性无关, 而

$$\mathcal{A}^k\alpha = a_0\alpha + a_1\mathcal{A}\alpha + \cdots + a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}\alpha.$$

如令 $M = L(\alpha, \mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha)$, 证明 M 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 并进一步证明 $\mathcal{A}|_M$的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - a_{k-2}\lambda^{k-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0.$$

Solution

考虑如下递推过程.
第 i 步: 若 $\mathcal{A}^i\alpha \notin M_i = L(\alpha, \mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{i-1}\alpha)$, 则令

$$M_{i+1} = L(\alpha, \mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{i-1}\alpha, \mathcal{A}^i\alpha);$$

若 $\mathcal{A}^i\alpha \in M_i = L(\alpha, \mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{i-1}\alpha)$, 则结束递推.
递推过程中得到的子空间 M_i 的维数必然等于 i, 即张成组中各向量必然线性无关. 否则, 设 $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{i-1}\alpha$ 线性相关, 即

$$c_0\alpha + c_1\mathcal{A}\alpha + \cdots + c_{i-1}\mathcal{A}^{i-1}\alpha = 0.$$

因为 $\alpha \neq 0$, 故 $c_1, c_2, \cdots, c_{i-1}$ 不全为 0. 设 j 是 $\{1, 2, \cdots, i-1\}$ 中使得 $c_i \neq 0$ 的最大正整数, 则有

$$\mathcal{A}^j\alpha = -\frac{c_0}{c_j}\alpha - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\mathcal{A}^{j-1}\alpha,$$

即 $\mathcal{A}^j\alpha \in M_j$. 这说明递推在第 j 步就已结束, 根本无法得到子空间 M_i, 于是导出了矛盾.
如果递推过程在有限步内不终止, 将得到 V 内任意长的线性无关组, 这不可能. 设递推过程在第 k 步终止, 令 $M = M_k = L(\alpha, \mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha)$ 即可满足题意.

设 $\mathcal{A}|_M$ 在基 $\mathcal{A}^{k-1}\alpha, \mathcal{A}^{k-2}\alpha, \cdots, \alpha$ 下的矩阵为 J, 则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}|_M(\mathcal{A}^{k-1}\alpha, \mathcal{A}^{k-2}\alpha, \cdots, \alpha) &= (\mathcal{A}^{k-1}\alpha, \mathcal{A}^{k-2}\alpha, \cdots, \alpha)\begin{bmatrix} a_{k-1} & 1 & & & \\ a_{k-2} & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_1 & & & 0 & 1 \\ a_0 & & & & 0 \end{bmatrix} \\
&= (\mathcal{A}^{k-1}\alpha, \mathcal{A}^{k-2}\alpha, \cdots, \alpha)J.
\end{aligned}$$

于是 $\mathcal{A}|_M$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}
D_k &= f(\lambda) = |\lambda E - J| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{k-1} & -1 & & & \\ -a_{k-2} & \lambda & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ -a_1 & & & \lambda & -1 \\ -a_0 & & & & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -a_{k-1} & -1 & & & \\ -a_{k-2} & \lambda & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ -a_1 & & & \lambda & -1 \\ -a_0 & & & & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ & & & & \lambda \end{vmatrix} \\
&= -a_{k-1}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ & & & \lambda \end{vmatrix} + (-1)(-1)\begin{vmatrix} -a_{k-2} & -1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_1 & & \lambda & -1 \\ -a_0 & & & \lambda \end{vmatrix} + \lambda^k \\
&= -a_{k-1}\lambda^{k-1} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{k-2} & -1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_1 & & \lambda & -1 \\ -a_0 & & & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ & & & \lambda \end{vmatrix} + \lambda^k \\
&= -a_{k-1}\lambda^{k-1} + D_{k-1} - \lambda^{k-1} + \lambda^k.
\end{aligned}$$

由累加法得

$$
\begin{aligned}
D_k &= D_1 + \sum_{i=2}^{k}(D_i - D_{i-1}) = \lambda - a_0 + \sum_{i=2}^{k}(-a_{i-1}\lambda^{i-1} - \lambda^{i-1} + \lambda^i) \\
&= \lambda - a_0 - \sum_{i=2}^{k} a_{i-1}\lambda^{i-1} - \lambda\frac{\lambda^{k-1}-1}{\lambda-1} + \lambda^2\frac{\lambda^{k-1}-1}{\lambda-1} \\
&= \lambda^k - \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}\lambda^{i-1}.
\end{aligned}
$$

这就完成了证明.

PROBLEM

25. 证明 Hamilton-Cayley 定理: 如果数域 K 上 n 维线性空间 V 内线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 则 $f(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$.

Solution

根据习题 4.4.24 的结论, 任给 V 中非零向量 α, 存在 V 的 $\mathcal{A}$ 不变子空间 $M = L(\alpha, \mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha)$, 使得 $\mathcal{A}|_M$ 的特征多项式为

$$
g(\lambda) = \lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - a_{k-2}\lambda^{k-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0,
$$

且

$$
\mathcal{A}^k\alpha = a_0\alpha + a_1\mathcal{A}\alpha + \cdots + a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}\alpha.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
g(\mathcal{A})\alpha &= (\mathcal{A}^k - a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1} - a_{k-2}\mathcal{A}^{k-2} - \cdots - a_1\mathcal{A} - a_0\mathcal{E})\alpha \\
&= \mathcal{A}^k\alpha - a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}\alpha - a_{k-2}\mathcal{A}^{k-2}\alpha - \cdots - a_1\mathcal{A}\alpha - a_0\alpha = 0.
\end{aligned}
$$

由教材命题 4.7 可得 $f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)$, 其中 $h(\lambda)$ 为 $\mathcal{A}$ 在商空间 V/M 中的诱导变换 $\overline{\mathcal{A}}$ 的特征多项式. 因此有 $f(\mathcal{A})\alpha = h(\mathcal{A})g(\mathcal{A})\alpha = 0$. 于是我们证明了 $f(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$.

Chapter 5

双线性函数与二次型

5.1 习题一 双线性函数

PROBLEM

1. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间 V 内的线性空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 K 内的 n 个数. 证明：在 V 内存在唯一的一个线性函数 $f(\alpha)$, 满足

$$f(\varepsilon_i) = a_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Solution

对任意 $\alpha \in V$, α 可唯一表示成

$$\alpha = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n.$$

定义 V 上的函数

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow K, \\ \alpha = k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_n\varepsilon_n &\longmapsto k_1a_1 + \cdots + k_na_n, \end{aligned}$$

可以验证 f 是线性的. 这给出了所求线性函数的存在性.

若存在 V 上的线性函数 g, 使得 $g(\varepsilon_i) = a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 那么对于任意 $\alpha = k_1a_1 + \cdots + k_na_n \in V$, 有

$$\begin{aligned} g(\alpha) = g(k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_n\varepsilon_n) &= k_1g(\varepsilon_1) + \cdots + k_ng(\varepsilon_n) \\ &= k_1a_1 + \cdots + k_na_n = f(\alpha)\text{fi} \end{aligned}$$

即 $g=f$. 于是所求线性函数具有唯一性. 综上我们完成了证明.

PROBLEM

5. 在实数域上线性空间 $C[a,b]$ 内定义二元函数如下: 对 $f(x),g(x)\in C[a,b]$, 令:

$$I(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

证明这是一个双线性函数.

Solution

对 $\forall k_1,k_2\in\mathbb{R}, f_1,f_2\in C[a,b]$, 有:

$$\begin{aligned}I(k_1f_1+k_2f_2,g)&=\int_a^b(k_1f_1(x)+k_2f_2(x))g(x)dx\\&=k_1\int_a^b f_1(x)g(x)dx+k_2\int_a^b f_2(x)g(x)dx\end{aligned}$$

对 $\forall l_1,l_2\in\mathbb{R}, g_1,g_2\in C[a,b]$, 有:

$$\begin{aligned}I(f,l_1g_1+l_2g_2)&=\int_a^b f(x)(l_1g_1(x)+l_2g_2(x))dx\\&=l_1\int_a^b f(x)g_1(x)dx+l_2\int_a^b f(x)g_2(x)dx\end{aligned}$$

所以, $I(f,g)$ 是 $C[a,b]$ 上的一个双线性函数.

PROBLEM

8. 在 $M_n(K)$ 内定义函数如下:

$$f(A,B)=\mathrm{Tr}(AB).$$

(1) 证明 $f(A,B)$ 是一个对称双线性函数;

(2) 令 $n=2$, 在 $M_2(K)$ 内取一组基

$$\varepsilon_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

求 $f(A,B)$ 在这组基下的矩阵;

(3) 在 $M_2(K)$ 内另取一组基

$$\eta_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \eta_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad \eta_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \eta_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

求出两组基之间的过渡矩阵 T:

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})T$$

再求 $f(A,B)$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵.

(4) 在 $n=2$ 的情况下求 $f(A,B)$ 的秩.

Solution

(1) 对于 $\forall k_1,k_2\in K, A_1,A_1\in M_n(K)$, 有:

$$f(k_1A_1+k_2A_2,B)=\mathrm{Tr}((k_1A_1+k_2A_2)B)=k_1\mathrm{Tr}(A_1B)+k_2\mathrm{Tr}(A_2B)=k_1f(A_1,B)+k_2f(A_2,B)$$

对于 $\forall l_1,l_2\in K, B_1,B_2\in M_n(K)$, 有:

$$f(A,l_1B_1+l_2B_2)=\mathrm{Tr}(A(l_1B_1+l_2B_2))=l_1\mathrm{Tr}(A,B_1)+l_2f(A,B_2)=l_1f(A,B_1)+l_2f(A,B_2)$$

另外又注意到:

$$f(A,B)=\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)=f(B,A)$$

所以 $f(A,B)$ 是一个对称双线性函数.

(2) 经计算可知:

$$f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{11})=1,\ f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12})=0,\ f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{21})=0,\ f(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22})=0$$

$$f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{11})=0,\ f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{12})=0,\ f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{21})=1,\ f(\varepsilon_{12},\varepsilon_{22})=0$$

$$f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{11})=0,\ f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{12})=1,\ f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{21})=0,\ f(\varepsilon_{21},\varepsilon_{22})=0$$

$$f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{11})=0,\ f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{12})=0,\ f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{21})=0,\ f(\varepsilon_{22},\varepsilon_{22})=1$$

所以, $f(A,B)$ 在这组基下的矩阵为:

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(3)注意到

$$\eta_1=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22},\ \eta_2=\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22},\ \eta_3=\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21},\ \eta_4=\varepsilon_{12}-\varepsilon_{21}$$

所以, 两组基之间的过渡矩阵为:

$$T=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{bmatrix}$$

则 $f(A,B)$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的矩阵为:

$$N=T'MT=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

(4) 由第(3)问的结果可知, $f(A,B)$ 的秩为4.

PROBLEM

9. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的一个双线性函数. 证明: $f(\alpha,\beta)$ 满秩的充分必要条件是: 当对一切 $\beta \in V$ 有 $f(\alpha,\beta)=0$ 时, 必定有 $\alpha=0$.

Solution

记 f 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A. 任取 $\alpha,\beta\in V$, 设:

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)X,\ \ \beta=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Y,\ \ X,Y\in K^n$$

(1) 充分性:
设 $f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in V$, 则有:

$$f(\alpha,\beta)=X'AY=0,\ \ \forall Y\in K^n$$

不妨取 $Y=\varepsilon_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$, 则: $X'A\varepsilon_i=0,\ (i=1,2,\cdots,n)$.
所以有, $0=X'A(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=X'AE=X'A,\ \ \Rightarrow\ \ A'X=0.$
由题目条件可知, 当对一切 $\beta\in V$ 有 $f(\alpha,\beta)=0$ 时, 即上述方程组只有零解.
所以, $rank(A)=rank(A')=n$, 即 $f(\alpha,\beta)$ 满秩.

(2) 必要性:
由于 $f(\alpha,\beta)$ 满秩, 所以矩阵 A 满秩.
设对于任意 $Y\in K^n$, $f(\alpha,\beta)=X'AY=0$.下推导X只能为0向量.
取Y依次为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, 则可得到:

$$X'A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=X'AE=0\ \ \Rightarrow\ \ A'X=0$$

由于矩阵 A 满秩, 则上述线性齐次方程组只有零解. 即:当对一切 $\beta\in V$ 有 $f(\alpha,\beta)=0$ 时, 必定有 $\alpha=0$.

PROBLEM

10. 证明第 8 题中的双线性函数 $f(A,B)$ 是满秩的.

Solution

证明一:
设对于一切 $B\in M_n(K)$, $f(A,B)=\mathrm{Tr}(AB)$. 下证明 $A=0$. 设 $A=$

$(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$, 则:

$$f(A,B)=\mathrm{Tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}AB(i,i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}\right)$$

依次取 $B=E_{ij}$, 则可以得到 $f(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}\right)=a_{ji}=0,\ (1\leq i,j\leq n)$.
所以可以得到 $A=0$.由习题 5.1.9 结论可知, 双线性函数 $f(A,B)$ 是满秩的.

也可以直接取一组基, 求出双线性函数 f 在这组基下的矩阵, 并判断该矩阵满秩来证明此命题.

证明二：
在 $M_n(K)$ 内选取一组基

$$E_{ij},\ \ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$E_{ij}+E_{ji},\ \ (i,j=1,2,\cdots,n,\ i<j)$$

$$E_{ij}-E_{ji},\ \ (i,j=1,2,\cdots,n,\ i<j)$$

下证明在这组基下 f 的矩阵成对角形. 首先, 有

$$E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}E_{il}, 若j=k;\\ \ 0,\ 若j\neq k.\end{cases}\qquad \mathrm{Tr}(E_{ij}E_{kl})=\begin{cases}1,\ 若i=l,j=k;\\ 0,\ 其他.\end{cases}$$

(1) 对于 E_{ii}, 有:

$$f(E_{ii},E_{jj})=\begin{cases}1,\ 若i=j;\\ 0,\ 若i\neq j.\end{cases}$$

对于 $k<l$, 有:

$$f(E_{ii},E_{kl}\pm E_{lk})=\mathrm{Tr}(E_{ii}E_{kl})\pm\mathrm{Tr}(E_{ii}E_{lk})=0.$$

(2) 对于 $E_{ij}+E_{ji},\ (1\leq i<j\leq n)$, 有

$$\begin{aligned}f(E_{ij}+E_{ji},E_{kl}+E_{lk})&=\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{kl})+\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{lk})+\mathrm{Tr}(E_{ji}E_{kl})+\mathrm{Tr}(E_{ji}E_{lk})\\&=\mathrm{Tr}(E_{ji}E_{kl})+\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{lk})\\&=\begin{cases}2,\ 若i=k,j=l;\\ 0,\ 其他.\end{cases}\end{aligned}$$

$$f(E_{ij}+E_{ji},E_{kl}-E_{lk})=\mathrm{Tr}(E_{ji}E_{kl})-\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{lk})=0.$$

(3) 对于 $E_{ij}-E_{ij}$, $(1\le i,j\le n)$, 有:

$$\begin{aligned}f(E_{ij}-E_{ji},E_{kl}-E_{lk})&=\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{kl})-\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{lk})-\mathrm{Tr}(E_{ji}E_{kl})+\mathrm{Tr}(E_{ji}E_{lk})\\&=-\mathrm{Tr}(E_{ji}E_{kl})-\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{lk})\\&=\begin{cases}-2, & 若 i=k,j=l;\\ 0, & 其他.\end{cases}\end{aligned}$$

经过上述计算可以发现, f 在所选的基下成对角阵, 主对角线上有 n 个 1 , $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个 2 和 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个 -2 . 从而 f 是满秩的.

PROBLEM

16. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间 V 内的线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 为 V 内的双线性函数. 如果对任意 $\alpha,\beta\in V$ 都有 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$, 则称 $f(\alpha,\beta)$ 为 V 内**反对称双线性函数**. 证明反对称双线性函数在 V 的任意一组基下的矩阵都是反对称矩阵.

Solution

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的任意一组基, $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}=(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))_{n\times n}$. 因为 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=-f(\varepsilon_j,\varepsilon_i)$, 即 $a_{ij}=-a_{ji}$, 所以 A 是反对称矩阵. 命题得证.

PROBLEM

17. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 为 V 内反对称双线性函数. 证明 V 内存在一组基, 使 $f(\alpha,\beta)$ 在此组基下的矩阵成如下准对角形：

$$A=\begin{bmatrix} S & & & & & & \\ & S & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & S & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad S=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solution

对维数 $n=\dim V$ 作归纳.

若 $n=1$. 由习题 5.1.16 知：无论基如何选取, A 必为一阶反对称矩阵, 即 $A=0$. 此时命题成立.

若 $n=2$. 由习题 5.1.16 知：无论基如何选取, A 必为二阶反对称矩阵. 设 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}.$$

$A=0$ 时. 命题已然成立. 设 $A\neq 0$, 则 f 在基 $\frac{1}{a}\varepsilon_1,\frac{1}{a}\varepsilon_2$ 下的矩阵为

$$\begin{aligned} A&=\begin{bmatrix} 0 & f(\frac{1}{a}\varepsilon_1,\frac{1}{a}\varepsilon_2) \\ f(\frac{1}{a}\varepsilon_2,\frac{1}{a}\varepsilon_1) & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a}f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \\ \frac{1}{a}f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & 0 \end{bmatrix} \\ &=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} 0 & f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

故此时命题也成立.

设 $n=k-2(k\geq 3)$ 时命题已经成立. 当 $n=k$ 时, 设 f 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 下的矩阵为 A. 若 $A=0$, 命题已然成立. 若 $A\neq 0$, 不妨设 $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=c\neq 0$. 构造 V 的一组新基：

$$\eta_1=\varepsilon_1,\ \eta_2=\varepsilon_2,\ \eta_i=f(\eta_2,\varepsilon_i)\eta_1-f(\eta_1,\varepsilon_i)\eta_2+f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\varepsilon_i\ (i=3,4,\cdots,k).$$

可以验证

$$
\begin{aligned}
f(\eta_1,\eta_i) &= f(\eta_2,\varepsilon_i)f(\eta_1,\eta_1)-f(\eta_1,\varepsilon_i)f(\eta_1,\eta_2)+f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)f(\eta_1,\varepsilon_i)\\
&= -f(\eta_1,\varepsilon_i)f(\eta_1,\eta_2)+f(\eta_1,\eta_2)f(\eta_1,\varepsilon_i)=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\eta_2,\eta_i) &= f(\eta_2,\varepsilon_i)f(\eta_2,\eta_1)-f(\eta_1,\varepsilon_i)f(\eta_2,\eta_2)+f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)f(\eta_2,\varepsilon_i)\\
&= f(\eta_2,\varepsilon_i)f(\eta_2,\eta_1)+f(\eta_1,\eta_2)f(\eta_2,\varepsilon_i)\\
&= -f(\eta_2,\varepsilon_i)f(\eta_1,\eta_2)+f(\eta_1,\eta_2)f(\eta_2,\varepsilon_i)=0.\ (i=3,4,\cdots,k)
\end{aligned}
$$

令 $M=L(\eta_1,\eta_2),N=L(\eta_3,\eta_4,\cdots,\eta_k)$, 则有 $V=M\oplus N$. 因为 f 在 $N\times N$ 上的限制 $f|_{N\times N}$ 显然也是反对称双线性函数, 且 $\dim N=k-2$, 由归纳假设知：存在 N 内的一组基 $\delta_3,\delta_4,\cdots,\delta_k$, 使得 $f|_{N\times N}$ 在该组基下的矩阵 B 为若干 S 和 0 组成的准对角形. 令 $\delta_1=\frac{1}{c}\eta_1,\delta_2=\frac{1}{c}\eta_2$, 于是 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\cdots,\delta_k$ 构成 V 的一组基. 注意到

$$
\begin{aligned}
f(\eta_1,\delta_i) &= f(\eta_1,\sum_{i=3}^{k}l_i\eta_i)=\sum_{i=3}^{k}l_if(\eta_1,\eta_i)=0,\\
f(\eta_2,\delta_i) &= f(\eta_2,\sum_{i=3}^{k}l_i\eta_i)=\sum_{i=3}^{k}l_if(\eta_2,\eta_i)=0\ (i=3,4,\cdots,k),
\end{aligned}
$$

因此 f 在基 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\cdots,\delta_k$ 下的矩阵

$$
A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & B \end{bmatrix}
$$

也为若干 S 和 0 组成的准对角形, 即 $n=k$ 时命题同样成立.

由数学归纳法知命题对任意维数的有限维线性空间均成立.

PROBLEM

18. 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 内的双线性函数. 对 V 的子空间 M, 定义:

$$L(M)=\{\alpha\in V|f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in M\}$$

$$R(M)=\{\alpha\in V|f(\beta,\alpha)=0,\forall\beta\in M\}$$

证明$L(M),R(M)$为V的子空间. 如果$f(\alpha,\beta)$为V内满秩双线性函数, 证明:

$$\dim L(M)=\dim R(M)=n-\dim M$$

同时又有:

$$R(L(M))=L(R(M))=M$$

Solution

(1) 先证明$L(M),R(M)$为V的子空间. 任取$\alpha_1,\alpha_2\in L(M),k_1,k_2\in K$, 有:

$$f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)=0$$

所以$L(M)$是V的子空间. 同理, $R(M)$也是V的子空间.

(2) 再证明: 如果$f(\alpha,\beta)$为V内满秩双线性函数,则有

$$\dim L(M)=\dim R(M)=n-\dim M,\quad R(L(M))=L(R(M))=M$$

在M内取一组基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$, 将其扩充为$V$的一组基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$. 对任意的$\alpha\in V$, 记$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$, 则$\alpha\in L(M)$等价于:

$$f(\varepsilon_1,\varepsilon_i)a_1+\cdots+f(\varepsilon_r,\varepsilon_i)a_r+\cdots+f(\varepsilon_{r+1},\varepsilon_i)a_{r+1}+\cdots+f(\varepsilon_n,\varepsilon_i)a_n=0,\ (i=1,2\cdots,r)$$

f满秩意味着系数矩阵满秩, 为$r=\dim M$. 其解空间W的维数为

$$\dim W=n-r=n-\dim(M)$$

由于α对应到它的坐标X是V到F^n的一个同构映射, 且$L(M)$在该映射下的象为上述方程组的解空间W, 所以:

$$\dim L(M)=\dim W=n-\dim(M)$$

同理可得, $\dim R(M)=n-\dim(M)$. 即$\dim L(M)=\dim R(M)=n-r$.

注意到$R(L(M)) = \{\beta \in V | f(\alpha, \beta) = 0, \forall \alpha \in L(M)\}$, 任取$\gamma \in M$, 当$\alpha \in L(M)$时,

$$f(\alpha, \gamma) = 0 \quad (\text{由}R(L(M))\text{的定义可得})$$

所以$M \subset R(L(M))$. 由前面的证明过程可知, $\dim R(L(M)) = n - \dim L(M) = n - (n-r) = r$,所以$M = R(L(M))$. 同理可得: $M = L(R(M))$. 即: $L(R(M)) = R(L(M)) = M$.

PROBLEM

19. 设 V 是数域 K 上的n维线性空间, M, N 是 V 的两个子空间, $f(\alpha, \beta)$ 为 V 内双线性函数, 使用上题记号. 证明:

$$L(M+N) = L(M) \cap L(N), \quad R(M+N) = R(M) \cap R(N)$$

如果 $f(\alpha, \beta)$ 满秩, 则:

$$L(M \cap N) = L(M) + L(N), \quad R(M \cap N) = R(M) + R(N)$$

Solution

(1) 任取 $\alpha \in L(M+N)$, 则对于 $\forall \beta \in M+N$有$f(\alpha, \beta) = 0$.
由于$M \subset M+N, N \subset M+N$, 所以 $\alpha \in L(M), \alpha \in L(N)$, 即: $\alpha \in L(M) \cap L(N)$.
从而: $L(M+N) \subset L(M) \cap L(N)$.
任取 $\alpha \in L(M) \cap L(N)$, 则对于 $\forall \beta_1 \in M, \beta_2 \in N$, 有

$$f(\alpha, \beta_1) = 0, \quad f(\alpha, \beta_2) = 0$$

任取$\beta \in M+N$, 则$\exists \beta_1 \in M, \beta_2 \in N$, 使得$\beta = \beta_1 + \beta_2$, 从而:

$$f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = f(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2) = 0$$

从而: $L(M) \cap L(N) \subset L(M+N)$.
综上, $L(M+N) = L(M) \cap L(N)$. 同理可得, $R(M+N) = R(M) \cap R(N)$.

(2)对于$\forall \alpha \in L(M) + L(N)$, 有$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \in L(M), \alpha_2 \in L(N)$.
对于$\forall \beta \in M \cap N$, 可知$f(\alpha, \beta) = f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta) = 0$, 即: $\alpha \in L(M \cap N)$.
所以 $L(M) + L(N) \subset L(M \cap N)$.

由于$f(\alpha,\beta)$满秩, 5.1.18的结论及维数公式可得:

$$\begin{aligned}\dim(L(M)+L(N)) &= \dim L(M)+\dim L(N)-\dim(L(M)\cap L(n))\\ &= (n-\dim M)+(n-\dim N)-\dim(L(M+N))\\ &= 2n-(\dim M+\dim N)-(n-\dim(M+N))\\ &= n-(\dim M+\dim N-\dim(M+N))\\ &= n-\dim(M\cap N)\\ &= \dim L(M\cap N)\end{aligned}$$

所以, $L(M)+L(N)=L(M\cap N)$. 同理可得, $R(M)+R(N)=R(M\cap N)$.

5.2 习题二　二次型

5.3 习题三　实与复二次型的分类

5.4 习题四　正定二次型

Part II

下册

Chapter 6

带度量的线性空间

6.1 习题一 欧几里得空间的定义和基本性质

PROBLEM

1.设 A 是 n 阶正定矩阵. 在 $\mathbb{R}^n$ 定义二元函数 (α,β) 如下: 若

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

则令

$$(\alpha,\beta)=\alpha A\beta'.$$

证明:

(1) (α,β) 满足内积条件 (i) $\sim$ (iii), 从而 $\mathbb{R}^n$ 关于这个内积也成一欧式空间;

(2) 写出这个欧式空间的柯西-布尼雅可夫斯基不等式.

Solution

(1) 验证内积条件如下:

(i) 对任意 $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ 和任意 $\alpha_1,\alpha_2,\beta\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)&=(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)A\beta'\\&=k_1\alpha_1A\beta'+k_2\alpha_2A\beta'\\&=k_1(\alpha_1,\beta)+k_2(\alpha_2,\beta);\end{aligned}$$

(ii) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, 有

$$(\alpha, \beta) = \alpha A\beta' = (\alpha A\beta')' = \beta A\alpha' = (\beta, \alpha);$$

(iii) 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 因为 A 是正定矩阵, 所以二次型 $(\alpha, \alpha) = \alpha A\alpha' \geq 0$, 且 $(\alpha, \alpha) = \alpha A\alpha' = 0$ 的充要条件是 $\alpha = 0$.

(2) 该欧式空间中的柯西-布尼雅可夫斯基不等式为:

$$|\alpha A\beta'| \leq |\alpha| \cdot |\beta|$$

或

$$(\alpha A\beta')^2 \leq \alpha A\alpha' \beta A\beta'.$$

PROBLEM

2.在 $M_n(\mathbb{R})$ 中考虑全体 n 阶对称矩阵所成的子空间 V. 在 V 中定义二元函数如下:

$$(A, B) = \mathrm{Tr}(AB).$$

证明: 这个函数满足内积条件, 从而 V 关于它成一欧式空间.

Solution

定义 $M_n(\mathbb{R})$ 中的二元函数

$$(A, B) = \mathrm{Tr}(A'B).$$

该二元函数在 $V \times V$ 上的限制与题目中定义的二元函数 $(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ 相同. 下面将验证二元函数 $(A, B) = \mathrm{Tr}(A'B)$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 中的内积.

1. 对任意 $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ 和任意 $A_1, A_2, B \in M_n(\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned}(k_1A_1 + k_2A_2, B) &= \mathrm{Tr}((k_1A_1 + k_2A_2)'B) \\ &= k_1\mathrm{Tr}(A_1'B) + k_2\mathrm{Tr}(A_2'B) \\ &= k_1(A_1, B) + k_2(A_2, B);\end{aligned}$$

2. 对任意 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 有

$$(A, B) = \mathrm{Tr}(A'B) = \mathrm{Tr}((A'B)') = \mathrm{Tr}(B'A) = (B, A);$$

3. 对任意 $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$(A, A) = \mathrm{Tr}(A'A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0.$$

且 $(A, A) = 0$ 的充要条件是 $a_{ij} = 0$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$, 即 $A = 0$.

于是 $M_n(\mathbb{R})$ 关于 (A, B) 成一欧式空间. V 则是继承了 $M_n(\mathbb{R})$ 内积的子空间.

PROBLEM

4.证明: 在欧式空间中两向量 α, β 正交的充分必要条件是: 对任意实数 t, 有

$$|\alpha + t\beta| \geq |\alpha|.$$

Solution

充分性:

$$|\alpha+t\beta| \geq |\alpha| \iff (\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+t^2(\beta,\beta) \geq (\alpha,\alpha) \iff t^2(\beta,\beta)+2t(\alpha,\beta) \geq 0.$$

若 $(\beta, \beta) = 0$ 即 $\beta = 0$, 显然有 α, β 正交. 若 $(\beta, \beta) \neq 0$, 则对任意实数 t, 有

$$t^2(\beta, \beta) + 2t(\alpha, \beta) = (\beta, \beta)\left[t + \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}\right]^2 - \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)} \geq 0.$$

令 $t = -\dfrac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$, 则 $-\dfrac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)} \geq 0$, 于是有 $(\alpha, \beta) = 0$, 即 α, β 正交.

必要性:.

若 $(\alpha, \beta) = 0$, 则对任意实数 t, 有

$$t^2(\beta, \beta) + 2t(\alpha, \beta) = t^2(\beta, \beta) \geq 0.$$

这等价于 $|\alpha + t\beta| \geq |\alpha|$.

PROBLEM

12.在 $\mathbb{R}[x]_4$ 中定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

试求出它的一组标准正交基.

Solution

$\mathbb{R}[x]_4$ 的一组基为 $1,x,x^2,x^3$. 先作正交化, 得到一组正交基

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1&=1,\\
\varepsilon_2&=x-\frac{(x,1)}{(1,1)}1=x-\frac{\int_{-1}^{1}t\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t}1=x,\\
\varepsilon_3&=x^2-\frac{(x^2,1)}{(1,1)}1-\frac{(x^2,x)}{(x,x)}x\\
&=x^2-\frac{\int_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t}1-\frac{\int_{-1}^{1}t^2t\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t}x=x^2-\frac{1}{3},\\
\varepsilon_4&=x^3-\frac{(x^3,1)}{(1,1)}1-\frac{(x^3,x)}{(x,x)}x-\frac{(x^3,x^2)}{(x^2,x^2)}x^2\\
&=x^3-\frac{\int_{-1}^{1}t^3\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t}1-\frac{\int_{-1}^{1}t^3t\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t}x-\frac{\int_{-1}^{1}t^3t^2\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1}(t^2)^2\mathrm{d}t}x^2=x^3-\frac{3}{5}x.
\end{aligned}$$

再作单位化处理

$$\begin{aligned}
\eta_1&=\frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}}\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t}}1=\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\eta_2&=\frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}}\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t}}x=\frac{\sqrt{6}}{4}x,\\
\eta_3&=\frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_3,\varepsilon_3)}}\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}t}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{4}x^2-\frac{\sqrt{10}}{4},\\
\eta_4&=\frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_4,\varepsilon_4)}}\varepsilon_4=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(t^3-\frac{3}{5}t\right)^2\mathrm{d}t}}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)=\frac{5\sqrt{14}}{4}x^3-\frac{3\sqrt{14}}{4}x.
\end{aligned}$$

于是, $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 为欧式空间 $\mathbb{R}[x]_4$ 的一组标准正交基.

PROBLEM

15.设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是欧式空间 V 内一个向量组, 令

$$D = \begin{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_s) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_s, \alpha_1) & (\alpha_s, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_s, \alpha_s) \end{bmatrix}.$$

证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是 $\det(D) \neq 0$.

Solution

必要性:

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 可利用 Schmidt 正交化方法得到一个两两正交的单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_s$, 且有

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1' = \alpha_1, \\ &\varepsilon_i' = \alpha_i - \frac{(\alpha_i, \varepsilon_1')}{(\varepsilon_1', \varepsilon_1')}\varepsilon_1' - \frac{(\alpha_i, \varepsilon_2')}{(\varepsilon_2', \varepsilon_2')}\varepsilon_2' - \cdots - \frac{(\alpha_i, \varepsilon_{i-1}')}{(\varepsilon_{i-1}', \varepsilon_{i-1}')}\varepsilon_{i-1}' \ (i = 2, 3, \cdots, s), \end{aligned}$$

以及 $\varepsilon_i = \dfrac{1}{|\varepsilon_i'|}\varepsilon_i' \ (i = 1, 2, \cdots, s)$. 也即

$$\alpha_i = t_{1i}\varepsilon_1 + t_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + t_{ii}\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{i} t_{ji}\varepsilon_j = \sum_{j=1}^{s} t_{ji}\varepsilon_j,$$

其中 $t_{ii} > 0$ 且 $j < i$ 时, $t_{ji} = 0$. 于是矩阵 D 第 i 行第 k 列的元素

$$D_{ik} = (\alpha_i, \alpha_k) = \left(\sum_{j=1}^{s} t_{ji}\varepsilon_j, \sum_{l=1}^{s} t_{lk}\varepsilon_l\right) = \sum_{j=1}^{s} t_{ji} \sum_{l=1}^{s} t_{lk} (\varepsilon_j, \varepsilon_l) = \sum_{j=1}^{s} t_{ji}t_{jk}.$$

设

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1s} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2s} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{ss} \end{bmatrix},$$

则 $T'T = D$. 因为 $\det(T') = \det(T) = t_{11}t_{22}\cdots t_{ss} > 0$, 故 $\det(D) = \det(T'T) \neq 0$.

充分性:

若 $\det(D) \neq 0$. 反设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关. 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$ $(r < s)$ 是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 的一组标准正交基, 则有

$$\alpha_i = t_{1i}\varepsilon_1 + t_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + t_{ii}\varepsilon_r = \sum_{j=1}^{r} t_{ji}\varepsilon_j \ (i = 1, 2, \cdots, s).$$

于是

$$D_{ik} = (\alpha_i, \alpha_k) = \left(\sum_{j=1}^{r} t_{ji}\varepsilon_j, \sum_{l=1}^{r} t_{lk}\varepsilon_l\right) = \sum_{j=1}^{r} t_{ji} \sum_{l=1}^{r} t_{lk} (\varepsilon_j, \varepsilon_l) = \sum_{j=1}^{r} t_{ji} t_{jk}.$$

设

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1r} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{s1} & t_{s2} & \cdots & t_{sr} \end{bmatrix},$$

则 $T'T = D$. 因为 $r(D) = r(T'T) = r(T) \leq r < s$, 故 $\det(D) = 0$, 矛盾! 这说明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关.

PROBLEM

17.证明: 实上三角矩阵为正交矩阵时, 必为对角矩阵, 且对角线上的元素为 ± 1.

Solution

对实上三角正交矩阵 A 的阶数 n 作归纳.

$n = 1$ 时, $A'A = (a_{11}^2) = (1) \implies A = (\pm 1)$, 命题成立.

设 $n = k - 1$ 时, 命题成立. 对 k 阶矩阵 A_k 作分块

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} & M \\ 0 & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

因为 A_k 是实上三角正交矩阵, 因此 A_{k-1} 也呈上三角, 且列向量两两正交. 根据归纳假设, 我们有

$$A_k = \begin{bmatrix} \pm 1 & \cdots & 0 & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pm 1 & a_{k-1,k} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

A_k 的前 $k-1$ 列分别与第 k 列作内积, 得 $a_{1k}=a_{2k}=\cdots=a_{k-1,k}=0$. 故 A_k 为对角阵. 由 $A_k'A_k=E$ 得 $a_{kk}=\pm1$. 因此, 当 $n=k$ 时, 命题也成立. 这就完成了证明.

PROBLEM

18.设 A 是一个 n 阶实方阵, $|A|\neq 0$. 证明 A 可分解为一个正交矩阵 Q 和一个上三角矩阵

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1s} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2s} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{ss} \end{bmatrix},\quad (t_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n)$$

的乘积: $A=QT$. 并证明这种分解是唯一的.

Solution

设 A 的列向量组是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 则它是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 在习题 6.1.15 中已经证明了

$$\alpha_i=t_{1i}\varepsilon_1+t_{2i}\varepsilon_2+\cdots+t_{ii}\varepsilon_i=\sum_{j=1}^{i}t_{ji}\varepsilon_j,(t_{ii}>0,i=1,2,\cdots,n).$$

即

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{bmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)T$$

设 $Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$. 因为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基, 所以 Q 是正交矩阵. 于是 $A=QT$ 正是我们要找的分解.
设正交矩阵 Q_1 和主对角线元素为正的实上三角矩阵 T_1 满足 $A=Q_1T_1$, 则有 $Q_1^{-1}Q=T_1^{-1}T$. 不难验证 $Q_1^{-1}Q$ 仍是正交矩阵, $T_1^{-1}T$ 仍是上三角矩阵. 在第 16 题中我们证明了 $T_1^{-1}T$ 主对角线上的元素只能为 1 或 -1. 注意到 $T_1^{-1}T$ 主对角线上的元素都为正数, 故有 $T_1^{-1}T=E$. 因此 $Q_1=Q, T_1=T$. 这说明这种分解是唯一的.

PROBLEM

19.设 A 是 n 阶正定矩阵, 证明存在一个上三角矩阵 T ,使 $A = T'T$.

Solution

因为 A 是正定矩阵, 所以存在可逆矩阵 P, 使得 $A = P'P$. 根据习题 6.1.18 的结论, 我们有分解式 $P = QT$, 其中 Q 是正交矩阵, T 是上三角矩阵. 因此,

$$A = P'P = (QT)'QT = T'Q'QT = T'T.$$

命题得证.

PROBLEM

20.设 $f(\alpha)$ 是 n 维欧式空间 V 内的一个线性函数, 证明在 V 内存在一个固定向量 β, 使对一切 $\alpha \in V$, 有

$$f(\alpha) = (\alpha, \beta).$$

Solution

给定 $\beta \in V$, 可以相应地定义一个映射

$$\begin{aligned} \phi_\beta : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

因为对任意 $k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1, \alpha_2 \in V$, 有

$$\phi_\beta(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2) = (k_1\alpha_1+k_2\alpha_2, \beta) = k_1(\alpha_1, \beta)+k_2(\alpha_2, \beta) = k_1\phi_\beta(\alpha_1)+k_2\phi_\beta(\alpha_2),$$

所以 $\phi_\beta \in V^*$. 于是可定义映射

$$\begin{aligned} \tau : V &\longrightarrow V^* \\ \beta &\longmapsto \phi_\beta. \end{aligned}$$

因为对任意 $k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \beta_1, \beta_2, \gamma \in V$,

$$\begin{aligned} &(\tau(k_1\beta_1 + k_2\beta_2))(\gamma) = \phi_{k_1\beta_1+k_2\beta_2}(\gamma) = (\gamma, k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = k_1(\gamma, \beta_1) + k_2(\gamma, \beta_2) \\ =&k_1\phi_{\beta_1}(\gamma) + k_2\phi_{\beta_2}(\gamma) = (k_1\phi_{\beta_1} + k_2\phi_{\beta_2})(\gamma) = (k_1\tau(\beta_1) + k_2\tau(\beta_2))(\gamma), \end{aligned}$$

即 $\tau(k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1\tau(\beta_1)+k_2\tau(\beta_2)$, 所以 τ 是线性映射. 结合习题 5.1.9 中的结论, 可以得出

$$\tau(\beta)=\mathbf{0} \iff \forall\alpha\in V,\ \phi_\beta(\alpha)=(\alpha,\beta)=0 \iff \beta=0,$$

即 $\operatorname{Ker}\tau=\{0\}$, 这表明 τ 是单射. 又因为 $\dim V=\dim V^*$, 所以 τ 是 V 到 V^* 上的同构映射. 因此, 对任意 $f\in V^*$, 存在 $\beta\in V$, 使得 $f=\tau(\beta)=\phi_\beta$, 即

$$\exists\beta\in V,\ \forall\alpha\in V,\ f(\alpha)=\phi_\beta(\alpha)=(\alpha,\beta).$$

PROBLEM

21.设 M 是欧式空间 V 内的一个子空间. 对任意 $\alpha\in V$, $\alpha+M$ 称为 V 内的一个**线性流形**. 对任意 $\beta\in V$, 向量 $\beta-\xi$, 当 ξ 取 $\alpha+M$ 内一切向量时, 其长度 $|\beta-\xi|$ 的最小值称为 β 到线性流形 $\alpha+M$ 的**距离**. 若

$$\beta-\alpha=\beta_1+\beta_2\quad(\beta_1\in M,\beta_2\in M^\perp).$$

证明 β 到 $\alpha+M$ 的距离等于 β_2 的长度 $|\beta_2|$.

Solution

设 $\xi=\alpha+\eta\ (\eta\in M)$, 则

$$\beta-\xi=\beta-\alpha-\eta=\beta_1+\beta_2-\eta=(\beta_1-\eta)+\beta_2,$$

其中 $\beta_1-\eta\in M,\beta_2\in M^\perp$. 因为 $(\beta_1-\eta,\beta_2)=0$, 所以

$$\begin{aligned}|\beta-\xi|^2=&(\beta-\xi,\beta-\xi)=((\beta_1-\eta)+\beta_2,(\beta_1-\eta)+\beta_2)\\&=(\beta_1-\eta,\beta_1-\eta)+(\beta_2,\beta_2)=|\beta_1-\eta|^2+|\beta_2|^2=|\beta_1+\alpha-\xi|^2+|\beta_2|^2.\end{aligned}$$

当 $\xi=\beta_1+\alpha$ 时, $|\beta-\xi|^2$ 取到最小值 $|\beta_2|^2$, 即

$$\min_{\xi\in\alpha+M}|\beta-\xi|^2=|\beta_2|^2.$$

因此β 到 $\alpha+M$ 的距离等于 $|\beta_2|$.

PROBLEM

22.在欧式空间 V 内给定两个子空间 M, N, 又设 α, β 是 V 内两个向量. 令

$$d = \min\{\,|\xi - \zeta| \mid \xi \in \alpha + M, \zeta \in \beta + N\},$$

d 称为 $\alpha + M, \beta + N$ 之间的距离. 设

$$\beta - \alpha = \beta_1 + \beta_2 \quad (\beta_1 \in M + N, \beta_2 \in (M + N)^{\perp}).$$

证明 $d = |\beta_2|$.

Solution

设 $\xi = \alpha + \eta\ (\eta \in M), \zeta = \beta + \theta\ (\theta \in N)$, 则

$$\xi - \zeta = (\alpha + \eta) - (\beta + \theta) = (\eta - \theta) - (\beta - \alpha) = (\eta - \theta) - (\beta_1 + \beta_2) = (\eta - \theta - \beta_1) - \beta_2$$

其中 $\eta - \theta - \beta_1 \in M + N, \beta_2 \in (M + N)^{\perp}$. 因为 $(\eta - \theta - \beta_1, \beta_2) = 0$, 所以有

$$|\xi - \zeta|^2 = |\eta - \theta - \beta_1|^2 + |\beta_2|^2,$$

其中 $\beta_1 \in M + N$ 是固定的向量. 设 $\beta_1 = \gamma_1 + \gamma_2\ (\gamma_1 \in M, \gamma_2 \in N)$, 于是当 $\eta = \gamma_1, \theta = -\gamma_2$ 时, $|\xi - \zeta|^2$ 取到最小值 $|\beta_2|^2$. 因此

$$d = \min\{\,|\xi - \zeta| \mid \xi \in \alpha + M, \zeta \in \beta + N\} = |\beta_2|.$$

6.2　习题二　欧几里得空间中的特殊线性变换

PROBLEM

2.设 η 是 n 维欧式空间 V 内的一个单位向量, 定义 V 内一个线性变换如下:

$$\mathcal{A}\alpha = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta$$

称这样的线性变换 $\mathcal{A}$ 为一个镜面反射. 证明:

(1) $\mathcal{A}$ 是正交变换;

(2) $\mathcal{A}$ 是第二类的;

(3) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$;

(4) 设 $\mathcal{B}$ 是 V 内一个第二类正交变换, 则必有:

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}_1$$

其中, $\mathcal{B}_1$ 是 V 内的一个第一类正交变换.

Solution

(1) 对于镜面反射 $\mathcal{A}$, 有:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) &= (\alpha - 2(\eta,\alpha)\eta, \beta - 2(\eta,\beta)\eta) \\ &= (\alpha,\beta) - 2(\alpha,\eta)(\eta,\beta) - 2(\eta,\beta)(\eta,\alpha) + 4(\eta,\alpha)(\eta,\beta)(\eta,\eta) \\ &= (\alpha,\beta)\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{A}$ 是正交变换.

(2) 将 $\eta = \epsilon_1$ 扩充为 V 的一组标准正交基 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$, 有:

$$\mathcal{A}\epsilon_1 = \epsilon_1 - 2(\eta, \epsilon_1)\eta = \epsilon_1 - 2\eta = -\epsilon_1$$

$$\mathcal{A}\epsilon_i = \epsilon_i - 2(\eta, \epsilon_i)\eta = \epsilon_i, \quad (i = 2, 3, \cdots, n)$$

所以 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

可以得到, $|A| = -1$. 由于线性变换在不同基下的矩阵是相似的, 相似的矩阵行列式相等. 所以 $\mathcal{A}$ 在任意一组基下的矩阵的行列式都为 -1 , 所以 $\mathcal{A}$ 是第二类的.

(3) 对任意 $\alpha \in V$, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2\alpha &= \mathcal{A}(\mathcal{A}\alpha) = \mathcal{A}\alpha - 2(\eta, \mathcal{A}\alpha)\eta \\ &= \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta - 2(\eta, \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta)\eta \\ &= \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta - 2(\eta, \alpha)\eta + 4(\eta, \alpha)(\eta, \eta)\eta \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

所以 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$.

(4) 由(3)可知 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$, 所以 $\mathcal{B} = \mathcal{A}^2\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{A}\mathcal{B})$. 令 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}\mathcal{B}$, 则有分解式 $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}_1$. 因为 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 都是正交变换, 故有 $\forall \alpha \in V$

$$((\mathcal{A}\mathcal{B})\alpha, (\mathcal{A}\mathcal{B})\alpha)) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha), \mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha)) = (\mathcal{B}\alpha, \mathcal{B}\alpha) = (\alpha, \alpha),$$

即 $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 也是正交变换. 设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 在 V 的某组基下的矩阵分别为 A, B , 则 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}\mathcal{B}$ 在这组基下的矩阵为 $B_1 = AB$, 从而有

$$\det(B_1) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = (-1) \times (-1) = 1.$$

这表明正交变换 $\mathcal{B}_1$ 是第一类的.

PROBLEM

2.设 V 是一个 n 维欧式空间, V 中一个正交变换 $\mathcal{A}$ 有特征值 $\lambda_0 = 1$, 且 $\dim V_{\lambda_0} = n - 1$. 证明 $\mathcal{A}$ 是一个镜面反射.

Solution

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 是特征子空间 V_{λ_0} 的一组标准正交基, ε_n 是 $V_{\lambda_0}^{\perp}$ 中的单位向量, 合并得到 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$. 因为

$$(\mathcal{A}\varepsilon_n, \varepsilon_i) = (\mathcal{A}\varepsilon_n, \mathcal{A}\varepsilon_i) = (\varepsilon_n, \varepsilon_i) = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n-1),$$

即 $\mathcal{A}\varepsilon_n \in V_{\lambda_0}^{\perp}$, 所以有 $\mathcal{A}\varepsilon_n = \lambda_1\varepsilon_n$ $(\lambda_1 \in \mathbb{R})$. 已知正交变换的特征值只能是 1 或 -1. 而 $\varepsilon_n \notin V_{\lambda_0}$ 即 $\lambda_1 \neq 1$, 故 $\lambda_1 = -1$.
任取 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n \in V$, 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\alpha &= \mathcal{A}(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n) \\
&= x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_{n-1}\varepsilon_{n-1} - x_n\varepsilon_n \\
&= (x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_{n-1}\varepsilon_{n-1} + x_n\varepsilon_n) - 2x_n\varepsilon_n \\
&= \alpha - 2(\varepsilon_n, \alpha)\varepsilon_n.
\end{aligned}$$

又由于 ε_n 是一个单位向量, 于是我们证明了 $\mathcal{A}$ 是一个镜面反射.

PROBLEM

6. 设 $\mathcal{A}$ 是欧式空间 V 内的一个变换, 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta)$. 证明 $\mathcal{A}$ 是一个正交变换.

Solution

只需要证明变换 $\mathcal{A}$ 是线性的. 对任意 $\alpha, \beta \in V$

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{A}(\alpha+\beta) - (\mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta),\ \mathcal{A}(\alpha+\beta) - (\mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta)) \\
=&(\mathcal{A}(\alpha+\beta), \mathcal{A}(\alpha+\beta)) - 2(\mathcal{A}(\alpha+\beta), \mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta) + (\mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta,\ \mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta) \\
=&(\mathcal{A}(\alpha+\beta), \mathcal{A}(\alpha+\beta)) - 2(\mathcal{A}(\alpha+\beta), \mathcal{A}\alpha) - 2(\mathcal{A}(\alpha+\beta), \mathcal{A}\beta) \\
&+ (\mathcal{A}\alpha,\ \mathcal{A}\alpha) + 2(\mathcal{A}\alpha,\ \mathcal{A}\beta) + (\mathcal{A}\beta,\ \mathcal{A}\beta) \\
=&(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta) - 2(\alpha+\beta, \alpha) - 2(\alpha+\beta, \beta) + (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \\
=&(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta) - 2(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta) + (\alpha+\beta,\ \alpha+\beta) \\
=&0.
\end{aligned}$$

由内积的正定性可知, $\mathcal{A}(\alpha+\beta) = \mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta$.
对任意 $k \in \mathbb{R}, \alpha \in V$, 有:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}(k\alpha) - k\mathcal{A}\alpha,\ \mathcal{A}(k\alpha) - k\mathcal{A}\alpha) &= (\mathcal{A}(k\alpha),\ \mathcal{A}(k\alpha)) - 2k(\mathcal{A}(k\alpha),\ \mathcal{A}\alpha) + k^2(\mathcal{A}\alpha,\ \mathcal{A}\alpha) \\
&= (k\alpha, k\alpha) - 2k(k\alpha, \alpha) + k^2(\alpha, \alpha) \\
&= (k\alpha, k\alpha) - 2(k\alpha, k\alpha) + (k\alpha, k\alpha) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

同样由内积的正定性可知, $\mathcal{A}(k\alpha)=k\mathcal{A}\alpha$.
所以, $\mathcal{A}$ 是线性的. 从而 $\mathcal{A}$ 是一个正交变换.

PROBLEM

7. 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathcal{A}$ 是第 1 题中定义的镜面反射, $\mathcal{B}$ 是 V 内一正交变换. 证明 $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ 也是 V 内一镜面反射.

Solution

考查 $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ 的作用. 由于 $\mathcal{B}$ 是正交变换, 所以 $\mathcal{B}^{-1}$ 也是正交变换. 对于 $\forall\alpha\in V$, 有:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}(\alpha)&=B^{-1}(\mathcal{B}\alpha-2(\eta,\mathcal{B}\alpha)\eta)\\&=\alpha-2(\eta,\mathcal{B}\alpha)\mathcal{B}^{-1}\eta\\&=\alpha-2(\mathcal{B}^{-1}\eta,\alpha)\mathcal{B}^{-1}\eta\end{aligned}$$

由于 $(\mathcal{B}^{-1}\eta,\mathcal{B}^{-1}\eta)=(\eta,\eta)=1$, 所以 $\mathcal{B}^{-1}\eta$ 也是 V 中的一个单位向量.
由镜面反射的定义可知, $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ 是关于超平面 $L(\mathcal{B}^{-1}\eta)^{\perp}$ 的镜面反射.

PROBLEM

10. 设 V 为 n 维欧式空间, $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}^*$ 为 V 内两个线性变换. 如果对任意 $\alpha,\beta\in V$ 有

$$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}^*\beta)$$

则称 $\mathcal{A}^*$ 为 $\mathcal{A}$ 的共轭变换. 证明: $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}^*$ 在 V 的任一组标准正交基下的矩阵互为转置.

Solution

设线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 下的矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 即:

$$\mathcal{A}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A$$

则有 $\mathcal{A}\xi_i=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}\xi_k\ (1\le i\le n)$. 再设 $\mathcal{A}^*$ 在这组基下的矩阵为 $A^*=(a^*_{ij})_{n\times n}$, 即

$$\mathcal{A}^*(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A^*.$$

于是 $\mathcal{A}^*\xi_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}^*\xi_k \ (1 \le j \le n)$. 再由共轭变换的定义可得

$$(\mathcal{A}\xi_i, \xi_j) = (\xi_i, \mathcal{A}^*\xi_j)$$

即

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\xi_k, \xi_j\right) = \left(\xi_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^*\xi_k\right) \implies \sum_{k=1}^{n} a_{ki}(\xi_k, \xi_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^*(\xi_i, \xi_k).$$

而 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一组标准正交基, 所以 $(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$, 从而知

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^*\delta_{ik} \implies a_{ji} = a_{ij}^*, \ (i, j = 1, \cdots, n).$$

即 $A^* = A'$. 于是我们证明了 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}^*$ 在 V 的任一组标准正交基下的矩阵互为转置.

PROBLEM

11. 续上题.

(1) 证明: 对 V 内每个线性变换 $\mathcal{A}$, 其共轭变换是存在且唯一的, 而且 $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

(2) 证明 $\mathcal{A}$ 是对称变换的充分必要条件是 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

Solution

(1) **存在性:**

证明一: 下面给出共轭变换 $\mathcal{A}^*$ 的构造. 任取 V 中的一组标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, $\mathcal{A}$ 有矩阵表示

$$\mathcal{A}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)A, \ A = (a_{ij})_{n\times n}$$

令

$$\mathcal{B}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)A', \ A' = (a_{ij}')_{n\times n} = (a_{ji})_{n\times n}.$$

一方面

$$(\mathcal{A}\xi_i, \xi_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\xi_k, \xi_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\left(\xi_k, \xi_j\right) = a_{ji}.$$

另一方面

$$(\xi_i, \mathcal{B}\xi_j) = \left(\xi_i, \sum_{k=1}^{n} a'_{kj}\xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a'_{kj}\,(\xi_i, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\,(\xi_i, \xi_k) = a_{ji}.$$

这表明 $(\mathcal{A}\xi_i, \xi_j) = (\xi_i, \mathcal{B}\xi_j)$. 任取 $\alpha = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n \in V$, $\beta = y_1\xi_1 + \cdots + y_n\xi_n \in V$, 有

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\alpha, \beta) &= \left(\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j\xi_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\,(\mathcal{A}\xi_i, \xi_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j(\xi_i, \mathcal{B}\xi_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i, \mathcal{B}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\xi_j\right)\right) = (\alpha, \mathcal{B}\beta).\end{aligned}$$

于是 $\mathcal{B}$ 就是我们要找的共轭变换 $\mathcal{A}^*$.

证明二: 也可利用命题 6.1.20 Riesz 表示定理证明 $\mathcal{A}^*$ 的存在性. 给定向量 $\beta \in V$, 定义 $f(\alpha) = (\mathcal{A}\alpha, \beta)$. 由于对任意 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \alpha \in V$,

$$\begin{aligned}f(\lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha) &= (\mathcal{A}(\lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha), \beta) = (\lambda_1\mathcal{A}\alpha + \lambda_2\mathcal{A}\alpha, \beta)\\ &= \lambda_1(\mathcal{A}\alpha, \beta) + \lambda_2(\mathcal{A}\alpha, \beta) = \lambda_1 f(\alpha) + \lambda_2 f(\alpha),\end{aligned}$$

故 $f(\alpha) \in V^*$, 从而存在唯一的 $\widetilde{\beta}$, 使得 $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \widetilde{\beta})$. 于是可以建立映射 $\mathcal{A}^* : \beta \longmapsto \widetilde{\beta}$, 即 $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta)$. 只需验证 $\mathcal{A}^*$ 是线性变换. 对任意 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \alpha, \beta_1, \beta_2 \in V$, 有

$$\begin{aligned}(\alpha, \mathcal{A}^*(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2)) &= (\mathcal{A}\alpha, \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2)\\ &= \lambda_1(\mathcal{A}\alpha, \beta_1) + \lambda_2(\mathcal{A}\alpha_2, \beta_2)\\ &= \lambda_1(\alpha, \mathcal{A}^*\beta_1) + \lambda_2(\alpha, \mathcal{A}^*\beta_2)\\ &= (\alpha, \lambda_1\mathcal{A}^*\beta_1 + \lambda_2\mathcal{A}^*\beta_2)\end{aligned}$$

即

$$(\alpha, \mathcal{A}^*(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2) - \lambda_1\mathcal{A}^*\beta_1 - \lambda_2\mathcal{A}^*\beta_2) = 0$$

由α的任意性以及内积的正定性可知 $\mathcal{A}^*(\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2) = \lambda_1\mathcal{A}^*\beta_1+\lambda_2\mathcal{A}^*\beta_2$. 这就证明了 $\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的共轭变换.

唯一性:

假设存在两个线性变换 $\mathcal{A}^*, \mathcal{C}$, 使得 $\forall \alpha, \beta \in V$,

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta) = (\alpha, \mathcal{C}\beta),$$

则有

$$(\alpha, \mathcal{A}^*\beta - \mathcal{C}\beta) = 0.$$

令 $\alpha = \mathcal{A}^*\beta - \mathcal{C}\beta$, 可得 $\forall \beta \in V,\ \mathcal{A}^*\beta = \mathcal{B}\beta$. 从而 $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}$.

综上所述, 给定线性变换 $\mathcal{A}$, 存在唯一的共轭变换 $\mathcal{A}^*$, 使得

$$\forall\, \alpha, \beta \in V,\ (\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta)$$

下面证明$(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$. 因为 $\forall \alpha, \beta \in V$,

$$(\alpha, (\mathcal{A}^*)^*\beta) = (\mathcal{A}^*\alpha, \beta) = (\beta, \mathcal{A}^*\alpha) = (\mathcal{A}\beta, \alpha) = (\alpha, \mathcal{A}\beta).$$

若取 $\alpha = (\mathcal{A}^*)^*\beta - \mathcal{A}\beta$, 可得 $\forall \beta \in V,\ (\mathcal{A}^*)^*\beta = \mathcal{A}\beta$, 即 $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

(2) **充分性:**

若 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, 任取 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta).$$

所以 $\mathcal{A}$ 是对称变换.

必要性:

若 $\mathcal{A}$ 是对称变换, 则 $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta)$. 由 (1) 知存在唯一的线性映射 $\mathcal{A}^*$, 使得 $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*\beta)$, 因此 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

综上, $\mathcal{A}$ 是对称变换的充分必要条件是 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

PROBLEM

12. 证明: 对 n 维欧式空间 V 内的任一线性变换 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ 是一个对称变换.

Solution

对任意 $\alpha,\beta\in V$, 有

$$\begin{aligned}((\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)\alpha,\beta)&=(\mathcal{A}\alpha,\beta)+(\mathcal{A}^*\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}^*\beta)+(\beta,\mathcal{A}^*\alpha)\\&=(\alpha,\mathcal{A}^*\beta)+(\mathcal{A}\beta,\alpha)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)+(\alpha,\mathcal{A}\beta)\\&=(\alpha,(\mathcal{A}+\mathcal{A})^*\beta).\end{aligned}$$

由对称变换的定义可知, $\mathcal{A}+\mathcal{A}^*$是对称变换.

PROBLEM

13. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧式空间 V 中的一个线性变换, 如果 $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$, 即对任意 $\alpha,\beta\in V$, 有:

$$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\mathcal{A}\beta)$$

则称 $\mathcal{A}$ 是一个反对称变换. 证明:

(1) $\mathcal{A}$ 是反对称变换的充分必要条件是: $\mathcal{A}$ 在某一组标准正交基下的矩阵是反对称矩阵.

(2) 如果 M 是反对称变换 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 则 M 的正交补 $M^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

Solution

(1) 取 V 的一组标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 设线性变换在这组基下的矩阵为 A, 即

$$\mathcal{A}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A.$$

任取 $\alpha,\beta\in V$, 设 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\xi_i,\ \beta=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\xi_i$, 则它们在这组基下的坐标分别为

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\quad Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'.$$

且可以得到, $\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta$ 在这组基下的坐标分别为 AX,AY. 所以

$$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(AX)'Y=X'A'Y$$

$$(\alpha,\mathcal{A}\beta)=X'AY$$

比较上面两式可知: $\mathcal{A}$是反对称变换即 $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\mathcal{A}\beta)$ 的充分必要条件是

$$\forall X\in\mathbb{R}^n, Y\in\mathbb{R}^n,\ X'A'Y=-X'AY=X'(-A)Y,$$

即 $A'=-A$, 也即 A 为反对称矩阵.

(2) 任取 $\alpha\in M^{\perp}$, 对任意 $\beta\in M$, 有 $\mathcal{A}\beta\in M$, 且

$$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\mathcal{A}\beta)=0.$$

故 $\mathcal{A}\alpha\in M^{\perp}$. 所以 $M^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

PROBLEM

18.设 A,B 是 n 阶实对称矩阵, A 正定, 证明: 存在一可逆矩阵 T, 使 $T'AT$ 和 $T'BT$ 同时成对角形.

Solution

因为 A 正定, 所以存在可逆矩阵 P, 使得 $P'AP=E$. 注意到 $P'BP$ 也是实对称矩阵, 因此存在正交矩阵 Q, 使得 $Q'(P'BP)Q$ 成对角形. 令 $T=PQ$, 则 $T'BT=Q'P'BPQ$ 自然是对角形, 并且

$$T'AT=(PQ)'APQ=Q'(P'AP)Q=Q'Q=E$$

也是对角形. 于是我们找到了满足题意的可逆矩阵 T.

PROBLEM

19.设 A 是正定矩阵, B 为实数矩阵.

(1) 证明: 对于任意正整数 k, A^k 也正定;

(2) 如果对于某一正整数 r 有 $A^rB=BA^r$, 证明:

$$AB=BA.$$

Solution

(1) 因为 A 是正定矩阵, 所以存在正交矩阵 Q, 使得 $A = Q'\Lambda Q$, 其中对角阵 Λ 的对角元都为正实数. 由于 $A^k = (Q'\Lambda Q)^k = Q'\Lambda^k Q$, 且 Λ^k 的对角元也都为正实数, 因此 A^k 也是正定矩阵.

(2) 如果对于某一正整数 r 有 $A^rB = BA^r$, 设 $QAQ^{-1} = \Lambda, QBQ^{-1} = S, Q$ 为正交矩阵, 则有

$$QA^rQ^{-1}QBQ^{-1} = QBQ^{-1}QA^rQ^{-1} \Longleftrightarrow \Lambda^rS = S\Lambda^r.$$

对 Λ^r, S 做分块

$$\Lambda^r = \begin{bmatrix} \lambda_1^rE_{s_1} & & & \\ & \lambda_2^rE_{s_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_t^rE_{s_t} \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1t} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{t1} & S_{t2} & \cdots & S_{tt} \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_i > 0\,(i = 1, \cdots, t)$ 各不相等, S 的子块 S_{ij} 为 $s_i \times s_j$ 阶矩阵. 由分块矩阵的乘法运算知 Λ^rS 和 $S\Lambda^r$ 第 i 行第 j 列的子块相等, 即

$$(\lambda_i^rE_{s_i})S_{ij} = S_{ij}(\lambda_j^rE_{s_j}) \Longleftrightarrow (\lambda_i^r - \lambda_j^r)S_{ij} = 0\ (i = 1, \cdots, t, j = 1, \cdots, t).$$

可以看出, 当 $i \neq j$ 时, $S_{ij} = 0$, 故 S 是与 Λ 同型的分块对角阵. 于是

$$\Lambda S = diag(\lambda_1S_1, \lambda_2S_2, \cdots, \lambda_tS_t) = S\Lambda.$$

从而有

$$AB = Q^{-1}\Lambda QQ^{-1}SQ = Q^{-1}\Lambda SQ = Q^{-1}S\Lambda Q = Q^{-1}SQQ^{-1}\Lambda Q = BA.$$

PROBLEM

20.设 V 是 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 内的对称变换, 如果对任意 $\alpha, \beta \in V$ 都有 $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta)$, 证明 $\mathcal{A}$ 是 V 内的对称变换.

Solution

只需证 $\mathcal{A}$ 是 V 内的线性变换. 对任意 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in V$, 有

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2), \beta) &= (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2, \mathcal{A}\beta) = \lambda_1(\alpha_1, \mathcal{A}\beta) + \lambda_2(\alpha_2, \mathcal{A}\beta) \\ &= \lambda_1(\mathcal{A}\alpha_1, \beta) + \lambda_2(\mathcal{A}\alpha_2, \beta) = (\lambda_1\mathcal{A}\alpha_1 + \lambda_2\mathcal{A}\alpha_2, \beta),\end{aligned}$$

即

$$(\mathcal{A}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) - (\lambda_1\mathcal{A}\alpha_1 + \lambda_2\mathcal{A}\alpha_2), \beta) = 0.$$

令 $\beta = \mathcal{A}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) - (\lambda_1\mathcal{A}\alpha_1 + \lambda_2\mathcal{A}\alpha_2)$, 由内积的正定性知 $\mathcal{A}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = \lambda_1\mathcal{A}\alpha_1 + \lambda_2\mathcal{A}\alpha_2$. 这就完成了证明.

PROBLEM

21.设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 内的一个线性变换, 证明 $\mathcal{A}$ 是反对称变换的充分必要条件是对任意 $\alpha \in V$, $(\mathcal{A}\alpha, \alpha) = 0$.

Solution

充分性:

若对任意 $\alpha \in V$, $(\mathcal{A}\alpha, \alpha) = 0$, 则有

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(\alpha - \beta), \alpha - \beta) &= (\mathcal{A}\alpha - \mathcal{A}\beta, \alpha - \beta) \\ &= (\mathcal{A}\alpha, \alpha) + (\mathcal{A}\alpha, -\beta) + (-\mathcal{A}\beta, \alpha) + (-\mathcal{A}\beta, -\beta) \\ &= -(\mathcal{A}\alpha, \beta) - (\mathcal{A}\beta, \alpha) \\ &= 0,\end{aligned}$$

即 $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = -(\mathcal{A}\beta, \alpha) = -(\alpha, \mathcal{A}\beta)$. 故 $\mathcal{A}$ 是反对称变换.

必要性:

若 $\forall \alpha, \beta \in V$, $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = -(\alpha, \mathcal{A}\beta)$, 则有 $\forall \alpha \in V$,

$$(\mathcal{A}\alpha, \alpha) = -(\alpha, \mathcal{A}\alpha) = -(\mathcal{A}\alpha, \alpha) \Longleftrightarrow (\mathcal{A}\alpha, \alpha) = 0.$$

Chapter 7

线性变换的 Jordan 标准形

7.1 习题一 幂零线性变换的 Jordan 标准形

PROBLEM

2.设 $\mathcal{A}$ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 内的幂零线性变换, 令 $\lambda_0=0$, $\mathcal{A}$ 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数为 k, 证明 $\mathcal{A}^{n-k+1}=\mathbf{0}$.

Solution

$n=k$ 时, $V_{\lambda_0}=V$, 故 $\mathcal{A}=\mathbf{0}$, $\mathcal{A}^{n-k+1}=\mathbf{0}$ 显然成立.
$n>k$ 时, 设 $V=V_{\lambda_0}\oplus W$. 在 V_{λ_0} 里选取一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k$, W 里选取一组基 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-k}$, 拼合成 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\eta_1,\cdots,\eta_{n-k}$. 于是 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0 & \\ & J_{n-k}\end{bmatrix},\quad 其中\ J_{n-k}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}_{(n-k)\times(n-k)}.$$

因此 $A^{n-k}=0 \implies \mathcal{A}^{n-k+1}=\mathbf{0}$.

7.2　习题二　一般线性变换的 Jordan 标准形

PROBLEM

1.设 λ_0 是线性变换 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, $\mathcal{B}=\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{E}$. 令 $M_i=\mathrm{Ker}\mathcal{B}^i(i=1,2,\cdots)$. 证明: 使 $M_k=M_{k+1}$ 的最小正整数 k 等于 $\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准形（假设它存在）J 中以 λ_0 为特征值的 Jordan 块的最高阶数.

Solution

由教材中命题 7.2.4 知: J 中以 λ_0 为特征值且阶为 k 的 Jordan 块的个数为

$$2\dim M_k-\dim M_{k+1}-\dim M_{k-1}=\dim M_k-\dim M_{k-1}\geq 1.$$

而当 $l>k$ 时, $\dim M_{l-1}=\dim M_l$, 故此时 J 中以 λ_0 为特征值且阶为 l 的 Jordan 块的个数为

$$2\dim M_l-\dim M_{l+1}-\dim M_{l-1}=0.$$

即 J 中以 λ_0 为特征值的 Jordan 块的最高阶数为 k.

PROBLEM

2.续上题. 令 $N_i=\mathrm{Im}(\mathcal{B}^i)$. 证明 λ_0 不是 $\mathcal{A}|_{N_k}$ 的特征值, 从而 $\mathcal{B}|_{N_k}$ 可逆.

Solution

若 λ_0 是 $\mathcal{A}|_{N_k}$ 的特征值, 设 $\alpha\in N_k$ 是对应的一个特征向量, 则有 $\mathcal{A}\alpha=\lambda_0\alpha$, 即 $(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{E})\alpha=0$. 故 $\alpha\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{E})=M_1\subset M_k$. 从教材中已经知道 $V=M_k\oplus N_k$, 因此 $\alpha=0$. 这与 α 是特征向量矛盾! 于是证明了 λ_0 不是 $\mathcal{A}|_{N_k}$ 的特征值. 因为对任意 $\alpha\in N_k$,

$$\mathcal{B}\alpha=(\mathcal{A}-\lambda_0\mathcal{E})\alpha=0\iff\alpha=0,$$

故 $\mathrm{Ker}(\mathcal{B}|_{N_k})=0$, 从而 $\mathcal{B}|_{N_k}$ 可逆.

PROBLEM

3.续上题. 证明 $\dim M_k$ 等于特征值 λ_0 的重数.

Solution

V 有不变子空间分解 $V = M_k \oplus N_k$. 设 $\mathcal{A}|_{M_k}$ 与 $\mathcal{A}|_{N_k}$ 的特征多项式分别为 $g(\lambda)$ 和 $h(\lambda)$, 则有 $f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)$. 设 $\dim M_k = r$. 根据教材中命题 7.2.1 ,由于 $(\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{E})|_{M_k}$ 是幂零线性变换, 因此在 M_k 中存在一组基, 使 $\mathcal{A}|_{M_k}$ 在这组基下的矩阵成 Jordan 标准形

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}_{r\times r},$$

即 $g(\lambda) = |\lambda E - J| = (\lambda - \lambda_0)^r$. 而由上题知 λ_0 不是 $h(\lambda)$ 的根. 这就证明了 λ_0 是 $f(\lambda)$ 的 r 重根.

PROBLEM

4.续上题. 设 λ_1 为 $\mathcal{A}$ 的特征值, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_0$, 如果存在整数 l 使

$$(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})^l\alpha = 0,$$

证明 $\alpha \in N_k$.

Solution

Chapter 8

问题

8.1 插值问题

1. 基本概念

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$.且已知它在 x_i 处的函数值 $y_i = f(x_i)(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 即已知函数值表

x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

选取较简单的函数$y = P(x)$来近似表示$y = f(x)$，使得满足条件:

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

则$P(x)$称为插值函数, $f(x)$称为被插值函数, $x_0, x_1, \cdots, x_n$称为插值节点.

2. 插值多项式的存在唯一性

当选取插值函数$P(x)$为多项式函数时，即选取：

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

使得满足插值条件

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

这样的问题称为n次多项式插值问题，$y = P_n(x)$称为$y = f(x)$的n次插值多项式.

定理：给定x_i(两两不等)以及$y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，n次插值多项式$P_n(x)$存在且唯一.

证明：请自行证明. (Hint: 待定系数法，Vandermonde行列式).

3. 插值余项

在$[a, b]$上用$P_n(x)$近似表示$f(x)$，在插值节点x_i处时没有误差的，但是在其它点x处，一般$P_n(x)$与$f(x)$不相等. 记：

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

称$R_n(x)$时插值多项式的余项或截断误差.引入记号：

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

定理：设$f(x)$在$[a, b]$上$n + 1$阶导数存在，则插值多项式$P_n(x)$的余项为：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}\omega_{n+1}(x) \quad (*)$$

其中，$\xi \in (a, b)$且依赖于x，而$x \in [a, b]$.

证明：当$x = x_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$时，

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = 0$$

而$\omega_{n+1}(x) = 0$. 所以$(*)$成立.

当$x \neq x_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$时，作辅助函数：

$$\phi(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}\omega_{n+1}(t)$$

则$\phi(t)$在$t \in [a, b]$上$n + 1$阶可导. 易知$t = x, x_0, \cdots, x_n$是$\phi(t)$的$n + 2$个不同零点.

由Rolle定理，在$\phi(t)$的每两个零点之间至少存在一个$\phi'(t)$的零点.

因此 $\phi'(t)$在(a, b) 内至少有 $n+1$ 个互异零点. 反复对 $\phi'(t), \phi''(t), \cdots, \phi^n(t)$用Rolle定理，可以得到：至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得$\phi^{(n+1)}(\xi) = 0$. 由于：

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}P_n(t) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}w_{n+1}(t) = (n + 1)!$$

因此：

$$\phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - P_n(x)}{w_{n+1}(x)} \cdot (n + 1)! = 0$$

即$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

4. Lagrange插值函数

(1)拉格朗日插值基函数：

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=\prod_{k\neq i}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}.$$

(2)拉格朗日插值函数：

$$L_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)w'_{n+1}(x_i)}y_i.$$

8.2 基与同构

设 V 是定义在域 F 上的有限维线性空间，$\dim V=n$. V 上的全体线性变换记作 $\mathrm{End}(V)$, F 上全体 n 阶方阵记作 $M_n(F)$, 对于 V 中每一个基 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,根据

$$(f(b_1),f(b_2),\cdots,f(b_n))=(b_1,b_2,\cdots,b_n)A\ (A\in M_n(F)),$$

都唯一确定了 $\mathrm{End}(V)$ 到 $M_n(F)$ 的一个同构 f. 问题是：

1.V中不同的基 b_1,b_2 能否确定同一个同构 f.(单性)

2.V中所有的基是否确定了所有的同构.(满性)