证明. 我们直接对矩阵做初等变换：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A+B & O \\ O & O \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} A+B & O \\ A^2+AB & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & O \\ A^2 & O \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \begin{pmatrix} A+B & A^2+BA \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A+B & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & A^2 \\ O & A^3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

注：第一个箭头表示第 1 行左乘 A 加到第 2 行；第二个箭头表示第 1 行右乘 A 加到第二列；第三个箭头表示第 2 行右乘 $-P$ 加到第 1 列.

所以 $r(A+B)=r\begin{pmatrix} A+B & O \\ O & O \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} B & A^2 \\ O & A^3 \end{pmatrix}\geq r(A^3)+r(B)=r(A)+r(B)$；而显然又有 $r(A+B)\leq (A)+r(B)$，所以 $r(A+B)=r(A)+r(B)$.

同样的方法，请思考下面的例题：

例题 4.24. 已知 A，B 都是 n 级方阵，且 $AB=BA=O$，证明：存在正整数 m 使得 $r(A^m+B^m)=r(A^m)+r(B^m)$.(试问：$m=n$可以吗？)

当然，矩阵变换的手段多变，还有少数题目的技巧根本想不到，为此我们可以另辟蹊径，用方程组的手段去解决. 扬哥列举一个：

例题 4.25. 设 A，B 是数域 P 上的 n 级矩阵，且 $AB=BA$, 证明 r $(A)+r(B)\geq r(AB)+r(A+B)$.

证明. 方法一. 用分块矩阵的方法，我们知道

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ A & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}.$$

结合 $AB=BA$，我们知道

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} A+B & O \\ -A & E \end{pmatrix}}_{\text{非广义初等变换，难以想到}} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & A+B \end{pmatrix}.$$

于是

$$r(A)+r(B)=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}\geq r\begin{pmatrix} AB & A \\ O & A+B \end{pmatrix}\geq r(AB)+r(A+B).$$

方法二. 设方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的解空间分别是 V_1，V_2，方程组 $ABX=BAX=0$ 与 $(A+B)X=0$ 的解空间分别为 W_1，W_2，则 $V_1\subseteq W_1$，$V_2\subseteq W_1$，从而 $V_1+V_2\subseteq W_1$，同时 $V_1\cap V_2\subseteq W_1$，利用维数公式就有

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)\leq \dim W_1+\dim W_2.$$

即

$$(n-r(A))+(n-r(B))\leq(n-r(AB))+(n-r(A+B)).$$

即 $r(A)+r(B)\geq r(AB)+r(A+B)$.

4.7.3 打洞原理证明秩不等式

命题 4.5. 已知 A，D 分别为 n 级与 m 级矩阵，且 A 可逆，B，C 分别是 $n\times m$ 与 $m\times n$ 矩阵，利用打洞原理有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

所以

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=r(A)+r\left(D-CA^{-1}B\right)=n+r\left(D-CA^{-1}B\right).$$

例题 4.26. 已知 A 是一个 $s\times n$ 矩阵，证明 $r(E_n-A'A)-r(E_s-AA')=n-s$.

证明. 对 $\begin{pmatrix} E_n & A' \\ A & E_s \end{pmatrix}$ 利用打洞原理有

$$\begin{pmatrix} E_n-A'A & O \\ O & E_s \end{pmatrix}\longleftarrow\begin{pmatrix} E_n & A' \\ A & E_s \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s-AA' \end{pmatrix}.$$

所以 $r\begin{pmatrix} E_n-A'A & O \\ O & E_s \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s-AA' \end{pmatrix}$, 即 $s+r(E_n-A'A)=n+r(E_s-AA')$，即

$$r(E_n-A'A)=n+r(E_s-AA')=n-s$$

例题 4.27. 已知 A 是 n 级可逆矩阵，α ,β 是任意两个 n 维列向量，则 $r(A+\alpha\beta')\geq n-1$.

4.8 等价标准形

在讨论矩阵的等价标准形之前，我们先给出了一个重要的引理，它在矩阵分解中有非常重要的应用，可以达到出奇制胜的效果.

引理 4.1. $s\times n$ 的矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 有一种极其重要的分解：

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix}.$$

当 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 是方阵时，还有另外一种分解：

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Theorem 4.9 (**等价标准形**). 设 A 是一个秩为 r 的 $s \times n$ 矩阵，则存在 s 级可逆矩阵 P 与 n 级可逆矩阵 Q 使得

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$

命题 4.6. 任意一个非零矩阵都可以分解成一个列满秩矩阵与一个行满秩矩阵的乘积.

证明. 设矩阵 A 是 $s \times n$ 矩阵，且 $r(A) = r > 0$，则存在 s 级可逆矩阵 P 与 n 级可逆矩阵 Q 使得