证明. 我们直接对矩阵做初等变换：

$$\begin{pmatrix} A+B & O \\ O & O \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A+B & O \\ A^2+AB & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & O \\ A^2 & O \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} A+B & A^2+BA \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & A^2 \\ O & A^3 \end{pmatrix}$$

注：第一个箭头表示第 1 行左乘 A 加到第 2 行；第二个箭头表示第 1 行右乘 A 加到第二列；第三个箭头表示第 2 行右乘 $-P$ 加到第 1 列.

所以 $r\left(A+B\right)=r\begin{pmatrix} A+B & O \\ O & O \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} B & A^2 \\ O & A^3 \end{pmatrix}\geq r\left(A^3\right)+r\left(B\right)=r\left(A\right)+r\left(B\right)$；而显然又有 $r\left(A+B\right)\leq\left(A\right)+r\left(B\right)$, 所以 $r\left(A+B\right)=r\left(A\right)+r\left(B\right)$.

同样的方法, 请思考下面的例题：

例题 4.24. 已知 A , B 都是 n 级方阵, 且 $AB=BA=O$, 证明：存在正整数 m 使得 $r\left(A^m+B^m\right)=r\left(A^m\right)+r\left(B^m\right)$.(试问：$m=n$可以吗？)

当然, 矩阵变换的手段多变, 还有少数题目的技巧根本想不到, 为此我们可以另辟蹊径, 用方程组的手段去解决. 扬哥列举一个：

例题 4.25. 设 A,B 是数域 P 上的 n 级矩阵, 且 $AB=BA$, 证明 r $\left(A\right)+r\left(B\right)\geq r\left(AB\right)+r\left(A+B\right)$.

证明. 方法一. 用分块矩阵的方法, 我们知道

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ A & B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}.$$

结合 $AB=BA$, **我们知道**

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} A+B & O \\ -A & E \end{pmatrix}}_{\text{非广义初等变换, 难以想到}} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & A+B \end{pmatrix}.$$

于是

$$r\left(A\right)+r\left(B\right)=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}\geq r\begin{pmatrix} AB & A \\ O & A+B \end{pmatrix}\geq r\left(AB\right)+r\left(A+B\right).$$

方法二. 设方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的解空间分别是 V_1,V_2, 方程组 $ABX=BAX=0$ 与 $\left(A+B\right)X=0$ 的解空间分别为 W_1,W_2, 则 $V_1\subseteq W_1$,$V_2\subseteq W_1$, 从而 $V_1+V_2\subseteq W_1$, 同时 $V_1\cap V_2\subseteq W_1$, 利用维数公式就有

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim\left(V_1+V_2\right)+\dim\left(V_1\cap V_2\right)\leq\dim W_1+\dim W_2.$$

即

$$(n-r(A))+(n-r(B)) \leq (n-r(AB))+(n-r(A+B)).$$

即 $r(A)+r(B) \geq r(AB)+r(A+B)$.

4.7.3 打洞原理证明秩不等式

命题 4.5. 已知 A,D 分别为 n 级与 m 级矩阵, 且 A 可逆,B,C 分别是 $n\times m$ 与 $m\times n$ 矩阵, 利用打洞原理有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

所以

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A)+r\left(D-CA^{-1}B\right) = n+r\left(D-CA^{-1}B\right).$$

例题 4.26. 已知 A 是一个 $s\times n$ 矩阵, 证明 $r(E_n-A'A)-r(E_s-AA')=n-s$.

证明. 对 $\begin{pmatrix} E_n & A' \\ A & E_s \end{pmatrix}$ 利用打洞原理有

$$\begin{pmatrix} E_n-A'A & O \\ O & E_s \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} E_n & A' \\ A & E_s \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s-AA' \end{pmatrix}.$$

所以 $r\begin{pmatrix} E_n-A'A & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s-AA' \end{pmatrix}$, 即 $s+r(E_n-A'A)=n+r(E_s-AA')$, 即

$$r(E_n-A'A)=n+r(E_s-AA')=n-s$$

例题 4.27. 已知 A 是 n 级可逆矩阵,α ,β 是任意两个 n 维列向量, 则 $r(A+\alpha\beta') \geq n-1$.

4.8 等价标准形

在讨论矩阵的等价标准形之前, 我们先给出了一个重要的引理, 它在矩阵分解中有非常重要的应用, 可以达到出奇制胜的效果.

引理 4.1. $s\times n$ 的矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 有一种极其重要的分解:

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix}.$$

当 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 是方阵时, 还有另外一种分解:

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Theorem 4.9 (等价标准形). 设 A 是一个秩为 r 的 $s \times n$ 矩阵, 则存在 s 级可逆矩阵 P 与 n 级可逆矩阵 Q 使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.$$

命题 4.6. 任意一个非零矩阵都可以分解成一个列满秩矩阵与一个行满秩矩阵的乘积.

证明. 设矩阵 A 是 $s \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = r > 0$, 则存在 s 级可逆矩阵 P 与 n 级可逆矩阵 Q 使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q = \underline{P\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}}\,\underline{\begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix}Q}$$

现在记 $P_1 = P\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$,$Q_1 = \begin{pmatrix} E_r & O \end{pmatrix}Q$, 则 $A = P_1Q_1$, 且 P_1 是 $s \times r$ 的列满秩矩阵,Q_1 是 $r \times n$ 的行满秩矩阵.

注. 上面解答过程中, 不能写 $P\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ O \end{pmatrix}$, 原因是 P 不能与 E_r 做乘法.

例题 4.28. 设 B_1,B_2 都是数域 P 上的 $s \times n$ 的列满秩矩阵, 证明: 存在数域 P 上的 s 级可逆矩阵 C 使得 $B_2 = CB_1$.

证明. 由于 B_1,B_2 都列满秩, 所以存在可逆的 s 级矩阵 Q,R 使得

$$QB_1 = \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} = RB_2.$$

所以 $B_2 = R^{-1}QB_1$, 即取 $C = R^{-1}Q$ 即可.

例题 4.29. 都是数域 P 上的 $s \times n$ 的行满秩矩阵, 证明: 存在数域 P 上的 n 级可逆矩阵 D 使得 $C_2 = C_1D$.

例题 4.30. 任意秩为 $r\,(r > 0)$ 的矩阵都可以分解成 r 个秩为 1 的矩阵之和.

证明. 设 $A_{s\times n}$ 是一个秩为 r 的矩阵, 则存在 s 级与 n 级可逆矩阵 P_1Q 使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q = P\left(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{rr}\right)Q = PE_{11}Q + PE_{22}Q + \cdots + PE_{rr}Q.$$

由于 $E_{ii}\,(i = 1, 2, \cdots, r)$ 的秩为 1, 所以 $PE_{ii}Q$ 的秩也为 1.

例题 4.31. 已知 A 是一个秩为 r 的 $s \times n$ 矩阵, 求矩阵方程 $AXA = A$ 的通解.

证明. 由于 $r(A) = r$, 所以存在可逆矩阵 P_1Q 使得 $A = P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 代入到 $AXA = A$

就有
$$P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QXP \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$
消去 P,Q 就有
$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ 0 & O \end{pmatrix} QXP \begin{pmatrix} E_r & O \\ 0 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ 0 & O \end{pmatrix}.$$
现在对 QXP 分块, 设 $QXP = \begin{pmatrix} H & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 代入上式就有
$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$
化简即得
$$\begin{pmatrix} H & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$
从而得到 $H = E_r$, 而 B,C,D 可以任意取, 所以 $QXP = \begin{pmatrix} E_r & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 解出 X 就有
$$X = Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}.$$
其中 B, C, D 分别是任意的 $r \times (s-r), (n-r) \times r, (n-r) \times (s-r)$ 矩阵.

扬哥经验: 一个矩阵题目中, 如果什么条件都没有或者只告诉了矩阵的秩, 记得考虑一下等价标准形.

4.9 矩阵的迹与幂零矩阵

一个方阵 A 的所有主对角元素之和称为 A 的迹, 记为 $tr\,(A)$. 迹常用的性质总结为如下定理:

Throrem 4.10. 已知 A,B 是两个 n 级矩阵,k 是一个常数, 则

(1)$tr\,(kA) = ktr\,(A)$.

(2)$tr\,(A+B) = tr\,(A) + tr\,(B)$.

(3)$tr\,(AB) = tr\,(BA)$.

(4) 如果 A 是一个实方阵, 则 $A = O \Longleftrightarrow tr\,(A'A) = 0$.

证明. (1),(2) 是显然的.

(3) 就是求和号交换顺序, 读者自己证. 注意本条是迹最重要的性质.

(4) 注意到 $tr\,(A'A)$ 等于 A 的所有元素的平方和.

例题 4.32 已知 A 是一个 n 级实对称方阵, 且 $A^2 = O$, 则 $A = O$.

证明. 由于 $A' = A$, 所以 $tr\,(A'A) = tr\,(A^2) = 0$, 所以 $A = O$.

利用相似的知识, 我们知道

Theorem 4.11. (1) 相似的矩阵有相同的迹.

(2) 数域 h' 上 n 级矩阵 A 的迹等于其 n 个复特征值之和.

对于一个 n 级矩阵 A, 如果存在整数 l 使得 $A' = O$ 则称 A 是一个幂零矩阵. 如果还有 $A^{l-1} \neq O$, 则称 l 为 A 的幂零指数. 一个等价的命题就是: 如果方阵 A 的所有特征值都为零, 则称 A 是一个幂零矩阵. 根据哈密顿-凯莱定理, 这也是显然的.

下面, 我们给出关于幂零矩阵的一个常识性的命题:

命题 4.7. *已知 A 是数域 P 上的 n 级矩阵, 则 A 是幂零矩阵的充要条件是对任意的正整数 k 都有 $tr\left(A^k\right) = 0$.*

证明. 必要性. 显然当 A 是幂零矩阵时,A 只有零特征值, 与是 A^k 也只有零特征值, 当然有 $tr\left(A^k\right) = 0$.