1. 已知 4 阶行列式 D 的第 3 行元素分别是-1,0,2,4，第 4 行元素对应的余子式依次是 5,10,a,4，求 a 的值。

解： 1、因为 $a_{31}A_{41}+a_{32}A_{42}+a_{33}A_{43}+a_{34}A_{44}=0$, 这里 a_{ij} 和 A 分别是第 i 行第 j 列处的元素和该元素的代数余子式, 所以有 $-1\times(-5)+0\times 10+2\times(-a)+4\times 4=0$, 可得 $a=\frac{21}{2}$

2. 已知矩阵 A,B 满足关系 $AB-B=A$, 其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A。

解： 2、因为 $AB-A=B$, 所以 $A(B-E)=B$, $A=B(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. 设 A^* 为 3 阶方阵 A 的伴随矩阵, $|A|=2$, 计算行列式 $\left|(3A)^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|$

解： 3. $\left|(3A)^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|=|\frac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}|=|-\frac{2}{3}A^{-1}|=(-\frac{2}{3})^3|A^{-1}|=-\frac{4}{27}$

4. 如果多项式 $f(x),g(x)$ 不全为零，证明：$\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}$ 与 $\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 互素。

证: 存在多项式 $u(x),v(x)$, 使 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$

因而 $u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1$

由定理 3, $\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$

5. 证明: x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)=\cdots=f^{k-1}\left(x_0\right)=0$ 而 $f^k\left(x_0\right)\neq 0$

证明: 必要性: 设 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根。那么 x_0 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根, $\cdots\cdots$, 是 $f^{t-1}(x)$ 的 1 重根, 是 $f'(x)$ 的 0 重根, 即不是 $f^*(x)$ 的根, 所以 $f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)=\cdots=f^{k-1}\left(x_0\right)=0$ 而 $f^k\left(x_0\right)\neq 0$. 充分性: 设 $f(x_0)=f'\left(x_0\right)=\cdots=f^{t-1}\left(x_0\right)=0$ 而 $f'\left(x_0\right)\neq 0$. 设 x_0 是 $f(x)$ 的 l 重根. 由必要性的证明 $f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)=\cdots=f'^{-1}\left(x_0\right)=0$ 而 $f'\left(x_0\right)\neq 0$. 从而 $l=k$.

6. 二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_2+x_3\right)^2-\left(x_3-x_1\right)^2$ 的正贯性指数与负惯性指数依次为

$(A)2,0$

$(B)1,1$

$(C)2,1$

$(D)1,2$

解：$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_2+x_3\right)^2-\left(x_3-x_1\right)^2=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

所以 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 故特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)\lambda$$

令上式等于零，故特征值为 $-1,3,0$, 故该二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 1，故选 B.

7. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以由向量组 β_1,β_2 线性表出，则

(A) $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 的解.

(B) $A^Tx=0$ 的解均为 $B^Tx=0$ 的解.

(C) $Bx=0$ 的解均为 $Ax=0$ 的解.

(D) $B^Tx=0$ 的解均为 $A^Tx=0$ 的解.

令 $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 由题 a_1,a_2,a_3 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示，即存在矩阵 A, 使得 $BP=A$, 则当 $B^Tx_0=0$ 时，$A^Tx_0=(BP)^Tx_0=p^TB^Tx_0=0$. 恒成立，即选 D.

8. 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, 记 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k\beta_1,\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$, 若 β_1,β_2,β_3 两两正交，则 l_1,l_2 依次为 (A) $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$. (C) $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$. (D) $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

解：利用斯密特正交化方法知

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2,$$

$$\text{故}l_1=\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}=\frac{5}{2},l_2=\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}=\frac{1}{2}\text{，故选A.}$$

9. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix}-1&2&-11&4\\1&2&6&2\\1&1&2&1\\4&7&8&3\end{vmatrix}$. 求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$, 其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

解: 考虑行列式 $C=\begin{vmatrix}-1&2&1&4\\1&2&1&2\\1&1&1&1\\4&7&1&3\end{vmatrix}$, 按它的第三列展开。由于 c 和 D 除了第三列外均相同，故 $C=A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$, 而计算可得 $C=\begin{vmatrix}-1&2&1&4\\1&2&1&2\\1&1&1&1\\4&7&1&3\end{vmatrix}=2$. 所以 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{t,}=2$.

10. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \mathrm{L} & 0 & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & a_{n-1} & b_{n+1} \\ b_* & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & a_* \end{vmatrix}$.

解: 按第一列展开得: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{s-1} & b_{z-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$

$= a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n+1} b_1 b_2 \cdots b_n$