1. 已知 4 阶行列式 D 的第 3 行元素分别是-1,0,2,4，第 4 行元素对应的余子式依次是 5,10,a,4，求 a 的值。

解： 因为 $a_{31}A_{41}+a_{32}A_{42}+a_{33}A_{43}+a_{34}A_{44}=0$, 这里 a_{ij} 和 A 分别是第 i 行第 j 列处的元素和该元素的代数余子式, 所以有 $-1\times(-5)+0\times 10+2\times(-a)+4\times 4=0$, 可得 $a=\dfrac{21}{2}$

2. 已知矩阵 A,B 满足关系 $AB-B=A$, 其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 求矩阵 A。

解： 因为 $AB-A=B$, 所以 $A(B-E)=B$, $A=B(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

3. 设 A^* 为 3 阶方阵 A 的伴随矩阵, $|A|=2$, 计算行列式 $\left|(3A)^{-1}-\dfrac{1}{2}A^*\right|$

解： $\left|(3A)^{-1}-\dfrac{1}{2}A^*\right|=|\dfrac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}|=|-\dfrac{2}{3}A^{-1}|=(-\dfrac{2}{3})^3|A^{-1}|=-\dfrac{4}{27}$

4. 如果多项式 $f(x),g(x)$ 不全为零，证明：$\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$ 与 $\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 互素。

证： 证: 存在多项式 $u(x),v(x)$, 使 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$

因而 $u(x)\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1$

由定理 3, $\left(\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))},\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$

5. 证明: x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{k-1}(x_0)=0$ 而 $f^k(x_0)\neq 0$

证： **必要性**: 设 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根。那么 x_0 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根, $\cdots\cdots$, 是 $f^{t-1}(x)$ 的 1 重根, 是 $f'(x)$ 的 0 重根, 即不是 $f^*(x)$ 的根

所以 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{k-1}(x_0)=0$, 而 $f^k(x_0)\neq 0$.

充分性: 设 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{t-1}(x_0)=0$ 而 $f'(x_0)\neq 0$. 设 x_0 是 $f(x)$ 的 l 重根

由必要性的证明 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f'^{-1}(x_0)=0$ 而 $f'(x_0)\neq 0$. 从而 $l=k$.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正贯性指数与负惯性指数依次为 $(A)2,0$ $(B)1,1$ $(C)2,1$ $(D)1,2$

解： $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

所以 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 故特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)\lambda$$

令上式等于零，故特征值为 $-1,3,0$, 故该二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 1，故选 B.

7. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$， $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以由向量组 β_1,β_2 线性表出，则

(A) $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 的解.

(B) $A^Tx=0$ 的解均为 $B^Tx=0$ 的解.

(C) $Bx=0$ 的解均为 $Ax=0$ 的解.

(D) $B^Tx=0$ 的解均为 $A^Tx=0$ 的解.

解： 令 $A=(a_1,a_2,a_3)\,,B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 由题 a_1,a_2,a_3 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示，即存在矩阵 A, 使得 $BP=A$, 则当 $B^Tx_0=0$ 时，$A^Tx_0=(BP)^Tx_0=p^TB^Tx_0=0$. 恒成立，即选 D.

8. 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, 记 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k\beta_1,\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$, 若 β_1,β_2,β_3 两两正交，则 l_1,l_2 依次为

(A) $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$. (C) $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$. (D) $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

解： 利用斯密特正交化方法知

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{|\alpha_2,\beta_1|}{|\beta_1,\beta_1|}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{|\alpha_3,\beta_1|}{|\beta_1,\beta_1|}\beta_1-\frac{|\alpha_3\beta_2|}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2$$

$$\text{故}l_1=\frac{|\alpha_3,\beta_1|}{|\beta_1,\beta_1|}=\frac{5}{2},l_2=\frac{|\alpha_3,\beta_2|}{|\beta_2,\beta_2|}=\frac{1}{2},\ \text{故选A}$$

9. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -11 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}$. 求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$, 其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

解: 考虑行列式 $C=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, 按它的第三列展开。由于 c 和 D 除了第三列外均相同,

故 $C=A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$, 而计算可得 $C=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=2$. 所以 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{t,}=2$.

10. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \text{L} & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \text{L} & 0 & 0 \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & & \text{M} & \text{M} \\ 0 & 0 & 0 & \text{L} & a_{n-1} & b_{n+1} \\ b_* & 0 & 0 & \text{L} & 0 & a_* \end{vmatrix}$

解: 按第一列展开得: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{s-1} & b_{z-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$

$+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n$

11. 已知实多项式 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$，$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$.

(1) 求 $f(x)$ 的全部有理根及相应重数.

(2) 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首一的最大公因式 (f,g).

解: (1) 令 $x=-1$，有 $f(-1)=0$，说明 $x+1\mid f(x)$.

可得 $f(x)=(x+1)(x^3+x^2-2x-2)$，同样可以验证 $x+1\mid x^3+x^2-2x-2$，

所以 $f(x)=(x+1)^2(x^2-2)$，故 $f(x)$ 有二重有理根 $x=-1$.

(2) 因为

$$g(x)=x^4-2x^2+x^3-2x+x^2-1=x^2(x^2-2)+x(x^2-2)+(x^2-2)=(x^2-2)(x^2+x+1)$$

因为 $((x+1)^2,x^2+x+1)=1$，所以

$$(f(x),g(x))=x^2-2.$$

12. 设 3 阶复矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&8&2\\-2&-14&-3\end{pmatrix}$，定义 C^3 上的线性变换 σ 为：$\sigma(\alpha)=A\alpha$，对任意的 $\alpha\in C^3$．求 σ 的最小多项式以及 Jordan 标准形.

解：取 C^3 的自然基 e_1,e_2,e_3，则有 $\sigma(e_1)=Ae_1,\sigma(e_2)=Ae_2,\sigma(e_3)=Ae_3$，那么 $(\sigma(e_1),\sigma(e_2),\sigma(e_3))=(e_1,e_2,e_3)A$，所以 σ 在基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵是 A．所以只需求 A 的极小多项式和若当标准形.

先求 $\lambda E-A$ 的初等因子，注意到 $(\lambda E-A)$ 存在二阶行列式

$$\begin{vmatrix}-3&-2\\\lambda-8&-2\end{vmatrix}=2\lambda-10,\quad \begin{vmatrix}-1&\lambda-8\\2&14\end{vmatrix}=2-2\lambda$$

并且 $(\lambda-5,1-\lambda)=1$，从而 $(\lambda E-A)$ 的二阶不变因子是 1．又

$$\begin{vmatrix}\lambda E-A\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

所以 $(\lambda E-A)$ 的标准形为

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)(\lambda-3)^2\end{pmatrix}$$

从而 A 的初等因子为 $\lambda-1,(\lambda-3)^2$

故 A 的若当标准形为

$$\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&1&3\end{pmatrix}$$

其最小多项式

$$m_A(\lambda)=\lambda-1,(\lambda-3)^2$$

13. 记 $R[x]_5$ 为次数小于 5 的实多项式全体构成的向量空间，在 $R[x]_5$ 上定义双线性函数如下

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

(1) 证明：上式定义了 $R[x]_5$ 上一个正定的对称双线性函数.

(2) 用 Gram-Schmidt 方法由 $1, x, x^2, x^3$ 求 $R[x]_5$ 的一个正交向量组.

(3) 求一个形如 $f(x) = a + bx^2 - x^4$ 的多项式，使它与所有次数低于 4 的实多项式正交.

证明： (1)$\forall f(x), g(x) \in R[x]_5$，有

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx = (g(x), f(x))$$

其二次型

$$q(f(x)) = (f(x), f(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)^2 dx > 0$$

对任意的 $f(x) \in R[x]_5$ 且 $f(x) \neq 0$ 成立，因而 $(f(x), g(x))$ 是正定的对称双线性函数.

(2) 利用 Gram-Schmidt 方法和根据内积的运算，容易算出正交向量组，

$$1, x, x^2, -\frac{1}{3}, x^3, -\frac{3}{5}x.$$

(3) 取次数低于 4 的实多项式的一组基 $1, x, x^2, x^3$，只需要 $f(x)$ 与 $1, x, x^2, x^3$ 都正交即可. 注意到 $f(x)$ 是偶函数，所以只要与 $1, x^2$ 正交即可.

$$(1, f(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2a + \frac{2}{3}b - \frac{2}{5} = 0$$

$$(x^2, f(x)) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}b - \frac{2}{7} = 0$$

解得 $a = -\frac{1}{5}, b = \frac{6}{7}$.

14. 设 $A, B \in M_n(C)$ 为幂等矩阵，即 $A^2 = A, B^2 = B$.

(1) 证明：$A - B$ 是幂等矩阵当且仅当 $AB = BA = B$.

(2) 证明：若 $AB = BA$，则 AB 为幂等矩阵.

反之，若 AB 为幂等矩阵，是否必有 $AB = BA$? 试证明或给出反例.

证明： (1) 充分性

$A-B$ 是幂等矩阵，则 $(A-B)^2=(A-B)$，有

$$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2=A-B$$

依题意，$A^2=A, B^2=B$，有

$$2B=AB+BA$$

两边左乘以 A 有

$$2AB=A^2B+ABA=AB+ABA\Rightarrow AB=ABA$$

两边右乘以 A 有

$$2BA=ABA+BA^2=ABA+BA\Rightarrow BA=ABA$$

从而 $B=AB=BA$.

必要性的证明是显然的.

(2) 若 $AB=BA$，则

$$(AB)^2=ABAB=A(BA)B=A(AB)B=A^2B^2=AB$$

从而幂等.

取

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$$

那么

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},(AB)^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

从而 AB 是满足幂等的. 但是

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\neq AB.$$

15. 设 $A_1,\cdots,A_m$ 为 m 个两两可换的互不相同的 n 阶实对称矩阵，且

$$tr(A_iA_j)=\delta_{ij},1\leq i,j\leq n,$$

这里 $tr(A)$ 表示矩阵 A 的迹，即它的对角元之和，试证明 $m\leq n$.

证明： 因为 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 m 个两两可换的互不相同的 n 阶实对称矩阵, 所以存在一个 n 阶正交矩阵 P 使得 P^TA_iP 都是对角阵.

记 $P^TA_iP=diag(\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{in})$，其中 $i=1,2,\cdots,m$. 根据题意

$$tr(A_iA_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$$

由 tr 的性质，

$$tr(A_iA_j)=tr(A_iP^TPA_jPP^T)=tr(P^TA_iPP^TA_jP)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ik}\lambda_{jk},$$

记 $u_i=(\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{in})$，则有

$$(u_i,u_j)=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$$

因此 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 是一组标准正交组，从而其个数小于 R^n 的维数，即有

$$m\leq n$$

16. 求下列 n 阶实矩阵的行列式:

(1) $A=(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=\begin{cases}1, & i\neq j,\ \text{且}i\ \text{或}j=1\\2, & i=j\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) $B=(b_{ij})$, 其中 $b_{ij}=f_j\left(a_i\right),f_j(x)$ 为首一的 $j-1$ 次实系数多项式,$a_1,\cdots,a_n$ 为两两不同的实数.

解： (1) 根据题意写出矩阵 A.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1&\ldots&1\\1&2&0&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\ldots&2\end{bmatrix}$$

则

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1&\ldots&1\\1&2&0&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\ldots&2\end{vmatrix}$$

从第二行开始, 每一行乘上 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 加到第一行,

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\dfrac{n-1}{2}&0&0&\ldots&0\\1&2&0&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\ldots&2\end{vmatrix}=\frac{5-n}{2}\cdot 2^{n-1}$$

(2) 根据题意, 设出 $f_j(x)$ 的表达式,

$$\begin{gathered} f_1(x)=1 \\ f_2(x)=x+c_{21} \\ f_3(x)=x^2+c_{31}x+c_{32} \\ \vdots \\ f_n(x)=x^{n-1}+c_{n1}x^{n-2}+\cdots+c_{n,n-1} \end{gathered}$$

写出矩阵 B.

$$B=\begin{bmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \dots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \dots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \dots & f_n(a_n) \end{bmatrix}$$

所以

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & a_1+c_{21} & \dots & a_1^{n-1}+c_{n1}a_1^{n-2}+\cdots+c_{n,n-1} \\ 1 & a_2+c_{21} & \dots & a_2^{n-1}+c_{n1}a_2^{n-2}+\cdots+c_{n,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n+c_{21} & \dots & a_n^{n-1}+c_{n1}a_n^{n-2}+\cdots+c_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

根据行列式的性质, 按逐列展开, 最后利用范德蒙德行列式,

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

17. 设 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 半正定.

(1) 证明: 存在 $\alpha_i\in R^n, i=1,\cdots,n$, 使得 a_{ij} 等于 α_i 与 α_j 的内积;

(2) 证明: $2n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ 半正定

(3) 若实矩阵 $B=(b_{ij})$ 也半正定, 令 $d_{ij}=a_{ij}b_{ij}$. 证明: 矩阵 $D=(d_{ij})$ 半正定.

证明： (1) 证明因为 A 是半正定矩阵, 故存在实矩阵 C 使 $A=C^TC$. 取 R^n 的一组标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$,

记 $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\,C$, 那么

$$G\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]=$$

$$C^T\begin{bmatrix}\varepsilon_1^T\\ \varepsilon_2^T\\ \vdots\\ \varepsilon_n^T\end{bmatrix}[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n]=C^TC=A$$

所以有 $a_{ij}=\alpha_i^T\alpha_j$.

(2) 因为 A 是半正定的, 则 $A^T=A$. 故

$$\begin{bmatrix}A & A\\ A & A\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}A^T & A^T\\ A^T & A^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & A\\ A & A\end{bmatrix}$$

又因为

$$\begin{bmatrix}E & 0\\ -E & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & A\\ A & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & -E\\ 0 & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以 $\begin{bmatrix}A & A\\ A & A\end{bmatrix}$ 合同于 $\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, 并且 A 是半正定的, 从而 $\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 半正定, 所以 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}$ 半正定.

(3) 因为 A,B 半正定，所以对称. 因此 D 也对称. 根据定义，对任意的 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$, 有

$$x^TAx=\sum_{j,k=1}^n a_{jk}x_jx_k\geq 0, x^TBx=\sum_{j,k=1}^n b_{jk}x_jx_k\geq 0$$

因为 B 半正定, 所以存在 $T=r_{ij}$, 使得 $B=T^TT$. 所以 $b_{jk}=\sum_{l=1}^n r_{lj}r_{lk}$, 所以

$$x^TDx=\sum_{j,k=1}^n a_{jk}b_{jk}x_jx_k=\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\left(\sum_{l=1}^n r_{lj}r_{lk}\right)x_jx_k=\sum_{l=1}^n\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\left(x_jr_{lj}\right)\left(x_kr_{lk}\right)$$

记 $y_l=(x_1r_{l1},\dots,x_nr_{ln})^T$, 则

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk}\left(x_jr_{lj}\right)\left(x_kr_{lk}\right)=y_l^TAy_l\leq 0$$

从而 D 是半正定矩阵.

18. 设 $A \in M_n(C)$. 定义 $M_n(C)$ 上的线性变换 σ, τ 为 $\sigma(X)=AX, \tau(X)=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}$, 对任意的 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$

(1) 设 A 的秩为 r, 求 $\dim \ker \sigma$

(2) 若 $B \in M_n(C)$, 满足 $\tau(B)=B$. 证明:B 的特征值都是零，且矩阵 A 与 B 至少有一个公共的特征向量.

证明： (1) 解

$\ker(\sigma)=\{X \mid \sigma(X)=0, x \in M_n(C)\}$. 记 $V=\{x \mid Ax=0, x \in C^n\}$. 则对任意的 $X \in \ker(\sigma)$, 记 $X=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, 由于 $AX=0 \Rightarrow A\alpha_i=0$, 从而 $\alpha_i \in V$. 因为 $r(A)=r$, 所以 $\dim(\boldsymbol{V})=n-r$. 假设 V 的一组基是 $\eta_1,\ldots,\eta_{n-r}$, 那么所有的满足 $\boldsymbol{X} \in \ker(\sigma)$ 的 $\boldsymbol{X}$, 它的每个列向量必然是 $\eta_1,\ldots,\eta_{n-r}$ 的线性组合. 令 $E_{11}=(\eta_1,0,\ldots,0), E_{12}=(0,\eta_1,0,\ldots,0), \ldots, E_{n-r,n}=(0,0,\ldots,\eta_{n-r})$, 容易证明它是 $\ker(\sigma)$ 的一组基, 从而 $\dim(\ker(\sigma))=n(n-r)$. (2) 记 B 的不为 0 的互不相同的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$, 相应的重数是 $k_1,\ldots,k_s$.

则

$$\operatorname{tr} B=\operatorname{tr}(AB-BA)=k_1\lambda_1+\cdots+k_s\lambda_s=0$$

因为 $B^2=B(AB-BA)=BAB-B^2A=(BA)B-B(BA)$, 所以

$$\operatorname{tr}\left(B^2\right)=\operatorname{tr}\left(BAB-B^2A\right)=k_1\lambda_1^2+\cdots+k_s\lambda_s^2=0$$

类似的,

$$\operatorname{tr}\left(B^s\right)=k_1\lambda_1^s+\cdots+k_s\lambda_s^s=0$$

所以

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \ldots & \lambda_s^s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

有非零解. 但是 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \ldots & \lambda_s^s \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \ldots & \lambda_s^{s-1} \end{vmatrix}$

因为 λ_i 是互不相同的, 所以上面的行列式不等于 0, 从而线性方程组只有 0 解, 矛盾了. 所以 B 不存在不等于 0 的特征值. 从而 B 的特征值全部是 0.

(2) 证明

设 $A\alpha=\lambda\alpha$, 其中 $\alpha \neq 0$ 是 A 的特征向量, 因为 $AB=B+BA$, 所以 $AB\alpha=B\alpha+BA\alpha=(\lambda+1)B\alpha$, 如果 $B\alpha=0$, 那么 α 是 A,B 的公共特征向量, 如果 $B\alpha \neq 0$, 那么 $\lambda+1$ 是 A 的一个特征值, 而 $B\alpha$ 是 A 的一个特征向量; 进一步地

$$AB^2\alpha=+BAB\alpha=(\lambda+2)B^2\alpha$$

如果 $B^2\alpha=0$ 那么 $B\alpha$ 是 A,B 的公共特征向量, 如果 $B\alpha\neq 0$, 那么 $\lambda+2$ 是 A 的一个特征值, 而 $B^2\alpha$ 是 A 的一个特征向量;

如此下去, 必然存在 $B^k\alpha=0$ 而 $B^{k-1}\alpha\neq 0$ 是 A,B 的公共特征向量. 这是因为，若 $B^k\alpha\neq 0$, 那么 $\lambda+k$ 都是 A 的特征值, 这是不可能的.

19. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解答. 直接计算可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

20. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}_{n\times n}$$

解答. 由于现根据行列式的性质将上述行列式拆分为 2^n 个行列式之和, 其中每个行列式的第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 行要么为 $(x_i,x_i,\cdots,x_i)$, 要么为 $(0,\cdots,0,-m,0,\cdots,0)$, 将这 2^n 个行列式分为如下三类:

(i) 至少有两行 (设为 $i,j(i\neq j)$ 行) 的元素分别取 $(x_i,x_i,\cdots,x_i),(x_j,x_j,\cdots,x_j)$, 由于每个行列式至么有两行元素成比例, 所以此类行列式均为零, 其和自然也为零.

(ii) 有且仅有一行 (设为第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 行) 元素取的是 $(x_i,x_i,\cdots,x_i)$, 此类行列式共有 n 个, 并且根据第 i 列展开, 可知

$$\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} -m & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -m & & & & \\ x_i & x_i & \cdots & x_i & \cdots & x_i & x_i \\ & & & & -m & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -m \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+i}x_i\begin{vmatrix} -m & & & \\ & -m & & \\ & & \ddots & \\ & & & -m \end{vmatrix} = (-m)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

(iii) 每一行均取形如 $(0,\cdots,0,-m,0,\cdots,0)$ 这样的元素, 此类行列式仅有一个, 即

$$\begin{vmatrix} -m & & & \\ & -m & & \\ & & \ddots & \\ & & & -m \end{vmatrix} = (-m)^n$$

于是

$$\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}_{n\times n} = (-m)^n + (-m)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

21. 证明高斯引理: 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

解答. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 与 $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$ 为两个本原多项式, 其中 $a_nb_m\neq 0$, 记

$$h(x)=f(x)g(x)=c_{m+n}x^{m+n}+\cdots+c_1x+c_0$$

若 $h(x)$ 不是本原多项式, 则存在素数 p 使得 $p\mid c_i(i=0,1,\cdots,m+n)$, 而由于 $f(x),g(x)$ 均为本原多项式. 所以 p 不可能整除所有的 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$, 也不可能整除所有的 $b_i(i=0,1,\cdots,m)$, 不妨设

$$p\,|a_0,a_1,\cdots,a_{i-1},p\nmid a_i;p|\,b_0,b_1,\cdots,b_{j-1},p\nmid b_j$$

此时考虑 c_{i+j}, 由于

$$\begin{aligned} c_{i+j} = a_ib_j + a_{i+1}b_{j-1} + a_{i+2}b_{j-2} + \cdots \\ + a_{i-1}b_{j+1} + a_{i-2}b_{j+2} + \cdots \end{aligned}$$

由上述假设可知 $p\nmid a_ib_j$, 但 $p\,|a_{i+1}b_{j-1}+a_{i+2}b_{j-2}+\cdots,p|\,a_{i-1}b_{j+1}+a_{i-2}b_{j+2}+\cdots$, 于是 $p\nmid c_{i+j}$, 这与原假设矛盾. 所以 $h(x)$ 一定是本原多项式

22. 设多项式 $f(x)=x^3\mathcal{F}(1+t)x^2+4x+k,g(x)=x^3+tx^2+k$, 常数 t 和 k 为多少时, 最大公因式 $(f(x),g(x))$ 是二次多项式?

解答. 注意到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 作带余除法可得

$$f(x)=g(x)+x^2+4x$$

所以由辗转相除法可知

$$(f(x),g(x))=(g(x),f(x)-g(x))=\left(g(x),x^2+4x\right).$$

于是若 $(f(x),g(x))$ 是二次多项式, 则必为 $x^2+4x=x(x+4)$, 即有 $x(x+4)\mid g(x)$, 从而

$$\begin{cases} 0=g(0)=k; \\ 0=g(-4)=(-4)^3+t(-4)^2+k \end{cases}$$

由此解得 $t=4,k=0$

23. 当常数 a,b,c 满足什么条件时, 下列线性方程组有解? 并在有解的条件下求出全部解 (用特解和相应齐次线性方程组的基础解系表示).

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5-2x_6+3x_7=1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+5x_5-3x_6+7x_7=a; \\ -3x_1-6x_2-2x_3+5x_4+8x_6-7x_7=b; \\ -x_1-2x_2+x_3+5x_4+5x_5+5x_6=c \end{cases}$$

解答. 首先对方程组的增广矩阵进行初等行变换, 化为阶梯形:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 5 & -3 & 7 & a \\ -3 & -6 & -2 & 5 & 0 & 8 & -7 & b \\ -1 & -2 & 1 & 5 & 5 & 5 & 0 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & b+3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 3 & 3 & c+1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & b-a+5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & c-2a+5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & b-a+5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{pmatrix}.$$

由此可知 $c-b-a=0$ 时, 方程组有解. 并且由上述阶梯形可知

$$\eta_1=(-2,1,0,0,0,0,0)',\eta_2=(3,0,-2,1,0,0,0)',\eta_3=(2,0,-3,0,1,0,0)',\eta_4=(-5,0,0,0,0,-1,1)'$$

为方程组导出组的基础解系, 同时

$$X_0=(3b-4a+18,0,2a-b-7,0,0,b-a+5,0)'$$

为方程组的一个特解, 所以方程组的通解为

$$X_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3+k_4\eta_4.$$

其中 k_1,k_2,k_3,k_4 为任意数.

24. 设矩阵 A,B 分别是数域 P 上的 $m\times n$ 和 $s\times n$ 矩阵, 证明: 线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解的充分

必要条件是存在矩阵 T_1, T_2, 使得 $A = T_1B, B = T_2A$.

解答. 充分性. 已知存在矩阵 T_1, T_2, 使得 $A = T_1B, B = T_2A$, 那么当 $AX = 0$ 时, 显然有 $BX = T_2AX = 0$, 同理, 当 $BX = 0$ 时, 有 $AX = T_1BX = 0$, 这说明方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解.

必要性. 已知方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 店解, 则 $AX = 0$ 时, 有 $AX = BX = 0$, 反之, 若 $AX = BX = 0$, 显然也有 $AX = 0$, 这说明方程组 $AX = 0$ 止 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$ 同解, 进而 $r(A) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. 注意到 A 的行向量均为 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 的行向量, 所以结合它们的秩相同可知 A 行向量组的极大线性无关组也是 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 行向量组的极大线性无关组, 这说明 B 的行向量作为 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 的行向量均可以 A 行向量组的极大线性无关组线性表出, 即 B 的行向量均可以由 A 的行向量组线性表出, 所以存在矩阵 T_2 使得 $B = T_2A$.

同理, 根据已知可得 $BX = 0$ 与 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$ 同解, 由此可知 A 的行向量均可由 B 的行向量组线性表出, 即存在矩阵 T_1 使得 $A = T_1B$.

25. 设矩阵 A, D 分别为 n 阶和 m 阶可逆矩阵, B, C 分别为 $n \times m$ 和 $m \times n$ 的矩阵. 证明:

1. $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\,|D - CA^{-1}B|$.

2. $r\left(A - BD^{-1}C\right) - r\left(D - CA^{-1}B\right) = n - m$.

解答. 1. 由于 A 可逆, 所以

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ -CA^{-1} & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

上述矩阵等式两边取行列式可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\left|D - CA^{-1}B\right|$$

2. 由于 A 可逆, 所以有

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ -CA^{-1} & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B \\ O & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = r(A) + r\left(D - CA^{-1}B\right) = n + r\left(D - CA^{-1}B\right) \tag{1}$$

同时, 又由于 D 可逆, 所以有

$$r\begin{pmatrix} E_n & -BD^{-1} \\ O & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & O \\ -D^{-1}C & E_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

于是

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ O & D \end{pmatrix}=r(D)+r\left(A-BD^{-1}C\right)=m+r\left(A-BD^{-1}C\right) \tag{2}$$

进而由 (1) 式与 (2) 式可知 $n+r\left(D-CA^{-1}B\right)=m+r\left(A-BD^{-1}C\right)$, 即

$$r\left(A-BD^{-1}C\right)-r\left(D-CA^{-1}B\right)=n-m.$$

26. 已知 n 阶矩阵 $M_n=\left(\dfrac{1-a_i^n a_j^n}{1-a_i a_j}\right)$, 证明: 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为互不相同的实数时, M_n 为正定矩阵. 解答. 显然 M_n 为实对称矩阵. 另外, 注意到

$$\frac{1-a_i^n a_j^n}{1-a_i a_j}=1+a_i a_j+a_i^2 a_j^2+\ldots+a_i^{n-1} a_j^{n-1}$$

于是

$$\begin{aligned} M_n&=\begin{pmatrix} 1+a_1a_1+a_1^2a_1^2+\cdots+a_1^{n-1}a_1^{n-1} & \cdots & 1+a_1a_n+a_1^2a_n^2+\cdots+a_1^{n-1}a_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1+a_na_1+a_n^2a_1^2+\cdots+a_n^{n-1}a_1^{n-1} & \cdots & 1+a_na_n+a_n^2a_n^2+\cdots+a_n^{n-1}a_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & \Delta_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{pmatrix}=C'C. \end{aligned}$$

其中

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

由范德蒙行列式的性质可知

$$|C|=\prod_{1\le i<j\le n}\left(a_j-a_i\right)\neq 0.$$

所以 C 为可逆实矩阵. 于是对任意的 $X\in\mathbb{R}^n$, 总有

$$X'M_nX=X'C'CX=(CX)'(CX)\geq 0.$$

并且当 $X'M_nX=(CX)'(CX)=0$ 时, 有 $CX=0$, 再结合 C 可逆知 $X=0$. 这说明 M_n 为正定矩阵.

27. 设 α 为实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换，$\mathscr{E}$ 为恒等变换，$\propto$ 的特征多项式为 λ^3-1, 令 $V_1=\{\alpha\mid(\alpha-\delta)\alpha=0\}, V_2=\{\alpha\mid(\alpha^2+\mathscr{A}+8)\,\alpha=0\}$. 证明:

1. V_1 和 V_2 都是 $\propto$ 的不变子空间.

2. $\mathbb{R}^3=V_1\oplus V_2$

解答. 1. 若 $\alpha\in V_1$, 则有 $(\mathscr{A}-\mathscr{E})\alpha=0$, 于是

$$(\alpha-)\mathscr{A}\alpha=\mathscr{A}(\mathscr{A}-\mathscr{E})\alpha=0.$$

这说明 $\mathscr{A}\alpha\in V_1$, 即 V_1 为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

同理, 若 $\alpha\in V_2$, 则有 $(\mathscr{A}^2+\mathscr{A}+\mathscr{E})\,\alpha=0$, 于是

$$\left(\mathscr{A}^2+\mathscr{A}+\mathscr{E}\right)\mathscr{A}\alpha=\mathscr{A}\left(\mathscr{A}^2+\mathscr{A}+\mathscr{E}\right)\alpha=0$$

这说明 $\mathscr{A}\alpha\in V_2$, 即 V_2 也为 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

2. 由于 $\lambda^3-1=(\lambda-1)\left(\lambda^2+\lambda+1\right)$, 并且根据 $\lambda^2+\lambda+1$ 不以 1 为根可知 $(\lambda-1,\lambda^2+\lambda+1)=1$, 即存在 $u(\lambda),v(\lambda)\in\mathbb{R}[x]$, 使得

$$u(\lambda)(\lambda-1)+v(\lambda)\left(\lambda^2+\lambda+1\right)=1$$

进而

$$u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\mathscr{S})+v(\mathscr{A})\left(\mathscr{A}^2+\mathscr{A}+\mathscr{E}\right)=\mathcal{E}.$$

所以对任意的 $\alpha\in\mathbb{R}^3$, 均有

$$\alpha=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\mathscr{E})\alpha+v(\mathscr{A})\left(\mathscr{A}^2+\mathscr{A}+\mathscr{E}\right)\alpha=\alpha_1+\alpha_2 \tag{3}$$

其中 $\alpha_1=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\mathscr{S})\alpha, \alpha_2=v(\mathscr{A})\left(\mathscr{A}^2+\mathscr{A}+\mathscr{E}\right)\alpha$.

由于 λ^3-1 为 d 的特征多项式, 所以 $\alpha^3-\mathscr{E}=\mathscr{O}$, 于是

$$\left(\mathscr{A}^2+\mathscr{A}+\mathscr{E}\right)\alpha_1=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\mathscr{E})(\mathscr{A})\left(\mathscr{A}^2+\mathscr{A}+\mathscr{E}\right)\alpha=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}^3-\mathscr{E})\alpha=0$$
$$(\mathscr{A}-\mathscr{E})\,\alpha_2=v(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\mathscr{E})(\mathscr{A})\left(\mathscr{A}^2+\mathscr{A}+\mathscr{E}\right)\alpha=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}^3-\mathscr{E})\alpha=0$$

这说明 $\alpha_1\in V_2,\alpha_2\in V_1$, 从而结合 V_1,V_2 为 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空伯可知

$$\mathbb{R}^3=V_1+V_2$$

另外, 对任意的 $\alpha\in V_1\cap V_2$, 则有 $(\propto-8)\alpha=(d^2+\mathscr{A}+\delta)\,\alpha=0$, 从而代入到 (3) 式可知

$$\alpha=u(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\mathscr{E})\alpha+v(\mathscr{A})\left(\mathscr{A}^2+\mathscr{A}+\mathscr{E}\right)\alpha=0$$

即 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 进而

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$$

28. 设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, 证明: 存在正交矩阵 U, 使得 $U^{-1}AU$ 和 $U^{-1}BU$ 同时为对角矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

解答. 必要性. 若存在正交矩阵 U, 使得 $U^{-1}AU$ 和 $U^{-1}BU$ 同时为对角矩阵. 则有

$$U^{-1}AUU^{-1}BU = U^{-1}BUU^{-1}AU$$

于是 $AB = BA$.

充分性. 已知 n 阶实对称矩阵 A, B 满足 $AB = BA$, 首先存在正交矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_r} \end{pmatrix}.$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是 A 的所有互异特征值, $E_{r_1}, E_{r_2}, \cdots, E_{r_r}$ 分别是 $r_1, r_2, \cdots, r_s$ 级单位矩阵. 由 $AB = BA$ 可得

$$P^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}BPP^{-1}AP$$

现在记 $P^{-1}BP = (B_{ij})$, 其中 B_{ij} 为 $r_i \times r_j$ 阶矩阵, 代入到上式可知

$$\lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij}$$

于是当 $i \neq j$ 时, 有 $B_{ij} = O$, 即

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss} \end{pmatrix}.$$

由于 B 为实对称矩阵, 所以 $B_{11}, B_{22}, \cdots, B_{ss}$ 均为实对称矩阵, 于是对任意的 $i = 1, 2, \cdots, s$, 存在 r_i 阶正交矩阵 Q_i 使得 $Q_i^{-1}B_{ii}Q_i$ 为对角矩阵, 取 $Q = \mathrm{diag}\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_s\}$, 则 Q 为 n 阶正交矩阵, 且

$$Q^{-1}P^{-1}BPQ = \begin{pmatrix} Q_1^{-1}B_{11}Q_1 & & & \\ & Q_2^{-1}B_{22}Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_s^{-1}B_{ss}Q_s \end{pmatrix}$$

为对角矩阵. 同时

$$Q^{-1}P^{-1}APQ=\begin{pmatrix} Q_1^{-1}\left(\lambda_1E_{r_1}\right)Q_1 & & & \\ & Q_2^{-1}\left(\lambda_2E_{r_2}\right)Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_S^{-1}\left(\lambda_sE_{r_s}\right)Q_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_sE_{r_0} \end{pmatrix}$$

仍为对角矩阵. 所以取 $U=PQ$ 就有 $U^{-1}AU,U^{-1}BU$ 同时为对角矩阵, 并且 U 也为正交矩阵.

29. 若 A 为 $n\times n$ 的半正定矩阵, B 为 $n\times n$ 的实矩阵. 若存在正整数 s, 使得 $A^sB=BA^s$, 证明: $AB=BA$. 由 A 半正定知存在正交阵 P 使得

$$P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda=\operatorname{diag}\left(\lambda_1E_{n_1},\cdots,\lambda_tE_{n_t}\right),\lambda_i\geq 0 \text{ 互异}$$

于是

$$\begin{aligned}
A^sB=BA^s \Rightarrow & P^{\mathrm{T}}A^sP\cdot P^{\mathrm{T}}BP=P^{\mathrm{T}}BP\cdot P^{\mathrm{T}}A^sP\\
&\Rightarrow \operatorname{diag}\left(\lambda_1^sE_{n_1},\cdots,\lambda_t^sE_{n_t}\right)\tilde{B}=\tilde{B}\operatorname{diag}\left(\lambda_1^sE_{n_1},\cdots,\lambda_t^sE_{n_t}\right)\\
&\quad\left(\tilde{B}=P^{\mathrm{T}}BP=\left(\tilde{B}_{ij}\right),\ \text{分块如}\Lambda\right)\\
&\Rightarrow \lambda_i^s\tilde{B}_{ij}=\tilde{B}_{ij}\lambda_j^s\Rightarrow\forall i\neq j,\tilde{B}_{ij}=0\\
&\Rightarrow \tilde{B}=\operatorname{diag}\left(\tilde{B}_{11},\cdots,\tilde{B}_{tt}\right)\\
&\Rightarrow \operatorname{diag}\left(\lambda_1E_{n_1},\cdots,\lambda_tE_{n_t}\right)\tilde{B}=\tilde{B}\operatorname{diag}\left(\lambda_1E_{n_1},\cdots,\lambda_tE_{n_t}\right)\\
&\Rightarrow P\operatorname{diag}\left(\lambda_1E_{n_1},\cdots,\lambda_tE_{n_t}\right)P^{T}\cdot P\tilde{B}P^{\mathrm{T}}\\
&\quad=P\tilde{B}P^{\mathrm{T}}\cdot P\operatorname{diag}\left(\lambda_1E_{n_1},\cdots,\lambda_tE_{n_t}\right)P^{\mathrm{T}}\\
&\Rightarrow AB=BA.
\end{aligned}$$

30. 已知复数域上的两个 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix},B=\operatorname{diag}\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right)$$

其中 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为全部 n 次单位根, 证明: A 与 B 相似.

$$\begin{aligned}|\lambda E-A|=&\begin{vmatrix}\lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1\end{vmatrix}\\ =&\lambda\cdot\lambda^{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot(-1)\cdot(-1)^{n-1}\\ =&\lambda^n-1=\prod_{k=1}^{n}(\lambda-\xi_k)\end{aligned}$$

知 A 有 n 个互异特征值, 而有 n 个线性无关的特征向量, 故 A 可可对角化, 即存在正交阵 P, 使得 $P^{\mathrm{T}}AP=B$.

31. 设 V_1,V_2 是有限维欧氏空间 V 的子空间, 且 $\dim V_1<\dim V_2$, 证明:V_2 中必有非零向量垂直与 V_1 中的一切向量.

$$\begin{aligned}\dim\left(V_2\cap V_1^{\perp}\right)&=\dim V_2+\dim V_1^{\perp}-\dim\left(V_2\cap V_1^{\perp}\right)\\ &=\dim V_2+(n-\dim V_1)-\dim\left(V_2\cap V_1^{\perp}\right)\\ &=(\dim V_2-\dim V_1)+\left[n-\dim\left(V_2\cap V_1^{\perp}\right)\right]\\ &\geq\dim V_2-\dim V_1>0\end{aligned}$$

知 $\exists 0\neq\alpha\in V_2\cap V_1^{\perp}$. 此 α 即满足题意.

32. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 A 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解: 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$

当 $b=3$ 时，由 A 相似对角化可知，二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量，

则 $(3E-A)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\-1&-a&0\end{pmatrix}$ 知, $\quad a=-1$

此时,$\lambda_1=\lambda_2=3$ 所对应特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

$\lambda_3=1$ 所对应的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&1\end{pmatrix}$

当 $b=1$ 时，由 A 相似对角化可知，二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量，

则 $(E-A)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}$, 知 $a=1$,

此时, $\lambda_1=\lambda_2=1$ 所对应特征向量为 $\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$,

$\lambda_3=3$ 所对应的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$

33. 曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\geq 0,y\geq 0)$ 与 x 轴围成的区域为 D, 求 $\iint_D xydxdy$

解:

$$\begin{aligned}\iint_D xydxdy &= \int_0^{-\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^3\sin\theta\cos\theta dr\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\cos^2 2\theta\sin\theta\cos\theta d\theta\\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{16}\cos^2 2\theta d\cos 2\theta\\ &= -\frac{1}{48}\cos^3 2\theta\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

33. 函数 $y=y(x)$ 的微分方程 $xy'-6y=-6$, 满足 $y(\sqrt{3})=10$,

(1) 求 $y(x)$;

(2) P 为曲线 $y=y(x)$ 上的一点，曲线 $y=y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上的截距为 I_y, 为使 I_y 最小，求 P 的坐标.

解:(1) $y'-\dfrac{6}{x}y=-\dfrac{6}{x}$, $\therefore y=e^{\int\frac{6}{x}x}\left[\int\left(-\frac{6}{x}\right)e^{-\int_x^6 dx}dx+C\right]=x^6\left(\dfrac{1}{x^6}+C\right)=1+Cx^6$

将 $y(\sqrt{3})=10$ 代入, $C=\dfrac{1}{3}$, $\quad\therefore y(x)=1+\dfrac{x^6}{3}$.

(2) 设 $P(x,y)$, 则过 P 点的切线方程为 $Y-y=2x^5(X-x)$,

法线方程为 $Y-y=-\dfrac{1}{2x^5}(X-x)$,

令 $X=0$, $\quad\therefore Y=I_y=1+\dfrac{x^6}{3}+\dfrac{1}{2x^4}$, 偶函数，为此仅考虑 $(0,+\infty)$

令 $(I_y)'=2x^5-\dfrac{2}{x^5}=0$, $\quad x=1$

$\therefore x\in(0,1),(I_y)'<0,I_y>I_y(1)=\dfrac{11}{6}$; $\quad x\in(1,+\infty),(I_y)>0,\quad I_y>I_y(1)=\dfrac{11}{6}$

$\therefore P\left(\pm 1,\dfrac{4}{3}\right)$ 时，I_y 有最小值 $\dfrac{11}{6}$.

34.$f(x)$ 满足 $\int\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\dfrac{1}{6}x^2-x+C$, L 为曲线 $y=f(x)(4\leq x\leq 9)$, L 的弧长为 s, L 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面的面积为 A , 求 s 和 A.

解:$\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{3}x-1$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$

曲线的弧长 $s=\int_4^9 \sqrt{1+y'^2}dx=\int_4^9 \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{1}{4x}}dx=\frac{22}{3}$.

曲面的侧面积 $A=2\pi\int_4^9 y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_4^9\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{x+\frac{1}{x}+2}dx=\frac{425\pi}{9}$

35. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$

解: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-1-\int_0^x e^{t^2}dt}{(e^x-1)\sin x}$

又因为 $\int_0^x e^{t^2}dt=\int_0^x\left(1+t^2+o\left(t^2\right)\right)dt=x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$, 故

原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)\right)\left(1+x+\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)\right)-x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{1}{2}$

36. 在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为 X, 较长的一段长度记为 Y, 令 $Z=\frac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度;

(2) 求 Z 的概率密度.

(3) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

解:

(1) 由题知: $X\sim f(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\ 0,\ 其他\end{cases}$;

(2) 由 $Y=2-X$, 即 $Z=\frac{2-X}{X}$, 先求 Z 的分布函数: $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{2-X}{X}\le z\right\}=P\left\{\frac{2}{X}-1\le z\right\}$

当 $z<1$ 时, $F_Z(z)=0$;

当 $z\ge 1$ 时, $F_Z(z)=P\left\{\frac{2}{X}-1\le z\right\}=1-P\left\{X\le\frac{2}{z+1}\right\}=1-\int_0^{\frac{2}{z+1}}1dx=1-\frac{2}{z+1}$;

$f_Z(z)=\left(F_z(z)\right)'=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, z\ge 1\\ 0,\ 其他\end{cases}$;

(3) $E\left(\frac{X}{Y}\right)=E\left(\frac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\frac{x}{2-x}\cdot 1dx=-1+2\ln 2$.

37. 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\ 4x+2y+z=30\end{cases}$, 求 C 上的点到 xoy 坐标面距离的最大值.

解: 设拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda\left(x^2+2y^2-z-6\right)+\mu(4x+2y+z-30)$

$$\begin{aligned}&L'_x=2x\lambda+4u=0\\&L'y=4y\lambda+2u=0\\&L'_z=2z-\lambda+u=0\\&x^2+2y^2-z=6\\&4x+2y+z=30\end{aligned}$$

解得驻点: $(4,1,12),(-8,-2,66)$

C 上的点 $(-8,-2,66)$ 到 xoy 面距离最大为 66.

37. 设 $u_n(x)=e^{-nx}+\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}(n=1,2,\ldots)$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

解:

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-nx}+\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\right]$, 收敛域$(0,1]$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}, x\in(0,1]$

$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-x\ln(1-x)-[-\ln(1-x)-x]$

$=(1-x)\ln(1-x)+x,\quad x\in(0,1)$

$S_2(1)=\lim_{x\to1^-}S_2(x)=1$

$$S(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln(1-x)+x, x\in(0,1)\\ \frac{e}{e-1}, x=1\end{cases}$$

38. 求极限 $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

解: $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x-1-\int_0^x e^{t^2}dt}{(e^x-1)\sin x}$

又因为 $\int_0^x e^{t^2}dt=\int_0^x\left(1+t^2+o\left(t^2\right)\right)dt=x+\dfrac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$, 故

原式 $=\lim_{x\to0}\dfrac{\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)\right)\left(1+x+\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)\right)-x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

38. 已知 $\lim_{x\to0}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 α 的值.

解: 要想极限存在，则左右极限相等;

又由于 $\lim_{x\to0^+}\left[\alpha\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\dfrac{1}{x}}\right]=\dfrac{\pi}{2}\alpha+e$

$\lim_{x\to0^-}\left[\alpha\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\dfrac{1}{x}}\right]=-\dfrac{\pi}{2}\alpha+\dfrac{1}{e}$;

从而 $\dfrac{\pi}{2}\alpha+e=-\dfrac{\pi}{2}\alpha+\dfrac{1}{e}$, 即 $\alpha=\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{e}-e\right)$.

39. 在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为 X, 较长的一段长度记为 Y, 令 $Z=\frac{Y}{X}$

(1) 求 X 的概率密度;

(2) 求 Z 的概率密度.

(3) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

解:

(1) 由题知: $\quad x\sim f(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$;

(2) 由 $y=2-x$, 即 $Z=\dfrac{2-X}{X}$, 先求 Z 的分布函数:

$F_z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\dfrac{2-X}{X}\le z\right\}=P\left\{\dfrac{2}{X}-1\le z\right\}$

当 $z<1$ 时，$F_z(z)=0$;

当 $z\ge1$ 时, $F_z(z)=P\left\{\frac{2}{X}-1\le z\right\}=1-P\left\{X\le\frac{2}{z+1}\right\}=1-\int_0^{\frac{2}{z+1}}1dx=1-\frac{2}{z+1}$;

$$f_z(z)=(F_z(z))'=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2}, z\geq 1\\ \quad 0,\text{ 其他}\end{cases}$$

(3) $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)=E\left(\dfrac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\dfrac{x}{2-x}\cdot 1dx=-1+2\ln 2$

40. 求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\frac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

解:

(1) $\begin{cases}f_x'=\dfrac{2x^2+x-1-y^2}{x^3}=0\\ f_y'=\dfrac{y}{x^2}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x^2+x-1-y^2=0\\ y=0\end{cases}$

得驻点 $(-1,0),\left(\dfrac{1}{2},0\right)$

(2) $\begin{cases}f_{xx}''=\dfrac{(4x+1)x-3\left(2x^2+x-1-y^2\right)}{x^4}\\ f_{xy}''=\dfrac{-2y}{x^3}\\ f_{yy}''=\dfrac{1}{x^2}\end{cases}$

(3) 驻点 $(-1,0)$ 处, $\mathrm{A}=3,\ \mathrm{B}=0,\mathrm{C}=1,\quad AC-B^2=3>0,\quad A>0$

故 $f(x,y)$ 在 $(-1,0)$ 处取极小值 2 ;

驻点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 处, $\mathrm{A}=24,\ \mathrm{B}=0,\mathrm{C}=4,\quad AC-B^2=3>0,\quad A>0$

故 $f(x,y)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 处取极小值 $\dfrac{1}{2}-2\ln 2$.

41. 求曲线 $y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线方程.

解: $\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{(1+x)}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}}{\mathrm{e}^{x\tan(1+x)}}$

$=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x(\ln}$

$=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{x}\,\mathrm{lin}\,\frac{x+1-1}{1+x}}$

$=\lim\mathrm{e}^{x\ln\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}$

$=\lim_{x\to+\infty}e^{x\left(\frac{-1}{1+x}\right)_{/}^{-1}}={}^{-1}$

$\lim_{x\to+\infty}(y-\mathrm{e}^{-1}x)$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\mathrm{e}^{-1}x\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{x_x}{(1+x)^x}-\mathrm{e}-1\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(e^{\frac{x\ln x}{1+x}-e^{-1}}\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}e^{-1}x\cdot\left(x\ln\frac{x}{\underline{1+x}+1}\right)|$

$=\lim_{t\to0^+}e^{-1}\frac{\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}+1}{t}$

$=\lim_{t\to0^+}\mathrm{e}^{-1}\frac{\overline{t+1}}{t^2}$

$=\lim_{t\to0^+}\frac{-1}{t^2}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$

$\therefore$ 曲线的斜渐近线方程为 $y=\mathrm{e}^{-1}x_{\pm}{}^{1}\mathrm{e}^{-1}$

42. 已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1, g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 求 g '(x) 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解: 因为 $\lim_{x\to 0x}=1 \quad \therefore f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$ 所以 $g(0)=\int_0^1 f(0)dt=0$

因为 $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt\underline{xt=u}\dfrac{1}{x^0}\int_0^x f(u)du$

当 $x\neq 0$ 时, $g'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$

当 $x=0$ 时, $\quad g'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{xf(u)du}}{x^2}=\dfrac{1}{2x\to 0}\lim\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{ff(u)du}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

又因为 $\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{-x^2}-{}_0^x(u)du$

$=\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x\to 0}\dfrac{x^{x^2}}{x^2}\right|=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

43. 求解行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix}=$

解: $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a & a\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a & a\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1\\ a & 1 & -1\\ 0 & a & a\end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1\\ a & 2 & -1\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=a^4-4a^2$

44. 已知 $\mathrm{f(x), g(x)}\in \mathrm{P[x]}$. 证明: $\mathrm{f(x), g(x))}=1$ 的充分必要条件是对 $\forall\mathrm{r(x), s(x)}, \exists\mathrm{p(x), q(x)}$ 使得 $\mathrm{p(x)f(x)+r(x)=q(x)g(x)+s(x)}$

(1) 充分性:

$$\mathrm{(f,g)=1\Rightarrow \exists u,v,s,t\cdot uf+vg=1}$$
$$\mathrm{\Rightarrow u(s-r)f+v(s-r)g=s-r}$$

(2) 必要性取 $\mathrm{r}=0,\ \mathrm{s}=1$, 则

$$\mathrm{pf-qg=1\Rightarrow (f,g)=1}$$

45. 计算 n+1 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n(a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1}(a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2}(a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解：将第 $n+1$ 行与上面的两两互换，换到第一行，经过 n 次互换，再将第 n 行与上面两两互换，换到第二行得到

$$\mathrm{D}=(-1)^{n+(n-1)+\cdots+1}\begin{vmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ a & a-1 & \ldots & a-n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1}(a-2)^{n-1} & \ldots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n(a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

对列也进行类似互换得到 $\mathrm{D}=(-1)^{\dfrac{n(n+1)}{2}}(-1)^{\dfrac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ a-n & a-(n-1) & \ldots & a \\ (a-n)^n & [a-(n-1)]^n & \ddots & \vdots \\ & \cdots & a^n & \end{vmatrix}=n!(n-1)!\ldots .2!$

（范德蒙行列式）

46. 已知 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1). 证明: $A^n=A^{n-2}+A^2-E \quad (\mathrm{n}\geq 3)$

(2). 求 A^{2020}

解:

(1) 证明: 对 n 做数学归纳法，$\mathrm{n}=3$ 时，由 A 的特征多项式

$$\mathrm{f}(\lambda)=|\lambda\mathrm{E}-\mathrm{A}|=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$$

及 Hamilton-Cayley 定理知 $\mathrm{f(A)}=0\Rightarrow A^3=A+A^2-E$

若结论对 n 成立，则

$$\begin{aligned} A^{n+1}&=A^nA \\ &=\left(A^{n-2}+A^2-E\right)A(\text{归纳假设}) \\ &=A^{n-1}+A^3-A \\ &=A^{n-1}+\left(A^2+A-E\right)-A \\ &=A^{n-1}+A^2-E \end{aligned}$$

(2) 由（1）的结论

$$
\begin{aligned}
& A^{2k}-A^{2(k-1)}=A^2-E \\
\Rightarrow\quad & A^{2020}-A^2=1009\left(A^2-E\right)
\end{aligned}
$$

$$
A^{2020}=1\quad 010A^2-1009E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1010 & 1 & 0 \\ 1010 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

47. 已知 $\alpha_1=(1,2,0)\quad \alpha_2=(1,a+2,-3a)\alpha_3=(1,2,0)\quad \beta=(1,3,-3)$

求 a,b 的值使得

(1). β 不可被 $\alpha_1,\alpha_2,\quad \alpha_3$ 线性表出

(2). β 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表出，并求表达方式

(3). β 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\quad \alpha_3$ 线性表出且不唯一，并求表达式

(4). β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\quad \alpha_3$ 线性表出

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \exists x_i.\ \text{s.t. } \beta=\sum x_i a_i \\
&\Leftrightarrow \exists x_i.\ \text{s.t. } \beta^T=\sum x_i \alpha_i^T \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ax}=\mathrm{b}\ \text{有解，其中} \mathrm{A}=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T\right),\mathrm{b}=\beta^T \\
&\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\mathrm{A})=\operatorname{rank}(\mathrm{A},\mathrm{b})
\end{aligned}
$$

对 (A,b) 实施行初等变换

$$
(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}
$$

(1) 若 $\mathrm{a}=\mathrm{b}=0$, 则 $r(A)=1\neq 2=r(A,b)$

此时，线性线性方程组无解，β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出

(2) 若 $\mathrm{a}=\mathrm{b}\neq 0$, 则 $r(A)=2=r(A,b)$

此时线性方程组有无穷多解，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\quad \alpha_3$ 线性表出，由

$$
(\mathrm{A},\mathrm{b})\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 1 & -1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

知

$$
\beta=\left(1-\frac{1}{\mathrm{a}}\right)x_1+\frac{1}{a}x_2+kx_2+kx_3=\left(1-\frac{1}{a}\right)x_1+\left(k+\frac{1}{a}\right)x_2+kx_3.
$$

(3). 若 $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}, \mathrm{a}=0$, 则 $\mathrm{b} \neq 0$,

$$(A, b)=\left(\begin{array}{cccc}1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0\end{array}\right)$$

由第二行知线性方程组无解，β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. (4). 若 $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}, \mathrm{a} \neq 0$, 则 $|\mathrm{A}| \neq 0$, 而 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2,\quad \alpha_3$ 唯一地线性表出. 此时

$$\beta=\frac{\mathrm{a}-1}{\mathrm{a}} x_1+\frac{1}{a} x_2$$

48. 已知

$$\mathrm{f}\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i j} x_i x_j$$

正负惯性指数分别为 p, q，且

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$$

为任意 $\mathrm{p}+\mathrm{q}$ 个正数。证明: 存在非退化线性替换 $\mathrm{x}=\mathrm{Cy}$ 使得 $\mathrm{f(x)}=\alpha_1 y_1^2+\cdots+\alpha_p y_p^2-\beta_1 y_{p+1}^2-\cdots-\beta_q y_{p+q}^2$

解: f 的正负惯性指数分别为 p, q

$\Rightarrow$ 存在可逆线性替换 $\mathrm{x}=\mathrm{Pz}$ 使得

$$\mathrm{f(x)}=Z_1^2+\cdots+Z_P^2-Z_{P+1}^2+\cdots-Z_{p+q}^2$$

$\Rightarrow$ 存在可逆线性替换 $\mathrm{x}=\mathrm{Pdiag}\left(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_p}, \sqrt{\beta_1}, \ldots, \sqrt{\beta_q}\right)$, 使得

$$\mathrm{f(x)}=Z_1^2+\cdots+Z_P^2-Z_{P+1}^2+\cdots-Z_{p+q}^2=\alpha_1 y_1^2+\cdots+\alpha_p y_p^2-\beta_1 y_{p+1}^2-\cdots-\beta_q y_{p+q}^2$$

49. 设 $\mathrm{V}=\mathbb{P}[x]_n$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维线性空间，且

$$(\mathrm{f(x)})=x f^{\prime}(x)-f(x), \forall f(x) \in V$$

(1) 证明: $\mathcal{A}$ 为线性变换

(2) 求 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 与 (V)

(3) 证明: $\mathrm{V}=\mathcal{A}^{-1}(0) \oplus \mathcal{A}(\mathrm{V})$

证:

(1) $\mathcal{A}(\mathrm{kf(x)}+\mathrm{lg(x)})=\mathrm{x}[\mathrm{kf(x)}+\mathrm{lg(x)}]^{\prime}-[\mathrm{kf(x)}+\mathrm{lg(x)}]\ \mathrm{k}\left[\mathrm{xf(x)}^{\prime}-\mathrm{f(x)}\right]+\mathrm{l}\left[\mathrm{xg(x)}^{\prime}-\mathrm{g(x)}\right]=\mathrm{k\,Af(x)}+\mathrm{l}_{\mathcal{C}} \mathrm{Ag(x)}$

(2) 由 $\mathrm{f} \in \mathcal{A}^{-1}(0) \Leftrightarrow \mathrm{x} f^{\prime}(x)=f(x) \Leftrightarrow f \equiv$ 或 $\frac{d f}{f}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) \equiv c x$ 知 $\mathcal{A}^{-1}(0)=L(x)$

又由

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathrm{x}^k =& x\cdot k\mathrm{x}^{k-1}-\mathrm{x}^k\\ =&(k-1)\mathrm{x}^k \quad (0\le k\le 1)\\ =&\begin{cases}(k-1)\mathrm{x}^k, k\ne 1\\ 0,\quad k=1\end{cases}\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathrm{V}) =& \mathrm{L}\left(\mathcal{A}(1),\mathcal{A}(\mathrm{x}),\ldots,\mathcal{A}\left(\mathrm{x}^n\right)\right)\\ =&\mathrm{L}\left(-1,0,\mathrm{x}^2,\ldots,(\mathrm{n}-1)\mathrm{x}^n\right)\\ =&\mathrm{L}\left(1,\mathrm{x}^2,\ldots\mathrm{x}^n\right)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\mathrm{V} =& \mathbb{P}[\mathrm{x}]_n\\ =&L\left(1,x,\mathrm{x}^2,\ldots,\mathrm{x}^n\right)\\ =&L(x)\oplus L\left(1,\mathrm{x}^2,\ldots\mathrm{x}^n\right)\\ =&\mathcal{A}^{-1}(0)\oplus\mathcal{A}(\mathrm{V})\end{aligned}$$

50. 已知 A, B 为数域止上的 n 阶方阵，A 有 n 个互异的特征值. 证明: A 的特征向量是 B 的特征向量充分必要条件是 AB=BA.

解: 设 A 的 n 个互异特征值为 $\lambda_1,\ldots\ldots\ldots,\lambda_n$, 对应特征向量为 $\alpha_1,\ldots\ldots\ldots,\alpha_n$

则属于不同特征值得特征向量线性无关

知 $\alpha_1,\ldots\ldots\ldots,\alpha_n$ 线性无关，是 $\mathbb{P}^n$ 的一组基，令 $\mathrm{P}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 则

$$\mathrm{AP}=\mathrm{Pdiag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\Rightarrow p^{-1}AP=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$$

再令 $\mathrm{V}_i=\{\alpha\in\mathbb{P}^n; A\alpha=\alpha\}$, 则

$$\dim V_i=1\Rightarrow=L\left(\alpha_i\right)$$

可以用反证法证得: $\exists i_0$, s.t. $\dim V_{i_0}\ge 2$

$\Rightarrow V_{i_0}$ 有与 α_i 线性无关的向量 β

$\Rightarrow \alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n,\beta$ 线性无关 (理由: 属于不同特征值的特征向量无关)

$\Rightarrow n=\dim\mathbb{P}^n\ge\dim\|_1L\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta\right)=n+1\Rightarrow$ 矛盾，故有结 (1)

$\Rightarrow$ 设 A 的特征向量是 B 的特征向量则 $\exists\mu_i\in\mathbb{P}^n, s.t.$

$\Rightarrow p^{-1}BP$

$=\operatorname{diag}\left(\mu_1\ldots\mu_n\right)$

$\Rightarrow p^{-1}ABP=P^{-1}AP\cdot P^{-1}BP$

$=\operatorname{diag}\left(\lambda_1\ldots\lambda_n\right)\cdot\operatorname{diag}\left(\mu_1\ldots\mu_n\right)$

$=\cdot P^{-1}BP\cdot P^{-1}AP$

$\Rightarrow AB = BA$

(2) $\Leftarrow$: 设 $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$, 则

$\mathrm{A} = \mathrm{BA}\alpha_i = B\alpha_i = \lambda_i B\alpha_i$

$\Rightarrow \mathrm{B}\alpha_i$ 是 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量

$\Rightarrow \exists \mathrm{B}\alpha_i \in V_i$

$\Rightarrow \exists \mu_i \in \mathbb{P}$, s.t. $\mathrm{B}\alpha_i = \mu_i\alpha_i \, (\mathrm{dimV}_i = 1 \Rightarrow V_i = L\,(\alpha_i))$