

1. 已知 4 阶行列式 D 的第 3 行元素分别是 -1, 0, 2, 4, 第 4 行元素对应的余子式依次是 5, 10, a , 4, 求 a 的值。

解: 因为 $a_{31}A_{41} + a_{32}A_{42} + a_{33}A_{43} + a_{34}A_{44} = 0$, 这里 a_{ij} 和 A 分别是第 i 行第 j 列处的元素和该元素的代数余子式, 所以有 $-1 \times (-5) + 0 \times 10 + 2 \times (-a) + 4 \times 4 = 0$, 可得 $a = \frac{21}{2}$

2. 已知矩阵 A, B 满足关系 $AB - B = A$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 。

解: 因为 $AB - A = B$, 所以 $A(B - E) = B$, $A = B(B - E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. 设 A^* 为 3 阶方阵 A 的伴随矩阵, $|A| = 2$, 计算行列式 $|(3A)^{-1} - \frac{1}{2}A^*|$

解: $|(3A)^{-1} - \frac{1}{2}A^*| = |\frac{1}{3}A^{-1} - A^{-1}| = |-\frac{2}{3}A^{-1}| = (-\frac{2}{3})^3|A^{-1}| = -\frac{4}{27}$

4. 如果多项式 $f(x), g(x)$ 不全为零, 证明: $\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}$ 与 $\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}$ 互素。

证: 证: 存在多项式 $u(x), v(x)$, 使 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$

因而 $u(x)\frac{f(x)}{(f(x), g(x))} + v(x)\frac{g(x)}{(f(x), g(x))} = 1$

由定理 3, $\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right) = 1$

5. 证明: x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ 而 $f^{(k)}(x_0) \neq 0$

证: 必要性: 设 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根。那么 x_0 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根, \dots , 是 $f^{(k-1)}(x)$ 的 1 重根, 是 $f^{(k)}(x)$ 的 0 重根, 即不是 $f^{(k)}(x)$ 的根

所以 $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, 而 $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

充分性: 设 $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ 而 $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. 设 x_0 是 $f(x)$ 的 l 重根

由必要性的证明 $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(l-1)}(x_0) = 0$ 而 $f^{(l)}(x_0) \neq 0$. 从而 $l = k$.

6. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为 (A) 2, 0 (B) 1, 1 (C) 2, 1 (D) 1, 2

解: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2 = 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$

所以 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 故特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)\lambda$$

令上式等于零, 故特征值为 $-1, 3, 0$, 故该二次型的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 1, 故选 B.

7. 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以由向量组 β_1, β_2 线性表出, 则

- (A) $Ax = 0$ 的解均为 $Bx = 0$ 的解.
- (B) $A^T x = 0$ 的解均为 $B^T x = 0$ 的解.
- (C) $Bx = 0$ 的解均为 $Ax = 0$ 的解.
- (D) $B^T x = 0$ 的解均为 $A^T x = 0$ 的解.

解: 令 $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 由题 a_1, a_2, a_3 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 即存在矩阵 A , 使得 $BP = A$, 则当 $B^T x_0 = 0$ 时, $A^T x_0 = (BP)^T x_0 = p^T B^T x_0 = 0$. 恒成立, 即选 D.

8. 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 记 $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$, $\beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$, 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 两两正交, 则 l_1, l_2 依次为

- (A) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$. (B) $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$. (C) $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$. (D) $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$.

解: 利用施密特正交化方法知

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{|\alpha_2, \beta_1|}{|\beta_1, \beta_1|} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{|\alpha_3, \beta_1|}{|\beta_1, \beta_1|} \beta_1 - \frac{|\alpha_3, \beta_2|}{|\beta_2, \beta_2|} \beta_2 \\ \text{故 } l_1 &= \frac{|\alpha_3, \beta_1|}{|\beta_1, \beta_1|} = \frac{5}{2}, l_2 = \frac{|\alpha_3, \beta_2|}{|\beta_2, \beta_2|} = \frac{1}{2}, \text{ 故选 A} \end{aligned}$$

9. 已知行列式 $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -11 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}$. 求 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$, 其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

解: 考虑行列式 $C = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, 按它的第三列展开. 由于 C 和 D 除了第三列外均相同,

故 $C = A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43}$, 而计算可得 $C = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$. 所以 $A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = 2$.

10. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & L & 0 & 0 \\ M & M & M & & M & M \\ 0 & 0 & 0 & L & a_{n-1} & b_{n+1} \\ b_* & 0 & 0 & L & 0 & a_* \end{vmatrix}$

解: 按第一列展开得: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{s-1} & b_{z-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$

$+ (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n+1} b_1 b_2 \cdots b_n$

11. 已知实多项式 $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.

(1) 求 $f(x)$ 的全部有理根及相应重数.

(2) 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首一的最大公因式 (f, g) .

解: (1) 令 $x = -1$, 有 $f(-1) = 0$, 说明 $x + 1 \mid f(x)$.

可得 $f(x) = (x + 1)(x^3 + x^2 - 2x - 2)$, 同样可以验证 $x + 1 \mid x^3 + x^2 - 2x - 2$,

所以 $f(x) = (x + 1)^2(x^2 - 2)$, 故 $f(x)$ 有二重有理根 $x = -1$.

(2) 因为

$$g(x) = x^4 - 2x^2 + x^3 - 2x + x^2 - 1 = x^2(x^2 - 2) + x(x^2 - 2) + (x^2 - 2) = (x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$$

因为 $((x+1)^2, x^2 + x + 1) = 1$, 所以

$$(f(x), g(x)) = x^2 - 2.$$

12. 设 3 阶复矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix}$, 定义 C^3 上的线性变换 σ 为: $\sigma(\alpha) = A\alpha$, 对任意的 $\alpha \in C^3$. 求 σ 的最小多项式以及 Jordan 标准形.

解: 取 C^3 的自然基 e_1, e_2, e_3 , 则有 $\sigma(e_1) = Ae_1, \sigma(e_2) = Ae_2, \sigma(e_3) = Ae_3$, 那么 $(\sigma(e_1), \sigma(e_2), \sigma(e_3)) = (e_1, e_2, e_3)A$, 所以 σ 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵是 A . 所以只需求 A 的极小多项式和若当标准形.

先求 $\lambda E - A$ 的初等因子, 注意到 $(\lambda E - A)$ 存在二阶行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ \lambda - 8 & -2 \end{vmatrix} = 2\lambda - 10, \quad \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 8 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 2 - 2\lambda$$

并且 $(\lambda - 5, 1 - \lambda) = 1$, 从而 $(\lambda E - A)$ 的二阶不变因子是 1. 又

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$$

所以 $(\lambda E - A)$ 的标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2 \end{pmatrix}$$

从而 A 的初等因子为 $\lambda - 1, (\lambda - 3)^2$

故 A 的若当标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

其最小多项式

$$m_A(\lambda) = \lambda - 1, (\lambda - 3)^2$$

13. 记 $R[x]_5$ 为次数小于 5 的实多项式全体构成的向量空间, 在 $R[x]_5$ 上定义双线性函数如下

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

(1) 证明: 上式定义了 $R[x]_5$ 上一个正定的对称双线性函数.

(2) 用 Gram-Schmidt 方法由 $1, x, x^2, x^3$ 求 $R[x]_5$ 的一个正交向量组.

(3) 求一个形如 $f(x) = a + bx^2 - x^4$ 的多项式, 使它与所有次数低于 4 的实多项式正交.

证明: (1) $\forall f(x), g(x) \in R[x]_5$, 有

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 g(x)f(x)dx = (g(x), f(x))$$

其二次型

$$q(f(x)) = (f(x), f(x)) = \int_{-1}^1 f(x)^2 dx > 0$$

对任意的 $f(x) \in R[x]_5$ 且 $f(x) \neq 0$ 成立, 因而 $(f(x), g(x))$ 是正定的对称双线性函数.

(2) 利用 Gram-Schmidt 方法和根据内积的运算, 容易算出正交向量组,

$$1, x, x^2, -\frac{1}{3}, x^3, -\frac{3}{5}x.$$

(3) 取次数低于 4 的实多项式的一组基 $1, x, x^2, x^3$, 只需要 $f(x)$ 与 $1, x, x^2, x^3$ 都正交即可. 注意到 $f(x)$ 是偶函数, 所以只要与 $1, x^2$ 正交即可.

$$(1, f(x)) = \int_{-1}^1 f(x)dx = 2a + \frac{2}{3}b - \frac{2}{5} = 0$$

$$(x^2, f(x)) = \int_{-1}^1 x^2 f(x)dx = \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}b - \frac{2}{7} = 0$$

$$\text{解得 } a = -\frac{1}{5}, b = \frac{6}{7}.$$

14. 设 $A, B \in M_n(C)$ 为幂等矩阵, 即 $A^2 = A, B^2 = B$.

(1) 证明: $A - B$ 是幂等矩阵当且仅当 $AB = BA = B$.

(2) 证明: 若 $AB = BA$, 则 AB 为幂等矩阵.

反之, 若 AB 为幂等矩阵, 是否必有 $AB = BA$? 试证明或给出反例.

证明: (1) 充分性

$A - B$ 是幂等矩阵, 则 $(A - B)^2 = (A - B)$, 有

$$(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = A - B$$

依题意, $A^2 = A, B^2 = B$, 有

$$2B = AB + BA$$

两边左乘以 A 有

$$2AB = A^2B + ABA = AB + ABA \Rightarrow AB = ABA$$

两边右乘以 A 有

$$2BA = ABA + BA^2 = ABA + BA \Rightarrow BA = ABA$$

从而 $B = AB = BA$.

必要性的证明是显然的.

(2) 若 $AB = BA$, 则

$$(AB)^2 = ABAB = A(BA)B = A(AB)B = A^2B^2 = AB$$

从而幂等.

取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

那么

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而 AB 是满足幂等的. 但是

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq AB.$$

15. 设 A_1, \dots, A_m 为 m 个两两可换的互不相同的 n 阶实对称矩阵, 且

$$\text{tr}(A_i A_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n,$$

这里 $\text{tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹, 即它的对角元之和, 试证明 $m \leq n$.

证明: 因为 A_1, A_2, \dots, A_m 是 m 个两两可换的互不相同的 n 阶实对称矩阵, 所以存在一个 n 阶正交矩阵 P 使得 $P^T A_i P$ 都是对角阵.

记 $P^T A_i P = \text{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in})$, 其中 $i = 1, 2, \dots, m$. 根据题意

$$\text{tr}(A_i A_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

由 tr 的性质,

$$\text{tr}(A_i A_j) = \text{tr}(A_i P^T P A_j P P^T) = \text{tr}(P^T A_i P P^T A_j P) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} \lambda_{jk},$$

记 $u_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in})$, 则有

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

因此 u_1, u_2, \dots, u_m 是一组标准正交组, 从而其个数小于 R^n 的维数, 即有

$$m \leq n$$

16. 求下列 n 阶实矩阵的行列式:

$$(1) A = (a_{ij}), \text{ 其中 } a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \text{ 且 } i \text{ 或 } j = 1 \\ 2, & i = j \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) $B = (b_{ij})$, 其中 $b_{ij} = f_j(a_i)$, $f_j(x)$ 为首一的 $j-1$ 次实系数多项式, a_1, \dots, a_n 为两两不同的实数.

解: (1) 根据题意写出矩阵 A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

则

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

从第二行开始, 每一行乘上 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 加到第一行,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 - \frac{n-1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = \frac{5-n}{2} \cdot 2^{n-1}$$

(2) 根据题意, 设出 $f_j(x)$ 的表达式,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= x + c_{21} \\ f_3(x) &= x^2 + c_{31}x + c_{32} \\ &\vdots \\ f_n(x) &= x^{n-1} + c_{n1}x^{n-2} + \cdots + c_{n,n-1} \end{aligned}$$

写出矩阵 B .

$$B = \begin{bmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{bmatrix}$$

所以

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 + c_{21} & \cdots & a_1^{n-1} + c_{n1}a_1^{n-2} + \cdots + c_{n,n-1} \\ 1 & a_2 + c_{21} & \cdots & a_2^{n-1} + c_{n1}a_2^{n-2} + \cdots + c_{n,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + c_{21} & \cdots & a_n^{n-1} + c_{n1}a_n^{n-2} + \cdots + c_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

根据行列式的性质, 按逐列展开, 最后利用范德蒙德行列式,

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

17. 设 n 阶实矩阵 $A = (a_{ij})$ 半正定.

(1) 证明: 存在 $\alpha_i \in R^n, i = 1, \cdots, n$, 使得 a_{ij} 等于 α_i 与 α_j 的内积;

(2) 证明: $2n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ 半正定

(3) 若实矩阵 $B = (b_{ij})$ 也半正定, 令 $d_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. 证明: 矩阵 $D = (d_{ij})$ 半正定.

证明: (1) 证明因为 A 是半正定矩阵, 故存在实矩阵 C 使 $A = C^T C$. 取 R^n 的一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$,

记 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)C$, 那么

$$G(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] =$$

$$C^T \begin{bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{bmatrix} [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n] = C^T C = A$$

所以有 $a_{ij} = \alpha_i^T \alpha_j$.

(2) 因为 A 是半正定的, 则 $A^T = A$. 故

$$\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & A^T \\ A^T & A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$$

又因为

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$ 合同于 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 并且 A 是半正定的, 从而 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 半正定, 所以 $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$ 半正定.

(3) 因为 A, B 半正定, 所以对称. 因此 D 也对称. 根据定义, 对任意的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 有

$$x^T A x = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k \geq 0, x^T B x = \sum_{j,k=1}^n b_{jk} x_j x_k \geq 0$$

因为 B 半正定, 所以存在 $T = r_{ij}$, 使得 $B = T^T T$. 所以 $b_{jk} = \sum_{l=1}^n r_{lj} r_{lk}$, 所以

$$x^T D x = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} b_{jk} x_j x_k = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \left(\sum_{l=1}^n r_{lj} r_{lk} \right) x_j x_k = \sum_{l=1}^n \sum_{j,k=1}^n a_{jk} (x_j r_{lj}) (x_k r_{lk})$$

记 $y_l = (x_1 r_{l1}, \dots, x_n r_{ln})^T$, 则

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} (x_j r_{lj}) (x_k r_{lk}) = y_l^T A y_l \leq 0$$

从而 D 是半正定矩阵.

18. 设 $A \in M_n(C)$. 定义 $M_n(C)$ 上的线性变换 σ, τ 为 $\sigma(X) = AX, \tau(X) = AX - XA$, 对任意的 $X \in M_n(C)$

(1) 设 A 的秩为 r , 求 $\dim \ker \sigma$

(2) 若 $B \in M_n(C)$, 满足 $\tau(B) = B$. 证明: B 的特征值都是零, 且矩阵 A 与 B 至少有一个公共的特征向量.

证明: (1) 解

$\ker(\sigma) = \{X \mid \sigma(X) = 0, X \in M_n(C)\}$. 记 $V = \{x \mid Ax = 0, x \in C^n\}$. 则对任意的 $X \in \ker(\sigma)$, 记 $X = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 由于 $AX = 0 \Rightarrow A\alpha_i = 0$, 从而 $\alpha_i \in V$. 因为 $r(A) = r$, 所以 $\dim(V) = n - r$. 假设 V 的一组基是 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$, 那么所有的满足 $X \in \ker(\sigma)$ 的 X , 它的每个列向量必然是 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 的线性组合. 令 $E_{11} = (\eta_1, 0, \dots, 0), E_{12} = (0, \eta_1, 0, \dots, 0), \dots, E_{n-r, n} = (0, 0, \dots, \eta_{n-r})$, 容易证明它是 $\ker(\sigma)$ 的一组基, 从而 $\dim(\ker(\sigma)) = n(n-r)$. (2) 记 B 的不为 0 的互不相同的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 相应的重数是 k_1, \dots, k_s .

则

$$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(AB - BA) = k_1\lambda_1 + \dots + k_s\lambda_s = 0$$

因为 $B^2 = B(AB - BA) = BAB - B^2A = (BA)B - B(BA)$, 所以

$$\operatorname{tr}(B^2) = \operatorname{tr}(BAB - B^2A) = k_1\lambda_1^2 + \dots + k_s\lambda_s^2 = 0$$

类似的,

$$\operatorname{tr}(B^s) = k_1\lambda_1^s + \dots + k_s\lambda_s^s = 0$$

所以

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \dots & \lambda_s^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\text{有非零解. 但是 } \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \dots & \lambda_s^s \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_s \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \dots & \lambda_s^{s-1} \end{vmatrix}$$

因为 λ_i 是互不相同的, 所以上面的行列式不等于 0, 从而线性方程组只有 0 解, 矛盾了. 所以 B 不存在不等于 0 的特征值. 从而 B 的特征值全部是 0.

(2) 证明

设 $A\alpha = \lambda\alpha$, 其中 $\alpha \neq 0$ 是 A 的特征向量, 因为 $AB = B + BA$, 所以 $AB\alpha = B\alpha + BA\alpha = (\lambda + 1)B\alpha$, 如果 $B\alpha = 0$, 那么 α 是 A, B 的公共特征向量, 如果 $B\alpha \neq 0$, 那么 $\lambda + 1$ 是 A 的一个特征值, 而 $B\alpha$ 是 A 的一个特征向量; 进一步地

$$AB^2\alpha = +BAB\alpha = (\lambda + 2)B^2\alpha$$

如果 $B^2\alpha = 0$ 那么 $B\alpha$ 是 A, B 的公共特征向量, 如果 $B\alpha \neq 0$, 那么 $\lambda + 2$ 是 A 的一个特征值, 而 $B^2\alpha$ 是 A 的一个特征向量;

如此下去, 必然存在 $B^k\alpha = 0$ 而 $B^{k-1}\alpha \neq 0$ 是 A, B 的公共特征向量. 这是因为, 若 $B^k\alpha \neq 0$, 那么 $\lambda + k$ 都是 A 的特征值, 这是不可能的.

19. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解答. 直接计算可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

20. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}_{n \times n}$$

解答. 由于现根据行列式的性质将上述行列式拆分为 2^n 个行列式之和, 其中每个行列式的第 $i (i = 1, 2, \dots, n)$ 行要么为 (x_i, x_i, \dots, x_i) , 要么为 $(0, \dots, 0, -m, 0, \dots, 0)$, 将这 2^n 个行列式分为如下三类:

- (i) 至少有两行 (设为 $i, j (i \neq j)$ 行) 的元素分别取 $(x_i, x_i, \dots, x_i), (x_j, x_j, \dots, x_j)$, 由于每个行列式至多有两行元素成比例, 所以此类行列式均为零, 其和自然也为零.
- (ii) 有且仅有一行 (设为第 $i (i = 1, 2, \dots, n)$ 行) 元素取的是 (x_i, x_i, \dots, x_i) , 此类行列式共有 n 个, 并且根据第 i 列展开, 可知

$$\sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} -m & & & \\ & \ddots & & \\ & & -m & \\ x_i & x_i & \cdots & x_i & \cdots & x_i & x_i \\ & & & & -m & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -m \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+i} x_i \begin{vmatrix} -m & & & \\ & -m & & \\ & & \ddots & \\ & & & -m \end{vmatrix} = (-m)^{n-1} \sum_{i=1}^n x_i.$$

(iii) 每一行均取形如 $(0, \dots, 0, -m, 0, \dots, 0)$ 这样的元素, 此类行列式仅有一个, 即

$$\begin{vmatrix} -m & & & \\ & -m & & \\ & & \ddots & \\ & & & -m \end{vmatrix} = (-m)^n$$

于是

$$\begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}_{n \times n} = (-m)^n + (-m)^{n-1} \sum_{i=1}^n x_i$$

21. 证明高斯引理: 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

解答. 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 与 $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ 为两个本原多项式, 其中 $a_n b_m \neq 0$, 记

$$h(x) = f(x)g(x) = c_{m+n}x^{m+n} + \cdots + c_1 x + c_0$$

若 $h(x)$ 不是本原多项式, 则存在素数 p 使得 $p \mid c_i (i = 0, 1, \dots, m+n)$, 而由于 $f(x), g(x)$ 均为本原多项式. 所以 p 不可能整除所有的 $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$, 也不可能整除所有的 $b_i (i = 0, 1, \dots, m)$, 不妨设

$$p \mid a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, p \nmid a_i; p \mid b_0, b_1, \dots, b_{j-1}, p \nmid b_j$$

此时考虑 c_{i+j} , 由于

$$\begin{aligned} c_{i+j} &= a_i b_j + a_{i+1} b_{j-1} + a_{i+2} b_{j-2} + \cdots \\ &\quad + a_{i-1} b_{j+1} + a_{i-2} b_{j+2} + \cdots \end{aligned}$$

由上述假设可知 $p \nmid a_i b_j$, 但 $p \mid a_{i+1} b_{j-1} + a_{i+2} b_{j-2} + \cdots, p \mid a_{i-1} b_{j+1} + a_{i-2} b_{j+2} + \cdots$, 于是 $p \nmid c_{i+j}$, 这与原假设矛盾. 所以 $h(x)$ 一定是本原多项式

22. 设多项式 $f(x) = x^3 \mathcal{F}(1+t)x^2 + 4x + k, g(x) = x^3 + tx^2 + k$, 常数 t 和 k 为多少时, 最大公因式 $(f(x), g(x))$ 是二次多项式?

解答. 注意到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 作带余除法可得

$$f(x) = g(x) + x^2 + 4x$$

所以由辗转相除法可知

$$(f(x), g(x)) = (g(x), f(x) - g(x)) = (g(x), x^2 + 4x).$$

于是若 $(f(x), g(x))$ 是二次多项式, 则必为 $x^2 + 4x = x(x+4)$, 即有 $x(x+4) \mid g(x)$, 从而

$$\begin{cases} 0 = g(0) = k; \\ 0 = g(-4) = (-4)^3 + t(-4)^2 + k \end{cases}$$

由此解得 $t = 4, k = 0$

23. 当常数 a, b, c 满足什么条件时, 下列线性方程组有解? 并在有解的条件下求出全部解 (用特解和相应齐次线性方程组的基础解系表示).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 + 3x_7 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_5 - 3x_6 + 7x_7 = a; \\ -3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 8x_6 - 7x_7 = b; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 5x_6 = c \end{cases}$$

解答. 首先对方程组的增广矩阵进行初等行变换, 化为阶梯形:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 5 & -3 & 7 & a \\ -3 & -6 & -2 & 5 & 0 & 8 & -7 & b \\ -1 & -2 & 1 & 5 & 5 & 5 & 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & b+3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 3 & 3 & c+1 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & b-a+5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & c-2a+5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & b-a+5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此可知 $c - b - a = 0$ 时, 方程组有解. 并且由上述阶梯形可知

$$\eta_1 = (-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)', \eta_2 = (3, 0, -2, 1, 0, 0, 0, 0)', \eta_3 = (2, 0, -3, 0, 1, 0, 0, 0)', \eta_4 = (-5, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1)'$$

为方程组导出组的基础解系, 同时

$$X_0 = (3b - 4a + 18, 0, 2a - b - 7, 0, 0, b - a + 5, 0)'$$

为方程组的一个特解, 所以方程组的通解为

$$X_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3 + k_4\eta_4.$$

其中 k_1, k_2, k_3, k_4 为任意数.

24. 设矩阵 A, B 分别是数域 P 上的 $m \times n$ 和 $s \times n$ 矩阵, 证明: 线性方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解的充分

必要条件是存在矩阵 T_1, T_2 , 使得 $A = T_1 B, B = T_2 A$.

解答. 充分性. 已知存在矩阵 T_1, T_2 , 使得 $A = T_1 B, B = T_2 A$, 那么当 $AX = 0$ 时, 显然有 $BX = T_2 AX = 0$, 同理, 当 $BX = 0$ 时, 有 $AX = T_1 BX = 0$, 这说明方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解.

必要性. 已知方程组 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解, 则 $AX = 0$ 时, 有 $AX = BX = 0$, 反之, 若 $AX = BX = 0$, 显然也有 $AX = 0$, 这说明方程组 $AX = 0$ 与 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$ 同解, 进而 $r(A) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. 注意到 A 的行向量均为 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 的行向量, 所以结合它们的秩相同可知 A 行向量组的极大线性无关组也是 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 行向量组的极大线性无关组, 这说明 B 的行向量作为 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 的行向量均可以 A 行向量组的极大线性无关组线性表出, 即 B 的行向量均可以由 A 的行向量组线性表出, 所以存在矩阵 T_2 使得 $B = T_2 A$.

同理, 根据已知可得 $BX = 0$ 与 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$ 同解, 由此可知 A 的行向量均可由 B 的行向量组线性表出, 即存在矩阵 T_1 使得 $A = T_1 B$.

25. 设矩阵 A, D 分别为 n 阶和 m 阶可逆矩阵, B, C 分别为 $n \times m$ 和 $m \times n$ 的矩阵. 证明:

$$1. \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B|.$$

$$2. r(A - BD^{-1}C) - r(D - CA^{-1}B) = n - m.$$

解答. 1. 由于 A 可逆, 所以

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ -CA^{-1} & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

上述矩阵等式两边取行列式可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B|$$

2. 由于 A 可逆, 所以有

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ -CA^{-1} & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B \\ O & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = r(A) + r(D - CA^{-1}B) = n + r(D - CA^{-1}B) \quad (1)$$

同时, 又由于 D 可逆, 所以有

$$r \begin{pmatrix} E_n & -BD^{-1} \\ O & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & O \\ -D^{-1}C & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

于是

$$r \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & O \\ O & D \end{pmatrix} = r(D) + r(A - BD^{-1}C) = m + r(A - BD^{-1}C) \quad (2)$$

进而由 (1) 式与 (2) 式可知 $n + r(D - CA^{-1}B) = m + r(A - BD^{-1}C)$, 即

$$r(A - BD^{-1}C) - r(D - CA^{-1}B) = n - m.$$

26. 已知 n 阶矩阵 $M_n = \left(\frac{1 - a_i^n a_j^n}{1 - a_i a_j} \right)$, 证明: 当 a_1, a_2, \dots, a_n 为互不相同的实数时, M_n 为正定矩阵. 解答. 显然 M_n 为实对称矩阵. 另外, 注意到

$$\frac{1 - a_i^n a_j^n}{1 - a_i a_j} = 1 + a_i a_j + a_i^2 a_j^2 + \dots + a_i^{n-1} a_j^{n-1}$$

于是

$$\begin{aligned} M_n &= \begin{pmatrix} 1 + a_1 a_1 + a_1^2 a_1^2 + \dots + a_1^{n-1} a_1^{n-1} & \dots & 1 + a_1 a_n + a_1^2 a_n^2 + \dots + a_1^{n-1} a_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 + a_n a_1 + a_n^2 a_1^2 + \dots + a_n^{n-1} a_1^{n-1} & \dots & 1 + a_n a_n + a_n^2 a_n^2 + \dots + a_n^{n-1} a_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = C' C. \end{aligned}$$

其中

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

由范德蒙行列式的性质可知

$$|C| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0.$$

所以 C 为可逆实矩阵. 于是对任意的 $X \in \mathbb{R}^n$, 总有

$$X' M_n X = X' C' C X = (CX)' (CX) \geq 0.$$

并且当 $X'M_nX = (CX)'(CX) = 0$ 时, 有 $CX = 0$, 再结合 C 可逆知 $X = 0$. 这说明 M_n 为正定矩阵.

27. 设 α 为实线性空间 \mathbb{R}^3 上的线性变换, \mathcal{E} 为恒等变换, α 的特征多项式为 $\lambda^3 - 1$, 令 $V_1 = \{\alpha \mid (\alpha - \delta)\alpha = 0\}$, $V_2 = \{\alpha \mid (\alpha^2 + \mathcal{A} + 8)\alpha = 0\}$. 证明:

1. V_1 和 V_2 都是 α 的不变子空间.

2. $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$

解答. 1. 若 $\alpha \in V_1$, 则有 $(\mathcal{A} - \mathcal{E})\alpha = 0$, 于是

$$(\alpha -)\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \mathcal{E})\alpha = 0.$$

这说明 $\mathcal{A}\alpha \in V_1$, 即 V_1 为 \mathcal{A} 的不变子空间.

同理, 若 $\alpha \in V_2$, 则有 $(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E})\alpha = 0$, 于是

$$(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E})\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E})\alpha = 0$$

这说明 $\mathcal{A}\alpha \in V_2$, 即 V_2 也为 \mathcal{A} 的不变子空间.

2. 由于 $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$, 并且根据 $\lambda^2 + \lambda + 1$ 不以 1 为根可知 $(\lambda - 1, \lambda^2 + \lambda + 1) = 1$, 即存在 $u(\lambda), v(\lambda) \in \mathbb{R}[x]$, 使得

$$u(\lambda)(\lambda - 1) + v(\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 1$$

进而

$$u(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \mathcal{E}) + v(\mathcal{A})(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E}) = \mathcal{E}.$$

所以对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}^3$, 均有

$$\alpha = u(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \mathcal{E})\alpha + v(\mathcal{A})(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E})\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (3)$$

其中 $\alpha_1 = u(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \mathcal{E})\alpha$, $\alpha_2 = v(\mathcal{A})(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E})\alpha$.

由于 $\lambda^3 - 1$ 为 d 的特征多项式, 所以 $\alpha^3 - \mathcal{E} = \mathcal{O}$, 于是

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E})\alpha_1 &= u(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \mathcal{E})(\mathcal{A})(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E})\alpha = u(\mathcal{A})(\mathcal{A}^3 - \mathcal{E})\alpha = 0 \\ (\mathcal{A} - \mathcal{E})\alpha_2 &= v(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \mathcal{E})(\mathcal{A})(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E})\alpha = u(\mathcal{A})(\mathcal{A}^3 - \mathcal{E})\alpha = 0 \end{aligned}$$

这说明 $\alpha_1 \in V_2, \alpha_2 \in V_1$, 从而结合 V_1, V_2 为 \mathbb{R}^3 的线性子空间可知

$$\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$$

另外, 对任意的 $\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则有 $(\alpha - 8)\alpha = (d^2 + \mathcal{A} + \delta)\alpha = 0$, 从而代入到 (3) 式可知

$$\alpha = u(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \mathcal{E})\alpha + v(\mathcal{A})(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{E})\alpha = 0$$

即 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 进而

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$$

28. 设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, 证明: 存在正交矩阵 U , 使得 $U^{-1}AU$ 和 $U^{-1}BU$ 同时为对角矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

解答. 必要性. 若存在正交矩阵 U , 使得 $U^{-1}AU$ 和 $U^{-1}BU$ 同时为对角矩阵. 则有

$$U^{-1}AUU^{-1}BU = U^{-1}BUU^{-1}AU$$

于是 $AB = BA$.

充分性. 已知 n 阶实对称矩阵 A, B 满足 $AB = BA$, 首先存在正交矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix}.$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是 A 的所有互异特征值, $E_{r_1}, E_{r_2}, \dots, E_{r_s}$ 分别是 r_1, r_2, \dots, r_s 级单位矩阵. 由 $AB = BA$ 可得

$$P^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}BPP^{-1}AP$$

现在记 $P^{-1}BP = (B_{ij})$, 其中 B_{ij} 为 $r_i \times r_j$ 阶矩阵, 代入到上式可知

$$\lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij}$$

于是当 $i \neq j$ 时, 有 $B_{ij} = O$, 即

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss} \end{pmatrix}.$$

由于 B 为实对称矩阵, 所以 $B_{11}, B_{22}, \dots, B_{ss}$ 均为实对称矩阵, 于是对任意的 $i = 1, 2, \dots, s$, 存在 r_i 阶正交矩阵 Q_i 使得 $Q_i^{-1}B_{ii}Q_i$ 为对角矩阵, 取 $Q = \text{diag}\{Q_1, Q_2, \dots, Q_s\}$, 则 Q 为 n 阶正交矩阵, 且

$$Q^{-1}P^{-1}BPQ = \begin{pmatrix} Q_1^{-1}B_{11}Q_1 & & & \\ & Q_2^{-1}B_{22}Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_s^{-1}B_{ss}Q_s \end{pmatrix}$$

为对角矩阵. 同时

$$\begin{aligned}
 Q^{-1}P^{-1}APQ &= \begin{pmatrix} Q_1^{-1}(\lambda_1 E_{r_1})Q_1 & & & \\ & Q_2^{-1}(\lambda_2 E_{r_2})Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_s^{-1}(\lambda_s E_{r_s})Q_s \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

仍为对角矩阵. 所以取 $U = PQ$ 就有 $U^{-1}AU, U^{-1}BU$ 同时为对角矩阵, 并且 U 也为正交矩阵.

29. 若 A 为 $n \times n$ 的半正定矩阵, B 为 $n \times n$ 的实矩阵. 若存在正整数 s , 使得 $A^s B = B A^s$, 证明: $AB = BA$.
由 A 半正定知存在正交阵 P 使得

$$P^T A P = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 E_{n_1}, \dots, \lambda_t E_{n_t}), \lambda_i \geq 0 \text{ 互异}$$

于是

$$\begin{aligned}
 A^s B = B A^s &\Rightarrow P^T A^s P \cdot P^T B P = P^T B P \cdot P^T A^s P \\
 &\Rightarrow \text{diag}(\lambda_1^s E_{n_1}, \dots, \lambda_t^s E_{n_t}) \tilde{B} = \tilde{B} \text{diag}(\lambda_1^s E_{n_1}, \dots, \lambda_t^s E_{n_t}) \\
 &\quad \left(\tilde{B} = P^T B P = (\tilde{B}_{ij}), \text{分块如} \Lambda \right) \\
 &\Rightarrow \lambda_i^s \tilde{B}_{ij} = \tilde{B}_{ij} \lambda_j^s \Rightarrow \forall i \neq j, \tilde{B}_{ij} = 0 \\
 &\Rightarrow \tilde{B} = \text{diag}(\tilde{B}_{11}, \dots, \tilde{B}_{tt}) \\
 &\Rightarrow \text{diag}(\lambda_1 E_{n_1}, \dots, \lambda_t E_{n_t}) \tilde{B} = \tilde{B} \text{diag}(\lambda_1 E_{n_1}, \dots, \lambda_t E_{n_t}) \\
 &\Rightarrow P \text{diag}(\lambda_1 E_{n_1}, \dots, \lambda_t E_{n_t}) P^T \cdot P \tilde{B} P^T \\
 &\quad = P \tilde{B} P^T \cdot P \text{diag}(\lambda_1 E_{n_1}, \dots, \lambda_t E_{n_t}) P^T \\
 &\Rightarrow AB = BA.
 \end{aligned}$$

30. 已知复数域上的两个 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}, B = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

其中 $\xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为全部 n 次单位根, 证明: A 与 B 相似.

$$\begin{aligned}
 |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\
 &= \lambda \cdot \lambda^{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot (-1)^{n-1} \\
 &= \lambda^n - 1 = \prod_{k=1}^n (\lambda - \xi_k)
 \end{aligned}$$

知 A 有 n 个互异特征值, 而有 n 个线性无关的特征向量, 故 A 可相似对角化, 即存在正交阵 P , 使得 $P^T A P = B$.

31. 设 V_1, V_2 是有限维欧氏空间 V 的子空间, 且 $\dim V_1 < \dim V_2$, 证明: V_2 中必有非零向量垂直与 V_1 中的一切向量.

$$\begin{aligned}
 \dim(V_2 \cap V_1^\perp) &= \dim V_2 + \dim V_1^\perp - \dim(V_2 \cap V_1^\perp) \\
 &= \dim V_2 + (n - \dim V_1) - \dim(V_2 \cap V_1^\perp) \\
 &= (\dim V_2 - \dim V_1) + [n - \dim(V_2 \cap V_1^\perp)] \\
 &\geq \dim V_2 - \dim V_1 > 0
 \end{aligned}$$

知 $\exists 0 \neq \alpha \in V_2 \cap V_1^\perp$. 此 α 即满足题意.

32. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 A 相似于对角矩阵, 求 a, b 的值, 并求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

$$\text{解: 由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & -a & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - b)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

当 $b = 3$ 时, 由 A 相似对角化可知, 二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量,

$$\text{则 } (3E - A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix} \text{ 知, } a = -1$$

$$\text{此时, } \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \text{ 所对应特征向量为 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = 1 \text{ 所对应的特征向量为 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

当 $b = 1$ 时, 由 A 相似对角化可知, 二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量,

则 $(E - A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{pmatrix}$, 知 $a = 1$,

此时, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 所对应特征向量为 $\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_3 = 3$ 所对应的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$

33. 曲线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 (x \geq 0, y \geq 0)$ 与 x 轴围成的区域为 D , 求 $\iint_D xy dx dy$

解:

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^{-\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^3 \sin \theta \cos \theta dr \\ &= \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \cos^2 2\theta \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= - \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{1}{16} \cos^2 2\theta d \cos 2\theta \\ &= - \frac{1}{48} \cos^3 2\theta \Big|_0^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

33. 函数 $y = y(x)$ 的微分方程 $xy' - 6y = -6$, 满足 $y(\sqrt{3}) = 10$,

(1) 求 $y(x)$;

(2) P 为曲线 $y = y(x)$ 上的一点, 曲线 $y = y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上的截距为 I_y , 为使 I_y 最小, 求 P 的坐标.

解:(1) $y' - \frac{6}{x}y = -\frac{6}{x}, \therefore y = e^{\int \frac{6}{x} dx} \left[\int \left(-\frac{6}{x}\right) e^{-\int \frac{6}{x} dx} dx + C \right] = x^6 \left(\frac{1}{x^6} + C \right) = 1 + Cx^6$

将 $y(\sqrt{3}) = 10$ 代入, $C = \frac{1}{3}, \therefore y(x) = 1 + \frac{x^6}{3}$.

(2) 设 $P(x, y)$, 则过 P 点的切线方程为 $Y - y = 2x^5(X - x)$,

法线方程为 $Y - y = -\frac{1}{2x^5}(X - x)$,

令 $X = 0, \therefore Y = I_y = 1 + \frac{x^6}{3} + \frac{1}{2x^4}$, 偶函数, 为此仅考虑 $(0, +\infty)$

令 $(I_y)' = 2x^5 - \frac{2}{x^5} = 0, x = 1$

$\therefore x \in (0, 1), (I_y)' < 0, I_y > I_y(1) = \frac{11}{6}; x \in (1, +\infty), (I_y)' > 0, I_y > I_y(1) = \frac{11}{6}$

$\therefore P\left(\pm 1, \frac{4}{3}\right)$ 时, I_y 有最小值 $\frac{11}{6}$.

34. $f(x)$ 满足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{6}x^2 - x + C$, L 为曲线 $y = f(x) (4 \leq x \leq 9)$, L 的弧长为 s , L 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面的面积为 A , 求 s 和 A .

解: $\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}x - 1, f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$

曲线的弧长 $s = \int_4^9 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_4^9 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}} dx = \frac{22}{3}$.

曲面的侧面积 $A = 2\pi \int_4^9 y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_4^9 \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right) \sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} dx = \frac{425\pi}{9}$

35. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1 - \int_0^x e^{t^2} dt}{(e^x - 1) \sin x}$

又因为 $\int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^x (1 + t^2 + o(t^2)) dt = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \right) \left(1 + x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \right) - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

36. 在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短的一段长度记为 X , 较长的一段长度记为 Y , 令 $Z = \frac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度;

(2) 求 Z 的概率密度.

(3) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

解:

(1) 由题知: $X \sim f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$;

(2) 由 $Y = 2 - X$, 即 $Z = \frac{2-X}{X}$, 先求 Z 的分布函数: $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2-X}{X} \leq z\right\} = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\}$

当 $z < 1$ 时, $F_Z(z) = 0$;

当 $z \geq 1$ 时, $F_Z(z) = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\} = 1 - P\left\{X \leq \frac{2}{z+1}\right\} = 1 - \int_0^{\frac{2}{z+1}} 1 dx = 1 - \frac{2}{z+1}$;

$$f_Z(z) = (F_Z(z))' = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, & z \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

(3) $E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_0^1 \frac{x}{2-x} \cdot 1 dx = -1 + 2 \ln 2$.

37. 已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6 \\ 4x + 2y + z = 30 \end{cases}$, 求 C 上的点到 xoy 坐标面距离的最大值.

解: 设拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - z - 6) + \mu(4x + 2y + z - 30)$

$$L'_x = 2x\lambda + 4\mu = 0$$

$$L'_y = 4y\lambda + 2\mu = 0$$

$$L'_z = 2z - \lambda + \mu = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - z = 6$$

$$4x + 2y + z = 30$$

解得驻点: $(4, 1, 12), (-8, -2, 66)$

C 上的点 $(-8, -2, 66)$ 到 xoy 面距离最大为 66.

37. 设 $u_n(x) = e^{-nx} + \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} (n = 1, 2, \dots)$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

解:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-nx} + \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} \right], \text{ 收敛域 } (0, 1] S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}, x \in (0, 1]$$

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x \ln(1-x) - [-\ln(1-x) - x]$$

$$= (1-x) \ln(1-x) + x, \quad x \in (0, 1)$$

$$S_2(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S_2(x) = 1$$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + (1-x) \ln(1-x) + x, & x \in (0, 1) \\ \frac{e}{e-1}, & x = 1 \end{cases}$$

38. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1 - \int_0^x e^{t^2} dt}{(e^x - 1) \sin x}$

又因为 $\int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^x (1 + t^2 + o(t^2)) dt = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \right) \left(1 + x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \right) - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

38. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\alpha \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right]$ 存在, 求 α 的值.

解: 要想极限存在, 则左右极限相等;

$$\text{又由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\alpha \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = \frac{\pi}{2}\alpha + e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\alpha \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{x}} \right] = -\frac{\pi}{2}\alpha + \frac{1}{e};$$

$$\text{从而 } \frac{\pi}{2}\alpha + e = -\frac{\pi}{2}\alpha + \frac{1}{e}, \text{ 即 } \alpha = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{e} - e \right).$$

39. 在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短的一段长度记为 X , 较长的一段长度记为 Y , 令 $Z = \frac{Y}{X}$

(1) 求 X 的概率密度;

(2) 求 Z 的概率密度.

(3) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

解:

$$(1) \text{ 由题知: } x \sim f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

(2) 由 $y = 2 - x$, 即 $Z = \frac{2-X}{X}$, 先求 Z 的分布函数:

$$F_z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2-X}{X} \leq z\right\} = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\}$$

当 $z < 1$ 时, $F_z(z) = 0$;

$$\text{当 } z \geq 1 \text{ 时, } F_z(z) = P\left\{\frac{2}{X} - 1 \leq z\right\} = 1 - P\left\{X \leq \frac{2}{z+1}\right\} = 1 - \int_0^{\frac{2}{z+1}} 1 dx = 1 - \frac{2}{z+1};$$

$$f_z(z) = (F_z(z))' = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, z \geq 1 \\ 0, \text{ 其他} \end{cases}$$

$$(3) E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_0^1 \frac{x}{2-x} \cdot 1 dx = -1 + 2 \ln 2$$

40. 求函数 $f(x, y) = 2 \ln |x| + \frac{(x-1)^2 + y^2}{2x^2}$ 的极值.

解:

$$(1) \begin{cases} f'_x = \frac{2x^2 + x - 1 - y^2}{x^3} = 0 \\ f'_y = \frac{y}{x^2} = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x^2 + x - 1 - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

得驻点 $(-1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$$(2) \begin{cases} f''_{xx} = \frac{(4x+1)x - 3(2x^2 + x - 1 - y^2)}{x^4} \\ f''_{xy} = \frac{-2y}{x^3} \\ f''_{yy} = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

(3) 驻点 $(-1, 0)$ 处, $A = 3, B = 0, C = 1, AC - B^2 = 3 > 0, A > 0$

故 $f(x, y)$ 在 $(-1, 0)$ 处取极小值 2;

驻点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 处, $A = 24, B = 0, C = 4, AC - B^2 = 3 > 0, A > 0$

故 $f(x, y)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 处取极小值 $\frac{1}{2} - 2 \ln 2$.

41. 求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} (x > 0)$ 的斜渐近线方程.

解: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{(1+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln x}}{e^{x \tan(1+x)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(\ln)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \frac{x+1-1}{1+x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \left(\frac{-1}{1+x}\right)^{-1}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - e^{-1}x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - e^{-1}x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{x^x}{(1+x)^x} - e^{-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(e^{\frac{x \ln x}{1+x}} - e^{-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1} x \cdot \left(x \ln \frac{x}{1+x+1} \right) |$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-1} \frac{\frac{1}{t} \cdot \ln \frac{1}{1+\frac{1}{t}} + 1}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-1} \frac{\frac{t+1}{t^2}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-1}{t^2} = \frac{1}{2} e^{-1}$$

\therefore 曲线的斜渐近线方程为 $y = e^{-1}x \pm \frac{1}{2}e^{-1}$

42. 已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1, g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 求 $g'(x)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 所以 $g(0) = \int_0^1 f(0)dt = 0$

因为 $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt \stackrel{x \neq 0}{=} \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du$

当 $x \neq 0$ 时, $g'(x) = \frac{x f(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2}$

当 $x = 0$ 时, $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} = \frac{1}{2x \rightarrow 0} \lim \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

又因为 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} \right] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\therefore g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

43. 求解行列式
$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$$

解:
$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2$$

44. 已知 $f(x), g(x) \in P[x]$. 证明: $f(x), g(x) = 1$ 的充分必要条件是对 $\forall r(x), s(x), \exists p(x), q(x)$

使得 $p(x)f(x) + r(x) = q(x)g(x) + s(x)$

(1) 充分性:

$$(f, g) = 1 \Rightarrow \exists u, v, s, t \cdot uf + vg = 1$$

$$\Rightarrow u(s-r)f + v(s-r)g = s-r$$

(2) 必要性取 $r = 0, s = 1$, 则

$$pf - qg = 1 \Rightarrow (f, g) = 1$$

45. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n(a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1}(a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2}(a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解：将第 $n+1$ 行与上面的两两互换，换到第一行，经过 n 次互换，再将第 n 行与上面两两互换，换到第二行得到

$$D = (-1)^{n+(n-1)+\cdots+1} \begin{vmatrix} 1 & & & 1 & 1 \\ a & a-1 & & \cdots & a-n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1}(a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} & \\ a^n & (a-1)^n(a-2)^n & \cdots & (a-n)^n & \end{vmatrix}$$

$$\text{对列也进行类似互换得到 } D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & & 1 & 1 \\ a-n & a-(n-1) & \cdots & a \\ (a-n)^n & [a-(n-1)]^n & \ddots & \vdots \\ & \cdots & a^n & \end{vmatrix} = n!(n-1)!\cdots 2!$$

(范德蒙行列式)

$$46. \text{ 已知 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1). 证明: $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$ ($n \geq 3$)

(2). 求 A^{2020}

解:

(1) 证明: 对 n 做数学归纳法, $n=3$ 时, 由 A 的特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

及 Hamilton-Cayley 定理知 $f(A) = 0 \Rightarrow A^3 = A + A^2 - E$

若结论对 n 成立, 则

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= (A^{n-2} + A^2 - E) A \text{ (归纳假设)} \\ &= A^{n-1} + A^3 - A \\ &= A^{n-1} + (A^2 + A - E) - A \\ &= A^{n-1} + A^2 - E \end{aligned}$$

(2) 由 (1) 的结论

$$\begin{aligned} A^{2k} - A^{2(k-1)} &= A^2 - E \\ \Rightarrow A^{2020} - A^2 &= 1009(A^2 - E) \\ A^{2020} &= 1010A^2 - 1009E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1010 & 1 & 0 \\ 1010 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

47. 已知 $\alpha_1 = (1, 2, 0)$ $\alpha_2 = (1, a+2, -3a)$ $\alpha_3 = (1, 2, 0)$ $\beta = (1, 3, -3)$

求 a, b 的值使得

- (1). β 不可被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出
- (2). β 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表出, 并求表达式
- (3). β 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出且不唯一, 并求表达式
- (4). β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists x_i. \text{ s.t. } \beta = \sum x_i \alpha_i \\ &\Leftrightarrow \exists x_i. \text{ s.t. } \beta^T = \sum x_i \alpha_i^T \\ &\Leftrightarrow Ax = b \text{ 有解, 其中 } A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T), b = \beta^T \\ &\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A, b) \end{aligned}$$

对 (A, b) 实施初等变换

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 若 $a = b = 0$, 则 $r(A) = 1 \neq 2 = r(A, b)$

此时, 线性方程组无解, β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

(2) 若 $a = b \neq 0$, 则 $r(A) = 2 = r(A, b)$

此时线性方程组有无穷多解, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 由

$$(A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 1 & -1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{a}\right) x_1 + \frac{1}{a} x_2 + k x_2 + k x_3 = \left(1 - \frac{1}{a}\right) x_1 + \left(k + \frac{1}{a}\right) x_2 + k x_3.$$

(3). 若 $a \neq b, a = 0$, 则 $b \neq 0$,

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}$$

由第二行知线性方程组无解, β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. (4). 若 $a \neq b, a \neq 0$, 则 $|A| \neq 0$, 而 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表出. 此时

$$\beta = \frac{a-1}{a}x_1 + \frac{1}{a}x_2$$

48.

49.

50.