1. 已知 4 阶行列式 D 的第 3 行元素分别是-1,0,2,4，第 4 行元素对应的余子式依次是 5,10,a,4，求 a 的值。

解： 因为 $a_{31}A_{41}+a_{32}A_{42}+a_{33}A_{43}+a_{34}A_{44}=0$, 这里 a_{ij} 和 A 分别是第 i 行第 j 列处的元素和该元素的代数余子式, 所以有 $-1\times(-5)+0\times 10+2\times(-a)+4\times 4=0$, 可得 $a=\frac{21}{2}$

2. 已知矩阵 A,B 满足关系 $AB-B=A$, 其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 求矩阵 A。

解： 因为 $AB-A=B$, 所以 $A(B-E)=B$, $A=B(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

3. 设 A^* 为 3 阶方阵 A 的伴随矩阵, $|A|=2$, 计算行列式 $\left|(3A)^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|$

解： $\left|(3A)^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|=|\frac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}|=|-\frac{2}{3}A^{-1}|=(-\frac{2}{3})^3|A^{-1}|=-\frac{4}{27}$

4. 如果多项式 $f(x),g(x)$ 不全为零，证明：$\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}$ 与 $\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 互素。

证： 证: 存在多项式 $u(x),v(x)$, 使 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$
因而 $u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1$
由定理 3, $\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$

5. 证明: x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{k-1}(x_0)=0$ 而 $f^k(x_0)\neq 0$

证： **必要性**: 设 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根。那么 x_0 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根, $\cdots\cdots$, 是 $f^{t-1}(x)$ 的 1 重根, 是 $f'(x)$ 的 0 重根, 即不是 $f^*(x)$ 的根
所以 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{k-1}(x_0)=0$, 而 $f^k(x_0)\neq 0$.
充分性: 设 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{t-1}(x_0)=0$ 而 $f'(x_0)\neq 0$. 设 x_0 是 $f(x)$ 的 l 重根
由必要性的证明 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f'^{-1}(x_0)=0$ 而 $f'(x_0)\neq 0$. 从而 $l=k$.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正贯性指数与负惯性指数依次为 $(A)2,0$ $(B)1,1$ $(C)2,1$ $(D)1,2$

解： $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$
所以 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 故特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)\lambda$$

令上式等于零，故特征值为 $-1,3,0$, 故该二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 1，故选 B.

7. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$， $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以由向量组 β_1,β_2 线性表出，则

(A) $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 的解.

(B) $A^Tx=0$ 的解均为 $B^Tx=0$ 的解.

(C) $Bx=0$ 的解均为 $Ax=0$ 的解.

(D) $B^Tx=0$ 的解均为 $A^Tx=0$ 的解.

解： 令 $A=(a_1,a_2,a_3)\,,B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 由题 a_1,a_2,a_3 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示，即存在矩阵 A, 使得 $BP=A$, 则当 $B^Tx_0=0$ 时，$A^Tx_0=(BP)^Tx_0=p^TB^Tx_0=0$. 恒成立，即选 D.

8. 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, 记 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k\beta_1,\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$, 若 β_1,β_2,β_3 两两正交，则 l_1,l_2 依次为

(A) $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.　(B) $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.　(C) $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.　(D) $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

解：利用斯密特正交化方法知

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},$$
$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2,$$
$$\text{故}l_1=\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}=\frac{5}{2},l_2=\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}=\frac{1}{2}\text{，故选A.}$$

9. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix}-1&2&-11&4\\1&2&6&2\\1&1&2&1\\4&7&8&3\end{vmatrix}$. 求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$, 其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

解: 考虑行列式 $C=\begin{vmatrix}-1&2&1&4\\1&2&1&2\\1&1&1&1\\4&7&1&3\end{vmatrix}$, 按它的第三列展开。由于 c 和 D 除了第三列外均相同，故 $C=A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$, 而计算可得 $C=\begin{vmatrix}-1&2&1&4\\1&2&1&2\\1&1&1&1\\4&7&1&3\end{vmatrix}=2$. 所以 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{t,}=2$.

10. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \mathrm{L} & 0 & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & a_{n-1} & b_{n+1} \\ b_* & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & a_* \end{vmatrix}$.

解: 按第一列展开得: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{s-1} & b_{z-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$

$= a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n+1} b_1 b_2 \cdots b_n$

（中山大学 2015 年）

已知实多项式 $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$，$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.

（1）求 $f(x)$ 的全部有理根及相应重数.

（2）求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首一的最大公因式 (f, g).

解:（1）令 $x = -1$，有 $f(-1) = 0$，说明 $x + 1 \mid f(x)$.

可得 $f(x) = (x+1)(x^3 + x^2 - 2x - 2)$，同样可以验证 $x + 1 \mid x^3 + x^2 - 2x - 2$，

所以 $f(x) = (x+1)^2(x^2 - 2)$，故 $f(x)$ 有二重有理根 $x = -1$.

（2）因为

$$g(x) = x^4 - 2x^2 + x^3 - 2x + x^2 - 1 = x^2(x^2 - 2) + x(x^2 - 2) + (x^2 - 2)$$

$$= (x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$$

因为 $((x+1)^2, x^2 + x + 1) = 1$，所以

$$(f(x), g(x)) = x^2 - 2.$$

（中山大学 2015 年）

设 3 阶复矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix}$，定义 C^3 上的线性变换 σ 为：$\sigma(\alpha) = A\alpha$，对任意的 $\alpha \in C^3$. 求 σ 的最小多项式以及 Jordan 标准形.

解: 取 C^3 的自然基 e_1, e_2, e_3，则有 $\sigma(e_1) = Ae_1, \sigma(e_2) = Ae_2, \sigma(e_3) = Ae_3$，那么 $(\sigma(e_1), \sigma(e_2), \sigma(e_3)) = (e_1, e_2, e_3)A$，所以 σ 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵是 A. 所以只需求 A 的极小多项式和若当标准形.

先求 $\lambda E-A$ 的初等因子，注意到 $(\lambda E-A)$ 存在二阶行列式

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ \lambda-8 & -2 \end{vmatrix} = 2\lambda-10, \begin{vmatrix} -1 & \lambda-8 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 2-2\lambda$$

并且 $(\lambda-5, 1-\lambda)=1$，从而 $(\lambda E-A)$ 的二阶不变因子是 1．又

$$\left|\lambda E-A\right| = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

所以 $(\lambda E-A)$ 的标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3)^2 \end{pmatrix}$$

从而 A 的初等因子为 $\lambda-1, (\lambda-3)^2$.

故 A 的若当标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

其最小多项式

$$m_A(\lambda) = \lambda-1, (\lambda-3)^2.$$

（中山大学 2015 年）

记 $R[x]_5$ 为次数小于 5 的实多项式全体构成的向量空间，在 $R[x]_5$ 上定义双线性函数如下

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

（1）证明：上式定义了 $R[x]_5$ 上一个正定的对称双线性函数.

（2）用 Gram-Schmidt 方法由 $1, x, x^2, x^3$ 求 $R[x]_5$ 的一个正交向量组.

（3）求一个形如 $f(x) = a+bx^2-x^4$ 的多项式，使它与所有次数低于 4 的实多项式正交.

证明：（1）$\forall f(x), g(x) \in R[x]_5$，有

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx = (g(x), f(x))$$

其二次型

$$q(f(x)) = (f(x), f(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)^2dx > 0$$

对任意的 $f(x) \in R[x]_5$ 且 $f(x) \neq 0$ 成立，因而 $(f(x), g(x))$ 是正定的对称双线性函数.

（2）利用 Gram-Schmidt 方法和根据内积的运算，容易算出正交向量组，

$$1, x, x^2, -\frac{1}{3}, x^3, -\frac{3}{5}x.$$

（3）取次数低于 4 的实多项式的一组基 $1, x, x^2, x^3$，只需要 $f(x)$ 与 $1, x, x^2, x^3$ 都正交即可. 注意到 $f(x)$ 是偶函数，所以只要与 $1, x^2$ 正交即可.

$$(1, f(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2a + \frac{2}{3}b - \frac{2}{5} = 0$$

$$(x^2, f(x)) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}b - \frac{2}{7} = 0$$

解得 $a = -\frac{1}{5}, b = \frac{6}{7}$.

（中山大学 2015 年）

设 $A, B \in M_n(C)$ 为幂等矩阵，即 $A^2 = A, B^2 = B$.

（1）证明：$A - B$ 是幂等矩阵当且仅当 $AB = BA = B$.

（2）证明：若 $AB = BA$，则 AB 为幂等矩阵. 反之，若 AB 为幂等矩阵，是否必有 $AB = BA$? 试证明或给出反例.

证明：充分性

$A - B$ 是幂等矩阵，则 $(A - B)^2 = (A - B)$，有

$$(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = A - B$$

依题意，$A^2 = A, B^2 = B$，有

$$2B = AB + BA$$

两边左乘以 A 有

$$2AB = A^2B + ABA = AB + ABA \Rightarrow AB = ABA$$

两边右乘以 A 有

$$2BA = ABA + BA^2 = ABA + BA \Rightarrow BA = ABA$$

从而 $B = AB = BA$.

必要性的证明是显然的.

（2）若 $AB = BA$，则

$$(AB)^2 = ABAB = A(BA)B = A(AB)B = A^2B^2 = AB$$

从而幂等.

取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

那么

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而 AB 是满足幂等的．但是

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq AB.$$

（中山大学 2015 年）

设 $A_1, \cdots, A_m$ 为 m 个两两可换的互不相同的 n 阶实对称矩阵，且

$$tr(A_iA_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n,$$

这里 $tr(A)$ 表示矩阵 A 的迹，即它的对角元之和，试证明 $m \leq n$．

证明：因为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 m 个两两可换的互不相同的 n 阶实对称矩阵, 所以存在一个 n 阶正交矩阵 P 使得 P^TA_iP 都是对角阵.

记 $P^TA_iP = diag(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \cdots, \lambda_{in})$，其中 $i = 1, 2, \cdots, m$．根据题意

$$tr(A_iA_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

由 tr 的性质，

$$tr(A_iA_j) = tr(A_iP^TPA_jPP^T) = tr(P^TA_iPP^TA_jP) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}\lambda_{jk},$$

记 $u_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \cdots, \lambda_{in})$，则有

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

因此 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 是一组标准正交组，从而其个数小于 R^n 的维数，即有

$$m \leq n.$$