

Algebraic Inequalities

Vasile Cirtoaje

Chapter 1: Warm-Up Problem Set

1.1 Applications

1. Cho $a, b, c, d \in R$ thỏa : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. CMR : $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq 8$
2. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 2\left(\frac{b+c}{2} - a\right)^3$
3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. CMR : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$
4. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. CMR : $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 \leq 3$
5. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$
6. Cho $a, b, c \in R$ khác nhau đôi một. CMR : $\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c-a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2 \geq 2$
7. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $(a^2 - bc)\sqrt{b+c} + (b^2 - ca)\sqrt{c+a} + (c^2 - ab)\sqrt{a+b} \geq 0$
8. Cho $a, b, c, d \geq 0$. CMR : $\frac{a-b}{a+2b+c} + \frac{b-c}{b+2c+d} + \frac{c-d}{c+2d+a} + \frac{d-a}{d+2a+b} \geq 0$
9. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$. CMR : $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq ab + bc + ca$
10. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.
CMR : $\frac{a^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2}{c^2 + ca + a^2} \geq 1$
11. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1$

12. Đặt : $E(a,b,c) = a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b)$
 CMR : a) $(a+b+c)E(a,b,c) \geq ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2$
 b) $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)E(a,b,c) \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$
13. Cho $a,b,c,x,y,z \in R$ thỏa : $a+x \geq b+y \geq c+z \geq 0$ và $a+b+c = x+y+z$.
 CMR : $ay+bx \geq ac+xz$
14. Cho $a,b,c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. CMR : $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}$
15. Cho $a,b,c,x,y,z \geq 0$ thỏa $a+b+c = x+y+z$.
 CMR : $ax(a+x) + by(b+y) + cz(c+z) \geq 3(abc + xyz)$
16. Cho $a,b,c \geq 0$. CMR : $4(a+b+c)^3 \geq 27(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc)$
17. Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa $a+b+c = 3$. CMR : $\frac{1}{2ab^2+1} + \frac{1}{2bc^2+1} + \frac{1}{2ca^2+1} \geq 1$
18. Cho $a,b,c,d > 0$. CMR : $\frac{1}{a^2+ab} + \frac{1}{b^2+bc} + \frac{1}{c^2+cd} + \frac{1}{d^2+da} \geq \frac{4}{ac+bd}$
19. Cho $a,b,c \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right]$. CMR : $\frac{3}{a+2b} + \frac{3}{b+2c} + \frac{3}{c+2a} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}$
20. Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa $ab+bc+ca = 3$. CMR : $\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \leq 1$
21. Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa $ab+bc+ca = 3$. CMR : $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}$
22. Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa $a^2+b^2+c^2 = 3$. CMR : $\frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} \leq 1$
23. Cho $a,b,c > 0$ thỏa $abc = 1$. CMR :
 a) $\frac{a-1}{b} + \frac{b-1}{c} + \frac{c-1}{a} \geq 0$
 b) $\frac{a-1}{b+c} + \frac{b-1}{c+a} + \frac{c-1}{a+b} \geq 0$
24. Cho $a,b,c,d \geq 0$ thỏa $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2$. CMR : $(a+b)(c+d) \geq 2(ab+cd)$

25. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. CMR : $\frac{1}{1+(n-1)a_1} + \frac{1}{1+(n-1)a_2} + \dots + \frac{1}{1+(n-1)a_n} \geq 1$
26. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. CMR : $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$
27. Cho $a, b, c > 0$. CMR : $\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$
28. Cho $a, b, c, d \geq 0$. CMR : $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{d}{d+a}\right)^2 \geq 1$
29. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Nếu $a \leq b \leq c$ thì : $ab^2c^3 \geq 1$
30. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.
CMR : $\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$
31. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (a+1)(b+1)(c+1)(abc+1)$
32. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $3(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2) \geq 1+abc+a^2b^2c^2$
33. Cho $a, b, c, d \geq 0$. CMR : $(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)(1-d+d^2) \geq \left(\frac{1+abcd}{2}\right)^2$
34. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \geq (ab+bc+ca)^3$
35. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa $abcd = 1$.
CMR : $\frac{1}{1+ab+bc+ca} + \frac{1}{1+bc+cd+db} + \frac{1}{1+cd+da+ac} + \frac{1}{1+da+ab+bd} \leq 1$
36. Cho $a, b, c, x, y, z \in R$. CMR : $4(a^2+x^2)(b^2+y^2)(c^2+z^2) \geq 3(bcx+cay+abz)^2$
37. Nếu $a \geq b \geq c \geq d \geq e$ thì $(a+b+c+d+e)^2 \geq 8(ac+bd+ce)$
Cho $e \geq 0$. Xác định dấu "=" xảy ra ?
38. Cho $a, b, c, d \in R$. CMR : $6(a^2+b^2+c^2+d^2) + (a+b+c+d)^2 \geq 12(ab+bc+cd)$
39. Cho $a, b, c > 0$. CMR : $\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \geq 1 + \sqrt{1 + \sqrt{(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}}$

40. Cho $a, b, c > 0$. CMR : $5 + \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) - 2 \geq (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$
41. Cho $a, b, c, d > 0$. CMR : $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$
42. Nếu $a, b, c > -1$ thì : $\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2$
43. Cho $a, b, c, x, y, z > 0$ thỏa $(a+b+c)(x+y+z) = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4$.
CMR : $abcxyz < \frac{1}{36}$
44. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. CMR : $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq 3$
45. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .
CMR : $\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{3}{ab+bc+ca}$
46. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .
CMR : $\frac{1}{b^2-bc+c^2} + \frac{1}{c^2-ca+a^2} + \frac{1}{a^2-ab+b^2} \geq \frac{3}{ab+bc+ca}$
47. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a+b+c = 3$. CMR : $abc + \frac{12}{ab+bc+ca} \geq 5$
48. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. CMR : $12 + 9abc \geq 7(ab+bc+ca)$
49. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $ab+bc+ca = 3$. CMR : $a^3 + b^3 + c^3 + 7abc \geq 10$
50. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. CMR : $(a+b)(b+c)(c+a) + 7 \geq 5(a+b+c)$
51. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .
CMR : $\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)} \leq \frac{1}{a+b+c}$
52. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a+b+c \geq 3$. CMR : $\frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{a+b^2+c} + \frac{1}{a+b+c^2} \leq 1$
53. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $ab+bc+ca = 3$.
Nếu $r \geq 1$ thì : $\frac{1}{r+a^2+b^2} + \frac{1}{r+b^2+c^2} + \frac{1}{r+c^2+a^2} \leq \frac{3}{r+2}$

54. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. CMR : $\frac{1}{(1+a)^3} + \frac{1}{(1+b)^3} + \frac{1}{(1+c)^3} + \frac{5}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 1$
55. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. CMR : $\frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3} \geq \frac{3}{ab+bc+ca}$
56. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. CMR : $2(1+abc) + \sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq (1+a)(1+b)(1+c)$
57. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.
CMR : $\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2$
58. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.
CMR : $\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq 2$
59. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.
CMR : $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab}$
60. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.
CMR : $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{2a}{3a^2+bc} + \frac{2b}{3b^2+ca} + \frac{2c}{3c^2+ab}$
61. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^2+b^2+c^2=3$. CMR : $5(a+b+c) + \frac{3}{abc} \geq 18$
62. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a+b+c=3$. CMR : $\frac{1}{6-ab} + \frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} \leq \frac{3}{5}$
63. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \geq 4$ thỏa $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ và $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq n^2$.
CMR : $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq 2$
64. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.
CMR : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{13}{6} - \frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)}$
65. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.
CMR : $\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geq a+b+c$
66. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $(a+b)(b+c)(c+a)=2$. CMR : $(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \leq 1$

Chapter 2: Starting From Some Special Fourth Degree Inequalities

2.1 Main results

1. Cho $x, y, z \in R$. CMR : $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 3(x^3y + y^3z + z^3x)$
2. Cho $x, y, z, r \in R$. CMR : $\sum x^4 + (3r^2 - 1)\sum x^2y^2 + 3r(1-r)xyz\sum x \geq 3r\sum x^3y$
3. Cho $x, y, z \in R$. CMR : $x^4 + y^4 + z^4 + xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq 2(x^3y + y^3z + z^3x)$
4. Cho $x, y, z \geq 0$. CMR : $x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2 \geq 2(x^3y + y^3z + z^3x - xy^3 - yz^3 - zx^3)$
5. Cho $x, y, z, r \in R$. CMR : $\sum (x-ry)(x-rz)(x-y)(x-z) \geq 0$, (với $\sum x = x + y + z$)
6. Cho $x, y, z \geq 0$. Đặt : $S_i = \sum x^i (x-y)(x-z)$. Với mọi $p, q \in R : pq > 0$:
CMR : $S_0 S_{p+q} \geq S_p S_q$
7. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 3$.
Nếu $m = \frac{\ln 3}{\ln 9 - \ln 4} \approx 1,355$ và $0 < r \leq m$ thì : $x^r y^r + y^r z^r + z^r x^r \leq 3$
8. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 2$. Nếu $2 \leq r \leq 3$ thì : $x^r (y+z) + y^r (z+x) + z^r (x+y) \leq 2$
9. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 1$.
Nếu $0 < p$ và $q \leq \frac{(p-1)(2p+1)}{4}$ thì : $\frac{yz+q}{x+p} + \frac{zx+q}{y+p} + \frac{xy+q}{z+p} \leq \frac{1+9q}{1+3p}$
10. Cho $x, y, z > 0$. Nếu $1 \leq r \leq 3$ thì : $x^r y^{4-r} + y^r z^{4-r} + z^r x^{4-r} \leq \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^2$
11. Cho $x, y, z > 0$
a) Nếu $x + y + z = 3$ và $0 < r \leq \frac{1}{2}$ thì : $x^{1+r} y^r + y^{1+r} z^r + z^{1+r} x^r \leq 3$
b) Nếu $x + y + z = 1 + 2r$ và $r \geq 1$ thì : $x^{1+r} y^r + y^{1+r} z^r + z^{1+r} x^r \leq r^r (1+r)^{1+r}$
12. Cho $x, y, z > 0$
a) Nếu $x + y + z = 3$ và $0 < r \leq \frac{3}{2}$ thì : $x^r y + y^r z + z^r x \leq 3$
b) Nếu $x + y + z = 1 + r$ và $r \geq 2$ thì : $x^r y + y^r z + z^r x \leq r^r$

13. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x^{m+n} + y^{m+n} + z^{m+n} = 3$, với $m > n > 0$. CMR : $\frac{x^m}{y^n} + \frac{y^m}{z^n} + \frac{z^m}{x^n} \geq 3$
14. Cho $a, b, c, d \geq 0$. Nếu $p > 0$ thì : $\left(1 + p \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + p \frac{b}{c+d}\right) \left(1 + p \frac{c}{d+a}\right) \left(1 + p \frac{d}{a+b}\right) \geq (1+p)^2$
15. Cho $a, b, c > 0$. CMR : $\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 3 \left(\frac{1}{3a+b} + \frac{1}{3b+c} + \frac{1}{3c+a} \right)$
16. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 3$. CMR : $\frac{x}{xy+1} + \frac{y}{yz+3} + \frac{z}{zx+3} \geq \frac{3}{2}$
17. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 3$. CMR : $\frac{x}{y^2+3} + \frac{y}{z^2+3} + \frac{z}{x^2+3} \geq \frac{3}{4}$
18. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. CMR : $\sqrt{\frac{a}{b+8}} + \sqrt{\frac{b}{c+8}} + \sqrt{\frac{c}{a+8}} \geq 1$
19. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác .
a) $3(a^3b + b^3c + c^3a) \geq (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)$
b) $9(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^4$
20. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác .
Nếu $r \geq 2$ thì : $3(a^r b + b^r c + c^r a) \geq (a + b + c)(a^{r-1}b + b^{r-1}c + c^{r-1}a)$
21. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác .
Nếu $r \geq 2$ thì : $a^r b(a-b) + b^r c(b-c) + c^r a(c-a) \geq 0$
22. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác .
Nếu $0 < r \leq 1$ thì : $a^2 b(a^r - b^r) + b^2 c(b^r - c^r) + c^2 a(c^r - a^r) \geq 0$
23. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác và $x, y, z \in R$.
CMR : $(ya^2 + zb^2 + xc^2)(za^2 + xb^2 + yc^2) \geq (xy + yz + zx)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

Chapter 2: Starting From Some Special Fourth Degree Inequalities

2.3 Another related inequalities

1. Cho $x, y, z \geq 0$. Với $0 \leq r \leq \sqrt{2}$.
CMR : $\sqrt{x^4 + y^4 + z^4} + r\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2} \geq (1+r)\sqrt{x^3y + y^3z + z^3x}$

2. Cho $x, y, z \in R$. Với $-1 \leq r \leq 2$.

$$\text{CMR} : x^2(x-y)(x-ry) + y^2(y-z)(y-rz) + z^2(z-x)(z-rx) \geq 0$$

3. Cho $x, y, z \geq 0$. Với $-2 \leq r \leq 2$.

$$\text{CMR} : x(x-y)(x^2-ry^2) + y(y-z)(y^2-rz^2) + z(z-x)(z^2-rx^2) \geq 0$$

4. Cho $x, y, z \in R$. CMR : $(x-y)(2x+y)^3 + (y-z)(2y+z)^3 + (z-x)(2z+x)^3 \geq 0$

5. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$.

$$\text{CMR} : (x_1 - x_2)(2x_1 + x_2)^3 + (x_2 - x_3)(3x_2 + x_3)^3 + \dots + (x_n - x_1)(3x_n + x_1)^3 \geq 0$$

6. Cho $x, y, z \geq 0$. CMR : $(x-y)(3x+2y)^3 + (y-z)(3y+2z)^3 + (z-x)(3z+2x)^3 \geq 0$

7. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. Với $r \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} \approx 1,7024$

$$\text{CMR} : (x_1 - x_2)(rx_1 + x_2)^3 + (x_2 - x_3)(rx_2 + x_3)^3 + \dots + (x_n - x_1)(rx_n + x_1)^3 \geq 0$$

8. Cho $x, y, z \in R$. CMR : $(x-y)\sqrt[3]{2x+y} + (y-z)\sqrt[3]{2y+z} + (z-x)\sqrt[3]{2z+x} \geq 0$

9. Cho $x, y, z \in R$. CMR : $(x-y)(x+2z)^3 + (y-z)(y+2x)^3 + (z-x)(z+2y)^3 \geq 0$

10. Cho $x, y, z \in R$. CMR : $(x-y)\sqrt[3]{x+2z} + (y-z)\sqrt[3]{y+2x} + (z-x)\sqrt[3]{z+2y} \geq 0$

11. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$. Với $0 \leq r \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$\text{CMR} : x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 + r(x_1x_2^3 + x_2x_3^3 + \dots + x_nx_1^3) \geq (1+r)(x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + \dots + x_n^3x_1)$$

12. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

$$\text{CMR} : x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 + \frac{1}{2}(x_1x_2^3 + x_2x_3^3 + \dots + x_nx_1^3) \geq \frac{3}{2}(x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + \dots + x_n^3x_1)$$

13. Cho $x, y, z \in R$. CMR : $x(x+y)^3 + y(y+z)^3 + z(z+x)^3 \geq 0$

14. Cho $a, b, c > 0$. CMR :

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \geq 4 \left(\frac{1}{3a+b} + \frac{1}{3b+c} + \frac{1}{3c+a} - \frac{1}{a+3b} - \frac{1}{b+3c} - \frac{1}{c+3a} \right)$$

15. Cho $x, y, z \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$. CMR : $8 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq 5 \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right) + 9$

16. Cho $x, y, z \in \left[\frac{1}{p}, p \right], p = \sqrt{4+3\sqrt{2}}$. CMR : $9(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^4$
17. Cho $x, y, z \geq \frac{2}{3}$ thỏa $x + y + z = 3$. CMR : $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xy + yz + zx$
18. Cho $x, y, z \in R$. CMR : $3(x^4 + y^4 + z^4 - x^3y - y^3z - z^3x) \geq x^2(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2$
19. Cho $x, y, z \in R$. CMR : $x^4 + y^4 + z^4 - xyz(x + y + z) \geq 2\sqrt{2}(x^3y + y^3z + z^3x - xy^3 - yz^3 - zx^3)$
20. Cho $x, y, z \geq 0$. CMR : $x^4 + y^4 + z^4 + 17(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq 6(x + y + z)(x^2y + y^2z + z^2x)$
21. Cho $x, y, z \geq 0$. CMR : $\sum (x^2 - yz)^2 \geq \sqrt{6} \sum xy(z - x)^2$ (với $\sum x = x + y + z$)
22. Cho $x, y, z \geq 0$. CMR : $x^4 + y^4 + z^4 + 5(x^3y + y^3z + z^3x) \geq 6(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$
23. Cho $x, y, z \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .
CMR : $\frac{x^2 - yz}{x + y} + \frac{y^2 - zx}{y + z} + \frac{z^2 - xy}{z + x} \geq 0$
24. Cho $x, y, z \in R$. CMR : $3(x^4 + y^4 + z^4) + 4(x^3y + y^3z + z^3x) \geq 0$
25. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z = 3$. CMR : $\frac{x}{1 + y^3} + \frac{y}{1 + z^3} + \frac{z}{1 + x^3} \geq \frac{3}{2}$
26. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa $a + b + c + d = 4$. CMR : $3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geq 16$
27. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa $a + b + c + d = 4$. CMR : $\frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + d^2} + \frac{d}{1 + a^2} \geq 2$
28. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a + b + c = 1$. CMR : $\frac{2bc + 3}{a + 1} + \frac{2ca + 3}{b + 1} + \frac{2ab + 3}{c + 1} \leq \frac{15}{2}$
29. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác .
CMR : $a^2(a + b)(b - c) + b^2(b + c)(c - a) + c^2(c + a)(a - b) \geq 0$
30. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác không đều
CMR : $\frac{a^3b + b^3c + c^3a - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} \geq \min\{b + c - a, c + a - b, a + b - c\}$
31. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác và $x, y, z \in R, x + y + z = 1$.
CMR : $yz a(b + c - a) + zx b(c + a - b) + xy c(a + b - c) \leq 0$

32. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác .

$$\text{CMR : } (2a^2 - bc)(b - c)^2 + (2b^2 - ca)(c - a)^2 + (2c^2 - ab)(a - b)^2 \geq 0$$

33. Cho $x, y, z \geq 0$. Với $0 < r \leq m \approx 1,558$ là nghiệm của phương trình $(1 + m)^{1+m} = (3m)^m$.

$$\text{CMR : } \frac{x^r y + y^r z + z^r x}{3} \leq \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^{r+1}$$

Chapter 3: Inequalities With Right Convex And Left Concave Functions

3.4 Applications

1. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$

$$\text{CMR : } (n-1)(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) + n^2 \geq (2n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

2. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$

$$\text{CMR : } x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 + n^2 \leq (n+1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

3. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}}$

$$\text{CMR : } \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \dots + \frac{1}{1+x_n^2} \geq \frac{n}{1+r^2}$$

4. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \leq \sqrt{\frac{n-1}{n^2 - n + 1}}$

$$\text{CMR : } \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \dots + \frac{1}{1+x_n^2} \leq \frac{n}{1+r^2}$$

5. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

$$\text{CMR : } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq (n-2)^2 + 4n(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

6. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \leq \frac{n-1}{(n + \sqrt{n-1})^2}$

$$\text{CMR : } \frac{1}{1-\sqrt{x_1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x_2}} + \dots + \frac{1}{1-\sqrt{x_n}} \leq \frac{n}{1-\sqrt{r}}$$

7. Cho $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n < 1$ thỏa $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \geq \frac{n-1}{(n + \sqrt{n-1})^2}$

$$\text{CMR} : \frac{1}{1-\sqrt{x_1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x_2}} + \dots + \frac{1}{1-\sqrt{x_n}} \geq \frac{n}{1-\sqrt{r}}$$

8. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \leq 1 + \frac{2\sqrt{n-1}}{n}$

$$\text{CMR} : \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geq \left(r + \frac{1}{r}\right)^n$$

9. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ($n \geq 3$) thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

$$\text{CMR} : \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \sqrt{x_2}\right) \dots \left(\frac{1}{\sqrt{x_n}} - \sqrt{x_n}\right) \geq \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

10. Cho $x, y, z \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR} : \sqrt{1 + \frac{48x}{y+z}} + \sqrt{1 + \frac{48y}{z+x}} + \sqrt{1 + \frac{48z}{x+y}} \geq 15$$

11. Cho $x, y, z \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0. Với $r \geq r_0 = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1 \approx 0,585$

$$\text{CMR} : \left(\frac{2x}{y+z}\right)^r + \left(\frac{2y}{z+x}\right)^r + \left(\frac{2z}{x+y}\right)^r \geq 3$$

12. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 3$.

$$\text{Nếu } 0 < r \leq r_0 = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \approx 1,71 \text{ thì : } x^r (y+z) + y^r (z+x) + z^r (x+y) \leq 6$$

13. Cho $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n < 1$ thỏa $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \geq \frac{1}{3}$

$$\text{CMR} : \frac{\sqrt{x_1}}{1-x_1} + \frac{\sqrt{x_2}}{1-x_2} + \dots + \frac{\sqrt{x_n}}{1-x_n} \geq \frac{n\sqrt{r}}{1-r}$$

14. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = 3$. $\text{CMR} : (1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2) \geq 1$

15. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$.

$$\text{CMR} : \frac{1}{n-x_1+x_1^2} + \frac{1}{n-x_2+x_2^2} + \dots + \frac{1}{n-x_n+x_n^2} \leq 1$$

16. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. $\text{CMR} : 1 + a + b + c \geq 2\sqrt{1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$

17. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa $abcd = 1$.

$$\text{CMR} : (a-1)(a-2) + (b-1)(b-2) + (c-1)(c-2) + (d-1)(d-2) \geq 0$$

18. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0 (n \geq 4)$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n = 1$

$$\text{CMR} : (n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + n(n+3) \geq (2n+2)(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

19*. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n = 1$

$$\text{CMR} : a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} + n(n-2) \geq (n-1) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

20. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Với $m \geq n$:

$$\text{CMR} : a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m + mn \geq (m+1) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

21. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0 (n \geq 3)$ thỏa $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \geq \sqrt{n} - 1$

$$\text{CMR} : \frac{1}{(1+a_1)^2} + \frac{1}{(1+a_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^2} \geq \frac{n}{(1+p)^2}$$

22. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \geq n^2 - 1$

$$\text{CMR} : \frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} \geq \frac{n}{\sqrt{1+p}}$$

23*. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1$

$$\text{CMR} : \frac{1}{(1+a_1)^2} + \frac{1}{(1+a_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^2} \leq \frac{n}{(1+p)^2}$$

24. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0 (n \geq 3)$ thỏa $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \leq \frac{2n-1}{(n-1)^2}$

$$\text{CMR} : \frac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+a_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{1+p}}$$

25. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \geq 1$

$$\text{CMR} : \frac{1}{1+a_1+\dots+a_1^{n-1}} + \frac{1}{1+a_2+\dots+a_2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{1+a_n+\dots+a_n^{n-1}} \geq \frac{1}{1+p+\dots+p^{n-1}}$$

26. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n \geq 1$.

$$\text{CMR} : a_1 + a_2 + \dots + a_n - \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{1}{2n^2} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\ln a_i - \ln a_j)^2$$

27. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n = 1$

$$\text{CMR : } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{a_1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{a_2} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{a_n} \leq n - 1$$

28. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$.

$$\text{CMR : } n^{-x_1^2} + n^{-x_2^2} + \dots + n^{-x_n^2} \geq 1$$

29. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$.

$$\text{CMR : } 2(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) + n^2 \leq (2n + 1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

30. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z = 3$. CMR : $8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 9 \geq 10(x^2 + y^2 + z^2)$

Chapter 4: On Popoviciu's Inequality

4.2 Applications

1*. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n = 1$

$$\text{CMR : } a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} + n(n-2) \geq (n-1)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

2. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n = 1$

$$\text{CMR : } a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} + n(n-2) \geq \frac{n-1}{2}\left(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

3. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$

$$\text{CMR : } (n - a_1)(n - a_2) \dots (n - a_n) \geq (n-1)^n \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

4. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $b_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} a_j, \forall i$. CMR : $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \geq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$

5*. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$.

$$\text{a)* } \frac{1}{1 + (n-1)x_1} + \frac{1}{1 + (n-1)x_2} + \dots + \frac{1}{1 + (n-1)x_n} \geq 1$$

$$\text{b) } \frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1$$

6. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0 (n \geq 3)$ thỏa $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$

$$\text{CMR : } \left(a_1 + \frac{1}{a_1} - 2 \right) \left(a_2 + \frac{1}{a_2} - 2 \right) \dots \left(a_n + \frac{1}{a_n} - 2 \right) \geq \left(n + \frac{1}{n} - 2 \right)^n$$

7. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = ns$

$$\text{CMR : } \frac{1}{x_1 + n - 1} + \frac{1}{x_2 + n - 1} + \dots + \frac{1}{x_n + n - 1} \geq \frac{1}{ns - x_1 + 1} + \frac{1}{ns - x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{ns - x_n + 1}$$

8. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0 (n \geq 3)$ thỏa $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Với $0 < p \leq \frac{2n-1}{(n-1)^2}$

$$\text{CMR : } \frac{1}{\sqrt{1+px_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+px_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+px_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{1+p}}$$

9. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. CMR : $(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + n\sqrt{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2} \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$

10. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa $ab + bc + cd + da = 4$.

$$\text{CMR : } \left(1 + \frac{a}{b} \right) \left(1 + \frac{b}{c} \right) \left(1 + \frac{c}{d} \right) \left(1 + \frac{d}{a} \right) \geq (a + b + c + d)^2$$

Chapter 5: Inequalities Involving EV-Theorem

5.2 Applications

1. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y) \leq \frac{1}{12}(x+y+z)^5$

2. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $xy + yz + zx = 1$. CMR : $x + y + z + 3(2\sqrt{3} - 3)xyz \geq 2$

3. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $ab + bc + ca = 1$. CMR : $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b+c} \geq 2$

4. Cho $x, y, z, t \geq 0$ thỏa $x + y + z + t = 3$. CMR : $x^2 y^2 z^2 + y^2 z^2 t^2 + z^2 t^2 x^2 + t^2 x^2 y^2 \leq 1$

5. Cho $x, y, z, t \geq 0$ thỏa $x + y + z + t = 4$.

$$\text{CMR : } xyz + yzt + ztx + txy + x^2 y^2 z^2 + y^2 z^2 t^2 + z^2 t^2 x^2 + t^2 x^2 y^2 \leq 8$$

6. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $xy + yz + zx = 3$. CMR : $\sqrt{\frac{1+2x}{3}} + \sqrt{\frac{1+2y}{3}} + \sqrt{\frac{1+2z}{3}} \geq 3$

7. Cho $x, y, z \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR : } \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \geq \frac{9}{4(xy + yz + zx)}$$

8. Cho $x, y, z \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 . Với $0 \leq r \leq \frac{5}{2}$.

$$\text{CMR : } \sum \frac{1}{y^2 + yz + z^2} \geq \frac{3(1+r)}{x^2 + y^2 + z^2 + r(xy + yz + zx)}$$

9. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 3$. Với $r \geq \frac{8}{5}$.

$$\text{CMR : } \frac{1}{r+x^2+y^2} + \frac{1}{r+y^2+z^2} + \frac{1}{r+z^2+x^2} \leq \frac{3}{r+2}$$

10. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Với $r \geq 10$.

$$\text{CMR : } \frac{1}{r-(x+y)^2} + \frac{1}{r-(y+z)^2} + \frac{1}{r-(z+x)^2} \leq \frac{3}{r-4}$$

11. Cho $x, y, z \geq 0$. CMR : $\frac{yz}{3x^2 + y^2 + z^2} + \frac{zx}{3y^2 + z^2 + x^2} + \frac{xy}{3z^2 + x^2 + y^2} \leq \frac{3}{5}$

12. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 2$. CMR : $\frac{yz}{x^2+1} + \frac{zx}{y^2+1} + \frac{xy}{z^2+1} \leq 1$

13. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 3$.

$$\text{Nếu } \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \approx 1,71 = r_0 \leq r \leq 3 \text{ thì : } x^r(y+z) + y^r(z+x) + z^r(x+y) \leq 2$$

14. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $xy + yz + zx = 3$.

$$\text{Nếu } 1 < r \leq 2 \text{ thì : } x^r(y+z) + y^r(z+x) + z^r(x+y) \geq 6$$

- 15*. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$.

$$\text{CMR : } \frac{1}{1+(n-1)x} + \frac{1}{1+(n-1)x_2} + \dots + \frac{1}{1+(n-1)x_n} \geq 1$$

16. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. CMR : $a^3 + b^3 + c^3 + 15 \geq 6\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

17. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Với $m \geq n-1$:

$$\text{CMR : } a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m + (m-1)n \geq m\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

18. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$. Với $k \in \mathbb{Z}^+, 2 \leq k \leq n+2, r = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{k-1} - 1$:

$$\text{CMR : } x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k - n \geq nr(1 - x_1 x_2 \dots x_n)$$

19. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = n$. Với $e_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e$

CMR : $x_1 + x_2 + \dots + x_n - n \leq e_{n-1}(x_1 x_2 \dots x_n - 1)$

20. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$. Với $k \in \mathbb{Z}^+, 3 \leq k, r = \frac{n^{k-1} - 1}{n-1}$:

CMR : $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k - n \geq r(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - n)$

21. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.

CMR : $x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n + n(n-1)x_1 x_2 \dots x_n \geq x_1 x_2 \dots x_n (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$

22. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

CMR : $(n-1)(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n) + n x_1 x_2 \dots x_n \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1})$

23. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

CMR : $(n-1)(x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_n^{n+1}) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n - x_1 x_2 \dots x_n)$

24. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.

CMR : $(x_1 + x_2 + \dots + x_n - n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} - n \right) + x_1 x_2 \dots x_n + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \geq 2$

25. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. CMR : $\left| \frac{1}{\sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} - n}} \right| < 1$

26. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$. CMR : $(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \leq n$

27. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $xy + yz + zx = 3$.

Nếu $p \geq \frac{\ln 9 - \ln 4}{\ln 3} \approx 0,738$ thì : $x^p + y^p + z^p \geq 3$

28. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa $x + y + z = 3$.

Nếu $p \geq \frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 3 - \ln 2} \approx 0,29$ thì : $x^p + y^p + z^p \geq xy + yz + zx$

29. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$.

CMR : $\frac{1}{n+1-x_2 x_3 \dots x_n} + \frac{1}{n+1-x_3 x_4 \dots x_n x_1} + \dots + \frac{1}{n+1-x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \leq 1$

30*. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. CMR : $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 1$

31. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a+b+c \geq 2$ và $ab+bc+ca \geq 1$
 Nếu $0 < r < 1$ thì : $a^r + b^r + c^r \geq 2$

32. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $(a+b+c)^3 = 32abc$. Tìm GTLN và GTNN của : $E = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a+b+c)^4}$.

33. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 (n \geq 3)$ thỏa $\sum x_i = 1$. Với $m \in \{3, 4, \dots, n\}$:

CMR : $1 + \frac{3m}{m-2} \sum x_1 x_2 x_3 \geq \frac{3m-1}{m-1} \sum x_1 x_2$

34. Cho $x, y, z, t \geq 0$ thỏa $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. CMR : $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + xyz + yzt + ztx + txy \leq 1$

Chapter 6: Arithmetic / Geometric Compensation Method

6.3 Applications

1. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa $a+b+c+d = 4$. CMR :

a) $\frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-dab} \leq 1$

b) $\frac{1}{4-abc} + \frac{1}{4-bcd} + \frac{1}{4-cda} + \frac{1}{4-dab} \leq \frac{15}{11}$

2. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 (3 \leq n \in \mathbb{Z})$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$. Với $1 < m < n, p > \left(\frac{n}{m}\right)^m$

Thì $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \frac{1}{p - x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}}$ đạt max tại $x_1 = x_2 = \dots = x_k = \frac{n}{k}$ và

$x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$. Ở đây $k \in \{m, m+1, \dots, n\}$.

3. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa $a+b+c+d = 1$. CMR :

a) $4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 15(abc + bcd + cda + dab) \geq 1$

b) $11(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 21(abc + bcd + cda + dab) \geq 2$

4. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 (n \geq 3)$. CMR :

a) $\sum x_i^3 + 3 \sum x_1 x_2 x_3 \geq \sum x_1 x_2 (x_1 + x_2)$

b) $\frac{n-1}{2} \sum x_i^3 + \frac{3}{n-2} \sum x_1 x_2 x_3 \geq \sum x_1 x_2 (x_1 + x_2)$

5. Cho $a, b, c, d \geq 0$

a) Nếu $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$ thì : $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + abc + bcd + cda + dab \geq 2$

b) Nếu $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3$ thì : $3(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 2(abc + bcd + cda + dab) \geq 11$

6. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa $a + b + c + d = 2$. CMR : $\frac{1}{1+3a^2} + \frac{1}{1+3b^2} + \frac{1}{1+3c^2} + \frac{1}{1+3d^2} \geq \frac{16}{7}$

7. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$. CMR : $\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \dots + \frac{1}{1+x_n^2} \geq n - \max_{1 \leq k \leq n} \frac{ks^2}{k^2 + s^2}$

8. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s > 0$.

$$\text{CMR : } (1+x_1^2)(1+x_2^2)\dots(1+x_n^2) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \left(1 + \frac{s^2}{k^2}\right)^k$$

9. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa $a + b + c + d = 1$. CMR : $\frac{(1+2a)(1+2b)(1+2c)(1+2d)}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)} \geq \frac{125}{8}$

10. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Với $m > -1$. CMR : $\prod_{i=1}^n \frac{1+mx_i}{1-x_i} \geq \min_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{k+m}{k-1}\right)^k$

11. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{2}{3}$. CMR : $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i x_j}{(1-x_i)(1-x_j)} \leq \frac{1}{4}$

12. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ và $n-1$ số trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR : } \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i x_j}{(1-x_i)(1-x_j)} \geq \frac{n}{2(n-1)}$$

13. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa $a + b + c + d = 4$. CMR : $(1+3a)(1+3b)(1+3c)(1+3d) \leq 125 + 131abcd$

14. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa $a + b + c + d = 4$.

$$\text{CMR : } (1+3a^2)(1+3b^2)(1+3c^2)(1+3d^2) \leq 255 + a^2 b^2 c^2 d^2$$

15. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = p \leq \frac{1}{n-1}$

$$\text{CMR : } \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1+p}$$

16*. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = p \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1$

$$\text{CMR : } \frac{1}{(1+a_1)^2} + \frac{1}{(1+a_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^2} \leq \frac{n}{(1+p)^2}$$

Chapter 7: Symmetric Inequalities With Three Variables Involving Fractions

$$E_1 = \frac{a(b+c)+pbc}{b^2+rbc+c^2} + \frac{b(c+a)+pca}{c^2+rca+a^2} + \frac{c(a+b)+pab}{a^2+rab+b^2}$$

$$E_2 = \frac{a^2+qbc}{b^2+rbc+c^2} + \frac{b^2+qca}{c^2+rca+a^2} + \frac{c^2+qab}{a^2+rab+b^2}$$

Ở đây : $a, b, c \geq 0, r > -2, p, q \in R$.

7.1 Inequalities Involving E_1

1. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+rca+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geq 2$$

2. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{ab-bc+ca}{b^2+c^2} + \frac{bc-ca+ab}{c^2+a^2} + \frac{ca-ab+bc}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}$$

3. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{ab-2bc+ca}{b^2-bc+c^2} + \frac{bc-2ca+ab}{c^2-ca+a^2} + \frac{ca-2ab+bc}{a^2-ab+b^2} \geq 0$$

4. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$

5. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 . Với $r > -2$

$$\text{CMR : } \sum \frac{ab+(r-1)bc+ca}{b^2+rbc+c^2} \geq \frac{3(r+1)}{r+2}$$

6. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \sum \frac{ab+4bc+ca}{b^2+c^2} \geq 4$$

7. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 . Với $r > -2$

$$\text{CMR : } \sum \frac{ab+(r+2)^2 bc+ca}{b^2+rbc+c^2} \geq r+4$$

8. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 . Với $r > -2, p, r \in R$

$$\text{Đặt : } E = \sum \frac{ab+pbc+ca}{b^2+rbc+c^2}$$

$$\text{a) CMR : } E(a, b, c) \geq \frac{3(p+2)}{r+2}, p \leq r-1$$

$$\text{b) CMR : } E(a, b, c) \geq \frac{P}{r+2} + 2, r-1 \leq p \leq (r+2)^2$$

$$\text{c) CMR : } E(a, b, c) \geq 2\sqrt{p} - r, p \geq (r+2)^2$$

7.3 Inequalities Involving E_2

1. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{2a^2 + bc}{b^2 + c^2} + \frac{2b^2 + ca}{c^2 + a^2} + \frac{2c^2 + ab}{a^2 + b^2} \geq \frac{9}{2}$$

2. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{a^2 + bc}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b^2 + ca}{c^2 + ca + a^2} + \frac{c^2 + ab}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{9}{2}$$

3. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{a) CMR : } \frac{a^2 + 2bc}{b+c} + \frac{b^2 + 2ca}{c+a} + \frac{c^2 + 2ab}{a+b} \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\text{b) CMR : } \frac{a^2 + 2bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2 + 2ca}{(c+a)^2} + \frac{c^2 + 2ab}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}$$

$$\text{c) CMR : } \frac{2a^2 + 5bc}{(b+c)^2} + \frac{2b^2 + 5ca}{(c+a)^2} + \frac{2c^2 + 5ab}{(a+b)^2} \geq \frac{21}{4}$$

4. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{a^2 - bc}{2b^2 - 3bc + 2c^2} + \frac{b^2 - ca}{2c^2 - 3ca + 2a^2} + \frac{c^2 - ab}{2a^2 - 3ab + 2b^2} \geq 0$$

5. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{a^2}{2b^2 - bc + 2c^2} + \frac{b^2}{2c^2 - ca + 2a^2} + \frac{c^2}{2a^2 - ab + 2b^2} \geq 1$$

6. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{2a^2 - bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{2b^2 - ca}{c^2 - ca + a^2} + \frac{2c^2 - ab}{a^2 - ab + b^2} \geq 3$$

7. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 . Với $r > -2$

$$\text{CMR : } \sum \frac{2a^2 + (2r+1)bc}{b^2 + rbc + c^2} \geq \frac{3(2r+3)}{r+2}$$

8. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{a^2 + 16bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 16ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 16ab}{a^2 + b^2} \geq 10$$

9. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 . Với $r > -2$

$$\text{CMR : } \sum \frac{a^2 + 4(r+2)^2 bc}{b^2 + rbc + c^2} \geq 4r + 10$$

10. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 . Với $r > -2, q, r \in \mathbb{R}$

$$\text{Đặt : } E = \sum \frac{a^2 + qbc}{b^2 + rbc + c^2}$$

$$\text{a) CMR : } E(a, b, c) \geq \frac{3(q+2)}{r+2}, q \leq \frac{2r+1}{2}$$

$$\text{b) CMR : } E(a, b, c) \geq \frac{q}{r+2} + 2, \frac{2r+1}{2} \leq q \leq 4(r+2)^2$$

$$\text{c) CMR : } E(a, b, c) \geq 4kr + 12k^2 - 2, q = 4k(r+2k)^2, k \geq 1$$

7.5 Inequalities Involving E_1 and E_2

1. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 . Với $r > -2, a \geq 0, a(1-r) + b = \frac{2r+1}{2}$

$$\text{CMR : } \sum \frac{a^2 + aa(b+c) + bbc}{b^2 + rbc + c^2} \geq \frac{3(1+2a+b)}{r+2}$$

2. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{Với } r > -2, a \geq 0, \frac{2r+1}{2} + a(1-r) \leq b \leq 4(r+2)^2 + a(r-1)$$

$$\text{CMR : } \sum \frac{a^2 + aa(b+c) + bbc}{b^2 + rbc + c^2} \geq 2 + 2a + \frac{b}{r+2}$$

7.7 Other Related Inequalities

1. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{a^2(b+c)^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2(c+a)^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2(a+b)^2}{a^2+b^2} \geq 2(ab+bc+ca)$$

2. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $ab+bc+ca=1$. CMR : $\frac{(1+ab)^2}{a^2+b^2+4ab} + \frac{(1+bc)^2}{b^2+c^2+4bc} + \frac{(1+ca)^2}{c^2+a^2+4ca} \geq \frac{8}{3}$

3. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $ab+bc+ca=1$. Với : $r \geq 0$. CMR : $\sum \frac{(1-bc)^2 + rbc}{b^2 + rbc + c^2} \geq \frac{3r+4}{r+2}$

4. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{\sqrt{bc+4a(b+c)}}{b+c} + \frac{\sqrt{ca+4b(c+a)}}{c+a} + \frac{\sqrt{ab+4c(a+b)}}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

5. Cho $a, b, c > 0$. CMR : $\frac{\sqrt{a^2+bc}}{b^2+c^2} + \frac{\sqrt{b^2+ca}}{c^2+a^2} + \frac{\sqrt{c^2+ab}}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

6. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR : } \sqrt{\frac{2a(b+c)}{(2b+c)(b+2c)}} + \sqrt{\frac{2b(c+a)}{(2c+a)(c+2a)}} + \sqrt{\frac{2c(a+b)}{(2a+b)(a+2b)}} \geq 2$$

7. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

a) CMR : $\frac{a^3+3abc}{b+c} + \frac{b^3+3abc}{c+a} + \frac{c^3+3abc}{a+b} \geq 2(ab+bc+ca)$

b) CMR : $\frac{a^3+3abc}{(b+c)^3} + \frac{b^3+3abc}{(c+a)^3} + \frac{c^3+3abc}{(a+b)^3} \geq \frac{3}{2}$

8. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

a) CMR : $\frac{a^2+2bc}{b+c} + \frac{b^2+2ca}{c+a} + \frac{c^2+2ab}{a+b} \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$

b) CMR : $\frac{a^3+2abc}{b+c} + \frac{b^3+2abc}{c+a} + \frac{c^3+2abc}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2$

9. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR : } \frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b^2+3ca}}{c+a} + \frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b} \geq a+b+c$$

10. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0. Với $r \geq 3+\sqrt{7}$

$$\text{CMR : } \frac{1}{ra^2+bc} + \frac{1}{rb^2+ca} + \frac{1}{rc^2+ab} \geq \frac{9}{(r+1)(ab+bc+ca)}$$

11. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0. Với $\frac{2}{3} \leq r \leq 3+\sqrt{7}$

$$\text{CMR : } \frac{1}{ra^2+bc} + \frac{1}{rb^2+ca} + \frac{1}{rc^2+ab} \geq \frac{r+2}{r(ab+bc+ca)}$$

12. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR : } \frac{1}{2a^2+bc} + \frac{1}{2b^2+ca} + \frac{1}{2c^2+ab} \geq \frac{6}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

13. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR : } \frac{1}{22a^2+5bc} + \frac{1}{22b^2+5ca} + \frac{1}{22c^2+5ab} \geq \frac{1}{(a+b+c)^2}$$

14. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR : } \frac{1}{2a^2+bc} + \frac{1}{2b^2+ca} + \frac{1}{2c^2+ab} \geq \frac{8}{(a+b+c)^2}$$

15. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{12}{(a+b+c)^2}$$

16. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a+b+c=2$. CMR : $(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \leq 1$

17. Cho $a, b, c \geq 0$

$$\text{a) CMR : } \frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2} \geq 0$$

$$\text{b) CMR : } \frac{a^2-bc}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}} + \frac{b^2-ca}{\sqrt{2b^2+c^2+a^2}} + \frac{c^2-ab}{\sqrt{2c^2+a^2+b^2}} \geq 0$$

18. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác . CMR : $\frac{a^2-bc}{3a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2-ca}{3b^2+c^2+a^2} + \frac{c^2-ab}{3c^2+a^2+b^2} \leq 0$

Chapter 8: Final Problem Set

8.1 Applications

1. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc=1$. CMR : $\sqrt{\frac{a+b}{b+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{c+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+1}} \geq 3$

2. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc=1$. CMR : $\sqrt{\frac{a}{b+3}} + \sqrt{\frac{b}{c+3}} + \sqrt{\frac{c}{a+3}} \geq \frac{3}{2}$

3. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a+b+c=1$. CMR : $\frac{5-3bc}{1+a} + \frac{5-3ca}{1+b} + \frac{5-3ab}{1+c} \geq ab+bc+ca$

4. Cho $a, b, c, d \geq 0$ thỏa $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. CMR : $(abc)^3 + (bcd)^3 + (cda)^3 + (dab)^3 \leq 4$

5. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \sqrt{\frac{a}{4a+5b}} + \sqrt{\frac{b}{4b+5c}} + \sqrt{\frac{c}{4c+5a}} \leq 1$$

6. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$.

$$\text{a) CMR : } \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{(a_1^2+1)(a_2^2+1)\dots(a_n^2+1)} \leq \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-2}}$$

$$\text{b) CMR : } \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{(a_1^2+1)(a_2^2+1)\dots(a_n^2+1)} \leq \frac{(2n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{2^n n^{n-1}}$$

7. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ và $b_1, b_2, \dots, b_n \in R$. CMR : $\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)} \geq \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)$
8. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ thỏa $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Với $k, n \in \mathbb{Z}^+, k < n$
 CMR : $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq n(a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+2} + \dots + a_n a_k)$
 Trong trường hợp : a) $n = 2k$
 b) $n = 4k$
9. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa $abcd = 1$.
 CMR : $\frac{1}{1+a+a^2+a^3} + \frac{1}{1+b+b^2+b^3} + \frac{1}{1+c+c^2+c^3} + \frac{1}{1+d+d^2+d^3} \geq 1$
10. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $9(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1) \geq 8(a^2b^2c^2+abc+1)^2$
11. Cho $a, b, c, d \geq 0$. CMR : $\frac{(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)} \geq \frac{1+abcd}{2}$
12. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.
 CMR : $\frac{1}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{b^2+bc+c^2} + \frac{1}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2}$
13. Cho $a, b, c > 0$. Đặt $x = a + \frac{1}{b} - 1, y = b + \frac{1}{c} - 1, z = c + \frac{1}{a} - 1$. CMR : $xy + yz + zx \geq 3$
14. Cho $a, b, c > 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0. Với $n \in \mathbb{Z}^+$:
 CMR : $\frac{2a^n - b^n - c^n}{b^2 - bc + c^2} + \frac{2b^n - c^n - a^n}{c^2 - ca + a^2} + \frac{2c^n - a^n - b^n}{a^2 - ab + b^2} \geq 0$
15. Cho $0 \leq a < b, a_1, a_2, \dots, a_n \in [a, b]$. CMR : $a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq (n-1)(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$
16. Cho $a, b, c, x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z = a + b + c$. CMR : $ax^2 + by^2 + cz^2 + xyz \geq 4abc$
17. Cho $a, b, c, x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z = a + b + c$. CMR : $\frac{x(3x+a)}{bc} + \frac{y(3y+a)}{ca} + \frac{z(3z+a)}{ab} \geq 12$
18. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. CMR : $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{9}{a+b+c}$
19. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. CMR : $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{4n}{n + a_1 + a_2 + \dots + a_n} \geq n + 2$
20. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. CMR : $a_1 + a_2 + \dots + a_n - n + 1 \geq \sqrt[n-1]{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} - n + 1}$

21. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $ab + bc + ca = 3$. Với $r > 1$. CMR : $a^r(b+c) + b^r(c+a) + c^r(a+b) \geq 6$

22. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc \geq 1$.

a) CMR : $a^{\frac{a}{b}} b^{\frac{b}{c}} c^{\frac{c}{a}} \geq 1$

b) CMR : $a^{\frac{a}{b}} b^{\frac{b}{c}} c^c \geq 1$

23. Cho $a, b, c, d \geq 0$. CMR : $4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 15(abc + bcd + cda + dab) \geq (a + b + c + d)^2$

24. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $(a+b-c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = 4$. CMR : $(a^4 + b^4 - c^4)\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} - \frac{1}{c^4}\right) \geq 2304$

25. Cho $a, b, c > 0$. CMR : $\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab} > \frac{2}{ab + bc + ca}$

26. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR : } \frac{a(b+c)}{a^2 + 2bc} + \frac{b(c+a)}{b^2 + 2ca} + \frac{c(a+b)}{c^2 + 2ab} \geq 1 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$$

27. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR : } \frac{(b+c)^2}{a^2 + bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2 + ca} + \frac{(a+b)^2}{c^2 + ab} \geq 6$$

28. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR : } \frac{b+c}{2a^2 + bc} + \frac{c+a}{2b^2 + ca} + \frac{a+b}{2c^2 + ab} \geq \frac{6}{a+b+c}$$

29. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $a\sqrt{a^2 + 3bc} + b\sqrt{b^2 + 3ca} + c\sqrt{c^2 + 3ab} \geq 2(ab + bc + ca)$

30. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $\frac{a^2 - bc}{\sqrt{a^2 + bc}} + \frac{b^2 - ca}{\sqrt{b^2 + ca}} + \frac{c^2 - ab}{\sqrt{c^2 + ab}} \geq 0$

31. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $(a^2 - bc)\sqrt{a^2 + 4bc} + (b^2 - ca)\sqrt{b^2 + 4ca} + (c^2 - ab)\sqrt{c^2 + 4ab} \geq 0$

32. Cho $a, b, c > 0$. CMR : $\frac{a^2 - bc}{\sqrt{8a^2 + (b+c)^2}} + \frac{b^2 - ca}{\sqrt{8b^2 + (c+a)^2}} + \frac{c^2 - ab}{\sqrt{8c^2 + (a+b)^2}} \geq 0$

33. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab} \leq \frac{3}{2}(a + b + c)$

34. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. CMR : $21 + 18abc \geq 13(ab + bc + ca)$

35. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. CMR : $\frac{1}{5 - 2ab} + \frac{1}{5 - 2bc} + \frac{1}{5 - 2ca} \leq 1$

36. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. CMR : $(2-ab)(2-bc)(2-ca) \geq 1$

37. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a + b + c = 2$. CMR : $\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leq 1$

38. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{a^3+3abc}{(b+c)^2} + \frac{b^3+3abc}{(c+a)^2} + \frac{c^3+3abc}{(a+b)^2} \geq a+b+c$$

39. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^4 + b^4 + c^4 = 3$.

a) CMR : $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3$

b) CMR : $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

40. Cho $a, b, c > 0$. CMR : $\frac{a^3-b^3}{a+b} + \frac{b^3-c^3}{b+c} + \frac{c^3-a^3}{c+a} \leq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{8}$

41. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}$$

42. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0 .

$$\text{CMR : } \frac{1}{5(a^2+b^2)-ab} + \frac{1}{5(b^2+c^2)-bc} + \frac{1}{5(c^2+a^2)-ca} \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

43. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. CMR : $\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leq \frac{3}{4}$

44. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. CMR : $\frac{1}{3+a^2-2bc} + \frac{1}{3+b^2-2ca} + \frac{1}{3+c^2-2ab} \leq \frac{9}{8}$

45. Cho $a, b, c > 0$. CMR : $\frac{4a^2-b^2-c^2}{a(b+c)} + \frac{4b^2-c^2-a^2}{b(c+a)} + \frac{4c^2-a^2-b^2}{c(a+b)} \leq 3$

46. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. CMR : $a^2 + b^2 + c^2 + 6 \geq \frac{3}{2} \left(a+b+c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

47. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thỏa $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$. CMR : $a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} - n + 3 \right) \leq 3$

48. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác . Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ thì $ab + bc + ca \geq 1 + 2abc$

49. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác . Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ thì $a + b + c \geq 2 + abc$

50. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác không cân .

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left| \frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} \right| > 5 \\ \text{b)} & \left| \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \frac{b^2+c^2}{b^2-c^2} + \frac{c^2+a^2}{c^2-a^2} \right| > 3 \end{aligned}$$

51. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác . CMR : $a^2 \left(\frac{b}{c} - 1 \right) + b^2 \left(\frac{c}{a} - 1 \right) + c^2 \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \geq 0$

52. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác . CMR : $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 6 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$

53. Cho $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \right]$. CMR : $\frac{a_1-a_2}{a_2+a_3} + \frac{a_2-a_3}{a_3+a_4} + \dots + \frac{a_6-a_1}{a_1+a_2} \geq 0$

54. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. CMR : $\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geq 0$

55. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z \geq 3$. CMR : $\frac{1}{x^3 + y + z} + \frac{1}{y^3 + z + x} + \frac{1}{z^3 + x + y} \leq 1$

56. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $x_1 x_2 \dots x_n \geq 1$. Với $a > 1$. CMR : $\sum \frac{x_1^a}{x_1^a + x_2 + \dots + x_n} \geq 1$

57. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $x_1 x_2 \dots x_n \geq 1$. Với $n \geq 3, \frac{-2}{n-2} \leq a < 1$. CMR : $\sum \frac{x_1^a}{x_1^a + x_2 + \dots + x_n} \leq 1$

58. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $x_1 x_2 \dots x_n \geq 1$. Với $a > 1$. CMR : $\sum \frac{x_1}{x_1^a + x_2 + \dots + x_n} \leq 1$

59. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ thỏa $x_1 x_2 \dots x_n \geq 1$. Với $-1 - \frac{2}{n-2} \leq a < 1$. CMR : $\sum \frac{x_1}{x_1^a + x_2 + \dots + x_n} \geq 1$

60. Cho $0 < x_1, x_2, \dots, x_n \leq \frac{pn-p-1}{p(n-p-1)}$ thỏa $x_1 x_2 \dots x_n = 1$, Với $3 \leq n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{R}, 1 < p < n-1$.

$$\text{CMR : } \frac{1}{1+px_1} + \frac{1}{1+px_2} + \dots + \frac{1}{1+px_n} \geq \frac{n}{1+p}$$

61*. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. CMR : $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 1$

62. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. CMR : $a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geq 10(a + b + c)$

63. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $ab + bc + ca = 3$. CMR : $\frac{a(b^2 + c^2)}{a^2 + bc} + \frac{b(c^2 + a^2)}{b^2 + ca} + \frac{c(a^2 + b^2)}{c^2 + ab} \geq 3$

64. Cho $a, b, c > 0$. CMR : $a + b + c + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}$

65. Cho $a, b, c > 0$. CMR : $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$

66. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm GTNN của biểu thức $E(a, b, c) = \frac{ax}{y+z} + \frac{by}{z+x} + \frac{cz}{x+y}$, với mọi $x, y, z > 0$.

67. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a+b+c=3$. CMR : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$

68. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a+b+c=3$. CMR : $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \leq 12$

69. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a+b+c=1$. CMR : $\sqrt{a+b^2} + \sqrt{b+c^2} + \sqrt{c+a^2} \geq 2$

70. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq \sum bc \sqrt{2(b^2 + c^2)}$

71. Cho $a, b, c \geq 0$. CMR : $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq \frac{15}{16}(a+b+c)^2$

72. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa $abcd=1$. CMR : $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geq (a+b+c+d)^2$

73. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. CMR : $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq (n-1)\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$

74. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Với $k \in \mathbb{R}$. CMR :

$$(n-1)(x_1^{n+k} + x_2^{n+k} + \dots + x_n^{n+k}) + x_1 x_2 \dots x_n (x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \dots + x_n^{n+k-1})$$

75. Cho $a, b, c \geq 0$ và 2 trong chúng không đồng thời bằng 0.

$$\text{CMR : } \frac{a^4}{a^3 + b^3} + \frac{b^4}{b^3 + c^3} + \frac{c^4}{c^3 + a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}$$