

PHƯƠNG TRÌNH HÀM

VÕ QUANG MÃN

Tháng 12 năm 2011



1 Tóm tắt lý thuyết

2 Bài tập

■ **Bài tập 2.1.** Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho tập $\{\frac{f(x)}{x} : x \neq 0\}$ là hữu hạn và với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(x-1-f(x)) = f(x) - x - 1$

Lời giải.

■ **Bài tập 2.2.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, $f(f(y + f(x))) = f(x + y) + f(x) + y$

Lời giải.

■ **Bài tập 2.3.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho $f(1 + xf(y)) = yf(x + y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Lời giải.

■ **Bài tập 2.4.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(y) + f(x + f(y)) = y + f(f(x) + f(f(y)))$, với mọi x, y .

Lời giải.

■Bài tập 2.5. Tìm tất cả những đa thức khác hằng, thỏa mãn với mọi x đẳng thức sau đúng

$$f(\sin x + \cos x) = f(\sin x) + f(\cos x)$$

Lời giải.

■Bài tập 2.6. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(x + |f(y)|) = x + f(y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

■Bài tập 2.7. Xác định tất cả các cặp hàm $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ sao cho $f(x + g(y)) = g(x) + 2y + f(y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$.

Lời giải.

■Bài tập 2.8. Cho hai số thực dương a, b . Giả sử hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn phương trình sau

$$f(f(x)) + af(x) = b(a + b)x.$$

Chứng minh rằng tồn tại nghiệm duy nhất cho phương trình trên.

Lời giải.

■Bài tập 2.9. Tìm tất cả các hàm khác hằng $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn các điều sau:

1. $f(x - y) + f(y - z) + f(z - x) = 3(f(x) + f(y) + f(z))f(x + y + z)$
2. $\sum_{k=1}^{15} f(k) \leq 1995$

Lời giải.

■Bài tập 2.10. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + yf(x)) + f(xf(y) - y) = f(x) - f(y) + 2xy$

Lời giải.

■Bài tập 2.11. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x)^2 + 2yf(x) + f(y) = f(y + f(x))$

Lời giải.

■Bài tập 2.12. Chứng minh rằng $f(x + y + xy) = f(x) + f(y) + f(xy)$ là tương đương $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Lời giải.

■Bài tập 2.13. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.14.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.15.** Tìm tất cả $a \in \mathbb{R}$ sao cho tồn tại hàm không hằng $f : (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $a + f(x + y - xy) + f(x)f(y) \leq f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in (0; 1]$

Lời giải.

■**Bài tập 2.16.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ sao cho

1. Với mọi $x_1; x_2; \dots; x_{2010} \in \mathbb{Q}$, $f(x_1 + x_2 + \dots + x_{2010}) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_{2010})$
2. $\overline{f(2010)}f(x) = f(2010)\overline{f(x)}$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.17.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}}(2xy - f(y))$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.18.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.19.** Tìm tất cả hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + f(y + f(z))) = f(x) + f(f(y)) + f(f(f(z)))$

Lời giải.

■**Bài tập 2.20.** Cho a là số thực và $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$ và $f(x + y) = f(x)f(a - y) + f(y)f(a - x)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh f là hàm hằng.

Lời giải.

■**Bài tập 2.21.** Tìm tất cả hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x)^3 = -\frac{x}{12}(x^2 + 7xf(x) + 16f(x)^2)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.22.** Cho hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

1. nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$
2. $f(\frac{2xy}{x+y}) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng $f(x) < 0$ đối với giá trị nào đó của x .

Lời giải.

■Bài tập 2.23. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$

Lời giải.

■Bài tập 2.24. Tìm tất cả hàm song ánh $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n) + n}{2}$$

Lời giải.

■Bài tập 2.25. Cho số tự nhiên $k > 1$, tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f[x^k + f(y)] = y + [f(x)]^k$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Lời giải.

■Bài tập 2.26. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$, $(x + y)(f(x) - f(y)) = (x - y)(f(x) + f(y))$

Lời giải.

■Bài tập 2.27. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{Z}$, $f(x - y + f(y)) = f(x) + f(y)$.

Lời giải.

■Bài tập 2.28. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$, $f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$.

Lời giải.

■Bài tập 2.29. Tìm tất cả hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) + f(y) + f(z) + f(x + y + z) = f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) + f(0)$

Lời giải.

■Bài tập 2.30. Tìm tất cả hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + y) + f(xy) + 1 = f(x) + f(y) + f(xy + 1)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

■Bài tập 2.31. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ sao cho

$$f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x + y)}$$

Lời giải.

■Bài tập 2.32. Tìm tất cả hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + f(y)) = y + f(x + 1)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.33.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(m + n) + f(mn - 1) = f(m)f(n) + 2$

Lời giải.

■**Bài tập 2.34.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho $f(x - y) = f(x + y)f(y)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.35.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy) - 2$

Lời giải.

■**Bài tập 2.36.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và hàm $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x^3 + 2y) + f(x + y) = g(x + 2y)$$

Lời giải.

■**Bài tập 2.37.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.38.** Tìm tất cả hàm liên tục, tăng nghiêm ngặt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

1. $f(0) = 0$,
2. $f(1) = 1$,
3. $[f(x + y)] = [f(x)] + [f(y)]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $[x + y] = [x] + [y]$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.39.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho $f(m + f(n)) = n + f(m + k)$, ở đây k là số tự nhiên cố định cho trước.

Lời giải.

■**Bài tập 2.40.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x)f(yf(x) - 1) = x^2f(y) - f(x)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.41.** Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + y) > y(f(x)^2)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$

Lời giải.

■**Bài tập 2.42.** Cho hàm $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ sao cho

1. $f(ab) = f(a)f(b)$;

2. $f(a) < f(b)$ if $a < b$;

3. $f(3) \geq 7$.

Tìm giá trị lớn nhất có thể của $f(3)$.

Lời giải.

■Bài tập 2.43. *Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho*

$$f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) = f(3abc)$$

Lời giải.

■Bài tập 2.44. *Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho*

$$f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) = af(a^2) + bf(b^2) + cf(c^2)$$

Lời giải.

■Bài tập 2.45. *Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$, và $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$; với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.*

Lời giải.

■Bài tập 2.46. *Tìm tất cả hàm đơn điệu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(4x) - f(3x) = 2x$; với mọi $x \in \mathbb{R}$.*

Lời giải.

■Bài tập 2.47. *Cho $n \in \mathbb{N}^*$, sao cho $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}^*$ và $A = \{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{N}^*; a^2 - nb^2 = 1\}$. Chứng minh rằng hàm $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho $f(x) = [x]$ là đơn ánh nhưng không toàn ánh*

Lời giải.

$f(x) \neq 2$ suy ra f không toàn ánh.

■Bài tập 2.48. *Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho $f(x^2 + y^2) = f(xy)$.*

Lời giải.

■Bài tập 2.49. *Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(-1) = f(1)$ và $f(x) + f(y) = f(x + 2xy) + f(y - 2xy)$*

Lời giải.

■Bài tập 2.50. *Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, và $f(x) \leq e^x - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.*

Lời giải.

■Bài tập 2.51. *Tìm tất cả hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x+y) = f(x) + f(y)$*

Lời giải.

■Bài tập 2.52. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)y+x) = xf(y)+f(x)$, và phương trình $f(t) = -t$ có nghiệm duy nhất

Lời giải.

■Bài tập 2.53. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x+f(y)) + f(f(y)) = f(f(x)) + 2f(y)$, $f(x+f(x)) = 2f(x)$ và $f(f(x)) = f(x)$ trong khi $f(0) = 0$

Lời giải.

■Bài tập 2.54. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho $f(f(x)x) = 2x$, với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Lời giải.

■Bài tập 2.55. (Romania District Olympiad 2011 - Grade XI). Tìm tất cả hàm $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$|x-y|^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x-y|$$

với mọi $x, y \in [0; 1]$.

Lời giải.

■Bài tập 2.56. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x^2 - f^2(y)) = xf(x) - y^2$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

■Bài tập 2.57. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ sao cho $f(2x+3y) = 2f(x) + 3f(y) + 4$, với mọi $x, y \geq 1$.

Lời giải.

■Bài tập 2.58. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(m+f(n)) = f(m+n) + 2n+1$.

Lời giải.

■Bài tập 2.59. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(0) = 2$ và $f(x+f(x+2y)) = f(2x) + f(2y)$

Lời giải.

■Bài tập 2.60. Với mọi số nguyên k có tồn tại hay không một hàm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(1995) = 996$ và $f(xy) = f(x) + f(y) + kf(\gcd(x; y))$, với mọi $x; y \in \mathbb{N}$

Lời giải.

■Bài tập 2.61. Tìm tất cả hàm $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho g là song ánh và $f(g(x)+y) = g(f(y)+x)$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.62.** (Belarus 1995). Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.63.** Tìm tất cả các số $d \in [0; 1]$ sao cho nếu f là hàm liên tục tùy ý trên miền $[0; 1]$ thỏa mãn $f(0) = f(1)$ thì tồn tại số $x_0 \in [0; 1-d]$ sao cho $f(x_0) = f(x_0 + d)$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.64.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + f(xy)) = f(x + f(x)f(y)) = f(x) + xf(y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.65.** Cho $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ sao cho $f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n) = e$; với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0; 1]$ với $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Chứng minh rằng $f(x) = e^x$; $x \in [0; 1]$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.66.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(xy)f(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.67.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x) + f(y) + f(z)) = f(f(x) - f(y)) + f(2xy + f(z)) + 2f(xz - yz)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.68.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ sao cho $f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = \frac{1}{y}f(f(x))$ và f là hàm đơn điệu nghiêm ngặt trên $(0; +\infty)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.69.** Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho $x^2f(f(x) + f(y)) = (x + y)f(yf(x))$

Lời giải.

■**Bài tập 2.70.** Cho hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ bị chặn trên $[0; 1]$ sao cho

$$f(x)f(y) \leq x^2f\left(\frac{y}{2}\right) + y^2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Chứng minh rằng $f(x) \leq \frac{x^2}{2}$

Lời giải.

■**Bài tập 2.71.** Tìm tất cả các hàm song ánh tăng chặt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$

Lời giải.

■**Bài tập 2.72.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

1. $f(0) = 0$

2. $f\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}\right) = \frac{f(x)^2+f(y)^2}{2xy}$, với mọi $x, y \neq 0$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.73.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.74.** Tìm tất cả những $k \in \mathbb{N}$ sao cho tồn tại chính xác k hàm $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ sao cho $f(x+y) = kf(x)f(y) + f(x) + f(y)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.75.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x+y^2+z) = f(f(x)) + yf(x) + f(z)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.76.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x^2 - y^2) = x^2 - f(y^2)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.77.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ sao cho $xf(yz) + yf(z) + z = f(f(x)yz + f(y)z + f(z))$

Lời giải.

■**Bài tập 2.78.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x+y+f(y)) = f(f(x)) + 2y$

Lời giải.

■**Bài tập 2.79.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$x^2f(x) + y^2f(y) - (x+y)f(xy) = (x-y)^2f(x+y)$$

Lời giải.

■**Bài tập 2.80.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$xf(y) + yf(x) = (xf(f(x)) + yf(f(y)))f(xy)$$

và hàm f là hàm tăng (không nhất thiết tăng chặt).

Lời giải.

■Bài tập 2.81. Tìm tất cả các cặp hàm $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho f là hàm tăng chặt và $f(xy) = g(y)f(x) + f(y)$

Lời giải.

■Bài tập 2.82. Tìm tất cả các hàm $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(h(g(x) + y)) + g(z + f(y)) = h(y) + g(y + f(z)) + x$

Lời giải.

■Bài tập 2.83. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sao cho $f(x)f(yf(x)) = f(x + y)$

Lời giải.

■Bài tập 2.84. Tìm tất cả các hàm đơn ánh $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho $f(C_n^m) = C_{f(n)}^{f(m)}$, với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*, n \geq m$.

Lời giải.

■Bài tập 2.85. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x^5 - y^5) = x^2 f(x^3) - y^2 f(y^3)$

Lời giải.

■Bài tập 2.86. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(xf(y)) = yf(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Lời giải.

■Bài tập 2.87. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$

Lời giải.

■Bài tập 2.88. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y)$

Lời giải.

■Bài tập 2.89. Chỉ ra rằng với mọi số nguyên $a, b > 1$, tồn tại hàm $f : \mathbb{Z}_+^* \rightarrow \mathbb{Z}_+^*$ sao cho $f(af(n)) = bn$

Lời giải.

■Bài tập 2.90. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ sao cho $f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}$

Lời giải.

■ **Bài tập 2.91.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$x(f(x+1) - f(x)) = f(x);$$

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|;$$

Lời giải.

■ **Bài tập 2.92.** Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(\sqrt{2x}) = 2f(x), f(x+1) = f(x) + 2x + 1$

Lời giải.

■ **Bài tập 2.93.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(2x + f(y)) = f(2x) + xf(2y) + f(f(y))$

Lời giải.

■ **Bài tập 2.94.** Cho hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $|f(x-y)| = |f(x) - f(y)|$. Có thể kết luận rằng $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Và chỉ câu trả lời của bạn?

Lời giải.

■ **Bài tập 2.95.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$1. f(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$2. f(f(xf(y)) + x) = yf(x) + x, \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Lời giải.

■ **Bài tập 2.96.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x + f(y)) = f(x) + \frac{1}{8}xf(4y) + f(f(y))$$

Lời giải.

■ **Bài tập 2.97.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$

Lời giải.

■ **Bài tập 2.98.** Cho hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm giảm chặt và liên tục sao cho $f(x+y) + f(f(x) + f(y)) = f(f(x + f(y)) + f(y + f(x)))$. Chứng minh rằng $f(f(x)) = x$

Lời giải.

■ **Bài tập 2.99.** Có tồn tại bất kỳ tập nghiệm đối xứng nào của hai hàm $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(g(x)) = g(f(x)) = 0$

Lời giải.

■Bài tập 2.100. Tìm tất cả các giá trị tham số thực α sao cho chỉ tồn tại một hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^2 + y + f(y)) = (f(x))^2 + \alpha y$.

Lời giải.

■Bài tập 2.101. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + y) + xy = f(x)f(y)$

Lời giải.

■Bài tập 2.102. Cho a, b là những số thực, $b < 0$. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)) = a + bx$. Chứng minh f có vô hạn những điểm không liên tục.

Lời giải.

■Bài tập 2.103. Tìm tất cả các hàm $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(g(x)) = 2x^2 + 1$ và $g(f(x)) = (2x + 1)^2$

Lời giải.

■Bài tập 2.104. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)) = 1 + x$.

Lời giải.

■Bài tập 2.105. Cho số thực A và số nguyên n với $2 \leq n \leq 19$, tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực sao cho $P(P(P(x))) = Ax^n + 19x + 99$

Lời giải.

■Bài tập 2.106. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$

Lời giải.

■Bài tập 2.107. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + f(y + z)) + f(f(x + y) + z) = 2y$.

Lời giải.

■Bài tập 2.108. Tập tất cả các nghiệm của phương trình $f(xy) = f(x)f(y)$ là

1. $f(x) = 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
3. $f(0) = 0$ và $f(x) = e^{h(\ln|x|)}$, ở đây $h(x)$ là nghiệm của phương trình Cauchy $h(x + y) = h(x) + h(y)$.
4. $f(0) = 0$ và $f(x) = \text{sign}(x)e^{h(\ln|x|)}$, ở đây $h(x)$ là nghiệm của phương trình Cauchy $h(x + y) = h(x) + h(y)$.

Nếu ta biết nghiệm là liên tục thì

1. $f(x) = 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = |x|^a$ ở đây a là số thực dương bất kỳ.
4. $f(x) = \text{sign}(x)|x|^a$ ở đây a là số thực dương bất kỳ.

Lời giải.

■Bài tập 2.109. Phương trình này $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$ có nghiệm liên tục hay không? Với hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Lời giải.

■Bài tập 2.110. Tìm tất cả những đa thức với bậc nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất sau:

1. hệ số cao nhất là 200
2. hệ số của mũ bé nhất là 2
3. tổng tất cả các hệ số là 4
4. $P(1) = 0$; $P(2) = 6$; $P(3) = 8$.

Lời giải.

■Bài tập 2.111. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(xy)) = f(x)f(y) + f(x) - f(y) - xy$

Lời giải.

■Bài tập 2.112. Tìm tất cả các đa thức nếu có $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ sao cho $|f(x)| - |g(x)| + h(x) = -1$ nếu $x < -1$, $|f(x)| - |g(x)| + h(x) = 3x + 2$ nếu $-1 \leq x \leq 0$, $|f(x)| - |g(x)| + h(x) = -2x + 2$ nếu $x > 0$.

Lời giải.

■Bài tập 2.113. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ sao cho $f(\frac{x+y}{3}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$, khi $x, y, \frac{x+y}{3} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

■Bài tập 2.114. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$.

Lời giải.

■Bài tập 2.115. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.116.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ sao cho $P(x)$ chia hết cho (x^2+1) và $P(x) + 1$ chia hết cho $x^3 + x^2 + 1$

Lời giải.

■**Bài tập 2.117.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + f(y)) = 2f(xf(y))$

Lời giải.

■**Bài tập 2.118.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ sao cho $f(f^2(x)y) = x^3 f(xy)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.119.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + f(y)) = f(x + xy) + yf(1 - x)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.120.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $[f(x)f(y)]^2 = f(x + y)f(x - y)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.121.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$ sao cho $f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$

Lời giải.

■**Bài tập 2.122.** Cho hai hàm $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + g(y)) = 3x + y + 12$. Tính giá trị của $g(2004 + f(2004))$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.123.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + f(y)) = f(y^2 + 3) + 2xf(y) + f(x) - 3$

Lời giải.

■**Bài tập 2.124.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(1x) + f(1x) = x$, với mọi $x \neq 0; 1$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.125.** Tìm tất cả các cặp hàm $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(g(x) + y) = g(f(y) + x)$, và $g(x)$ là đơn ánh.

Lời giải.

■**Bài tập 2.126.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(f(x) + y) = f(x^2 - y^2) + 4f(x)y$

Lời giải.

■**Bài tập 2.127.** Tìm tất cả các hàm surjective $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sao cho $f(n) \geq n + (-1)^n$

Lời giải.

■**Bài tập 2.128.**

Lời giải.

■**Bài tập 2.129.** Tìm tất cả các hàm đơn điệu $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x+y) - f(x) - f(y) = f(xy+1) - f(xy) - f(1)$ và $f(3) + 3f(1) = 3f(2) + f(0)$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.130.** Tìm tất cả các đa thức hệ số thực sao cho $p(x)q(x+1) - p(x+1)q(x) = 1$

Lời giải.

■**Bài tập 2.131.** Cho hàm $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, ở đây a, b, c, d là những số thực khác 0 và thỏa mãn $f(19) = 19, f(97) = 97$ và $f(f(x)) = x$, với mọi $x \neq -\frac{c}{d}$. Tìm miền giá trị của $f(x)$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.132.** Cho E là tập tất cả các song ánh từ \mathbb{R} vào \mathbb{R} sao cho $f(t) + f^{-1}(t) = 2t$. Tìm tất cả các phần tử của E mà là ánh xạ đơn điệu.

Lời giải.

■**Bài tập 2.133.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}, xy \neq 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

Lời giải.

■**Bài tập 2.134.** $\{, \}$ đặt

Lời giải.

■**Bài tập 2.135.**

Lời giải.

■**Bài tập 2.136.**

Lời giải.

■**Bài tập 2.137.**

Lời giải.

■**Bài tập 2.138.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.139.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.140.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.141.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.142.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.143.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.144.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.145.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.146.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.147.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.148.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.149.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.150.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.151.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.152.**

Lời giải.

■ Bài tập 2.153.

Lời giải.

■ Bài tập 2.154.

Lời giải.

■ Bài tập 2.155.

Lời giải.

■ Bài tập 2.156.

Lời giải.

■ Bài tập 2.157.

Lời giải.

■ Bài tập 2.158.

Lời giải.

■ Bài tập 2.159.

Lời giải.

■ Bài tập 2.160.

Lời giải.

■ Bài tập 2.161.

Lời giải.

■ Bài tập 2.162.

Lời giải.

■ Bài tập 2.163.

Lời giải.

■ Bài tập 2.164.

Lời giải.

■ Bài tập 2.165.

Lời giải.

■ Bài tập 2.166.

Lời giải.

■ **Bài tập 2.167.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.168.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.169.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.170.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.171.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.172.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.173.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.174.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.175.**

Lời giải.

■ **Bài tập 2.176.**

Lời giải.