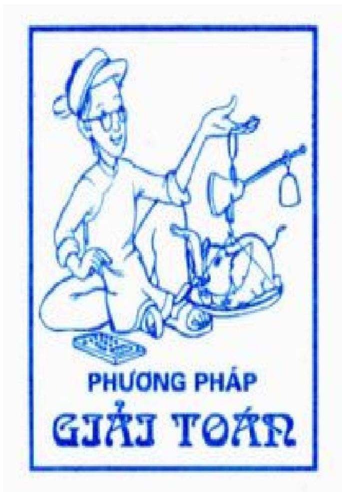
# TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT
# CỦA MỘT BIỂU THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ




**TRẦN VĂN TỎ**

(GV TỔ TOÁN TIN – TRƯỜNG THPT ĐỨC HỢP, HƯNG YÊN)

Bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất là một nội dung quan trọng trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng hằng năm. Trong chuyên đề này chúng tôi tập trung vào ý tưởng sử dụng tính chất của hàm số để giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến số. Phương pháp này tỏ ra khá mạnh, hiệu quả, chặt chẽ và tỏ ra có đường lối với ***các bài toán mà biểu thức có tính đối xứng, hoán vị vòng quanh, ...***

## I/ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1/ Biến đổi các số hạng trong biểu thức về cùng một đại lượng giống nhau.

2/ Đưa vào một ẩn phụ t mới bằng cách đặt t bằng đại lượng chung — giống nhau đó

3/ Tìm điều kiện ràng buộc cho biến t, giả sử t thuộc D

4/ Xét hàm số f(t), t thuộc D khi đó hình thành được bài toán tương đương sau:

**□Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số f(t), t thuộc tập D□**

5/ Dùng đạo hàm để tìm GTLN, GTNN của hàm số f(t) với t thuộc D

## II/ YÊU CẦU KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

1/ Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên khoảng (a;b) hoặc đoạn [a;b]

2/ Định lý Vi-ét đảo về PT bậc 2: Nếu $S^2-4P\ge 0$ và $\begin{cases}x+y=S\\ xy=P\end{cases}$ thì x, y là nghiệm của PT bậc hai ẩn t: $t^2-St+P=0$

3/ Biến đổi biểu thức đối xứng và kết hợp giả thiết đưa việc đánh giá biểu thức về việc khảo sát hàm số trên một miền D

4/ Đặt vấn đề tương đương với bài toán biện luận số nghiệm của phương trình, bất phương trình

**Nhận xét:**

Điểm mấu chốt trong cách giải này là tìm được hàm số f(t) với t thuộc D và P = f(t)

Trong trường hợp không thể xây dựng trực tiếp được hàm số f(t) thỏa mãn P = f(t) với t thuộc D thì ta đi tìm hàm số f(t) thỏa mãn $P \geq f(t), t \in D$ *với bài toán tìm GTNN* hoặc hàm số f(t) thỏa mãn $P \leq f(t), t \in D$ *với bài toán tìm GTLN.*

## III/ CÁC THÍ DỤ MINH HỌA

✪ ***Thí dụ 1:*** Cho các số thực dương x và y thỏa mãn x + y = 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{ab}$

**Bài giải:**

Ta có: $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 1-3ab$. Do đó: $P = \frac{1}{1-3ab} + \frac{1}{ab}$

Theo BĐT Cô si ta có: $(x+y)^2 \geq 4xy$, Với mọi số dương x, y.

Đặt t = ab vì $(a+b)^2 \geq 4ab$ nên $1 \geq 4ab > 0 \Rightarrow 0 < ab \leq \frac{1}{4}$.

Vậy bài toán trở thành:

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $P = f(t) = \frac{1}{1-3t} + \frac{1}{t}, t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Với đạo hàm $f'(t) = \frac{3}{(1-3t^2)} - \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$

Lập bảng biến thiên của hàm số f(t) trên $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

| t | $0$ | | $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ | | $\frac{1}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(t) | | - | 0 | + | |
| f(t) | $+\infty$ | $\searrow$ | $4+2\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | 8 |

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm f(t) là $4+2\sqrt{3}$ khi t=$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Do đó MinP = $4+2\sqrt{3}$ khi $(x,y)=\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right);\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right)\right)$

hoặc $\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right);\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}\right)\right)$.

**Bình luận:**

- Biểu thức *P có tính đối xứng* với x,y
- Trong bài này ta tìm được hàm số f(t) sao cho biểu thức P = f(t) với t thuộc D.

✪ ***Thí dụ 2:*** Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $x+y+z\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

*(Câu IV, Đề thi TS CĐ Kinh tế Kỹ thuật Cần Thơ, Khối A, năm 2006)*

**Bài giải:**

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương x, y, z ta có:

$1\ge x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}>0$ (1) và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}>0$ (2)

Dấu "=" xảy ra ở BĐT (1) và (2) khi và chỉ khi $x=y=z$.

Do đó ta có đánh giá sau:

$P=x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\sqrt[3]{xyz}+\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=3t+\dfrac{3}{t}$ với $t=\sqrt[3]{xyz}, t\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right]$.

Ta có: $f'\left(t\right)=3-\dfrac{3}{t^2}<0, \forall t\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right]$

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(t\right)=3t+\dfrac{3}{t}$ trên nửa khoảng $\left(0;\dfrac{1}{3}\right]$

| t | 0 | | $\frac{1}{3}$ |
|---|---|---|---|
| f'(t) | | - | |
| f(t) | | $+\infty \searrow 10$ | |

Vậy giá trị nhỏ nhất của f(t) là 10 khi t = $\dfrac{1}{3}$ hay $P\ge f\left(t\right)\ge 10$.

Do đó MinP = 10 khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$

**<u>Bình luận:</u>**

- Biểu thức *<u>P có tính đối xứng và hoán vị vòng quanh</u>* với 3 số x, y, z
- Trong bài này ta tìm được hàm số $f\left(t\right)=3t+\dfrac{3}{t}$ sao cho biểu thức

  $P\ge f\left(t\right), t\in D$ *(với bài toán tìm GTNN)* bằng cách dùng BĐT véc-tơ.

✪ ***Thí dụ 3:*** Cho x, y, z là các số dương và thỏa mãn $x+y+z\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\dfrac{1}{z^2}}$

*(Câu V, Đề thi tuyển sinh Đại học, Khối A, năm 2003)*

**<u>Bài giải:</u>**

Đánh giá $P\ge f\left(t\right), t\in D$ bằng cách dùng BĐT thức véc-tơ

Với hai véc-tơ $\vec{u},\vec{v}$ bất kỳ ta có: $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng

Do đó với 3 véc-tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}:\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$.

Chọn các véc-tơ $\vec{a}=\left(x;\frac{1}{x}\right),\vec{b}=\left(y;\frac{1}{y}\right),\vec{c}=\left(z;\frac{1}{z}\right)$ (chọn được vì các số x, y, z khác 0)

Ta có: $P=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\geq\sqrt{\left(x+y+z\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương x, y, z ta có:

$1\geq x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}>0$ (1) và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}>0$ (2). Khi đó:

$P\geq\sqrt{\left(x+y+z\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}\geq\sqrt{\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2}$. Đặt $t=\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^2, t\in\left(0;\frac{1}{9}\right]$

$\Rightarrow P\geq\sqrt{9t+\frac{9}{t}}, t\in\left(0;\frac{1}{9}\right]$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=9t+\frac{9}{t}$ với $t\in\left(0;\frac{1}{9}\right]$. Ta có: $f'\left(t\right)=9-\frac{9}{t^2}<0,\forall t\in\left(0;\frac{1}{9}\right]$

Bảng biến thiên :

| t | 0 | | $\frac{1}{9}$ |
|---|---|---|---|
| f'(t) | | - | |
| f(t) | | $+\infty \searrow \sqrt{82}$ | |

Vậy giá trị nhỏ nhất của f(t) là $\sqrt{82}$ khi t = $\frac{1}{9}$ hay $P\geq f\left(t\right)\geq\sqrt{82}$.

Do đó MinP = $\sqrt{82}$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

**<u>Bình luận:</u>**

- Biểu thức *<u>P có tính chất hoán vị vòng quanh</u>* các ẩn
- Trong bài này ta tìm được hàm số $f\left(t\right)=9t+\frac{9}{t}$ sao cho biểu thức

  $P\geq f\left(t\right), t\in D$ (*với bài toán tìm GTNN*)

✪ ***Thí dụ 4:*** Cho hai số thực khác không và thỏa mãn $(x+y)xy = x^2+y^2-3xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$

*(Câu V, Đề thi tuyển sinh Đại học, Khối A, năm 2006)*

**Bài giải:**

Đặt $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$ với điều kiện: $S^2-4P \geq 0$ (*). Từ giả thiết $\Rightarrow$ S, P $\neq$ 0.

Ta có: SP = $S^2$ — 3P $\Leftrightarrow$ P = $\frac{S^2}{S+3}$

Từ điều kiện (*), ta có: $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow S^2 - \frac{4S^2}{S+3} \geq 0 \Leftrightarrow S^2\left(\frac{S-1}{S+3}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{S-1}{S+3} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S<-3 \\ S \geq 1 \end{array}\right.$ (*) (với S≠0 ) . Khi đó, biểu thức trở thành:

$$A = \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3} = \frac{x^3+y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{x^3y^3} = \frac{(x+y)^2xy}{x^3y^3} = \frac{(x+y)^2}{x^2y^2}$$

$\Rightarrow A = \frac{S^2}{P^2} = \left(\frac{S+3}{S}\right)^2 = \left(f(S)\right)^2$, Với S thỏa điều kiện $\left[\begin{array}{l} S<-3 \\ S \geq 1 \end{array}\right.$

Ta có: $f(S) = \frac{S+3}{S} \Rightarrow f'(S) = -\frac{3}{S^2} < 0$ và $\left[\begin{array}{l} S<-3 \\ S \geq 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

| t | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(t) | | - | | | | - | |
| f(t) | 1 | ↘ | 0 | | 4 | ↘ | 1 |

Vậy $0 < f(S) \leq 4$ nên $0 < A \leq 16$.

Do đó MaxA = 16 khi và chỉ khi S = 1; P = $\frac{1}{4}$

hay Giá trị lớn nhất của A bằng 16 đạt được khi và chỉ khi x = y= $\frac{1}{2}$.

**<u>Bình luận:</u>**

- Biểu thức *<u>P có tính chất đối xứng giữa</u>* các ẩn
- Trong bài này ta tìm được hàm số $f(S)=\frac{S+3}{S}$ và

  $A=f(S), S\in(-\infty;-3)\cup\geq[1;+\infty)$ *(với bài toán tìm GTLN, Giá trị nhỏ nhất)*

---

**✪ *Thí dụ 5:*** Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

**A =** $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|$

---

**<u>Bài giải:</u>** Với hai véc-tơ $\vec{u},\vec{v}$ bất kỳ ta có: $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng

Đặt các véc-tơ $\vec{a}=(1-x;-y),\vec{b}=(1+x;-y)$, ta có:

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\geq\sqrt{(1-x+1+x)^2+(-2y)^2}$ . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 2 véc-tơ cùng hướng <=> 1- x = 1 + x <=> x = 0

$$\Rightarrow A=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|\geq 2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$$

$$\Rightarrow A\geq 2\sqrt{1+y^2}+|y-2|=f(y), y\in\mathbb{R}$$

***<u>Trường hợp 1:</u>***

Với $y<2\Rightarrow f(y)=2\sqrt{1+y^2}+2-y$ khi đó $f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bảng biến thiên:

| y | $-\infty$ | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(y) | | - | | + | |
| f(y) | $+\infty$ | ↘ | $2+\sqrt{3}$ | ↗ | $2\sqrt{5}$ |

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số f(y) là $2+\sqrt{3}$ khi y = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

***Trường hợp 2:***

Với y ≥ 2 $\Rightarrow$ f(y) ≥ $2\sqrt{1+y^2} \geq 2\sqrt{5} > 2 + \sqrt{3}$.

**Kết luận:** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $2+\sqrt{3}$ khi và chỉ khi (x;y) = (0; $\frac{1}{\sqrt{3}}$)

**Bình luận:**

- Biểu thức *P có chứa tổng các căn bậc hai của biểu thức tổng bình phương* nên có thể đánh giá để tìm hàm số f(t) theo BĐT véc-tơ
- Trong bài này ta tìm được hàm số f(t) sao cho biểu thức $P \geq f(t), t \in D$ (*với bài toán tìm GTNN)* bằng cách dùng BĐT véc-tơ.
- Có thể tìm hàm số f(y) bằng phương pháp tọa độ trong mặt phẳng Oxy như sau:

Chọn điểm **M( 1-x; -y); N(1+x; -y)** khi đó ta có: **OM + ON ≥ MN.** Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi **1 - x = 1 + x <=> x = 0**

✪ ***Thí dụ 6:*** Cho x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn: x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức ***P =*** $\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}$

**Bài giải:**

áp dụng BĐT sau: $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}, (a>0, b>0)$. Từ giả thiết ta có:

***P =*** $\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}, x \in [0;1]$, ta có: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}, x \in (0;1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(t/m)$

Bảng biến thiên $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}, x \in [0;1]$:

| x | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | - | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| f(x) | | $1 \nearrow \sqrt{2} \searrow 1$ | |

Vậy giá trị lớn nhất của f(x) là $\sqrt{2}$ trên khoảng (0;1) khi x = $\frac{1}{2}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là $\sqrt{2}$ khi x = y = $\frac{1}{2}$.

**<u>Bình luận:</u>**

- Biểu thức *<u>P có tính đối xứng</u>*
- Trong bài này ta tìm được hàm số f(t) sao cho biểu thức $P \geq f(t), t \in D$ (*với bài toán tìm GTNN)*
- Trong bài cho x > 0, y > 0 nên giá trị lớn nhất của f(x) trên khoảng (0;1) tương ứng với giá trị nhỏ nhất của biểu thức A (chỉ khi đó mới xác định được cặp (x;y)

> ✪ ***Thí dụ 7:*** Cho a, b,c là các số thực dương đôi một khác nhau thuộc [0;2]. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức ***P =*** $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$.

**<u>Bài giải:</u>**

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không giảm tính tổng quát, giả sử: $0 \leq a < b < c \leq 2$

Khi đó:

$$0 \leq c-a \leq 2 \Rightarrow (c-a)^2 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{1}{4} \qquad (1).$$

Dấu "=" xảy ra ở BĐT (2) khi và chỉ khi $\boxed{c - a = 2}$

Ta lại có: $0 < c-b \leq 2-b \Rightarrow (c-b)^2 \leq (2-b)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{(c-b)^2} \geq \frac{1}{(2-b)^2}$ (2).

Dấu "="xảy ra ở BĐT (2) khi và chỉ khi $\boxed{c = 2}$

Mặt khác: $0 < b-a \leq b \Rightarrow (b-a)^2 \leq b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{(b-a)^2} \geq \frac{1}{b^2}$ (3).

Dấu "="xảy ra ở BĐT (3) khi và chỉ khi $\boxed{a = 0}$

Cộng vế với vế tương ứng ở các BĐT (1), (2), (3) ta có:

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{1}{(b-2)^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{4}, b \in (0;2).$$

Xét hàm số $f(b)=\frac{1}{(2-b)^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{4}, b \in (0;2)$, $f'(b)=0 \Leftrightarrow b=1$

Bảng biến thiên:

| b | 0 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(b) | | - | 0 | + | |
| f(b) | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{9}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy giá trị nhỏ nhất của f(b) là $\frac{9}{4}$ khi và chỉ khi $\boxed{b = 1}$.

Do đó MinP = $\frac{9}{4}$ với bộ 3 số $(a;b;c)=(0;1;2)$ và các hoán vị của nó.

**✪ *Thí dụ 8:*** Cho a, b,c là các số thực không âm thỏa $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\boldsymbol{P} = \left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right)$.

**<u>Bài làm:</u>**

Không giảm tổng quát ta có thể giả sử: $0 \leq a \leq b \leq c \leq 3$

Ta có: $\begin{cases} a(a-b) \leq 0 \\ a(a-c) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-ab+b^2 \leq b^2 \\ a^2-ac+c^2 \leq c^2 \end{cases}$, khi đó suy ra:

$$\Rightarrow P \leq b^2c^2\left(b^2-bc+c^2\right)=b^2c^2\left[(b+c)^2-3bc\right]$$

Kết hợp với giả thiết. $\begin{cases} a+b+c=3 \\ 0 \leq a \leq b \leq c \leq 3 \end{cases} \Rightarrow b+c \leq a+b+c \Rightarrow b+c \leq 3$

Mặt khác, theo BĐT Cô-si, lại có: $2\sqrt{bc} \leq b+c \leq 3$ nên $\Rightarrow 0 \leq bc \leq \frac{9}{4} (*)$

Do đó: $\Rightarrow P \leq b^2c^2(9-3bc), 0 \leq bc \leq \frac{9}{4}$, Xét hàm số $f\left(t\right)=9t^2-3t^3, t\in\left[0;\frac{9}{4}\right]$

Khảo sát hàm số , ta có bảng biến thiên sau:

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $\frac{9}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | - | $0$ | + | $0$ | - | | | |
| $f(t)$ | | | $0$ | $\nearrow$ | $12$ | $\searrow$ | $\left(\frac{9}{4}\right)^3$ | | |

Vậy giá trị lớn nhất của P là 12 khi bộ (a;b;c) = (0;1;2) và các hoán vị của chúng.

✪ ***Thí dụ 9:*** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

**<u>Bài làm:</u>** Ta có :

$$P=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$P=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2+\frac{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)^2}{2}\right]$$

$$P=(x+y+z)\left[2+\frac{2-(x+y+z)^2}{2}\right]=(x+y+z)\left[3+\frac{(x+y+z)^2}{2}\right]$$

+) Đặt x +y + z = t, $|t|\le\sqrt{6}(Bunhia\cos v xki)$, ta được: $P(t)=3t-\frac{1}{2}t^3$

+) $P'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$, P($\pm\sqrt{6}$) = 0; $P(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$ ; $P(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

+) Vậy kết luận bài toán là: $MaxP=2\sqrt{2}; MinP=-2\sqrt{2}$ .

## IV/ BÀI TẬP LUYỆN TẬP – RÈN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

**1)** Cho x, y là các số thực không âm và thỏa mãn x + y = 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $3^x + 3^y$.

**2)** Cho x, y là các số thực không âm và thỏa mãn x + y = 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$.

**3)** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

**4)** Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = \frac{x+m}{6}$ (*)

**5)** Với những giá trị nào của m thì bất phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x \geq m, \forall x$ Đáp số: $m \leq -1$

**6)** Cho hai số thực x, y thay đổi , đều khác 0 và thỏa mãn $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$

*(Trích đề thi ĐH, CĐ năm 2006, Khối A)*

**7)** Cho hai số a, b khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$

**8)** Cho hai số x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức A = $x^4 + y^4 - x^2y^2$

**9)** Cho hai số x, y thỏa mãn $x^2 - xy + y^2 = 2$. . Tìm GTLN, GTNN *(nếu có)* của biểu thức A = $x^2 - 25xy + 9y^2$

**10)** Tìm GTNN của biểu thức T = $= (x-2y+1)^2 + (2x+my+5)^2$

*(Dựa theo ý đề thi ĐH GTVT HN năm 2000)*

**11)** Xác định m để phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2+9x+m}$ có nghiệm./.

——————————— Hết ———————————