VỀ MỘT LỚP BÀI TOÁN TÍCH PHÂN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

1. Mở đầu

Trong chương trình toán phổ thông, một trong những phương pháp quan trọng nhất để giải các bài toán tích phân là phương pháp đổi biến. Các bài tích phân có thể giải bằng phương pháp này thường có dạng:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx$$

Dấu hiệu này chứng tỏ trong bài tích phân có chứa một hàm số và đạo hàm của hàm số đó. Một số dạng cơ bản thường gặp là:

$$\int_a^b f(\sin x)\cos x dx,\ \int_a^b f(\cos x)\sin x dx,\ \int_a^b f(\ln x)\frac{1}{x}dx,\ \int_a^b f\left(e^x\right)dx,\ \int_a^b \sqrt{u}.u'dx$$

Tuy nhiên, một số bài toán không có dấu hiệu rõ ràng của phương pháp đổi biến. Trong số các bài toán loại này ta xét lớp các bài tích phân sau:

$$\int_a^b \frac{u'+u.v}{u}dx = \int_a^b \left[\frac{u'}{u}+v\right]dx \qquad (1)$$

Điều đặc biệt ở đây là biểu thức u' khó nhận biết nếu ta không tính thử đạo hàm của biểu thức u.

2. Bài toán gốc

Ta bắt đầu với hai bài toán sau:

Bài toán 1: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2.e^x}{1+2.e^x}dx$ (Khối A 2010)

Bài toán được giải dễ dàng nếu ta đưa về dạng (1) như sau:

$$I = \int_0^1 \frac{x^2\left(1+2e^x\right)+e^x}{1+2.e^x}dx = \int_0^1 \left(x^2+\frac{e^x}{1+2.e^x}\right)dx$$

Nếu ta thay đổi hàm số $v(x)=x^2$ bằng các hàm số khác thì ta thu được một số bài toán sau:

$$v(x)=x^n : I_1 = \int_0^1 \frac{x^n+e^x+2x^n.e^x}{1+2.e^x}dx, n\in\mathbb{N}$$

$$v(x)=\sin^n x : I_2 = \int_0^1 \frac{e^x\left(2\sin^n x+1\right)+\sin^n x}{1+2.e^x}dx, n\in\mathbb{N}$$

$$v(x)=\cos^n x : I_3 = \int_0^1 \frac{e^x\left(2\cos^n x+1\right)+\cos^n x}{1+2.e^x}dx, n\in\mathbb{N}$$

$$v(x)=\ln^n x : I_4 = \int_0^1 \frac{e^x\left(2\ln^n x+1\right)+\ln^n x}{1+2.e^x}dx, n\in\mathbb{N}$$

$$v(x)=x^n.e^x : I_5 = \int_0^1 \frac{e^x\left(x^n+1\right)+2x^n e^{2x}}{1+2.e^x}dx, n\in\mathbb{N}$$

Bài toán tổng quát: $I=\int\limits_a^b \frac{e^x(av+c)+bv}{ae^x+b}dx$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$, $v(x)$ là hàm số có thể lấy nguyên hàm.

Tiếp theo, ta xét bài toán sau:

Bài toán 2: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$ (Khối A 2011)

Ta biến đổi đưa về dạng (1) như sau:

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x+\cos x+x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[1+\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}\right]dx$$

Nếu ta không thử tính đạo hàm mẫu thức thì khó phát hiện ra lời giải:

$$(x\sin x+\cos x)'=x\cos x$$

Như vậy, bài tích phân này có dạng (1):

$$\int\limits_a^b\left[\frac{u'}{u}+v\right]dx \text{ với } u(x)=x\sin x+\cos x, v(x)=1.$$

Ở bài toán 2, ta thấy mức độ khó cao hơn bài toán 1. Điều này thể hiện ở chỗ tử thức là đạo hàm của mẫu thức nhưng nếu ta không tính thử thì khó mà nhận ra.

Nếu thay $v(x)=1$ bởi các hàm số khác thì ta sẽ có các bài toán tương tự:

$$v(x)=0:\ I_0=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$$

$$v(x)=x^n:\ I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\left[\left(x^{n-1}+1\right)\cos x+x^{n+1}\sin x\right]}{x\sin x+\cos x}dx, n\in\mathbb{N}$$

$$v(x)=\cos^n x:\ I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x\cos^n x+\cos x\left(x+\cos^n x\right)}{x\sin x+\cos x}dx, n\in\mathbb{N}$$

$$v(x)=\sin^n x:\ I_3=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\left(\sin^{n+1}x+\cos x\right)+\sin^n x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx, n\in\mathbb{N}$$

$$v(x)=x^n\sin x:\ I_4=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^{n+1}\sin^2 x+x\cos x\left(x^{n-1}\sin x+1\right)}{x\sin x+\cos x}dx, n\in\mathbb{N}$$

$$v(x)=\sin x\cos x:\ I_5=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x\cos x+\sin x-x\cos^3 x-\sin^3 x}{x\sin x+\cos x}dx$$

Xuất phát từ bài toán này, ta sẽ xây dựng lớp các bài tích phân tương tự. Chỉ cần thay đổi hàm số $v(x)$ trong (1), ta thu được nhiều bài tích phân mới.

3. Xây dựng các bài toán tích phân

Bài toán 1

Xét hàm số $u(x)=1+x.e^x$ với $u'(x)=e^x(x+1)$. Để đơn giản, ta chọn hai cận của tích phân là 0 và 1.

Chọn $v(x)=0$, ta có: $I_1=\int\limits_0^1 \frac{e^x(x+1)}{1+x.e^x}dx$

Chọn $v(x)=x^n$, ta có: $I_2=\int\limits_0^1 \frac{e^x\left(x^{n+1}+x+1\right)+x^n}{1+x.e^x}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v(x)=e^x$, ta có: $I_3=\int\limits_0^1 \frac{x.e^{2x}+(x+2).e^x}{1+x.e^x}dx$

Chọn $v(x)=\sin^n x$, ta có: $I_4=\int\limits_0^1 \frac{xe^x\left(\sin^n x+1\right)+\sin^n x+e^x}{1+x.e^x}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v(x)=\cos^n x$, ta có: $I_5=\int\limits_0^1 \frac{xe^x\left(\cos^n x+1\right)+\cos^n x+e^x}{1+x.e^x}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v(x)=\ln x$, ta có: $I_6=\int\limits_1^2 \frac{e^x(x\ln x+1)+xe^x+\ln x}{1+x.e^x}dx$

Chọn $v(x)=xe^x$, ta có: $I_7=\int\limits_0^1 \frac{x^2.e^{2x}+(2x+1).e^x}{1+x.e^x}dx$

Bài toán 2

Xét hàm số $u(x)=1+x.\ln x$ với $u'(x)=\ln x+1$. Để đơn giản, ta chọn hai cận của tích phân là 1 và e.

Chọn $v(x)=0$, ta có: $I_1=\int\limits_1^e \frac{\ln x+1}{1+x\ln x}dx$

Chọn $v=x^n$, ta có: $I_2=\int\limits_1^e \frac{\left(x^{n+1}+1\right)\ln x+x^n+1}{1+x\ln x}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v=\sin^n x$, ta có: $I_3=\int\limits_1^e \frac{\left(x\sin^n x+1\right)\ln x+\sin^n x+1}{1+x\ln x}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v=\cos^n x$, ta có: $I_4=\int\limits_1^e \frac{\left(x\cos^n x+1\right)\ln x+\cos^n x+1}{1+x\ln x}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v=\ln x$, ta có: $I_5=\int\limits_1^e \frac{x\ln^2 x+2\ln x+1}{1+x\ln x}dx$

Chọn $v=\frac{1}{x}$, ta có: $I_6=\int\limits_1^e \frac{2\ln x+x+1}{x(1+x\ln x)}dx$

Chọn $v=x^n\ln x$, ta có: $I_7=\int\limits_1^e \frac{\left[x^{n+1}\ln x+x^n+1\right]\ln x+1}{1+x\ln x}dx, n\in\mathbb{N}$

Bài toán 3

Xét hàm số $u(x)=1+x.\sin x$ với $u'(x)=\sin x-x\cos x$

Chọn $v(x)=0$, ta có: $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-x\cos x}{1+x\sin x}dx$

Chọn $v=x^n$, ta có: $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\left(x^{n-1}-\cos x\right)+\left(1+x^{n+1}\right)\sin x}{1+x\sin x}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v=\frac{1}{x}$, ta có: $I_3=\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2x\sin x-x^2\cos x}{x(1+x\sin x)}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v=\sin^n x$, ta có: $I_4=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\left(\sin^{n+1}x-\cos x\right)+\sin x\left(\sin^{n-1}x+1\right)}{1+x\sin x}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v=\cos^n x$, ta có: $I_5=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos^{n-1}x-x\right)\cos x+\left(1+x\cos^n x\right)\sin x}{1+x\sin x}dx, n\in\mathbb{N}$

Bài toán 4

Xét hàm số $u(x)=1+e^x\sin x$ với $u'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$

Chọn $v(x)=0$, ta có: $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{1+e^x\sin x}dx$

Chọn $v=x^n$, ta có: $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\left(x^n+1\right)\sin x+e^x\cos x+x^n}{1+e^x\sin x}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v=\sin^n x$, ta có: $I_3=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin x\left(\sin^n x+1\right)+e^x\cos x+\sin^n x}{1+e^x\sin x}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v=\cos^n x$, ta có: $I_4=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin x\left(1+\cos^n x\right)+\left(e^x+\cos^{n-1}x\right)\cos x}{1+e^x\sin x}dx, n\in\mathbb{N}$

Chọn $v=e^{-x}$, ta có: $I_5=\int\limits_0^1\frac{\left(e^x+1\right)\sin x+e^x\cos x+e^{-x}}{1+e^x\sin x}dx$

Chọn $v=x.e^x$, ta có: $I_6=\int\limits_0^1\frac{\left(xe^x+1\right)e^x\sin x+e^x(x+\cos x)}{1+e^x\sin x}dx$

Chọn $v=\ln x$, ta có: $I_7=\int\limits_0^1\frac{e^x\sin x\ln(ex)+e^x\cos x+\ln x}{1+e^x\sin x}dx$

Với cách làm này, giáo viên và các em học sinh cũng có thể tạo ra một loạt các bài tập cho riêng mình. Qua bài viết, tôi muốn cung cấp cho các em học sinh sắp thi đại học thêm một lớp các bài toán tính tích phân để tự luyện và một hướng tiếp cận cách ra đề các bài toán tính tích phân. Vì bài viết này mang nhiều suy nghĩ chủ quan của tôi nên chắc chắn có nhiều sai sót. Rất mong được sự đóng góp của quí thầy cô.