TRƯỜNG ĐẠI HỌC AN GIANG
KHOA SƯ PHẠM

Người thực hiện

NGUYỄN PHÚC HẬU
Lớp ĐH3A2

Đề Tài Nghiên Cứu Khoa Học

ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HÖLDER và MINKOWSKI TRONG TOÁN PHỔ THÔNG

Giáo viên hướng dẫn
LÊ THÁI DUY

An Giang, năm 2004

LỜI CẢM ƠN

Hoàn thành đề tài này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy Lê Thái Duy - người đã hết lòng hướng dẫn và giúp đỡ tôi trong quá trình nghiên cứu đề tài.

Tôi chân thành cảm ơn thầy Nguyễn Ngọc Phương giáo viên trường PTTH Long Kiến đã luôn động viên tôi trong quá trình làm đề tài.

Tôi chân thành cảm ơn trường Đại Học An Giang đã tạo điều kiện để tôi học tập và nghiên cứu đề tài này.

MỤC LỤC

Trang

LỜI MỞ ĐẦU

Khi còn học phổ thông, đối với tôi bất đẳng thức là một vấn đề khó khăn lớn. Do đó, khi bước chân vào trường Đại Học tôi luôn ao ước có cơ hội nghiên cứu vấn đề này.

Bất đẳng thức là chuyên đề khá phức tạp và có ứng dụng phong phú trong toán học. Nó liên quan đến nhiều lĩnh vực khác như: Giải tích, lượng giác, hình học …. Do đó, đây là lý thuyết rất quan trọng. Đã có rất nhiều nhà toán học có những đóng góp quan trọng cho lý thuyết này như: Cauchy, Jensen, Hardy, … trong đó đặc biệt là Hölder và Minkowski. Các bất đẳng thức mang tên hai ông được ứng dụng rộng rãi trong giải toán cao cấp và toán sơ cấp, được vận dụng vào giải các bài toán hay và khó trong các kỳ thi quan trọng như: thi chọn học sinh giỏi, thi quốc gia hay thi Olympic quốc tế …

Hơn nữa, đối với học sinh phổ thông, bất đẳng thức là chuyên đề phức tạp và không dễ. Phần đông các em đều không giải được bài toán bất đẳng thức và các bài toán có liên quan. Một phần do các em chưa biết cách vận dụng bất đẳng thức cơ bản, một phần các em chưa nắm được các bất đẳng thức này.

Vì vậy, **việc nghiên cứu hai bất đẳng thức Hölder và Minkowski có ý nghĩa đặc biệt quan trọng**. Nó không những có ý nghĩa lớn trong việc khảo cứu các bất đẳng thức cơ bản mà còn có tác dụng lớn trong việc giảng dạy sau này.

Do từ lý do trên đây nên đề tài này tôi tập trung nghiên cứu hai đối tượng sau: một là hai bất đẳng thức Hölder và Minkowski, hai là ứng dụng của hai bất đẳng thức này vào toán phổ thông. Nhằm thực hiện hai nhiệm vụ: làm rõ các dạng của hai bất đẳng thức trên; vận dụng chúng vào bài toán phổ thông. Để làm được điều này, tôi đã tiến hành đọc một số tài liệu có nhắc đến các nội dung trên, từ đó phân tích, tổng hợp lại, hệ thống những gị làm được một cách hợp lý.

Nội dung nghiên cứu gồm:

Chương I. Kiến thức cơ sở
Chương II. Bất đẳng thức Hölder và Minkowski
Chương III. Ứng dụng của bất đẳng thức Hölder và Minkowski trong toán phổ thông

Mặc dù đã cố gắng hoàn thành đề tài, nhưng do kiến thức còn hạn chế nên đề tài không tránh khỏi thiếu sót và sai lầm, rất mong sự góp ý của quý thầy cô để đề tại được hoàn chỉnh hơn, xin chân thành cảm ơn.

CHƯƠNG I

KIẾN THỨC CƠ SỞ

Trong chương này, bất đẳng thức Jensen và bất đẳng thức Cauchy được giới thiệu dưới dạng cơ sở phục vụ cho việc nghiên cứu bất đẳng thức Hölder và Minkowski.

§1. BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

1.1. Hàm lồi:

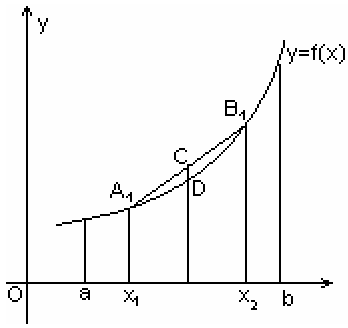
1) Cho hàm số y = f(x) xác định trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Hàm số f(x) được gọi là lồi trên đó, nếu thoả mãn điều kiện sau:

$\forall x_1, x_2 \in (a;b)$, $\forall \alpha,\beta \geq 0$ mà $\alpha + \beta = 1$ thì:

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \quad (1)$$

Về mặt hình học, bất đẳng thức (1) có ý nghĩa như sau:

Nếu gọi $A_1(x_1, f(x_1))$; $B(x_2, f(x_2))$ là hai điểm nằm trên đường cong y = f(x), với $a < x_1 < x < x_2 < b$; thì mọi điểm của cung A_1B_1 của đồ thị đều nằm dưới cát tuyến A_1B_1. Do đó C có toạ độ là $C(\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha f(x_1) + \beta f(x_2))$ và D có toạ độ là $D(\alpha x_1 + \beta x_2; f(\alpha x_1 + \beta x_2))$.



2) Hàm số y = f(x) gọi là *lõm* trên đó, nếu như *– f(x)* lồi, tức là $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$, $\forall \alpha,\beta \geq 0$ mà $\alpha+\beta=1$ thì $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$.

3) Hàm f(x) liên tục đến đạo hàm cấp hai trên $(a;b)$. Nếu như $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a;b)$ thì *f(x) là hàm lồi trên* $(a;b)$.

Nếu như $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a;b)$ thì *f(x) là hàm lõm trên đó.*

1.2. Bất đẳng thức Jensen:

Cho f(x) là hàm lồi trên $[a;b]$. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a;b]$ và $\alpha_i > 0$, $(i = \overline{1,n})$; $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, ta luôn có:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

Chứng minh:

- Với n = 2, thì bất đẳng thức Jensen đúng (theo định nghĩa hàm lồi).

- Giả sử bất đẳng thức đã đúng đến n = k – 1.

- Xét khi n = k. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_k \in [a;b]$ và $\alpha_i > 0$, i = 1, 2, …, k; $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1$.

Ta có: $$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i x_i + \alpha_{k-1}x_{k-1} + \alpha_k x_k \quad (1)$$

Đặt $\alpha = \sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i \Rightarrow 0 < \alpha < 1$, vì thế từ (1) suy ra:

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i x_i + (1-\alpha)\left[\frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha}x_{k-1} + \frac{\alpha_k}{1-\alpha}x_k\right]$$

Do $\frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha} + \frac{\alpha_k}{1-\alpha} = 1$, mà x_{k-1}, x_k đều thuộc $[a;b]$, nên:

$$x^* = \frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha}x_{k-1} + \frac{\alpha_k}{1-\alpha}x_k \in [a;b]$$

Áp dụng giả thiết quy nạp với k - 1 điểm x_1, x_2, ….., x_{k-2}, x^* và bộ số α_1, α_2,….., α_{k-2}, $1 - \alpha$. ($\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-2} + 1 - \alpha = 1$)

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i x_i + (1-\alpha)x^*\right) \le \sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i f(x_i) + (1-\alpha)f(x^*) \qquad (2)$$

Mặt khác lại theo định nghĩa hàm lồi, ta có:

$$f(x^*) = f\left(\frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha}x_{k-1} + \frac{\alpha_k}{1-\alpha}x_k\right) \le \frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha}f(x_{k-1}) + \frac{\alpha_k}{1-\alpha}f(x_k) \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i f(x_i) + (1-\alpha)\left[\frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha}f(x_{k-1}) + \frac{\alpha_k}{1-\alpha}f(x_k)\right]$$

Hay $f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$

§2. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

2.1. Bất đẳng thức Cauchy:

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số không âm, chứng minh rằng:

$$\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2....a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Chứng minh:

Xét hàm số f(x) = - lnx với x > 0.

Ta có $f'(x) = -\frac{1}{x}$ và $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.

Vậy f(x) là hàm lồi khi x > 0. Theo bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+.....+f(x_n)\right]$$

$$\Leftrightarrow -\ln\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n} \leq -\frac{\ln x_1+\ln x_2+.....+\ln x_n}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n} \geq \ln\sqrt[n]{x_1x_2....x_n}$$

Do tính đồng biến của hàm số y = lnx, suy ra

$$\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2....x_n},\ \forall x_i > 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $x_1 = x_2 = \ldots.. = x_n$.

Xét n số $a_1, a_2, \ldots., a_n \geq 0$. Có hai khả năng sau xảy ra

1. Nếu $a_i > 0\ \forall i = 1, 2, \ldots.., n$, thì theo trên ta có:

$$\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2....a_n} \qquad (*)$$

2. Nếu tồn tại $a_k = 0$ thì (*) hiển nhiên đúng.

2.2. Bất đẳng thức Cauchy "suy rộng":

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số hạng không âm. Cho $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ là các số hữu tỉ dương sao cho $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Chứng minh rằng:

$$\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \ldots + \alpha_na_n \geq a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}.....a_n^{\alpha_n}$$

Chứng minh:

Vì $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là các số hữu tỉ dương và $\alpha_1+\alpha_2+......+\alpha_n = 1$, nên có thể viết chúng dưới dạng sau (sau khi đã quy đồng mẫu số các phân số).

$$\alpha_1 = \frac{p_1}{N}, \alpha_2 = \frac{p_2}{N}, ..., \alpha_n = \frac{p_n}{N}.$$

Trong đó $p_1, p_2, .., p_n$ là các số nguyên dương và $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = N$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với p_1 số a_1, …, p_n số a_n, ta được:

$$\frac{a_1+...+a_1+a_2+...+a_2+....+a_n+...+a_n}{p_1+p_2+....+p_n} \geq \sqrt[p_1+p_2+....+p_n]{a_1^{p_1}a_2^{p_2}...a_n^{p_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_1}{N}a_1 + \frac{p_2}{N}a_2 + ... + \frac{p_n}{N}a_n \ge a_1^{\frac{p_1}{N}} a_1^{\frac{p_2}{N}} ... a_1^{\frac{p_n}{N}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots\ldots + \alpha_n a_n \ge a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ..... a_n^{\alpha_n}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

CHƯƠNG II
BẤT ĐẲNG THỨC HÖLDER VÀ MINKOWSKI

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm thấy các dạng đại số và dạng giải tích của bất đẳng thức Hölder; dạng đại số của bất đẳng thức Minkowski thứ I, II và dạng giải tích của bất đẳng thức Minkowski.

Đáng chú ý là các hệ quả của hai bất đẳng thức trên, chúng được vận dụng nhiều trong giải toán phổ thông.

§1. BẤT ĐẲNG THỨC HÖLDER

1.1. Dạng đại số:

Cho hai dãy số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$; p, q là các số hữu tỉ dương sao cho $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, ta luôn có:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \qquad (*)$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi tồn tại hai số A và B không đồng thời bằng không sao cho $Aa_k^p = Bb_k^q, k = 1,2,....,n$.

Chứng minh:

<u>- Cách 1</u>: Dùng bất đẳng thức Cauchy "suy rộng".

Theo bất đẳng thức Cauchy suy rộng, nếu $a \geq 0$, $b \geq 0$, thì:

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geq ab \qquad (1)$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi $a^p = b^q$.

Áp dụng (1) với: $a = \dfrac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}, b = \dfrac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}, k = 1,2,...,n$, ta được:

$$\frac{1}{p}\frac{a_k^p}{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}+\frac{1}{q}\frac{b_k^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q} \geq \frac{a_k b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \qquad (2)$$

Vì (2) đúng $\forall k = 1, 2, \ldots, n$, nên cộng từng vế n bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq \frac{a_k b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \geq 0 \qquad (3)$$

Từ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ = 1, nên từ (3) suy ra đ.p.c.m

Có đẳng thức khi và chỉ khi n bất đẳng thức trong (2) đều trở thành đẳng thức, theo (1), có điều này khi và chỉ khi:

$$\frac{a_k^p}{a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p} = \frac{b_k^q}{b_1^q + b_2^q + ... + b_n^q}, k = \overline{1,n}$$

Tức là: $\dfrac{a_1^p}{b_1^q} = \dfrac{a_2^p}{b_2^q} = ... = \dfrac{a_n^p}{b_n^q}$,

Với quy ước: Nếu $b_k = 0$ với một k nào đó thì $a_k = 0$

Ngoài ra, với $a_1 = \ldots = a_n = 0$ hoặc $b_1 = \ldots = b_n = 0$, (*) trở thành đẳng thức, kết hợp hai kết quả trên ta được: (*) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi tồn tại hai số A và B không đồng thời bằng không sao cho $Aa_k^p = Bb_k^q, k = 1,2,....,n$.

- Cách 2: Dùng bất đẳng thức Jensen.

Xét hàm số $f(x) = x^p$ khi $x > 0$ $(p > 1)$

$f'(x) = px^{p-1}$

$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$ (do $p > 1$, $x > 0$)

Vậy f(x) là hàm lồi khi x > 0.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen với $x_k = a_k b_k^{1-q}; \alpha_k = \dfrac{b_k^q}{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q}$ (k = 1, 2, …, n)

Ta có ngay $x_k > 0$, $\alpha_k > 0, \forall k = 1,2,...,n$ và $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$

Khi đó ta có:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \le \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k) \qquad (**)$$

Do $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q} \sum\limits_{k=1}^n a_k b_k$, vậy:

$$(**) \Leftrightarrow \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^n a_k b_k}{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q} \right)^p \le \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q} \sum_{k=1}^n b_k^q a_k^p b_k^{p(1-q)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^p \le \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^n b_k^q \right)^p}{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q} \sum_{k=1}^n a_k^p \ \left(\text{Do } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p + q - pq = 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^p \le \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{p-1} . \sum_{k=1}^n a_k^p$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (***)$$

Do $\dfrac{p-1}{p} = \dfrac{1}{q}$, từ đó suy ra:

$$(***) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bất đẳng thức Hölder được chứng minh xong.

Hệ quả:

Nếu p = q = 2 thì bất đẳng thức Hölder trở thành:

$$\left(a_1^2+a_2^2+....+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+....+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n\right)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=....=\dfrac{a_n}{b_n}$.

(Bất đẳng thức Bouniakowski)

1.2. Dạng giải tích:

1.2.1. Định lý:

Giả sử hàm số f(x) liên tục trên đoạn $[a;b]$, f(x) $\geq$ 0 với mọi x $\in$ $[a;b]$. Nếu f(x) không đồng nhất không trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx>0$.

Chứng minh:

Giả sử $x_0 \in [a;b]$ sao cho $f(x_0)>0$ và α là một số dương sao cho $f(x_0)>\alpha$.

1. Nếu $a<x_0\leq b$ thì tồn tại một số dương h sao cho a $\leq$ x_0 – h và f(x) > α với mọi x $\in$ $[x_0-h;x_0]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-h} f(x)dx+\int_{x_0-h}^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^b f(x)dx$$

Vì f(x) $\geq$ 0 trên $[a;b]$ nên $\int_a^{x_0-h} f(x)dx \geq 0$ và $\int_{x_0}^b f(x)dx \geq 0$.

Do đó $\int_a^b f(x)dx \geq \int_{x_0-h}^{x_0} f(x)dx$. (1)

Mặt khác, vì f(x) > α với mọi x $\in$ $[x_0-h;x_0]$ nên:

$$\int_{x_0-h}^{x_0} f(x)dx \geq \int_{x_0-h}^{x_0}\alpha dx=h\alpha>0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\int_a^b f(x)dx>0$.

2. Nếu a $\leq$ x_0 < b thì tồn tại một số dương h sao cho x_0 + h $\leq$ b và f(x) > > α với mọi x $\in$ $[x_0;x_0+h]$.

Tương tự như trên ta chứng minh được $\int_a^b f(x)dx>0$.

1.2.2. Bổ đề:

Giả sử (p, q) là một cặp số mũ liên hợp, tức là $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$; p > 1; q > 1. Khi đó với hai số không âm α,β bất kì ta luôn có:

$$\alpha\beta\leq\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$$

Có đẳng thức khi và chỉ khi $\alpha^p = \beta^q$.

Chứng minh:

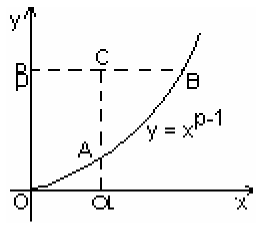
Hiển nhiên bổ đề đúng với $\alpha = 0$ hoặc $\beta = 0$. Giả sử $\alpha > 0$ và $\beta > 0$. Hàm số $y = x^{p-1}$ liên tục và đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ và lấy giá trị trên đó. Do đó nó có hàm số ngược $x = y^{\frac{1}{p-1}}$ trên $[0;+\infty)$. Giả sử đường thẳng $x = \alpha$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^{p-1}$ (cũng là đồ thị của hàm số $x = y^{\frac{1}{p-1}}$) tại điểm A, đường thẳng $y = \beta$ cắt đồ thị (C) tại điểm B và cắt đường thẳng $x = \alpha$ tại điểm C. Khi đó diện tích hình chữ nhật $O\alpha C\beta$ không lớn hơn tổng các diện tích của hai tam giác cong $O\alpha A$ giới hạn bởi trục hoành, đường thẳng $x = \alpha$ và đồ thị (C) và tam giác cong $O\beta B$ giới hạn bởi trục tung, đường thẳng $y = \beta$ và đồ thị (C).

$$S_{O\alpha C\beta} \le S_{O\alpha A} + S_{O\beta B} \qquad (1)$$

Ta có:

$$S_{O\alpha C\beta} = \alpha\beta$$

$$S_{O\alpha A} = \int_0^\alpha x^{p-1}dx = \left.\frac{x^p}{p}\right|_0^\alpha = \frac{\alpha^p}{p}$$



$$S_{O\beta B} = \int_0^\beta y^{\frac{1}{p-1}}dy = \left.\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}\right|_0^\beta$$

Vì $\frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{q}} = q$, nên: $S_{O\beta B} = \left.\frac{y^q}{q}\right|_0^\beta = \frac{\beta^q}{q}$

Thay vào (1) ta được: $\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.

Có đẳng thức khi và chỉ khi hai điểm A và B trùng nhau, tức là:

$$\alpha^{p-1} = \beta \Leftrightarrow \beta^q = \alpha^{(p-1)q} = \alpha^p$$

1.2.3. Bất đẳng thức Hölder dạng giải tích:

Giả sử (p, q) là một cặp số mũ liên hợp, f và g là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai số thực A và B không đồng thời bằng không sao cho:

$$A|f(x)|^p = B|g(x)|^q, \ \forall x \in [a;b]$$

Chứng minh:

- Nếu một trong hai tích phân $\int_a^b |f(x)|^p dx$ hoặc $\int_a^b |g(x)|^q dx$ bằng không thì (1) đúng. Thật vậy, giả sử $\int_a^b |f(x)|^p dx = 0$. Khi đó, vì $|f(x)|^p \geq 0, \forall x \in [a;b]$, nên theo định lý **1.2.1** suy ra f(x) = 0, $\forall x \in [a;b]$. Do đó f(x)g(x) = 0, $\forall x \in [a;b]$ và $\int_a^b |f(x)g(x)| dx = 0$.

- Giả sử $\int_a^b |f(x)|^p dx > 0$ và $\int_a^b |g(x)|^q dx > 0$.

Áp dụng bổ đề **1.2.2**, với $\alpha = \dfrac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}$ và $\beta = \dfrac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}$, ta được

$$\frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q dx}, \forall x \in [a;b] \quad (2)$$

Do đó:

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)| dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q} \frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{\int_a^b |g(x)|^q dx} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Theo bổ đề **1.2.2**, (2) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi:

$$\frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}, \ \forall x \in [a;b]$$

Kết hợp với phần 1, ta được (1) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi tồn tại hai số thực A và B không đồng thời bằng không sao cho:

$$A|f(x)|^p = B|g(x)|^q, \forall x \in [a;b]$$

<u>Hệ quả:</u>

Khi p = q = 2, bất đẳng thức Hölder trở thành:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

(Bất đẳng thức Bouniakowski)

§2. BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI

2.1. Dạng đại số:

2.1.1. Bất đẳng thức Minkowski thứ I:

Cho hai dãy số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Giả sử $p > 1$ là số hữu tỉ. Chứng minh rằng:

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Chứng minh:

Gọi q là số hữu tỉ mà $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Vì $p > 1$ nên q cũng là số hữu tỉ > 1.

Áp dụng bất đẳng thức Hölder cho hai dãy số $\{a_k\}$ và $\{(a_k+b_k)^{p-1}\}$, k = 1, 2, …, n, ta được:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (1)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Hölder cho hai dãy $\{b_k\}$ và $\{(a_k+b_k)^{p-1}\}$ ta được:

$$\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1} \le \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2), ta có:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \le \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \text{ (do } q(p-1)=p\text{)} \qquad (3)$$

Nếu $a_k = b_k = 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ thì bất đẳng thức (3) hiển nhiên đúng.

Do đó ta có thể giả thiết $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p > 0$. Nên từ (3) ta có:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Hay $\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Hệ quả:

Nếu p = q = n = 2, thì bất đẳng thức Minkowski trở thành:

$$\sqrt{(a_1+b_1)+...+(a_n+b_n)} \le \sqrt{a_1+b_1}+...+\sqrt{a_n+b_n}$$

Khi n =2, ta có:

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}|+|\vec{v}| \text{ (Với } \vec{u}=(a_1,a_2), \vec{v}=(b_1,b_2))$$

(Bất đẳng thức tam giác)

2.1.2. Bất đẳng thức Minkowski thứ II:

Cho 2 dãy số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n} \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=......=\frac{a_n}{b_n}$.

Chứng minh:

- Cách 1:

Có hai trường hợp sau:

① Nếu $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2).....(a_n + b_n) = 0$. Khi đó phải tồn tại k $(1 \le k \le n)$ mà $a_k + b_k = 0$.

Do $a_k \ge 0, b_k \ge 0 \Rightarrow a_k = b_k = 0$. Vậy bất đẳng thức (1) đúng (vì cả hai vế bằng 0).

② Nếu $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2).....(a_n + b_n) > 0$. Khi đó bất đẳng thức (1) viết lại dưới dạng sau:

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1}.\frac{a_2}{a_2+b_2}.......\frac{a_n}{a_n+b_n}}+\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1}.\frac{b_2}{a_2+b_2}.......\frac{b_n}{a_n+b_n}} \le 1 \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1}.\frac{a_2}{a_2+b_2}.......\frac{a_n}{a_n+b_n}} \le \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2}+......+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right) \quad (3)$$

$$\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1}.\frac{b_2}{a_2+b_2}.......\frac{b_n}{a_n+b_n}} \le \frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\frac{b_2}{a_2+b_2}+......+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right) \quad (4)$$

Cộng từng vế (3), (4) suy ra (1) đúng.

Dấu bằng xảy ra trong hai trường hợp sau:

a) Hoặc là tồn tại chỉ số k mà $a_k = b_k = 0$.

b) Hoặc là $\begin{cases} \frac{a_1}{a_1+b_1}=\frac{a_2}{a_2+b_2}=.....=\frac{a_n}{a_n+b_n} \\ \frac{b_1}{a_1+b_1}=\frac{b_2}{a_2+b_2}=.....=\frac{b_n}{a_n+b_n} \end{cases}$

Với quy ước nếu $b_k = 0$ thì $a_k = 0$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=......=\frac{a_n}{b_n}$

- Cách 2: Dùng bất đẳng thức Jensen.

- Xét hàm số f(x) = ln(1+e^x).

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0, \forall x\in \mathbf{R}$$

Vậy f(x) là hàm lồi trên **R**. Theo bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+.....+f(x_n)}{n}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+.....+x_n}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+e^{x_1}\right)+...+\ln\left(1+e^{x_n}\right)\right]\ge \ln\left(1+e^{\frac{x_1+...+x_n}{n}}\right)$$

Chọn $x_i=\ln\frac{b_i}{a_i}, i=1,2,....,n$ ta được:

$$\frac{\ln\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)+\ln\left(1+\frac{b_2}{a_2}\right)+.....+\ln\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)}{n}\ge \ln\left(1+e^{\frac{\ln\frac{b_1}{a_1}+\ln\frac{b_2}{a_2}+.....+\ln\frac{b_n}{a_n}}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sqrt[n]{\frac{(a_1+b_1)(a_2+b_2).....(a_n+b_n)}{a_1a_2.....a_n}}\right)\ge \ln\left(1+\sqrt[n]{\frac{b_1b_2.....b_n}{a_1a_2.....a_n}}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2).....(a_n+b_n)}\ge \sqrt[n]{a_1a_2.....a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2.....b_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $x_1=x_2=...=x_n$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{b_1}{a_1}=\ln\frac{b_2}{a_2}=...=\ln\frac{b_n}{a_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=...=\frac{b_n}{a_n}$$

2.2. Dạng giải tích:

Giả sử p ≥ 1, f và g là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

$$\left(\int_a^b \left|f(x)+g(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le \left(\int_a^b \left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b \left|g(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

Chứng minh:

Hiển nhiên (1) đúng với p = 1. Giả sử p > 1. Khi đó

$$\left|f(x)+g(x)\right|^p=\left|f(x)+g(x)\right|\left|f(x)+g(x)\right|^{p-1}\le$$

$$\le \left|f(x)\right|\left|f(x)+g(x)\right|^{p-1}+\left|g(x)\right|\left|f(x)+g(x)\right|^{p-1}, \forall x\in[a;b].$$ Do đó:

$$\left(\int_a^b \left|f(x)+g(x)\right|^p dx\le \int_a^b \left|f(x)\right|\left|f(x)+g(x)\right|^{p-1}dx+\int_a^b \left|g(x)\right|\left|f(x)+g(x)\right|^{p-1}dx\right) \quad (2)$$

Gọi q là số mũ liên hợp của p. Áp dụng bất đẳng thức Hölder cho hai hàm số liên tục $|f|$ và $|f+g|^{p-1}$, ta được:

$$\int_a^b |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}dx\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{q}} \quad (3)$$

Tương tự:

$$\int_a^b |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}dx \le \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{q}} \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4) suy ra:

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \le \left(\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right).\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{q}} \quad (5)$$

- Nếu $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx = 0$ thì bất đẳng thức cần chứng minh đúng.
- Nếu $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx > 0$, từ (5) suy ra:

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Hay $$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

CHƯƠNG III
ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HÖLDER VÀ MINKOWSKI TRONG TOÁN PHỔ THÔNG

Các ứng dụng toán phổ thông của bất đẳng thức Hölder và Minkowski được thể hiện trong chương này một cách khá đặc sắc ở **nhiều lĩnh vực** toán học: **giải tích, giải tích tổ hợp, hình học, hình học giải tích, đại số, lượng giác** và **số học.**

§1. ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HÖLDER

1.1. Ứng dụng trong giải tích:

1.1.1. Bất đẳng thức tích phân:

Bài 1: Giả sử f và g là hai hàm số liên tục, dương trên đoạn $[a;b]$ và $f(x)g(x) \geq 1$ với mọi $x \in [a;b]$. Chứng minh rằng:

$$\int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx \geq (b-a)^2$$

Chứng minh:

$\sqrt{f}$ và $\sqrt{g}$ là những hàm số liên tục và dương trên đoạn $[a;b]$. Vì $f(x)g(x) \geq 1$ với mọi $x \in [a;b]$ nên $\sqrt{f(x)g(x)} \geq 1$ với mọi $x \in [a;b]$. Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder cho hai hàm số $\sqrt{f}$ và $\sqrt{g}$, ta được:

$$\int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 dx \int_a^b \left(\sqrt{g(x)}\right)^2 dx \geq \left(\int_a^b \sqrt{f(x)g(x)}dx\right)^2 \geq \left(\int_a^b dx\right)^2 = (b-a)^2.$$

Bài 2: Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và f(0) - f(1) = 1. Chứng minh rằng:

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$$

Chứng minh:

Theo định lý Newton – Leibniz:

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1$$

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder cho hai hàm số f'(x) và g(x) = = 1, $x \in [0;1]$, ta được:

$$1 = \left(\int_0^1 f'(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 f'(x).1dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 1^2 dx\right)\left(\int_0^1 [f'(x)]^2 dx\right) = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

Vậy $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$.

Bài 3: Chứng minh rằng $\forall x > 0$, ta có:

$$e^x - 1 < \int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-t}}dt < \sqrt{(e^x - 1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right)}$$

Chứng minh:

Ta có: $\int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-t}}dt = \int_0^x e^{\frac{1}{2}t}\sqrt{e^t + e^{-2t}}dt$ (1)

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$\left(\int_0^x e^{\frac{1}{2}}\sqrt{e^t+e^{-2t}}dt\right)^2 \le \int_0^x e^t dt\int_0^x\left(e^t+e^{-2t}\right)dt$$

Do đó từ (1), suy ra:

$$\left(\int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}dt\right)^2 \le \left(e^x-1\right)\left(e^x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) < \left(e^x-1\right)\left(e^x-\frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

Mặt khác $\sqrt{e^{2t}+e^{-t}} > e^t$, $\forall\, 0 < t < x$, nên:

$$\int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}dt > \int_0^x e^t dt = e^x - 1 \quad (3)$$

Từ (2) và (3), suy ra:

$$e^x - 1 < \int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}dt < \sqrt{\left(e^x-1\right)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)}$$

Bài 4: Cho f(x) là hàm số liên tục cùng với đạo hàm của nó trên đoạn $[a;b]$ và f(a) = 0. Đặt $M = \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$. Chứng minh: $M^2 \le (b-a)\int_a^b (f'(x))^2 dx$.

Chứng minh:

Gọi x_0 là điểm thuộc $[a;b]$ sao cho: $|f(x_0)| = \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$. Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Hölder với hai hàm f'(x) và g(x) = 1, ta được:

$$\left(\int_a^{x_0} f'(x)dx\right)^2 \le \int_a^{x_0}(f'(x))^2dx\int_a^{x_0}dx = (x_0-a)\int_a^{x_0}(f'(x))^2dx$$

Do $\int_a^{x_0} f'(x)dx = f(x_0) \Rightarrow |f(x_0)| \le \sqrt{x_0-a}\sqrt{\int_a^{x_0}(f'(x))^2dx}$, từ đó:

$$M \le \sqrt{\int_a^b (f'(x))^2dx}.\sqrt{b-a} \Rightarrow M^2 \le (b-a)\int_a^b (f'(x))^2dx$$

Bài 5: Cho hai hàm số liên tục f(x) và g(x) xác định trên $[0;1]$ và nhận giá trị cũng trên đoạn $[0;1]$. Chứng minh:

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx$$

Chứng minh:

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder , ta được:

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f^2(x)dx\int_0^1 g^2(x)dx \quad (1)$$

Vì $0 \le f(x) \le 1; 0 \le g(x) \le 1, \forall 0 \le x \le 1$ nên:

$f^2(x) \le f(x)$ và $g^2(x) \le g(x), \forall 0 \le x \le 1$.

Suy ra $0 \le \int_0^1 f^2(x)dx \le \int_0^1 f(x)dx, 0 \le \int_0^1 g^2(x)dx \le \int_0^1 g(x)dx$, do đó:

$$\int_0^1 f^2(x)dx.\int_0^1 g^2(x)dx \le \int_0^1 f(x)dx.\int_0^1 g(x)dx \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx$

Bài 6: Cho f(x) là hàm số xác định và liên tục trên $[0;1]$ và $|f(x)| \le 1, \forall x \in [0;1]$. Chứng minh:

$$\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)}dx \le \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2}$$

Chứng minh:

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder cho hai hàm số h(x) = $=\sqrt{1-f^2(x)}$ và G(x) $\equiv 1$ trên $[0;1]$, ta được:

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)}dx\right)^2 \le \int_0^1 (1-f^2(x))dx\int_0^1 dx = 1-\int_0^1 f^2(x)dx$$

Suy ra $\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)}dx \le \sqrt{1-\int_0^1 f^2(x)dx}$ (1)

Lại áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder cho hai hàm F(x) = f(x) và G(x) $\equiv 1$ trên $[0;1]$, ta được:

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f^2(x)dx\int_0^1 dx \text{, do đó: } 1 - \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \ge 1-\int_0^1 f^2(x)dx \ (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)}dx \le \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2}$

1.1.2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất:

Bài 1: Cho 2 số dương a, b thoả mãn : $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ với x, y > 0. Tìm x, y để: S = x + y nhỏ nhất (tính theo a, b).

Giải

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\sqrt{x} + \sqrt{\frac{b}{y}}\sqrt{y}\right)^2 \le \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)(x+y) = S$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{x} = \frac{\sqrt{b}}{y} \\ x+y = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\ y = \sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \end{cases}$$

Vậy: Min(S) = $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, khi: $\begin{cases} x = \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \\ y = \sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \end{cases}$.

Bài 2: Chứng minh rằng nếu phương trình: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ (1) có nghiệm thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.

Giải:

Gọi x là nghiệm của (1), ta có:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0 \quad (\Rightarrow x \neq o)$$

$$\Rightarrow -(1+x^4) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta được:

$$(1+x^4)^2 = (ax^3 + bx^2 + cx)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^6+x^4+x^2)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(1+x^4)^2}{x^6+x^4+x^2} \qquad (2)$$

Mặt khác: $\frac{(1+x^4)^2}{x^6+x^4+x^2} \geq \frac{4}{3}$ (3)

Thật vậy:

$$(3) \Leftrightarrow 3(1+2x^4+x^8) \geq 4(x^6+x^4+x^2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^8 - 4x^6 + 2x^4 - 4x^2 + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)^2.(3x^4+2x^2+3) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Từ (2) và (3), suy ra: $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4}{3}$. Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = -\frac{2}{3}(x=1) \\ a = -b = c = \frac{2}{3}(x=-1) \end{cases}$$

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

f(x, y, z, t) = $x^4 + y^4 + z^4$ xét trên miền $D = \{(x,y,z) : xy + yz + zx = 4\}$.

Giải:

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder cho hai dãy số: x, y, z và y, z, x ta được:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \geq (xy+yz+zx)^2 = 16 \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có:

$$3(x^4+y^4+z^4) \geq (x^2+y^2+z^2)^2 \text{ (Hệ quả bất đẳng thức Hölder) (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $f(x,y,z) \geq \frac{16}{3}, \forall (x,y,z) \in D$.

Mặt khác $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{3}$, và do $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \in D$, nên:

$\min\limits_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)=\dfrac{16}{3}$.

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:
$f(x,y,z)=x+y+z+xy+yz+zx$, xét trên $D=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 27\}$

Giải:

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Hölder cho 2 dãy số $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$ và $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ ta được:

$$3(x^2+y^2+z^2)\ge (x+y+z)^2$$

Vậy: $\forall(x,y,z)\in D$, ta có: $(x+y+z)^2\le 81$

Hay: $x+y+z\le 9\ \ \forall(x,y,z)\in D$ (1)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3$.

Lại áp dụng hệ quả bất đẳng thức Hölder cho hai dãy số $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$ và $b_1 = y$, $b_2 = z$, $b_3 = x$ ta được:

$$(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2+x^2)\ge (xy+yz+zx)^2$$

Từ đó, suy ra: $xy+yz+zx\le 27, \forall(x,y,z)\in D$ (2)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{z}{x}\Leftrightarrow x=y=z$.

Từ (1) và (2) suy ra $f(x,y,z)\le 36$.

Vậy $\max\limits_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)=36$ khi $x = y = z = 3$.

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x,y,z,t)=\frac{x^3}{y+z+t}+\frac{y^3}{z+t+x}+\frac{z^3}{t+x+y}+\frac{t^3}{x+y+z}$$

Xét trên miền D = $\{(x,y,z,t): x,y,z,t\ge o; xy+yz+zt+tx=1\}$.

Giải:

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder cho hai dãy số $\sqrt{\dfrac{x^3}{y+z+t}}$, $\sqrt{\dfrac{y^3}{z+t+x}}, \sqrt{\dfrac{z^3}{t+x+y}}, \sqrt{\dfrac{t^3}{x+y+z}}$ và $\sqrt{x(y+z+t)}, \sqrt{y(z+t+x)}, \sqrt{z(t+x+y)}$, , $\sqrt{t(x+y+z)}$, ta được:

$$f(x,y,z,t)[x(y+z+t)+y(z+t+x)+z(t+x+y)+t(x+y+z)]\ge$$
$$\ge (x^2+y^2+z^2+t^2)^2$$

Hay $f(x,y,z,t)\left[(x+y+z+t)^2-(x^2+y^2+z^2+t^2)\right]\ge (x^2+y^2+z^2+t^2)^2$

$$\Rightarrow f(x,y,z,t)\ge \frac{(x^2+y^2+z^2+t^2)^2}{(x+y+z+t)^2-(x^2+y^2+z^2+t^2)} \quad (1)$$

Mặt khác:

$(x^2+y^2+z^2+t^2)\ge \dfrac{(x+y+z+t)^2}{4}$ (Hệ quả bất đẳng thức Hölder)

$$\Rightarrow (x+y+z+t)^2-(x^2+y^2+z^2+t^2)\le 3(x^2+y^2+z^2+t^2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$f(x,y,z,t) \geq \frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)$$

Lại áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder một lần nữa cho hai dãy x, y, z, t và y, z, t, x ta được:

$$\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)^2 \geq (xy+yz+zt+tx)^2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2+t^2\right) \geq 1 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$f(,x,y,z,t) \geq \frac{1}{3}, \forall (x,y,z,t) \in D$$

Do $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$ và $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in D$, nên: $\min\limits_{(x,y,z,t)\in D} f(x,y,z,t) = \frac{1}{3}$.

<u>Bài 6:</u> Giả sử x, y là các số thực thoả điều kiện: $\log_{x^2+y^2}(x+y) \geq 1$

Chứng minh rằng $x+2y \leq \frac{3+\sqrt{10}}{2}$.

Giải:

Có 2 trường hợp sau:

① Nếu $x^2 + y^2 > 1$. Khi đó từ:

$$\log_{x^2+y^2}(x+y) \geq 1 \Rightarrow x+y \geq x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

Ta có: $x+2y = \left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{3}{2}$ (2)

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder cho 2 dãy $x-\frac{1}{2}$; $y-\frac{1}{2}$ và 1; 2, ta được:

$$\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]\left(1^2+2^2\right) \geq \left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

Hay từ (2) ta có: $5\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right] \geq \left(x+2y-\frac{3}{2}\right)^2$ (3)

Từ (1), (3) suy ra: $\frac{\sqrt{10}}{2} \geq x+2y-\frac{3}{2}$ hay $x+2y \leq \frac{3+\sqrt{10}}{2}$ (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{y-\frac{1}{2}}{2} \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5+\sqrt{10}}{10} \\ y = \dfrac{5+2\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

② Nếu $0 < x^2 + y^2 < 1$:

$$\log_{x^2+y^2}(x+y) \geq 1 \Rightarrow x + y \leq x^2 + y^2$$

Do $0 < x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow |y| < 1$, nên:

$$x + 2y = x + y + y \leq x^2 + y^2 + y < 1 + 1 = 2 < \frac{3+\sqrt{10}}{2}$$

Tóm lại $\forall x, y$ thoả mãn điều kiện đầu bài, ta luôn có: $x + 2y \leq \dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$x = \frac{5+\sqrt{10}}{10}, y = \frac{5+2\sqrt{10}}{10}.$$

1.2. Ứng dụng trong hình học:

Bài 1: Chứng minh rằng trong mọi tam giác, ta có:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{36}{35}\left(p^2 + \dfrac{abc}{p}\right)$, ở đây p là nửa chu vi tam giác.

Giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{35}\left[\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 + \frac{2abc}{a+b+c}\right]$$

$$\Leftrightarrow 35(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9(a+b+c)^2 + \frac{72abc}{a+b+c} \quad (1)$$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$27(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9(a+b+c)^2 \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \text{ và } a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\Rightarrow 8(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c) \geq 72abc$$

$$\Rightarrow 8(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{72abc}{a+b+c} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra (1) đúng.

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{36}{35}\left[\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)^2 + \dfrac{2abc}{a+b+c}\right]$.

Dấu bằng có khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Bài 2: Cho a, b, c là 3 cạnh của ΔABC, S là diện tích.

Nếu p, q, r > 0 thì: $\dfrac{p}{q+r}.a^2 + \dfrac{q}{r+p}.b^2 + \dfrac{r}{p+q}.c^2 \geq 2\sqrt{3}S$.

Giải:

Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$(a+b+c)^2=\left(\frac{a}{\sqrt{q+r}}\sqrt{q+r}+\frac{b}{\sqrt{r+p}}\sqrt{r+p}+\frac{c}{\sqrt{p+q}}\sqrt{p+q}\right)^2\le$$

$$\le 2\left(\frac{a^2}{q+r}+\frac{b^2}{r+p}+\frac{c^2}{p+q}\right)(p+q+r)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\right)+2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\ge\frac{1}{2}\left[-2\left(a^2+b^2+c^2\right)+(a+b+c)^2\right]$$

Ta chứng minh: $\frac{1}{2}\left[-2\left(a^2+b^2+c^2\right)+(a+b+c)^2\right]\ge 2\sqrt{3}S$ (1)

Thật vậy:

$$(1)\Leftrightarrow\left[a^2-(b-c)^2\right]+\left[b^2-(c-a)^2\right]+\left[c^2-(a-b)^2\right]\ge 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)(a+b-c)+(a+b-c)(-a+b+c)+$$

$$+(a-b+c)(-a+b+c)\ge 4S\sqrt{3} \quad (2)$$

Đặt: $\begin{cases} x=-a+b+c>0\\ y=a-b+c>0\\ z=a+b-c>0\end{cases}$

$$(2)\Leftrightarrow yz+zx+xy\ge 4S\sqrt{3}\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge\sqrt{3.xyz(x+y+z)}$$

(Vì $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{x+y+z}{2}.\frac{x}{2}.\frac{y}{2}.\frac{z}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{xyz(x+y+z)}$)

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2\ge 3xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2\ge 0 \text{ (đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$.

$\Rightarrow$ (1) đúng.

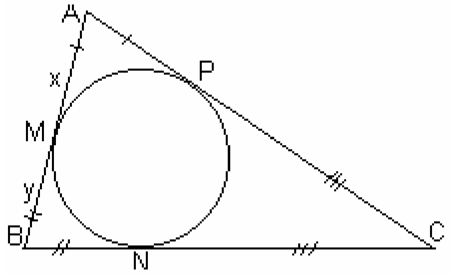
$$\Rightarrow \frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\ge 2S\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c\\ p=q=r\end{cases}$

<u>Bài 3:</u> Cho ΔABC có a, b, c là độ dài các cạnh.
Chứng minh rằng:
$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$

Giải:

Dựng đường tròn nội tiếp ΔABC.



Đặt $\begin{cases} AM = x \\ BM = y \\ CN = z \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$(y+z)^2(x+y)(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^3z+z^3x+x^3y \geq xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z} \geq x+y+z \qquad (*)$$

Theo hệ quả bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$(x+y+z)^2=\left(\frac{y}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}+\frac{z}{\sqrt{y}}.\sqrt{y}+\frac{x}{\sqrt{z}}.\sqrt{z}\right) £ \left(\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z}\right)(x+y+z)$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z} \geq x+y+z$$

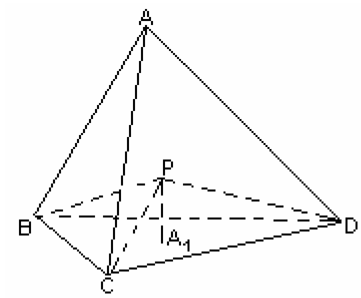
$\Rightarrow$ (*) đúng.

Vậy: $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$.

Bài 4: Cho tứ diện ABCD. P là điểm tuỳ ý trong tứ diện. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là hình chiếu của P lên các mặt BCD, ACD, ABD và ABC. Gọi S và r tương ứng là diện tích toàn phần và bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện. Chứng minh:

$$\frac{S_{BCD}}{PA_1}+\frac{S_{CDA}}{PB_1}+\frac{S_{DAB}}{PC_1}+\frac{S_{ABC}}{PD_1}\geq \frac{S}{r}$$

Giải:



Đặt: $a_1=\sqrt{\frac{S_{BCD}}{PA_1}}; a_2=\sqrt{\frac{S_{CDA}}{PB_1}}$

$a_3=\sqrt{\frac{S_{DAB}}{PC_1}}; a_4=\sqrt{\frac{S_{ABC}}{PD_1}}$

$b_1=\sqrt{S_{BCD}.PA_1}; b_2=\sqrt{S_{CDA}.PB_1}$

$b_3=\sqrt{S_{DBA}.PC_1}; b_4=\sqrt{S_{ABC}.PD_1}$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$T.(S_{BCD}.PA_1+S_{CDA}.PB_1+S_{DAB}.PC_1+S_{ABC}.PD_1)\geq S^2$. (1)

(T là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh)

Do $S_{BCD}.PA_1=3V_{P.BCD}, S_{CDA}.PB_1=3V_{P.CDA}, S_{DAB}.PC_1=3V_{P.DAB}$, $S_{ABC}.PD_1=3V_{P.ABC}$ nên từ (1) có

$3T(V_{P.BCD}+V_{P.ACD}+V_{P.ABD}+V_{P.ABC})\geq S^2$ hay $T\geq \frac{S^2}{3V}$, trong đó V là thể tích của tứ diện ABCD.

Mặt khác ta có: $3V = Sr \Rightarrow T \geq \frac{S}{r} \Rightarrow$ đ.p.c.m

Dấu "=" có $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4}$.

$\Leftrightarrow S_{BCD} = S_{ACD} = S_{ABD} = S_{ABC}$

Bài 5: Cho tứ diện ABCD, trong đó góc tam diện đỉnh D là tam diện vuông. Giả sử DA = a, BD = b, DC = c. Cho M là một điểm nằm trên một cạnh của ΔABC. Chứng minh rằng:

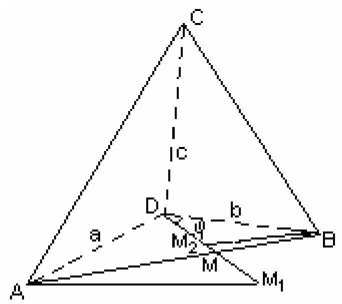
$$S = d(A,DM) + d(B,DM) + d(C,DM) \leq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Ở đây ta dùng ký hiệu d(A, Δ) là khoảng cách từ A tới đường thẳng Δ.

Giải:

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử M nằm trên AB. Đặt $M\hat{D}B = \varphi$.

Kẻ $AM_1 \perp DM$, $BM_2 \perp DM$, khi đó d(A,DM) = AM_1, d(B,DM) = BM_2 và d(C,DM) = c.



Ta có $\varphi = \widehat{DAM_1}$ nên $AM_1 = a\cos\varphi$, $BM_2 =$ $= b\sin\varphi$.

Vậy: S = c + $a\cos\varphi + b\sin\varphi$.

Theo hệ quả bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi \leq \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1)$$

Dấu "=" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{b}{\sin\varphi}$

$\Leftrightarrow tg\varphi = \frac{b}{a} = tgD\hat{A}B$ (do ABD là tam giác vuông)

$\Leftrightarrow \varphi = \widehat{DAB}$

$\Leftrightarrow DM \perp AB$

Vậy ta có $S \leq c + \sqrt{a^2 + b^2}$.

Lại áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$c + \sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (2)$$

Dấu "="trong (2) xảy ra D $\Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Từ (1) và (2) suy ra:

$$d(A,DM) + d(B,DM) + d(C,DM) \leq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow DM \perp AB$ và $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1.3. Ứng dụng trong lượng giác:

Bài 1: Chứng minh rằng:

$$3\sin^2 x + 10\sin x\cos x + 11\cos^2 x - 2\sqrt[3]{301} < 0, \forall x \in \mathbf{R}$$

Giải:

Ta có: $VT = 3\sin^2 x + 10\sin x\cos x + 11\cos^2 x - 2\sqrt[3]{301}$

$$= 3.\frac{1 - \cos 2x}{2} + 5\sin 2x + 11.\frac{1 + \cos 2x}{2} - 2\sqrt[3]{301}$$

$= 4\cos 2x + 5\sin 2x + 7 - 2\sqrt[3]{301}$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$(4\cos 2x + 5\sin 2x)^2 \le 16 + 25 = 41, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow 4\cos 2x + 5\sin 2x \le \sqrt{41}, \forall x \in \mathbf{R}$$

Do đó, ta có: VT $\le \sqrt{41} + 7 - 2\sqrt[3]{301} < 0, \forall x \in \mathbf{R}$ (đpcm)

Bài 2: Cho a, b, c, d > 0, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x,y) = \frac{a\sin^4 x + b\cos^4 y}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{a\cos^4 x + b\sin^4 y}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}$$

Gi ải:

Đặt $f(x,y) = af_1 + bf_2$

Với $f_1 = \dfrac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \dfrac{\cos^4 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}$;

$f_2 = \dfrac{\cos^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \dfrac{\sin^4 y}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$f_1(c+d) = \left(\frac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}\right).\left[\left(c\sin^2 x + d\cos^2 y\right) + \right.$$

$$\left. + \left(c\cos^2 x + d\sin^2 y\right)\right] \ge \left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{c\sin^2 x + d\cos^2 y}}.\sqrt{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos^2 x}{\sqrt{c\cos^2 x + d\sin^2 y}}.\sqrt{\left(c\cos^2 x + d\sin^2 y\right)^2}\right) = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 = 1$$

$\Rightarrow f_1 \ge \dfrac{1}{c+d}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{\sin^2 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} = \frac{\cos^2 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{c\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + d\left(\cos^2 y + \sin^2 y\right)} = \frac{1}{c+d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c + d\dfrac{\cos^2 y}{\sin^2 x}} = \frac{1}{c+d} \Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 y$$

Tương tự $f_2 \ge \dfrac{1}{c+d}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 y$

Vậy $f(x,y) = af_1 + bf_2 \ge \dfrac{a}{c+d} + \dfrac{b}{c+d} = \dfrac{a+b}{c+d}$.

Do đó $\min f = \dfrac{a+b}{c+d}$ khi $\sin^2 x = \cos^2 y$.

Bài 3: Cho a, b, c > 0 và asinx + bcosy = c. Chứng minh:

$$\frac{\cos^2 x}{a} + \frac{\sin^2 y}{b} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3 + b^3} \qquad (1)$$

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1-\sin^2 x}{a} + \frac{1-\cos^2 y}{b} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3+b^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b} \ge \frac{c^2}{a^3+b^3} \qquad (2)$$

Đặt $a_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{a}}; a_2 = \frac{\cos y}{\sqrt{b}}$

$b_1 = a\sqrt{a}; b_2 = b\sqrt{b}$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$\left(\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b}\right)\left(a^3+b^3\right) \ge \left(a\sin x + b\cos y\right)^2$$

Do $a^3 + b^3 > 0$ và asinx + bcosy = c $\Rightarrow$ (2) đúng. Do đó (1) đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{a^2} = \frac{\cos y}{b^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{a^2} = \frac{\cos y}{b^2} \\ a\sin x + b\cos y = c \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{a^2 c}{a^3+b^3}; \cos y = \frac{b^2 c}{a^3+b^3}$$

Bài 4: Chứng minh rằng:

$$\left|\frac{\left(1-tg^2 x\right)\sin 2x + 2tgx\cos 2x}{1+tg^2 x}\right| \le 1, \text{ với } \forall x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Giải:

Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder ta có:

$$\left[\left(1-tg^2 x\right)\sin 2x + 2tgx\cos 2x\right]^2 \le \left[\left(1-tg^2 x\right)^2 + 4tg^2 x\right]\left[\sin^2 2x + \cos^2 2x\right]$$

$$\le \left(1+tg^2 x\right)^2, \forall x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\left[\left(1-tg^2 x\right)\sin 2x + 2tgx\cos 2x\right]^2}{\left(1+tg^2 x\right)^2} \le 1, \forall x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\left(1-tg^2 x\right)\sin 2x + 2tgx\cos 2x}{1+tg^2 x}\right| \le 1, \forall x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Bài 5: Giải phương trình:

$$\sqrt{\frac{3}{4} + \sin^2\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4} + \cos^2\frac{x}{2}} = 2$$

Giải:

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{4} + \sin^2\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4} + \cos^2\frac{x}{2}}\right)^2 \le \left(\frac{3}{4} + \sin^2\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\frac{x}{2}\right).2 = 4.$$

$\Rightarrow VT \le 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\sqrt{\frac{3}{4}+\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\cos^2\frac{x}{2}}=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\\ \cos^2\frac{x}{2}=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{2}\\ \cos\frac{x}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,(k\in\mathbf{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Bài 6: Giải phương trình:

$$\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}=2 \qquad (1)$$

Giải:

Ta có:

$$2-\sin^2 x\ge 1,\forall x\Rightarrow \sqrt{2-\sin^2 x}\ge 1$$

$$\Rightarrow \sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}\ge 1+\sin x\ge 0,\forall x\in\mathbf{R}$$

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$\left(\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}\right)^2\le\left(\sin^2 x+\left(\sqrt{2-\sin^2 x}\right)^2\right)(1+1)=4$$

$$\Rightarrow \sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}\le 2$$

Dấu "=" xảy ra, nghĩa là (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\frac{\sin x}{1}=\frac{\sqrt{2-\sin^2 x}}{1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=1\\ \sqrt{2-\sin^2 x}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=1\\ \sin^2 x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbf{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbf{Z}$.

1.4. Ứng dụng trong số học:

Bài 1: Cho dãy số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $0 < p < q$ là 2 số hữu tỉ. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}<\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Giải:

Đặt $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$ với $p'=\frac{q}{p};q'=\frac{q}{q-p}$; p', q' cũng là số hữu tỉ > 0 (do 0<p<q là hai số hữu tỉ). Áp dụng bất đẳng thức Hölder với hai dãy $\{a'_k\}$, $\{b_k\}$ xác định như sau: $a'_k=a_k^p;b\equiv 1,\forall k=1,2,\ldots,n$. Ta được bất đẳng thức:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a'^{\frac{q}{p}}_k\right)^{\frac{p}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^{\frac{p}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}}>\sum_{k=1}^{n}a'_k\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^q\right)^{\frac{p}{q}}.n^{\frac{q-p}{q}}>\sum_{k=1}^{n}a_k^p$$

Luỹ thừa bậc $\frac{1}{p}$ cả hai vế, ta được: $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}.n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} > \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Hay $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} > \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (đpcm)

Bài 2: Cho $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ và $x_1 + x_2 + ... + x_n = na$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n \leq a^2C_n^2$$

(Bất đẳng thức Maclaurin)

Giải:

Ta có: $x_1 + x_2 + ... + x_n = na$

$$\Rightarrow 2(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n) = n^2a^2 - (x_1{}^2 + x_2{}^2 + ... + x_n{}^2) \quad (1)$$

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Hölder với hai dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và 1,1,…,1 ta được:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 \leq n(x_1{}^2 + x_2{}^2 + ... + x_n{}^2) \quad (2)$$

$$\Rightarrow (x_1{}^2 + x_2{}^2 + ... + x_n{}^2) \geq na^2$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$2\sum_{i<j}^{n} x_ix_j \leq n^2a^2 - na^2 \Leftrightarrow \sum_{i<j}^{n} x_ix_j \leq a^2\frac{n(n-1)}{2} = a^2C_n^2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Bài 3: Cho n $x_1, x_2, ..., x_n$ số như sau:

$$x_1 = \sin\alpha_1$$
$$x_2 = \cos\alpha_1\sin\alpha_2$$
$$x_3 = \cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3$$
....
$$x_{n-1} = \cos\alpha_1\cos\alpha_2.....\cos\alpha_{n-2}\sin\alpha_{n-1}$$
$$x_n = \cos\alpha_1\cos\alpha_2.....\cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-1}$$

Chứng minh rằng: $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_2^4 \geq \frac{1}{n}$.

Giải:

Ta có: $x_n^2 + x_{n-1}^2 = \cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2.....\cos^2\alpha_{n-2}(\cos^2\alpha_{n-1} + \sin^2\alpha_{n-1})$

$= \cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2.....\cos^2\alpha_{n-2}$

$$x_n^2 + x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2 = \cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2...\cos^2\alpha_{n-3}(\cos^2\alpha_{n-2} + \sin^2\alpha_{n-2})$$

$$= \cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2.....\cos^2\alpha_{n-3}.$$

Lý luận tương tự, ta có: $x_n^2 + x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2 + ... + x_1^2 = 1$ (1)

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Hölder cho 2 dãy $x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2$ và 1, 1, …, 1 ta được:

$$n(x_1^4 + x_2^4 + ... + x_2^4) \geq (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x_1^4 + x_2^4 + ... + x_2^4 \ge \frac{1}{n}$ (đpcm).

Bài 4: Cho 100 số thực bất kỳ a_1, a_2, ….., a_{100} có tổng bình phương bằng 100. Chứng minh rằng tổng của chúng không vượt quá 100.

Giải:

Ta có:

$$\left(a_1 + a_2 + ... + a_{100}\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{100}^2\right)\left(\underbrace{1^2 + 1^2 + ... + 1^2}_{100}\right) =$$

$$= 100.100 = 100^2$$

(Hệ quả của bất đẳng thức Hölder)

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_{100} \le 100$$

Vậy $a_1 + a_2 + ... + a_{100} \le 100$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_{100} = 1$.

Bài 5: Ch ứng minh rằng với mọi số nguyên n > 1 ta đều có:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n} < \frac{2n^2 + n + 1}{4}$$

Giải:

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Hölder cho hai bộ n số (1, 1, …, 1) và $\left(\sqrt{1}, \sqrt{2}, ..., \sqrt{n}\right)$, ta có:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n} \le \sqrt{1^2 + 1^2 + ... + 1^2}\sqrt{\left(\sqrt{1}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + ... + \left(\sqrt{n}\right)^2}$$

$$\le \sqrt{n}\sqrt{1 + 2 + ... + n} = \sqrt{n}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} = n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

Vì $\frac{\sqrt{1}}{1} \ne \frac{\sqrt{2}}{1}$ nên không thể có đẳng thức với n > 1.

Vậy với n nguyên > 1, ta có:

(1) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n} < n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$

Mặt khác:

(2) $n\sqrt{\frac{n+1}{2}} \le \frac{n^2 + \frac{n+1}{2}}{2} = \frac{2n^2 + n + 1}{4}$

Từ (1) và (2) suy ra: $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n} < \frac{2n^2 + n + 1}{4}$.

Bài 6: Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực thoả: $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 3$.

Chứng minh rằng: $\left|\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + ... + \frac{a_n}{n+1}\right| < \sqrt{2}$

Giải:

Xét hai dãy số $a_1, a_2, ..., a_n$ và $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n+1}$.

Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+.....+\frac{a_n}{n+1}\right)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2+....+a_n^2\right)\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Hay $\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+.....+\frac{a_n}{n+1}\right)^2 \le 3\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ (1)

$\forall k > 1$, ta có: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2-\frac{1}{4}} = \frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}$ (2)

Cộng từng vế bất đẳng thức (2) từ k = 2 đến k = n + 1, ta được:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1,5}-\frac{1}{2,5}+\frac{1}{2,5}-\frac{1}{3,5}+.......+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{1,5}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}} < \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} \quad (3)$$

Từ (1), (3) suy ra:

$$\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+.....+\frac{a_n}{n+1}\right)^2 < 3.\frac{2}{3} = 2 \text{ hay } \left|\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+.....+\frac{a_n}{n+1}\right| < \sqrt{2}$$

1.5. Ứng dụng trong đại số:

Bài 1: Cho các số thực dương x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^3}{\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)^2} \le 3$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Hölder với p = 3, q = $\frac{3}{2}$; $a_1 = a_2 = a_3 = 1$; $b_1 = x_1^2$, $b_2 = x_2^2$, $b_3 = x_3^2$. Khi đó ta được:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 3^{\frac{1}{3}}\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)^{\frac{2}{3}}$$

Suy ra: $\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^3 \le 3\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)^2$

Do đó: $\frac{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^3}{\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)^2} \le 3$

Bài 2: Cho a, b, c, u, v, w $\ge$ 0 và $a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}} \le b^{\frac{1}{p}}, u^{\frac{1}{p+1}} + w^{\frac{1}{p+1}} \ge v^{\frac{1}{p+1}}$ với q là số hữu tỉ > 0.

Chứng minh rằng: ubc - vca + wab ≥ 0

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Hölder cho hai dãy $a^{\frac{1}{p+1}}, c^{\frac{1}{p+1}}$ và $(uc)^{\frac{1}{p+1}}, (wa)^{\frac{1}{p+1}}$

và do $\frac{1}{p+1}+\frac{1}{\frac{p+1}{p}}=1$, nên ta có:

$$\left[\left(a^{\frac{1}{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{p}}+\left(c^{\frac{1}{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{p}}\right]^{\frac{p}{p+1}}\left[(uc)^{\frac{1}{p+1}.(p+1)}+(wa)^{\frac{1}{p+1}.(p+1)}\right]^{\frac{1}{p+1}}\geq$$

$$\geq a^{\frac{1}{p+1}}(uc)^{\frac{1}{p+1}}+c^{\frac{1}{p+1}}(wa)^{\frac{1}{p+1}}$$

Hay ta có:

$$\left(a^{\frac{1}{p}}+c^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}}(uc+wa)^{\frac{1}{p+1}}\geq(ac)^{\frac{1}{p+1}}\left(u^{\frac{1}{p+1}}+w^{\frac{1}{p+1}}\right) \quad (*)$$

Theo giả thiết $a^{\frac{1}{p}}+c^{\frac{1}{p}}\leq b^{\frac{1}{p}}$ và $u^{\frac{1}{p+1}}+w^{\frac{1}{p+1}}\geq v^{\frac{1}{p+1}}$, nên từ (*) ta có

$$b^{\frac{1}{p+1}}(uc+wa)^{\frac{1}{p+1}}\geq(acv)^{\frac{1}{p+1}}$$

$$\Leftrightarrow buc+bwa-acv\geq 0$$

Hay $ubc - vca + wab \geq 0$

Bài 3: Cho $x_1, x_2, x_3 > 0$. Chứng minh bất đẳng thức Nesbit cho 3 số hạng sau:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geq\frac{3}{2}$$

Giải:

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Hölder với hai dãy sau

$$a_1=\sqrt{\frac{x_1}{x_2+x_3}}, a_2=\sqrt{\frac{x_2}{x_3+x_1}}, a_3=\sqrt{\frac{x_3}{x_1+x_2}}$$

$$b_1=\sqrt{x_1(x_2+x_3)}, b_2=\sqrt{x_2(x_3+x_1)}, b_3=\sqrt{x_3(x_1+x_2)}$$

Khi đó ta có:

$$\left(\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\right)[x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_1)+$$

$$+x_3(x_1+x_2)]\geq(x_1+x_2+x_3)^2$$

Do $x_i>0, \forall i=1,2,3$ suy ra:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geq\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_1)+x_3(x_1+x_2)} \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra:

$$\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2+x_3}=\frac{x_2}{x_3+x_1}=\frac{x_3}{x_1+x_2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 2x_1 \\ x_3 + x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

Ta chứng minh: $\dfrac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_1) + x_3(x_1 + x_2)} \geq \dfrac{3}{2}$ (2)

Thật vậy: (2) $\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 \geq 3(2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1)$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^2 \geq 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \geq 0$ (đúng) (3)

Vậy (2) đúng, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$.

Từ (1), (2) suy ra: $\dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_3 + x_1} + \dfrac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \dfrac{3}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$.

Bài 4: Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots b_n$ là 2n số thực, trong đó $b_i > 0$ $\forall i = 1,2,..,n$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

(Bất đẳng thức Svác-xơ)

Giải:

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Hölder với hai dãy số sau:

$$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, ..., \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \text{ và } \sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, ..., \sqrt{b_n}$$

Ta được $\left(\dfrac{a_1^2}{b_1} + \dfrac{a_2^2}{b_2} + ... + \dfrac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + ... + b_n) \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$

$\Rightarrow \dfrac{a_1^2}{b_1} + \dfrac{a_2^2}{b_2} + ... + \dfrac{a_n^2}{b_n} \geq \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$ (Do $b_1 + b_2 + ... + b_n > 0$) (*)

Dấu bằng trong (*) xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Bất đẳng thức Svác-xơ được chứng minh xong.

Bài 5: Có tồn tại hay không ba số a, b, c thoả mãn bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} > \sqrt{c(ab+1)}$$

Giải:

Ta chỉ cần xét các số $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$.

Đặt $a_1 = \sqrt{a-1}; a_2 = 1$

$b_1 = 1; b_2 = \sqrt{b-1}$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$ab \geq \left(\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}\right)^2$ hay $\sqrt{ab} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$ (1)

Từ (1) suy ra

$$\sqrt{(ab+1)-1}+\sqrt{c-1}\geq\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \quad (2)$$

Lại áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder với hai dãy

$a_1=\sqrt{(ab+1)-1}; a_2=1$ và $b_1=1; b_2=\sqrt{c-1}$

Khi đó ta có:

$$(ab+1)c\geq\left(\sqrt{(ab+1)-1}+\sqrt{c-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{c(ab+1)}\geq\sqrt{(ab+1)-1}+\sqrt{c-1} \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra:

$$\sqrt{c(ab+1)}\geq\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1},\ \forall a\geq 1, b\geq 1, c\geq 1$$

Do đó không tồn tại các số a, b, c thoả mãn yêu cầu đề ra.

Bài 6: Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$$

Giải:

Đặt $\begin{cases}6x=b+2c+3d>0\\6y=c+2d+3a>0\\6z=d+2a+3b>0\\6t=a+2b+3c>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a=-5x+7y+z+t\\4b=x-5y+7z+t\\4c=x+y-5z+7t\\4d=7x+y+z-5t\end{cases}$

Theo hệ quả bất đẳng thức Hölder:

$$(a+b+c+d)^2=\left(\sqrt{\frac{a}{6x}}.\sqrt{6xa}+\sqrt{\frac{b}{6y}}.\sqrt{6yb}+\sqrt{\frac{c}{6z}}.\sqrt{6zc}+\sqrt{\frac{d}{6t}}.\sqrt{6td}\right)^2\leq$$

$$\leq\left(\frac{a}{6x}+\frac{b}{6y}+\frac{c}{6z}+\frac{d}{6t}\right)(6xa+6yb+6zc+6td)$$

$$\leq\left(\frac{a}{6x}+\frac{b}{6y}+\frac{c}{6z}+\frac{d}{6t}\right)4(ab+bc+cd+da+bd+ac)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{6x}+\frac{b}{6y}+\frac{c}{6z}+\frac{d}{6t}\right)\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+bc+cd+da+bd+ac)} \quad (1)$$

Ta chứng minh:

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+bc+cd+da+bd+ac)}\geq\frac{2}{3} \quad (2)$$

Thật vậy:

$$(2)\Leftrightarrow 3\left[a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\right]\geq$$
$$\geq 8(ab+bc+cd+da+bd+ca)$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq 2(ab+bc+cd+da+bd+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+(d-b)^2+(c-a)^2\geq 0 \quad (3)$$

Bất đẳng thức (3) đúng.

Vậy, từ (1), (2) và (3) ta suy ra đpcm.

1.6. Ứng dụng trong hình học giải tích:

(Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Hölder để tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng cho trước)

Cho đường thẳng d: $ax + by + c = 0$ và một điểm $M(x_0,y_0)$ ở ngoài đường thẳng ấy. Chứng minh rằng khoảng cách ρ từ điểm M tới d được tính bằng công thức sau:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Giải:

Giả sử $N(x,y)$ là một điểm tuỳ ý thuộc d, tức là ta có $ax + by + c = 0$. Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Hölder cho 2 dãy sau: $a_1 = a$, $a_2 = b$ và $b_1 = x - x_0$, $b_2 = y - y_0$ ta được:

$$(a^2 + b^2)\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right] \geq \left[a(x - x_0) + b(y - y_0)\right]^2 \quad (1)$$

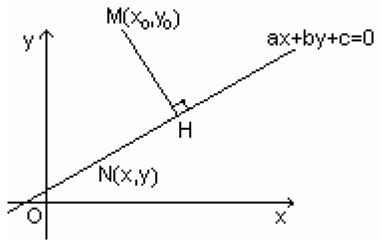
Do $a(x - x_0) + b(y - y_0) = ax + by + c - (ax_0 + by_0 + c)$

$$= -(ax_0 + by_0 + c) \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$MN = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \geq \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra khi và chỉ khi



$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (4) \\ \dfrac{a}{x - x_0} = \dfrac{b}{y - y_0} & (5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = -c \\ bx - ay = bx_0 - ay_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}; y = \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2} \quad (6)$$

Từ (3) và (6) suy ra:

$$\min_{N \in d}(MN) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Kẻ MH vuông góc với d, thì theo tính chất đường vuông góc, ta có:

$$\rho = MH = \min_{N \in d}(MN) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{(đpcm)}$$

1.7. Ứng dụng trong giải tích tổ hợp:

Bài 1: Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{C_n^1}+\sqrt{C_n^2}+......+\sqrt{C_n^n}\le\sqrt{n\left(2^n-1\right)}$$

Giải:

Chọn hai dãy

$$a_1=\sqrt{C_n^1},a_2=\sqrt{C_n^2},......,a_n=\sqrt{C_n^n}$$
$$b_1=b_2=......=b_n=1$$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder, ta có:

$$\left(\sqrt{C_n^1}+\sqrt{C_n^2}+......+\sqrt{C_n^n}\right)^2\le\left(C_n^1+C_n^2+.....+C_n^n\right)\left(1^2+1^2+....+1^2\right)\qquad(1)$$

Vì theo nhị thức Newton, ta có:

$\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}$. Thay a = b = 1

Ta được: $2^n=C_n^0+C_n^1+....+C_n^n\Rightarrow C_n^1+....+C_n^n=2^n-1$

Vậy từ (1) có $\sqrt{C_n^1}+\sqrt{C_n^2}+......+\sqrt{C_n^n}\le\sqrt{n\left(2^n-1\right)}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\sqrt{C_n^1}=\sqrt{C_n^2}=.....=\sqrt{C_n^n}$
$\Leftrightarrow n=1$

Bài 2: Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(C_{2n}^n\right)^2}{n+1}\le\left(C_n^0\right)^4+\left(C_n^1\right)^4+.....+\left(C_n^n\right)^4,\ \ \forall n\in\mathbf{N}^*$$

Giải:

Ta có: $(1+x)^{2n}=(1+x)^n.(1+x)^n$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=0}^{2n}C_{2n}^ix^i=\left(\sum_{j=0}^{n}C_n^jx^j\right)\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k\right)$$
$$\Leftrightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+.....+C_{2n}^nx^n+.....+C_{2n}^{2n}x^{2n}=$$
$$=\left(C_n^0+C_n^1x+.....+C_n^nx^n\right)\left(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+.....+C_n^n\right)$$

Đồng nhất hệ số của x^n ở 2 vế đa thức, ta được:

$$C_{2n}^n=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+.....+\left(C_n^n\right)^2$$
$$\Rightarrow\left(C_{2n}^n\right)^2=\left[1.\left(C_n^0\right)^2+1.\left(C_n^1\right)^2+.....+1.\left(C_n^n\right)^2\right]^2\le$$
$$\le\underbrace{\left(1^2+1^2+.....+1^2\right)}_{n+1}\left[\left(C_n^0\right)^4+\left(C_n^1\right)^4+.....+\left(C_n^n\right)^4\right],\forall n\in\mathbf{N}^*$$

(Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder)

$$\Rightarrow\left(C_n^0\right)^4+\left(C_n^1\right)^4+.....+\left(C_n^n\right)^4\ge\frac{\left(C_{2n}^n\right)^2}{n+1},\forall n\in\mathbf{N}^*\quad\text{(đpcm)}$$

Bài 3: Chứng minh rằng:

$$\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+.....+\left(C_n^n\right)^2\ge\frac{4^n}{n+1},n\in\mathbf{Z},n\ge 2.$$

Giải:

Ta có:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k}.1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

$$\Rightarrow 2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$$

$$\Rightarrow 4^n = \left(1.C_n^0 + 1.C_n^1 + ... + 1.C_n^n\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\underbrace{1^2 + 1^2 + ... + 1^2}_{n+1}\right)\left[\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2\right]$$

(Theo hệ quả của bất đẳng thức Hölder)

$$\Rightarrow \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 \geq \frac{4^n}{n+1} \quad \text{(đpcm).}$$

§2. ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI

2.1. Ứng dụng trong lượng giác:

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi α ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 2} + \sqrt{\cos^2\alpha + 6\cos\alpha + 13} \le 5$$

Giải:

Ta có: VT = $\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + 1} + \sqrt{(\cos\alpha + 3)^2 + 4}$

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Descartes vuông góc, ta đặt:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (1-\cos\alpha, 1)\\ \vec{v} &= (\cos\alpha + 3, 2)\end{aligned} \quad \Rightarrow \text{VT} = |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Ta có: $\vec{u} + \vec{v}$ = (4, 3) $\Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{16+9} = 5$

Theo hệ quả bất đẳng thức Minkowski: $|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$ ta có: $5 \le$ VT.

Bài 2: Chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y + \sin^2(x-y)} \ge 2$$

Giải:

Trong hệ toạ độ Descartes vuông góc, ta đặt:

$$\vec{u} = (2\cos x\cos y, \sin(x-y)) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y + \sin^2(x-y)}$$

$$\vec{v} = (2\sin x\sin y, \sin(x-y)) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y + \sin^2(x-y)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} &= [2(\cos x\cos y + \sin x\sin y), 2\sin(x-y)]\\ &= 2[\cos(x-y), \sin(x-y)]\end{aligned}$$

$$|\vec{u}+\vec{v}| = 2\sqrt{\cos^2(x-y) + \sin^2(x-y)} = 2$$

Mặt khác $|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (Hệ quả bất đẳng thức Minkowski)

Suy ra $\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y + \sin^2(x-y)} \ge 2$

Dấu bằng xảy ra nếu như thoả mãn một trong các trường hợp sau:

① $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x-y) = 0\\ \cos x\cos y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = y + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})\\ \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos y = 0\end{array}\right.\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{2} + m\pi\\ y = \dfrac{\pi}{2} + n\pi\end{cases}, \ (m, n \in \mathbf{Z})$$

② $\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x-y) = 0\\ \sin x\sin y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = n\pi\\ y = m\pi\end{cases}, \ (m, n \in \mathbf{Z})$

③ $\vec{u} = k\vec{v}$ với k > 0 $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\cos y = k\sin x\sin y\\ \sin(x-y) = k\sin(x-y)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \text{cosxcosy} = \text{sinxsiny}$$
$$\Leftrightarrow \cos(x+y) = 0$$
$$\Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ (k \in \mathbf{Z})$$

Vậy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

Hoặc $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}$, hoặc $\begin{cases} x = n\pi \\ y = m\pi \end{cases}$ hoặc $x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (với k, m, n $\in \mathbf{Z}$).

Bài 3: Chứng minh rằng $\forall \alpha, \beta$, ta có

$$\sqrt{\cos^4\alpha + \cos^4\beta} + \sin^2\alpha + \sin^2\beta \geq \sqrt{2}$$

Giải:

Xét các vectơ sau:

$$\vec{u} = (\cos^2\alpha, \cos^2\beta); \vec{v} = (\sin^2\alpha, 0); \vec{w} = (0, \sin^2\beta)$$

Khi đó ta có: $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (1,1)$

Mặt khác:

$|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$ (Hệ quả bất đẳng thức Minkowski)

$\Leftrightarrow \sqrt{\cos^4\alpha + \cos^4\beta} + \sin^2\alpha + \sin^2\beta \geq \sqrt{2}$ (1). Đó là đ.p.c.m.

Để có dấu bằng trong (1), trước hết điều kiện cần là $\vec{v}, \vec{w}$ phải là hai vectơ cùng chiều. Điều ấy có khi và chỉ khi $\sin\alpha = \sin\beta = 0$ (2). Suy ra $\cos^4\alpha + \cos^4\beta = 2$.

Vậy (2) chính là điều kiện đủ.

Tóm lại dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = k\pi, \beta = m\pi$ với $k, m \in \mathbf{Z}$.

Bài 4: Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha} + \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx\cos\beta} \geq$$
$$\geq \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta)}$$

Giải:

Bất đẳng thức đã cho viết lại dưới dạng sau:

$$\sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (x - a\cos\alpha)^2} + \sqrt{(b\sin\beta)^2 + (b\cos\beta - x)^2} \geq$$
$$\geq \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta)}$$

Trong hệ toạ độ Descartes vuông góc, xét các vectơ:

$$\vec{u} = (a\sin\alpha, x - a\cos\alpha)$$
$$\vec{v} = (b\sin\beta, b\cos\beta - x)$$

Suy ra: $|\vec{u}| = \sqrt{(a\sin\alpha)^2 + (x - a\cos\alpha)^2}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(b\sin\beta)^2 + (b\cos\beta - x)^2}$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (a\sin\alpha + b\sin\beta; b\cos\beta - a\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \left|\vec{u}+\vec{v}\right| = \sqrt{(a\sin\alpha + b\sin\beta)^2 + (b\cos\beta - a\cos\alpha)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + b^2\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) - 2ab\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right)}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta)}$$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Minkowski ta suy ra đpcm.

2.2. Ứng dụng trong giải tích:

<u>Bài 1:</u> Cho hàm số $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (c-x)^2}$

Với giá trị nào của x thì f(x) có giá trị nhỏ nhất?

Giải:

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Descartes vuông góc xét hai vectơ:

$\vec{u} = (a, x), \vec{v} = (a, c-x)$

Ta có $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (c-x)^2}$ = f(x).

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cộng truyến. Do thành phần toạ độ thứ nhất của $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng nhau nên thành phần toạ độ thứ hai của chúng cũng phải bằng nhau nghĩa là:

$$x = c - x \Leftrightarrow x = \frac{c}{2}$$

Vậy khi $x = \frac{c}{2}$ hàm số f(x) đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>Bài 2:</u> Cho x là một số thực dương bất kỳ và p, q là những hằng số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

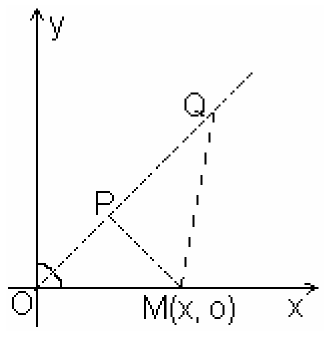
$$y = \sqrt{(x-p)^2 + p^2} + \sqrt{(x-q)^2 + q^2} \text{ với } q > p.$$

Giải:

Trong hệ toạ độ Descartes vuông góc Oxy xét ba điểm:

M(x, y) di động trên tia Ox (M $\neq$ O).

P(p, p) và Q(q, q) nằm trên phân giác của góc thứ nhất.



Suy ra: $\left|\overrightarrow{MQ}\right| = \sqrt{(x-q)^2 + q^2}$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{2(q-p)^2}$

Ta có: $\left|\overrightarrow{PM}\right| + \left|\overrightarrow{MQ}\right| \ge \left|\overrightarrow{PQ}\right|$ (Hệ quả bất đẳng thức Minkowski)

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + p^2} + \sqrt{(x-q)^2 + q^2} \ge \sqrt{2}(q-p).$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\sqrt{2}(q-p)$.

<u>Bài 3:</u> Cho a, b, c, h là bội số dương cho trước, còn x, y,z là ba số thực thay đổi sao cho

$ax + by + cz = k$ (1) (k cố định cho trước)

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x,y,z)=a\sqrt{h^2+x^2}+b\sqrt{h^2+y^2}+c\sqrt{h^2+z^2}$ với các (x, y, z) thoả mãn (1)

Giải:

Trong hệ toạ độ Descartes vuông góc xét các điểm $A(ah,ax);B((a+b)h,ax+by)$ và $C((a+b+c)h,ax+by+cz)$

Suy ra: $\overrightarrow{OA}=(ah,ax);\overrightarrow{AB}=(bh,by);\overrightarrow{BC}=(ch,cz)$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=a\sqrt{h^2+x^2};\left|\overrightarrow{AB}\right|=b\sqrt{h^2+y^2};\left|\overrightarrow{BC}\right|=c\sqrt{h^2+z^2}$$

Vậy f(x, y, z) = $\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|$ (2)

Theo hệ quả bất đẳng thức Minkowski ta có:

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|\ge\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$$

Mà $\overrightarrow{OC}=\sqrt{k^2+(a+b+c)^2h^2}$

Từ (2) suy ra $f(x,y,z)\ge\overrightarrow{OC}=\sqrt{k^2+(a+b+c)^2h^2}$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}$ cùng phương, cùng chiều $\Leftrightarrow$ khi và chỉ khi O,A,B,C thẳng hàng.

$$\Leftrightarrow\frac{ax}{ah}=\frac{ax+by}{ah+bh}=\frac{ax+by+cz}{ah+bh+ch}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=\frac{k}{a+b+c}$$

Như vậy:

$$f\left(\frac{k}{a+b+c},\frac{k}{a+b+c},\frac{k}{a+b+c}\right)=\sqrt{k^2+(a+b+c)^2h^2} \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra: $\min f(x,y,z)=\sqrt{k^2+(a+b+c)^2h^2}$

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất của tổng:

$$\sin2x_1+\sin2x_2+.....+\sin2x_n$$

trong đó $(x_1,x_2,.....,x_n)$ là nghiệm của phương trình

$$\sin^2x_1+\sin^2x_2+.....+\sin^2x_n=a,$$

n là một số nguyên dương cho trước, $0\le a\le n$.

Giải:

Thay $\sin^2x_i=\frac{1-\cos2x_i}{2},i=1,2,.....,n$ vào đẳng thức đã cho, ta được:

$$\frac{1}{2}(1-\cos2x_1+1-\cos2x_2+....+1-\cos2x_n)=a$$

$$\Leftrightarrow n-(\cos2x_1+\cos2x_2+....+\cos2x_n)=2a$$

$$\Leftrightarrow \cos2x_1+\cos2x_2+....+\cos2x_n=n-2a \quad (1)$$

Trong hệ toạ độ Descartes vuông góc xét các vectơ:

$$\overrightarrow{v_1}=(\cos2x_1,\sin2x_1),\ \overrightarrow{v_2}=(\cos2x_2,\sin2x_2),...,\ \overrightarrow{v_n}=(\cos2x_n,\sin2x_n)$$

Suy ra: $\overrightarrow{v_1}+...+\overrightarrow{v_n}=(\cos2x_1...+\cos2x_n,\sin2x_1+...+\sin2x_n)$

Ta có: $\left|\overrightarrow{v_1}\right|+...+\left|\overrightarrow{v_n}\right| \ge \left|\overrightarrow{v_1}+...+\overrightarrow{v_n}\right|$ (Hệ quả bất đẳng thức Minkowski)

Do đó: $\left(\left|\overrightarrow{v_1}\right|+...+\left|\overrightarrow{v_n}\right|\right)^2 \ge \left(\left|\overrightarrow{v_1}+...+\overrightarrow{v_n}\right|\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{\cos^2 2x_1+\sin^2 2x_1}\right)+...+\left(\sqrt{\cos^2 2x_n+\sin^2 2x_n}\right)\right]^2 \ge$$

$$\ge \left(\cos 2x_1+...+\cos 2x_n\right)^2+\left(\sin 2x_1+...+\sin 2x_n\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos 2x_1+...+\cos 2x_n\right)^2+\left(\sin 2x_1+...+\sin 2x_n\right)^2 \le n^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(1+...+1)}_{n}^2 \ge \left(\cos 2x_1+...+\cos 2x_n\right)^2+\left(\sin 2x_1+...+\sin 2x_n\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos 2x_1+...+\cos 2x_n\right)^2+\left(\sin 2x_1+...+\sin 2x_n\right)^2 \le n^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\left(\sin 2x_1+...+\sin 2x_n\right)^2 \le n^2-(n-2a)=4a(n-a).$$

Do đó:

$$\sin 2x_1+\sin 2x_2+.....+\sin 2x_n \le 2\sqrt{a(n-a)}.$$

Có đẳng thức khi n vectơ $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},....,\overrightarrow{v_n}$ bằng nhau và các góc x_i được chọn sao cho $\sin 2x_i \ge 0$ với i = 1, 2, …., n. Để đạt được điều này, ta tìm x_1, ….., x_n thoả mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} x_1=x_2=.....=x_n \\ \sin^2 x_1+\sin^2 x_2+...+\sin^2 x_n=n\sin^2 x_1=a \\ 0\le 2x_i\le \pi, i=1,2,....,n \end{cases}$$

Suy ra: $x_1=x_2=.....=x_n=\alpha$,trong đó $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sin\alpha=\sqrt{\frac{a}{n}}$, thoả mãn các điều kiện vừa nêu.

Vậy giá trị lớn nhất của tổng $\sin 2x_1+\sin 2x_2+.....+\sin 2x_n$ trong đó $(x_1.x_2.......x_n)$ là nghiệm của phương trình đã cho là: $2\sqrt{a(n-a)}$.

2.3. Ứng dụng trong đại số:

Bài 1: Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực bất kỳ ta có:

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2} \ge 2\sqrt{a^2+b^2}$$

Giải:

Trong hệ trục toạ độ Descartes vuông góc Oxy:

Đặt $\vec{u}=(a+c,b)$

$\vec{v}=(a-c,b)$

$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(2a,2b)$

Ta có: $|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}|+|\vec{v}|$

Hay $\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2} \ge 2\sqrt{a^2+b^2}$.

Bài 2: Cho $a_1,a_2,.....,a_n;b_1,b_2,......,b_n$ là các số thực tuỳ ý

Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \ge \sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+...+b_n)^2}$$

Giải:

Xét các vectơ

$\overrightarrow{u_1}=(a_1,b_1)$

$\overrightarrow{u_2}=(a_2,b_2),......,\overrightarrow{u_n}=(a_n,b_n)$

Khi đó:

$\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+....+\overrightarrow{u_n}=(a_1+a_2+.....+a_n,b_1+b_2+......+b_n)$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Minkowski, ta có:

$$\left|\overrightarrow{u_1}\right|+\left|\overrightarrow{u_2}\right|+....+\left|\overrightarrow{u_n}\right| \ge \left|\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+....+\overrightarrow{u_n}\right|$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \ge \sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+(b_1+b_2+...+b_n)^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},....,\overrightarrow{u_n}$ cùng phương, cùng chiều, tức là $\forall i=1,2,.....,n$, ta có:

$$\begin{cases} b_i=k_ib_1 \\ a_i=k_ia_1 \end{cases} \text{ với } k_i \ge 0.$$

<u>Bài 3:</u> Cho x, y, z là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}+\frac{|y-z|}{\sqrt{1+y^2}.\sqrt{1+z^2}} > \frac{|x-z|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+z^2}}$$

Giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh viết lại dưới dạng sau:

$$\sqrt{(x-y)^2(1+z^2)}+\sqrt{(y-z)^2(1+x^2)} > \sqrt{(x-z)^2(1+y^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-y)^2+(xz-yz)^2}+\sqrt{(y-z)^2+(yx-zx)^2} > \sqrt{(x-z)^2+(xy-zy)^2} \quad (1)$$

Trên hệ toạ độ Descartes lấy các điểm A, B, C với toạ độ như sau:

$A(x, yz); B(y, zx); C(z; xy)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow AB+BC > AC$ (2)

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right| \ge \left|\overrightarrow{AC}\right|$ (Hệ quả bất đẳng thức Minkowski) (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ cùng phương, cùng chiều, tức là:

$\Leftrightarrow (y-x,zx-yz)=k(z-y,xy-zx)$, với k > 0

$$\Leftrightarrow \frac{y-x}{z-y}=\frac{zx-yz}{xy-zx} > 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y-x}{z-y} > 0 \\ \dfrac{y-x}{z-y}=\dfrac{z(y-x)}{x(z-y)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(y-x)}{(z-y)} & (4) \\ x=z & (5) \end{cases}$$

Hệ (4), (5) không thể xảy ra vì $x \ne z$. Vậy trong (3) không thể có dấu bằng, tức là $AB+BC > AC$. Như thế (2), vậy ta có đpcm.

Bài 4: Cho a, b, c > 0 và ab + bc + ca = abc. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\geq 3$$

Giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{a^2}}\geq 3$$

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy xét 3 vectơ:

$$\vec{u}=\left(\frac{1}{a};\frac{\sqrt{2}}{b}\right),\vec{v}=\left(\frac{1}{b};\frac{\sqrt{2}}{c}\right),\vec{w}=\left(\frac{1}{c};\frac{\sqrt{2}}{a}\right)$$

Khi đó:

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};\sqrt{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)=\left(1,\sqrt{2}\right)\ (\text{vì } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1)$$

Từ hệ quả của bất đẳng thức Minkowski: $|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|\geq|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|$ suy ra đ.p.c.m.

Bài 5: Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2+4y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+4y^2-2x-12y+10}=5$$

Giải:

Phương trình đã cho viết lại dưới dạng sau:

$$\sqrt{(x+3)^2+(2y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+(3-2y)^2}=5 \qquad (1)$$

Xét các vectơ $\vec{u}=(x+3,2y),\vec{v}=(1-x,3-2y)$

Khi đó ta có: $\vec{u}+\vec{v}=(4,3)$

Vậy $(1)\Leftrightarrow|\vec{u}|+|\vec{v}|=|\vec{u}+\vec{v}|$ (2)

Theo hệ quả bất đẳng thức Minkowski thì $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}=k\vec{v}$ với k > 0 hoặc là một trong hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ là vectơ không.

Vậy (2) tương đương với hai khả năng sau:

(I) $\frac{x+3}{1-x}=\frac{2y}{3-2y}\geq 0$

hoặc (II) $1-x=3-2y=0$

Ta có $(II)\Leftrightarrow x=1, y=\frac{3}{2}$

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}-3\leq x<1\\ -1+\frac{4}{1-x}=-1+\frac{3}{3-2y}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3\leq x<1\\ 3x-8y+9=0\end{cases}$$

Kết hợp lại, ta được các nghiệm (x, y) của phương trình đã cho có dạng sau:

$$x=\alpha, y=\frac{1}{8}(3\alpha+9) \text{ với } -3\le\alpha<1$$

Bài 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+......+\sqrt{1+x_{2004}}=2004\sqrt{\dfrac{2005}{2004}}\\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+......+\sqrt{1-x_{2004}}=2004\sqrt{\dfrac{2004}{2003}}\end{cases}$$

Giải:

Xét các vectơ $\overrightarrow{a_i}=\left(\sqrt{1+x_i},\sqrt{1-x_i}\right), i=\overline{1,2004}$.

Khi đó ta có: $\left|\overrightarrow{a_i}\right|=\sqrt{2},\ \forall i=1,2,...2004$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{2004}\left|\overrightarrow{a_i}\right|=2004\sqrt{2} \quad (1)$$

Ta có: $\displaystyle\sum_{i=1}^{2004}\overrightarrow{a_i}=\left(\sum_{i=1}^{2004}\sqrt{1+x_{i,}}\sum_{i=1}^{2004}\sqrt{1-x_{i,}}\right)$

$$\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^{2004}\overrightarrow{a_i}\right|=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2004}\sqrt{1+x_i}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{2004}\sqrt{1-x_i}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2004.2005+2004.2003}=2004\sqrt{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{2004}\overrightarrow{a_i}\right|=\sum_{i=1}^{2004}\left|\overrightarrow{a_i}\right|$ (3)

Mà ta có $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{2004}\overrightarrow{a_i}\right|\le\sum_{i=1}^{2004}\left|\overrightarrow{a_i}\right|$ (Hệ quả bất đẳng thức Minkowski)

Do đó đẳng thức (3) chứng tỏ rằng các vectơ $\overrightarrow{a_i}$ cùng phương, cùng chiều, cùng độ dài nên suy ra

$$x_1=x_2=.....=x_{2004}$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+x_1}=\sqrt{1+x_2}=......=\sqrt{1+x_{2004}}=\sqrt{\frac{2005}{2004}}$$

Hay hệ đã cho có nghiêm duy nhất

$$x_1=x_2=.....=x_{2004}=\frac{1}{2004}$$

2.4. Ứng dụng trong số học:

Bài 1: Cho $n\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}, x_1, x_2,....., x_n>0$ **.** Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\left(1+\frac{x_1}{nx_2}\right)\left(1+\frac{x_2}{nx_3}\right)....\left(1+\frac{x_n}{nx_{n+1}}\right)\ge\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski thứ II với $\begin{cases} a_1 = ... = a_n = 1 \\ b_1 = \frac{x_1}{nx_2}, ..., b_n = \frac{x_n}{nx_{n+1}} \end{cases}$, ta được:

$$\left(1+\frac{x_1}{nx_2}\right)\left(1+\frac{x_2}{nx_3}\right)....\left(1+\frac{x_n}{nx_{n+1}}\right)\ge\left(1+\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^n\ge\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Bài 2: Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \ge 0 \\ a_1 + a_2 + ... + a_n = 1 \\ n \in Z,\ n \ge 2 \end{cases}$

Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)....\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\ge(n+1)^n$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski thứ II với $\begin{cases} a_1 = ... = a_n = 1 \\ b_1 = \frac{1}{a_1} =, ..., b_n = \frac{1}{a_n} \end{cases}$, ta được:

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)....\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\ge\left(1+\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2.....a_n}}\right)^n$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\sqrt[n]{a_1a_2.....a_n}\le\frac{a_1+a_2+.....+a_n}{n}=\frac{1}{n}$$

Do đó: $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)....\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\ge(n+1)^n$ (đpcm)

Bài 3: Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{(n+1)!}\ge 1+\sqrt[n]{n!}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski thứ II với 2 dãy 1, 2, …, n và 1, 1, …,1, ta được:

$$\sqrt[n]{(1+1)(2+1).....(n+1)}\ge\sqrt[n]{1.2.3.....n}+\sqrt[n]{1.1......1}$$

Hay $\sqrt[n]{(n+1)!}\ge 1+\sqrt[n]{n!}$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{1}=\frac{2}{1}=.....=\frac{n}{1}.$

$\Leftrightarrow n=1$

Bài 4: Cho 2n số thực $x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n$ sao cho

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 > 0; \forall i \neq j, i, j = 1,2,....,n$$

Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là n số thực khác sao cho $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$.

Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \geq \frac{n}{|\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n|} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)^2}$$

Giải:

Trên hệ trục toạ độ xét n điểm $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2,......,n$

Do $(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 > 0, \forall i \neq j$ nên $A_i \neq A_j, \forall i \neq j$

Vậy đó là n điểm phân biệt. Gọi I là tâm tỉ cự của n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ theo bộ số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{IA} = 0 \qquad (1)$$

Gọi toạ độ của I là $I(x, y)$, $\overrightarrow{IA} = (x_i - x; y_i - y)$

Từ (1) suy ra $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - x) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \\ y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \end{cases}$

Vì I là tâm tỉ cự nên:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = n\overrightarrow{OI}$$

Ta có: $\left|\overrightarrow{OA_1}\right| + \left|\overrightarrow{OA_2}\right| + ... + \left|\overrightarrow{OA_n}\right| \geq \left|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}\right| = n\left|\overrightarrow{OI}\right| \qquad (2)$

(Hệ quả bất đẳng thức Minkowski)

Thay $\begin{cases} \left|\overrightarrow{OA_i}\right| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, \forall i = 1,2,.....,n \\ \left|\overrightarrow{OI}\right| = \dfrac{1}{|\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n|} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)^2} \end{cases}$ vào (2) ta được:

$$\sqrt{x_i^2 + y_i^2} \geq \frac{n}{|\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n|} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)^2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ các vectơ $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, ..., \overrightarrow{OA_n}$ cùng phương, cùng chiều, tức là $\forall i = 1,2,.....,n$ có: $\begin{cases} x_i = k_i x_1 \\ y_i = k_i y_1 \end{cases}$, v ới k > 0.

<u>Bài 5:</u> Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số thực bất kì. Chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+(1-a_{i+1})^2}\geq\frac{n\sqrt{2}}{2}$$, với quy ước $a_{n+1}\equiv a_1$

Giải:

Xét n vectơ với các toạ độ như sau:

$$\overrightarrow{u_1}=(a_1,1-a_2),\overrightarrow{u_2}=(a_2,1-a_3),.....$$

$$\overrightarrow{u_{n-1}}=(a_{n-1},1-a_n),\overrightarrow{u_n}=(a_n,1-a_1)$$

Khi đó ta có

$$\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+......+\overrightarrow{u_n}=(a_1+a_2+.....+a_n,\ n-a_1-a_2-.....-a_n)$$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Minkowski:

$$\left|\overrightarrow{u_1}\right|+\left|\overrightarrow{u_2}\right|+......+\left|\overrightarrow{u_n}\right|\geq\left|\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+......+\overrightarrow{u_n}\right| \qquad (1)$$

Thay $\begin{cases}\left|\overrightarrow{u_i}\right|=\sqrt{a_i^2+(1-a_{i+1})^2}, i=1,2,.....,n\\ \left|\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+......+\overrightarrow{u_n}\right|=\sqrt{k^2+(n-k)^2},(k=a_1+a_2+.....+a_n)\end{cases}$ vào (1) ta được:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+(1-a_{i+1})^2}\geq\sqrt{k^2+(n-k)^2} \qquad (2)$$

Ta chứng minh rằng:

$$\sqrt{k^2+(n-k)^2}\geq\frac{n\sqrt{2}}{2} \qquad (3)$$

Thật vậy: (3) $\Leftrightarrow k^2+n^2+k^2-2nk\geq\frac{n^2}{2}$

$$\Leftrightarrow n^2-4nk+4k^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n-2k)^2\geq 0 \qquad (4)$$

Vì (4) đúng, vậy (3) đúng. Từ (2) và (3) suy ra

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+(1-a_{i+1})^2}\geq\frac{n\sqrt{2}}{2}$$. Đó là đpcm.

KẾT LUẬN

Bất đẳng thức Hölder và Minkowski là bất đẳng thức các quan trọng trong toán cao cấp và có nhiều ứng dụng trong toán phổ thông.

Đề tài này đã thu được một số kết quả đáng quý như sau:

- Trình bày lý thuyết và chứng minh chi tiết các dạng của hai bất đẳng thức Holder và Minkowski. Đặt biệt là các hệ quả của hai bất đẳng thức này, đó là kết quả quan trọng được sử dụng rộng rãi để giải nhiều dạng toán phổ thông.
- **Chương III** phát hiện các **ứng dụng của bất đẳng thức Hölder và Minkowski trong toán phổ thông** ở rất **nhiều lĩnh vực** toán học: **giải tích, giải tích tổ hợp, hình học, hình học giải tích, đ ại số, lượng giác và số học**.

Bên cạnh những kết quả nhất định đạt được trên, đề tài còn mặt hạn chế. Đó là chưa mở rộng dạng đại số và dạng giải tích của bất đẳng thức Hölder:

- Dạng đại số:

Cho hai dãy số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$; p, q, r là các số hữu tỉ dương sao cho $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, ta luôn có:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

- Dạng giải tích

Cho p, q, r $\in (1;\infty)$, f và g là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ với a < b. Giả sử $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, ta luôn có:

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. PGS.TS **Nguyễn Quý Dy** (cb) - *Tuyển tập 200 bài thi vô địch toán (T3)* – NXB Giáo Dục năm 1994.

[2]. **Võ Giang Giai** – *Chuyên đề bất đẳng thức* – NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội năm 2002.

[3]. PGS.TS. **Trần Văn Hạo** – *Chuyên đề luyện thi vào đại học. Bất đẳng thức* – NXB Giáo Dục năm 2003.

[4]. **Nguyễn Mộng Hy** – *Các bài toán về phương pháp vectơ và phương pháp toạ độ* - NXB Giáo Dục năm 2003.

[5]. G.s. **Phan Huy Khải** – *Phương pháp toạ độ để giải các bài toán sơ cấp* – NXB Tp. HCM năm 1996.

[6]. G.s. Phan Huy Khải – *10.000 bài toán sơ cấp. Bất đẳng thức* – NXB Hà Nội năm 2001.

[7]. **Nguyễn Xuân Liêm** – *Chuyên đề bất đẳng thức và bất phương trình* – NXB Giáo Dục năm 2002.

[8]. Th.s. **Nguyễn Văn Nho** – *Olympic toán học Châu Á Thái Bình Dương* – NXB Giáo Dục năm 2003.

[9]. **Jean Maria Monier** – *Giáo trình toán tập 1. Giải tích* – NXB Giáo Dục năm 1996.
