



BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

"If a man's wit be wandering, let him study the mathematics."

Francis Bacon (1561-1626)

1 Đề bài

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) \geq (xy+yz+zx)\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Bài 2. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$(1+abc) \left[\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \right] \geq \frac{(a^5+b^5+c^5)(a^3+b^3+c^3)}{a^8+b^8+c^8}.$$

Bài 3. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + \frac{1}{2}z^3.$$

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3(b^7+c+1)}{b^7(b+1)(c+1)} + \frac{b^3(c^7+a+1)}{c^7(c+1)(a+1)} + \frac{c^3(a^7+b+1)}{a^7(a+1)(b+1)} \geq \frac{9}{4}.$$

Bài 5. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{(3a-1)^2}{2a^2+1} + \frac{(3b-1)^2}{2b^2+1} + \frac{(3c-1)^2}{2c^2+1} \geq 4.$$

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Bài 7. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{bc^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{ca^2}{c^2+2a^2+b^2} \leq \frac{a+b+c}{4}.$$

Bài 8. Cho các số a, b, c dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{3 + 2(a^2 - bc)} + \frac{1}{3 + 2(b^2 - ca)} + \frac{1}{3 + 2(c^2 - ab)} \geq 1.$$

Bài 9.

(a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + \sqrt{6} \sin x.$$

(b) Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sqrt{6} \sin C \leq \frac{5\sqrt{10}}{4}.$$

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 1.$$

Bài 11. Cho các số không âm phân biệt a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right].$$

Bài 12. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{\frac{a^2 + a}{a^2 + a + 1}} + \sqrt[3]{\frac{b^2 + b}{b^2 + b + 1}} + \sqrt[3]{\frac{c^2 + c}{c^2 + c + 1}}.$$

Bài 13. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có

$$\sqrt{17} \leq \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha + 6} + \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 3} \leq \sqrt{2} + \sqrt{11}.$$

Bài 14. Cho a, b, c là ba số dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1 + (b+c)^2} + \frac{b}{1 + (c+a)^2} + \frac{c}{1 + (a+b)^2} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2 + 12abc}.$$

Bài 15. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3.$$

2 Lời giải và bình luận

Bài 1 (Hưng Yên). Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) \geq (xy + yz + zx) \sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{(x+y) + (y+z) + (z+x)}{3} = \frac{2}{3}(x+y+z).$$

Từ đó suy ra, bất đẳng thức đã cho sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$3 \left[x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) \right] \geq 2(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

Do $(x+y+z)(xy+yz+zx) = x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 3xyz$ nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$3 \left[x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) \right] \geq 2 \left[x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 3xyz \right],$$

hay

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) \geq 6xyz.$$

Lại do $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2) + z(x^2+y^2)$ nên ta chỉ phải chứng minh

$$x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2) + z(x^2+y^2) \geq 6xyz.$$

Tuy nhiên, sau khi viết lại bất đẳng thức ở dạng này thì ta thấy ngay nó hiển nhiên đúng theo AM-GM, cụ thể là

$$x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2) + z(x^2+y^2) \geq x \cdot 2yz + y \cdot 2zx + z \cdot 2xy = 6xyz.$$

Phép chứng minh được hoàn tất. Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. \square

Bài 2 (Hà Tĩnh). Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$(1+abc) \left[\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \right] \geq \frac{(a^5+b^5+c^5)(a^3+b^3+c^3)}{a^8+b^8+c^8}.$$

Lời giải. Sử dụng kết quả bài 6 (đề thi chọn đội tuyển thành phố Hồ Chí Minh), ta có

$$(1+abc) \left[\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \right] \geq 3.$$

Từ đó, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$3(a^8+b^8+c^8) \geq (a^5+b^5+c^5)(a^3+b^3+c^3).$$

Và đây là một kết quả đúng (theo bất đẳng thức Chebyshev áp dụng cho hai bộ đơn điệu cùng chiều (a^5, b^5, c^5) và (a^3, b^3, c^3)). Tuy nhiên, ở đây ta cũng có thể chứng minh nó bằng cách khác dựa vào tính thuần nhất của bất đẳng thức này. Cụ thể như sau:

Do tính thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa $a^8+b^8+c^8 = 3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$(a^5+b^5+c^5)(a^3+b^3+c^3) \leq 9. \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$5 \cdot a^8 + 3 \cdot 1 \geq 8 \sqrt[8]{(a^8)^5 \cdot 1^3} = 8a^5, \quad 3 \cdot a^8 + 5 \cdot 1 = 8 \sqrt[8]{(a^8)^3 \cdot 1^5} = 8a^3.$$

Từ đó suy ra

$$a^5 \leq \frac{5a^8 + 3}{8}, \quad a^3 \leq \frac{3a^8 + 5}{8}.$$

Tiến hành đánh giá tương tự cho các biểu thức của b và c , ta thu được

$$0 < a^5 + b^5 + c^5 \leq \frac{5a^8 + 3}{8} + \frac{5b^8 + 3}{8} + \frac{5c^8 + 3}{8} = 3, \quad (2)$$

và

$$0 < a^3 + b^3 + c^3 \leq \frac{3a^8 + 5}{8} + \frac{3b^8 + 5}{8} + \frac{3c^8 + 5}{8} = 3. \quad (3)$$

Từ (2) và (3), sử dụng phép nhân hai bất đẳng thức dương cùng chiều, ta thu được ngay bất đẳng thức (1). Và như thế, bài toán đã được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. \square

Bài 3 (THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai). Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + \frac{1}{2}z^3.$$

Lời giải 1. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\begin{aligned} \left(x^3 + y^3 + \frac{z^3}{2}\right) (1 + 1 + \sqrt{2}) (1 + 1 + \sqrt{2}) &\geq \\ &\geq \left(\sqrt[3]{x^3 \cdot 1 \cdot 1} + \sqrt[3]{y^3 \cdot 1 \cdot 1} + \sqrt[3]{\frac{z^3}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\right)^3 \\ &= (x + y + z)^3 = 1. \end{aligned}$$

Vì $P = x^3 + y^3 + \frac{z^3}{2}$ nên đánh giá này cho ta $P \cdot (2 + \sqrt{2})^2 \geq 1$, tức

$$P \geq \frac{1}{(2 + \sqrt{2})^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x + y + z = 1$ và

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{\frac{z}{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}.$$

Giải hệ này, ta tìm được $x = y = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$ và $z = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$, thỏa mãn điều kiện đề bài. Vì vậy, ta đi đến kết luận min $P = \frac{1}{(2 + \sqrt{2})^2}$. \square

Lời giải 2. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{(2 + \sqrt{2})^3} + \frac{1}{(2 + \sqrt{2})^3} &\geq 3 \sqrt[3]{x^3 \cdot \frac{1}{(2 + \sqrt{2})^3} \cdot \frac{1}{(2 + \sqrt{2})^3}} \\ &= \frac{3}{(2 + \sqrt{2})^2} \cdot x, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$x^3 \geq \frac{3}{(2+\sqrt{2})^2} \cdot x - \frac{2}{(2+\sqrt{2})^3}. \quad (1)$$

Đánh giá tương tự như vậy với y , ta cũng có

$$y^3 \geq \frac{3}{(2+\sqrt{2})^2} \cdot y - \frac{2}{(2+\sqrt{2})^3}. \quad (2)$$

Bây giờ, ta sẽ tìm cách thiết lập một đánh giá cho z . Ta có

$$\begin{aligned} z^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^3 &\geq 3\sqrt[3]{z^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^3} \\ &= \frac{6}{(2+\sqrt{2})^2} \cdot z. \end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{z^3}{2} \geq \frac{3}{(2+\sqrt{2})^2} \cdot z - \frac{2\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^3}. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta suy ra

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{3}{(2+\sqrt{2})^2}(x+y+z) - \frac{4+2\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^3} \\ &= \frac{3}{(2+\sqrt{2})^2} - \frac{2}{(2+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2+\sqrt{2}}, z = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$. Rõ ràng bộ số này thỏa mãn điều kiện của đề bài, vì vậy ta có $\min P = \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}$. \square

Lời giải 3. Sử dụng đánh giá cơ bản $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4}, \forall a, b \in \mathbb{R}$, ta có

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x+y) \cdot \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(1-z)^3}{4}, \quad (1)$$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Từ đó suy ra

$$P \geq \frac{(1-z)^3}{4} + \frac{z^3}{2} = \frac{(1-z)^3 + 2z^3}{4}. \quad (2)$$

Xét hàm số $f(z) = (1-z)^3 + 2z^3$ với $z \in [0, 1]$. Ta có

$$f'(z) = -3(1-z)^2 + 6z^2 = 3[2z^2 - (1-z)^2].$$

Với $z \in [0, 1]$, phương trình $f'(z) = 0$ tương đương với $\sqrt{2}z = 1 - z$, tức $z = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Từ đây, ta có bảng biến thiên của $f(z)$ trên $[0, 1]$ như sau

| | | | |
|---------|---|--------------------------------------|---|
| z | 0 | $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ | 1 |
| $f'(z)$ | — | 0 | + |
| $f(z)$ | 1 | $f\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)$ | 2 |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$f(z) \geq f\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^3 + \frac{2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^3} = \frac{2}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}, \quad \forall z \in [0, 1] \quad (3)$$

và đẳng thức xảy ra khi $z = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Từ đây, kết hợp với (2), ta thu được

$$P \geq \frac{1}{2\left(1+\sqrt{2}\right)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi giả thiết của bài toán được thỏa mãn, đồng thời các bất đẳng thức (1) và (3) cũng phải trở thành đẳng thức. Điều này có nghĩa là ta phải có

$$\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \\ x = y \\ z = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{cases}$$

Giải ra, ta tìm được $x = y = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ và $z = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Vậy $\min P = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})^2}$. \square

Bài 4 (Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3(b^7+c+1)}{b^7(b+1)(c+1)} + \frac{b^3(c^7+a+1)}{c^7(c+1)(a+1)} + \frac{c^3(a^7+b+1)}{a^7(a+1)(b+1)} \geq \frac{9}{4}.$$

Lời giải. Do

$$\frac{a^3(b^7+c+1)}{b^7(b+1)(c+1)} = \frac{a^3}{(b+1)(c+1)} + \frac{a^3}{b^7(c+1)}$$

nên bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết dưới dạng $P + Q \geq \frac{9}{4}$, trong đó

$$P = \frac{a^3}{(b+1)(c+1)} + \frac{b^3}{(c+1)(a+1)} + \frac{c^3}{(a+1)(b+1)}$$

và

$$Q = \frac{a^3}{b^7(c+1)} + \frac{b^3}{c^7(a+1)} + \frac{c^3}{a^7(b+1)}.$$

Ta sẽ tìm các đánh giá thích hợp cho P và Q .

(a) Đánh giá cho P . Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a^3}{(b+1)(c+1)} + \frac{b+1}{8} + \frac{c+1}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(b+1)(c+1)} \cdot \frac{b+1}{8} \cdot \frac{c+1}{8}} = \frac{3a}{4},$$

từ đó suy ra

$$\frac{a^3}{(b+1)(c+1)} \geq \frac{6a - b - c - 2}{8}.$$

Tiến hành đánh giá tương tự cho hai biểu thức còn lại, sau đó cộng cả ba bất đẳng thức cùng chiều theo vế, ta được

$$P \geq \frac{6a - b - c - 2}{8} + \frac{6b - c - a - 2}{8} + \frac{6c - a - b - 2}{8} = \frac{2(a + b + c) - 3}{4}. \quad (1)$$

(b) Đánh giá cho Q . Giống như P , ta cũng sử dụng bất đẳng thức AM-GM và thu được

$$\frac{a^3}{b^7(c+1)} + \frac{c+1}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b^7(c+1)} \cdot \frac{c+1}{4}} = \sqrt{\frac{a^3}{b^7}}.$$

Do đó

$$\frac{a^3}{b^7(c+1)} \geq \sqrt{\frac{a^3}{b^7}} - \frac{c+1}{4}.$$

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự cho hai biểu thức cùng dạng, ta có

$$\begin{aligned} Q &\geq \left(\sqrt{\frac{a^3}{b^7}} - \frac{c+1}{4} \right) + \left(\sqrt{\frac{b^3}{c^7}} - \frac{a+1}{4} \right) + \left(\sqrt{\frac{c^3}{a^7}} - \frac{b+1}{4} \right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{a^3}{b^7}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^7}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^7}} \right) - \frac{a+b+c+3}{4}. \end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^7}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^7}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^7}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{b^7}} \cdot \sqrt{\frac{b^3}{c^7}} \cdot \sqrt{\frac{c^3}{a^7}}} = 3\sqrt[6]{\frac{1}{a^4b^4c^4}} = 3.$$

Kết hợp hai đánh giá trên lại với nhau, ta thu được

$$Q \geq 3 - \frac{a+b+c+3}{4} = \frac{9 - (a+b+c)}{4}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra

$$P + Q \geq \frac{2(a+b+c) - 3}{4} + \frac{9 - (a+b+c)}{4} = \frac{a+b+c-3}{4} + \frac{9}{4} \geq \frac{9}{4},$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng đúng do $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$.

Phép chứng minh được hoàn tất. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. \square

Bài 5 (THPT chuyên Thái Bình, Thái Bình). Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{(3a-1)^2}{2a^2+1} + \frac{(3b-1)^2}{2b^2+1} + \frac{(3c-1)^2}{2c^2+1} \geq 4.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức, ta có

$$\begin{aligned} \frac{(3a-1)^2}{2a^2+1} + \frac{(3b-1)^2}{2b^2+1} + \frac{(3c-1)^2}{2c^2+1} &\geq \frac{[(3a-1) + (3b-1) + (3c-1)]^2}{(2a^2+1) + (2b^2+1) + (2c^2+1)} \\ &= \frac{9(a+b+c-1)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+3}. \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$9(a+b+c-1)^2 \geq 4[2(a^2+b^2+c^2)+3].$$

hay

$$9[(a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca) - 2(a+b+c) + 1] \geq 8(a^2+b^2+c^2) + 12.$$

Sau khi thu gọn hai vế, ta được

$$(a^2+b^2+c^2) + 18(ab+bc+ca-a-b-c) - 3 \geq 0.$$

Đến đây, ta có để ý rằng, với $abc = 1$ thì

$$\begin{aligned} (1-a)(1-b)(1-c) &= 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ca) - abc \\ &= (ab+bc+ca) - (a+b+c). \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức trên tương đương với

$$a^2+b^2+c^2 + 18(1-a)(1-b)(1-c) - 3 \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \max\{a, b, c\}$, suy ra $c \geq 1$. Đặt $t = \sqrt{ab}$ thì ta có $0 < t \leq 1$ và $c = \frac{1}{t^2}$. Theo bất đẳng thức AM-GM,

$$a^2+b^2 \geq 2ab = 2t^2. \quad (1)$$

Ngoài ra thì

$$(1-a)(1-b) = 1 - (a+b) + ab \leq 1 - 2\sqrt{ab} + ab = 1 - 2t + t^2 = (1-t)^2.$$

Mà $1-c \leq 0$ nên ta có

$$(1-a)(1-b)(1-c) \geq (1-t)^2(1-c). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra, ta chỉ cần chứng minh

$$2t^2 + c^2 + 18(1-t)^2(1-c) - 3 \geq 0.$$

Thay $c = \frac{1}{t^2}$ vào, ta viết được bất đẳng thức dưới dạng

$$\left(2t^2 + \frac{1}{t^4} - 3\right) + 18(1-t)^2 \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \geq 0,$$

tương đương

$$2t^6 + 1 - 3t^4 + 18t^2(1-t)^2(1-t^2) \geq 0.$$

Thực hiện phân tích nhân tử, ta có $2t^6 + 1 - 3t^4 = (2t^2 + 1)(t^2 - 1)^2$. Do đó, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(t-1)^2(t+1) \left[(2t^2 + 1)(t+1) - 18t^2(1-t) \right] \geq 0,$$

hay

$$(t-1)^2(t+1) \left[(2t^3 + 2t^2 + t + 1) - (18t^2 - 18t^3) \right] \geq 0.$$

Sau khi thu gọn, ta được

$$(t-1)^2(t+1)(20t^3 - 16t^2 + t + 1) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $20t^3 - 16t^2 + t + 1 = (5t+1)(2t-1)^2 \geq 0$.

Bài toán được chứng minh xong. Với giả thiết $c = \max\{a, b, c\}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$, hoặc $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 4$. \square

Bài 6 (Thành phố Hồ Chí Minh). Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Lời giải 1. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $1+abc > 0$, ta viết được nó dưới dạng

$$\frac{1+abc}{a(1+b)} + \frac{1+abc}{b(1+c)} + \frac{1+abc}{c(1+a)} \geq 3,$$

Bây giờ, ta có để ý ở đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \frac{1+abc}{a(1+b)} &= \frac{1+abc + a(1+b)}{a(1+b)} - 1 = \frac{(1+a) + ab(1+c)}{a(1+b)} - 1 \\ &= \frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{1+b} - 1. \end{aligned}$$

Từ đây và hai đẳng thức tương tự, ta suy ra bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left[\frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{1+b} - 1 \right] + \left[\frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{c(1+a)}{1+c} - 1 \right] + \left[\frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{1+a} - 1 \right] \geq 3,$$

hay

$$\left[\frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{a(1+b)}{1+a} \right] + \left[\frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{b(1+c)}{1+b} \right] + \left[\frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{c(1+a)}{1+c} \right] \geq 6.$$

Và ta có thể thấy ngay bất đẳng thức cuối này đúng do $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. \square

Lời giải 2. Đặt $abc = k^3$. Khi đó, ta thấy tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho $a = \frac{ky}{x}$, $b = \frac{kz}{y}$ và $c = \frac{kx}{z}$ (chẳng hạn, ta có thể chọn $x = 1, y = \frac{a}{k}, z = \frac{ab}{k^2}$). Thay vào, ta có

$$\frac{1}{a(1+b)} = \frac{1}{\frac{ky}{x} \left(1 + \frac{kz}{y}\right)} = \frac{x}{k(y+kz)}.$$

Và do đó, bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} \geq \frac{3k}{1+k^3}.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x(y+kz) + y(z+kx) + z(x+ky)} \\ &= \frac{(x+y+z)^2}{(k+1)(xy+yz+zx)}. \end{aligned}$$

Lại có $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ là một đánh giá quen thuộc. Thế cho nên

$$\frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} \geq \frac{3}{k+1}.$$

Từ đây, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$\frac{3}{k+1} \geq \frac{3k}{k^3+1}.$$

Thế nhưng, đây lại là một kết quả hiển nhiên vì nó tương đương với $3(k+1)(k-1)^2 \geq 0$. \square

Lời giải 3. Sử dụng bất đẳng thức cơ bản $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ với $x = \frac{1}{a(1+b)}$, $y = \frac{1}{b(1+c)}$, $z = \frac{1}{c(1+a)}$, ta có

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \right]^2 &\geq \\ &\geq 3 \left[\frac{1}{ab(1+b)(1+c)} + \frac{1}{bc(1+c)(1+a)} + \frac{1}{ca(1+a)(1+b)} \right] \\ &= \frac{3[c(1+a) + a(1+b) + b(1+c)]}{abc(1+a)(1+b)(1+c)} \\ &= \frac{3(a+b+c+ab+bc+ca)}{abc(a+b+c+ab+bc+ca+abc+1)}. \end{aligned}$$

Do hàm số $f(x) = \frac{x}{x+t}$ là hàm liên tục và đồng biến trên \mathbb{R}^+ với mọi $t > 0$ và

$$a+b+c+ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{3(a+b+c+ab+bc+ca)}{abc(a+b+c+ab+bc+ca+abc+1)} &\geq \frac{3(3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2})}{3abc(3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + abc + 1)} \\ &= \frac{9\sqrt[3]{abc}(1 + \sqrt[3]{abc})}{3abc(1 + \sqrt[3]{abc})^3} = \frac{9}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}(1 + \sqrt[3]{abc})^2}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\left[\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \right]^2 \geq \frac{9}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^2},$$

hay

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc} \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)}.$$

Đặt $k = \sqrt[3]{abc}$. Bài toán được đưa về chứng minh

$$\frac{3}{k(k+1)} \geq \frac{3}{k^3+1}.$$

Đây chính là bất đẳng thức đã được xét ở cuối lời giải 2. □

Bài 7 (Thành phố Hồ Chí Minh). Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{bc^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{ca^2}{c^2+2a^2+b^2} \leq \frac{a+b+c}{4}.$$

Lời giải 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{16ab^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{16bc^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{16ca^2}{c^2+2a^2+b^2} \leq 4(a+b+c).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{(1+3)^2}{b^2+(a^2+b^2+c^2)} \leq \frac{1}{b^2} + \frac{9}{a^2+b^2+c^2}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{16ab^2}{a^2+2b^2+c^2} \leq a + \frac{9ab^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta được

$$\frac{16ab^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{16bc^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{16ca^2}{c^2+2a^2+b^2} \leq a+b+c + \frac{9(ab^2+bc^2+ca^2)}{a^2+b^2+c^2}.$$

Bài toán được đưa về chứng minh

$$\frac{3(ab^2+bc^2+ca^2)}{a^2+b^2+c^2} \leq a+b+c,$$

hay

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 3(ab^2+bc^2+ca^2).$$

Do $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = (a^3+b^3+c^3) + (a^2b+b^2c+c^2a) + (ab^2+bc^2+ca^2)$ nên bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$(a^3+b^3+c^3) + (a^2b+b^2c+c^2a) \geq 2(ab^2+bc^2+ca^2),$$

tương đương với

$$(b^3 + a^2b - 2ab^2) + (c^3 + b^2c - 2bc^2) + (a^3 + c^2a - 2ca^2) \geq 0,$$

hay là

$$b(a-b)^2 + c(b-c)^2 + a(c-a)^2 \geq 0.$$

Đây là một kết quả hiển nhiên, do đó bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. \square

Lời giải 2. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(a - \frac{ab^2}{a^2 + 2b^2 + c^2}\right) + \left(b - \frac{bc^2}{b^2 + 2c^2 + a^2}\right) + \left(c - \frac{ca^2}{c^2 + 2a^2 + b^2}\right) \geq a + b + c - \frac{a + b + c}{4},$$

Do $a - \frac{ab^2}{a^2 + 2b^2 + c^2} = \frac{a(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + 2b^2 + c^2}$ nên ta có thể viết lại bất đẳng thức thành

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{a}{a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{b}{b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{c}{c^2 + 2a^2 + b^2} \right) \geq \frac{3(a + b + c)}{4}.$$

Bây giờ, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{b}{b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{c}{c^2 + 2a^2 + b^2} &\geq \\ &\geq \frac{(a + b + c)^2}{a(a^2 + 2b^2 + c^2) + b(b^2 + 2c^2 + a^2) + c(c^2 + 2a^2 + b^2)} \\ &= \frac{(a + b + c)^2}{(a^3 + b^3 + c^3) + (a^2b + b^2c + c^2a) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2)}. \end{aligned}$$

Như thế, phép chứng minh sẽ được hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$4(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 3 \left[(a^3 + b^3 + c^3) + (a^2b + b^2c + c^2a) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) \right].$$

Do $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = (a^3 + b^3 + c^3) + (a^2b + b^2c + c^2a) + (ab^2 + bc^2 + ca^2)$ nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$4(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 3 \left[(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) + (ab^2 + bc^2 + ca^2) \right],$$

hay

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab^2 + bc^2 + ca^2).$$

Đây chính là bất đẳng thức vừa được chứng minh trong lời giải 1 ở trên. \square

Bài 8 (Phổ thông Năng khiếu, thành phố Hồ Chí Minh). Cho các số a, b, c dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{3 + 2(a^2 - bc)} + \frac{1}{3 + 2(b^2 - ca)} + \frac{1}{3 + 2(c^2 - ab)} \geq 1.$$

Lời giải. Đặt $x = bc$, $y = ca$ và $z = ab$ thì ta có

$$x + y + z = 1, \quad a^2 = \frac{yz}{x}, \quad b^2 = \frac{zx}{y}, \quad c^2 = \frac{xy}{z}.$$

Do đó

$$\frac{1}{3 + 2(a^2 - bc)} = \frac{1}{3 + 2\left(\frac{yz}{x} - x\right)} = \frac{x}{3x + 2(yz - x^2)}.$$

Thực hiện biến đổi tương tự, ta viết được bất đẳng thức dưới dạng

$$\frac{x}{3x + 2(yz - x^2)} + \frac{y}{3y + 2(zx - y^2)} + \frac{z}{3z + 2(xy - z^2)} \geq 1.$$

Do $3x + 2(yz - x^2) = 3x(x + y + z) + 2(yz - x^2) = x^2 + 3x(y + z) + 2yz > 0$ nên các mẫu thức đều dương. Từ đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{x}{3x + 2(yz - x^2)} + \frac{y}{3y + 2(zx - y^2)} + \frac{z}{3z + 2(xy - z^2)} &\geq \\ &\geq \frac{(x + y + z)^2}{x[3x + 2(yz - x^2)] + y[3y + 2(zx - y^2)] + z[3z + 2(xy - z^2)]} \\ &= \frac{1}{3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)}. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có hằng đẳng thức

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx, \end{aligned}$$

nên kết hợp với trên, ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{x}{3x + 2(yz - x^2)} + \frac{y}{3y + 2(zx - y^2)} + \frac{z}{3z + 2(xy - z^2)} &\geq \\ &\geq \frac{1}{3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)} = \frac{1}{(x + y + z)^2} = 1. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. □

Bài 9 (Thái Nguyên).

(a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + \sqrt{6} \sin x.$$

(b) Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sqrt{6} \sin C \leq \frac{5\sqrt{10}}{4}.$$

Lời giải. (a) Sử dụng tính chất của dấu giá trị tuyệt đối, ta có

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left| 2 \cos \frac{x}{2} + \sqrt{6} \sin x \right| \leq 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \sqrt{6} |\sin x| \\ &= 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| + 2\sqrt{6} \left| \sin \frac{x}{2} \right| \left| \cos \frac{x}{2} \right|.\end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, ta thiết lập được các đánh giá

$$2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \frac{4}{\sqrt{10}} \cdot 2 \cdot \left| \cos \frac{x}{2} \right| \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} \leq \frac{4}{\sqrt{10}} \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{5}{8} \right)$$

và

$$2\sqrt{6} \left| \sin \frac{x}{2} \right| \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot 2 \cdot \left| \sqrt{5} \sin \frac{x}{2} \right| \cdot \left| \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{10}} \left(5 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \cos^2 \frac{x}{2} \right).$$

Từ hai bất đẳng thức này, kết hợp với đánh giá ở trên, ta thu được

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leq \frac{4}{\sqrt{10}} \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{5}{8} \right) + \frac{2}{\sqrt{10}} \left(5 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \cos^2 \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{10}} \left[5 \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) + \frac{5}{4} \right] = \frac{2}{\sqrt{10}} \left(5 + \frac{5}{4} \right) = \frac{5\sqrt{10}}{4}.\end{aligned}$$

Do đó

$$-\frac{5\sqrt{10}}{4} \leq f(x) \leq \frac{5\sqrt{10}}{4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác, dễ thấy với $x = 2\pi - 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$ thì $f(x) = -\frac{5\sqrt{10}}{4}$ và với $x = 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$ thì $f(x) = \frac{5\sqrt{10}}{4}$. Điều này cho phép ta đi đến kết luận

$$\min f(x) = -\frac{5\sqrt{10}}{4}, \quad \max f(x) = \frac{5\sqrt{10}}{4}.$$

(b) Để ý rằng

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

Do $0 < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \frac{C}{2} > 0$. Mà $\cos \frac{A-B}{2} \leq 1$ nên ta có

$$\sin A + \sin B \leq 2 \cos \frac{C}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$\sin A + \sin B + \sqrt{6} \sin C \leq 2 \cos \frac{C}{2} + \sqrt{6} \sin C.$$

Mặt khác, sử dụng kết quả câu (a) với $x = C$, ta lại có

$$2 \cos \frac{C}{2} + \sqrt{6} \sin C \leq \frac{5\sqrt{10}}{4}.$$

Kết hợp hai đánh giá trên lại, ta thu được

$$\sin A + \sin B + \sqrt{6} \sin C \leq 2 \cos \frac{C}{2} + \sqrt{6} \sin C \leq \frac{5\sqrt{10}}{4}.$$

Đây chính là kết quả cần chứng minh. □

Cách khác cho câu (a). Vì $f(x)$ là hàm tuần hoàn trên chu kỳ 4π nên để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của nó, ta chỉ cần xét $x \in [-2\pi, 2\pi]$ là đủ. Ta có

$$f'(x) = -\sin \frac{x}{2} + \sqrt{6} \cos x = -\sin \frac{x}{2} + \sqrt{6} \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right).$$

Do $g(t) = -t + \sqrt{6}(1 - 2t^2)$ có tất cả hai nghiệm là $\frac{\sqrt{6}}{4}$ và $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ nên phương trình $f'(x) = 0$ tương đương với

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} \vee \sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Giải các phương trình này với chú ý $x \in [-2\pi, 2\pi]$, ta tìm được các nghiệm của $f'(x)$ là $x_1 = 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$, $x_2 = 2\pi - 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$, $x_3 = -2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$ và $x_4 = -2\pi + 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$. Từ đây, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên $[-2\pi, 2\pi]$ như sau (chú ý rằng $x_4 < x_3 < x_1 < x_2$)

| x | -2π | x_4 | x_3 | x_1 | x_2 | 2π |
|---------|---------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|--------|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | -2 | $\nearrow \frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\searrow -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\nearrow \frac{5\sqrt{10}}{4}$ | $\searrow -\frac{5\sqrt{10}}{4}$ | -2 |

Với kết quả có được từ bảng biến thiên, ta thấy ngay:

- $\max f(x) = \frac{5\sqrt{10}}{4}$ đạt được chẳng hạn khi $x = 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$.
- $\min f(x) = -\frac{5\sqrt{10}}{4}$ đạt được chẳng hạn khi $x = 2\pi - 2 \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$. □

Bài 10 (Hải Phòng). Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq 1.$$

Lời giải 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq (a + b + c)^3.$$

Khai triển trực tiếp, ta có

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= (a^3 + b^3 + c^3) + 3(a + b)(b + c)(c + a) \\ &= (a^3 + b^3 + c^3) + 3 \left[a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \right] + 6abc. \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq (a^3 + b^3 + c^3) + 3 \left[a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \right] + 6abc,$$

tương đương với

$$3(a^3 + b^3 + c^3) + 9abc \geq 3 \left[a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \right],$$

hay

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b).$$

Đến bước này thì ta có thể thấy ngay đây là một kết quả đúng vì nó chính là bất đẳng thức Schur dạng bậc ba (áp dụng cho ba số không âm a, b, c).

Ta xét điều kiện để đẳng thức xảy ra. Vì bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức Schur nên đẳng thức của nó phải trùng với trường hợp đẳng thức của bất đẳng thức Schur, tức là khi cả ba biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0 và hai biến còn lại bằng nhau. Kết hợp với giả thiết $a + b + c = 1$, ta tìm được điều kiện cho dấu bằng ở bài toán là $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ (và các hoán vị). \square

Lời giải 2. Do

$$[(3a-1)(3b-1)] \cdot [(3b-1)(3c-1)] \cdot [(3c-1)(3a-1)] = (3a-1)^2(3b-1)^2(3c-1)^2 \geq 0$$

nên trong ba số $(3a-1)(3b-1)$, $(3b-1)(3c-1)$, $(3c-1)(3a-1)$ phải có ít nhất một số không âm. Và do tính đối xứng nên ta hoàn toàn có thể giả sử một cách không mất tổng quát rằng $(3a-1)(3b-1) \geq 0$. Khi đó, ta có

$$9ab \geq 3(a+b) - 1 = 3(1-c) - 1 = 2 - 3c.$$

Suy ra

$$15abc \geq \frac{5}{3}c(2-3c). \quad (1)$$

Lại có

$$4(a^3 + b^3) = 4(a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq 4(a+b) \cdot \frac{(a+b)^2}{4} = (a+b)^3 = (1-c)^3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta đưa được bài toán về chứng minh

$$(1-c)^3 + 4c^3 + \frac{5}{3}c(2-3c) \geq 1.$$

Do $1 - (1-c)^3 = c[1 + (1-c) + (1-c)^2] = c(3-3c+c^2)$ nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$4c^3 + \frac{5}{3}c(2-3c) \geq c(3-3c+c^2),$$

hay là

$$c[12c^2 + 5(2-3c) - 3(3-3c+c^2)] \geq 0.$$

Sau khi thu gọn, ta được

$$c(9c^2 - 6c + 1) \geq 0,$$

hiển nhiên đúng do $9c^2 - 6c + 1 = (3c-1)^2 \geq 0$. \square

Bài 11 (Đại học Vinh). Cho các số không âm phân biệt a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right].$$

Bài 12 (Nghệ An). Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{\frac{a^2+a}{a^2+a+1}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+b}{b^2+b+1}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+c}{c^2+c+1}}.$$

Bài 13 (Cần Thơ). Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có

$$\sqrt{17} \leq \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha + 6} + \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 3} \leq \sqrt{2} + \sqrt{11}.$$

Bài 14 (Nam Định). Cho a, b, c là ba số dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1 + (b + c)^2} + \frac{b}{1 + (c + a)^2} + \frac{c}{1 + (a + b)^2} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2 + 12abc}.$$

Bài 15 (Đồng Nai). Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3.$$



"First, it is necessary to study the facts, to multiply the number of observations, and then later to search for formulas that connect them so as thus to discern the particular laws governing a certain class of phenomena. In general, it is not until after these particular laws have been established that one can expect to discover and articulate the more general laws that complete theories by bringing a multitude of apparently very diverse phenomena together under a single governing principle."

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)