LƯỢNG GIÁC HÓA TRONG NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Khi tìm nguyên hàm cũng như tính tích phân các hàm vô tỉ ta thường tìm cách thoát căn để việc giải toán đơn giản hơn hoặc biến đổi đưa về nguyên hàm của một căn thức nào đó. Bài viết này sẽ cung cấp cho các bạn một cách khử căn vô tỷ để đơn giản bài toán hơn, đó là "LƯỢNG GIÁC HÓA".

1. Các dạng lượng giác hóa

Dạng 1: Tính nguyên hàm $I = \displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x$

Ta thực hiện phép đổi biến như sau

$$\left[\begin{array}{l} x = |a| \sin t \text{ với } t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ x = |a| \cos t \text{ với } t \in [0, \pi] \end{array}\right.$$

Khi đó nguyên hàm đã cho sẽ trở thành $I = \displaystyle\int R'(\sin t, \cos t)\, \mathrm{d}t$

Ví dụ 1.1. ***Tính nguyên hàm sau*** $\boldsymbol{I = \displaystyle\int \dfrac{x^3 \mathrm{d}x}{\sqrt{4 - x^2}}}$

Lời giải. Bài toán đặt ra khá cơ bản với dạng trên trong đó $a^2 = 4$. Ta tiến hành: Đặt $x = 2\sin t$ với $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ta có $\mathrm{d}x = 2\cos t dt$ và

$$\frac{x^3 \mathrm{d}x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{8\sin^3 t.2\cos t \mathrm{d}t}{2\cos t} = 8\sin^3 t \mathrm{d}t = (6\sin t - 2\sin 3t)\, \mathrm{d}t$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3 \mathrm{d}x}{\sqrt{4 - x^2}} = \int (6\sin t - 2\sin 3t)\, \mathrm{d}t = -6\cos t + \frac{2}{3}\cos 3t + C \\ &= -8\cos t + \frac{8}{3}\cos^3 t + C = -4\sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{3}(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2} + C \end{aligned}$$

Vậy $I = -4\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2} + C.$ □

Chú ý : Do $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos t > 0$, suy ra $\sqrt{4-x^2} = 2|\cos t| = 2\cos t$.

Ví dụ 1.2. ***Tính nguyên hàm sau*** $\boldsymbol{I = \int \frac{\cos^3 x \mathrm{d}x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}}$

Lời giải. Có vẻ như tích phân bất định này không liên quan gì tới vấn đề đang đặt ra ở trên, nhưng hãy chú ý phân tích sau

$$\frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x\mathrm{d}(\sin x)}{\sqrt{2-\sin^2 x}} = \frac{(1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - \sin^2 x}}$$

Qua bước phân tính trên thì ta thấy tích phân này thuộc dạng trên khi ta thay x bởi $\sin x$.

Đặt $\sin x = \sqrt{2}\sin t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $\mathrm{d}(\sin x) = \sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$ và

$$\frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{(1-2\sin^2 t)\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\cos t} = \cos 2t\mathrm{d}t$$

Từ đó ta có

$$I = \int \frac{\cos^3 x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \int \cos 2t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\sin x\sqrt{2-\sin^2 x} + C$$

Vậy $I = \frac{1}{2}\sin x\sqrt{2-\sin^2 x} + C.$ □

Ví dụ 1.3. ***Tính tích phân sau*** $\boldsymbol{I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-x^2}}}$

Lời giải. Ta có $x\sqrt{2x-x^2} = x\sqrt{1-(1-x)^2}$

Khi đó, đặt $x - 1 = \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ta có $\mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$ và

$$\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-x^2}} = \frac{\cos t\mathrm{d}t}{(1+\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{\cos t\mathrm{d}t}{(1+\sin t)|\cos t|} = \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6} \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{array}\right.$

Ta có

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$=-\cot\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $I=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. □

Dạng 2: Tính nguyên hàm $I=\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)\mathrm{d}x$

Hình thức của dạng này gần giống như hình thức của dạng trên, nhưng cách đặt hoàn toàn khác.
Ta thực hiện phép đổi biến như sau

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{|a|}{\sin t}\ \text{ với }\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\backslash\{0\} \\ x=\dfrac{|a|}{\cos t}\ \text{ với }\ t\in[0,\pi]\backslash\{\dfrac{\pi}{2}\}\end{array}\right.$$

Khi đó nguyên hàm đã cho sẽ trở thành $I=\displaystyle\int R'(\sin t,\cos t)\,\mathrm{d}t$

Ví dụ 1.4. *Tính nguyên hàm sau* $\boldsymbol{I=\displaystyle\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}}}$

Lời giải. Điều kiện tồn tại của hàm dưới dấu tích phân là $|x|>2$.

$TH_1: x>2$

Đặt $x=\dfrac{2}{\sin t}$ với $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Ta có $\mathrm{d}x=-\dfrac{2\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t$ và

$$\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{\dfrac{8}{\sin^3 t}\dfrac{(-2\cos t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t}{\sqrt{\dfrac{4}{\sin^2 t}-4}}=\frac{\dfrac{-8\cos t}{\sin^5 t}\mathrm{d}t}{\dfrac{2\cos t}{\sin t}}=-\frac{4\mathrm{d}t}{\sin^4 t}=4\left(1+\cot^2 t\right)\mathrm{d}(\cot t)$$

Từ đó ta có

$$I=\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4}}=4\int\left(1+\cot^2 t\right)\mathrm{d}(\cot t)=4\cot t+\frac{4}{3}\cot^3 t+C$$
$$=2\sqrt{x^2-4}+\frac{1}{6}(x^2-4)\sqrt{x^2-4}+C$$

Vậy $I=2\sqrt{x^2-4}+\dfrac{1}{6}(x^2-4)\sqrt{x^2-4}+C$.

Chú ý : Ta có $\cot t=\dfrac{\cos t}{\sin t}=\dfrac{1}{\sin t}\sqrt{1-\sin^2 t}=\dfrac{x}{2}\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-4}$.

$TH_2 : x < -2$
Cách làm tương tự như trên nhưng miền giới hạn của t là $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, dành cho bạn đọc. $\square$

Ví dụ 1.5. *Tính nguyên hàm sau* $\boldsymbol{I = \int \frac{x\mathrm{d}x}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1}}}$

Lời giải. Điều kiện của hàm dưới dấu tích phân là $|x| > 1$. Nên cũng như trên ta xét hai trường hợp

$TH_1 : x > 1$

Đặt $x = \frac{1}{\sin t}$ với $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có $\mathrm{d}x = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t$ và

$$\frac{x\mathrm{d}x}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\frac{1}{\sin t}\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\mathrm{d}t}{\frac{2}{\sin^2 t} - 1 + 3\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}} = \frac{\cot t\mathrm{d}(\cot t)}{2\cot^2 t + 3\cot t + 1}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x\mathrm{d}x}{2x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{\cot t\mathrm{d}(\cot t)}{2\cot^2 t + 3\cot t + 1} \\ &= \int \left(\frac{1}{\cot t + 1} - \frac{1}{2\cot t + 1}\right)\mathrm{d}(\cot t) = \ln|\cot t + 1| - \frac{1}{2}\ln|2\cot t + 1| + C \\ &= \ln\left|\sqrt{x^2 - 1} + 1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2 - 1} + 1\right| + C \end{aligned}$$

Vậy $I = \ln\left|\sqrt{x^2 - 1} + 1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{x^2 - 1} + 1\right| + C$.

$TH_2 : x < -1$
Cách làm tương tự, dành cho bạn đọc. $\square$

Ví dụ 1.6. *Tính tích phân sau* $\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 2} \sqrt{e^{2x} - 1}\mathrm{d}x}$

Lời giải. Đặt $e^x = \frac{1}{\sin t}, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có $e^x\mathrm{d}x = -\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\cot t\mathrm{d}t$ và

$$\sqrt{e^{2x} - 1} = -\cot t\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}\mathrm{d}t = -\cot t|\cot t|\mathrm{d}t = -\cot^2 t\mathrm{d}t$$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x = 0 \qquad \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2}\ln 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{array}\right.$

Từ đó ta có

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 2} \sqrt{e^{2x}-1}\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cot^2 t\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cot^2 t\right)\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t$$

$$= \left(-\cot t - t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4-\pi}{4}$$

Vậy $I = \dfrac{4-\pi}{4}$. □

Dạng 3: Tính nguyên hàm $I = \int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)\mathrm{d}x$

Ta thực hiện phép biến đổi sau

$$\left[\begin{array}{l} x = |a|\tan t \text{ với } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x = |a|\cot t \text{ với } t \in (0, \pi) \end{array}\right.$$

Khi đó nguyên hàm đã cho trở thành $I = \int R'\left(\cos t, \sin t\right)\mathrm{d}t$

Ví dụ 1.7. *Tính nguyên hàm sau* $\boldsymbol{I = \int \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}\mathrm{d}x}$

Lời giải. Đặt $2x = \tan t$ với $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ta có $2\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$ và

$$\frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\frac{\tan t}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{2\cos^2 t} = \frac{\mathrm{d}t}{\sin t\cos^2 t}$$

Từ đó ta có

$$I = \int \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t\cos^2 t} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{(1-\cos^2 t)\cos^2 t}$$

$$= -\int \left(\frac{1}{1-\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}\right)\mathrm{d}(\cos t)$$

$$= -\int \left(\frac{1}{2(1-\cos t)} + \frac{1}{2(1+\cos t)} + \frac{1}{\cos^2 t}\right)\mathrm{d}(\cos t)$$

$$= \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + C$$

$$= \sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+4x^2}-1}{\sqrt{1+4x^2}+1}\right| + C$$

Vậy $I = \sqrt{1+4x^2} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+4x^2}-1}{\sqrt{1+4x^2}+1}\right| + C$. □

Ví dụ 1.8. *Tính tích phân sau* $\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{2+\sin 2x}}}$

Lời giải. Đối với bài này, thoạt đầu ta nghĩ ngay tới

$$\sqrt{2+\sin 2x} = \sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}$$

có vẻ như đúng dạng nêu ra, nhưng khi tiến hành đặt $\sin x + \cos x = \tan t$ thì lại không khả thi.
Tìm cách biến đổi khác vậy, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x\sqrt{2+\sin 2x}} &= \frac{1}{\cos x\sqrt{2+2\sin x\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos^2 x\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}+\tan x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\cos^2 x\sqrt{1+\tan x+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos^2 x\sqrt{\left(\tan x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}}\end{aligned}$$

Đặt $\tan x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t$ ta có $\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$ và

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}\cos^2 x\sqrt{\left(\tan x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\cos^2 t\sqrt{\tan^2 t+1}}$$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6} \\ x=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{2+\sin 2x}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\cos^2 t\sqrt{\tan^2 t+1}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\cos t} \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\sqrt{2}\cos^2 t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right)\mathrm{d}(\sin t) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\ln 3}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Vậy $I = -\dfrac{\ln 3}{2\sqrt{2}}$. □

Ví dụ 1.9. ***Tính tích phân sau*** $\boldsymbol{I = \displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(9+x^2)^5}}}$

Lời giải. Đặt $x = 3\tan t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ta có $\mathrm{d}x = 3(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$ và

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(9+x^2)^5}} = \cos^3 t\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{4}\cos 3t+\frac{3}{4}\cos t\right)\mathrm{d}t$$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x = 0 \quad\quad \Rightarrow t = 0 \\ x = 3\sqrt{3} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{3\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(9+x^2)^5}} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{12}\sin 3t + \frac{3}{4}\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

Vậy $I = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. □

Chú ý : Một cách tổng quát thì nguyên hàm dạng $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^{2n+1}}}$, $n \in \mathbb{Z}$ thì cách đặt $x = |a|\tan t$ mang lại hiệu quả rất cao.

Dạng 4: Tính nguyên hàm $I = \displaystyle\int R\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}, \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right) \mathrm{d}x$

Ta thực hiện phép đổi biến như sau $x = a\cos 2t$. Khi đó nguyên hàm đã cho trở thành $I = \displaystyle\int R'\left(\cos 2t, |\tan t|, |\cot t|\right) \mathrm{d}t$

Ví dụ 1.10. *Tính tích phân sau* $\boldsymbol{I = \displaystyle\int_0^3 x^2\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}\mathrm{d}x}$

Lời giải. Đặt $x = 3\cos 2t$ ta có $\mathrm{d}x = -6\sin 2t\mathrm{d}t$ và

$$x^2\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}\mathrm{d}x = 9\cos^2 2t|\tan t|(-6\sin 2t)\mathrm{d}t = -54\cos^2 2t|\tan t|\sin 2t\mathrm{d}t$$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \\ x = 3 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right.$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 x^2\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}\mathrm{d}x = -54\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \cos^2 2t\tan t\sin 2t\mathrm{d}t = 108\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2t\sin^2 t\mathrm{d}t \\ &= 27\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{3}{2}\cos 2t + \cos 4t - \frac{1}{2}\cos 6t\right) \mathrm{d}t \\ &= 27\left(t - \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t - \frac{1}{12}\sin 6t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{27\pi - 153}{4} \end{aligned}$$

Vậy $I = \dfrac{27\pi - 153}{4}$. □

Ví dụ 1.11. *Tính tích phân sau* $I = \displaystyle\int_0^2 (x-2)\sqrt{\frac{x}{4-x}}\mathrm{d}x$

Lời giải. Thoạt nhìn vào ta thấy tích phân này và dạng đặt ra ở trên không liên quan gì tới nhau, nhưng nếu ta để ý $x = 2-(2-x)$ và $4-x = 2+(2-x)$ gợi cho ta ý tưởng đặt $x = t+2$ nhằm đưa về dạng trên.

Đặt $x = t+2$, ta có $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ và

$$(x-2)\sqrt{\frac{x}{4-x}}\mathrm{d}x = t\sqrt{\frac{2+t}{2-t}}\mathrm{d}t$$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=-2 \\ x=2 \Rightarrow t=0 \end{array}\right.$

Từ đó ta có

$$I = \int_0^2 (x-2)\sqrt{\frac{x}{4-x}}\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 t\sqrt{\frac{2+t}{2-t}}\mathrm{d}t$$

Đặt $t = 2\cos 2u$, ta có $\mathrm{d}t = -4\sin 2u\mathrm{d}u$ và

$$t\sqrt{\frac{2+t}{2-t}}\mathrm{d}t = 2\cos 2u\sqrt{\frac{2+2\cos 2u}{2-2\cos 2u}}(-4\sin 2u)\mathrm{d}u = -4\sin 4u|\cot u|\mathrm{d}u$$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l} t=-2 \Rightarrow u=-\dfrac{\pi}{2} \\ t=\quad 0 \Rightarrow u=0 \end{array}\right.$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^0 t\sqrt{\frac{2+t}{2-t}}\mathrm{d}t = -4\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin 4u|\cot u|\mathrm{d}u = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin 4u\cot u\mathrm{d}u \\ &= 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1+\cos 2u)\cos 2u\mathrm{d}u = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (4+8\cos 2u+4\cos 4u)\,\mathrm{d}u \\ &= (4u+4\sin 2u+\sin 4u)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 2\pi \end{aligned}$$

Vậy $I = 2\pi$. □

Dạng 5: Tính nguyên hàm $I = \displaystyle\int R\left(x, \sqrt{x(a-x)}\right)\mathrm{d}x$

Đặt $x = a\sin^2 t$ khi đó nguyên hàm đã cho trở thành

$$I = \int R'(\sin t, \cos t, |a\sin t\cos t|)\,\mathrm{d}t$$

Ví dụ 1.12. *Tính tích phân sau* $I = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{4x-x^2}\mathrm{d}x$

Lời giải. Đặt $x = 4\sin^2 t$ ta có $\mathrm{d}x = 4\sin 2t\mathrm{d}t$ và

$$\sqrt{4x - x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{x(4-x)}\mathrm{d}x = 8\sin 2t|\sin 2t|\mathrm{d}t$$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 4 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$

Ta có

$$I = \int_0^4 \sqrt{4x - x^2}\mathrm{d}x = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\mathrm{d}t = (4t - \sin 4t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$$

Vậy $I = 2\pi$. □

2. Các bài toán luyện tập

2.1 Các bài toán tìm nguyên hàm

Bài toán 2.1.1. *Tính nguyên hàm sau* $I = \displaystyle\int \frac{(2x^2+1)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x}}$

Bài toán 2.1.2. *Tính nguyên hàm sau* $I = \displaystyle\int \frac{(x+4)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

Bài toán 2.1.3. *Tính nguyên hàm sau* $I = \displaystyle\int \sqrt{1+6x-3x^2}\mathrm{d}x$

Bài toán 2.1.4. *Tính nguyên hàm sau* $I = \displaystyle\int (x+7)\sqrt{3+2x-x^2}\mathrm{d}x$

Bài toán 2.1.5. *Tính nguyên hàm sau* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$

2.2 Các bài toán tính tích phân

Bài toán 2.2.1. *Tính tích phân sau* $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

Bài toán 2.2.2. *Tính tích phân sau* $I = \displaystyle\int_{\frac{4\sqrt{3}-9}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+5}}$

Bài toán 2.2.3. *Tính tích phân sau* $I = \displaystyle\int_{2+\sqrt{2}}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

Bài toán 2.2.4. *Tính tích phân sau* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(x-1)\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

Bài toán 2.2.5. *Tính tích phân sau* $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sqrt{x^2+x+1}\mathrm{d}x$