TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *Các tài liệu từ **Internet**.*

[3] Andreescu & Gelca. *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, 2000.

[12] Vũ Dương Thụy - Nguyễn Văn Nho. *40 Năm Olympic Toán Học Quốc Tế*, tập 1 và tập 2, NXB Giáo dục, 2001.

[13] Nguyễn Văn Nho. *Olympic Toán học Châu Á Thái Bình Dương*, NXB Giáo dục, 2003.

[14] Nguyễn Văn Nho. *Tuyển tập các bài toán từ những cuộc thi tại Trung Quốc*, NXB Giáo dục, 2002.

[15] Nguyễn Sinh Nguyên- Nguyễn Văn Nho - Lê Hoành Phò. *Tuyển tập các bài toán dự tuyển IMO 1991-2001*, NXB Giáo dục, 2003.

[17] Nguyễn Văn Nho. *Tuyển chọn các bài toán từ những cuộc thi tại một số nước Đông Âu*, NXB Giáo dục, *Tập 1*, Hà Nội, 2004, *Tập 2*, Tp Hồ Chí Minh, 2005.

[18] Nguyễn Văn Nho, Vũ Dương Thụy. *Tuyển tập các bài toán từ những cuộc thi tại Mĩ và Canada*, NXB Giáo dục, 2002.

[19] Nguyễn Văn Nho. *Những định lí phổ dụng trong Hình học phẳng qua các kì thi Olympic*, NXB Giáo dục, Hà Nội, 2006.

MỤC LỤC

Cho $Y \subset X$ với $|Y| = k$. Khi đó, với hàm số $f : X \to X$ mà $E_f = Y$ và $f(y) = y$ với mọi $y \in Y$, ta có f thoả (iii) nếu và chỉ nếu với $x, x' \in X \setminus Y$, $x \neq x'$ dẫn đến $f(x) \neq f(x')$ trong Y. Do đó số tất cả các $f : X \to X$ thoả điều kiện (iii) sao cho $E_f = Y$, $f(y) = y$ với mọi $y \in Y$ là bằng $k(k-1)\ldots(k-(n-k-1))$.

Vì thế, số tất cả các hàm $f : X \to X$ thoả (i), (ii) và (iii) sẽ bằng

$$C_n^k k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-k-1)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} k(k-1)(k-2)\ldots(2k-n+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!(2k-n)!}.$$

Bài 197.

Để ý rằng với $m \neq n$, có một cặp duy nhất (2, 4) thoả mãn $m^n = n^m$. Vì thế $f(4) = 2$ hay $f(2) = 4$. Nhưng $f(4) = 2$ thì không được, vì f đồng biến thực sự. Do $f(30) = f(2)f(3)f(5)$ nên ta sẽ tiến hành tìm f(3) và f(5).

Trước hết, ta tìm f(3). Theo điều kiện (i) và (ii) ta có

$$4 = f(2) < f(3) < f(4) = f(2^2) = (f(2))^2 = 16.$$

Gọi $f(3) = k$.

Giả sử $5 \le k \le 8$, thế thì

$$f(9) = f(3)f(3) = k^2 \le 64,$$

nhưng $f(8) = f(2^3) = (f(2))^3 = 64$ nên điều đó trái với điều kiện (i), cho nên trường hợp này không xảy ra được.

Giả sử $k = f(3) = 10$, thì $f(3^5) = f(243) = 100000$. Nhưng ta lại có $f(2^8) = f(256) = 4^8 = 65536$, nên trường hợp này cũng không thể xảy ra.

Vậy phải có $f(3) = 9$.

Bây giờ, ta tìm f(5). Theo (i) và (ii) ta có

$$16 = f(4) < f(5) < f(6) = f(2)f(3) = 36.$$

Nếu $17 \le f(5) \le 24$ thì $289 \le f(25) \le 576$. Nhưng

$$f(24) = f(3)f(8) = 576$$

nên điều này không thể xảy ra.

Nếu $27 \le f(5) \le 35$ thì $729 \le f(25) \le 1\,225$. Nhưng

$$f(27) = f(3^3) = 729$$

nên trường hợp này cũng không được.

Như vậy ta phải có $f(5) = 25$ hay 26. Nếu $f(5) = 26$ thì

$$f(125) = f(5^3) = 26^3 = 17576.$$

Mà $f(128) = f(2^7) = 4^7 = 16384$, vô lí.

Do đó $f(5) = 25$. Vậy $f(30) = 4.9.25 = 900$.

Bài 198.

Gọi X là điểm sao cho $f(X) = 0$.

Trước tiên, ta chứng minh rằng nếu mọi đường tròn qua X và qua hai điểm của Ω đều có chứa một điểm thứ ba của M, thì tất cả các điểm của Ω đều cùng nằm trên một đường tròn.

Thật vậy, xét một phép nghịch đảo với tâm tại X. Khi đó, ảnh của $\Omega \setminus X$ sẽ có tính chất: bất cứ đường thẳng nào qua hai điểm thuộc ảnh của $\Omega \setminus X$ đều phải chứa một điểm thứ ba của nó (*). Suy ra rằng các điểm thuộc ảnh của $\Omega \setminus X$ đều thẳng hàng. (Thật vậy, giả sử ngược lại, ta gọi ABC là tam giác mà đường cao AH có độ dài bé nhất. Do (*), phải có một điểm N trên BC, khi đó, một trong hai tam giác ABN và ACN có độ dài đường cao ngắn hơn AH, điều này mâu thuẫn).

$$f(2u+u^2)=2u+u^2.$$

Hơn nữa, $2u+u^2 \in (-1,0)$ (có thể vẽ đồ thị để kiểm tra), suy ra $2u+u^2=u$, nhưng khi ấy $u=-u^2 \notin (-1,0)$, mâu thuẫn!

Hoàn toàn tương tự, không có điểm bất động nằm trong $(0,\infty)$. Như thế 0 là điểm bất động duy nhất có thể có.

Đặt x = y trong phương trình hàm (ii), ta có :

$$f(x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x),\ \forall x\in S.$$

Như thế, $\forall x\in S$, $x+(1+x)f(x)$ là điểm bất động, do vậy :

$$\forall x\in S,\ x+(1+x)f(x)=0.$$

Suy ra $f(x)=\dfrac{-x}{1+x}$ với mọi x.

Vấn đề còn lại, bạn đọc tự kiểm tra để thấy rằng hàm số trên thoả (i) và (ii) của đề bài.

Bài 192.

Đặt $y=f(x)$, hệ thức đã cho trở thành

$$y^2=1990+\int_0^a [y^2+y'^2]dx,$$

do tính khả vi của f, đạo hàm 2 vế đẳng thức này ta được

$$2yy'=y^2+y'^2 \Leftrightarrow (y-y')^2=0.$$

Từ đó, ta có $y=y'$, suy ra $y=Ae^x$. Mặt khác, từ giả thiết ta có $y^2(0)=1990$ nên $A=\pm\sqrt{1990}$. Như vậy, ta tìm được hai hàm $f(x)=\sqrt{1990}\,e^x$ và $f(x)=-\sqrt{1990}\,e^x$, thử lại, các điều kiện cho bài toán được thoả mãn.

Bài 193.

Giả sử tồn tại hàm số $f(x): R\to R$ liên tục và thoả mãn điều kiện : với mọi số thực x, ta có

$f(x)$ hữu tỉ khi và chỉ khi $f(x+1)$ vô tỉ.

Xét các hàm số

$$g(x)=f(x+1)-f(x),\ h(x)=f(x+1)+f(x).$$

Ta có $g(x)$ và $h(x)$ cũng là các hàm số liên tục và không thể đồng thời là hằng số. Thật vậy giả sử $g(x)\equiv C_1$, $h(x)\equiv C_2$, lúc đó, với mọi $x\in R$, ta có

$$2f(x)\equiv C_2-C_1 \Rightarrow f(x)=C\equiv \text{const}.$$

Như thế, nếu chọn số thực x_0 bất kì thì

$$f(x_0)=f(x_0+1)=C,$$

điều này mâu thuẫn với (*).

Bây giờ, giả sử $h(x)$ không là hàm hằng số (không mất tính tổng quát). Khi đó, tồn tại x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$ sao cho

$$h(x_1)<h(x_2).$$

Theo tính chất trù mật của tập các số hữu tỉ trong tập số thực, tồn tại số hữu tỉ $r\in[h(x_1), h(x_2)]$. Lúc đó :

$$\big(h(x_1)-r\big)\big(h(x_2)-r\big)\le 0. \qquad (**)$$

Đặt $k(x)=h(x)-r$, ta có $h(x)$ là hàm liên tục, nên từ (**) suy ra tồn tại x_0 để cho $k(x_0)=0\Leftrightarrow h(x_0)=r$. Từ đó :

$$f(x_0+1)+f(x_0)=r.$$

Do vậy, các số $f(x_0)$ và $f(x_0+1)$ hoặc đồng thời là các số hữu tỉ, hoặc đồng thời là các số vô tỉ. Điều này mâu thuẫn với (*). Vậy không tồn tại hàm như đề bài đòi hỏi.

- Nếu $C_2 > 0$ thì $u_n > 0$ với n là số lẻ đủ lớn vì

$$\lim_{k\to+\infty} u_{2k+1} = -\infty.$$

Vì $\forall n, u_n \in R^+$ nên $C_2 = 0$. Do đó

$$u_0 = x = C_1;\ u_1 = f(x) = 1999x.$$

Vậy: $f(x) = 1999x$ với mọi x thuộc R^+.

Bài 187.

Đạo hàm hai vế của đẳng thức đã cho theo x và y ta được

$$\begin{cases} f'\left(\sqrt{\dfrac{x^n+y^n}{2}}\right)\dfrac{nx^{n-1}}{4\sqrt{\dfrac{x^n+y^n}{2}}} = \dfrac{f(x)f'(x)}{2\sqrt{\dfrac{f^2(x)+f^2(y)}{2}}} \\ f'\left(\sqrt{\dfrac{x^n+y^n}{2}}\right)\dfrac{ny^{n-1}}{4\sqrt{\dfrac{x^n+y^n}{2}}} = \dfrac{f(y)f'(y)}{2\sqrt{\dfrac{f^2(x)+f^2(y)}{2}}} \end{cases}$$

suy ra $\dfrac{f(x)f'(x)}{x^{n-1}} = \dfrac{f(y)f'(y)}{y^{n-1}}$, $\forall x, y \in R^+$, từ đó

$$\frac{f(x)f'(x)}{x^{n-1}} = a,$$

(a là hằng số dương) hay

$$f(x) = \frac{2}{n}\sqrt{ax^n}. \qquad (1)$$

Thử lại ta thấy hàm f (x) xác định trong (1) thoả các yêu cầu đề bài.Từ đó ta đi đến kết luận: $f(x) = \dfrac{2}{n}\sqrt{ax^n}$.

Bài 188.

Từ $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\cos y$, ta thay

$$x = t - \frac{\pi}{2},\ y = \frac{\pi}{2}$$

thì được $f(t) + f(t-\pi) = 2f(t - \dfrac{\pi}{2})\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, (1)

thay: $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = t - \dfrac{\pi}{2}$ thì được :

$$f(t) + f(\pi - t) = 2f(\frac{\pi}{2})\cos(t - \frac{\pi}{2})$$

$$= 2f(\frac{\pi}{2})\sin t = 2.2000\sin t, \qquad (2)$$

và thay $x = 0$, $y = t - \pi$ thì được :

$$f(t-\pi) + f(\pi - t) = 2f(0)\cos(t-\pi) = -2.1999\cos t. \qquad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$2f(t) + f(t-\pi) + f(\pi - t) = 2.2000\sin t.$$

Kết hợp với (3) ta được :

$$2f(t) - 2.1999\cos t + 2.2000\sin t,$$

tức là $\quad f(t) = 1999\cos t + 2000\sin t$,

hay $\quad f(x) = 1999\cos x + 2000\sin x$.

Thử lại ta thấy hàm f (x) thoả mãn đề bài.

Bài 189.

Trước tiên ta chứng minh $f(0) = 0$.

Cho x = y = 0, đặt $t = f(0)$, ta có $f(t) = t^2$. Ta lại có :

$$f(x^2 + t) = f^2(x),\ f(f(x)) = x + t^2.$$

Ta tính $f(t^2 + f^2(1))$ theo hai cách. Đầu tiên ta có :

$$f(t^2 + f^2(1)) = f(f^2(1) + f(t))$$

$$= t + f^2(f(1)) = t + (1 + t^2)^2 = 1 + t + 2t^2 + t^4.$$

Sau đó, ta cũng có :

Kiểm tra, ta thấy $f(u)=\frac{1}{2}$ với mọi u chắc chắn là một nghiệm. Ta giả sử f (0) = 0. Đặt y = v = 0, ta có

$$f(x).f(u) = f(xu). \quad (*)$$

Đặc biệt, thay x = u = 1, ta có $f(1)^2 = f(1)$.

Vậy f (1) = 0 hoặc f (1) = 1. Giả sử f (1) = 0. Thay x = y = 1, v = 0, ta được 0 = 2f (u), do đó f (x) = 0 với mọi x. Kiểm tra, ta thấy f (x) = 0 với mọi x chắc chắn là một nghiệm. Do đó ta giả sử f (1) = 1. Thay x = 0, u = v = 1 ta có

$$2f(y) = f(y) + f(-y), \text{ suy ra } f(-y) = f(y).$$

Đẳng thức này cho phép ta chỉ cần xét f(x) khi x dương. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $f(r)=r^2$ với r hữu tỉ. Đầu tiên ta chứng minh $f(n) = n^2$ với n là số nguyên. Ta sử dụng phương pháp quy nạp theo n. Dễ thấy điều này đúng khi n = 0 và 1. Giả sử nó cũng đúng cho n – 1 và cho n. Khi đó, đặt x = n, y = u = v = 1, ta được:

$$2f(n) + 2 = f(n-1) + f(n+1),$$

do đó

$$f(n+1) = 2n^2 + 2 - (n-1)^2 = (n+1)^2,$$

vậy mệnh đề đúng cho n + 1.

Bây giờ, từ (*) ta suy ra $f(n)f\left(\frac{m}{n}\right)=f(m)$, nên $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m^2}{n^2}$ đúng với mọi số nguyên m, n. Vậy ta đã chứng minh được $f(r)=r^2$ với mọi số hữu tỉ r.

Từ (*), ta cũng có $f(x^2)=[f(x)]^2 \ge 0$, do đó $f(x)\ge 0$ với mọi x > 0, và suy ra cho mọi x. Thay u = y, v = x, ta có

$$(f(x)+f(y))^2 = f(x^2+y^2), \text{ do đó}$$

$$f(x^2+y^2) = f^2(x) + f^2(y) + 2f(x)f(y),$$

(ở đây, $f^2(x)$ là kí hiệu của $[f(x)]^2$). Với mọi u > v > 0, ta có thể đặt $u = x^2 + y^2$, $v = x^2$ và suy ra $f(u)\ge f(v)$. Nói cách khác, f là hàm số tăng. Do đó, với mọi x ta có thể chọn một dãy số hữu tỉ r_n mà chúng bé hơn x, hội tụ đến x và rồi chọn một dãy thứ hai s_n các số hữu tỉ lớn hơn x và hội tụ đến x. Lúc đó, $r_n^2 = f(r_n) \le f(x) \le f(s_n) = s_n^2$, với mọi x, suy ra

$$f(x) = x^2.$$

Bài 184.

+ Đặt y = f(x), $t = x^2$ ta có phương trình

$$t^2 - (y^2 - y)t + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0.$$

Giải t theo y: $\Delta_t = (y^2 - 3y + 2)^2$;

$$t = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 \; ; \; t = y - 1.$$

+ Viết lại phương trình hàm :

$$[x^2 - (f(x)-1)^2][x^2 - (f(x)-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - 1 - x)(f(x) - 1 + x)(f(x) - 1 - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in \{1 + x \,;\, 1 - x \,;\, x^2 + 1\}.$$

+ Chú ý:

Đồ thị các hàm số $f_1(x) = 1 + x$ và $f_2(x) = 1 - x$ có điểm chung A(0, 1).

Đồ thị các hàm số $f_1(x) = 1 + x$ và $f_3(x) = x^2 + 1$ có 2 điểm chung A(0, 1) và B(1, 2).

Đồ thị các hàm số $f_2(x) = 1 - x$ và $f_3(x) = x^2 + 1$ có 2 điểm chung A(0, 1) và C(–1, 2).

Hơn nữa, nếu x là điểm bất động, ta có

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{x}f(x)\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

nên $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$, nghĩa là $\frac{1}{x}$ cũng là điểm bất động. Nói cách khác, tập các điểm bất động *đóng* với phép nghịch đảo.

Như vậy, ngoài điểm 1 ra, nếu f có điểm bất động khác, thì hoặc điểm này lớn hơn 1, hoặc nghịch đảo của nó lớn hơn 1, do đó, luỹ thừa nhiều lần của điểm lớn hơn 1 này (theo trên, cũng là điểm bất động) sẽ lớn tuỳ ý, điều này trái với điều kiện (ii). Vậy 1 là điểm bất động duy nhất của f, và do xf(x) là điểm bất động với mọi x > 0 nên hàm duy nhất thoả mãn điều kiện của bài toán là $f(x) = \frac{1}{x}$.

Ghi chú:

+ x là *điểm bất động* của hàm f nếu f(x) = x. Ở chương trình Toán chuyên ngành bậc Đại học và sau Đại học, bạn đọc sẽ thường xuyên gặp khái niệm này. Điểm mấu chốt của chứng minh trên là dựa vào các điều kiện đề bài để chứng tỏ hàm f cần tìm có điểm bất động duy nhất. Một định lí đóng vai trò hết sức quan trọng trong Lí thuyết Phương trình vi phân, Phương trình tích phân, Bất đẳng thức biến phân, ..., đó là *Nguyên lí ánh xạ co Banach*, nguyên lí này nói rằng trong một số điều kiện (khá rộng rãi), hàm f sẽ có duy nhất điểm bất động (xem, chẳng hạn, Phan Đức Chính, *Giải tích hàm*, ĐH và THCN, 1976).

+ Ta nói tập S là *đóng* đối với phép toán * nếu

$$\forall x, y \in S, x * y \in S.$$

Bài 180.

Với $y = x$ ta có $f(x) \ge x^2 - f(x)$. Do đó:

$$f(x) \ge \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \in R.$$

Mặt khác, $xy - f(y) \le xy - \frac{y^2}{2}$, do đó:

$$f(x) \le \max_{y\in R}\left\{xy - \frac{y^2}{2}\right\} = \frac{x^2}{2}.$$

Vậy $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Thử lại ta dễ thấy hàm số này được nghiệm đúng. Suy ra $f(x) = \frac{x^2}{2}$ là hàm cần tìm.

Bài 181.

Ta có $0 = f(xf(2))f(2) = f(x+2)$ nên suy ra với mọi x ≥ 2: f(x) = 0. Ta cũng có $f(y)f((2-y)f(y)) = f(2) = 0$, do đó, nếu y < 2 thì

$$f((2-y)f(y)) = 0, \text{ suy ra } (2-y)f(y) \ge 2 \Leftrightarrow f(y) \ge \frac{2}{2-y}.$$

Bây giờ, giả sử tồn tại y_0 nào đó để $f(y_0) > \frac{2}{2-y_0}$,

lúc đó, ta có thể tìm y_1 sao cho $y_1 > y_0$ và $y_1 < 2$ để cho :

$$f(y_0) = \frac{2}{2-y_1}.$$

Đặt $x_1 = 2 - y_1$, ta có $f(x_1f(y_0)) = f(2) = 0$, do đó :

$$f(x_1 + y_0) = 0.$$

Nhưng mặt khác ta lại có $x_1 + y_0 < 2$. Rõ ràng mâu thuẫn đã

Do $b \neq 0$, từ (3) suy ra rằng g là đơn ánh và f là toàn ánh. Kế đến, thay x bởi g(x) trong phương trình đã cho thì được :

$$f(gx) + g(y)) = g(x)f(y) - yf(g(x) + g(g(x)). \quad (4)$$

Do tính đối xứng, ta cũng có :

$$f(g(y) + g(x)) = g(y)f(x) - xf(g(y)) + g(g(y)). \quad (5)$$

Từ (4) và (5) và sử dụng (3), ta được :

$$g(x)f(y) - ay + g(g(x)) = g(y)f(x) - ax + g(g(y)). \quad (6)$$

Vì f là toàn ánh, nên tồn tại một số c sao cho $f(c) = 0$; đặt $y = c$ trong (6). Khi đó :

$$g(g(x)) = kf(x) - ax + d,$$

trong đó $k = g(c)$, $d = g(g(c)) + ac$. Bấy giờ (6) trở thành

$$g(x)f(y) + kf(x) = g(y)f(x) + kf(y).$$

Với $y = 0$ ta có $g(x)b + kf(x) = af(x) + kb$, từ đó

$$g(x) = \frac{a-k}{b}f(x) + k.$$

Để ý rằng $a - k \neq 0$ vì $a = g(0)$, $k = g(c)$, trong khi đó g là đơn ánh, và $c \neq 0$ ($f(c) = 0 \neq f(0)$). Và vì f là toàn ánh, ta thấy rằng g cũng là toàn ánh, suy ra g phải nhận giá trị 0.

Bài 175.

Gọi k là cận trên nhỏ nhất của $|f(x)|$.

Giả sử rằng $|g(y)| > 1$. Lấy bất kì x với $|f(x)| > 0$, ta có

$$2k \geq |f(x+y)| + |f(x-y)|$$
$$\geq |f(x+y) + f(x-y)| = 2|g(y)||f(x)|,$$

do đó $|f(x)| < \frac{k}{|g(y)|}$. Nói cách khác, $\frac{k}{|g(y)|}$ là một cận trên của $|f(x)|$ mà lại bé hơn k. Điều này mâu thuẫn.

Bài 176.

Thay $x = y = 0$ vào phương trình (*) ở đề bài ta có:

$$[f(0)]^2 - f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ hoặc } f(0) = 1.$$

1) Nếu $f(0) = 0$ thì $\forall x \in R$ ta có: $-f(x) = 0$, do đó

$$f(x) = 0, \forall x \in R.$$

Khi đó (*) không thoả mãn với $\forall x, y \in R$ nên

$$f(x) = 0, \forall x \in R$$

không phải là hàm cần tìm.

2) Nếu $f(0) = 1$ ta có: $f(x)f(-x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$.

Suy ra: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ hoặc $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Từ (*) suy ra $\forall x \in R$ thì:

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ khi } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ khi } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ta có: $f(t) = \cos t, \quad \forall t \in R$.

Vậy $f(x) = \cos x, \quad \forall x \in R$.

Bài 177.

Ta chứng minh rằng, với bất kì giá trị $k > 0$ và $x > 1$, ta có đồng nhất thức : $f(x^k) \equiv kx^{k-1}f(x)$.

Việc chứng minh được tiến hành ở ba giai đoạn :

(1) Giả sử $k \in N$. Nếu $k = 1$ thì có :

$$f(x^1) \equiv 1.x^0 f(x),$$

còn nếu đồng nhất thức đúng đối với giá trị nào đó $k \in N$, thì nó đúng đối với giá trị k + 1, bởi vì :

(3) $k^2 > k^2 - 2(k^2-h) \Leftrightarrow h < k^2$.

Do đó, nếu $k > 0$ và $\frac{1}{2}k^2 \le h < k^2$ thì $f(k) = f(h)$.

Nói cách khác, f phải là hàm hằng trên nửa đoạn $[\frac{1}{2}k^2, k^2)$. Đến đây, ta có thể cho k thay đổi để tạo thành các khoảng có giao đôi một khác rỗng, đồng thời, hợp tất cả các khoảng như thế bằng tập số thực dương. Từ đó suy ra hàm f phải là hàm hằng trên tập số thực dương.

Ngược lại, dễ thấy một hàm hằng bất kì thì thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Bài 171.

Cho x là số thực dương tuỳ ý, khi đó $1/x > 0$. Do đó, hàm f thoả mãn $f(x) + 2f(1/x) = 3x + 6$ và

$$f(1/x) + 2f(x) = 3/x + 6.$$

Cộng vế theo vế và chia đẳng thức nhận được cho 3 ta có

$$f(x) + f(1/x) = x + 1/x + 4.$$

Thay $f(1/x)$ từ đẳng thức trên vào, ta được $f(x) = 2/x - x + 2$.

Đảo lại, hàm f xác định bởi $f(x) = 2/x - x + 2$ với mọi số thực dương x thoả mãn đề bài.

Bài 172.

* Trước tiên, xét trường hợp $\alpha = \beta$.

Thay x = y vào phương trình hàm, ta được

$$(f(x))^2 = 2x^\alpha f\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}x^{-\alpha}(f(x))^2.$$

Từ điều này ta suy ra

$$f(x)f(y) = \frac{1}{2}x^\alpha y^{-\alpha}(f(y))^2 + \frac{1}{2}y^\alpha x^{-\alpha}(f(x))^2, \text{ hay}$$

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha/2} f(y) - \left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha/2} f(x)\right)^2 = 0.$$

Suy ra, với mọi x, y thuộc R^+, ta có $\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{f(y)}{y^\alpha}$, do đó

$$f(x) = \lambda x^\alpha, \text{ với } \lambda \text{ là hằng số.}$$

Từ $\lambda^2 x^\alpha y^\alpha = 2\lambda\left(\frac{xy}{2}\right)^\alpha$, ta có $\lambda = 0$ hay $\lambda = 2^{1-\alpha}$.

Vậy trong trường hợp này ta được 2 nghiệm.

* Tiếp theo, xét trường hợp $\alpha \ne \beta$.

Thay đổi vai trò của x và y ở phương trình hàm ta có:

$$(x^\alpha - x^\beta)f\left(\frac{y}{2}\right) = (y^\alpha - y^\beta)f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Tiến hành như trên ta được $f\left(\frac{x}{2}\right) = \lambda(x^\alpha - x^\beta)$ với λ là hằng số nào đó và $x \in R^+ - \{1\}$. Bây giờ, ta có:

$$\lambda^2(2^\alpha x^\alpha - 2^\beta x^\beta)(2^\alpha y^\alpha - 2^\beta y^\beta)$$
$$= \lambda(x^\alpha - x^\beta)y^\alpha + \lambda x^\beta(y^\alpha - y^\beta)$$

với mọi x, y thuộc $R^+ - \{\frac{1}{2}, 1\}$. So sánh các hệ số của $x^\alpha x^\beta$ và $y^\alpha y^\beta$ ta được $\lambda^2 4^\alpha = \lambda$ và $\lambda^2 4^\beta = -\lambda$. Điều này chỉ xảy ra khi $\lambda = 0$. Suy ra f(x) = 0 với mọi x thuộc $R^+ - \{\frac{1}{2}, 1\}$. Ta lại có $(f(1))^2 = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$, trong khi $(f(2))^2 = 2^{\alpha+1}f(1)$, từ đó, ta cũng có f(2) = 0, f(1) = 0, và suy ra f(x) = 0 với mọi x thuộc R^+.

Đó là nghiệm duy nhất trong trường hợp này.

$$f(f(x)) + af(x) = b(a + b)x.$$

Bây giờ, giả sử có hàm f thoả mãn phương trình hàm đã cho. Kí hiệu

$$f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x)),\ n = 1, 2, \ldots$$

trong đó $f^{(0)}(x) = x$; $f^{(1)}(x) = f(x)$. Qua các kí hiệu này, ta có

$$f^{(n+2)}(x) + af^{(n-1)}(x) - b(a + b)f^{(n)}(x) = 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

Đa thức đặc trưng bằng $y^2 + ay - b(a + b) = (y + a + b)(y - b)$, và vì thế $f^{(n)}(x) = \lambda_1 b^n + \lambda_2(-a-b)^n$, $n = 0, 1, \ldots$, trong đó λ_1, λ_2 là các hằng số. Nhưng

$$x = f^{(0)}(x) = \lambda_1 + \lambda_2,\ f(x) = f^{(1)}(x) = \lambda_1 b + \lambda_2(a + b),$$

và suy ra

$$\lambda_1 = \frac{(a+b)x + f(x)}{a + 2b},\ \lambda_2 = \frac{bx - f(x)}{a + 2b},$$

$$\frac{1}{(a+b)^n} f^{(n)}(x) = \lambda_1\left(\frac{b}{a+b}\right)^n + (-1)^n \lambda_2.$$

Vì $f: R^+ \to R^+$, nên $f^{(n)}: R^+ \to R^+$, do đó

$$\lambda_1\left(\frac{b}{a+b}\right)^n + (-1)^n \lambda_2 \ge 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

$$\text{và: } \lambda_1\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n+1} \ge \lambda_2 \ge -\lambda_1\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n},\ n = 0, 1, 2\ldots.$$

Cho $n \to \infty$. Khi đó ta nhận được $\lambda_2 = 0$ $(a + b > b \ge 0)$, và

$$f(x) = bx.$$

Bài 167.

Điều kiện thứ hai cho thấy rằng $f(x) = x$ có không quá 3 nghiệm trong khoảng $(-1, 0)$, có một nghiệm bằng 0, và một nghiệm trong $(0, +\infty)$.

Giả sử ta có $f(u) = u$ với u thuộc $(-1, 0)$. Từ phương trình hàm đã cho, thay $x = y = u$, ta được

$$f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u.$$

Hơn nữa, $u^2 + 2u$ cũng thuộc $(-1, 0)$. Suy ra $u^2 + 2u = u$, nhưng khi đó, u lại không thuộc $(-1, 0)$, mâu thuẫn !

Tương tự, ta cũng có điều mâu thuẫn khi giả sử $f(v) = v$ với v thuộc $(0, +\infty)$.

Tuy nhiên, với mọi x thuộc S ta có :

$$f(x + (1 + x)f(x)) = x + (1 + x)f(x).$$

Ta phải có $x + (1 + x)f(x) = 0$, do đó $f(x) = -\dfrac{x}{1+x}$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng hàm số trên thoả mãn các tính chất đòi hỏi. Thật vậy, rõ ràng hàm

$$\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{1+x}$$

tăng thực sự trên S. Với mọi x, y thuộc S ta cũng có:

$$y + (1 + y)f(x) = y - \frac{x(1+y)}{1+x} = \frac{y-x}{1+x},$$

$$f(x + (1 + x)f(y)) = f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) = -\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1 + \frac{x-y}{1+y}} = \frac{y-x}{1+x}.$$

Bài 168.

Với $x = y = 0$ suy ra $f(0) = f(0) + f(0)$ nên $f(0) = 0$.

Với $y = 0$ thì $f(x) = f(|x|)$ nên $f(x)$ là hàm chẵn. Vì vậy ta chỉ cần xét trên R^+. Bằng quy nạp ta chứng minh được :

$$1 = f(1) = f(x + 1 - x) \le f(x) + f(1 - x) + 1,$$

nên suy ra $f(x) + f(1 - x) \ge 0$. Nhưng nếu $0 < x < 1$ thì $0 < 1-x < 1$, nên ta được $f(x) = f(1 - x) = 0$. Vậy ta đã chứng minh được rằng $f(x) = 0$ khi $0 \le x < 1$, và ngoài ra

$$f(x + 1) = f(x) + 1.$$

Suy ra $f(x) = [x]$ với mọi x.

Bài 162.

Với $x = y$ ta có $f\left(x + f(x) + xf(x)\right) = x + f(x) + xf(x)$.

Đặt $u = x + (1 + x)f(x)$ thì $f(u) = u$. Với $x = u$ ta có:

$$f(u^2 + 2u) = u^2 + u.$$

Do đó $u = 0$ là điểm bất động của $f(x)$.

Từ điều kiện 2) suy ra $u = 0$ là điểm bất động duy nhất của hàm $f(x)$. Suy ra $x + (1 + x)f(x) = 0, \forall x \in S$.

Vậy, $f(x) = -\dfrac{x}{x+1}$.

Bài 163.

Xét hàm $f(x)$ thoả mãn các điều kiện của đề bài. Hiển nhiên $f(x)$ là hàm chẵn. Giả sử $x_0 \ge 0$.

Có hai trường hợp.

(I) $0 \le x_0 \le \dfrac{1}{2}$. Xét dãy số

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

xác định bởi các đẳng thức $x_{n+1} = x_n^2 + \dfrac{1}{4}$. Bằng quy nạp, dễ dàng chứng tỏ được $0 \le x_n \le \dfrac{1}{2}$ với mọi n. Ta có :

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + \frac{1}{4} = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2,$$

do đó, dãy (1) đơn điệu tăng. Vì dãy (1) bị chặn nên nó hội tụ. Đặt $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Từ đó, chuyển qua giới hạn cho đẳng thức

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$$

ta được $\alpha^2 - \alpha + \dfrac{1}{4} = 0$, suy ra $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác, vì hàm $f(x)$ liên tục nên

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ngoài ra, $f(x_{n+1}) = f\left(x_n^2 + \dfrac{1}{4}\right) = f(x_n)$ với mọi n. Do vậy ta có $f(x_0) = f(x_1) = \ldots$, nghĩa là

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ với mọi } x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

(II) $x_0 > \dfrac{1}{2}$. Xét dãy số:

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \qquad (2)$$

xác định bởi $x_{n+1} = \sqrt{x_n - \dfrac{1}{4}}$. Cũng như trường hợp trên, ta chứng minh được dãy (2) hội tụ và $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \dfrac{1}{2}$. Hơn nữa, ta có $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ và do $f(x_{n+1}) = f\left(x_{n+1}^2 + \dfrac{1}{4}\right) = f(x_n)$ với mọi n nên $f(x_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Suy ra $f(x) = x - k$ với mọi x. Dễ dàng kiểm tra được với mọi k, các hàm số $f(x) = x - k$ đều thoả mãn đề bài.

Bài 157.

Đặt $u = 2x + 1$, từ phương trình thứ nhất ta được:

$$f(u) + 2g(u) = u - 1. \quad (1)$$

Đặt $u = \frac{x}{x-1}$ ở phương trình thứ hai ta có:

$$f(u) + g(u) = \frac{u}{u-1}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta dễ dàng có được:

$$f(u) = \frac{u^2 - 4u + 1}{u - 1} \text{ và } g(u) = \frac{u^2 - 3u + 1}{u - 1}.$$

Bài 158.

Từ phương trình hàm, thay $x = y = 0$ ta được $f(0) = 0$.

Cho $x = 0$, ta có $f(t) = f(-t)$, mọi $t \in R$.

Để ý rằng với mọi $a, b > 0$, hệ hai phương trình

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b$$

có một nghiệm thực, do đó

$$f(a) + f(b) = f(\sqrt{a^2 + b^2}).$$

Đặt $g(x) = f(\sqrt{x})$, suy ra $g(a+b) = g(a) + g(b)$ với mọi $a, b \geq 0$. Vì g là hàm liên tục, suy ra $g(a) = ca$ với hằng số $c \geq 0$. Vậy $f(x) = cx^2$.

Bài 159.

Từ đề bài ta có : $\frac{f(x+y)}{x+y} - \frac{f(x-y)}{x-y} = 4xy$.

Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, lúc đó: $g(x+y) - g(x-y) = 4xy$.

Lại đặt $x = a + \frac{h}{2}, y = \frac{h}{2}$, ta suy ra

$$g(a+h) - g(a) = 4\left(a + \frac{h}{2}\right)\frac{h}{2}.$$

Từ đây ta được :

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} = 2a + h.$$

Cho $h \to 0$, ta có: $g'(a) = 2a$. Do đó

$$g(x) = x^2 + C, f(x) = x^3 + Cx,$$

với C là hằng số tuỳ ý.

Bài 160.

Dựa trên bốn bổ đề sau, ta sẽ chứng minh nghiệm duy nhất tìm được là hàm $f(x) = \frac{1}{x}$.

Bổ đề 1.

f là hàm không tăng.

Chứng minh.

Giả sử $0 < u < v$ và $f(u) < f(v)$. Đặt

$$w = \frac{vf(v) - uf(u)}{v - u}.$$

Khi đó, $w > f(v) > f(u)$, vì

$$w - f(v) = \frac{u(f(v) - f(u))}{v - u}.$$

Thay $x = u$, $y = w - f(u)$ và $x = v$, $y = w - f(v)$, ta được

$$f(w) = f((f(u) + (w - f(u))) = u(f(1 + (w - f(u)))$$

$$= uf\left(1 + \frac{uv(f(v) - f(u))}{v - u}\right),$$

$$f(w) = f((f(v) + (w - f(v))) = v(f(1 + (w - f(v))) =$$

Giả sử rằng $|g(y)| > 1$. Lấy bất kì x với $|f(x)| > 0$, ta có :

$$2k \ge |f(x+y)| + |f(x-y)|$$
$$\ge |f(x+y) + f(x-y)| = 2|g(y)||f(x)|,$$

do đó $|f(x)| < \dfrac{k}{|g(y)|}$. Nói cách khác, $\dfrac{k}{|g(y)|}$ là một cận trên của $|f(x)|$ mà lại bé hơn k. Điều này mâu thuẫn.

Bài 151.

Từ nay về sau, ta sẽ kí hiệu $f(a)^b$ thay cho $(f(a))^b$.

Đặt y = x và a = b = c / 2, ta được $f(x^c) \le f(x)^{1/c}$.

Do đó, ta giả sử f(e) = k. Lúc đó, với mọi x, ta có thể chọn c = lnx, và có x = e^c. Suy ra $f(x) \le k^{1/\ln x}$. Mặt khác, ta có $f(x) \ge f(x^c)^c$, do đó, chọn c = 1 / lnx, ta được

$$f(x) \ge k^{1/\ln x}.$$

Vậy ta phải có $f(x) = k^{1/\ln x}$.

Vẫn còn khả năng rằng không có hàm nào thoả mãn điều kiện trên, do đó ta cần kiểm tra rằng hàm $k^{1/\ln x}$ thoả mãn. Ta có $\ln(x^a y^b) = a\ln x + b\ln y$. Vậy ta cần chứng minh :

$$\frac{1}{a\ln x + b\ln y} \le \frac{1}{4a\ln x} + \frac{1}{4b\ln y}.$$

Nhưng điều này được suy ra ngay bằng cách áp dụng bất đẳng thức sau đây cho A = alnx, B = blny :

$$\frac{2}{\frac{1}{A} + \frac{1}{B}} \le \frac{A+B}{2}$$

Tóm lại, hàm số thoả mãn bài toán là

$$f(x) = f(e)^{1/\ln x}.$$

Bài 152.

Ta có: $f(x) = f^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \ge 0, \forall x \in R$.

Nếu tồn tại $x_0 \in R$ sao cho $f(x_0) = 0$ thì :

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0)f(x - x_0) = 0, \forall x \in R.$$

Điều này mâu thuẫn với 2). Do đó $f(x) > 0, \forall x \in R$.

Đặt $g(x) = \ln f(x)$. Ta có :

$$g(x+y) = \ln f(x+y) = \ln f(x)f(y) = g(x) + g(y),$$
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \ln f(x) = \ln 1 = 0.$$

Từ đó $g(x) = cx$. Suy ra $f(x) = e^{g(x)} = e^{cx} = a^x$, trong đó a là hằng số > 0.

Bài 153.

Để giải bài toán, ta phân ra hai trường hợp của biến :

$$x \le 0 \text{ và } x > 0.$$

Trường hợp 1 : $x \le 0$. Khi đó, tồn tại $y \in R$ sao cho $x = -y^2$. Ta có $f(x) = f(-y^2)$, suy ra

$$f(x) = f(f(f(y))) = -[f(y)]^2 \le 0,$$

như vậy kết luận của bài toán đúng với $x \le 0$.

Trường hợp 2 : $x > 0$. Ta có nhận xét sau đây : Nếu $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ mà $x_1 \ne x_2$, thì $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Thật vậy nếu $f(x_1) = f(x_2)$, thì theo giả thiết ta có

$$-x_1^2 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = -x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Điều này mâu thuẫn với $x_1 \ne x_2$. Nhận xét được chứng minh.

Giả sử kết luận của bài toán không đúng khi $x > 0$, tức là

$$p_n(x) \pm q_n(x) = (x \pm 1)^{2^n}.$$

Với $n = 0$, ta có $p_0(x) \pm q_0(x) = x \pm 1 = (x \pm 1)^{2^0}$. Giả sử kết quả trên đúng với $n \geq 0$, khi đó ta có

$$p_{n+1}(x) \pm q_{n+1}(x) = (p_n(x))^2 + (q_n(x))^2 \pm 2p_n(x)q_n(x)$$

$$= (p_n(x) \pm q_n(x))^2 = \left((x \pm 1)^{2^n}\right)^2 = (x \pm 1)^{2^{n+1}}$$

Sau cùng, áp dụng các kết quả trên ta có:

$$1 + \frac{1}{f\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2n}\right)} = 1 + \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2n}}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2n+1} + 1}$$

$$= \frac{\left((x+1)^{2^n} + (x-1)^{2^n}\right)^2}{(x+1)^{2^{n+1}} + (x-1)^{2^{n+1}}} =$$

$$= \frac{(p_n(x) + q_n(x) + p_n(x) - q_n(x))^2}{p_{n+1}(x) + q_{n+1}(x) + p_{n+1}(x) - q_{n+1}(x)} = \frac{2(p_n(x))^2}{p_{n+1}(x)}$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = \frac{p_n(x)q_{n+1}(x)}{p_{n+1}(x)q_n(x)} = \frac{2(p_n(x))^2}{p_{n+1}(x)}$$

nên suy ra điều phải chứng minh.

Bài 148.

Giả sử $k = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, ta có

$$k = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^n a_n$$

$$= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + \left(9a_1 + 99a_2 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{n} a_n\right).$$

Từ đó suy ra

$$k \equiv (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \pmod 9 \Rightarrow k \equiv S(k) \pmod 9,$$

ở đây, $S(k)$ là tổng các chữ số khi biểu diễn k dưới dạng thập phân.

Ta có $2^{1990} = 2.8^{663}$, và do $8 \equiv -1 \pmod 9$, nên

$$8^{663} \equiv -1 \pmod 9 \Rightarrow 2.8^{663} \equiv -2 \pmod 9.$$

hay $2^{1990} \equiv 7 \pmod 9$. Dựa vào nhận xét trên, ta có

$$S(2^{1990}) \equiv 7 \pmod 9. \qquad (1)$$

Từ định nghĩa, ta có $f_1(2^{1990}) = \{S(2^{1990})\}^2$, nên từ (1) suy ra $f_1(2^{1990}) \equiv 7^2 \pmod 9$, hay

$$f_1(2^{1990}) \equiv 4 \pmod 9. \qquad (2)$$

Theo định nghĩa, $f_1(2^{1990}) = f_1(f_1(2^{1990}))$, và lập luận như trên, ta có : $f_2(2^{1990}) \equiv 4^2 \pmod 9$, hay

$$f_2(2^{1990}) \equiv 7 \pmod 9. \qquad (3)$$

Hiển nhiên ta có : $2^{1990} = 2.8^{663} < 10^{664}$. Từ (3) suy ra trong biểu diễn thập phân của 2^{1990} có không quá 664 chữ số. Từ đó, $S_1(2^{1990}) \leq 9.664$, nên

$$f_1(2^{1990}) = \{S_1(2^{1990})\}^2 \leq (9.664)^2 < (7.10^3)^2 = 49.10^6 < 5.10^7.$$

Do $f_1(2^{1990})$ là số nguyên, nên ta có

$$f_1(2^{1990}) \leq 49999999. \qquad (4)$$

Từ đó theo định nghĩa, $f_2(2^{1990}) = f_1(f_1(2^{1990}))$, và dựa vào (4) suy ra

$$f_2(2^{1990}) \leq (4 + 9.7)^2 < 70^2 = 4900.$$

Nếu giá trị của hàm số f(n) tại n = 0 và n = 1 đã cho trước, thì có thể xác định một cách duy nhất các giá trị f(2) và f(−1) từ đồng nhất thức đã cho, rồi thì xác định được f(3) và f(− 2),... tức là tất cả các giá trị của f(n) với $n \in Z$. Như vậy hàm số f(n) xác định một cách duy nhất từ điều kiện của bài toán, như thế f(0) = 2 và $f(1) = \frac{5}{2}$ hay $f(1) = \sqrt{3}$. Cuối cùng, chỉ cần kiểm chứng rằng các hàm số sau thoả các điều kiện đề bài :

$$f(n) = 2^n + 2^{-n} \text{ và } f(n) = 2\cos\frac{\pi n}{6}.$$

Bài 142.

Ta có $f_1(x) = -\frac{2x+7}{x+3} = -2 - \frac{1}{x+3}$, suy ra

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = -2 - \frac{1}{f_1(x)+3} = -3 - \frac{1}{x+2},$$

$$f_3(x) = f_1(f_2(x)) = -2 - \frac{1}{-3 - \frac{1}{x+2} + 3} = x.$$

Nếu $f_{3k}(x) = x$ với k là số nguyên dương, ta có

$$f_{3(k+1)}(x) = f_3(f_{3k}(x)) = f_3(x) = x.$$

Như vậy, bằng quy nạp, ta đã chứng minh được

$$f_{3k}(x) = x$$

với mọi số nguyên dương k, do đó $f_{2001}(2002) = 2002$ (các hàm f_i xác định tại mọi điểm, ngoại trừ x = − 2 và x = − 3).

Bài 143.

Bằng quy nạp theo n, ta có thể chứng minh dễ dàng các tính chất sau đây:

(1) $f_n(x)$ liên tục và $f_n(x) > 0$, $\forall x \in (0\,;+\infty)$.

(2) $f_n(x)$ là hàm tăng và $f_n(4) < 8$.

(3) $\frac{f_{n+1}(x)}{x}$ là hàm giảm.

Ta có: $f_1(x_1) = \sqrt{x_1^2 + 6x_1} = 2x_1 \Leftrightarrow x_1 = 2$,

$$f_2(x_1) = \sqrt{x_1^2 + 6f_1(x_1)} = \sqrt{x_1^2 + 12x_1} > 2x_1, \text{ do } x_1 = 2 < 4.$$

Vậy $\frac{f_2(x_1)}{x_1} > 2$. Mặt khác, do nhận xét (2) ta có

$$\frac{f_2(4)}{4} < 2.$$

Vì $f_2(x)$ liên tục nên tồn tại $x_2 \in (x_1;4)$ sao cho

$$f_2(x_2) = 2x_2.$$

Do (3) nên x_2 duy nhất. Hoàn toàn tương tự như thế ta xây dựng được dãy $\{x_n\}$ thoả mãn bài toán và:

$$2 = x_1 < x_2 < \ldots < 4.$$

Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ thì $\alpha \le 4$.

Theo nhận xét (2) thì:

$$2x_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) > f_{n+1}(x_n) = \sqrt{x_n^2 + 6f_n(x_n)} = \sqrt{x_n^2 + 12x_n}.$$

Suy ra: $2\alpha \ge \sqrt{\alpha^2 + 12\alpha} \Rightarrow \alpha \ge 4$.

Bài toán được chứng minh.

Bài 144.

Bằng quy nạp, ta chứng minh được f(x) là đa thức bậc 2^n, nên có nhiều nhất 2^n nghiệm.

Ta xét $x \in [-2, 2]$ và đặt $x = 2\cos\alpha$, $\alpha \in [0,\pi]$. Khi ấy

$$f(x) = (2\cos\alpha)^2 - 2 = 2(\cos^2\alpha - 1) = 2\cos 2\alpha.$$

Thay vào ta có :

Khi k = 2, vì $f(n) \equiv 0 \pmod p$ nên

$$f(f(n)) \equiv f(0) \equiv 1 \pmod p.$$

Giả sử $f^k(n) \equiv 1 \pmod p$. Khi đó.

$$f(f^k(n)) \equiv f(1) \equiv 1 \pmod p.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 136.

a) So sánh các hệ số đứng trước x^m, với

$$0 \le m \le \left[\frac{n+1}{3}\right].$$

Ta cần chứng minh rằng

$$C_{n+3}^{3m+2} = 3C_{n+2}^{3m+2} - 3C_{n+1}^{3m+2} + C_n^{3m+2} + C_n^{3m-1}.$$

Sử dụng đẳng thức $C_{a+1}^b = C_a^b + C_a^{b-1}$ ta được

$$(C_{n+3}^{3m+2} - C_{n+2}^{3m+2}) - 2(C_{n+2}^{3m+2} - C_{n+1}^{3m+2}) + (C_{n+1}^{3m+2} - C_n^{3m+2}) - C_n^{3m-1}$$

$$= C_{n+2}^{3m+1} - 2C_{n+1}^{3m+1} + C_n^{3m+1} - C_n^{3m-1}$$

$$= C_{n+1}^{3m} - C_n^{3m} - C_n^{3m-1} = 0.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Giả sử số a thoả mãn điều kiện đề bài. Khi đó, $P_5(a^3) = 10 + a^3$ chia hết cho 9, do đó $a \equiv -1 \pmod 3$. Ngược lại, giả sử $a \equiv -1 \pmod 3$. Lúc đó ta có

$$a^3 + 1 \equiv 0 \pmod 9.$$

Vì $P_2(a^3) = 1$, $P_3(a^3) = 3$ và $P_4(a^3) = 6$ nên từ kết quả ở câu (a), bằng quy nạp, ta suy ra $P_n(a^3)$ chia hết cho $3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ với mọi n.

Như vậy, giá trị a cần tìm là tất cả các số nguyên mà khi chia cho 3 ta được số dư 2.

Bài 137.

Hãy viết tường minh các hệ số của $P(P(x))$ và $Q(Q(x))$ và so sánh các hệ số tương ứng cùng số hạng có bậc lớn hơn hoặc bằng $n^2 - n + 1$. Từ các đẳng thức đó, hãy chứng tỏ các hệ số của P và Q bằng nhau, ngoại trừ số hạng sau cùng. Vậy $P = Q + c$. Điều này có nghĩa $Q(Q(x) + c) + c = Q(Q(x))$. Nếu Q là hằng số thì không có gì để chứng minh. Giả sử Q không là hằng số. Đạo hàm hai vế ta được

$$Q'(Q(x) + c)Q'(x) = Q'(Q(x))Q'(x).$$

Vì Q' khác đa thức 0 nên $Q'(Q(x) + c) = Q'(Q(x))$. Vì các đa thức đã cho có hệ số phức nên Q là một toàn ánh, do đó

$$Q'(x + c) = Q'(x).$$

Nếu u là một nghiệm của $Q' = s$ thì $u + c$ cũng là nghiệm của $Q' = s$. Nếu c khác 0, ta có vô số nghiệm cho phương trình $Q' = s$, do đó $Q' = s$ với mọi s, suy ra Q là đa thức tuyến tính.

Từ đây, dễ dàng tiếp tục giải bài toán.

Chú ý.

Về *đa thức trên trường số phức*, các bạn có thể tham khảo thêm ở các tài liệu cho ngành Toán bậc đại học (các tài liệu này khá phổ biến)[1].

Bài 138.

Thay $x = y$ và sau đó $x = -y$ vào phương trình đã cho, ta suy ra $P(y)^2 = P(-y)^2$ với mọi y (kí hiệu $P(y)^2$ thay cho $(P(y))^2$). Từ đó suy ra rằng một trong hai đa thức

$$P(x) - P(-x)\ ,\ P(x) + P(-x)$$

sẽ có vô số 0 điểm, nên nó bằng 0 với mọi x. Vì P có bậc lẻ nên

---

[1] Chẳng hạn, *Lê Thanh Hà*, Đa thức trên trường số, NXBGD, 2000.

suy ra $f(x+y) = f(x) + f(y)$, ở đây ta đặt

$$f(x) = P(1-x, x) - 1.$$

Bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được rằng, với mọi số nguyên m và mọi số thực x, ta có $f(mx) = mf(x)$.

Từ đó, suy ra rằng với mọi r, s ta có

$$f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}f(1),\ f\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{r}{s}f(1).$$

Nhưng P(0, 1) = -2, do đó $f(1) = -3$, vậy $f(x) = -3x$ với mọi số hữu tỉ x. Nhưng $f(x)$ là hàm liên tục nên $f(x) = -3x$ với mọi số thực x. Với a, b là các số thực tuỳ ý và a + b $\neq 0$, ta đặt $x = \dfrac{b}{a+b}$, khi đó,

$$P(a, b) = (a+b)^n P(1-x, x)$$

$$= (a+b)^n\left(\frac{-3b}{a+b} + 1\right) = (a+b)^{n-1}(a-2b).$$

Để ý rằng khi a + b = 0, với n > 1, từ tính liên tục ta cũng có P(a, b) = 0.

Tóm lại, nghiệm tổng quát của bài toán là:

$$P(x, y) = (x+y)^n(x-2y).$$

Bài 132.

Rõ ràng $f(x) = 0$ và $f(x) = a$ thoả mãn, với a là một trong các căn bậc $(m-1)$ của đơn vị (tức là $a^{m-1} = 1$, $a \in \mathbf{C}$, tập các số phức). Ngoài ra $f(x) = x^m$ cũng thoả mãn.

Để chứng tỏ rằng các đa thức trên là nghiệm của bài toán, ta gọi $f(x)$ là đa thức thoả mãn

$$f(f(x)) = (f(x))^m \quad (1 < m \in \mathbf{N}).$$

Nếu $\deg(f(x)) = 0$ (kí hiệu deg là bậc của đa thức), tức là $f(x) = a$, với a là hằng số, thì $a = a^m$, do đó ta có $a = 0$ hay

$$a^{m-1} = 1.$$

Nếu $\deg(f(x)) > 0$ thì với mọi $k \in \mathbf{N}$, theo định lí cơ bản của Đại số, tồn tại $\alpha_k \in \mathbf{C}$ sao cho $f(\alpha_k) = k$. Từ đó suy ra $f(k) = f(f(\alpha_k)) = (f(\alpha_k))^m = k^m$, hay $f(k) = k^m$ với mọi $k \in \mathbf{N}$. Do đó $f(x) = x^m$ vì f là đa thức. Ta có đpcm.

Chú ý:

Ta nói số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là căn bậc n của số phức $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, kí hiệu $\sqrt[n]{w} = z$, nếu $z^n = w$.

Bằng các công thức về phép tính các số phức, để ý rằng hai số phức bằng nhau nếu chúng có các modulus và argument tương ứng bằng nhau, ta chứng minh được rằng w có n căn bậc n cho bởi các công thức sau đây, khi w $\neq$ 0:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right),\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Từ công thức trên, vì $1 = \cos 0 + i\sin 0$ nên đơn vị có n căn bậc n cho bởi các công thức:

$$e_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Trong mặt phẳng phức, khi n $\neq$ 3, các giá trị trên có thể được biểu diễn thành các điểm nằm trên đường tròn đơn vị, tâm ở gốc toạ độ, chúng là các đỉnh của đa giác đều nội tiếp đường tròn này.

Bài 133.

Khi $n = 0$, thì $f'(x) = f''(x) = 0$, $\forall x$, nên không tồn tại

Bài 128.

Cho các số thực dương a, b, c, d. Áp dụng liên tiếp phương trình hàm đã cho, ta có f(a) + f(b) + f(c) + f(d) =

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)+f\left(\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{2cd}{c+d}\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\right)+f\left(\frac{2\frac{a+b}{2}.\frac{c+d}{2}}{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}\right)$$

$$+f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2ab}{a+b}+\frac{2cd}{c+d}\right)\right)+f\left(\frac{2\frac{2ab}{a+b}.\frac{2cd}{c+d}}{\frac{2ab}{a+b}+\frac{2cd}{c+d}}\right)$$

$$= f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)+f\left(\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}\right)$$

$$+f\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}\right)+f\left(\frac{4abcd}{abc+abd+acd+bcd}\right).$$

Thay đổi vị trí của b và c cho nhau để tính

$$f(a)+f(c)+f(b)+f(d),$$

ta được kết quả tương tự. So sánh hai vế rồi suy ra:

$$f\left(\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}\right)+f\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}\right)$$

$$= f\left(\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}\right)+f\left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+c)(b+d)}\right). \quad (1)$$

Cho a = c, $b = a^2/d$ và $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, dễ dàng chứng minh được :

$$\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}=\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}=a,$$

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}=a\frac{2t}{2+t},$$

$$\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+c)(b+d)}=a.\frac{2+t}{2t}.$$

Thay vào (1) ta được :

$$2f(a)=f\left(a.\frac{2t}{2+t}\right)+f\left(a.\frac{2+t}{2t}\right). \quad (2)$$

Dễ thấy $t \geq 2$, suy ra $\frac{2t}{2+t} \geq 1$. Do vậy, với mọi x, y thoả mãn điều kiện $x \geq y > 0$, luôn tồn tại các số thực a và t sao cho

$$a.\frac{2t}{2+t}=x,\ a.\frac{2+t}{2t}=y,\ \sqrt{xy}=a.$$

Nói cách khác, từ 2, với mọi số thực dương x, y ta luôn có

$$2f(\sqrt{xy})=f(x)+f(y).$$

6 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC

Bài 129.

Giả sử x_0 là một nghiệm nguyên của $f'(x)=f(x)=0$.

Nếu x_0 là số lẻ thì

$$f(x_0)=x_0^3(x_0-2003)+2004x_0^2+(x_0^2+1)n-2005x_0$$

phải là số lẻ. Do vậy x_0 phải là số chẵn, vì $f(x_0)=0$.

Hơn nữa, nếu x_0 là số chẵn thì

$$f'(x_0)=4x_0^3-6009x_0^2+2(2004+n)x_0-2005$$

lại là số lẻ. Do đó không thể có $f'(x_0)=0$. Tóm lại, phương lớn, vì $u_n \geq 0$, do đó ta phải có $c_2 = 0$.

+ Như vậy $u_n = c_1 b^n$. Đặc biệt $u_1 = f(x) = c_1 b$ và

$$u_0 = x = c_1.$$

Vậy $f(x) = bx$.

+ Thử lại $f(x) = bx$ thoả yêu cầu đề bài.

+ Với $f(x) = bx$, ta có :

$$f\left(f\left(\ldots f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right)\ldots\right) = \frac{b^{2000}}{x} \to 0 \text{ khi } x \to +\infty.$$

Bài 124.

Thay $x = y = 0$ vào (1), ta có $f(0) = 0$. Đặt $y = 0$, ta có

$$f(x^3) = xf(x)^2 \text{ hay } f(x) = x^{1/3}f(x^{1/3})^2. \qquad (2)$$

Đặc biệt, x và f(x) luôn cùng dấu, nghĩa là $f(x) \geq 0$ khi $x \geq 0$ và $f(x) \leq 0$ khi $x \leq 0$. Gọi S là tập hợp :

$$S = \{a > 0: f(ax) = af(x), \forall x \in R\}.$$

Rõ ràng $1 \in S$, ta sẽ chứng tỏ $a^{1/3} \in S$ khi $a \in S$. Thật vậy,

$$axf(x)^2 = af(x^3) = f(ax^3) = f((a^{1/3}x)^3) = a^{1/3}f(a^{1/3}x)^2$$

và do đó ta được : $\left[a^{1/3}f(x)\right]^2 = f(a^{1/3}x)^2$.

Do x và f(x) luôn cùng dấu nên $f(a^{1/3}x) = a^{1/3}f(x)$.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng nếu $a, b \in S$ thì $a + b \in S$.

Ta có :

$$f((a+b)x) = f\left((a^{1/3}x^{1/3})^3 + (b^{1/3}x^{1/3})^3\right) =$$

$$(a^{1/3} + b^{1/3})\left[f(a^{1/3}x^{1/3})^2 - f(a^{1/3}x^{1/3})f(b^{1/3}x^{1/3}) + f(b^{1/3}x^{1/3})^2\right]$$

$$= (a^{1/3} + b^{1/3})(a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3})x^{1/3}f(x^{1/3})^2$$

$$= (a+b)f(x).$$

Bằng quy nạp, ta được $n \in S$ với mọi n nguyên dương. Đặc biệt, ta suy ra $f(1996x) = 1996f(x)$ với mọi $x \in R$.

Bài 125.

Trước hết, từ giả thiết, với mọi số nguyên n, ta có :

$$f(x+n+a) - f(x+n) = f(x+a) - f(x). \qquad (*)$$

Thật vậy :

$$f(x+n+a) - f(x+n) = f(x-b+n+a+b) - f(x-b+n+b)$$

$$= c\left[x-b+n+2a+[x-b+n] - 2[x-b+n+a] - [b]\right] + d$$

$$= c[(x-b)+n+2a+[x-b]+n-2[x-b+a]-2n-[b]]+d$$

$$= c[(x-b)+2a+[x-b]-2[x-b+a]-[b]]+d$$

$$= f((x-b)+a+b) - f((x-b)+b) = f(x+a) - f(x).$$

Bây giờ, giả sử m là số nguyên dương sao cho am là số nguyên (điều này có được vì a là số hữu tỉ. Từ kết quả (*), ta suy ra với mọi số tự nhiên k :

$$f(x+kam) - f(x) = k(f(x+am) - f(x)). \qquad (**)$$

Thật vậy, ta có :

$$f(x+kam) - f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}(f(x+jam+ai) - f(x+jam+a(i-1)))$$

$$= k\sum_{i=1}^{m}(f(x+ai) - f(x+a(i-1)))$$

$$= k(f(x+am) - f(x)).$$

Do $f(x) \in [-1, 1]$ nên $f(x+kam) - f(x)$ là đại lượng bị chặn (dù k tiến đến vô cùng).

Như thế, (**) cho ta

$$f(x+am) - f(x) = 0,$$

vì nếu không, vế trái của (**) hữu hạn trong khi vế phải dần ra vô cùng (khi k tiến đến vô cùng). Nói cách khác, với mọi $x \in R$, ta có $f(x+am) = f(x)$, do đó, f là hàm tuần hoàn.

$$f(u) + 2f(-u) = f(-u), \text{ hay } f(-u) = -f(u). \qquad (8)$$

Cũng ở (6), nếu cho $v = -\frac{1}{2}$ thì được :

$$f(u) + 2f\left(\frac{-u}{2}\right) = f(0) = 0 \text{ (do (7))},$$

và ta suy ra : $f(u) = -2f\left(\frac{-u}{2}\right) = 2f\left(\frac{u}{2}\right)$ (do (8)), từ đó :

$$f(2u) = 2f(u). \qquad (9)$$

Kết hợp (6) và (9) ta được :

$$f(u + 2uv) = f(u) + f(2uv). \qquad (10)$$

Trong (10), đặt $t = 2v$, ta có :

$$f(u + ut) = f(u) + f(ut). \qquad (11)$$

Khi $u = 0$, (11) trở thành (7), khi $u \neq 0$, ta đặt

$$u = x,\ t = y/x$$

thì (11) trở thành $f(x + y) = f(x) + f(y)$, tức là ta có (2).

Đảo lại, giả sử ta có (2), lúc đó, thay x bởi xy và thay y bởi x + y ta được :

$$f[xy + (x + y)] = f(xy) + f(x + y),$$

rồi lại dùng (2) ta đi đến :

$$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y),$$

tức là ta có (1).

Bài 121.

Giả sử ngược lại rằng phương trình $f(x) = g(x)$ vô nghiệm , nghĩa là $f(x) \neq g(x)\ \forall x \in [a, b]$. Khi đó :

$$h(x) \neq 0,\ \forall x \in [a, b].$$

Mặt khác, $h(x)$ là liên tục trên $[a, b]$, nên điều này chứng tỏ nó phải giữ nguyên một dấu trên đó. Không giảm tính tổng quát có thể cho là dấu dương :

$$h(x) = f(x) - g(x) > 0\quad \forall x \in [a, b]. \qquad (1)$$

Vì $h(x)$ liên tục trên $[a, b]$, nên tồn tại

$$c = \min_{x \in [a, b]} \left(f(x) - g(x)\right). \qquad (2)$$

Từ (1), suy ra $c > 0$. Lấy s tuỳ ý trên $[a, b]$. Hiển nhiên ta có $f(s), g(s)$ đều thuộc $[a, b]$. Từ (2) suy ra

$$\begin{cases} h(f(s)) = f(f(s)) - g(f(s)) \geq c \\ h(g(s)) = f(g(s)) - g(g(s)) \geq c. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên và để ý rằng

$$f(g(x)) = g(f(x))\quad \forall x \in [a, b],$$

ta đi đến

$$f(f(s)) - g(g(s)) \geq 2c. \qquad (3)$$

Nếu đưa vào kí hiệu

$$\begin{cases} f_{(n)}(s) = f(f(\ldots f(s)\ldots)) \\ g_n(s) = g(g(\ldots g(s)\ldots)), \end{cases}$$

thì (3) có dạng

$$f_{(2)}(s) - g_{(2)}(s) \geq 2c. \qquad (4)$$

Ta sẽ chứng minh rằng : với mọi $n = 1, 2, \ldots,\ \forall s \in [a, b]$, thì

$$f_{(n)}(s) - g_{(n)}(s) \geq nc. \qquad (5)$$

(5) được chứng minh bằng quy nạp như sau :

- Với $n = 1, 2$ thì (5) đúng.

Giả sử (5) đã đúng đến $n \leq k - 1$.

- Với $n = k$, thì

$$f_{(k)}(s) - f_{(k-1)}(g(s)) = f(f_{(k-1)}(s)) - g(f_{k-1}(s))$$
$$= h(f_{k-1}(s)) \geq c \qquad (6)$$

(b) Hoặc $f(x_0) \neq x_0$, lập dãy số $\{x_n\}$ như sau :

$$x_1 = f(x_0),\ x_{n+1} = f(x_n) \text{ với } n = 1, 2, \ldots$$

Dễ dàng thấy được $0 \leq x_n \leq 1$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Trường hợp 1 : Giả sử $x_1 = f(x_0) < x_0$. Khi đó, vì f là hàm tăng trên $[0, 1]$ nên suy ra $f(x_1) < f(x_0)$ hay $x_2 < x_1$. Từ đó bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 1, suy ra rằng tồn tại giới hạn $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, và $0 \leq a \leq 1$.

Rõ ràng $a \in [0, 1]$.

Trường hợp 2 : Nếu $f(x_0) > x_0$. Lập luận như trường hợp 1, trong trường hợp này $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi 0. Vì thế cũng tồn tại giới hạn của dãy này.

Tóm lại, tồn tại a với $0 \leq a \leq 1$, và từ tính liên tục :

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n). \qquad (*)$$

Mặt khác, theo cách xác định dãy, ta có $x_{n+1} = f(x_n)$, nên

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a. \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) ta được $f(a) = a$.

Tiếp theo, ta cũng có $g(x_n) = x_n$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Thật vậy, ta có $x_1 = f(x_0)$, nên $g(x_1) = g(f(x_0))$, và theo giả thiết thì $g(f(x_0)) = f(g(x_0)) = f(x_0) = x_1$.

Vậy $g(x_1) = x_1$. Từ đó bằng quy nạp suy ra

$$g(x_n) = x_n \text{ với mọi } n = 1, 2, \ldots \qquad (6)$$

Do tính liên tục của $g(x)$ trên $[0, 1]$ suy ra

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Tóm lại, trong các khả năng xảy ra, ta đã chứng minh phương trình $f(x) = g(x)$ luôn có nghiệm trên đoạn $[0, 1]$.

Bài 117.

Đặt $g(x) = xf(x)e^{-x}$, $g(x)$ cũng là hàm liên tục trên $[0, a]$, và khả vi trên $(0, a)$. Mặt khác

$$g(0) = 0\ ;\ g(a) = 0.$$

Do vậy, theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (0, a)$ sao cho $g'(c) = 0$.

Ta có $g'(x) = f(x)e^{-x} + xf'(x)e^{-x} - xf(x)e^{-x}$

$$= e^{-x}\left(f(x) + xf'(x) - xf(x)\right).$$

Từ đó ta có $e^{-c}\left(f(c) - cf'(c) - cf(c)\right) = 0$, suy ra

$$f(c) + cf'(c) - cf(c) = 0 \Rightarrow cf'(c) = (c-1)f(c).$$

Vậy c là nghiệm của phương trình $(x-1)f(x) = xf'(x)$.

Bài 118.

Ta sẽ sử dụng các tính chất sau đây của hàm liên tục :

(1) Tổng và hiệu các hàm liên tục là hàm liên tục.

(2) Nếu $k(x)$ là hàm liên tục và $\lambda \in R$ thì hàm số $f(\lambda x)$ cũng liên tục.

Giả sử $\alpha, \beta \in [a;b]$. Theo điều kiện của bài toán các hàm

$$f(x) + f(\alpha x) \text{ và } f(x) + f(\beta x)$$

cũng là các hàm liên tục.

Thay x bởi αx hoặc βx và áp dụng (2) ta có :

$$f(\beta x) + f(\alpha\beta x) \text{ và } f(\alpha x) + f(\alpha\beta x)$$

cũng là các hàm liên tục. Ta có :

$$f(f(1)+2004)=1+f(2004+2004).$$

Thay vào (2), và có

$$f(f(n)+f(1))=n+1+f(2004+2004). \quad (3)$$

Lại thay trong điều kiện n bởi $n+1$ và m bởi 2004, ta có

$$n+1+f(2004, 2004)=f(f(n+1), 2004). \quad (4)$$

Bây giờ kết hợp (3) (4), đi đến

$$f(f(n)+f(1))=f(f(n+1)+2004). \quad (5)$$

Từ (5) và do f là đơn ánh, nên ta có với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, thì

$$f(1)+f(n)=f(n+1)+2004. \quad (6)$$

Từ (6) áp dụng liên tiếp với $n=1, 2, \ldots, k-1$, ta có

$$\begin{cases} f(1)+f(1)=f(2)+2004 \\ f(1)+f(2)=f(3)+2004 \\ f(1)+f(3)=f(4)+2004 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(1)+f(k-1)=f(k)+2004. \end{cases}$$

Cộng từng vế $k-1$ đẳng thức trên, đi đến

$$kf(1)=f(k)+2004(k-1)$$
$$\Rightarrow f(k)=kf(1)-2004k+2004,$$

hay $f(k)=(f(1)-2004)k+2004$. Đặt $a=f(1)-2004$, thì

$$f(k)=ak+2004. \quad (7)$$

Thay (7) vào điều kiện, ta có

$$f(f(k)+m)=k+f(m+2004)$$
$$\Rightarrow a(f(k)+m)+2004=k+a(m+2004)+2004$$
$$\Rightarrow af(k)+am=k+am+2004a$$
$$\Rightarrow af(k)=k+2004a. \quad (8)$$

Thay k trong (8) bằng số 1, ta có

$$af(1)=1+2004a,\ \ a(f(1)-2004)=1\Rightarrow a^2=1.$$

Do $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, nên $a=1$. (Thật vậy nếu $a=-1$, thì $f(k)=-k+2004$, và $f(2005)=-1$ là điều vô lí).

Tóm lại nếu $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thoả mãn yêu cầu đầu bài, thì $f(n)=n+2004$. Đảo lại nếu $f(n)=n+2004$, thì dễ dàng thấy $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ và thoả mãn mọi yêu cầu đề bài.

Vậy $f(n)=n+2004$ là hàm duy nhất thoả mãn mọi yêu cầu đầu bài.

Bài 113.

Kí hiệu (a), (b), (c) cho các đẳng thức ở đề bài:

$$f(4n)=f(2n)+f(n) \quad (a)$$
$$f(4n+2)=f(4n)+1 \quad (b)$$
$$f(2n+1)=f(2n)+1. \quad (c)$$

Từ (a), với $n=0$, ta có

$$f(0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0. \quad (1)$$

Từ (c), với $n=0$, ta được

$$f(1)=f(0)+1=1\Rightarrow f(1)=1.$$

Trong (b), thay $n=0\Rightarrow f(2)=f(0)+1\Rightarrow f(2)=1$.

Trong (c), thay $n=1\Rightarrow f(3)=f(2)+1=2$

Trong (a), thay $n=1\Rightarrow f(4)=f(2)+f(1)=2$ ...

Tiếp tục như thế, các giá trị tương ứng đầu tiên của hàm số $f(n)$, ứng với n bằng 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... lần lượt là

0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, ...

Dãy giá trị trên khiến ta nghĩ đến dãy Fibonacci :

$$f_1=1\ ;\ f_2=1 \text{ và } f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \text{ với } n\geq 1.$$

Giả sử trong biểu diễn nhị phân, n có dạng

$$+f\left[\frac{a+b}{2}+\frac{\frac{b-a}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$=\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a+b}{2}f\left(\frac{\frac{a+b}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right)\right]$$

$$+\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a+b}{2}f\left(\frac{\frac{b-a}{2}}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right)\right]$$

$$=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a+b).$$

Sử dụng tính chất cộng tính này vào phương trình hàm ban đầu ta được

$$f(yf(x))=xf(y),\ \forall x,\ y\in Z. \qquad (*)$$

Thay $y=1$ vào (*), ta có $f(f(x))=x$. Vậy f là song ánh.

Thay $z=f(x)$ vào (*), ta có

$$f(yz)=f(y)f(z). \qquad (**)$$

Cho $z=y$ trong (**), ta được $f(y^2)=[f(y)]^2\geq 0$. Cho $z=-y$ trong (**), ta có $f(-y^2)=f(-y)f(y)=-[f(y)]^2\leq 0$. Từ đó,

$f(a)>0$ nếu và chỉ nếu $a>0$.

Đặt $y=-1$ vào phương trình hàm ban đầu ta được

$$f(x-f(x))=f(x)-x.$$

Do $x-f(x)$ và $f(x)-x$ trái dấu nhau, ta phải có

$x-f(x)=0$, tức là $f(x)=x$ với mọi $x\in Z$.

Bài 110.

Cho x = 1 và y = n, ta được

$$f(1)+f(n)=f(1+2n)+f(-n)\ldots \qquad (*)$$

Cho x = n và y = - 1, ta được

$$f(n)+f(-1)=f(-n)+f(-1+2n)\ldots \qquad (**)$$

Vì $f(1)=f(-1)$, từ (*) và (**) ta suy ra $f(2n+1)=f(2n-1)$ với mọi số nguyên n. Từ đó, f nhận cùng một giá trị cho mọi số nguyên lẻ. Như thế (*) cũng cho ta $f(n)=f(-n)$ với mọi số nguyên n.

Nếu đặt $x=-(2k+1)$ và y = n, thì x và $x+2xy$ là các số lẻ. Từ phương trình hàm ở đề bài ta có

$$f(n)=f(y)=f(y-2xy)\ =\ f(n(4k+3)).$$

Mặt khác, nếu cho $x=n$, $y=-(2k+1)$, thì tương tự, phương trình hàm cũng cho ta

$$f(n)=f(x)=f(x+2xy)$$
$$=f(n(-4k-1))=f(n(4k+1)).$$

Như thế, với mọi m lẻ, ta có $f(mn)=f(n)$.

Cho số nguyên n tuỳ ý, đặt $n=2^k m$ với k là số nguyên không âm và m lẻ. Khi đó $f(n)=f(2^k m)=f(2^k)$. Do vậy, bất kì hàm f nào thoả đề bài cũng được xác định bởi $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$, ... (những số này có thể chọn tuỳ ý). Các giá trị khác thì được cho bởi hệ thức

$$f(n)=f(2^k m)=f(2^k).$$

Sau cùng, ta kiểm tra rằng các hàm như thế thoả mãn các điều kiện. Rõ ràng $f(1)=f(-1)$. Nếu x hay y bằng 0, thì mọi n, khi ấy, hàm f(n) = 0 là một nghiệm của bài toán. Nếu tồn tại k, thì bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được $f(qk) = qk$ với q là số nguyên không âm tuỳ ý.

Bây giờ, giả sử f có điểm bất động n khác, ta viết:

$$n = kq + r, \text{ với } 0 \le r < k.$$

Lúc đó $f(n) = f(r + f(kq)) = f(r) + f(kq) = kq + f(r)$, suy ra

$$f(r) = 0 \Rightarrow r = 0.$$

Như thế, điểm bất động của hàm số là bội của k.

Tuy nhiên, với mọi n, f(n) là điểm bất động, do đó f(n) là bội của k với mọi n. Ta lấy các số nguyên không âm

$$n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$$

và chọn $n_0 = 0$, thế thì hàm tổng quát thoả mãn điều kiện của bài toán là $f(qk + r) = qk + n_r k$, với $0 \le r < k$.

Dễ dàng kiểm tra rằng các hàm này thoả điều kiện bài toán. Thật vậy, cho m = ak + r, n = bk + s, với $0 \le r, s < k$ thì: $f(f(m)) = f(m) = ak + n_r k$, $f(n) = bk + n_s k$, do đó

$$f(m + f(n)) = ak + bk + n_r k + n_s k \text{ và}$$

$$f(f(m)) + f(n) = ak + bk + n_r k + n_s k.$$

Tóm lại, các hàm xác định như trên là nghiệm tổng quát của bài toán.

Bài 107.

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng nếu $n = \overline{b_1 b_2 \ldots b_k}$ trong hệ nhị phân, với $b_1 = 1$, thì

$$f(n) = \overline{b_k \ldots b_2 b_1}. \qquad (*)$$

Thật vậy, với các số 1, 2, 3, từ các hệ thức ở đề bài, khi chuyển qua hệ nhị phân, ta thấy khẳng định (*) đúng với

$$1 = \overline{1},\ 2 = \overline{10},\ 3 = \overline{11}.$$

Tiếp đến, ta giả sử rằng khẳng định (*) đúng với tất cả các số n có số các chữ số trong hệ nhị phân bé hơn k. Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: n là số chẵn. Lúc đó ta có: $n = 2m = \overline{b_1 b_2 \ldots b_{k-1} 0}$,

$$f(n) = f(m) = \overline{b_{k-1} \ldots b_2 b_1} = \overline{0 b_{k-1} \ldots b_2 b_1}.$$

Trường hợp 2: n = 4m + 1. Lúc đó ta có:

$$n = \overline{b_1 b_2 \ldots b_{k-2} 01},\quad m = \overline{b_1 b_2 \ldots b_{k-2}},\quad 2m + 1 = \overline{b_1 b_2 \ldots b_{k-2} 1},$$

$$f(n) = 2f(2m + 1) - f(m) = f(2m + 1) + (f(2m + 1) - f(m))$$

$$= \overline{1 b_{k-2} \ldots b_2 b_1} + \left(\overline{1 b_{k-2} \ldots b_2 b_1} - \overline{b_{k-2} \ldots b_2 b_1}\right) = \overline{10 b_{k-2} \ldots b_2 b_1}.$$

Trường hợp 3: n = 4m + 3. Lúc đó ta có:

$$m = \overline{b_1 b_2 \ldots b_{k-2}},$$

$$f(n) = 3f(2m + 1) - 2f(m) = f(2m + 1) + 2(f(2m + 1) - f(m))$$

$$= \overline{1 b_{k-2} \ldots b_2 b_1} + 2\left(\overline{1 b_{k-2} \ldots b_2 b_1} - \overline{b_{k-2} \ldots b_2 b_1}\right) = \overline{11 b_{k-2} \ldots b_2 b_1}.$$

Tóm lại, (*) đúng trong cả 3 trường hợp, do vậy, theo nguyên lí quy nạp, (*) đúng với mọi n nguyên dương.

Từ (*), ta suy ra f(n) = n với mọi số n mà có các chữ số đối xứng trong cách viết theo hệ nhị phân. Muốn được tất cả các số như thế với $2k - 1$ hoặc 2k chữ số trong cách viết theo hệ nhị phân, ở vị trí thứ nhất ta viết $b_1 = 1$ và ở $k - 1$ vị trí tiếp theo ta viết $b_2, \ldots, b_k$. Ở các vị trí còn lại là các chữ số đối xứng với k chữ số đầu. Từ đó, ta được 2^{k-1} số. Vì ta có $2^{10} < 1998 < 2^{11}$, đồng thời chỉ có 2 số có 11 chữ số đối xứng nhau trong cách viết theo hệ nhị phân và lớn hơn số $1998 = \overline{11111000100}$ là $\overline{11111011111}$ và $\overline{11111111111}$ nên ta tính được số phải tìm là

$$= 2\cos\frac{\pi(n+m)}{6} + 2\cos\frac{\pi(n-m)}{6} = f(n+m) + f(n-m)$$

với tất cả $n, m \in Z$.

Bài 102.

Cho trong phương trình giá trị $y = 1$, ta nhận được :

$$f(x) \equiv f(x).f(1) - f(x+1) + 1 \quad (x \in Q),$$

$$\text{hay } f(x+1) \equiv f(x) + 1.$$

Từ đây, với mọi $x \in Q$, $n \in Z$ ta có:

$$f(x+n) = f(x) + n,$$

$$f(n) = f(1) + n - 1 = n + 1.$$

Sau đó, cho trong phương trình các giá trị $x = \frac{1}{n}, y = n$ với $n \in Z$, ta nhận được:

$$f\left(\frac{1}{n}.n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)f(n) - f\left(\frac{1}{n} + n\right) + 1,$$

suy ra $2 = f\left(\frac{1}{n}\right)(n+1) - f\left(\frac{1}{n}\right) - n + 1$, nghĩa là

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}.$$

Cuối cùng, cho giá trị $x = p, y = \frac{1}{q}$, với $p \in Z, q \in N$:

$$f\left(p.\frac{1}{q}\right) = f(p)f\left(\frac{1}{q}\right) - f\left(p + \frac{1}{q}\right) + 1,$$

ta suy ra $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+1)\left(\frac{1}{q} + 1\right) - \frac{1}{q} - p = \frac{p}{q} + 1.$

Như vậy chỉ có một hàm số $f(x) = x + 1$ là thực sự thoả mãn tất cả các điều kiện của bài toán.

Bài 103.

Từ (b) ta suy ra

$$f(n+1) - f(n) = [f(n) - 1]^2,$$

mà $f(1) = 2$, nên theo phép quy nạp ta thấy f(n) là một hàm thực sự tăng trên N^*, lấy giá trị thuộc N^* không nhỏ hơn 2.

Đặc biệt $f(n) - 1 \geq 1$ với mọi $n \in N^*$.

Ta biến đổi (b) dưới dạng

$$f(n+1) - 1 = [f(n)]^2 - f(n) = f(n)[f(n) - 1]. \quad (1)$$

Suy ra

$$\frac{1}{f(n+1)-1} = \frac{1}{f(n)[f(n)-1]} = \frac{1}{f(n)-1} - \frac{1}{f(n)} \text{ hay}$$

$$\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(n)-1} - \frac{1}{f(n+1)-1}. \text{ Do vậy}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(n)-1} - \frac{1}{f(n+1)-1} = 1 - \frac{1}{f(n+1)-1}.$$

Để có được kết quả phải tìm, ta phải chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$ ta có:

$$2^{2^{n-1}} < f(n+1) - 1 < 2^{2^n},$$

hay (vì $f(n+1) - 1 \in N^*$):

$$2^{2^{n-1}} + 1 \leq f(n+1) - 1 < 2^{2^n}. \quad (2)$$

Thật vậy, ta có :

$$f(2) = [f(1)]^2 - f(1) + 1 = 2^2 - 2 + 1 = 3,$$

$$f(3) = [f(2)]^2 - f(2) + 1 = 3^2 - 3 + 1 = 7,$$

tức là $f(3) - 1 = 6$, vậy $4 + 1 = 2^{2^1} + 1 < f(3) - 1 < 2^{2^2} = 16$.

Thành thử (2) được nghiệm đúng với mọi số $n \geq 2$. Thế thì nó cũng đúng với n + 1, bởi vì :

$f(3(n+1)) = f(3n+3) \geq f(3n) + f(3) > n + 1.$

Như thế ta được: $f(3.m) > m$ với mọi $m \geq n$.

Nhưng vì $f(9999) = f(3.3333) = 3333$ nên ta có

$$f(3.n) = n, \text{ với } n \leq 3333.$$

Do đó $f(3.2000) = 2000$. Mặt khác:

$$2000 = f(3.2000) \geq f(2.2000) + f(2000) \geq 3f(2000)$$

nên suy ra

$$f(2000) \leq \frac{2000}{3} < 667. \qquad (1)$$

Ta lại có:

$$f(2000) \geq f(1998) + f(2) = f(3.666) = 666. \qquad (2)$$

(1) và (2) cho: $666 \leq f(2000) < 667$. Mà $f(2000) \in N$, nên ta được $f(2000) = 666$.

Bài 99.

Từ giả thiết $f(0) = f(1)$, suy ra kết luận của bài toán là đúng khi $n = 1$. Giả sử kết luận đã đúng đến $n = k$.

Xét trường hợp $n = k+1$. Giả sử $f(x):[0, k+1] \to R$ là hàm số liên tục và $f(0) = f(k+1)$. Xét hàm số $g(x):[0, k] \to R$ được xác định như sau : $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Rõ ràng g cũng là hàm liên tục. Ta lại có

$$g(0) + g(1) + \cdots + g(k)$$
$$= f(1) - f(0) + f(2) - f(1) + \cdots + f(k+1) - f(k)$$
$$= f(k+1) - f(0) = 0.$$

Từ đó suy ra tồn tại $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ sao cho

$$g(i).g(j) \leq 0. \qquad (1)$$

Từ (1) và do tính liên tục của g, tồn tại $\bar{x} \in [0, k]$, sao cho

$$g(\bar{x}) = 0, \text{ hay } f(\bar{x}+1) = f(\bar{x}). \qquad (2)$$

Xét hàm số $h(x):[0, k] \to R$ được xác định như sau :

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{khi } 0 \leq x \leq \bar{x} \\ f(x+1), & \text{khi } \bar{x} < x \leq k. \end{cases}$$

Vì $f(x)$ là hàm liên tục, và $f(\bar{x}) = f(\bar{x}+1)$ (theo (2)), nên $h(x)$ là hàm liên tục. Ta lại có

$$h(0) = f(0), \; h(k) = f(k+1) = f(0).$$

Từ đó, $h(x):[0, k] \to R$ là hàm liên tục và $h(0) = h(k)$, nên theo giả thiết quy nạp suy ra tồn tại k cặp số c_i, d_i, với $c_i, d_i \in [0, k]$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sao cho $d_i - c_i$ là số nguyên dương, và $h(c_i) = h(d_i)$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$. Với $i = 1, 2, \ldots, k$, đặt

$$a_{i+1} = \begin{cases} c_i, & \text{khi } c_i \leq k \\ c_i + 1, & \text{khi } c_i > k \end{cases}, \quad b_{i+1} = \begin{cases} d_i, & \text{khi } d_i \leq k \\ d_i + 1, & \text{khi } d_i > k \end{cases}$$

Từ trên ta có $b_i - a_i$ là số nguyên dương và $f(a_i) = f(b_i)$, ở đây $a_i, b_i \in [0, k+1]$, với mọi $i = 1, 2, \ldots, k+1$.

Vậy điều khẳng định của bài toán cũng đúng đến $n = k+1$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 100.

a) Cho $m = 2p + 1$, $n = 2q + 1$ và

$g(i) = p + i + 1$ với $i = 1, 2, \ldots, p$;

$g(i) = q + i + 1$ với $i = m + 1, m + 2, \ldots, m + q$;

$g(2p + 1) = p + 1$;

$g(p + 1) = 1$;

$g(m + 2q + 1) = m + q + 1$;

$g(m + q + 1) = m + 1.$

Dễ dàng kiểm tra được $g(g(a)) = f(a)$ với mọi $a \in A$.

b) Nếu $m = n$ ta xác định hàm g bởi :

Đặt $f^2(2) = k$, ta được

$$f(-m-k) - f(-n-k) = m - n,$$

với mọi số nguyên m và n. Thay m bởi $-m-k$ và n bởi $-k$, ta được $f(m) - f(0) = -m - k + k = -m$. Do đó $f(m) = -m + f(0)$ với mọi $m \in Z$. Cho nên

$$f(f(m)) = -f(m) + f(0) = m - f(0) + f(0) = m.$$

Như vậy, $f^2(m) = m$ với mọi số nguyên m. Sử dụng kết quả này vào (*) thì được $f(m+n) = -m - 1 - n$ với mọi số nguyên m và n. Lấy $m = 0$, ta được $f(n) = -n - 1$ với mọi số nguyên n. Do đó, $f(1991) = -1992$.

Bài 95.

Với mọi số nguyên n, ta có

$$f(n+95) = f(n+5.19) = f\left[(n+4.19)+19\right].$$

Vì vậy theo tính chất

$$f(x+19) \le f(x) + 192) \qquad (*)$$

ta suy ra $f(n+95) \le f(n+4.19)+19 \le f(n+3.19)+19+19$

$$\le f(n+2.19)+19+19+19$$

$$\le f(n+19)+19+19+19+19 \le f(n)+5.19.$$

Từ đó, với mọi số nguyên n ta có $f(n+95) \le f(n)+95$.

Mặt khác theo tính chất

$$f(x+94) \ge f(x)+94 \qquad (**)$$

ta cũng có $f(n+95) = f(n+1+94) \ge f(n+1)+94$, với mọi số nguyên n. Kết hợp những điều trên, suy ra

$$f(n)+95 \ge f(n+1)+94,$$

hay $f(n+1) \le 1 + f(n)$. Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức sau cùng này ta được $f(n+94) \le 94 + f(n)$.

Mặt khác theo (**), ta có $f(n+94) \ge f(n)+94$. Vì vậy

$$f(n+94) = f(n)+94,$$

với mọi số nguyên n. Thay n = 1912 ta được

$$f(1912+94) = f(1912)+94, \text{ hay } f(2006) = f(1912)+94.$$

4 MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP SỐ NGUYÊN, SỐ HỮU TỈ

Bài 96.

Hàm số $f(x) = x$ thoả mãn điều kiện của bài toán.

Cho f(x) là một hàm số thoả mãn điều kiện đề bài. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Điều kiện có thể được viết lại như sau :

$$2f(f(x)) - 2f(x) = f(x) - x, \text{ hay } g(x) = 2g(f(x)).$$

Từ đó ta được

$$g(x) = 2g(f(x)) = 2^2g(f(f(x))) = 2^3g(f(f(f(x)))) = \ldots$$

Vì các số g(f(f(... f(x)...) là các số nguyên, nên g(x) chia hết cho 2^n với mọi số nguyên x và mọi số tự nhiên n. Điều này chỉ có thể xảy ra nếu $g(x) = 0$. Vậy, $f(x) = x$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Bài 97.

Trước hết ta hãy tính các giá trị đầu tiên của hàm số $f(n)$. Từ giả thiết ở đề bài, bạn đọc dễ dàng lí luận để đi đến bảng các giá trị đầu tiên như sau :

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 7,$$

$$f(5) = 10, f(6) = 12, f(7) = 13,$$

$$f(8) = 16, f(9) = 19, f(10) = 21,$$

$$f(11) = 22, f(12) = 25, \ldots$$

g(v) bằng 1. Tức là, nếu g(u) = 1, thì u = g(g(u)) = g(1) = 1, điều này có nghĩa là g(p) là số nguyên tố.

Để xác định giá trị bé nhất cần thiết, lấy một hàm số g bất kì thoả mãn (2). Hàm g là một đơn ánh (do ta có, nếu g(m) = g(n) thì m = g(g(m) = g(g(n) = n) và vì thế nó nhận các giá trị nguyên tố phân biệt tại các số nguyên tố phân biệt. Từ đó suy ra, một cận dưới của

$$g(1998) = g(2.\ 3^3.\ 37) = g(2)[g(3)]^3g(37)$$

sẽ nhận được khi g(2), g(3), g(37) là ba số nguyên tố bé nhất 2, 3, 5, với g(3) = 2. Vậy, $g(1998) \geq 3.2^3.5 = 120$ với mỗi $g \in S$.

Tuy nhiên, tồn tại một hàm số $g \in S$ với g(1998) = 120, điều này chứng tỏ rằng số bé nhất trong bài toán là 120. Đặt g(1) = 1, và xác định g trên các số nguyên tố như sau:

$$g(2) = 2,\ g(3) = 2,\ g(5) = 37,\ g(37) = 5$$

và g(p) = p với mỗi số nguyên tố $p \neq 2, 3, 5, 37$.

Định nghĩa này được mở rộng cho số bất kì

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\ \ldots\ p_k^{\alpha_k} \in \mathbf{N}$$

bằng cách đặt

$$g(n) = g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\ \ldots\ p_k^{\alpha_k}) = g(p_1)^{\alpha_1} g(p_2)^{\alpha_2}\ \ldots\ g(p_k)^{\alpha_k}.$$

Khi đó, điều kiện trong (2) được thoả mãn (với a = 1), nên $g \in S$. Rõ ràng g(1998) = 120, từ đây suy ra đpcm.

Bài 91.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$. Đặt $t_1 = \ln x_1$, $t_2 = \ln x_2$. Do $f(x)$ và e^x đều là các hàm liên tục, nên hàm $f(e^t)$ cũng là hàm liên tục. Để ý rằng $f(e^{t_1}) = f(x_1) > 0$; $f(e^{t_2}) = f(x_2) < 0$, nên tồn tại $\delta > 0$ đủ nhỏ sao cho $f(e^{t_1-\delta})$, $f(e^{t_1})$, $f(e^{t_1+\delta})$ là các số dương

và $f(e^{t_2-\delta})$, $f(e^{t_2})$, $f(e^{t_2+\delta})$ là các số âm. Đặt $\Delta = t_2 - t_1$. xét hàm số sau :

$$F(t) = f(e^{t_1-\delta+t\Delta}) + f(e^{t_1+t\Delta}) + f(e^{t_1+\delta+t\Delta}), \text{ với } 0 \leq t \leq 1.$$

Rõ ràng $F(t)$ liên tục trên $[0, 1]$. Ngoài ra dễ thấy

$$F(0) > 0 ;\ F(1) < 0,$$

nên tồn tại t_0, $0 < t_0 < 1$ sao cho $F(t_0) = 0$, hay

$$f(a) + f(b) + f(c) = 0,$$

ở đây $a = e^{t_1-\delta+t\Delta}$; $b = e^{t_1+t\Delta}$; $c = e^{t_1+\delta+t\Delta}$. Rõ ràng ta có a, b, c là các giá trị dương phải tìm, vì $b^2 = ac$.

Bài 92.

Kí hiệu $f^2(n)$ để chỉ f(f(n)). Từ (a), thay m bởi $f^2(m)$ ta được $f(f^2(m) + f^2(n)) = -f^2(f^2(m)+1) - n$.

Thay đổi vai trò của m và n ta có:

$$f(f^2(n) + f^2(m)) = -f^2(f^2(n)+1) - m.$$

Hai đẳng thức trên cho ta:

$$f^2(f^2(m)+1) - f^2(f^2(n)+1) = m - n.$$

Mặt khác, từ (a) ta lại có:

$$f^2(f^2(m)+1) = f(f(f^2(m)+1)) = f(-m - f^2(2)),$$

và tương tự, $f^2(f^2(n)+1) = f(-n - f^2(2))$. Đặt $f^2(2) = k$ ta có

$$f(-m-k) - f(-n-k) = m - n,$$

với mọi m, n nguyên. Thay m bởi $-m-k$ và thay n bởi $-k$:

$$f(m) - f(0) = -m - k + k = -m.$$

Vậy $f(m) = -m + f(0)$ với mọi m nguyên. Do đó:

$$f^2(m) = f(f(m)) = -f(m) + f(0) = m.$$

Lại dùng (a) ta được $f(m+n) = -m - 1 - n$, mọi m, n nguyên.

là song ánh bất kì từ $P_1 \cup P_2$ lên $Q_1 \cup Q_2$ sao cho các ánh xạ chiếu cũng song ánh từ P_1 lên Q_1 và P_2 lên Q_2. (Dễ dàng chỉ ra được một song ánh như thế.) Khi đó, ta xác định g như sau: $g(1) = 1$; với $n > 1$, $n \in 3N_0 + 1$, giả sử biểu diễn thừa số nguyên tố của n là Πp_i (các số p_i có thể lặp lại), thế thì ta cho $g(n) = \Pi h(p_i)$. Để ý rằng g được xác định, vì nếu $n \in 3N_0 + 1$ thì ắt phải có một số chẵn các số nguyên tố loại P_2 chia hết n. Mỗi số trong các số nguyên tố này được chiếu bởi h tới một số nguyên tố trong Q_2, và vì chúng là chẵn số nên tích của chúng nằm trong $4N_0 + 1$. Nhân tính của g dễ dàng được kiểm chứng.

3 TỪ PHƯƠNG TRÌNH HÀM, XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ ĐẶC BIỆT CỦA HÀM SỐ

Bài 89.

Từ hai điều kiện (a) và (c), dùng quy nạp, ta có được

$$f(nx) = nf(x),$$

với mọi số nguyên dương n và mọi $x \neq 0$.

Kết hợp với điều kiện (b) ta có

$$f\left(\frac{5}{7}\right) = 5f\left(\frac{1}{7}\right) = 5.\frac{1}{49}.f(7) = \frac{5.7}{49}f(1) = \frac{5}{7}.$$

Bài 90.

Đặt $f(1) = k$. Lúc đó $f(kt^2) = k^2t$ và :

$$f^2(kt) = 1.f^2(kt) = f(k^3t^2)$$
$$= f(1^2 f(f(kt^2))) = k^2 f(kt^2) = k^2 f^2(t),$$

suy ra $f(kt) = kf(t)$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng

$$k^n f(t^{n+1}) = f^{n+1}(t).$$

Điều này kéo theo k chia hết f(t). Thật vậy, giả sử số mũ cao nhất của một số nguyên tố p chia hết k là $a > b$ thì số mũ cao nhất của p chia hết f(t). Lúc đó $a > b\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ với số n nào đó. Nhưng $na > (n+1)b$, do đó k^n không chia hết $f^{n+1}(t)$. Điều này mâu thuẫn.

Bây giờ ta đặt $g(t) = \frac{f(t)}{k} \in N^*$, lúc đó :

$$f(t^2 f(s)) = f(t^2 kg(s)) = kf(t^2 g(s)) = k^2 g(t^2 g(s)),$$
$$sf^2(t) = k^2 sf^2(t),$$

suy ra $g(t^2 g(s)) = sg^2(t)$. Như thế g cũng là hàm thoả mãn các điều kiện của đề bài mà hiển nhiên nó có các giá trị bé hơn f (với $k > 1$). Ta cũng có $g(1) = 1$. Do ta muốn tìm giá trị nhỏ nhất của f(1998) nên ta sẽ chú ý đến những hàm f thoả mãn $f(1) = 1$.

Ta đã có $f(f(t)) = t$ và $f(t^2) = f^2(t)$, từ đó:

$$f^2(st) = f(s^2t^2) = f(s^2 f(f(t^2))) = f^2(s)f(t^2) = f^2(s)f^2(t),$$

suy ra $f(st) = f(s)f(t)$.

Giả sử p nguyên tố và $f(p) = m.n$. Khi đó

$$f(m)f(n) = f(mn) = f(f(p)) = p,$$

như thế một trong các số $f(m), f(n)$ phải bằng 1. Nếu $f(m) = 1$ thì $m = f(f(m)) = f(1) = 1$.

nào, nghĩa là tập tất cả các không điểm của f có phần trong bằng rỗng thì y_1 không phải là nghiệm của phương trình (1). Vậy (1) có nghiệm liên tục duy nhất $y = 0$ trên khoảng (a, b) nếu tập tất cả các không điểm của hàm f không có điểm trong.

Bài 86.

Ta chứng minh rằng không tồn tại.

Giả sử ngược lại, tồn tại một hàm f như đã nói ở đề bài. Khi đó, nếu $f(n) = f(m)$ thì $n + 1987 = f^2(n) = f^2(m) = f(n+1987)$, do đó, m = n, nghĩa là f đơn ánh.

Ta có:

$$f^3(n) = f(f^2(n)) = f(n+1987),$$

$$f^3(n) = f^2(f(n)) = f(n) + 1987,$$

suy ra
$$f(n+1987) = f(n) + 1987. \qquad (*)$$

Mặt khác, bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được

$$f(n+1987q) = f(n) + 1987q \quad (q \geq 0). \qquad (**)$$

Đặt A = { 0, 1, 2, ..., 1986 }. Bây giờ, cho $n \in N$. Đặt $f(n) = 1987q + r$, với $r \in N$, $0 \leq r \leq 1986$. Khi đó:

$$n + 1987 = f^2(n) = f(1987q + r) = 1987q + f(r),$$

do đó $2.1987 > n + 1987 = 1987q + f(r) \geq 1987q$, điều này chứng tỏ $q \in \{0, 1\}$. Vậy $f(n) \leq 1986 + 1987$ với mọi n. Tiếp đến, ta đặt

$$A_1 = \{n \in A : 0 \leq f(n) \leq 1986\},$$

$$A_2 = \{n \in A : 1987 \leq f(n) \leq 1986 + 1987\}.$$

Khi đó, ta có $A = A_1 \cup A_2$ và $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Vì A có số phần tử lẻ, nên đến đây, giả sử ban đầu của chúng ta sẽ mâu thuẫn nếu ta thiết lập được một song ánh giữa A_1 và A_2. (A_1 và A_2 có số phần tử chẵn lẻ khác nhau). Xét thu hẹp của f lên A_1, ta có: $f : A_1 \to A_2$ là một song ánh. Thật vậy, trước hết, nếu $n \in A_1$ thì

$$f(n) \in A \text{ và } f(f(n)) = n + 1987$$

nên $f(n) \in A_2$, như thế, định nghĩa ánh xạ trên là hợp lí. Ngoài ra, theo chứng minh trên, thu hẹp này là một đơn ánh.

Để kết thúc bài toán, ta sẽ chứng minh rằng f là toàn ánh. Cho $n \in A_2$ tuỳ ý, khi đó $f(n) - 1987 \in A$. Từ (*) ta được

$$f(m) = f(m-1987) + 1987,$$

với $m \geq 1987$ và từ $f(n) \geq 1987$ ta được:

$$f(f(n) - 1987) = f(f(n)) - 1987 = n.$$

Vậy $f(n) - 1987 \in A_1$ và ảnh của nó qua f là n, suy ra $f : A_1 \to A_2$ là toàn ánh, điều phải chứng minh.

Bài 87.

Cho $u_0 = 1, u_1 = 2, \ldots u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \ldots$, dãy như thế được gọi là một dãy Fibonacci.

Ta nói $n = b_r b_{r-1} \ldots b_0$ là *cơ sở* của dãy Fibonacci nếu $b_r = 1$, với mọi $i \neq r$, $b_i = 0$ hoặc 1, không có hai số b_i kề nhau nào cùng khác 0 và $n = b_r u_r + b_{r-1} u_{r-1} + \ldots + b_0 u_0$. Ví dụ, 28 = 1001010 vì 28 = 21 + 5 + 2.

Ta phải chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi n, tồn tại duy nhất biểu thức như trên. Hiển nhiên điều đó đúng với n = 1. Cho u_r là số lớn nhất trong dãy Fibonacci sao cho $u_r \leq$ n. Giả thiết quy nạp cho phép ta biểu diễn $n - u_r$ theo dạng trên. Số hạng đầu không thể là u_i với $i > r - 2$, bởi nếu thế

Suy ra $\left[f\left(\frac{1}{x_k^2}\right)\right]^2 \le \frac{1}{k}$, do đó $f\left(\frac{1}{x_k}\right) \ge -\frac{1}{\sqrt{k}}$. Ta cũng có:

$$c \ge f\left(\frac{1}{x_k + x_k^2}\right) = f\left(\frac{1}{x_k}\right) + [f(x_k)]^2 \ge -\frac{1}{\sqrt{k}} + \left(\frac{c-1}{k}\right)^2.$$

Suy ra rằng $\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k^2} \ge c\left(\frac{c-1-2}{k}\right) \ge c\left(\frac{1-2}{k}\right)$ hay

$$\frac{k\sqrt{k}-1}{k(k-2)} \ge c \ge 2.$$

Điều này không đúng nếu k đủ lớn.

Mâu thuẫn trên cho ta điều phải chứng minh.

Bài 83.

a) Giả sử h là toàn ánh, khi đó, $\exists a \in Z$ để

$$f(a)g(a) = -1.$$

Suy ra $f(a) = -1$ hoặc $g(a) = -1$. Không mất tính tổng quát, giả sử $f(a) = -1$. Lúc đó, $g(a) = 1$. Mặt khác, tồn tại b để

$$h(b) = f(b)g(b) = 1.$$

Do đó, hoặc $f(b) = g(b) = 1 = g(a)$, điều này mâu thuẫn, vì f, g cũng là những song ánh (hãy chứng minh!). Tương tự, ta cũng có điều mâu thuẫn nếu $f(b) = g(b) = -1$.

b) Dễ dàng chứng minh được rằng nếu f là toàn ánh thì có một hàm a(x) sao cho $f(a(x)) = x$. Vì vậy, để giải bài toán, chỉ cần xét trường hợp đặc biệt, khi $f(x) = x$ với mọi x nguyên.

Lúc đó, ta có thể tìm được hai hàm g, h sao cho với mọi số nguyên x ta có $g(x)h(x) = x$. Chẳng hạn, ta có g và h như sau.

Cho trước số nguyên y, ta nói y là số k–mũ chính tắc nếu tồn tại một số nguyên z sao cho $y = z^k$ và k là số lớn nhất có tính chất này. Cho x là số nguyên 1–mũ chính tắc. Đặt

$$g(x) = x,\ h(x) = 1;\ g(-x) = -x,\ h(-x) = 1;$$

$$g(x^2) = x,\ h(x^2) = x,\ g(-x^2) = x,\ h(-x^2) = -x.$$

Tổng quát:

$$g(x^{2k+1}) = x^{k+1},\ h(x^{2k+1}) = x^k,\ g(-x^{2k+1}) = -x^{k+1},\ h(-x^{2k+1}) = x_k$$

$$\text{và } g(x^{2k}) = x^k,\ h(x^{2k}) = x^k,\ g(-x^{2k}) = x^k,\ h(-x^{2k}) = -x^k.$$

Rõ ràng là ứng với mọi giá trị y, tồn tại duy nhất một giá trị g(y) và một giá trị h(y), điều này có nghĩa g, h xác định như trên là hàm số từ Z vào Z và là toàn ánh (để ý rằng các số như trên phủ toàn bộ các số nguyên âm và dương).

Bài 84.

(a) Giả sử rằng f và g là những hàm như thế. Từ phương trình thứ hai suy ra rằng $f(x_1) \neq f(x_2)$ khi $x_1 \neq x_2$. Đặc biệt, f(0), f(1) và f(– 1) là ba số phân biệt nhau. Mặt khác, kết hợp cả hai phương trình ta được $(f(x))^2 = f(g(f(x))) = f(x^3)$. Lấy x = 0, x = 1 và x = –1 ta suy ra rằng mỗi một trong ba số f(0), f(1) và f(– 1) bằng với bình phương của nó, và như thế phải bằng 0 hay bằng 1. Mâu thuẫn ấy chứng tỏ rằng không có hàm nào thoả điều kiện đề bài cả.

(b) Các cặp hàm thoả các phương trình của (b) tồn tại. Thật vậy, ta tiến hành xây dựng ví dụ như sau.

Bắt đầu, ta chú ý đến khoảng $(1, \infty)$ và thử tìm hàm F, G : $(1,\infty) \to (1, \infty)$ thoả các phương trình

$$F(G(x)) = x^2 \text{ và } G(F(x)) = x^4 \text{ với } x > 1. \qquad (1)$$

Ý tưởng của ta là biến đổi những hàm này thành những hàm logarithm. Lúc đó, các phép toán bình phương

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{khi } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}\sin 2 & \text{khi } |x| = 1, \quad (\star) \\ \sin\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \varphi(x) & \text{khi } |x| < 1 \end{cases}$$

Đảo lại, nếu f(x), φ(x) thoả (★), thì dễ dàng kiểm chứng được rằng $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \sin(x^2 + \frac{1}{x^2})$.

2 MỘT SỐ BÀI TOÁN TỒN TẠI NGHIỆM

Bài 76.

Giả sử có các hàm số f và g thoả mãn đề bài, gọi T là chu kì của g thì T > 0. Vì $x^3 = f([x]) + g(x)$ với mọi $x \in R$ nên: $(x + T)^3 = f([x + T]) + g(x)$, suy ra:

$$f([x + T]) + f([x]) \equiv T^3 + 3T^2x + 3Tx^2. \qquad (1)$$

Cho $x \in [\,0,\ [T]+1-T\,)$ thì vế trái của (1) là hằng số nên (1) cho ta một đa thức bậc hai có vô số nghiệm, do đó T = 0, điều này vô lí.

Vậy không tồn tại hai hàm số f, g thoả mãn đề bài.

Bài 77.

Giả sử tồn tại hàm số thoả mãn đề bài.

Khi đó, với $x \neq y$ ta có $\left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right)^2 \le |x-y|$.

Lấy x_0 tuỳ ý $\in R$. Khi đó ta có với mọi $\Delta x > 0$, thì

$$\left|\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x_0+\Delta x - x_0}\right| \le \sqrt{x_0+\Delta x - x_0}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{\Delta x} \le \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \sqrt{\Delta x}.$$

Do $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \sqrt{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} (-\sqrt{\Delta x}) = 0$, nên suy ra

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = 0.$$

Tương tự, ta có $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = 0.$

Từ đó suy ra $\forall x_0 \in R$ thì tồn tại $f'(x_0)$ và $f'(x_0) = 0$. Như thế f(x) phải là hằng số. Vậy không tồn tại hàm số thoả mãn đề bài.

Bài 78.

Giả sử tồn tại một hàm số thoả điều kiện đã nêu. Ta viết bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$f(x) - f(x+y) \ge \frac{f(x)y}{f(x)+y}.$$

Trước hết ta chứng minh rằng $f(x) - f(x+1) \ge \frac{1}{2}$ với $x > 0$. Hiển nhiên f không đồng biến. Cố định $x > 0$ và chọn một số tự nhiên n sao cho $n.f(x + 1) \ge 1$. Khi $k = 1, 2,..., n - 1$, ta có được

$$f(x+\frac{k}{n}) - f(x+\frac{k+1}{n}) \ge \frac{f\left(x+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}}{f\left(x+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}} \ge \frac{1}{2n}.$$

giá trị

$$x,\ 2a_1 - x \text{ và } 2a_2 - (2a_1 - x) = x + 2(a_2 - a_1)$$

sẽ cùng thuộc hoặc không thuộc D. Sử dụng (1) và (2) ta có:

$$p(x + 2(a_2 - a_1)) = p(2a_2 - (2a_1 - x)) = f(2a_2 - (2a_1 - x)) -$$
$$- l(2a_2 - (2a_1 - x)) = 2b_2 - f(2a_1 - x) - 2b_2 + l(2a_1 - x) =$$
$$= -f(2a_1 - x) + l(2a_1 - x) = -2b_1 + f(x) + 2b_1 - l(x) =$$
$$= f(x) - l(x) = p(x).$$

Từ đó suy ra khẳng định của bài toán.

Bài 69.

Rõ ràng là nếu f(x) là đa thức bậc nhất hoặc là hằng số thì $\cos f(x)$ là hàm tuần hoàn.

Xét trường hợp đa thức f(x) có bậc ≥ 2.

Giả sử hàm $\cos f(x)$ tuần hoàn. Khi đó hàm

$$g(x) = (\cos f(x))' = -f(x)\sin f(x)$$

cũng là hàm liên tục và tuần hoàn trên R.

Do $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = +\infty$ và f(x) là đa thức nên tồn tại dãy tăng $\{x_n\}, x_n \to \infty$ sao cho: $|f(x_n)| = \dfrac{\pi}{2} + 2k_n\pi$, $k_n \in Z$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to\infty} |g(x_n)| = \lim\limits_{x\to\infty} |f'(x_n)| = +\infty$.

Kết quả này trái với giả thiết $g(x)$ là hàm số liên tục và tuần hoàn.

Chú ý. Ta có thể thay hàm $\cos f(x)$ bởi $\sin f(x)$ và có kết quả cũng tương tự.

Có thể giải trực tiếp theo định nghĩa của hàm tuần hoàn.

Bài 70.

Giả sử $T > 0$ là chu kì của f(x) và $|k| > 1$.

Khi đó, $\forall x \in R$ ta có:

$$f(kx + T) = f(kx) = kf(x),$$

$$f(kx + T) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right)\right) = kf\left(x + \frac{T}{k}\right).$$

Suy ra: $f(x) = f(x + T/k)$. Do đó $T/|k|$ là chu kì của f(x). Suy ra kết quả của bài toán vì nếu chu kì T là nhỏ nhất thì có chu kì $T/|k| < T$.

Với $|k| < 1$ thì:

$$f(x + kT) = f\left(k\left(\frac{x}{k} + T\right)\right) = kf\left(\frac{x}{k} + T\right) = kf\left(\frac{x}{k}\right) = f(x).$$

Do đó $|k|T$ là chu kì của $f(x)$.

Vậy $f(x)$ không có chu kì dương nhỏ nhất.

Bài 71.

Nếu $f(y_1) = f(y_2)$, từ phương trình hàm suy ra $y_1 = y_2$. Từ nhận xét này, lấy y = 1 thì được f(1) = 1. Lấy x = 1 thì được $f(f(y)) = \dfrac{1}{y}$, với mọi $y \in Q^+$. Tác động f vào, và cũng để ý nhận xét trên, ta được $f(\dfrac{1}{y}) = \dfrac{1}{f(y)}$ với mọi $y \in Q^+$. Sau cùng cho $y = f(\dfrac{1}{t})$ thì thu được f(xt) = f(x)f(t) với mọi $x, t \in Q^+$.

Ngược lại, dễ thấy rằng mọi hàm f bất kì thoả mãn

(a) f(xt) = f(x)f(t),

(b) $f(f(x)) = \dfrac{1}{x}$, với mọi $x, t \in Q^+$

Vậy f tuần hoàn với chu kỳ 2a.

Ví dụ:

$$f : [0,2) \to R$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ khi } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{2} \text{ khi } 1 \le x < 2 \end{cases}.$$

Lúc đó, sử dụng điều kiện $f(x+2) = f(x)$ ta xác định được hàm f trên cả tập hợp R^+.

Bài 60.

Với mọi x ta có :

$$f(x+2) + f(x) = \sqrt{2}\, f(x+1)$$
$$= \sqrt{2}\,(\sqrt{2}\, f(x) - f(x-1)) = 2f(x) - \sqrt{2}\, f(x-1)$$
$$\Rightarrow f(x+2) = f(x) - \sqrt{2}\, f(x-1).$$

Suy ra, với mọi x :

$$f(x+4) = f(x+2) - \sqrt{2}\, f(x+1)$$
$$= f(x) - \sqrt{2}\,[f(x-1) + f(x+1)] = -f(x)$$

Từ đó, với mọi x : f(x + 8) = − f(x + 4) = f(x). Vậy f(x) là hàm tuần hoàn. Để ý rằng, chẳng hạn, hàm số $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{4}$ thoả mãn điều kiện đề bài.

Bài 61.

a) (i) ⇒ (ii) : Bằng quy nạp, từ điều kiện đề bài, dễ dàng suy ra $\forall x \in R, \forall n \in Z : f(x+n) = f(x)$.

Từ đó, với mọi x thực, ta có

$$f(x) = f(\{x\} + [x]) = f(\{x\}).$$

Gọi $g : [0,1) \to R$ là thu hẹp của f vào [0, 1). Thế thì

$$\forall x \in R,\ f(x) = g(\{x\}).$$

(ii) ⇒ (i) : Hiển nhiên.

b) Ta có, $\forall x \in R : f(x+a) = f(x) \Leftrightarrow f(ax+a) = f(ax)$. (★)

Đặt $g(x) = f(ax) \Leftrightarrow f(x) = g(\dfrac{x}{a})$. Thế thì

$$(\bigstar) \Leftrightarrow g(x) = g(x+1).$$

Áp dụng kết quả câu a thì được điều phải chứng minh.

Bài 62.

Từ điều kiện đề bài ta thu được, $\forall x \in R$:

$$f(x+2) - \frac{1}{2}(x+2) = f(x) - \frac{1}{2}x. \qquad (\bigstar)$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{2}x$. Thế thì, theo bài 61,

$$\forall x \in R : g(x+2) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = h(\{\frac{x}{2}\}).$$

Vậy, với $h : [0, 1) \to R$, ta có $f(x) = \dfrac{1}{2}x + h(\{\dfrac{x}{2}\})$.

Bài 63.

Từ điều kiện đề bài ta thu được, $\forall x \in R$:

$$f(x+2) + 1 = 2[f(x) + 1].$$

Đặt $g(x) = 2^{-\frac{1}{2}(x+2)}[f(x+2) + 1] = 2^{-\frac{1}{2}x}[f(x) + 1]$. (★)

Thế thì, $(\bigstar) \Leftrightarrow g(x+2) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = h(\{\dfrac{x}{2}\})$.

Vậy, với $h : [0, 1) \to R$ ta có

$$f(x) = 2^{-\frac{1}{2}x}\, h(\{\frac{x}{2}\}) - 1.$$

Bài 64.

Từ điều kiện đề bài ta có, $\forall x \in R$:

$$f(x+2) + a(x+2) + b$$
$$= 2[f(x) + ax + b] + (2-a)x + (1 + 2a - b)$$

$0 = g(0) = g(x + (-x)) = g(x)g(-x) - f(x)f(-x) = g^2(x) + f^2(x)$

và $f(2x) = f(x + x) = 2f(x)g(x)$, $g(2x) = g^2(x) - f^2(x)$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 49.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, đặt $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$, suy ra điều phải chứng minh.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Lấy g(x) là hàm thu hẹp của f(x) trên khoảng $(0, +\infty)$, thì

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) : $\forall x \geq 0 : f(-x) = g(-(-x)) = g(x) = f(x)$;

$\forall x < 0 : f(x) = g(-x) = f(-x)$.

Vậy $\forall x \in R : f(x) = f(-x)$.

Bài 50.

Ta viết lại hệ thức đề bài :

$$f(x) - \frac{x}{2} = f(-x) + \frac{x}{2}. \qquad (1)$$

Đặt $g(x) = f(x) - \frac{x}{2}$, suy ra $f(x) = g(x) + \frac{x}{2}$. Thế thì (1) cho ta g(x) là hàm số chẵn. Do đó, theo bài 49, g(x) có thể được viết thành $g(x) = h(x) + h(-x)$, với h(x) là hàm số nào đó. Vậy hàm số phải tìm là $f(x) = \frac{x}{2} + h(x) + h(-x)$, trong đó h(x) là hàm số nào đó (chẳng hạn $f(x) = \frac{x}{2} + \sin x$).

Bài 51.

Từ giả thiết ta có $f(x) - f(-x) = \varphi(x)$, suy ra f là hàm số lẻ. Do đó :

Nếu φ không phải là hàm số lẻ : vô nghiệm.

Nếu φ là hàm số lẻ : ta có $\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(-x)$. Thế thì từ giả thiết ta được, theo bài 49, với $\forall x \in R$:

$$f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) = f(-x) - \frac{1}{2}\varphi(-x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) = g(x) + g(-x),$$

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + g(x) + g(-x)$, trong đó g là hàm số tuỳ ý nào đó.

Bài 52.

Với x là số thực bất kì, ta có

$$f\left(\frac{2003}{2} + x\right) = f\left(\frac{2003}{2} - x\right).$$

Đặt $g(x) = f\left(\frac{2003}{2} + x\right)$, hay $f(x) = g\left(x - \frac{2003}{2}\right)$, thì g(x) là hàm số lẻ trên R và từ đó, $\forall x \in R$: $g(x) = h(x) + h(-x)$. Suy ra

$$f(x) = h\left(x - \frac{2003}{2}\right) + h\left(-\frac{2003}{2} - x\right),$$

với $h: R \to R$ là hàm số tuỳ ý nào đó.

Bài 53.

Từ điều kiện đề bài ta có

$$f(x + 1) = f(-x + 1) + x \Leftrightarrow f(x + 1) - \frac{x}{2} = f(-x + 1) + \frac{x}{2}.$$

Đặt $g(x) = f(x + 1) - \frac{x}{2}$, hay $f(x) = g(x - 1) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Thế thì, g là hàm số lẻ, nên theo bài 49 : $g(x) = h(x) + h(-x)$.

Vậy, với $h : R \to R$ là hàm số bất kì, ta có với $g(x) > 0$. Đặt $h(x) = \ln(g(x))$ thì $h(x)$ thoả mãn

$$h(x + y) = h(x) + h(y),\ \forall\ x, y \in R \Rightarrow h(x) = ax + b.$$

$$\Rightarrow g(x) = 0 \text{ hay } g(x) = e^{ax+b},\ \forall a, b \in R.$$

Vậy $f(x) = 0$ hay $f(x) = e^{a\ln x + b} = cx^a$, $c \geq 0$, a bất kì.

Bài 42.

* (i) $\Rightarrow$ (ii) : Trước hết để ý rằng, đặt $f(0) = m$, (ii) được thoả mãn. Bây giờ, từ giả thiết, ta có

$$f(a^t) = f(a^{t+1}) \text{ và } f(-a^t) = f(-a^{t+1}),\ \forall t \in R.$$

Bây giờ, $\forall x \neq 0$, tồn tại t để $x = \pm a^t$. Do đó, $\forall t \in R$, ta có

$$f(a^t) = f(a^{t+1})\ ;\ f(-a^t) = f(-a^{t+1}).$$

Đặt $p(x) = f(a^x)$; $q(x) = f(-a^x)$, thì

$$f(x) = \begin{cases} p(\log_a x) & \text{khi } x > 0 \\ q(\log_a(-x)) & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Để ý rằng p, q : R $\to$ R là các hàm số tuần hoàn có chu kì 1. Do đó, tồn tại g, h : $[0, 1) \to R$ sao cho

$$\forall x \in R,\ p(x) = g(\{x\})\ ;\ q(x) = h(\{x\}).$$

$$\text{Vậy : } f(x) = \begin{cases} g\left(\{\log_a x\}\right) & \text{khi } x > 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \\ h\left(\{\log_a(-x)\}\right) & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

* (ii) $\Rightarrow$ (i) : Hiển nhiên có $f(x) = f(ax)$.

Bài 43.

Từ giả thiết, ta có, $\forall x \in R$: $f(x) + 1 = 2[f(2x) + 1]$.

Với $x = 0$ thì $f(0) = -1$. Với $x \neq 0$:

$$2^{[\log_2|x|]}(f(x) + 1) = 2^{[\log_2|2x|]}(f(2x) + 1).$$

Đặt $g(x) = 2^{[\log_2|x|]}(f(x) + 1)$, với $x \neq 0$. Khi đó, có hai hàm số h, k : $[0,1) \to R$ để

$$g(x) = \begin{cases} h\left(\{\log_2 x\}\right) & \text{khi } x > 0 \\ k\left(\{\log_2(-x)\}\right) & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} 2^{-[\log_2|x|]} h\left(\{\log_2 x\}\right) - 1 & \text{khi } x > 0 \\ -1 & \text{khi } x = 0 \\ 2^{-[\log_2|x|]} k\left(\{\log_2(-x)\}\right) - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Bài 44.

Nếu $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Nếu $x \neq 0$: ta có

$$(-1)^{[\log_3|3x|]} f(3x) = (-1)^{[\log_3|x|]} f(x).$$

Do đó, đặt $g(x) = (-1)^{[\log_3|x|]} f(x)$ thì $\forall x \neq 0$, $g(3x) = g(x)$. Suy ra

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^{[\log_3|x|]} h\left(\{\log_3 x\}\right) & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0, \\ (-1)^{[\log_3|x|]} k\left(\{\log_3 |x|\}\right) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

trong đó h, k : $[0, 1) \to R$ bất kì.

Bài 45.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Hiển nhiên.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $\forall x \in R$, ta có

$$f((a^2)^x) = f(a^2.(a^2)^x) = f((a^2)^{x+1}).$$

Đặt $g(x) = f(a^{2x}) \Leftrightarrow f(x) = g(\log_{a^2} x) = g(\frac{1}{2}\log_a x)$. Thế thì

Với $x > 0$: $f(x) = f(a^2x) \Rightarrow g(x + 1) = g(x)$. Do đó có hàm số h : $[0, 1) \to R$ sao cho $g(x) = h(\{x\}) \Rightarrow f(x) = h(\{\frac{1}{2}\log_a x\})$.

Với $x < 0$: $f(x) = f(-ax)$

$$\Rightarrow f(x) = h(\{\frac{1}{2}\log_a(-ax)\}) = h(\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a|x|\}).$$

$$f(x) = (f(\frac{x}{2}))^2 \geq 0, \forall x \in R.$$

Lần lượt lấy đạo hàm hai vế của hệ thức đề bài thì được

$$f'(x+y) = f'(x)f(y), \forall x, y \in R$$
$$f'(x+y) = f(x)f'(y), \forall x, y \in R.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)}, \forall x, y \in R \Leftrightarrow (\ln f(x))' = a \Leftrightarrow f(x) = e^{ax+b}.$$

Vậy $f(x) = 0$ hay $f(x) = e^{ax+b}$.

Bài 34.

a) Trong hệ thức đầu bài, cho đặt $x = y$, ta có

$$2x\,f''(2x) = 2f(x) \Rightarrow uf''(u) = 2f\left(\frac{u}{2}\right), \forall u \in R.$$

Vì f có đạo hàm bậc hai trên R, nên từ hệ thức trên suy ra $f''(u)$ cũng có đạo hàm bậc hai, tức là f có đạo hàm bậc 4. Tiếp tục lí luận tương tự như thế, suy ra hàm f có đạo hàm với bậc tuỳ ý.

b) Với $x \neq -y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ lần lượt đạo hàm hai vế của hệ thức đã cho theo x và y và có

$$f''(x+y) + (x+y)f'''(x+y) = f'(x), \quad (1)$$
$$f''(x+y) + (x+y)f'''(x+y) = f'(y). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\forall x \neq -y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, thì $f'(x) = f'(y)$.

Như vậy, ta có

$$f'(x) = f'(1), \forall x \neq 0, x \neq 1 \quad (3)$$

Vì f có đạo hàm bậc tuỳ ý nên f' là hàm liên tục trên R. Do đó, từ (3) suy ra $f'(0) = f'(1)$; $f'(-1) = f'(1)$. Do vậy: $f'(x) = f'(1) = a$, với a là hằng số nào đó. Từ đó $f(x) = ax + b$,

ở đây a, b là các hằng số. Thay lại vào hệ thức đầu bài ta có hệ thức sau : $\forall x, \forall y \in R$, $(x+y).0 = (ax+b) + (ay+b)$, hay

$$2b + a(x+y) = 0, \forall x, \forall y \in R.$$

Trong đẳng thức trên, thay $x = y = 0$, ta được $b = 0$. Vậy

$$a(x+y) = 0, \forall x, \forall y \in R,$$

và thay $x = -1$, $y = 2$, ta có $a = 0$.

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = 0$, với mọi x.

Bài 35.

Từ phương trình đã cho, với $y = 0$, ta có :

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(0)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}f(0).$$

Suy ra

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) = \left(\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(0)\right) + \left(\frac{1}{2}f(y) - \frac{1}{2}f(0)\right)$$
$$= \left(f\left(\frac{x}{2}\right) - f(0)\right) + \left(f\left(\frac{y}{2}\right) - f(0)\right) \quad \forall x, \forall y \in R.$$

Đặt $g(t) = f(t) - f(0)$. Suy ra g cũng là hàm liên tục và

$$g(u+v) = g(u) + g(v), \forall u, v \in R.$$

Theo bài 14 ta có $g(x) = ax$, với a là hằng số.

Từ đó suy ra $f(x) = ax + b$, ở đây b là hằng số.

Đảo lại, dễ thấy dạng hàm số này thoả mãn đề bài.

Bài 36.

Đặt $x - y = z$ thì $x = z + y$ và hệ thức đề bài trở thành

$$f(z) = \frac{f(z+y)}{f(y)}, \forall z, y \in R.$$

Từ đó $\begin{cases} f(z+y) = f(z)f(y) \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$, $\forall x, y, z \in R$. Từ đây, bạn đọc

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n} \text{ với mọi n nguyên } \neq 0.$$

Từ đó, $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$ với mọi số hữu tỉ $\frac{m}{n}$.

Rõ ràng $f(x) \neq 0$ nếu $x \neq 0$, do đó, $f(a) = f(b)$ cho ta

$$f(a-b) = 0, \text{ nên } a = b.$$

Do đó nếu $a^2 \neq a$ thì

$$\frac{1}{f(a) - f(a^2)} = \frac{1}{f(a(1-a))} = f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}\right)$$

$$= \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{1-f(a)} = \frac{1}{f(a) - (f(a))^2}.$$

Vậy $f(a^2) = f(a)^2$ với mọi $a \in R$. Nếu $a < b$ thì $b - a = x^2$ với $x \in R$. Do đó $f(b) - f(a) = f(x^2) = (f(x))^2 \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Sau cùng, với $x \in R$ thì tồn tại các dãy (a_n), (b_n) các số hữu tỉ sao cho x là số duy nhất thoả $a_n < x < b_n$ với mọi n nguyên dương. Vậy là

$$\forall n \in N^*, a_n = f(a_n) < f(x) < f(b_n) = b_n \Rightarrow f(x) = x, \forall x \in R.$$

Bài 28.

Nếu f là hàm hằng thì $f(x) = 0$ hay $f(x) = 1$.

Nếu f không phải là hàm hằng, ta có

$$f(x) = f(x).f(1), \forall x \Rightarrow f(1) = 1;$$

$$f(0) = f(x).f(0), \forall x \Rightarrow f(0) = 0;$$

$$f(1) = (f(-1))^2 = 1.$$

* *Trường hợp* 1 : $f(-1) = 1 \Rightarrow f(-x) = f(x), \forall x$.

Ta có, với $x > 0$, nếu $f(x) < 0$, $f(1) > 0$, do f liên tục nên có $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \in (x, 1)$ sao cho $f(\varepsilon) = 0$. Từ đó $f(1) = f(\varepsilon).f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 0$: vô lí. Do đó $f(x) > 0$ với mọi $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$.

Do f không hằng, nên có $t > 0$ để $f(t) \neq 1$, $f(t) > 0$,

$$f(t^n) = (f(t))^n, \forall n \in N,$$

$$f(t^p) = \left(f\left(t^{\frac{p}{q}}\right)\right)^q = (f(t))^p \Rightarrow f\left(t^{\frac{p}{q}}\right) = (f(t))^{\frac{p}{q}}.$$

Như thế $\forall s \in Q$, $f(t^s) = (f(t))^s$.

Bây giờ, với $m > 0$, thế thì tồn tại một dãy các số hữu tỉ (s_n) mà $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \log_t m$. Ta có

$$f(m) = \lim_{n\to\infty} f(t^{s_n}) = \lim_{n\to\infty} (f(t))^{s_n} = (f(t))^{\log_t m} = m^{\log_t f(t)} = m^\alpha.$$

Do đó,

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ |x|^\alpha & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Thử lại, ta thấy hàm số trên thoả điều kiện đề bài.

**Trường hợp 2* : $f(-1) = -1 \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \neq 0$.

Chứng minh như trên ta có

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ -|x|^\alpha & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Tóm lại, nghiệm của bài toán là

$$f(x) = 0 \text{ hay } f(x) = 1, \forall x;$$

$$f(x) = |x|^\alpha, \forall x \neq 0 \text{ và } f(0) = 0;$$

$$f(x) = (\text{sgn}x).|x|^\alpha, \forall x \neq 0 \text{ và } f(0) = 0.$$

Bài 29.

Đặt $g(x) = f(x) - x$. Ta có $g(x)$ liên tục và

$$g(x^2) = f(x^2) - x^2 = x - f(x) = -g(x), \quad \forall x \in R. \qquad (1)$$

$$f\left(\frac{x_0}{2^{n-2}}\right) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)\right]^2 - 1 \geq 1,$$

$$f(x_0) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^2 - 1 \geq 1,$$

trái với giả thiết $|f(x_0)| < 1$.

Vậy tồn tại $x_1 \neq 0$ sao cho

$$0 < f(x_1) < 1 \text{ và } f(x) > 0,\ \forall x \in (-|x_1|, |x_1|)$$

(chỉ cần chọn $x_1 = \frac{x_0}{2^{n_0}}$). Đặt $f(x_1) = \cos\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Từ giả thiết suy ra $f(2x_1) = 2[f(x_1)]^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$.

Giả sử $f(kx_1) = \cos k\alpha$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n \in N^+$. Khi đó

$$f((n+1)x_1) = f(nx_1 + x_1) = 2\,f(nx_1)f(x_1) - f((n-1)x_1)$$
$$= 2\cos n\alpha \cos\alpha - \cos(n-1)\alpha = \cos(n+1)\alpha.$$

Từ đó suy ra $f(mx_1) = \cos m\alpha$, $\forall m \in N^+$. Mặt khác, đổi vai trò của x và y trong hệ thức đề bài, ta có

$$f(x - y) = f(y - x),\ \forall\, x, y \in R.$$

Do đó f(x) là hàm số chẵn trên R, và như vậy

$$f(mx_1) = \cos m\alpha,\ \forall m \in Z. \qquad (2)$$

Cho $x = y = \frac{x_1}{2}$, ta được

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1 + f(x_1)}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Do vậy $f\left(\frac{x_1}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$.

Giả sử $f\left(\frac{x_1}{2^k}\right) = \cos\frac{\alpha}{2^k}$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n \in N^*$. Khi đó,

cho $x = y = \frac{x_1}{2^{k+1}}$, ta nhận được

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2^{n+1}}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} + f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \frac{1 + \cos\frac{\alpha}{2^n}}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}.$$

Như thế :

$$f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \cos\frac{\alpha}{2^n},\ \forall n \in N. \qquad (3)$$

Từ đó, (3) cho ta

$$f\left(\frac{mx_1}{2^n}\right) = \cos\frac{m\alpha}{2^n},\ \forall n \in N^+, \forall m \in Z. \qquad (4)$$

Vì f(x) và cosx là các hàm số liên tục trên R nên

$$(4) \Leftrightarrow f(x_1 t) = \cos\alpha t \Leftrightarrow f(x) = \cos ax, \text{ với } a = \frac{\alpha}{x_1},\ \forall x.$$

Thử lại, ta thấy $f(x) = \cos ax$ $(a \neq 0)$ thoả mãn các điều kiện đã nêu của bài toán. Vậy $f(x) = \cos ax$, $a \in R \setminus \{0\}$.

Bài 25.

Cho f(x) là một hàm số thoả mãn điều kiện của bài toán. Hiển nhiên f(x) là một hàm số chẵn.

Cho $x_0 \geq 0$. Có hai trường hợp :

(I) $0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$. Xét dãy (1) $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ định bởi các đẳng thức $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$. Bằng quy nạp, dễ thấy rằng

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \text{ với mọi n.}$$

Hơn nữa, $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + \frac{1}{4} = (x_n - \frac{1}{2})^2 \geq 0$, suy ra (1) là một dãy tăng đơn điệu. Vì nó bị chặn, nên là một dãy hội tụ. Gọi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Thế thì $\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = 0$, cho $\alpha = \frac{1}{2}$.

Trong (4) lấy $v = -\frac{1}{2}$ thì được

$$f(0) = f(u) + 2f(-\frac{u}{2}).$$

Sử dụng (5) và (6) ta có

$$f(u) = 2f(\frac{u}{2}) \text{ hay } f(2u) = 2f(u). \qquad (7)$$

Từ (7) và (4) ta có

$$f(u + 2uv) = f(u) + f(2uv),$$

trong này lại lấy $2v = t$ thì có

$$f(u + ut) = f(u) + f(ut). \qquad (8)$$

Như vậy ta nhận được đồng nhất thức

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Vì thế, khi $x = 0$ thì đồng nhất thức này trở thành (5), mà với $x \neq 0$ thì ta có từ đồng nhất thức (8) :

$$f(x + y) = f(x + x.\frac{y}{x}) = f(x) + f(x\frac{y}{x}) = f(x) + f(y).$$

Bài 20.

Cho $x = y = 0$ thì $f(0) = f(0).f(a) + f(0)f(a) \Rightarrow f(a) = \frac{1}{2}$.

Cho $y = 0$ thì $f(x) = f(x)f(a) + f(0)f(a - x)$, suy ra

$$f(x) = f(a - x), \qquad (1)$$

$$\text{và } f(x + y) = 2f(x)f(y). \qquad (2)$$

Lấy $y = a$ thì $f(x + a) = f(x)$; lấy x bằng $-x$ trong (1) và kết hợp (2) thì được $f(-x) = f(a + x) = f(x)$.

Thay y bằng $-y$ trong hệ thức đề bài thì

$$f(x - y) = f(x)f(a + y) + f(-y)f(a - x) = 2f(x)f(y),$$

suy ra $f(x + y) = f(x - y)$ với mọi x, y.

Sau cùng, lấy $x = y = \frac{x}{2}$ thì nhận được kết quả

$$f(x) = f(0) = \frac{1}{2}.$$

Bài 21.

Ta muốn tìm tất cả các hàm số lấy giá trị thực và miền xác định thực thoả điều kiện

$$f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y) \qquad (1)$$

với mọi x, y thực. Thay $y = 1$ vào (1) ta có

$$f(x)^2 = xf(x)f(1). \qquad (2)$$

Nếu $f(1) = 0$, thì $f(x) = 0$ với mọi x. Điều này thoả (1), do đó ta được một nghiệm ($f(x) = 0$ với mọi x).

Tiếp theo, giả sử $f(1) = C \neq 0$. Từ phương trình (2) suy ra rằng $f(0) = 0$. Bây giờ gọi G là một tập hợp các điểm x sao cho $f(x) \neq 0$. Theo (2), ta có $f(x) = xf(1)$ với mọi $x \in G$. Như thế (1) có thể chỉ được thoả bởi các hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} Cx & \text{khi } x \in G \\ 0 & \text{khi } x \notin G \end{cases}. \qquad (3)$$

Ta phải xác định cấu trúc của G sao cho hàm số định bởi (3) thoả (1) với mọi số thực x, y. Dễ dàng kiểm chứng rằng nếu $x \neq y$ và cả x lẫn y đều là các phần tử của G, thì hàm số định bởi (3) thoả (1) nếu và chỉ nếu $xy \in G$. Nếu cả x và y không phải là phần tử của G thì (1) được thoả. Do tính đối xứng, trường hợp duy nhất khác ta cần phải xét đến là $x \in G$, $y \notin G$. Trong trường hợp này, từ (1) suy ra

$$f(xy)\, f(x) = 0,$$

và điều này lại cho ta $f(xy) = 0$. Như thế :

$$\text{Nếu } x \in G,\ y \notin G, \text{ thì } xy \notin G. \qquad (4)$$

Điều này cho ta các đặc trưng của G như sau :

. Nếu $x \in G$, thì $1/x \in G$. Thật vậy, vì nếu trái lại, (4) sẽ cho ta $1 \notin G$, đây là điều không thể xảy ra (nhắc lại rằng

$$f(rx) = rf(x).$$

b) Bây giờ, theo giả thiết $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0.$

Ta chọn x_0 tuỳ ý thì

$$\lim_{x \to x_0} f(x - x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0)$$

và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x - x_0) = \lim\limits_{x - x_0 \to 0} f(x - x_0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

suy ra hàm số liên tục tại x_0, do đó hàm số liên tục trên R.

Sau đó ta lấy x bất kì thì tồn tại dãy các số hữu tỉ (r_n) sao cho $x = \lim\limits_{n \to \infty} r_n$ và

$$f(x) = f(x.1) = f\left[\left(\lim_{n \to \infty} r_n\right).1\right] = \lim_{n \to \infty} r_n.f(1) = x.f(1).$$

Đặt $a = f(1)$, ta được $f(x) = ax$.

Bài 15.

a) Nếu f (x) đồng nhất 0 thì bài toán được giải xong. Ta giả sử f(x) không đồng nhất 0. Từ giả thiết, với mọi x :

$$f(x) = f(1.x) = f(1) + f(x) \Rightarrow f(1) = 0.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được :

$$\forall x > 0 ; \forall n \in N, f(x^n) = nf(x)$$

Từ đó, với mọi $n \in N$, ta có

$$0 = f(1) = f(x^n.x^{-n}) = f(x^n) + f(x^{-n}) = nf(x) + f(x^{-n}).$$

Suy ra, ta cũng có với mọi $n \in Z : f(x^n) = nf(x)$.

Tiếp theo, với mọi m nguyên và n nguyên dương, ta có

$$mf(x) = f(x^m) = f\left[\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n\right] = nf\left(x^{\frac{m}{n}}\right).$$

Như thế ta nhận được, $\forall x > 0 ; \forall r \in Q : f(x^r) = rf(x)$.

b) Lấy x_0 bất kì, với $x > 0$, theo giả thiết

$$\lim_{x \to x_0} f\left(\frac{x}{x_0}\right) = 0, \text{ suy ra}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f\left(x_0\frac{x}{x_0}\right) = \lim_{x \to x_0}\left[f(x_0) + f\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]$$

$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} f\left(\frac{x}{x_0}\right) = f(x_0),$$

suy ra hàm số liên tục trên R.

Tiếp theo, từ đẳng thức $f(x^r) = rf(x)$ đã chứng minh ta có $f(2^r) = rf(2) = Ar$; với $A = f(2)$.

Mọi $x > 0$ có thể được viết thành dạng $x = 2^{\log_2 x}$.

Gọi (r_n) là dãy các số hữu tỉ có giới hạn $\log_2 x$, thế thì

$$2^{r_n} \to x = 2^{\log_2 x}.$$

Do đó $\lim\limits_{n \to \infty} f(2^{r_n}) = f(x)$. Ta lại có

$f(2^{r_n}) = Ar_n \to A\log_2 x \Rightarrow f(x) = A\log_2 x$ với $x > 0$.

Vì f(x) không đồng nhất 0, nên $A \neq 0$.

Đặt $a = 2^{\frac{1}{A}}$. Suy ra $a > 0$; $a \neq 1$ và $f(x) = \log_a x$.

Bài 16.

Với $y = 0 \Rightarrow f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

Lấy $y = 1$, $f(x) = f(x).f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ hay $f(1) = 1$.

* Nếu $f(1) \neq 1 : f(x) = 0, \forall x \in R$.

* Nếu $f(1) = 1$: ta có với mọi $x \in R$, $f(x + 1) = f(x) + 1$.

Bằng quy nạp, dễ dàng suy ra $f(n) = n$ với mọi $n \in Z$.

Tiếp theo, ta có

$$f\left(\frac{n+1}{n}\right) = f(n + 1).f\left(\frac{1}{n}\right) = (n + 1)f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Bài 7.

Từ điều kiện đề bài, ta có với mọi x :

$$f(c-x) = a - bf(x) \Leftrightarrow f(x) = a - b(a - bf(x)) \Rightarrow f(x) = \frac{a}{b+1}.$$

Bài 8.

Với $\forall x \neq 0$, ta có

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$. Suy ra $f(t) = t^3 - 3t$.

Vậy phải có $f(x) = x^3 - 3x$. Đảo lại, dễ dàng kiểm chứng được hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ là hàm số thoả mãn điều kiện đề bài.

Bài 9.

Trong phương trình thứ hai, thay x bởi 2x + 10 thì hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \dfrac{x+2}{2} \\ f(x+6) + g(2x+15) = 2x+14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2x+15) = \frac{-3x-26}{2} \text{ và } f(x+6) = \frac{7x+54}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{7x+12}{2} \text{ và } g(x) = \frac{-3x-7}{4}.$$

Bài 10.

Thay x + 1 bởi x trong phương trình đầu ; thay $\frac{x+1}{x-1}$

bởi x trong phương trình thứ hai thì nhận được hệ

$$\begin{cases} f(x) + (x-1)g(x) = 2(x-1) \\ f(x) + g(x) = \dfrac{2}{x-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -2 \text{ ; } g(x) = \frac{2x}{x-1}.$$

Bài 11.

Đặt $3x - 1 = t$ thì phương trình thứ nhất trở thành :

$$f(t) + g(2t+1) = t+1. \qquad (*)$$

Đặt $x + 1 = t$ ở phương trình thứ hai :

$$f(t) + (t-1)g(2t+1) = 2t^2 - 3t + 1.$$

Từ đó ta có :

$$(t-2)g(2t+1) = 2t^2 - 4t = 2t(t-2) \Rightarrow g(2t+1) = 2t, \ \forall t \neq 2.$$

Do vậy : $g(x) = x - 1, \forall x \neq 2$. Từ (*) suy ra

$$f(x) + 2x = x + 1, \ \forall x \neq 2,$$

như thế, $f(x) = 1 - x, \ \forall x \neq 2$.

Bây giờ, ta đi tính f(2) và g(2). Từ hệ hai phương trình đã cho, dễ dàng có được

$$f(2) + g(5) = 3, \ f(2) + g(5) = 3.$$

Do $g(5) = 4$ nên ta có $f(2) = -1$. Tiếp theo, từ phương trình đầu của hệ, cho $x = \frac{1}{2}$ thì được : $f\left(\frac{1}{2}\right) + g(2) = \frac{3}{2}$.

Từ phương trình đầu của hệ, cho $x = -\frac{1}{2}$, ta có :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}g(2) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}g(2) = \frac{3}{2} \Rightarrow g(2) = 1.$$

Như vậy, có thể viết : $f(x) = 1 - x$ và $g(x) = x - 1$ với

Gọi $f : \Omega \to \{0, 1, \ldots, p-1\}$ là hàm thoả mãn hai điều kiện sau:

(i) Tồn tại duy nhất một điểm của Ω có ảnh bằng 0 ;

(ii) Nếu A, B, C là ba điểm phân biệt thuộc Ω và (k) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì

$$\sum_{P \in \Omega \cap (k)} f(P) \equiv 0 \pmod p.$$

Chứng minh rằng tất cả các điểm cuả Ω đều nằm trên một đường tròn.

Bài 199.

Cho số nguyên dương $n \geq 4$ và gọi M là tập gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và n điểm đó không cùng nằm trên một đường tròn. Tìm tất cả các hàm $f : M \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi đường tròn C chứa ít nhất ba điểm của M, ta có

$$\sum_{P \in M \cap C} f(P) = 0. \qquad (*)$$

Bài 200.

Cho số nguyên $n \geq 2$. Tìm số tất cả các hàm

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

thoả mãn tính chất :

$$|f(k+1) - f(k)| \geq 3, \text{ với } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Phần II

LỜI GIẢI
HOẶC HƯỚNG DẪN

b) $f(x) \neq 0$, với $0 \leq x < 2$;

c) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$, $\forall x, y \in R^+$.

Bài 182.

Tìm tất cả các hàm số $f : [1 ; +\infty) \to [1 ; +\infty)$ sao cho

$$f(x.f(y)) = y.f(x),$$

với mọi x, y thuộc $[1 ; +\infty)$.

Bài 183.

Tìm tất cả các hàm f đi từ tập R các số thực vào chính nó sao cho $(f(x) + f(y)).(f(u) + f(v)) = f(xu - yv) + f(xv + yu)$ với mọi x, y, u, v thuộc R.

Bài 184.

Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên R thoả phương trình hàm sau:

$$(f(x))^3 - (x^2 + 3)(f(x))^2 + (x^2 + 3)f(x) + x^4 - 1 = 0, \forall x \in R.$$

Bài 185.

Xác định mọi hàm số $f : R \to R$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$f(-x) = -f(x),\ f(x+1) = f(x) + 1 \text{ với mọi } x \in R,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2} \text{ với mọi } x \neq 0.$$

Bài 186.

Tìm tất cả các hàm số $f : R^+ \to R^+$ thoả mãn phương trình: $f[f(x)] + f(x) = 1999.2000.x$, $\forall x \in R^+$.

Bài 187.

Tìm hàm $f(x) \geq 0$ xác định và khả vi trên R^+ và thoả mãn điều kiện sau với mọi số thực x, y và mọi số nguyên dương n :

$$f\left(\sqrt{\frac{x^n + y^n}{2}}\right) = \sqrt{\frac{f^2(x) + f^2(y)}{2}}.$$

Bài 188.

Tìm các hàm f(x), xác định với mọi $x \in R$ và thoả mãn:

$$\begin{cases} f(0) = 1999 \quad \text{và} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2000 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y, \forall x, y \in R. \end{cases}$$

Bài 189.

Tìm tất cả các hàm f xác định trên tập tất cả các số thực và nhận giá trị thực, sao cho với mọi x, y ta có:

$$f(x^2 + f(y)) = y + f^2(x)$$

(ở đây, kí hiệu $f^2(x)$ có nghĩa là $(f(x))^2$).

Bài 190.

Tìm tất cả các hàm $f : R \longrightarrow R$ sao cho:

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1, \forall x, y \in R.$$

Bài 191.

Gọi S là tập những số thực lớn hơn -1. Hãy tìm tất cả các hàm $f : S \to S$ thoả điều kiện:

(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$, $\forall x, y \in S$;

(ii) Hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$ tăng thực sự trên các khoảng

$$-1 < x < 0,\ 0 < x < \infty.$$

(1) $f(1) = 1$;

(2) $f(-1) = -1$;

(3) $f(x) \le f(0)$ với $0 < x < 1$;

(4) $f(x + y) \ge f(x) + f(y)$ với mọi x, y ;

(5) $f(x + y) \le f(x) + f(y) + 1$ với mọi x, y.

Bài 162.

Cho $S = \{x \in R, x > -1\}$.

Tìm tất cả các hàm số $f : S \to S$ thoả mãn:

1) $f(xf(y) + x + f(y)) = y + f(x) + yf(x),\ \forall x, y \in S$;

2) $\dfrac{f(x)}{x}$ là hàm tăng với $-1 < x < 0$ và $x > 0$.

Bài 163.

Tìm tất cả các hàm liên tục $f(x)$ trên tập các số thực sao cho

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

với mọi số thực x.

Bài 164.

Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định trên R và thoả mãn phương trình: $f[(x+1)f(y)] = y[f(x) + 1],\ \forall x, y \in R$.

Bài 165.

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên [0, 1] sao cho

(i) $f(0) = f(1) = 0$;

(ii) $2f(x) + f(y) = 3f\left(\dfrac{2x + y}{3}\right)$ với mọi $x, y \in [0, 1]$.

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x, y \in [0, 1]$.

Bài 166.

Cho R^+ là tập các số thực không âm, a và b là hai số thực dương. Giả sử rằng ánh xạ $f: R^+ \to R^+$ thoả mãn phương trình hàm $f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x$. Chứng minh rằng phương trình hàm này có nghiệm duy nhất.

Bài 167.

Gọi S là tập hợp các số thực lớn hơn −1. Tìm tất cả các hàm $f : S \to S$ sao cho $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ với mọi x, y thuộc S, đồng thời, hàm $f(x)/x$ tăng thực sự trên các khoảng $-1 < x < 0$ và $0 < x$.

Bài 168.

Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R, thoả mãn các điều kiện:

1) $f(1) = 1$;

2) $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in R$.

Bài 169.

Cho $a \in R$ và n hàm cộng tính $f_1, f_2, ..., f_n : R \to R$ thoả mãn điều kiện $f_1(x)f_2(x)...f_n(x) = ax^n$ với mọi $x \in R$. Chứng minh rằng tồn tại một số $b \in R$ và $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $f_i(x) = bx$ với mọi $x \in R$.

(Một hàm f được gọi là *cộng tính* nếu với mọi x, y thuộc miền xác định của nó ta có $f(x + y) = f(x) + f(y)$.)

Bài 170.

Tìm tất cả các hàm f xác định trên tập các số thực dương, nhận giá trị thực, sao cho $f(x + y) = f(x^2 + y^2)$ với mọi

Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $n \ge 1$ tồn tại duy nhất $x_n \in (0; +\infty)$ thoả mãn $f_n(x_n) = 2x_n$ và dãy $\{x_n\}$ tăng, có giới hạn bằng 4 khi n tiến đến vô cùng.

Bài 144.

Kí hiệu $f(x) = x^2 - 2$. Đặt

$$f_2(x) = f[f(x)],\ f_n(x) = f[f_{n-1}(x)],\ \forall n \ge 2.$$

Chứng minh rằng phương trình: $f_n(x) = 0$ có đúng 2^n nghiệm phân biệt.

Bài 145.

Cho các đa thức $P_k(x)$, $k = 1,2,3,...$ xác định bởi:

$$P_1(x) = x^2 - 2,\ P_{i+1} = P_1(P_i(x)),\ i = 1,2,3,....$$

Chứng minh rằng $P_n(x) = x$ có tất cả các nghiệm đều là các số thực phân biệt nhau.

Bài 146.

Hàm số f được xác định trên tập các số nguyên dương như sau: $f(1) = f(2) = f(3) = 2$. Khi $n > 3$, $f(n)$ là số nguyên dương nhỏ nhất không chia hết n.

Đặt $f_1 = f$ và $f_{k+1}(n) = f(f_k(n))$.

Gọi $g(n)$ là số k nhỏ nhất sao cho $f_k(n) = 2$.

Hãy xác định hàm $g(n)$.

Bài 147.

Với $x \ne 0$, xét hàm $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$. Ta định nghĩa

$$f^{(0)}(x) = x \text{ và } f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$$

với mọi số nguyên dương n và mọi $x \ne 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = 1 + \frac{1}{f\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2^n}\right)}$$

với mọi số nguyên n không âm và mọi $x \ne -1, 0, 1$.

Bài 148.

Cho hàm số f xác định và nhận giá trị trên tập các số nguyên dương và thoả mãn điều kiện : Với mọi số nguyên dương k , $f_1(k)$ là bình phương của tổng các chữ số của nó. Đặt $f_2(k) = f_1(f_1(k))$; $f_3(k) = f_1(f_2(k))$; ... Hãy xác định giá trị của $f_n(2^{1990})$, với n là số tự nhiên và $n \ge 4$.

8 MỘT SỐ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP SỐ THỰC

Bài 149.

Gọi X là khoảng đóng [0, 1]. Tìm tất cả các hàm số

$$f: X \times X \to X$$

sao cho :

(1) $f(x, 1) = f(1, x) = x$ với mọi x;

(2) $f((f(x,y),z) = f(x,f(y,z))$ với mọi x, y, z ;

(3) với k là số thực cố định nào đó, ta có

$$f(xy, xz) = x^k f(y,z) \text{ với mọi } x, y, z.$$

Bài 150.

Cho f và g là các hàm số xác định trên R, nhận giá trị trên R. Với mọi x và y, giả sử

Chứng minh rằng f là một hàm số tuần hoàn.

Bài 127.

Giả sử ta có $f(|x|)=|f(x)|>0,\ \forall x\in R$, với $f(x)$ là hàm liên tục trên R. Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm số chẵn.

Bài 128.

Cho f là hàm xác định trên tập các số thực dương, nhận giá trị trên tập số thực và thoả mãn phương trình hàm

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{2xy}{x+y}\right)=f(x)+f(y)$$

với mọi số dương x, y. Chứng minh rằng

$$2f(\sqrt{xy})=f(x)+f(y)$$

với mọi số thực dương x, y.

6 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC

Bài 129.

Cho $f(x)=x^4-2003x^3+(2004+n)x^2-2005x+n$, với n là số nguyên. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$f'(x)=f(x)=0.$$

Bài 130.

Tìm tất cả các đa thức p(x, y) sao cho với mọi x, y, u, v ta có $p(x, y)p(u, v) = p(xu + yv, xv + yu)$.

Bài 131.

Xác định tất cả các đa thức hai biến P(x, y) sao cho cả 3 điều kiện sau đây được thoả mãn :

1) Tồn tại số nguyên dương n và mọi số thực t, x, y:

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y).$$

2) Với mọi số thực x, y, z:

$$P(y+z, x) + P(z+x, y) + P(x+y, z) = 0.$$

3) $P(1, 0) = 1$.

Bài 132.

Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ thoả mãn điều kiện

$$f(f(x))=(f(x))^m,$$

ở đây $m > 1$ là số nguyên cho trước.

Bài 133.

Tìm một đa thức f(x) có bậc n sao cho với mọi x, ta có $f(x)>f''(x)$ và $f'(x)>f''(x)$ (với kí hiệu thông thường của đạo hàm bậc nhất, bậc hai).

Bài 134.

Cho f, g là các đa thức một biến với hệ số thực, còn a là đa thức hai biến sao cho $f(x) - f(y) = a(x, y)(g(x) - g(y))$ với mọi $x, y \in R$. Chứng minh rằng tồn tại đa thức h sao cho

$$f(x) = h(g(x)) \text{ với mọi } x \in R.$$

Bài 135.

Có tồn tại hay không một đa thức f với bậc 1999 có các hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên *n*, các số

$$f(n),\ f(f(n)),\ f(f(f(n))), \ldots$$

nguyên tố cùng nhau từng đôi một ?

Bài 136.

Xét đa thức

$$P_n(x) = C_n^2 + C_n^5 x + C_n^8 x^2 + \ldots + C_n^{3k+2} x^k,$$

Hãy xây dựng một hàm số $f: Q^+ \longrightarrow Q^+$ sao cho với mọi $x, y \in Q^+$ ta có :

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

Bài 109.

Tìm tất cả các hàm $f: Z \to Z$ thoả điều kiện

$$f(x + yf(x)) = f(x) + xf(y)$$

với mọi $x, y \in Z$.

Bài 110.

Kí hiệu Z là tập các số nguyên. Tìm tất cả những hàm $f: Z \to Z$ sao cho $f(-1) = f(1)$ và với mọi số nguyên x, y:

$$f(x) + f(y) = f(x + 2xy) + f(y - 2xy).$$

Bài 111.

Kí hiệu $\mathbf{N}_0$ là tập hợp các số nguyên không âm. Tìm tất cả các hàm số f từ $\mathbf{N}_0$ vào chính nó sao cho

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n),\ \forall\ m, n \in \mathbf{N}_0.$$

Bài 112.

Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập các số nguyên dương, nhận giá trị nguyên dương sao cho với mọi m, n ta có

$$f(f(n) + m) = n + f(m + 2004).$$

Bài 113.

Hãy tìm một hàm số f xác định và nhận giá trị trên tập số tự nhiên sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$f(4n) = f(2n) + f(n),\ f(4n+2) = f(4n) + 1 \text{ và}$$
$$f(2n+1) = f(2n) + 1.$$

5 MỘT SỐ BÀI TOÁN KHẢO SÁT NGHIỆM HOẶC TÍNH CHẤT HÀM SỐ DỰA VÀO PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 114.

Cho $f, g: (a, b) \to (a, b)$ là hai hàm số liên tục thoả mãn đồng thời hai điều kiện :

$$f(x) - g(x) \neq 0,\ \forall x \in (a, b), \qquad (1)$$

$$f(f(x)) = g(g(x))\ \ \forall x \in (a, b). \qquad (2)$$

Chứng minh rằng phương trình $f(g(x)) = g(f(x))$ vô nghiệm trên (a, b).

Bài 115.

Cho hàm $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Kí hiệu

$$f^k(x) = f\left(f^{k-1}(x)\right),$$

với k là trị số tự nhiên lớn hơn 1. Xét xem phương trình $f^7(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

Bài 116.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0, 1]$, trong đó, $f(x)$ và $g(x): [0, 1] \to [0, 1]$ là hai hàm số liên tục và thoả mãn đồng thời hai điều kiện :

(a) $f(x)$ là hàm tăng ;

(b) $f(g(x)) = g(f(x))$, với mọi $x \in [0, 1]$.

Bài 117.

Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0, a]$, khả vi trên $(0, a)$, sao cho $f(a) = 0$. Chứng minh rằng trên khoảng minh rằng tồn tại các giá trị dương a, b, c sao cho $b^2 = ac$ và

$$f(a)+f(b)+f(c)=0.$$

Bài 92.

Gọi f và g là hai hàm nhận các giá trị nguyên, xác định trên tập các số nguyên và thoả mãn hai điều kiện :

(a) Với mọi m, n nguyên ta có

$$f(m+f(f(n)))=-f(f(m+1))-n.$$

(b) Hàm g là một đa thức có hệ số nguyên và với mọi n nguyên ta có $g(n)=g(f(n))$.

Tìm $f(1991)$ và xác định dạng tổng quát nhất của g.

Bài 93.

Tìm tất cả hàm số $f : Z \to Z$ sao cho :

$f(1995) = 1996$;

$\forall m \in Z$, nếu $f(m) = n$ thì $f(n) = m$ và $f(n + 3) = m - 3$.

Bài 94.

Cho f là hàm số có giá trị nguyên, xác định trên tập hợp tất cả các số nguyên sao cho

$$f(m + f(f(n))) = -f(f(m + 1)) - n, \forall m, n \in Z. \quad (*)$$

Hãy xác định f(1991).

Bài 95.

Cho f là hàm số có giá trị nguyên, xác định trên tập hợp tất cả các số nguyên sao cho với mọi số nguyên x ta có

$$f(x+19)\le f(x)+19 \text{ và}$$

$$f(x+94)\ge f(x)+94.$$

Hãy xác định giá trị $f(2006)$ theo giá trị $f(1912)$.

4 MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP SỐ NGUYÊN, SỐ HỮU TỈ

Bài 96.

Tìm tất cả các hàm số f(x) lấy giá trị nguyên và xác định trên tập hợp các số nguyên sao cho $3f(x) - 2f(f(x)) = x$ với mọi số nguyên x.

Bài 97.

Cho hàm số f xác định và nhận giá trị trên tập các số nguyên dương sao cho $f(1)=1$, và với mọi $n\ge 1$, $f(n+1)$ là số nguyên bé nhất lớn hơn $f(n)$ sao cho với mọi $i, j, k \in \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1\}$ ta có $f(i)+f(j)\ne 3f(k)$.

Bài 98.

Cho hàm số f(n) xác định với mọi số nguyên dương n và có giá trị trên tập N. Cho biết:

$f(m + n) - f(m) - f(n)$ bằng 0 hay 1, $\forall m, n$;

$f(2) = 0, f(3) > 0, f(9999) = 3333.$

Tính f(2000).

Bài 99.

Cho hàm số $f(x):[0, n]\to R$ liên tục, với n là số nguyên dương. Giả sử $f(0)=f(n)$. Chứng minh rằng tồn tại n cặp số a_i, b_i sao cho $f(a_i)=f(b_i)$ với mọi $i=1, 2, \ldots, n$.

Bài 100.

Cho A = {1, 2,..., m + n }, trong đó m và n là các số nguyên dương và cho hàm số f : A → A được xác định bởi các phương trình

$$f(1) = 2, \quad (1)$$
$$f(f(n)) = f(n) + n \ \forall n \in N. \quad (2)$$

2 MỘT SỐ BÀI TOÁN TỒN TẠI NGHIỆM

Bài 73.

Tồn tại hay không một hàm số lẻ thoả mãn điều kiện
$$f(x-1) + 3f\left(\frac{1-x}{1-2x}\right) = 1 - 2x, \text{ với } x \neq \pm\frac{1}{2} \ ?$$

Bài 74.

Có tồn tại hay không một hàm số $f : R \to R$ thoả điều kiện : $f(x) = x^2 + f(-x), \forall x \in R$?

Bài 75.

Tuỳ theo giá trị của a, xác định xem có tồn tại hay không hàm số $f : R \to R$ thoả mãn :
$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(x^2 + \frac{a}{x^2}\right), \forall x \in R \setminus \{0\}.$$

Bài 76.

Có tồn tại hay không các hàm số $f : R \to$ và $g : R \to R$, trong đó g là hàm số tuần hoàn và thoả mãn:
$$x^3 = f([x]) + g([x]), \quad \text{với mọi } x \in R,$$
ở đây [x] là số nguyên lớn nhất bé hơn hoặc bằng x ?

Bài 77.

Có tồn tại hay không một hàm số $f : R \to R$ không phải là hàm hằng, thoả mãn điều kiện sau với mọi $x, y \in R$:

$$(f(x) - f(y))^2 \leq |x - y|^3.$$

Bài 78.

Cho R^+ là tập hợp tất cả số thực dương. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : R^+ \to R^+$ sao cho
$$(f(x))^2 \geq f(x+y)(f(x) + y),$$
với mọi số thực dương x và y.

Bài 79.

Xét xem có tồn tại một hàm $f : N^* \to N^*$ sao cho
$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$$
với mọi $n \geq 2$?

Bài 80.

Các số dương p, q phải thoả mãn điều kiện gì để tồn tại một hàm: $f : R^+ \to R^+$ với tính chất:
$$f(xf(y)) = x^p y^q \text{ với mọi } x, y \in R^+ ?$$

Bài 81.

Có tồn tại hay không một hàm liên tục $g(x)$ trên R sao cho $g(g(x)) = f(x), \ \forall x \in R$, trong đó $f(x)$ là hàm cho trước và nghịch biến, xác định trên R ?

Bài 82.

Cho R là tập hợp các số thực. Có tồn tại hay không một hàm số $f : R \to R$ thoả mãn đồng thời ba điều kiện sau :

(a) Có một số dương M sao cho với mọi x, ta có
$$-M \leq f(x) \leq M.$$

(b) $f(1) = 1$.

(c) Nếu $x \neq 0$ thì $f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2$.

$$(iii)\ \forall x \in R,\ f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases},$$

với $g : [0, +\infty) \to R$ là hàm số nào đó.

Bài 50.

Tìm hàm số $f : R \to R$ định bởi $\forall x \in R,\ f(x) = x + f(-x)$.

Bài 51.

Cho hàm số $\varphi : R \to R$. Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả mãn : $\forall x \in R,\ f(x) = \varphi(x) + f(-x)$.

Bài 52.

Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả mãn :

$$\forall x \in R,\ f(x) = f(2003 - x).$$

Bài 53.

Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả điều kiện

$$\forall x \in R,\ f(x) = f(2 - x) + x - 1.$$

Bài 54.

Cho hàm số $f : R \to R$. Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương

(i) $\forall x \in R,\ f(x) = -f(-x)$;

(ii) $\forall x \in R,\ f(x) = g(x) - g(-x)$,

với $g: R \to R$ là hàm số nào đó ;

$$(iii)\ \forall x \in R,\ f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases},$$

với $g: [0, +\infty) \to R$ là hàm số nào đó.

Bài 55.

Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$\forall x \in R,\ f(x) = 2 - f(-x).$$

Bài 56.

Với hàm số φ cho trước, hãy tìm hàm số $f : R \to R$ thoả mãn điều kiện $\forall x \in R,\ f(x) = \varphi(x) - f(-x)$.

Bài 57.

Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$\forall x \in R,\ f(x) = a - f(b - x).$$

- *Phương trình hàm với các hàm số tuần hoàn*

Hàm số f(x) xác định trên (a, b) được gọi là *hàm tuần hoàn*, nếu tồn tại số t sao cho $\forall x \in (a, b) : f(x + t) = f(x)$. Số $t > 0$ bé nhất thoả mãn điều kiện đó được gọi là *chu kì* hàm số.

Bài 58.

Tìm hàm số f(x) xác định trên R, biết rằng

$$f(x) + f(x + 1) = 1$$

và với $0 \leq x < 1$ thì $f(x) = x$.

Bài 59.

Hàm số f(x) được xác định với mọi giá trị thực của x, nhận giá trị thực và thoả mãn điều kiện

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)},$$

trong đó a là một số dương không phụ thuộc vào x.

Chứng minh rằng f(x) là một hàm số tuần hoàn.

Tìm ví dụ về hàm f(x) với các tính chất đã nêu khi $a = 1$ và f(x) không phải là hàm hằng.

Bài 60.

Chứng minh rằng hàm số f(x) xác định trên R và thoả mãn $\forall x \in R,\ f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2}\, f(x)$ là hàm số tuần hoàn. Xác định chu kì của nó.

Bài 61.

Cho hàm số $f : R \to R$. Xét các mệnh đề

(i) $\forall x \in R,\ f(x + 1) = f(x)$;

c) $f(x) > 0$ với mọi $x \in Z$ và $f(2002) = \log_{2003}2002$.

- *Phương pháp dùng đạo hàm*

Ta sẽ không xét đến phương trình vi phân. Các bài toán ở đây mang tính sơ cấp hơn.

Bài 31.

Tìm hàm số $f(x)$ khả vi sao cho với mọi $x \neq 0$:

$$3x^2 f'(x) + x^3 f''(x) = -1$$

$$f(1) = 1 \ ; f(-2) = -1.$$

Bài 32.

Tìm tất cả các hàm số khả vi $f : R \to R$ thoả mãn đồng nhất thức $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$, mọi $x, y \in R$, $x \neq y$.

Bài 33.

Tìm hàm số $f : R \to R$ xác định và khả đạo thoả mãn điều kiện $f(x + y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in R$.

Bài 34.

Cho $f : R \to R$ có đạo hàm bậc hai và thoả mãn hệ thức $(x+y)f''(x+y) = f(x)+f(y)$, $\forall x, y \in R$.

a) Chứng minh rằng f có đạo hàm với bậc tuỳ ý.

b) Tìm các hàm f như thế.

- *Quy về phương trình hàm cơ bản*

Trong một số trường hợp, từ các giả thiết đã cho, ta đưa được về các phương trình hàm dạng

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x + y) = f(x).f(y)$$

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Bài 35.

Tìm hàm số $f : R \to R$ liên tục và thoả mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall x, \forall y \in R.$$

Bài 36.

Xác định hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thoả mãn đồng thời hai điều kiện :

(i) $f(x - y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$, $\forall x, y \in R$,

(ii) $f(x) \neq 0$, $\forall x \in R$.

Bài 37.

Cho $a \in R$. Hãy tìm các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R sao cho $f(x-y) = f(x) - f(y) + axy$, $\forall x, \forall y \in R$.

Bài 38.

Xác định hàm số $f(x)$ liên tục trên R^+ và thoả mãn điều kiện $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, $\forall x, y \in R^+$.

Bài 39.

Tìm hàm số $f : R \to R$ xác định, liên tục và thoả mãn :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}, \ \forall x, y \in R.$$

Bài 40.

Tìm hàm số liên tục $f : R^+ \to R$ và thoả mãn điều kiện

$$f\left(\sqrt{xy}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \ \forall x, \forall y \in R^+.$$

Bài 41.

Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R^+, thoả mãn điều kiện $f\left(\sqrt{xy}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$, $\forall x, y \in R^+$.

Bài 42.

Cho hàm số $f : R \to R$, và số thực $a > 0$, $a \neq 1$.

Bài 11.

Tìm các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ sao cho với mọi x ta có

$$\begin{cases} f(3x-1)+g(6x-1)=3x \\ f(x+1)+xg(2x+3)=2x^2+x \end{cases}.$$

- *Sử dụng phương pháp quy nạp*

Khi hàm số cần xác định trên N hoặc Z, nói chung ta thường sử dụng quy nạp. Có nhiều bài toán, ta áp dụng thủ thuật xác định từng bước N → Z → Q → R. Riêng bước từ Q → R, cần thêm giả thiết về tính liên tục của hàm số.

Bài 12.

Cho hàm số f xác định với mọi $x \in R$ và

$$\begin{cases} \forall x, y : \ f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Hãy xác định $f(m)$; $f(\frac{m}{n})$ với $m \in Z$; $n \in Z^*$.

Bài 13.

Cho hàm số f không đồng nhất không, xác định trên R bởi : $\forall x, y \in R$ $2f(x).f(y) = f(x+y) + f(x-y)$.

a) Chứng minh rằng $f(x) \geq -1$ với mọi x.

b) Cho $f(3) = 0$. Tính $f(1992)$; $f(1995)$; $f(1998)$.

Bài 14.

Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên R và thoả mãn điều kiện $\forall u, v \in R : f(u+v) = f(u) + f(v)$.

a) Chứng minh rằng $\forall x \in R$, $\forall r \in Q$ ta có

$$f(rx) = r f(x).$$

b) Giả sử thêm $f(x)$ liên tục tại $x = 0$, hãy xác định $f(x)$.

Bài 15.

Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên R^+ và thoả mãn điều kiện : $\forall u, v \in R^+$, $f(uv) = f(u) + f(v)$.

a) Chứng minh rằng với mọi $x \in R^+$ và mọi $\forall r \in Q$ ta có $f(x^r) = rf(x)$.

b) Nếu giả sử thêm $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$, hãy xác định $f(x)$.

Bài 16.

Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : R \to R$ thoả mãn

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x.y) = f(x).f(y) \end{cases}, \forall x, y \in R.$$

- *Phương pháp chọn giá trị đặc biệt*

Theo phương pháp này, việc phát hiện một số giá trị đặc biệt có thể làm cơ sở ban đầu cho phép ta suy luận tiếp để tìm được hàm số.

Bài 17.

Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả mãn đồng nhất thức

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y}, \ x, y \in R ; x + y \neq 0.$$

Bài 18.

Tìm tất cả các hàm số $f : R \to R$ thoả mãn đồng nhất thức $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$, với mọi $x, y \in R$.

Bài 19.

Chứng minh rằng hàm số $f : R \to R$ nào thoả mãn một trong hai đẳng thức sau đây thì hàm số đó cũng thoả mãn đẳng thức còn lại :

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ mọi } x, y \in R ;$$

$$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y), \text{ mọi } x, y \in R.$$

Bài 20.

Cho hàm số f có tính chất

(i) $\forall x, y \in R$; $\exists a : f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x)$;

này, một biểu thức *đệ quy*[2] cho dãy số cũng là một phương trình hàm, thậm chí, một biểu thức giao hoán, kết hợp của một toán tử cũng mang dáng vẻ một phương trình hàm. Thật vậy, về mặt bản chất, một dãy số chính là một cách cho hàm trên tập các số tự nhiên, và một toán tử chính là một hàm hai biến, cho dù toán tử đó được viết dưới dạng hoàn toàn *đại số*. Chẳng hạn, khi thay $a * b$ bởi $f(a, b)$ trong biểu thức kết hợp $(a * b) * c = a * (b * c)$, ta được phương trình hàm

$$f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c)).$$

Rõ ràng là việc giải một phương trình hàm trở thành phức tạp hơn khi xuất hiện các hàm chưa biết, không thể đặt ra cho nó những quy trình rút gọn như một phương trình đại số đơn giản, và gần như, ngoài những gợi ý mang tính kinh nghiệm, *không có một phương pháp tổng quát*. Mặc dầu vậy, đôi khi cũng có thể giải quyết được bài toán *tồn tại nghiệm* mà không cần phải chỉ ra nghiệm cụ thể. Bên cạnh đó, từ một phương trình hàm, có thể tiếp cận để chỉ ra những tính chất của hàm số, mặc dầu *chưa* hoặc *không* giải được nó.

Mục đích của tập sách này chỉ đơn thuần cung cấp cho các bạn 200 bài toán mà chúng tôi sưu tập. Chúng tôi đã phân thành 9 mục như đã trình bày, tuy nhiên, khó có thể có một biên giới rõ ràng giữa mục này và mục khác.

Mặc dù có nhiều cố gắng trong biên soạn, sưu tầm nhưng chắc cũng không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc để lần tái bản tới tập sách sẽ tốt hơn.

THÁNG 3, 2006

PGS. TS. NGƯT. VŨ DƯƠNG THỤY
PGS. TS. NGUYỄN QUÝ DY
TS. VŨ VĂN THỎA
ThS. NGUYỄN VĂN NHO
ThS. NGUYỄN SINH NGUYÊN

[2] recurrence relation

Phần I

ĐỀ TOÁN

(200 BÀI PHƯƠNG TRÌNH HÀM)

- **MỘT SỐ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN**
- **MỘT SỐ BÀI TOÁN TỒN TẠI NGHIỆM**
- **PHƯƠNG TRÌNH HÀM VÀ GIÁ TRỊ ĐẶC BIỆT CỦA HÀM SỐ**
- **MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP SỐ NGUYÊN, SỐ HỮU TỈ**
- **MỘT SỐ BÀI TOÁN KHẢO SÁT NGHIỆM HOẶC TÍNH CHẤT HÀM SỐ DỰA VÀO PHƯƠNG TRÌNH HÀM**
- **MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC**
- **MỘT SỐ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐỆ QUY**
- **MỘT SỐ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP SỐ THỰC**
- **MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC**

NGUYỄN QUÝ DY - NGUYỄN SINH NGUYÊN
NGUYỄN VĂN NHO - VŨ VĂN THỎA - VŨ DƯƠNG THỤY

Trần Văn Tuân K50A1T - ĐHKHTN

TUYỂN TẬP
200 BÀI THI VÔ ĐỊCH TOÁN

TẬP 8 : PHƯƠNG TRÌNH HÀM

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC