CHUYÊN ĐỀ DÃY SỐ

Khi làm việc với dãy số, ngoài việc tìm hiểu tính chất của số hạng (tổng quát) thì việc tìm giới hạn của dãy số đó là quan trọng nhất. Chính vì điều này, trong tài liệu nhỏ này tôi cố gắng trình bày những kĩ thuật thường dùng nhất khi tìm giới hạn của dãy số. Bên cạnh đó là một lớp bài tập liên quan đến các dãy số nguyên.

1 Các khái niệm cơ bản

Cho hàm số

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n. \end{aligned}$$

Thường thì chúng ta kí hiệu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ hoặc gọn hơn (u_n) hoặc $\{u_n\}$. Ở đây việc xuất phát từ u_0 hay u_1 không quan trọng.

Dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là có giới hạn $l \in \mathbb{R}$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $|u_n - l| < \epsilon$. Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ hoặc $\lim u_n = l$.

Dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn là ∞ nếu $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$. Sau đây tôi trình bày vài tính chất cơ bản của dãy số.

(i) Nếu $\lim u_n = l$ thì $\lim |u_n| = l$.

(ii) Nếu $\lim u_n = l, \lim v_n = l'$ thì $\lim u_n \pm v_n = l \pm l'$, $\lim u_n v_n = ll'$.

(iii) Nếu $\lim u_n = 0$ và (v_n) bị chặn (tức tồn tại $M > 0$ sao cho $|u_n| \leq M, \forall n$) thì $\lim u_n v_n = 0$.

(iv) Nếu $\lim u_n = l$, $\lim v_n = l' \neq 0$ và $v_n \neq 0$ từ một chỉ số nào đó trở đi thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{l}{l'}$.

(v) Nếu $u_n \leq w_n \leq v_n$ từ một chỉ số nào đó trở đi và $\lim u_n = \lim v_n$ thì $\lim w_n = \lim u_n$.

2 Một số phương pháp tìm giới hạn dãy số

2.1 Dùng tính đơn điệu của dãy số

Một dãy số được gọi là tăng (giảm) nếu $u_{n+} \geq u_n (u_{n+1} \leq u_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Một dãy số được gọi là bị chặn trên (dưới) nếu tồn tại $M > 0$ sao cho $u_n \leq M (-u_n < M)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Nếu (u_n) tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) thì tồn tại l sao cho $\lim u_n = l$. Ở đây ta cần chú ý $|l| \leq M$.

Đầu tiên ta đi vào một ví dụ khá đơn giản.

$\boxed{1}$ Cho dãy số

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}.$$

Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Giải. Bằng việc sử dụng máy tính bỏ túi ta dự đoán được a_n là dãy giảm. Ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3} < 1.$$

Do đó (a_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0. Gọi l là giới hạn của (a_n). Mặt khác ta có $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}a_n$, vì thế $\lim a_{n+1} = \lim \frac{n+1}{2n+3}a_n$ hay ta có phương trình

$$l = \frac{1}{2}l$$

$$\Leftrightarrow l = 0.$$

□

$\boxed{1}$ Cho dãy số

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \sin x_n \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm $\lim x_n$.

Giải. Trước tiên ta sẽ chứng minh dãy bị chặn: $x_n \in (0;1)$ với mọi $n \geq 1$. Thật vậy, ta có $x_1 = \sin 1 \in (0;1)$ và nếu $x_n \in (0;1)$ thì $x_{n+1} = \sin x_n \in (0;1)$. Ngoài ra ta có

$$x_{n+1} = \sin x_n < x_n$$

(sử dụng bất đẳng thức $\sin x < x$ với mọi $x > 0$).

Vậy dãy x_n là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại $\lim x_n = l \in [0;1]$. Từ đây ta có

$$l = \sin l.$$

Phương trình này có nghiệm là $l = 0$. □

Nhận xét: Trong bài này ta thấy trước tiên ta phải chứng minh dãy bị chặn, từ tính bị chặn ta mới đi đến tính đơn điệu của dãy số. Cần lưu ý chúng ta nên chứng minh bị chặn càng chặt càng tốt. Các ví dụ sau sẽ cho ta thấy rõ việc khó khăn trong chứng minh tính bị chặn của dãy số.

$\boxed{2}$ Cho dãy số

$$a_n = \sqrt{2012 + \sqrt{2012 + \cdots + \sqrt{2012}}} (\text{ } n \text{ lần căn}).$$

Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Giải. Ta dễ dàng nhận thấy $a_{n+1} = \sqrt{2012 + a_n}$ và $a_n > 0$ với mọi n. Khi đó

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2012 + a_n} - a_n = \frac{2012}{\sqrt{2012 + a_n} + a_n} > 0.$$

Đến đây muốn chứng minh dãy số hội tụ ta cần chứng minh a_n bị chặn trên. Nhưng việc ta tìm được số M trong bài này là tương đối khó. Ta sẽ giả sử a_n hội tụ về l, khi đó ta có $l = \sqrt{2012 + l}$. Giải phương trình ta tìm được $l = \frac{1 + \sqrt{8049}}{2}$. Đến đây ta sẽ chứng minh $a_n < \frac{1 + \sqrt{8049}}{2}$ với mọi n.

Thật vậy, $a_1 = \sqrt{2012} < \dfrac{1+\sqrt{8049}}{2}$ và nếu $a_n < \dfrac{1+\sqrt{8049}}{2}$ thì

$$a_{n+1} = \sqrt{2012 + a_n} < \sqrt{2012 + \frac{1+\sqrt{8049}}{2}} = \frac{1+\sqrt{8049}}{2}.$$

Vậy (a_n) bị chặn trên bởi $\dfrac{1+\sqrt{8049}}{2}$ và $\lim a_n = \dfrac{1+\sqrt{8049}}{2}$. □

Nhận xét: Ta thấy trong ví dụ này chúng ta đã đi tìm giới hạn trước rồi chứng minh giới hạn đó cũng là cận trên.

$\boxed{1}$ Cho $\alpha > 2$ và dãy số

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ 2x_{n+1} = \sqrt{3x_n^2 + 1 + \dfrac{3}{n}} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Giải. Ta dễ dàng chứng minh $\alpha \geq x_n > 1$ với mọi n bằng qui nạp. Ta có

$$4x_{n+1}^2 = 3x_n^2 + 1 + \frac{3}{n}$$

$$\Leftrightarrow 4(x_{n+1}^2 - x_n^2) = -x_n^2 + 1 + \frac{3}{n} \leq -\alpha^2 + 1 + \frac{3}{n} < -3 + \frac{3}{n} \leq 0$$

.

Ta nhận thấy (x_n) là dãy giảm. Vậy khi đó tồn tại $l \geq 1$ sao cho $\lim x_n = l$ hay

$$\lim 2x_{n+1} = \lim \sqrt{3x_n^2 + 1 + \frac{3}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 2l = \sqrt{3l^2 + 1}$$

Giải phương trình này ta nhận được $l = 1$. □

Nhận xét: Trong cách làm này có lẽ câu hỏi được ra là tại sao lại ước lượng được $\alpha \geq x_n$. Để đạt được điều này, chúng ta có thể cho $\alpha = 3, 4, \ldots$, sau đó chúng ta sử dụng máy tính bỏ túi tính toán các số hạng trong mỗi trường hợp rồi đưa đến nhận xét đó.

Một số bài tập đề nghị.

1. Cho dãy số

$$\begin{cases} u_1 = 2012 \\ u_{n-1} = n^2(u_{n-1} - u_n) \end{cases}$$

Chứng minh dãy số có giới hạn và tìm giới hạn.

2. Cho $a, b > 0$ và dãy

$$\begin{cases} u_1 \in (0; b) \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{ab^2 + a_n^2}{a+1}} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm $\lim u_n$.

3. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện
$$\begin{cases} a_n \in (0;1) \\ a_n(1-a_n) > \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad n \geq 1.$$
Chứng minh dãy số có giới hạn và tìm giới hạn đó.

4. Cho $a > 0$, xét dãy số sau
$$\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{au_n}{\sqrt{a^2+u_n^2}} \end{cases} \quad n \geq 1.$$
Tìm số hạng u_{2012} và giới hạn của dãy.

5. Cho (u_n) là dãy số dương và đặt
$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$
Giả sử ta có
$$u_{n+1} \leq \frac{1}{S_{n+1}}\left((S_n - 1)u_n + u_{n-1}\right).$$
Tìm $\lim u_n$.

6. Cho $c \leq 1$ và dãy số
$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{c}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(c + a_n^2) \end{cases} \quad n \geq 1.$$
Chứng minh dãy số có giới hạn.

7. Cho dãy số
$$a_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)\,a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}}\right), n \geq 1.$$
trong đó $p \in \mathbb{N}^*, a \geq 0, a_1 > 0$. Chứng minh dãy số có giới hạn.

8. Cho dãy số
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = \dfrac{x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1}}{n(n^2-1)} \end{cases} \quad n \geq 2.$$
Tìm $\lim u_n$ với $u_n = (n+1)^3 x_n$.

HD: $(n+2)^3 x_{n+1} = \dfrac{n^2(n+2)^2}{(n+1)^4}(n+1)^3 x_n \Leftrightarrow u_{n+1} = \dfrac{n^2(n+2)^2}{(n+1)^4} u_n$.

9. Cho dãy (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n(u_n^2+12)}{3u_n^2+4} \end{cases} \quad n \geq 0.$$
Tìm giới hạn của dãy số trên.

HD: Đặt $f(x) = \dfrac{x(x^2+12)}{3x^2+4}$. Sử dụng tính đơn điệu của hàm f để suy ra tính đơn điệu của dãy số.

2.2 Dùng hàm co hoặc khảo sát độ chênh lệch

Dãy số (u_n) được xác định

$$\begin{cases} u_1 \in [a;b] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

trong đó $|f'(x)| \le q < 1$ với mọi $x \in (a;b)$. Trong phương pháp này thường dùng định lý Largrange: Nếu f là hàm số liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$ thì khi đó tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

$\boxed{1}$ Cho dãy số

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(1+u_n^2) - 2012 \quad n \ge 1. \end{cases}$$

Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Giải. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - 2012, x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$|f'(x)| = |\frac{x}{1+x^2}| \le \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất x_0 hay $f(x_0) = x_0$. Do đó

$$|u_{n+1} - x_0| = |f(u_n) - f(x_0)|.$$

Áp dụng định lý Largrange, khi đó tồn tại c nằm giữa u_n và x_0 sao cho

$$|f(u_n) - f(x_0)| = |f'(c)||u_n - x_0| \le \frac{1}{2}|u_n - x_0| \le \cdots \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - x_0|$$

Từ đây ta có $\lim|u_{n+1} - x_0| \le \lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_1 - x_0| = 0$. Vậy $\lim|u_{n+1} - x_0| = 0$ hay $\lim u_n = x_0$. □

Nhận xét: Trong ví dụ trên chúng ta thấy rõ việc dùng định lý Largrange và hàm co đã giúp chũng ta đánh giá được độ lệch $|u_n - l|$. Trong nhiều trường hợp chúng ta có thể đánh giá ngay mà không cần dùng đến việc sử dụng hàm co và định lý Largrange.

$\boxed{1}$ Cho dãy số

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 3}{2(u_n+1)} \quad \forall n \ge 1 \end{cases}.$$

Tìm giới hạn của dãy số.

Giải. Rõ ràng $u_n > 0$ với mọi n. Nếu (u_n) có giới hạn là l thì ta có

$$l = \frac{l^2+3}{2(l+1)}$$

$$\Leftrightarrow l = 1.$$

Khi đó ta xét

$$|u_{n+1} - 1| \le \frac{(u_n-1)^2}{2(u_n+1)} = \frac{|u_n - 1|}{2(u_n+1)}|u_n - 1|,$$

mà ta có bất đẳng thức $\dfrac{|x-1|}{2(x+1)} \le \dfrac{1}{2}, \forall x \ge 0$. Do đó

$$|u_{n+1}-1| \le \frac{1}{2}|u_n-1| \le \cdots \le \frac{1}{2^n}|u_1-1|.$$

Vậy $\lim |u_{n+1}-1| = 0$ hay $\lim u_n = 1$. □

Nhận xét: Qua ví dụ này và so sánh với 2 ví dụ trên, ta thấy rõ muốn dử dụng được hàm co ta phải tìm được $[a;b]$ càng chặt càng tốt sao cho $u_n \in [a;b]$ và f là hàm co.

Một số bài tập đề nghị.

1. Cho dãy số
$$\begin{cases} u_1 = 2012 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}\cos 2u_n - \pi, \quad n \ge 1. \end{cases}$$
Tìm giới hạn của dãy số.

2. cho dãy số được xác định như sau
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ x_{n+1}(x_n+2) = 3 \quad n \ge 1. \end{cases}$$
   (a) Tìm công thức tổng quát của dãy số.
   (b) Tìm giới hạn của dãy số.

3. Tìm giới hạn của dãy số
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2(2u_n+3)}{u_n+3} \quad n \ge 1. \end{cases}$$

2.3 Dùng đặt dãy phụ

Trong phương pháp này ta sẽ vay mượn giới hạn của một dãy số khác để tìm giới hạn thông qua cách đặt dãy phụ.

$\boxed{1}$ Cho dãy số
$$\begin{cases} x_1, x_2 \in (0;1) \\ 3x_{n+2} = 2^{x_{n+1}} + x_n \end{cases} \quad \forall n \ge 1.$$
Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Giải. Đặt
$$\begin{cases} v_1 = \max\{x_1, x_2\} \\ v_{n+1} = \dfrac{2^{v_n}+v_n}{3}, n = 1, 2, \ldots \end{cases}.$$

Trước tiên ta sẽ tìm dãy giới hạn của dãy (v_n). Bằng qui nạp chúng ta chứng minh được $v_n \in (0;1)$ với mọi n. Ta có bất đẳng thức sau

$$2^x \ge 2x, \forall x \in (0,1).$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta chứng minh được $v_{n+1} \leq v_n$. Khi đó tồn tại giới hạn $\lim v_n = L, L \in [0;1]$. Bằng cách chuyển qua giới hạn ta có phương trình $L = \dfrac{2^L + L}{3}$. Giải phương trình này ta được $L = 0$. Sau đây chúng ta sẽ chứng minh $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cũng có giới hạn là 0. Ta có $v_1 \geq x_1, x_2$, giả sử $v_n \geq u_{2n}, u_{2n+1}$. Khi đó

$$x_{2(n+1)} = x_{2n+2} = \frac{2^{x_{2n+1}} + x_{2n}}{3} \leq \frac{2^{v_n} + v_n}{3} = v_{n+1}$$

và

$$\begin{aligned} x_{2(n+1)+1} = x_{2n+3} &= \frac{2^{x_{2n+2}} + x_{2n+1}}{3} \\ &\leq \frac{2^{v_{n+1}+v_n}}{3} \\ &\leq \frac{2^{v_n} + v_n}{3} = v_{n+1}. \end{aligned}$$

Vậy $0 < x_{2n}, x_{2n+1} \leq v_n$, chuyển qua giới hạn ta $\lim x_n = 0$. □

Nhận xét: Trong dạng $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ này, ta cần chú ý cách đặt v_1. Việc chọn max hay min sẽ phụ thuộc v_n hội tụ về cận trên hay cận dưới nhằm sử dụng định lí kẹp. Tiếp theo tôi sẽ trình bày việc đặt dãy phụ bằng cách nhân một lượng $f(n)$ thích hợp.

$\boxed{1}$ Cho dãy số

$$\begin{cases} u_1 = b > 0 \\ (n+2)^2 u_{n+1} = n^2 u_n - n - 1 \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Giải. Nhân hai vế cho $(n+1)^2$, ta được

$$(n+2)^2(n+1)^2 u_{n+1} = (n+1)^2 n^2 u_n - (n+1)^3.$$

Đặt $v_n = (n+1)^2 n^2 u_n$. Khi đó ta được

$$v_{n+1} = v_n - (n+1)^3.$$

Khi đó

$$v_{n+1} = v_1 - \left[2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3\right] = 8b - \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} + 1.$$

Vậy $\lim u_n = \lim \dfrac{8b - \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} + 1}{(n+1)^2 n^2} = -\dfrac{1}{4}$. □

Sau đây là một số bài tập tự rèn luyện.

1. Cho dãy số

$$\begin{cases} x_1, x_2 \in (0;1) \\ x_{n+2} = \dfrac{1}{3} x_{n+1}^2 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x_n}. \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy số trên.

2. Cho dãy số

$$\begin{cases} x_1, x_2 \in (0;1) \\ x_{n+2} = \dfrac{1}{2012} . x_{n+1}^4 + \dfrac{2009}{2010} . \sqrt[4]{x_n} \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy số trên.

3. Cho dãy
$$\begin{cases} x_1, x_2 \in (0;1) \\ 3x_{n+2} = 2^{a_{n+1}} + a_n \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$$
Chứng minh dãy số có giới hạn và tìm giới hạn.

4. Cho dãy
$$\begin{cases} x_1, x_2 > 1 \\ x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} - 1} + \sqrt{x_n + 4}; n = 1; 2; ... \end{cases}.$$
Chứng minh dãy số có giới hạn và tìm giới hạn.

5. Cho dãy số
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2012} + (-1)^n \quad n \geq 1. \end{cases}$$
Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

6. Cho $k > l > 0$. Dãy (u_n) bị chặn và thỏa mãn
$$u_{n+2} \leq \frac{k-l}{k} u_{n+1} + \frac{l}{k} u_n.$$
Chứng minh dãy số trên hội tụ.

7. Cho dãy số
$$S_n = \frac{n+1}{2012^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2012^k}{k}.$$
Tìm giới hạn của dãy số.

8. Tìm giới hạn của dãy số
$$\begin{cases} u_0, u_1 > 0 \\ u_{n+2} = \left(u_n^4 u_{n+1}\right)^{\frac{1}{5}} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

9. Cho các số thực dương a, a_0 thỏa $0 < a_0 < \dfrac{2}{a}$. Xét dãy số được xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = a_0 \\ u_{n+1} = u_n(2 - au_n) \quad n \geq 1. \end{cases}$$
Tìm giới hạn của dãy trên.

10. Cho $d > 0$. Hãy tìm u_1 sap cho dãy số sau có giới hạn
$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + d}{2u_n}.$$

2.4 Dùng giới hạn hàm số

Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ và $u_n = f(n)$ thì $\lim u_n = l$. Khi tính giới hạn hàm số, chúng ta có thể sử dụng qui tắc L'Hôpital. Đó là điều mà trong giới hạn dãy ta không làm được.

$\boxed{1}$ Tính giới hạn:

(i) $\lim n(\sqrt[n]{a} - 1)$, $(a > 0)$

(ii) $\lim \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$, $(\alpha > 0)$

Giải.

(i) Theo qui tắc L'Hôpital ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt[x]{a} - 1) = \lim_{t\to0^+} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t\to0^+} \frac{a^t \ln a}{1} = \ln a.$$

Vậy $\lim n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$.

(ii) Tương tự ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t^{\frac{1}{\alpha}}}{t} = \frac{1}{\alpha} \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = \frac{1}{\alpha} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

□

2.5 Dùng định lý Cesaro và định lí Stolz

Cho dãy số (u_n), nếu $\lim(u_{n+1} - u_n) = l$ thì $\lim \dfrac{u_n}{n} = l$.

$\boxed{1}$ Cho dãy số

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n - x_n^2 \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm $\lim nx_n$.

Giải. Sử dụng phương pháp đơn điệu chúng ta chứng minh được $\lim x_n = 0$. Mà ta có

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}x_n} = \frac{x_n^2}{(x_n - x_n^2)x_n} = \frac{1}{1 - x_n} \to 1.$$

Theo định lý Cesaro ta có

$$\lim \frac{1}{nx_n} = \lim \frac{\frac{1}{x_n}}{n} = \lim\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) = 1.$$

Vậy $\lim nx_n = 1$. □

$\boxed{1}$ Cho dãy số

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \sin x_n \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm $\lim(\sqrt{n}x_n)$.

Giải. Trong phương pháp đơn điệu chúng ta đã chứng minh được rằng $\lim x_n = 0$. Thay vì tìm $\lim(\sqrt{n}x_n)$, chúng ta sẽ tìm $\lim \dfrac{1}{nx_n^2}$. Do đó ta xét hiệu sau

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - \sin^2 x_n}{x_n^2 \sin^2 x_n}.$$

Sử dụng qui tắc L'Hôpital ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \dfrac{1}{3}$. Vậy

$$\lim \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{3}.$$

Sử dụng định lý Cesaro ta có $\lim \dfrac{1}{nx_n^2} = \dfrac{1}{3}$. Từ đây ta suy ra $\lim(\sqrt{n}x_n) = \sqrt{3}$. □

Nhận xét: Trong ví dụ trên thay vì tính $\lim nx_n, \lim(\sqrt{n}x_n)$ chúng ta ta đã chuyển qua tính $\lim \dfrac{1}{nx_n}, \lim \dfrac{1}{nx_n^2}$ (điều này xuất phát từ định lý Cesaro).Từ đây ta có kết luận để tìm lim của $n^\alpha x_n^\beta$ ta có thể chuyển qua tính $\lim \dfrac{x_n^{-\frac{\beta}{\alpha}}}{n}$ và sử dụng định lí Cesaro. Nhưng từ điều này ta lại thấy phải nâng mũ của x_n. Điều này trong một số bài toán sẽ gặp không ít khó khăn, để khắc phục điều này sau đây tôi xin giới thiệu định lí Stolz: *Cho (v_n) và (u_n) là hai dãy thỏa mãn: (v_n) tăng thật sự đến $+\infty$ và*

$$\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = l$$

thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = l$.

$\boxed{1}$ Cho dãy số thỏa

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Tìm $\lim \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.

Giải. Ta chọn $u_n = S_n$ và $v_n = \sqrt{n}$. Khi đó ta có

$$\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = 2.$$

Vậy theo định lí Stolz ta có $\lim \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$. □

Bài tập đề nghị.

1. Cho dãy số

$$\begin{cases} u_0 = 2012 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Tìm giới hạn của $\lim \dfrac{u_n^3}{n}$.

2. Đặt
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cos \frac{\pi}{k}$$
Tính giới hạn $\lim \dfrac{S_n}{n^2}$.

3. Cho $a > 0$ và dãy số
$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} \quad n \geq 1. \end{cases}$$
Đặt $y_n = \dfrac{u_n}{n}$. Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn và tìm giới hạn.

4. Cho dãy số
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \quad n \geq 1. \end{cases}$$
Chứng minh $\lim \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.

2.6 Dùng phương pháp lượng giác hóa

Trong phương pháp này chủ yếu chúng ta đi tìm công thức tổng quát cho dãy số bằng cách lượng giác hóa.

$\boxed{1}$ Cho dãy số thỏa
$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} \text{ (}n\text{ lần dấu căn).}$$
Tìm giới hạn của dãy số.

Giải. Thoạt nhìn ta thấy bài toán này giống bài toán đã giải ở phần dùng tính đơn điệu. Vậy ở bài này có gì khác? Ta viết lại dãy số
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad n \geq 1. \end{cases}$$
Chính việc nhìn thấy $u_1 = \sqrt{2}$ đã giúp ta liên tưởng đến việc lượng giác hóa. Thật vậy, $u_1 = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{4}$ và
$$u_2 = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{8}} = 2\cos\frac{\pi}{8}.$$
Từ đây ta dự đoán được công thức tổng quát cho $u_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. Điều này dễ dàng được chứng minh bằng qui nạp. Do đó $\lim u_n = 2$. □

$\boxed{5}$ Cho dãy

$$(a_n):\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2} \\ a_{n+1}=\left(\dfrac{1-(1-a_n^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \forall n\geq 1.$$

Tìm $\lim a_n$. Chứng minh $a_1+a_2+\cdots+a_{2012}<1.03$.

Giải. Ta có

$$\begin{cases} a_1=\frac{1}{2} \\ a_{n+1}=\left(\dfrac{1-(1-a_n^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \forall n\geq 1.$$

Sau khi biến đổi ta được

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{1-a_{n+1}^2}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{1-a_n^2}+1}{2}} \end{cases} \qquad \forall n\geq 1.$$

Ta thấy $\sqrt{1-a_1^2}=\cos\dfrac{\pi}{6}$ và ta chứng minh được $\sqrt{1-a_n^2}=\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}$. Vậy $a_n=\sin\dfrac{\pi}{3.2^n}$ hay $\lim a_n=0$.

Ta có $\sin\dfrac{\pi}{3.2^n}<\dfrac{\pi}{3.2^n}$, suy ra

$$\Sigma a_i<\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Dễ dàng ta chứng minh được $\dfrac{\pi}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^{2012}}\right)<1.03$ □

Một số bài tập đề nghị.

1. Cho $a\in(0;1)$ và dãy số

$$\begin{cases} x_1=a \\ x_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+x_n}{2}} \end{cases} \quad n\geq 1.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n\sqrt{1-x_n^2}\right)$.

2. Cho dãy số

$$\begin{cases} u_1=\sqrt{3} \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+\sqrt{2}-1}{1+\left(1-\sqrt{2}\right)u_n} \end{cases} \quad n\geq 1.$$

Tìm u_{2012}.

3. Cho hai dãy số

$$\begin{cases} x_1=y_1=\sqrt{3} \\ x_{n+1}=x_n\sqrt{1+x_n^2} \\ y_{n+1}=\dfrac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}. \end{cases}$$

Tìm $\lim y_n$.

2.7 Dạng tìm giới hạn của dãy $y_n = \Sigma f(u_i)$

Để tìm được giới hạn của dãy y_n này ta thường biến đổi $f(u_i) = g(u_{i-1}) - g(u_i)$.

$\boxed{9}$ Cho dãy số

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n^2}{2012} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Tính $\lim(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \cdots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}})$.

Giải. Trước tiên ta thấy $u_n > 1$ với mọi n. Ta có

$$\begin{aligned} & u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2012} \\ \Leftrightarrow & \frac{2012}{u_n} = \frac{2012}{u_{n+1}} + \frac{u_n}{u_{n+1}} \\ \Leftrightarrow & \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2012}{u_n} - \frac{2012}{u_{n+1}}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & \frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{2012}{u_{n-1}} - \frac{2012}{u_n} \\ & \ldots\ldots \\ & \frac{u_1}{u_2} = \frac{2012}{u_1} - \frac{2012}{u_2}. \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế ta được

$$\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2012}{u_1} - \frac{2012}{u_{n+1}}.$$

Trở lại với dãy (u_n). Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2}{2012} > 0$, nên dãy (u_n) là dãy tăng. Nếu (u_n) bị chặn trên thì khi đó tồn tại $l \geq 1$ sao cho $\lim u_n = l$. Do đó $l = l + \dfrac{l^2}{2012}$, suy ra $l = 0$. Mâu thuẫn với $l \geq 1$. Vậy dãy (u_n) không bị chặn trên hay $\lim u_n = +\infty$. Vì thế

$$\lim(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_n}{u_{n+1}}) = \lim \frac{2012}{u_1} - \frac{2012}{u_{n+1}} = 2012.$$

$\square$

Nhận xét: Từ đây ta thấy việc biến đổi $f(u_i) = g(u_{i-1}) - g(u_i)$ làm cho việc tìm $\Sigma f(u_i)$ trở nên đơn giản hơn.

$\boxed{9}$ Cho dãy số

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4u_{n-1}} + u_{n-1}}{2} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh dãy (y_n) với $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k^2}$ có giới hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

Giải. Ta dễ dàng thấy $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\sqrt{u_n^2 + 4u_n} - u_n}{2} > 0$ vì $u_n > 0$ với mọi n. Do đó $u_n \geq \dfrac{1}{2}$. Giả sử (u_n) bị chặn trên, hay tồn tại l sao cho $\lim u_n = l$. Từ đây ta có

$$l = \frac{\sqrt{l^2 + 4l} + l}{2}.$$

Phương trình này vô nghiệm vì $l \geq \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim u_n = +\infty$.

Sau khi bình phương và rút gọn ta có

$$x_{n+1}^2 - x_{n+1}x_n = x_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_{n+1}^2}.$$

Tương tự như trên ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n} = 6 - \frac{1}{u_n}.$$

Vậy $\lim y_n = 6$. □

Nhận xét: Ta thấy trong phương pháp này ngoài việc biến đổi $f(u_i) = g(u_{i-1} - g(u_i))$ thì chúng ta còn chứng minh dãy (u_n) tăng đến $+\infty$.

Một số bài tập đề nghị.

1. Cho dãy số
$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = 3u_n^2 + u_n \quad n \geq 1. \end{cases}$$
Tìm $\lim(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \cdots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}})$.

2. Cho dãy số thỏa
$$\begin{cases} u_1 = 2012 \\ u_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + (1-n)x_n + n^2 + n + 1}{n+1} \quad n \geq 1. \end{cases}$$
Đặt $y_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k + 1}$. Chứng minh dãy số (y_n) có giới hạn và tìm giới hạn này.

3. Cho dãy số
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+5)(x_n^2 + 5x_n + 8) + 16} \quad n \geq 1. \end{cases}$$
Đặt $y_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k + 3}$. Chứng minh dãy số (y_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

3 Một số dạng toán tổng hợp

3.1 Các bài toán liên quan đến dãy tuyến tính cấp 2

Mở đầu cho mục này là một ví dụ khá đơn giản.

$\boxed{9}$ Cho dãy số

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 3 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 - 4}{x_{n-1}} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm công thức tổng quát của dãy số.

Giải. Giả sử $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ với mọi n. Sử dụng máy tính bỏ túi ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 5 \\ x_4 = 7. \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a + b = 5 \\ 5a + 3b = 7. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $a = 2$ và $b = -1$. Ta dễ dàng chứng minh được bằng qui nạp $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$. Giải phương trình sai phân tuyến tính này ta được $x_n = 2n + 1$. □

Nhận xét: Trong trường hợp này dãy chưa có dạng sai phân tuyến tính nên ta đã tuyến tính hóa cấp 2 dãy. Việc tuyến tính hóa sẽ có nhiều lợi ích trong việc khảo sát dãy số. Sau khi tuyến tính hóa được dãy ta dễ dàng tìm được công thức tổng quát cho dãy.

$\boxed{9}$ Cho dãy số

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 5 \\ a_{n+2} = 98a_{n+1} - a_n \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Chứng minh $\dfrac{a_n + 1}{6}$ là số chính phương.

Giải. Trước tiên ta cần phân tích yêu cầu bài toán. Để $\dfrac{a_n + 1}{6}$ là số chính phương thì tồn tại $A(n) \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n = 6A^2(n) - 1$. Thay vào định nghĩa của (a_n) ta có

$$\begin{cases} A(0) = A(1) = 1 \\ A^2(n+2) = 98A^2(n+1) - A^2(n) - 16. \end{cases}$$

Để thấy rõ hơn dãy $A(n)$, ta cần tuyến tính hóa nó. Sau khi tuyến tính hóa ta được

$$\begin{cases} A(0) = A(1) = 1 \\ A(n+2) = 10A(n+1) - A(n) \end{cases}$$

Ta thấy rõ ràng tồn tại dãy số trên và dãy $A(n)$ là dãy số nguyên. Vậy ta lấy

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

và chỉ cần chứng minh $a_n = 6u_n^2 - 1$. □

Nhận xét: Từ ví dụ trên ta có phương trình đặc trưng của dãy $u_{n+2} = au_{n+1} \pm u_n$ là $X^2 - aX \pm 1 = 0$. Nếu phương trình đặc có 2 nghiệm thì tích của hai nghiệm đó ± 1. Để thấy rõ hơn việc sử dụng tích của hai nghiệm này chúng ta đi đến ví dụ sau.

$\boxed{1}$ Cho $a \geq 2$ và x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - ax + 1 = 0$. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n, n = 1, 2, \ldots$

1. Chứng minh dãy $\{\dfrac{S_n}{S_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy giảm.

2. Tìm tất cả giá trị a sao cho

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_3} + \cdots + \frac{S_n}{S_{n+1}} > n - 1$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Giải. Có $S_n = x_1^n + x_2^n$, trong đó $x_1 \leq x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - ax + 1 = 0$ với $(a \geq 2)$. Từ đây ta thấy

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \leq 1 \leq x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Trước tiên ta sẽ chứng minh

$$\begin{cases} S_1 = a \\ S_2 = a^2 - 2 \\ S_{n+2} = aS_{n+1} - S_n \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh bằng qui nạp. Ta có

$$\begin{aligned} aS_{n+1} - S_n &= a(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) - (x_1^n + x_2^n) \\ &= x_1^n(ax_1 - 1) + x_2^n(ax_2 - 1) \\ &= x_1^{n+2} + x_2^{n+2}. \end{aligned}$$

Ta nhận thấy $S_n > 0$ nên đặt $u_n = \dfrac{S_{n+1}}{S_n}$, khi đó ta có

$$u_{n+1} = a - \frac{1}{u_n}.$$

Do đó $u_{n+1} - u_n = a - u_n - \dfrac{1}{u_n} = -\dfrac{u_n^2 - au_n + 1}{u_n}$. Ta có $u_n = \dfrac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1}}{x_1^n + x_2^n}$ nên $x_1 \leq u_n \leq x_2$. Kéo theo $u_n^2 - au_n + 1 \leq 0$. Vì thế $u_{n+1} - u_n \geq 0$ hay $\{u_n\}$ là dãy tăng, điều này kéo theo $\{\dfrac{S_n}{S_{n+1}}\}$ là dãy giảm. Gọi $v_n = \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$. Ta nhận thấy vì $u_n \to x_2$ nên $v_n \to x_1$. Xét $a = 2$ thì

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = n > n - 1.$$

Xét $a > 2$: khi đó ta giả sử tồn tại a thỏa yêu cầu bài toán

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n > n - 1$$

với mọi $n = 1, 2, ...$ Chia hai vế cho n ta được

$$\frac{v_1 + v_2 + ... + v_n}{n} > 1 - \frac{1}{n}.$$

Cho $n \to \infty$ ta được $x_1 = \lim \frac{v_1 + v_2 + ... + v_n}{n} > 1$. Điều này mâu thuẫn với $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < 1$. □

Bài tập đề nghị.

1. Cho dãy
$$(a_n) : \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{15a_n^2 - 60} \end{cases} \qquad \forall n \geq 1.$$
Tìm công thức tổng quát và chứng minh $\frac{1}{5}(a_{2n+1} + 8)$ có thể biểu diễn thành tổng bình phương của 3 số nguyên liên tiếp.

2. Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sao cho
$$f(f(x)) + f(x) = 2012.2013x, \forall x \in \mathbb{R}_+.$$
HD: Với mỗi $x \in \mathbb{R}_+$, ta đặt
$$\begin{cases} u_0 = x, u_1 = f(x) \\ u_{n+1} = f(u_n) \qquad n \geq 1. \end{cases}$$
Tìm được công thức tổng quát cho dãy trên và biện luận ta được $u_n = A.2012^n$.

3. Cho $a, b > 0$. Tìm tất cả hàm $f : (0; +\infty) \longrightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn
$$f(f(x)) + af(x) = b(a + b)x, \forall x > 0.$$

3.2 Dạng hệ dãy

$\boxed{2}$ Cho hai dãy số

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ b_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n. \end{cases}$$

Tìm công thức tổng quát cho a_n, b_n. Từ đó tính giới hạn của (c_n) trong đó $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \sqrt{2}b_{n+1} &= (1 + \sqrt{2})a_n + (2 + \sqrt{2})b_n \\ &= (1 + \sqrt{2})(a_n + \sqrt{2}b_n). \end{aligned}$$

Khi đó $a_{n+1} + \sqrt{2}b_{n+1} = (1 + \sqrt{2})^n(a_1 + \sqrt{2}b_1) = (1 + \sqrt{2})^{n+2}$. Tương tự ta có $a_{n+1} - \sqrt{2}b_{n+1} = (1 - \sqrt{2})^{n+2}$. Kết hợp với trên ta có

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{(1 + \sqrt{2})^{n+2} + (1 - \sqrt{2})^{n+2}}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{(1 + \sqrt{2})^{n+2} - (1 - \sqrt{2})^{n+2}}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Từ đây ta có $\lim c_n = \sqrt{2}$. □

Nhận xét: Trong cách giải này có lẽ câu hỏi được đặt ra là làm sao biết nhân $\sqrt{2}$ cho b_{n+1} rồi cộng vế cho vế. Để trả lời cho câu hỏi này ta sẽ xem sau khi cộng vế với vế ta được dãy truy hồi. Vậy ban đầu ta chỉ cần giả sử tồn tại k sao cho $a_{n+1} + kb_{n+1} = (1+k)a_n + (2+k)b_n$ và thỏa

$$\frac{1}{k} = \frac{1+k}{2+k}.$$

Ngoài ra ta thấy

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n}$$
$$\Leftrightarrow c_{n+1} = \frac{c_n + 2}{c_n + 1}.$$

Đến đây ta có thể sử dụng phương pháp hàm co để tìm $\lim c_n$.

Một số bài tập kiến nghị.

1. Cho hãi dãy số thỏa

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ b_1 = -3 \\ a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 4a_n + 3b_n. \end{cases}$$

   Tìm những số tự nhiên n sao cho $\prod_{k=1}^{n} (b_k^2 + 9)$ là số chính phương.

2. Cho ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 \\ x_{n+1} = 4x_n - y_n - 5z_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n - 2z_n. \end{cases}$$

   Tìm $x_{2012}, y_{2012}, z_{2012}$.

3.3 Dạng toán khảo sát dãy

Đây có lẽ là dạng toán khó nhất khi làm việc với dãy. Vì nó đòi hỏi ngoài kĩ năng tìm giới hạn cho dãy còn phải biết khảo sát sự biến thiên của dãy phụ thuộc vào tham số.

$\boxed{2}$ Khảo sát sự hội tụ của dãy số

$$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8). \end{cases}$$

Giải. Đặt $f(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 8)$. Khi đó ta có $u_{n+1} = f(u_n)$. Rõ ràng là $u_n \geq 0$ với mọi n. Ngoài ra nếu dãy số có giới hạn l thì $l = \frac{1}{6}(l^2 + 8) \Leftrightarrow l = 2 \vee l = 4$. Ta có bảng biến thiên cho hàm f như sau

Ta thấy $f(x)$ tăng nên (u_n) là dãy đơn điệu, việc dãy (u_n) đơn điệu tăng hay giảm lại phụ thuộc vào hiệu $u_1 - u_0$. Khi đó

$$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = \frac{1}{6}(u_0 - 2)(u_0 - 4).$$

Do đó ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $u_0 \in [0; 2]$ thì $u_1 > u_0$, kéo theo $u_2 = f(u_1) > f(u_0) = u_1$. Lí luận tương tự ta có dãy (u_n) là dãy tăng. Mặt khác $u_0 \in [0; 2]$. Từ bảng biến thiên ta có $u_n \in [0; 2]$. Vậy (u_n) bị chặn, kết hợp với trên ta có (u_n) hội tụ về l và ta tìm được $l = 2$.

Trường hợp 2: Nếu $u_0 \in (2; 4)$ thì $u_0 > u_1$, kéo theo $u_2 = f(u_1) < f(u_0) = u_1$. Lí luận tương tự ta có dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn là $l = 2$.

Trường hợp 3: Nếu $u_0 = 4$ thì $u_n = 4$ với mọi n. Vậy $\lim u_n = 4$.

Trường hợp 4: Nếu $u_0 > 4$ thì $u_1 > u_0$, kéo theo $u_2 = f(u_1) > f(u_0) = u_1$. Lí luận tương tự ta có (u_n) là dãy tăng. Giả sử $\lim u_n = l$ thì $l \geq u_n > 4$. Điều này mâu thuẫn vì $l = 2$ hoặc $l = 4$. Vậy $\lim u_n = +\infty$. □

Nhận xét:

$\boxed{2}$ Cho a bất kì, hãy khảo sát dãy (u_n) cho bởi

$$u_1 \in \mathbb{R}; u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2.$$

Giải. Ta có $u_{n+1} = (u_n - a)^2 + u + n \geq u_n$. Vậy (u_n) là dãy tăng. Đặt $f(x) = x^2 + (1-2a)x + a^2$, ta thấy $f(x)$ không đơn điệu.

Nếu (u_n) hội tụ về l thì $l = a$. Mặt khác ta có $f(x) = a \Leftrightarrow x = a \vee x = a - 1$ (*). Tù đây ta có bảng biến thiên của $f(x)$.

Trường hợp 1: Nếu $u_1 > a$ thì (u_n) là dãy tăng. Giả sử (u_n) hội tụ về l, khi đó $l \geq u_n > a$. Điều này mâu thuẫn với $(*)$. Vậy $\lim u_n = +\infty$.

Trường hợp 2: Nếu $a - 1 \leq u_1 \leq a$. Từ bảng biến thiên ta có $a - 1 \leq u_n \leq a$. □

Bài tập kiến nghị.

1. Cho $a > 0$ cố định, xét dãy (u_n) xác định như sau:

$$u_1 > 0; u_{n+1} = u_n \frac{u_n^2 + 3a}{3u_n^2 + a}.$$

Tìm các giá trị của u_1 sao cho dãy hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

2.