

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

MỘT SỐ ĐỀ DỰ TUYỂN
OLYMPIC TOÁN HỌC
SINH VIÊN TOÀN QUỐC

NĂM 2009

Chương 1

Các bài toán đề nghị

1.1 Môn: Đại số, Trường: Học viện Phòng không - Không quân

Câu I. (2,5 điểm) Ma trận $A \in M_n(K)$ được gọi là lũy linh bậc p nếu p là một số nguyên dương sao cho $A^{p-1} \neq [O]$ và $A^p = [O]$ (ma trận không).

a) Chứng minh rằng nếu A là ma trận lũy linh bậc p thì $E - A$ là ma trận khả nghịch. Hãy tìm ma trận nghịch đảo $(E - A)^{-1}$.

b) Áp dụng kết quả trên, hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}$$

Câu II. (3 điểm)

a) Cho các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ khác nhau và khác các giá trị $0, -1, -2, \dots, -n+1$. Hãy chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \\ \frac{1}{\lambda_1 + 1} & \frac{1}{\lambda_2 + 1} & \dots & \frac{1}{\lambda_n + 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{\lambda_1 + n - 1} & \frac{1}{\lambda_2 + n - 1} & \dots & \frac{1}{\lambda_n + n - 1} \end{vmatrix} \neq 0$$

b) Cho đa thức $P(x) = x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6$. Biết rằng phương trình $P(x) = 0$ có một nghiệm là $1 - i$. Hãy chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông

1.2. MÔN: GIẢI TÍCH, TRƯỜNG: HỌC VIỆN PHÒNG KHÔNG - KHÔNG QUÂN³

cấp n thoả mãn $P(A) = [O]$ (ma trận không), thì A không có giá trị riêng là số thực.

Câu III. (2,5 điểm) Cho bất phương trình

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} > 2009$$

Giả sử bất phương trình có các nghiệm là một số khoảng. Tính tổng độ dài các nghiệm trên trục số.

Câu IV. (2 điểm) Cho các đa thức với hệ số phức:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n; \\ Q(x) &= x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m \end{aligned}$$

Biết rằng $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ và tồn tại $k(k = 1, 2, \dots, m)$ sao cho $|b_k| > C_m^k \cdot 2010^k$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ sao cho $|a_i| > 2009$.

1.2 Môn: Giải tích, Trường: Học viện Phòng không - Không quân

Câu I. (2 điểm) Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} (e^{t^2} - 1) dt}{\int_0^x 2t^2 dt}.$$

Câu II. (1,5 điểm) Dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_1 = 3; 3(x_{n+1} - x_n) = \sqrt{16 + x_n^2} + \sqrt{16 + x_{n+1}^2} \quad \forall n \geq 1$. Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Câu III. (1,5 điểm) Cho hàm số $f(x)$ liên tục, đơn điệu tăng và thoả mãn điều kiện $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Gọi $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = bf(b) - af(a).$$

Câu IV. (2,5 điểm) Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực không âm và không đồng thời bằng 0.

a) Chứng minh rằng phương trình

$$x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \dots - a_{n-1}x - a_n = 0 \quad (1)$$

có đúng là một nghiệm dương duy nhất.

b) Giả sử R là nghiệm dương của phương trình (1) và

$$A = \sum_{j=1}^n a_j; \quad B = \sum_{j=1}^n ja_j.$$

Chứng minh rằng:

$$A^A \leq R^B.$$

Câu V. (2,5 điểm)

a) Tìm tất cả các hàm số $f : J \rightarrow J$ và thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} f(x) & \leq 4 + 2009x \\ f(x+y) & \leq f(x) + f(y) - 4 \end{cases} \quad \forall x, y \in J$$

b) Các hàm số $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục và thỏa mãn điều kiện:

$$f(g(x)) \equiv g(f(x)) \quad \forall x \in J$$

Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thực, thì phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng không có nghiệm thực.

1.3 Môn: Đại số, Trường: Đại học Thủy lợi

Câu I. Cho ma trận thực $A = (a_{ij})_{n \times n}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) n là số lẻ,
- ii) $a_{ii} = \lambda$,
- iii) $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i \neq j$.

Tìm điều kiện của λ để hệ phương trình

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

có nghiệm duy nhất.

Câu II. Gọi $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ là tất cả các căn bậc n ($n > 1$) của đơn vị. Ký hiệu $A = (a_{ij})_{m \times n}$ là ma trận có

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 + \epsilon_i & \text{khi } i = j \\ \epsilon_i & \text{khi } i \neq j. \end{cases}$$

Tìm ma trận nghịch đảo của A .

Câu III. Tìm tất cả các số thực a, b sao cho

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Câu IV. Cho A là ma trận thực có hạng bằng r . Chứng minh rằng các ma trận $A^T A$ và AA^T cũng có hạng bằng r .

1.4 Môn: Đại số, Trường: Học viện Quân y

Câu I. Cho hai đa thức $P(x) = (x-a)^{2n} + (x-3a)^{2n}$ và $Q(x) = (x-a)^2 \cdot (x-3a)^2$ với $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}^*$. Xác định đa thức dư trong phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$.

Câu II. Cho đa thức $P(x) = x^5 - x + 2 \in \mathbb{C}[x]$ có các nghiệm là x_i ($i = \overline{1, 5}$). Tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \sum_{i=1}^5 \frac{8x_i - 10}{(x_i^2 - 1)(x_i - 2)^2}$$

Câu III. Tìm tất cả các ma trận A vuông cấp n sao cho với mọi ma trận B vuông cấp n ta đều có $\det(A + 2009 \cdot B) = \det(A) + 2009 \cdot \det(B)$.

Câu IV. Cho $a \in \mathbb{R}^*$, chứng tỏ rằng ma trận A khả nghịch và tìm A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ \frac{1}{a} & 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

Câu V. Cho ma trận nguyên A vuông cấp n . Chứng minh rằng nếu với mọi $b \in \mathbb{Z}^n$ hệ phương trình $Ax = b$ đều có nghiệm nguyên thì $\det(A) = \pm 1$.

Câu VI. Cho $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Tìm các giá trị riêng của ma trận $A^T A$.

Câu I. Giải hệ phương trình

[illegible]

biết rằng $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ và $2^{2008}a_{ij} \in \mathbb{Z}$ $1 \leq i \neq j \leq n$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

$$A \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{bmatrix}.$$

Chứng minh rằng luôn tìm được n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n \in [2008, 2009]$ sao cho $\det(P_i(a_j))_n \neq 0$.

Câu I. (4 điểm) Giả sử a_0 là một số dương cho trước và $\{a_n\}$ là một dãy số thực được xác định bằng công thức truy hồi sau:

$$a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \right); \quad n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh $\{a_n\}$ là dãy số hội tụ và tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Câu II. (4 điểm) Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0, 2]$ và $f(0) = f(2)$. Chứng minh rằng tồn tại x_1, x_2 trong đoạn $[0, 2]$ sao cho $x_2 - x_1 = 1$ và $f(x_2) = f(x_1)$.

Câu III. (4 điểm) Cho hàm $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b - a \geq 4$, là hàm khả vi trên khoảng mở (a, b) . Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0).$$

Câu IV. (4 điểm) Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

Bài V. (4 điểm) Cho $f(x)$ là hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$ và $\int_a^b f^2(x) dx = 1$. Chứng minh rằng:

- a) $\int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}$.
 b) $\frac{1}{4} \leq \int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x) dx$.

1.7 Môn: Đại số , Trường: CDSP Bà Rịa - Vũng tàu

Câu I. (5 điểm) Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 & C_{n+2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử.

Câu II. (5 điểm) Cho

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Tính $f(A)$ biết $f(x) = 2009x^{2009} - 2008x^{2008} + \dots + x$.

Câu III. (5 điểm) Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và A, B là hai ma trận cấp n thỏa mãn $AB - BA = B$. Chứng minh rằng $AB^{2009} = B^{2009}(A + 2009E)$ trong đó E là ma trận đơn vị cấp n .

Câu IV. (5 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} XYX = I_2 \\ YXY = I_2 \end{cases}$$

trong đó X, Y là các ma trận vuông cấp 2 và I_2 là ma trận đơn vị cấp 2.

Câu V. (5 điểm) Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thoả mãn $E - AB$ khả nghịch. Chứng minh $E - BA$ khả nghịch.

Câu VI. (5 điểm) Cho $P(x)$ là một đa thức bậc $n \geq 1$ với hệ số thực và có n nghiệm thực. Chứng minh rằng: $(n-1)[P'(x)]^2 \geq nP(x)P''(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1.8 Môn: Giải tích , Trường: CĐSP Hà Nội

Câu I. Tìm giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1 + (\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{2}{n})^2} \cdots \frac{1}{1 + (\frac{n}{n})^2}}$$

Câu II. Tìm hàm f xác định với $x \neq 1$ sao cho thoả mãn phương trình

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 2009f(x) + \arctg \frac{x}{x-1}.$$

Câu III. Chứng minh

$$2009^{2008^{2009}} > 2008^{2009^{2008}}$$

Câu IV. Cho hàm f khả vi trên $[0, 1]$, $f'(0) = 1, f'(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c \in (0, 1)$, sao cho $f'(c) = c$.

Câu V. Tìm tất cả các hàm f liên tục trên \mathbf{R} thoả mãn điều kiện

$$f(x) = f(\sin x).$$

1.9 Môn: Đại số, Trường: ĐH Bà Rịa - Vũng tàu

Câu I. (6 điểm) Cho

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}, A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0, 1]$.

Câu IV. (5 điểm) Cho $f(x)$ khả vi liên tục 2 lần trên $[a, b]$ và trên đoạn này phương trình $f(x) = 0$ có nhiều hơn 2 nghiệm khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại $h \in [a, b]$ sao cho $f(h) + f''(h) = 2f'(h)$.

Câu V. (5 điểm) Liệu có tồn tại hàm $f(x)$ xác định trên $[0, 2]$ thoả mãn các điều kiện sau đây: $f(x)$ khả vi và liên tục trên $[0, 2]$, $f(0) = f(2) = 1$, $|f'(x)| \leq 1$, $\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq 1$.

Câu VI. (5 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \square^+ \rightarrow \square^+$ thoả mãn điều kiện

$$xf[xf(y)] = f[f(y)] \quad \forall x, y \in \square^+ \quad (1)$$

1.11 Môn: Giải tích , Trường: Đại học Hàng hải

Câu I. (2,5 điểm) Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bằng quy nạp

$$x_1 = 2009, x_2 = 2008, x_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_{n+1} + \frac{x_n}{n} \quad (\forall n \in N^*)$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Câu II. (2,5 điểm) Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên khoảng mở $(0, 1)$ thoả mãn:

i) $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$.

ii) Tồn tại số $k \in (0, 1)$ sao cho $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{\sqrt{1-k}}{2}$.

Chứng minh rằng tìm được 2 số x_1, x_2 phân biệt thuộc khoảng $(0, 1)$ sao cho:

$$f'(x_1)f'(x_2) = k.$$

Câu III. (2,5 điểm) Tính

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Câu IV. (2,5 điểm) Tồn tại hay không một hàm $f(x)$ liên tục trên \mathbf{R} thoả mãn

$$f(f(x)) = x^2 - 2 \quad (\forall x \in \mathbf{R}).$$

1.12 Môn: Giải tích , Trường: Đại học Nha trang**Câu I.** Cho dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn

$$x_n = \frac{1}{2010} \left(2009x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{2009}} \right); \quad n \geq 2, a > 0, x_1 > 0.$$

Chứng minh dãy số $\{x_n\}$ hội tụ và tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Câu II. Cho $f(x), g(x)$ dương và liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx} = 1.$$

Câu III. Cho $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \right] = \frac{f(1) - f(0)}{2}$$

Sử dụng kết quả trên, tính giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1^{2009} + 2^{2009} + \dots + n^{2009}}{n^{2010}} - \frac{1}{2010} \right].$$

Câu IV. Cho p, q là các số thực dương và $p + q = 1$, hãy tìm tất cả các hàm số $f : R \rightarrow R$ thoả mãn:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(px + qy); \quad x, y \in R; \quad x \neq y.$$

Câu V. Cho $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0, 1]$ và $f'(0) \neq 0$. Giả sử $\theta(x)$ thoả mãn

$$\int_0^x f(t)dt = f(\theta(x)).x, \quad \text{với } x \in (0, 1].$$

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\theta(x)}{x}$.

a) Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Giả sử $f(0) = -1$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm.

Câu IV. (4 điểm) Cho hàm $f(x) \in C^2[0, 2]$ và $f(0) = 2008, f(1) = 2009, f(2) = 2010$. Chứng minh rằng $\exists x_0 \in (0, 2)$ sao cho $f''(x_0) = 0$.

Câu V. (4 điểm) Giả sử $f(x), g(x) \in C[a, b]$ thỏa mãn $f(x), g(x) > 0 \forall x \in [a, b]$. Chứng minh rằng $\exists \theta \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(\theta)}{\int_a^\theta f(x)dx} - \frac{g(\theta)}{\int_\theta^b g(x)dx} = 1$$

1.15 Môn: Đại số , Trường: ĐH Đồng Tháp

Câu I. (3 điểm) Cho ma trận $A = (a_{ij})_n$ với $n \in \mathbb{N}^*, a_{ij} \in \mathbb{R}$, trong đó $a_{ii} = \alpha$ với $i = 1, 2, \dots, n$ và $a_{ij} = \beta$ với $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$.

Tìm điều kiện để ma trận A khả nghịch. Khi đó, hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A .

Câu II. (3 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{3}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{3}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ với mọi $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Câu III. (3 điểm) Giả sử A, B là các ma trận thực cấp n bất kỳ và E là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh rằng nếu $E - AB$ là một ma trận khả nghịch thì $E - BA$ cũng là một ma trận khả nghịch.

Câu IV. (3 điểm) Ma trận $A = (a_{ij})_n$ thực vuông cấp n được gọi là ma trận phản đối xứng khi $a_{ij} = -a_{ji}$ với mọi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Hãy tính tổng các giá trị riêng của ma trận phản đối xứng A .

Câu V. (3 điểm) Gọi $M_n(\mathbb{R})$ là tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n . Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$, chứng minh rằng với mọi $B \in M_n(\mathbb{R})$, $AB = BA$ khi và chỉ khi

$A = \alpha E$ với E là ma trận đơn vị cấp n .

Câu VI. (3 điểm) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2009 & 2008 & 2007 \\ -2007 & 2009 & 0 \\ 2008 & 0 & 2009 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính A^{2010} .

Câu VII. (3 điểm) Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ có bậc bằng 5, biết rằng đa thức $f(x) + 1$ chia hết cho $(x - 1)^3$ và đa thức $f(x) - 1$ chia hết cho $(x + 1)^3$.

1.16 Môn: Đại số , Trường: Đại học Quy Nhơn

Câu I. Cho M là ma trận cấp 3×2 và N là ma trận cấp 2×3 thỏa mãn

$$MN = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận NM ?

Câu II. Tồn tại hay không một ma trận thực A vuông cấp 2 thỏa mãn

$$A^{2010} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 - \epsilon \end{bmatrix},$$

trong đó ϵ là một hằng số dương.

Câu III. Xác định tất cả các ma trận vuông cấp 3 giao hoán với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Câu IV. Cho $p(x)$ và $q(x)$ là hai đa thức với hệ số thực, nguyên tố cùng nhau, có bậc dương lần lượt là m và n . Giả sử $r(x)$ là một đa thức với hệ số thực có bậc nhỏ hơn $m + n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai đa thức với hệ số thực f và g sao cho $\deg(f) < n$ và $\deg(g) < m$ và $pf + qg = r$.

1.17 Môn: Giải tích, Trường: Đại học Quy Nhơn

Câu I. Cho hàm số khả vi trên $[0, 1]$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và

$$16|f'(x)| \leq 4|f(x)|^{2009}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$ trên $[0, 1]$.

Câu II. Cho hàm số $f(x)$ khả vi liên tục hai lần trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(0) = 0$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$f(c)f'(c) + f''(c) = 0.$$

Câu III. Chứng minh rằng với mỗi đa thức $P(x)$ bậc 1999 ta luôn có

$$\int_{-1}^1 |f(x)| dx \geq \frac{|f(0)|}{3000^{2000}}.$$

Câu IV. Tồn tại hay không một hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0, 2]$ và thỏa mãn $f(0) = f(2) = 1$, $|f'(x)| \leq 1$ với mọi $x \in [0, 2]$ và $\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq 1$.

Câu V. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn phương trình

$$P(x^2 + x) = P(x)P(x + 1).$$

1.18 Môn: Đại số , Trường: Đại học An Giang

Câu I. (5 điểm) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -4 & -4 & -8 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tính A^{2008}

Câu II. (5 điểm) Cho A là ma trận vuông cấp 2009 có $a_{ij} = \max\{i, j\}$. Tính $\det A$.

Câu III. (5 điểm) Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn

$$AB - 2A - 2B = 0.$$

- Câu IV. (5 điểm)** Cho m là một số nguyên khác 0 và ± 1 , còn a_{ij} là các số nguyên cho trước. Hãy giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{m_1}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{m_2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \frac{1}{m_n}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Chứng minh rằng tất cả các nghiệm thực của $P(x)$ đều khác 0 và cùng dấu.

b) Giả sử $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ và hệ phương trình cho bởi

$$\begin{cases} u_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n \\ v_{n+1} = u_n \end{cases}.$$

1.19 Môn: Giải tích , Trường: Đại học An Giang

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{8}}.$$
$$0 < 3xf(x) < 1, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \int_0^x t^3 f(t)dt - 3\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^3$ là hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.

Câu III. (5 điểm) Tìm tất cả hàm $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ thỏa mãn

$$\forall x \geq 0, f(f(x)) + f(x) = 2009.2010x.$$

Câu IV. (5 điểm) Cho hàm số f và $f'(x)$ là hàm đồng biến trong $[a, b]$, ngoài ra

$$f(a) = \frac{1}{2}(a - b); f(b) = \frac{1}{2}(b - a).$$

Chứng minh rằng tồn tại α, β, γ phân biệt trong (a, b) sao cho

$$f'(\alpha).f'(\beta).f'(\gamma) = 1.$$

Câu V. (5 điểm) Chứng minh rằng nếu $\sum_{i=0}^{2009} \frac{a_i}{2008 + 2i + 1} = 0$ thì phương trình $\sum_{i=0}^{2009} a_i x^i = 0$ luôn có nghiệm trong $(0, 1)$.

Câu VI. (5 điểm) Cho f là hàm liên tục, dương, giảm. Đặt

$$S_n = f(n) + f(n+1) + \dots + f(n+kn) \quad (k, n \in \mathbb{N}^*).$$

Chứng minh rằng

$$f(n+kn) + \int_n^{n+kn} f(x)dx \leq S_n \leq f(n) + \int_n^{n+kn} f(x)dx.$$

1.20 Môn: Toán , Trường: Học viện An ninh

Câu I. Cho $f(x)$ là hàm khả vi liên tục trên đoạn $[0, 2]$ và $f(1) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^2 [f'(x)]^2 dx \geq \frac{3}{2} \left[\int_0^2 f(x) dx \right]^2.$$

Câu II. Cho A, B là các ma trận thực, vuông cấp n thỏa mãn $A + B = I$ (ma trận đơn vị). Biết rằng $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = n$. Chứng minh rằng

$$A^2 = A, B^2 = B, AB = BA = O \quad (\text{ma trận không})$$

1.21 Môn: Toán , Trường: Học viện ngân hàng

Câu I. Cho $P(x) = x^2 - 1$. Hỏi phương trình

$$\underbrace{P(P(P \dots P(x)))}_{2009} = 0$$

có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

Câu II. Cho hai dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ thoả mãn

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}, \quad \forall n \geq 1$$

Chứng minh rằng $2 < x_n y_n < 3, \forall n \geq 2$.

Ngoài ra chứng tỏ rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

1.22 Môn: Đại số , Trường: Đại học Huế

Câu I. (2,5 điểm) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng

$$1. A^3 = 3A^2 - 2A$$

$$2. A^n = (2^{n-1} - 1)A^2 + (2 - 2^{n-1})A \text{ với mọi } n \text{ nguyên dương.}$$

Câu II. (2,5 điểm) Cho A, B là các ma trận vuông cấp n hệ số thực sao cho

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B).$$

Chứng minh rằng tồn tại các ma trận vuông khả nghịch C, D sao cho $AD = CB$.

Câu III. (2,5 điểm) Cho A_1, \dots, A_m là các ma trận vuông cấp n và $A_1 A_2 \dots A_m = 0$. Chứng minh rằng

$$\text{rank}(A_1) + \dots + \text{rank}(A_m) \leq n(m-1).$$

Câu IV. (2,5 điểm) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất đa thức $p(x)$ hệ số thực sao cho

$$p(x) - p'(x) = \frac{a}{2009!} x^{2009} + 2008, \quad a > 0.$$

Hãy tìm đa thức $p(x)$ nói trên (chú ý ký hiệu $p'(x)$ để chỉ đạo hàm của đa thức $p(x)$).

1.23 Môn: Giải tích , Trường: Đại học Huế

Câu I. (2 điểm) Chứng minh rằng tồn tại dãy số thực dương $(x_n)_n$ sao cho

$$x_n^n \arctan x_n = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng $(x_n)_n$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy $(x_n)_n$.

Câu II. (2 điểm) Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi sao cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2009$ và tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x)$. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x)$.

Câu III. (2 điểm) Tồn tại hay không hàm khả vi liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f(x) > 0$ và $f'(x) = f(f(x))$?

Câu IV. (2 điểm) Cho hàm f khả vi liên tục trên $[a, b]$ sao cho $f(a) = 0$ và $f(x), f'(x) \in [0, 1]$ với mọi $x \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b (f(x))^{2009} dx < (b-a)^2.$$

Câu V. (2 điểm) Cho f là một hàm khả vi đến cấp 2 trên $[0, 1]$ sao cho $f''(x) \geq 0$. Chứng minh rằng

$$2 \int_0^1 (1-t)f(t)dt \leq \int_0^1 f(t^2)dt.$$

1.24 Môn: Đại số , Trường: CĐSP KonTum

Câu I. (2 điểm) Cho 3 ma trận vuông cấp hai:

$$Q = \begin{bmatrix} d & h \\ q & b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{và} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 17 \\ 4 & 2009 \end{bmatrix},$$

trong đó d, h, q, b là bốn số thực thoả mãn $(h-q)^2 \neq (b-d)^2$.

Đặt $A = \left[(QB - BQ)^{2009} \right]^4 \cdot C \cdot \left[(QB - BQ)^{-4} \right]^{2009} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Tính tổng

$$S = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}.$$

Câu II. (2 điểm) Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Đặt $P = A^n + B^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tính $\det(P)$.

Câu III. (2 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1 - bx_2 - cx_3 + dx_4 = 2009x_1 \\ bx_1 + ax_2 + dx_3 + cx_4 = 2009x_2 \\ cx_1 + dx_2 + ax_3 - bx_4 = 2009x_3 \\ -dx_1 - cx_2 + bx_3 + ax_4 = 2009x_4 \end{cases},$$

trong đó $a, b, c, d \in R$ và $a > 2009$.

Câu IV. (2 điểm) Cho hai ma trận

$$K = \begin{pmatrix} c & d & s & p \\ d & u & m & k \\ s & m & t & o \\ p & k & o & n \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad T = \begin{pmatrix} c & \frac{2}{3}d & \frac{2}{5}s & \frac{2}{7}p \\ \frac{3}{2}d & u & \frac{3}{5}m & \frac{3}{7}k \\ \frac{5}{2}s & \frac{5}{3}m & t & \frac{5}{7}o \\ \frac{7}{2}p & \frac{7}{3}k & \frac{7}{5}o & n \end{pmatrix},$$

với $c, d, s, p, k, o, n, t, u, m$ là 10 số thực tùy ý.

Chứng minh rằng K và T là hai ma trận đồng dạng.

Câu V. (2 điểm) Cho đa thức $f(x) = x^5 - 3x^4 - 19x^3 + ax^2 + bx + c$ thuộc $\mathbb{Z}[x]$.

a) Trong trường hợp chia $f(x)$ cho đa thức $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ được dư là 1, hãy xác định a, b, c .

b) Giả sử rằng phương trình $f(x) - 1 = 0$ có 4 nghiệm nguyên phân biệt, hãy chứng tỏ phương trình $f(x) + 1 = 0$ không có nghiệm nguyên nào.

1.25 Môn: Giải tích , Trường: CDSP KonTum**Câu I. (2 điểm)** Cho dãy số thực bị chặn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ thỏa mãn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \frac{x_{2009n}}{2009}) = 0.$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.**Câu II. (2 điểm)** Cho f là hàm liên tục trên $[0, 2009]$, biết rằng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}, 0 < n_0 \leq 2009$ sao cho

$$\int_0^{n_0} f(x) dx = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $\alpha \in [0, 2009]$ sao cho:

$$\int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^{\alpha+1} f(x) dx.$$

Câu III. (2 điểm) Cho f và g là các hàm xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng nếu $f(x) \not\equiv 0$ và $f(x)$ bị chặn thì $|g(y)| \leq 1, \forall y \in \mathbb{R}$.**Câu IV. (2 điểm)** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ ($a > 0$), khả vi trên (a, b) . Chứng minh rằng tồn tại $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ sao cho

$$f'(x_1) = (a+b) \frac{f'(x_2)}{4x_2} + (a^2 + ab + b^2) \frac{f'(x_3)}{6x_3^2}.$$

Câu V. (2 điểm) Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0, +\infty)$ sao cho $f > 0, f' \leq 0$ và f'' bị chặn trên $[0, +\infty)$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

1.26 Môn: Đại số , Trường:**Câu I.** Cho hai ma trận thực vuông cấp hai $A = \begin{pmatrix} a^{2009} - b^{2010} & b \\ c & a^{2009} - c^{2010} \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} a^{2009} - c^{2010} & c \\ b & a^{2009} - b^{2010} \end{pmatrix}$. Tính $(A - B)^{2010}$.**Câu II.** Cho 2009 đa thức $f_j(x) = a_{0,j} + a_{1,j}x + \dots + a_{2007,j}x^{2007}$ với $j \in$

$\{1, 2, \dots, 2009\}$ và ma trận vuông cấp 2009

$$A = \begin{pmatrix} f_1(1) & f_1(2) & \cdots & f_1(2009) \\ f_2(1) & f_2(2) & \cdots & f_2(2009) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{2009}(1) & f_{2009}(2) & \cdots & f_{2009}(2009) \end{pmatrix}$$

Hãy tính $\det(A)$.

Câu III. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{2009} = 0 \\ 2009x_0 + 2010x_1 + (2008 + 2^2)x_2 + \cdots + (2008 + 2^{2009})x_{2009} = 0 \\ 2009x_0 + 2011x_1 + (2008 + 3^2)x_2 + \cdots + (2008 + 3^{2009})x_{2009} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ 2009x_0 + 4018x_1 + (2008 + 2010^2)x_2 + \cdots + (2008 + 2010^{2009})x_{2009} = 0 \end{cases}$$

Câu IV. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 10 & 15 \\ -2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$. Gọi n là số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho A^n có 3 giá trị riêng phân biệt k_1, k_2, k_3 . Hãy tìm tổng $S = (k_1 + k_2 + k_3)^{2009}$.

Câu V. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn

$$P[x + P(y)] + x^2 = [P(y) + x]^2 + P(-x)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

1.27 Môn: Toán , Trường:

Câu I. Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ thoả mãn: $A + A^T = 0$. Chứng minh rằng

$$\det(I + \alpha A^2) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Câu II. Cho $A \in M_4(\mathbf{R})$ thoả mãn $A^3 = I_4$. Tính $\det(A + I)$.

Câu III. Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thoả mãn $AB + A + B = 0$. Chứng minh rằng

$$\text{Rank} A = \text{Rank} B$$

Câu IV. Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thoả mãn $\text{trace}(AA^T + BB^T) = \text{trace}(AB + A^T B^T)$. Chứng minh rằng $A = B^T$.

Câu V. Giải phương trình

$$X^3 - 3X^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad X \in M_2(\mathbf{R})$$

Câu VI. Cho $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số thực có n nghiệm thực phân biệt khác 0. Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức: $Q(x) = x^2 P''(x) + 3x P'(x) + P(x)$ là thực và phân biệt.

1.28 Môn: Giải tích , Trường:

Câu I. Cho dãy số $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ xác định bởi công thức

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Câu II. Cho dãy số $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ bị chặn và thoả mãn

$$x_{n+2} \leq \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{2}{3}x_n, \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

Chứng minh rằng dãy $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ hội tụ.

Câu III. Cho hàm số $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ có đạo hàm cấp hai liên tục và thoả mãn điều kiện

$$|f''(x) + 2xf'(x) + (1+x^2)f(x)| \leq 2008, \quad \text{với mọi } x \in (0, +\infty).$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Câu IV. Tìm tất cả các hàm số $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ liên tục và thoả mãn điều kiện sau:

$$f(x) = \frac{1}{2008} \left[f\left(\frac{1}{2008}\right) + f\left(\frac{x+1}{2008}\right) + \cdots + f\left(\frac{x+2007}{2008}\right) \right],$$

với mọi $x \in [0, 1]$.

Câu V. Chứng minh rằng

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0.$$

Câu VI. Tính tích phân sau

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

1.29 Môn: Đại số , Trường: CDSP Bắc Ninh

Câu I. Cho dãy số (a_i) ($i = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = -1 \\ a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2} & n = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Tìm giá trị biểu thức $A = 2a_{2008}^2 + a_{2008} \cdot a_{2009} + a_{2009}^2$.

Câu II. Cho hàm số $f : R \rightarrow R$ xác định bởi $y = f(x) = 1999^x + 1999^{2-x}$. Với giá trị nào của a thì hàm $y = f(x+a)$ là hàm số chẵn.

Câu III. Cho dãy số (x_n) xác định như sau:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln x_n)$.

Câu IV. Tìm tất cả các hàm số $f : R \rightarrow R$ liên tục thỏa mãn các điều kiện

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x, \quad \forall x \in R.$$

Câu V. Cho $a, b, c \in R$, $n \in N^*$ sao cho $c = -\frac{6(3a+2b)}{5(n+2)}$. Chứng minh rằng phương trình sau: $3a \sin^n x + 2b \cos^n x + c \cos x + c = 0$ có nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

1.30 Môn: Giải tích , Trường: CDSP Bắc Ninh**Câu I.** a) Cho 2 ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tính $AB - BA$.b) Có hay không 2 ma trận A, B vuông cấp n thoả mãn $AB - BA$ là ma trận đơn vị.**Câu II.** Giải hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n = b^2 \\ \dots\dots\dots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1} \end{cases}$$

với a_i ($i = 1, 2, \dots, n$), b là các tham số, các hệ số a_i đôi một khác nhau.**Câu III.** Cho A là ma trận vuông, ký hiệu I là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh rằng

- a) Nếu $A^2 = 0$ thì $I + A$ và $I - A$ là hai ma trận khả nghịch của nhau.
 b) Nếu có số nguyên dương n để $A^n = 0$ thì $I + A$ và $I - A$ là các ma trận khả nghịch.
 c) Nếu P, Q là hai ma trận vuông cùng cấp thoả mãn $PQ = QP$ và tồn tại hai số nguyên dương r, s thoả mãn $P^r = Q^s = 0$ thì ma trận $I + P + Q$ là khả nghịch.

Câu IV. Cho ma trận A và k_1, k_2 là 2 giá trị riêng phân biệt. Giả sử $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ là 2 véc tơ riêng lần lượt tương ứng với k_1, k_2 . Hỏi $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$ có là véc tơ riêng của A được không?**Câu V.** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 1 & 1 \\ 1 & x_2 + x_3 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 + x_1 \end{pmatrix}$, trong đó x_1, x_2, x_3 là3 nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 + ax + 2009$.

- a) Tính $\det A$.
 b) Tìm a để ma trận A có một giá trị riêng là 2009.

1.31 Môn: Đại số , Trường: Đại học Ngân hàng Thành phố HCM

Câu 1. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tính A^{2009} . **Câu 2.** Cho hệ phương trình phụ thuộc tham số $a \neq 0$

$$\begin{cases} ax_2 + a^2x_3 + \cdots + a^{2008}x_{2009} = 1 \\ \frac{x_1}{a} + a_2x_3 + \cdots + a^{2007}x_{2009} = 1 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{x_1}{a^{2007}} + \frac{x_2}{a^{2006}} + \cdots + ax_{2009} = 1 \\ \frac{x_1}{a^{2008}} + \frac{x_2}{a^{2007}} + \cdots + \frac{x_{2009}}{a} = 1 \end{cases}$$

Câu 3. Tính định thức cấp n sau

$$D_n(x, y) = \det \begin{pmatrix} 0 & x & x & \dots & x & x \\ y & 0 & x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & y & 0 \end{pmatrix}$$

Câu 4. Cho A là ma trận vuông cấp 2 có các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2 \in (-1, 1)$.

Chứng minh rằng

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$$

Câu 5. Cho ma trận $A = (a_{ij})$. Chứng minh rằng nếu A không khả nghịch thì có thể thay a_{ii} bởi 0 hoặc 1 để được ma trận mới khả nghịch. **Câu 6.** Cho đa thức

$f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $\deg f = n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^n f^{(k)}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1.32 Môn: Giải tích, Trường: CDSP Hà Tây**Câu 1.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Câu 2. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{2009} dx}{(\cos x)^{2009} + (\sin x)^{2009}}$$

Câu 3. Cho n số dương x_1, x_2, \dots, x_n . Chứng minh rằng

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Câu 4. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx < \frac{1}{\sqrt{2ne}}$$

Câu 5. Cho hai hàm số $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.1, Chứng minh rằng g có điểm bất động.2. Biết rằng f là hàm đơn điệu và $f(g(x)) = g(f(x)) \forall x \in [0, 1]$.Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$. **Câu 6.** Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

1.33 Môn: Đại số, Trường: ĐHSP Hà Nội 2**Câu 1.** Chứng minh rằng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2009 & 1 \\ 2009 & 1 & 2009 \\ 1 & 2009 & 1 \end{pmatrix}$$

có một giá trị riêng dương và một giá trị riêng âm. **Câu 2.** Chứng minh rằng tồn tại ma trận thực cấp $n \times n$ thỏa mãn

$$A^2 + 2A + 5I = 0.$$

Câu 3. Cho A, B là 2 ma trận thực cấp 2×2 thỏa mãn

$$A^2 = B^2 = I, \quad AB + BA = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại ma trận không suy biến T sao cho

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad TBT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Câu 4. Cho M là ma trận thực cấp 3×2 , N là ma trận thực cấp 2×3 , thỏa

mãnewcommand

$$MN = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Tính NM .

Câu 5. Cho đa thức $P_1(x) = x^2 - 1$. Định nghĩa

$$P_{n+1}(x) = P_1(P_n(x)), \quad \forall n \geq 1.$$

Xác định số nghiệm thực của đa thức $P_{2009}(x)$.