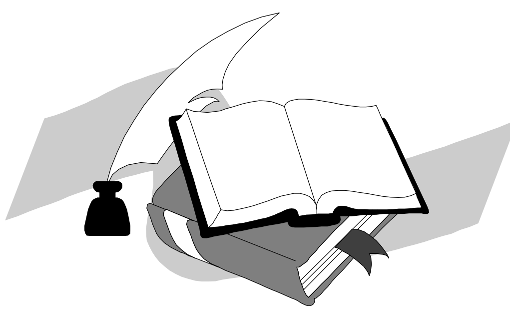
Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng
Cần Thơ

GIÁO TRÌNH
BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC



Chương 1 :

CÁC BƯỚC ĐẦU CƠ SỞ

Để bắt đầu một cuộc hành trình, ta không thể không chuẩn bị hành trang để lên đường. Toán học cũng vậy. Muốn khám phá được cái hay và cái đẹp của bất đẳng thức lượng giác, ta cần có những "vật dụng" chắc chắn và hữu dụng, đó chính là chương 1: **"Các bước đầu cơ sở"**.

Chương này tổng quát những kiến thức cơ bản cần có để chứng minh bất đẳng thức lượng giác. Theo kinh nghiệm cá nhân của mình, tác giả cho rằng những kiến thức này là đầy đủ cho một cuộc "hành trình".

Trước hết là các bất đẳng thức đại số cơ bản (**AM – GM**, **BCS**, **Jensen**, **Chebyshev** …) Tiếp theo là các đẳng thức, bất đẳng thức liên quan cơ bản trong tam giác. Cuối cùng là một số định lý khác là công cụ đắc lực trong việc chứng minh bất đẳng thức (định lý **Largare**, định lý về dấu của tam thức bậc hai, định lý về hàm tuyến tính …)

Mục lục :

1.1. Các bất đẳng thức đại số cơ bản :

1.1.1. Bất đẳng thức AM – GM :

Với mọi số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ ta luôn có

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

*Bất đẳng thức **AM – GM** (Arithmetic Means – Geometric Means) là một bất đẳng thức quen thuộc và có ứng dụng rất rộng rãi. Đây là bất đẳng thức mà bạn đọc cần ghi nhớ rõ ràng nhất, nó sẽ là công cụ hoàn hảo cho việc chứng minh các bất đẳng thức. Sau đây là hai cách chứng minh bất đẳng thức này mà theo ý kiến chủ quan của mình, tác giả cho rằng là ngắn gọn và hay nhất.*

Chứng minh :

Cách 1 : *Quy nạp kiểu Cauchy*

Với $n = 1$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Khi $n = 2$ bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0 \qquad \text{(đúng!)}$$

Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k$ tức là :

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k}$$

Ta sẽ chứng minh nó đúng với $n = 2k$. Thật vậy ta có :

$$\frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{2k})}{2k} \geq \frac{\sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_k)(a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{2k})}}{k}$$

$$\geq \frac{\sqrt{\left(k\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k}\right)\left(k\sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} ... a_{2k}}\right)}}{k}$$

$$= \sqrt[2k]{a_1 a_2 ... a_k a_{k+1} ... a_{2k}}$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh với $n = k - 1$. Khi đó :

$$a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + \sqrt[k-1]{a_1 a_2 ... a_{k=1}} \geq k\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_{k-1} \sqrt[k-1]{a_1 a_2 ... a_{k-1}}}$$

$$= k\sqrt[k-1]{a_1 a_2 ... a_{k-1}}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} \geq (k-1)\sqrt[k-1]{a_1 a_2 ... a_{k-1}}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

Cách 2 : (*lời giải của Polya*)

Gọi $A = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a_1 a_2 ... a_n \le A^n \qquad (*)$$

Rõ ràng nếu $a_1 = a_2 = ... = a_n = A$ thì (*) có dấu đẳng thức. Giả sử chúng không bằng nhau. Như vậy phải có ít nhất một số, giả sử là $a_1 < A$ và một số khác, giả sử là $a_2 > A$ tức là $a_1 < A < a_2$.

Trong tích $P = a_1 a_2 ... a_n$ ta hãy thay a_1 bởi $a'_1 = A$ và thay a_2 bởi $a'_2 = a_1 + a_2 - A$. Như vậy $a'_1 + a'_2 = a_1 + a_2$ mà $a'_1 a'_2 - a_2 a_2 = A(a_1 + a_2 - A) - a_1 a_2 = (a_1 - A)(a_2 - A) > 0$

$\Rightarrow a'_1 a'_2 > a_1 a_2$

$\Rightarrow a_1 a_2 a_3 ... a_n < a'_1 a'_2 a_3 ... a_n$

Trong tích $P' = a'_1 a'_2 a_3 ... a_n$ có thêm thừa số bằng A. Nếu trong P' còn thừa số khác A thì ta tiếp tục biến đổi để có thêm một thừa số nữa bằng A. Tiếp tục như vậy tối đa $n-1$ lần biến đổi ta đã thay mọi thừa số P bằng A và được tích A^n. Vì trong quá trình biến đổi tích các thừa số tăng dần. $\Rightarrow P < A^n$. $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1.1.1.1.

Cho A,B,C là ba góc của một tam giác nhọn. CMR :

$$\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$$

Lời giải :

Vì $\tan(A+B) = -\tan C \Leftrightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

Tam giác ABC nhọn nên tanA,tanB,tanC dương.

Theo **AM – GM** ta có :

$$\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} = 3\sqrt[3]{\tan A + \tan B + \tan C}$$

$$\Rightarrow (\tan A + \tan B + \tan C)^2 \ge 27(\tan A + \tan B + \tan C)$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.1.2.

Cho ΔABC nhọn. CMR :

$$\cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3}$$

Lời giải :

Ta luôn có : $\cot(A+B) = -\cot C$

$$\Leftrightarrow \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C$$

$$\Leftrightarrow \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

Khi đó :

$$(\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 3(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) = 3$$

$$\Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.1.3.

CMR với mọi ΔABC nhọn và $n \in N^*$ ta luôn có :

$$\frac{\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C}{\tan A + \tan B + \tan C} \geq 3^{\frac{n-1}{2}}$$

Lời giải :

Theo **AM – GM** ta có :

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^n} = 3\sqrt[3]{(\tan A + \tan B + \tan C)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C}{\tan A + \tan B + \tan C} \geq 3\sqrt[3]{(\tan A + \tan B + \tan C)^{n-3}} \geq 3\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^{n-3}} = 3^{\frac{n-1}{2}}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1.1.1.4.

Cho a,b là hai số thực thỏa :

$$\cos a + \cos b + \cos a \cos b \geq 0$$

CMR : $\cos a + \cos b \geq 0$

Lời giải :

Ta có :

$$\cos a + \cos b + \cos a \cos b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos a)(1+\cos b) \geq 1$$

Theo **AM – GM** thì :

$$\frac{(1+\cos a)+(1+\cos b)}{2} \geq \sqrt{(1+\cos a)(1+\cos b)} \geq 1$$
$$\Rightarrow \cos a + \cos b \geq 0$$

Ví dụ 1.1.1.5.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC nhọn ta có :

$$\sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}+\sqrt{\frac{\cos C\cos A}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải :

Ta có

$$\frac{\cos A}{2\cos\frac{A}{2}} = \sin\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}$$

$$\frac{\frac{3}{4}\cos A\cos B}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\cot A\cot B\right)$$

Theo **AM – GM** thì :

$$\frac{\frac{3}{4}\cos A\cos B}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} \leq \left(\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\frac{3}{4}\cot A\cot B}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\frac{3}{4}\cot A\cot B\right)$$

Tương tự ta có :

$$\sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\frac{3}{4}\cot B\cot C\right)$$

$$\sqrt{\frac{\cos C\cos A}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}+\frac{3}{4}\cot C\cot A\right)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được :

$$\sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}+\sqrt{\frac{\cos C\cos A}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}$$

$$\le\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

*Bước đầu ta mới chỉ có bất đẳng thức **AM – GM** cùng các đẳng thức lượng giác nên sức ảnh hưởng đến các bất đẳng thức còn hạn chế. Khi ta kết hợp **AM – GM** cùng **BCS, Jensen** hay **Chebyshev** thì nó thực sự là một vũ khí đáng gờm cho các bất đẳng thức lượng giác.*

1.1.2. Bất đẳng thức BCS :

Với hai bộ số $(a_1,a_2,...,a_n)$ **và** $(b_1,b_2,...,b_n)$ **ta luôn có :**

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\le\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+...+a_n^{\ 2}\right)\left(b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+...+b_n^{\ 2}\right)$$

*Nếu như **AM – GM** là "cánh chim đầu đàn" trong việc chứng minh bất đẳng thức thì **BCS** (Bouniakovski – Cauchy – Schwartz) lại là "cánh tay phải" hết sức đắc lực. Với **AM – GM** ta luôn phải chú ý điều kiện các biến là không âm, nhưng đối với **BCS** các biến không bị ràng buộc bởi điều kiện đó, chỉ cần là số thực cũng đúng. Chứng minh bất đẳng thức này cũng rất đơn giản.*

Chứng minh :

Cách 1 :

Xét tam thức :

$$f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+...+(a_nx-b_n)^2$$

Sau khi khai triển ta có :

$$f(x)=\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+...+a_n^{\ 2}\right)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)x+\left(b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+...+b_n^{\ 2}\right)$$

Mặt khác vì $f(x)\ge 0\,\forall x\in R$ nên :

$$\Delta_f\le 0\Leftrightarrow(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\le\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+...+a_n^{\ 2}\right)\left(b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+...+b_n^{\ 2}\right)\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$ (quy ước nếu $b_i=0$ thì $a_i=0$)

Cách 2 :

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có :

$$\frac{a_i^2}{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}+\frac{b_i^2}{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}\geq\frac{2|a_ib_i|}{\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)}}$$

Cho i chạy từ 1 đến n rồi cộng vế cả n bất đẳng thức lại ta có đpcm.

Đây cũng là cách chứng minh hết sức ngắn gọn mà bạn đọc nên ghi nhớ!

*Bây giờ với sự tiếp sức của **BCS**, **AM – GM** như được tiếp thêm nguồn sức mạnh, như hổ mọc thêm cánh, như rồng mọc thêm vây, phát huy hiệu quả tầm ảnh hưởng của mình. Hai bất đẳng thức này bù đắp bổ sung hỗ trợ cho nhau trong việc chứng minh bất đẳng thức. Chúng đã “lưỡng long nhất thể”, “song kiếm hợp bích” công phá thành công nhiều bài toán khó.*

“Trăm nghe không bằng một thấy”, ta hãy xét các ví dụ để thấy rõ điều này.

Ví dụ 1.1.2.1.

CMR với mọi a,b,α ta có :

$$(\sin\alpha+a\cos\alpha)(\sin\alpha+b\cos\alpha)\leq 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Lời giải :

Ta có :

$$(\sin\alpha+a\cos\alpha)(\sin\alpha+b\cos\alpha)=\sin^2\alpha+(a+b)\sin\alpha\cos\alpha+ab\cos^2\alpha$$

$$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{(a+b)}{2}\sin 2\alpha+ab\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+ab+(a+b)\sin 2\alpha+(ab-1)\cos 2\alpha\right)\quad(1)$$

Theo **BCS** ta có :

$$A\sin x+B\cos x\leq\sqrt{A^2+B^2}\quad(2)$$

Áp dụng (2) ta có :

$$(a+b)\sin 2\alpha+(ab-1)\cos 2\alpha\leq\sqrt{(a+b)^2+(ab-1)^2}=\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}\quad(3)$$

Thay (3) vào (1) ta được :

$$(\sin\alpha+a\cos\alpha)(\sin\alpha+b\cos\alpha)\leq\frac{1}{2}\left(1+ab+\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}\right)\quad(4)$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau đây với mọi a, b :

$$\frac{1}{2}\left(1+ab+\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}\right)\leq 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\quad(5)$$

Thật vậy :

$$(5) \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \le 1+\frac{a^2+b^2}{4}+\frac{ab}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \le \frac{a^2+b^2+2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \le \frac{(a^2+1)+(b^2+1)}{2} \quad (6)$$

Theo **AM – GM** thì (6) hiển nhiên đúng $\Rightarrow (5)$ đúng.

Từ (1) và (5) suy ra với mọi a,b,α ta có :

$$(\sin\alpha + a\cos\alpha)(\sin\alpha + b\cos\alpha) \le 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi xảy ra đồng thời dấu bằng ở (1) và (6)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 \\ \dfrac{a+b}{\sin 2\alpha} = \dfrac{ab-1}{\cos 2\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ tg\alpha = \dfrac{a+b}{ab-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ \alpha = \dfrac{1}{2}arctg\dfrac{a+b}{ab-1} + k\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in Z)$$

Ví dụ 1.1.2.2.

Cho $a,b,c>0$ *và* $a\sin x + b\cos y = c$. *CMR :*

$$\frac{\cos^2 x}{a}+\frac{\sin^2 y}{b} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c^2}{a^3+b^3}$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{1-\sin^2 x}{a}+\frac{1-\cos^2 y}{b} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c^2}{a^3+b^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{a}+\frac{\cos^2 y}{b} \ge \frac{c^2}{a^3+b^3} \quad (*)$$

Theo **BCS** thì :

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \le (a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)$$

với $\begin{cases} a_1 = \dfrac{\sin x}{\sqrt{a}} \ ; \ a_2 = \dfrac{\cos y}{\sqrt{b}} \\ b_1 = a\sqrt{a} \ ; \ b_2 = b\sqrt{b} \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin^2 x}{a}+\frac{\cos^2 y}{b}\right)(a^3+b^3) \ge (a\sin x + b\cos y)^2$$

do $a^3+b^3>0$ và $a\sin x + b\cos y = c \Rightarrow (*)$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{a^2} = \dfrac{\cos y}{b^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin x}{a^2} = \dfrac{\cos y}{b^2} \\ a\sin x + b\cos y = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{a^2 c}{a^3 + b^3} \\ \cos y = \dfrac{b^2 c}{a^3 + b^3} \end{cases}$$

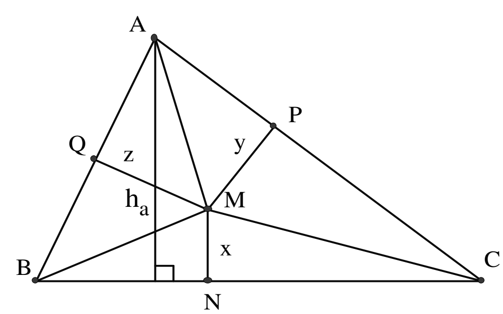
Ví dụ 1.1.2.3.

CMR với mọi ΔABC ta có :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$$

với x, y, z là khoảng cách từ điểm M bất kỳ nằm bên trong ΔABC đến ba cạnh BC, CA, AB.

Lời giải :



Ta có :

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{MCA}}{S_{ABC}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{h_c} + \frac{y}{h_b} + \frac{x}{h_a} = 1$$

$$\Rightarrow h_a + h_b + h_c = (h_a + h_b + h_c)\left(\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c}\right)$$

Theo **BCS** thì :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{h_a}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h_a}} + \sqrt{h_b}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{h_b}} + \sqrt{h_c}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{h_c}} \le \sqrt{(h_a + h_b + h_c)\left(\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c}\right)} = \sqrt{h_a + h_b + h_c}$$

mà $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow h_a = b\sin C$, $h_b = c\sin A$, $h_c = a\sin B$

$$\Rightarrow \sqrt{h_a + h_b + h_c} = \sqrt{(a\sin B + b\sin C + c\sin A)} = \sqrt{\frac{ab}{2R} + \frac{bc}{2R} + \frac{ca}{2R}}$$

Từ đó suy ra :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{2R}} \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều và M là tâm nội tiếp ΔABC.

Ví dụ 1.1.2.4.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \le \sqrt[4]{8} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức **BCS** liên tiếp 2 lần ta có :

$$\left(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}\right)^4 \le \left(\left(1^2 + 1^2\right)(\cos x + \sin x)\right)^2$$

$$\le \left(1^2 + 1^2\right)^2 \left(1^2 + 1^2\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \le \sqrt[4]{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 1.1.2.5.

Chứng minh rằng với mọi số thực a và x ta có

$$\left| \frac{\left(1 - x^2\right)\sin a + 2x\cos a}{1 + x^2} \right| \le 1$$

Lời giải :

Theo **BCS** ta có :

$$\left(\left(1 - x^2\right)\sin a + 2x\cos a\right)^2 \le \left(\left(1 - x^2\right)^2 + (2x)^2\right)\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)$$

$$= 1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2 = 1 + 2x^2 + x^4$$

$$\Rightarrow \left(\left(1 - x^2\right)\sin a + 2x\cos a\right)^2 \le \left(1 + x^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\left(1 - a^2\right)\sin a + 2x\cos a}{1 + x^2} \right| \le 1$$

$\Rightarrow$ đpcm.

1.1.3. Bất đẳng thức Jensen :

Hàm số $y = f(x)$ **liên tục trên đoạn** $[a,b]$ **và n điểm** $x_1, x_2, ..., x_n$ **tùy ý trên đoạn** $[a,b]$ **ta có :**

i) $f''(x) > 0$ **trong khoảng** (a,b) **thì :**

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \ge nf\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$

ii) $f''(x) < 0$ **trong khoảng** (a,b) **thì :**

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \ge nf\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$

Bất đẳng thức ***AM – GM*** *và bất đẳng thức* ***BCS*** *thật sự là các đại gia trong việc chứng minh bất đẳng thức nói chung. Nhưng riêng đối với chuyên mục bất đẳng thức lượng giác thì đó lại trở thành sân chơi riêng cho bất đẳng thức* ***Jensen****. Dù có vẻ hơi khó tin nhưng đó là sự thật, đến 75% bất đẳng thức lượng giác ta chỉ cần nói "theo bất đẳng thức Jensen hiển nhiên ta có đpcm".*

Trong phát biểu của mình, bất đẳng thức ***Jensen*** *có đề cập đến đạo hàm bậc hai, nhưng đó là kiến thức của lớp 12 THPT. Vì vậy nó sẽ không thích hợp cho một số đối tượng bạn đọc. Cho nên ta sẽ phát biểu bất đẳng thức* ***Jensen*** *dưới một dạng khác :*

Cho $f : R^+ \to R$ **thỏa mãn** $f(x) + f(y) \ge 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ \forall x, y \in R^+$ **Khi đó với mọi** $x_1, x_2, ..., x_n \in R^+$ **ta có bất đẳng thức :**

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \ge nf\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$

Sự thật là tác giả chưa từng tiếp xúc với một chứng minh chính thức của bất đẳng thức ***Jensen*** *trong phát biểu có* $f''(x)$. *Còn việc chứng minh phát biểu không sử dụng đạo hàm thì rất đơn giản. Nó sử dụng phương pháp quy nạp Cauchy tương tự như khi chứng minh bất đẳng thức* ***AM – GM****. Do đó tác giả sẽ không trình bày chứng minh ở đây.*

Ngoài ra, ở một số tài liệu có thể bạn đọc gặp khái niệm lồi lõm khi nhắc tới bất đẳng thức ***Jensen****. Nhưng hiện nay trong cộng đồng toán học vẫn chưa quy ước rõ ràng đâu là lồi, đâu là lõm. Cho nên bạn đọc không nhất thiết quan tâm đến điều đó. Khi chứng minh ta chỉ cần xét* $f''(x)$ *là đủ để sử dụng bất đẳng thức* ***Jensen****. Ok! Mặc dù bất đẳng thức* ***Jensen*** *không phải là một bất đẳng thức chặt, nhưng khi có dấu hiệu manh nha của nó thì bạn đọc cứ tùy nghi sử dụng .*

Ví dụ 1.1.3.1.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC *ta có :*

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \sin x$ với $x \in (0;\pi)$

Ta có $f''(x) = -\sin x < 0 \ \forall x \in (0;\pi)$. Từ đó theo **Jensen** thì :

$$f(A) + f(B) + f(C) \le 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.3.2.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC *đều ta có :*

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \tan x$ với $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0 \ \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó theo **Jensen** thì :

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \ge 3f\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}\right) = 3\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.3.3.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC *ta có :*

$$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \ge 3^{1-\sqrt{2}}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = (\tan x)^{2\sqrt{2}}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f'(x) = 2\sqrt{2}(1 + \tan^2 x)(\tan x)^{2\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2}\left((\tan x)^{2\sqrt{2}-1} + (\tan x)^{2\sqrt{2}+1}\right)$

$f''(x) = 2\sqrt{2}\left((2\sqrt{2}-1)(1 + \tan^2 x)(\tan x)^{2\sqrt{2}-2} + (2\sqrt{2}+1)(1 + \tan^2 x)(\tan x)^{2\sqrt{2}}\right) > 0$

Theo **Jensen** ta có :

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right) = 3\left(tg\frac{\pi}{6}\right)^{2\sqrt{2}} = 3^{1-\sqrt{2}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.3.4.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có :

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \frac{3}{2} + \sqrt{3}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \sin x + \tan x$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f''(x) = \dfrac{\sin x(1 - \cos^4 x)}{\cos^4 x} > 0 \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó theo **Jensen** thì :

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right) = 3\left(\sin\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.3.5.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC nhọn ta có :

$$(\sin A)^{\sin A}(\sin B)^{\sin B}(\sin C)^{\sin C} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Lời giải :

Ta có

$$\begin{cases} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C \\ \sin A + \sin B + \sin C \geq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \end{cases}$$

và $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow 2 < \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Xét $f(x) = x \ln x$ với $x \in (0;1]$

Ta có $f'(x) = \ln x + 1$

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \ \forall x \in (0;1]$$

Bây giờ với **Jensen** ta được :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \ln\left(\frac{\sin a + \sin B + \sin C}{3}\right) \leq \frac{\sin A(\ln \sin A) + \sin B(\ln \sin B) + \sin C(\ln \sin C)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^{\sin A + \sin B + \sin C} \leq \ln(\sin A)^{\sin A} + \ln(\sin B)^{\sin B} + \ln(\sin C)^{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^{\sin A + \sin B + \sin C}\right] \leq \ln\left[(\sin A)^{\sin A}(\sin B)^{\sin B}(\sin C)^{\sin C}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^{\sin A + \sin B + \sin C}}{3^{\sin A + \sin B + \sin C}} \leq (\sin A)^{\sin A}(\sin B)^{\sin B}(\sin C)^{\sin C}$$

$$\Rightarrow (\sin A)^{\sin A}(\sin B)^{\sin B}(\sin C)^{\sin C} \geq \frac{2^{\sin A + \sin B + \sin C}}{3^{\sin A + \sin B + \sin C}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

1.1.4. Bất đẳng thức Chebyshev :

Với hai dãy số thực đơn điệu cùng chiều $a_1, a_2, ..., a_n$ **và** $b_1, b_2, ..., b_n$ **thì ta có :**

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

Theo khả năng của mình thì tác giả rất ít khi sử dụng bất đẳng thức này. Vì trước hết ta cần để ý tới chiều của các biến, thường phải sắp lại thứ tự các biến. Do đó bài toán cần có yêu cầu đối xứng hoàn toàn giữa các biến, việc sắp xếp thứ tự sẽ không làm mất tính tổng quát của bài toán. Nhưng không vì thế mà lại phủ nhận tầm ảnh hưởng của bất đẳng thức ***Chebyshev*** *trong việc chứng minh bất đẳng thức lượng giác, mặc dù nó có một chứng minh hết sức đơn giản và ngắn gọn.*

Chứng minh :

Bằng phân tích trực tiếp, ta có đẳng thức :

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) - (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n) = \sum_{i,j=1}^{n}(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$$

Vì hai dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ đơn điệu cùng chiều nên $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$

Nếu 2 dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ đơn điệu ngược chiều thì bất đẳng thức đổi chiều.

Ví dụ 1.1.4.1.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có :

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3}$$

Lời giải :

Không mất tính tổng quát giả sử :

$$a \leq b \leq c \Leftrightarrow A \leq B \leq C$$

Theo **Chebyshev** thì :

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \leq \frac{aA + bB + cC}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{A+B+C}{3} = \frac{\pi}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.4.2.

Cho ΔABC không có góc tù và A, B, C đo bằng radian. CMR :

$$3(\sin A + \sin B + \sin C) \leq (A + B + C)\left(\frac{\sin A}{A} + \frac{\sin B}{B} + \frac{\sin C}{C}\right)$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Ta có $f'(x) = \dfrac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} \leq 0 \ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Vậy $f(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$

Không mất tổng quát giả sử :

$$A \geq B \geq C \Rightarrow \frac{\sin A}{A} \leq \frac{\sin B}{B} \leq \frac{\sin C}{C}$$

Áp dụng bất đẳng thức **Chebyshev** ta có :

$$(A+B+C)\left(\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\right) \geq 3(\sin A+\sin B+\sin C) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.4.3.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có :

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C} \leq \frac{\tan A\tan B\tan C}{3}$$

Lời giải :

Không mất tổng quát giả sử $A \geq B \geq C$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan A \geq \tan B \geq \tan C \\ \cos A \leq \cos B \leq \cos C \end{cases}$$

Áp dụng **Chebyshev** ta có :

$$\left(\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{3}\right)\left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right) \geq \frac{\tan A\cos A+\tan B\cos B+\tan C\cos C}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C} \leq \frac{\tan A+\tan B+\tan C}{3}$$

Mà ta lại có $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 1.1.4.4.

Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta có :

$$2(\sin A+\sin B+\sin C) \geq \frac{3}{2}\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\cos A+\cos B+\cos C}$$

Lời giải :

Không mất tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin A \le \sin B \le \sin C \\ \cos A \ge \cos B \ge \cos C \end{cases}$$

Khi đó theo **Chebyshev** thì :

$$\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)\left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right) \ge \frac{\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin A + \sin B + \sin C) \ge \frac{3}{2}\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\cos A + \cos B + \cos C}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

1.2. Các đẳng thức bất đẳng thức trong tam giác :

Sau đây là hầu hết những đẳng thức, bất đẳng thức quen thuộc trong tam giác và trong lượng giác được dùng trong chuyên đề này hoặc rất cần thiết cho quá trình học toán của bạn đọc. Các bạn có thể dùng phần này như một từ điển nhỏ để tra cứu khi cần thiết.Hay bạn đọc cũng có thể chứng minh tất cả các kết quả như là bài tập rèn luyện. Ngoài ra tôi cũng xin nhắc với bạn đọc rằng những kiến thức trong phần này khi áp dụng vào bài tập đều cần thiết được chứng minh lại.

1.2.1. Đẳng thức :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad a = b\cos C + c\cos B$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \qquad b = c\cos A + a\cos C$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad c = a\cos B + b\cos A$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\ &= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C \\ &= \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = pr \\ &= (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$
$$m_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$$
$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$
$$l_b = \frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a}$$
$$l_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$
$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$
$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C+A}{2}\right)}$$

$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$
$$\cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$$
$$\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$$
$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$
$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}} \qquad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}} \qquad \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$
$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \qquad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \qquad \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p}{R}$$
$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$$
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A\cos B\cos C)$$
$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R}$$
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$
$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$
$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$
$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$

$$\sin(2k+1)A+\sin(2k+1)B+\sin(2k+1)C=(-1)^k 4\cos(2k+1)\frac{A}{2}\cos(2k+1)\frac{B}{2}\cos(2k+1)\frac{C}{2}$$
$$\sin 2kA+\sin 2kB+\sin 2kC=(-1)^{k+1}4\sin kA\sin kB\sin kC$$
$$\cos(2k+1)A+\cos(2k+1)B+\cos(2k+1)C=1+(-1)^k 4\sin(2k+1)\frac{A}{2}\sin(2k+1)\frac{B}{2}\sin(2k+1)\frac{C}{2}$$
$$\cos 2kA+\cos 2kB+\cos 2kC=-1+(-1)^k 4\cos kA\cos kB\cos kC$$
$$\tan kA+\tan kB+\tan kC=\tan kA\tan kB\tan kC$$
$$\cot kA\cot kB+\cot kB\cot kC+\cot kC\cot kA=1$$
$$\tan(2k+1)\frac{A}{2}\tan(2k+1)\frac{B}{2}+\tan(2k+1)\frac{B}{2}\tan(2k+1)\frac{C}{2}+\tan(2k+1)\frac{C}{2}\tan(2k+1)\frac{A}{2}=1$$
$$\cot(2k+1)\frac{A}{2}+\cot(2k+1)\frac{B}{2}+\cot(2k+1)\frac{C}{2}=\cot(2k+1)\frac{A}{2}\cot(2k+1)\frac{B}{2}\cot(2k+1)\frac{C}{2}$$
$$\cos^2 kA+\cos^2 kB+\cos^2 kC=1+(-1)^k 2\cos kA\cos kB\cos kC$$
$$\sin^2 kA+\sin^2 kB+\sin^2 kC=2+(-1)^{k+1}2\cos kA\cos kB\cos kC$$

1.2.2. Bất đẳng thức :

$$|a-b|<c<a+b \qquad a\le b\Leftrightarrow A\le B$$
$$|b-c|<a<b+c \qquad b\le c\Leftrightarrow B\le C$$
$$|c-a|<b<c+a \qquad c\le a\Leftrightarrow C\le A$$

$$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$$
$$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}$$
$$\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$$

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$$
$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$$
$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9$$

$$\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq 1$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1$$

$$\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2}$$

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$$

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

$$\cot A \cot B \cot C \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{A}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\cot \frac{A}{2} \cot \frac{A}{2} \cot \frac{A}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

1.3. Một số định lý khác :

1.3.1. Định lý Lagrange :

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ thì tồn tại 1 điểm $c \in (a;b)$ sao cho :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Nói chung với kiến thức THPT, ta chỉ có công nhận định lý này mà không chứng minh. Ví chứng minh của nó cần đến một số kiến thức của toán cao cấp. Ta chỉ cần hiểu cách dùng nó cùng những điều kiện đi kèm trong các trường hợp chứng minh.

Ví dụ 1.3.1.1.

Chứng minh rằng $\forall a, b \in R, a < b$ thì ta có :

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

Khi đó theo định lý **Lagrange** ta có

$$\exists c \in (a;b): f(b) - f(a) = (b-a)\cos c$$
$$\Rightarrow |\sin b - \sin a| \le |b-a||\cos c| \le |b-a| :$$
$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 1.3.1.2.

Với $0 < a < b$. *CMR :*

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \ln x$, khi đó $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ khả vi trên $(a;b)$ nên :

$$\exists c \in (a;b): \frac{\ln b - \ln a}{b-a} = f'(c) = \frac{1}{c} \quad \text{vì} \quad a < c < b \quad \text{nên} \quad \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

Từ đó $\dfrac{1}{b} < \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} < \dfrac{1}{a} \Rightarrow \dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a} \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1.3.1.3.

Cho $0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. *CMR :*

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} < \tan\alpha - \tan\beta < \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \tan x$ liên tục trên $[\beta;\alpha]$ khả vi trên $(\beta;\alpha)$ nên theo định lý **Lagrange**

$$\exists c \in (\beta;\alpha): \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha-\beta} = f'(c) \Rightarrow \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\alpha-\beta} = \frac{1}{\cos^2 c} \quad (1)$$

Vì $\beta < c < \alpha$ nên $\dfrac{1}{\cos^2\beta} < \dfrac{1}{\cos^2 c} < \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1.3.1.4.

CMR nếu $x > 0$ *thì* $\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

Lời giải :

Xét $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x(\ln(x+1) - \ln x) \quad \forall x > 0$

Ta có $f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}$

Xét $g(t) = \ln t$ liên tục trên $[x;x+1]$ khả vi trên $(x;x+1)$ nên theo **Lagrange** thì :

$$\exists c \in (x;x+1): \frac{\ln(x+1)-\ln x}{(x+1)-x} = g'(c) > \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} > 0$$

với $x > 0 \Rightarrow f(x)$ tăng trên $(0;+\infty)$

$$\Rightarrow f(x+1) > f(x) \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1.3.1.5.

Chứng minh rằng $\forall n \in Z^+$ *ta có :*

$$\frac{1}{n^2+2n+2} \le \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \le \frac{1}{n^2+1}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \arctan x$ liên tục trên $[n;n+1]$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ trên } (n;n+1)\ \forall n \in Z^+$$

Theo định lý Lagrange ta có :

$$\exists c \in (n;n+1): f'(c) = \frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+c^2} = \arctan(n+1) - \arctan n = \arctan\left(\frac{n+1-n}{1+(n+1)n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+c^2} = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

Để ý $c \in (n;n+1) \Rightarrow 1 \le n < c < n+1$

$$\Rightarrow n^2 < c^2 < (n+1)^2$$
$$\Leftrightarrow n^2 + 1 < c^2 + 1 < n^2 + 2n + 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2+2n+2} < \frac{1}{c^2+1} < \frac{1}{n^2+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2+2n+2} < \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) < \frac{1}{n^2+1}$$

$\Rightarrow$ *đpcm.*

1.3.2. Định lý về dấu của tam thức bậc hai :

Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \ne 0)$ **và** $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta < 0$ **thì** $f(x)$ **cùng dấu với hệ số a, với mọi số thực x.**

- Nếu $\Delta = 0$ **thì** $f(x)$ **cùng dấu với a với mọi** $x \ne -\frac{b}{2a}$**.**

- Nếu $\Delta > 0$ **thì** $f(x)$ **có hai nghiệm** x_1, x_2 **và giả sử** $x_1 < x_2$**.Thế thì** $f(x)$ **cùng dấu với a với mọi x ngoài đoạn** $[x_1;x_2]$ **(tức là** $x < x_1$ **hay** $x > x_2$**) và** $f(x)$ **trái dấu với a khi x ở trong khoảng hai nghiệm (tức là** $x_1 < x < x_2$**).**

Trong một số trường hợp, định lý này là một công cụ hết sức hiệu quả. Ta sẽ coi biểu thức cần chứng minh là một tam thức bậc hai theo một biến rồi xét Δ*. Với định lý trên thì các bất đẳng thức thường rơi vào trường hợp* $\Delta \le 0$ *mà ít khi ta xét* $\Delta > 0$.

Ví dụ 1.3.2.1.

CMR $\forall x, y, z \in R^+$ *và* ΔABC *bất kỳ ta có :*

$$\frac{\cos A}{x} + \frac{\cos B}{y} + \frac{\cos C}{z} \le \frac{x^2+y^2+z^2}{2xyz}$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$x^2 - 2x(y\cos C + z\cos B) + (y^2 + z^2 - 2yz\cos A) \ge 0$$

Coi đây như là tam thức bậc hai theo biến x.

$$\Delta' = (y\cos C + z\cos B)^2 - (y^2 + z^2 - 2yz\cos A)$$
$$= -(y\sin C - z\sin B)^2 \le 0$$

Vậy bất đẳng thức trên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} y\sin C = z\sin B \\ x = y\cos C + z\cos B \end{cases} \Leftrightarrow x : y : z = \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

tức x, y, z là ba cạnh của tam giác tương đương với ΔABC .

Ví dụ 1.3.2.2.

CMR $\forall x \in R$ *và* ΔABC *bất kỳ ta có :*

$$1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \cos A + x(\cos B + \cos C)$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$x^2 - 2x(\cos B + \cos C) + 2 - 2\cos A \geq 0$$

$$\Delta' = (\cos B + \cos C)^2 - 2(1 - \cos A)$$

$$= \left(2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - 4\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= 4\sin^2\frac{A}{2}\left(\cos^2\frac{B-C}{2} - 1\right)$$

$$= -4\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B-C}{2} \leq 0$$

Vậy bất đẳng thức trên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ x = \cos B + \cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ x = 2\cos B = 2\cos C \end{cases}$$

Ví dụ 1.3.2.4.

CMR trong mọi ΔABC *ta đều có :*

$$ab\sin^2 A + bc\sin^2 B + ca\sin^2 C \leq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$a^2 + 2a(b\cos 2A + c\cos 2C) + b^2 + c^2 + 2bc\cos 2B \geq 0$$

$$\Delta' = (b\cos 2A + c\cos 2C)^2 - (b^2 + c^2 + 2bc\cos 2B)$$

$$= -(b\sin 2A + c\sin 2C)^2 \le 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Ví dụ 1.3.2.4.

Cho ΔABC bất kỳ. CMR :

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

Lời giải :

Đặt $k = \cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - \cos(A+B)$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{A+B}{2} - 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} + k - 1 = 0$$

Do đó $\cos\frac{A+B}{2}$ là nghiệm của phương trình :

$$2x^2 - 2\cos\frac{A-B}{2}x + k - 1 = 0$$

Xét $\Delta' = \cos^2\frac{A+B}{2} - 2(k-1)$. Để tồn tại nghiệm thì :

$$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 2(k-1) \le \cos^2\frac{A-B}{2} \le 1 \Rightarrow k \le \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 1.3.2.5.

CMR $\forall x, y \in R$ ta có :

$$\sin x + \sin y + \cos(x+y) \le \frac{3}{2}$$

Lời giải :

Đặt $k = \sin x + \sin y + \cos(x+y) = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{x+y}{2}$

Khi đó $\sin\frac{x+y}{2}$ là nghiệm của phương trình :

$$2x^2 - 2\cos\frac{x-y}{2}x + k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = 1 - 2(k-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

1.3.3. Định lý về hàm tuyến tính :

Xét hàm $f(x) = ax + b$ **xác định trên đoạn** $[\alpha;\beta]$

Nếu $\begin{cases} f(\alpha) \geq k \\ f(\beta) \geq k \end{cases} \quad (k \in R)$

thì $f(x) \geq k \;\; \forall x \in [\alpha;\beta]$**.**

Đây là một định lý khá hay. Trong một số trường hợp, khi mà ***AM – GM*** *đã bó tay,* ***BCS*** *đã đầu hàng vô điều kiện thì định lý về hàm tuyến tính mới phát huy hết sức mạnh của mình. Một phát biểu hết sức đơn giản nhưng đó lại là lối ra cho nhiều bài bất đẳng thức khó.*

Ví dụ 1.3.3.1.

Cho a,b,c *là những số thực không âm thỏa :*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4$$

CMR : $\quad a + b + c \leq \frac{1}{2}abc + \sqrt{8}$

Lời giải :

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng :

$$\left(1 - \frac{1}{2}bc\right)a + b + c - \sqrt{8} \leq 0$$

Xét $f(a) = \left(1 - \frac{1}{2}bc\right)a + b + c - \sqrt{8}$ với $a \in [0;2]$.

Khi đó :

$$f(0) = b + c - \sqrt{8} \leq \sqrt{2(b^2 + c^2)} - \sqrt{8} = \sqrt{8} - \sqrt{8} = 0$$

$$f(2) = 2 - bc + b + c - \sqrt{8} = 2 - \sqrt{8} < \sqrt{8} - \sqrt{8} = 0$$

(vì $a = 2 \Leftrightarrow b = c = 0$)

Vậy $f(a) \leq 0 \;\; \forall a \in [0;2] \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0, b = c = 0$ và các hoán vị.

Ví dụ 1.3.3.2.

CMR $\forall a,b,c$ *không âm ta có :*

$$7(ab+bc+ca)(a+b+c) \le 9abc + 2(a+b+c)^3$$

Lời giải :

Đặt $x = \frac{a}{a+b+c}; y = \frac{b}{a+b+c}; z = \frac{c}{a+b+c}$. Khi đó bài toán trở thành :

Chứng minh $7(xy+yz+zx) \le 9xyz + 2$ với $x+y+z=1$

Không mất tính tổng quát giả sử $x = \max\{x,y,z\}$.

Xét $f(x) = (7y+7z-9yz)x + 7yz - 2$ với $x \in \left[\frac{1}{3};1\right]$

Ta có :

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \ ; \ f(1) = -2 < 0$$

$$\Rightarrow f(x) \le 0 \forall x \in \left[\frac{1}{3};1\right]$$

Vậy bất đẳng thức chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c$.

Đây là phần duy nhất của chuyên đề không đề cập đến lượng giác. Nó chỉ mang tính giới thiệu cho bạn đọc một định lý hay để chứng minh bất đẳng thức. Nhưng thực ra trong một số bài bất đẳng thức lượng giác, ta vẫn có thể áp dụng định lý này. Chỉ có điều các bạn nên chú ý là dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra phải phù hợp với tập xác định của các hàm lượng giác.

1.4. Bài tập :

Cho ΔABC. CMR :

1.4.1. $\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$ với ΔABC nhọn.

1.4.2. $\sin\frac{A}{4} + \sin\frac{B}{4} + \sin\frac{C}{4} \le \frac{3\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

1.4.3. $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \ge 2\sqrt{3}$

1.4.4. $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \ge \frac{7}{8}$

1.4.5. $\cot A + \cot B + \cot C \le \dfrac{9}{8\sin A \sin B \sin C}$

1.4.6. $\cos\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{C-A}{2} \ge 8\sin A\sin B\sin C$

1.4.7. $1 + \cos A\cos B\cos C \ge \sin A\sin B\sin C$

1.4.8. $\dfrac{1}{a+b-c} + \dfrac{1}{b+c-a} + \dfrac{1}{c+a-b} \ge \dfrac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}$

1.4.9. $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \ge 2\sqrt{3}$

1.4.10. $\dfrac{m_a}{a} + \dfrac{m_b}{b} + \dfrac{m_c}{c} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

1.4.11. $m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \ge p^2$

1.4.12. $\dfrac{1}{a^2 m_a} + \dfrac{1}{b^2 m_b} + \dfrac{1}{c^2 m_c} > \dfrac{3}{abc}$

1.4.13. $(p-a)(p-b)(p-c) \le \dfrac{abc}{8}$

1.4.14. $h_a + h_b + h_c \ge 9r$

1.4.15. $\sin A\sin B\sin C \le \sin\left(\dfrac{A+3B}{4}\right)\sin\left(\dfrac{B+3C}{4}\right)\sin\left(\dfrac{C+3A}{4}\right)$

Chương 2 :

Các phương pháp chứng minh

Chứng minh bất đẳng thức đòi hỏi kỹ năng và kinh nghiệm. Không thể khơi khơi mà ta đâm đầu vào chứng minh khi gặp một bài bất đẳng thức. Ta sẽ xem xét nó thuộc dạng bài nào, nên dùng phương pháp nào để chứng minh. Lúc đó việc chứng minh bất đẳng thức mới thành công được.

Như vậy, để có thể đương đầu với các bất đẳng thức lượng giác, bạn đọc cần nắm vững các phương pháp chứng minh. Đó sẽ là kim chỉ nam cho các bài bất đẳng thức. Những phương pháp đó cũng rất phong phú và đa dạng : tổng hợp, phân tích, quy ước đúng, ước lượng non già, đổi biến, chọn phần tử cực trị … Nhưng theo ý kiến chủ quan của mình, những phương pháp thật sự cần thiết và thông dụng sẽ được tác giả giới thiệu trong chương 2 : **"Các phương pháp chứng minh"**.

Mục lục :

2.1. Biến đổi lượng giác tương đương :

*Có thể nói phương pháp này là một phương pháp "xưa như Trái Đất". Nó sử dụng các công thức lượng giác và sự biến đổi qua lại giữa các bất đẳng thức. Để có thể sử dụng tốt phương pháp này bạn đọc cần trang bị cho mình những kiến thức cần thiết về biến đổi lượng giác (bạn đọc có thể tham khảo thêm phần **1.2. Các đẳng thức,bất đẳng thức trong tam giác**).*

Thông thường thì với phương pháp này, ta sẽ đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng bất đẳng thức đúng hay quen thuộc. Ngoài ra, ta cũng có thể sử dụng hai kết quả quen thuộc $|\sin x| \le 1$; $|\cos x| \le 1$.

Ví dụ 2.1.1.

CMR : $$\frac{1-\sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}} > \sqrt{3\cos\frac{\pi}{7}}$$

Lời giải :

Ta có :

$$1-\sin\frac{\pi}{14} = \sin\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{\pi}{14} + \sin\frac{5\pi}{14} - \sin\frac{3\pi}{14} + \sin\frac{7\pi}{14} - \sin\frac{5\pi}{14}$$
$$= 2\sin\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}} = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} \qquad (1)$$

Mặt khác ta có :

$$\cos\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} \qquad (2)$$

Đặt $x = \cos\frac{\pi}{7}$; $y = \cos\frac{2\pi}{7}$; $z = \cos\frac{3\pi}{7}$

Khi đó từ $(1),(2)$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$x + y + z > \sqrt{3(xy + yz + zx)} \qquad (3)$$

mà $x, y, z > 0$ nên :

$$(3) \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 > 0 \qquad (4)$$

Vì x, y, z đôi một khác nhau nên (4) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Như vậy, với các bất đẳng thức như trên thì việc biến đổi lượng giác là quyết định sống còn với việc chứng minh bất đẳng thức. Sau khi sử dụng các biến đổi thì việc giải quyết bất đẳng thức trở nên dễ dàng thậm chí là hiển nhiên (!).

Ví dụ 2.1.2.

CMR : $$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab\sin 3x + ca\cos 2x - bc\sin x)$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$a^2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) + b^2(\sin^2 x + \cos^2 x) + c^2 \geq 2ab(\sin x\cos 2x + \sin 2x\cos x) + 2ca\cos 2x - 2bc\sin x$$

$$\Leftrightarrow (a^2\cos^2 2x + b^2\sin^2 x + c^2 - 2ab\cos 2x\sin x - 2ca\cos 2x + 2bc\sin x) + (a^2\sin^2 2x - 2ab\sin 2x\cos x + b^2\cos^2 x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a\cos 2x - b\sin x - c)^2 + (a\sin 2x - b\cos x)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta có đpcm.

Ví dụ 2.1.3.

CMR với ΔABC bất kỳ ta có :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$1 - \cos^2 A + \frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2} \leq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A - \cos A\cos(B-C) + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos A - \frac{\cos(B-C)}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2(B-C) \geq 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 2.1.4.

Cho $\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$ *là ba góc thỏa* $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$. *CMR :*

$$\left(\frac{\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha}{3}\right)^2 \leq 1 - 2\tan^2\alpha\tan^2\beta\tan^2\gamma$$

Lời giải :

Ta có :

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\tan^2\alpha} + \frac{1}{1+\tan^2\beta} + \frac{1}{1+\tan^2\gamma} = 2$$
$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha\tan^2\beta + \tan^2\beta\tan^2\gamma + \tan^2\gamma\tan^2\alpha = 1 - 2\tan^2\alpha\tan^2\beta\tan^2\gamma$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\left(\frac{\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha}{3}\right)^2 \leq \tan^2\alpha\tan^2\beta + \tan^2\beta\tan^2\gamma + \tan^2\gamma\tan^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow (\tan\alpha\tan\beta - \tan\beta\tan\gamma)^2 + (\tan\beta\tan\gamma - \tan\gamma\tan\alpha)^2 + (\tan\gamma\tan\alpha - \tan\alpha\tan\beta)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha\tan\beta = \tan\beta\tan\gamma \\ \tan\beta\tan\gamma = \tan\gamma\tan\alpha \\ \tan\gamma\tan\alpha = \tan\alpha\tan\beta \end{cases} \Leftrightarrow \tan\alpha = \tan\beta = \tan\gamma$

Ví dụ 2.1.5.

CMR trong ΔABC *bất kỳ ta có :*

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$$

Lời giải :

Ta có :

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Đặt $x = \cot\frac{A}{2}$; $y = \cot\frac{B}{2}$; $z = \cot\frac{C}{2}$ thì $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = xyz \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$x+y+z \geq 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z) \geq \frac{3(xy+yz+zx)}{xyz}$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cot A = \cot B = \cot C$
$\Leftrightarrow A = B = C$
$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 2.1.6.

CMR : $$\frac{1}{3+\sin x}+\frac{1}{3-\sin x} \leq \frac{2}{2+\cos x}$$

Lời giải :

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ và $\cos x \geq -1$ nên :
$3+\sin x > 0$; $3-\sin x > 0$ và $2+\cos > 0$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$6(2+\cos x) \leq 2\left(9-\sin^2 x\right)$$
$$\Leftrightarrow 12+6\cos x \leq 18-2\left(1-\cos^2 x\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-6\cos x+4 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\cos x-1)(\cos x-2) \geq 0$$

do $\cos x \leq 1$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.1.7.

CMR $\forall \frac{\pi}{3} \leq \alpha ; \beta < \frac{\pi}{2}$ *ta có :*

$$\frac{2}{\cos\alpha+\cos\beta}-1 \leq \left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\cos\beta}-1\right)$$

Lời giải :

Từ $\forall \frac{\pi}{3} \leq \alpha ; \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos\alpha ; \cos\beta \leq \frac{1}{2}$

do đó $\begin{cases} 0 < \cos\alpha + \cos\beta \le 1 \\ 0 < \cos\alpha\cos\beta \le \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Đặt $a = \cos\alpha + \cos\beta$; $b = \cos\alpha\cos\beta$

Bất đẳng thức đã cho trở thành :

$$\frac{2-a}{a} \le \sqrt{\frac{1-a+b}{b}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2-a}{a}\right)^2 \le \frac{1-a+b}{b}$$

$$\Leftrightarrow (2-a)^2 b \le a^2(1-a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^3 - a^2 - 4ab + 4b \le 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(a^2-4b) \le 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $a \le 1$ và $a^2 - 4b = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 \ge 0 \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.1.8.

Cho các góc nhọn a và b thỏa $\sin^2 a + \sin^2 b < 1$. *CMR :*

$$\sin^2 a + \sin^2 b < \sin^2(a+b)$$

Lời giải :

Ta có : $\sin^2 a + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = 1$

nên từ điều kiện $\sin^2 a + \sin^2 b < 1$ suy ra :

$$b < \frac{\pi}{2} - a \;;\; 0 < a + b < \frac{\pi}{2}$$

Mặt khác ta có :

$$\sin^2(a+b) = \sin^2 a\cos^2 b + \sin^2 b\cos^2 a + 2\sin a\sin b\cos a\cos b$$

nên thay $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$ vào thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$2\sin^2 a\sin^2 b < 2\sin a\sin b\cos a\cos b$$

$$\Leftrightarrow \sin a\sin b < \cos a\cos b$$

$$\Leftrightarrow 0 < \cos(a+b)$$

(để ý $2\sin a\sin b > 0$ nên có thể chia hai vế cho $2\sin a\sin b$)

Bất đẳng thức sau cùng hiển nhiên đúng do $0 < a + b < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.1.9.

Cho ΔABC không vuông. CMR :

$$3\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C-5\left(\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C\right)\le 9+\tan^2 A\tan^2 B+\tan^2 B\tan^2 C+\tan^2 C\tan^2 A$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$4\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C-4\left(\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C\right)-8\le\left(1+\tan^2 A\right)\left(1+\tan^2 B\right)\left(1+\tan^2 C\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\cos^2 A}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 B}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 C}-1\right)-4\left(\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 C}-3\right)-8\le\frac{1}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}-\left(\frac{1}{\cos^2 A\cos^2 B}+\frac{1}{\cos^2 B\cos^2 C}+\frac{1}{\cos^2 C\cos^2 A}\right)\le\frac{1}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos 2A+\cos 2B)+4\cos^2 C+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(A+B)\cos(A-B)+4\cos^2 C+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 C-4\cos C\cos(A-B)+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos C-\cos(A-B))^2+\sin^2(A-B)\ge 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ sau đây, theo ý kiến chủ quan của tác giả, thì lời giải của nó xứng đáng là bậc thầy về biến đổi lượng giác. Những biến đổi thật sự lắt léo kết hợp cùng bất đẳng thức một cách hợp lý đúng chỗ đã mang đến cho chúng ta một bài toán thật sự đặc sắc !!!

Ví dụ 2.1.10.

Cho nửa đường tròn bán kính R , C là một điểm tùy ý trên nửa đường tròn. Trong hai hình quạt nội tiếp hai đường tròn, gọi M và N là hai tiếp điểm của hai đường tròn với đường kính của nửa đường tròn đã cho. CMR : $MN\ge 2R\left(\sqrt{2}-1\right)$

Lời giải :

Gọi O_1,O_2 là tâm của hai đường tròn. Đặt $\angle CON=2\alpha$ (như vậy $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)

và $OO_1=R_1$; $OO_2=R_2$

Ta có :

$$\angle O_2ON=\alpha$$

$$\angle O_1OM=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

Vậy :

$$MN = MO + ON = R_1 \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + R_2 \cot\alpha = R_1 \tan\alpha + R_2 \cot\alpha$$

Trong Δ vuông O_1MO có :

$$R_1 = O_1O \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (R - R_1)\cos\alpha$$

$$R_1(1 + \cos\alpha) = R\cos\alpha \Rightarrow R_1 = \frac{R\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Tương tự :

$$R_2 = OO_2 \sin\alpha = (R - R_2)\sin\alpha \Rightarrow R_2 = \frac{R\sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$$

Do đó :

$$MN = \frac{R\cos\alpha}{1 + \cos\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{R\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

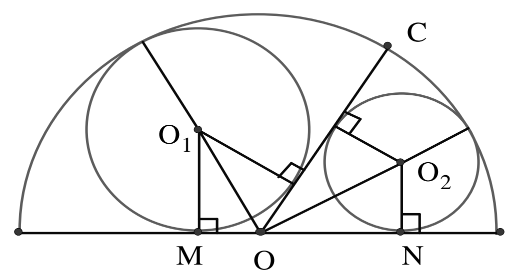
$$= \frac{R\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{R\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$$

$$= R\frac{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}{(1 + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)}$$

$$= R\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 .2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= R\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{2R}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}$$



mà $\sin\alpha + \cos\alpha \le \sqrt{2}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2} \Rightarrow MN \ge \frac{2R}{\sqrt{2} + 1} = 2R\left(\sqrt{2} - 1\right) \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow OC \perp MN$.

2.2. Sử dụng các bước đầu cơ sở :

Các bước đầu cơ sở mà tác giả muốn nhắc đến ở đây là phần ***1.2. Các đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.*** *Ta sẽ đưa các bất đẳng thức cần chứng minh về các bất đẳng thức cơ bản bằng cách biến đổi và sử dụng các đẳng thức cơ bản. Ngoài ra, khi tham gia các kỳ thi, tác giả khuyên bạn đọc nên chứng minh các đẳng thức, bất đẳng thức cơ bản sử dụng như một bổ đề cho bài toán.*

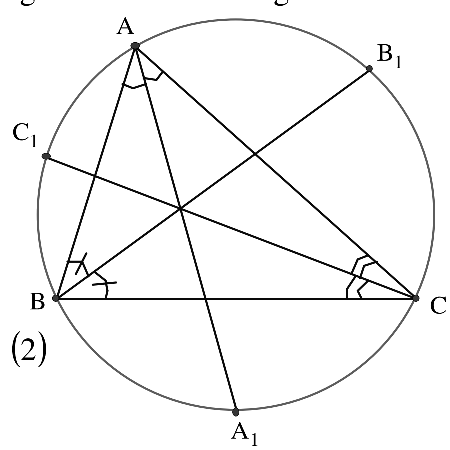
Ví dụ 2.2.1.

Cho ΔABC. Đường phân giác trong các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần lượt tại A_1, B_1, C_1. CMR :

$$S_{ABC} \le S_{A_1B_1C_1}$$

Lời giải :

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì nó cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$.



Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C \le 2R^2 \sin A_1 \sin B_1 \sin C_1 \quad (1)$$

Do $A_1 = \frac{B+C}{2}$; $B_1 = \frac{C+A}{2}$; $C_1 = \frac{A+B}{2}$ nên :

$$(1) \Leftrightarrow \sin A \sin B \sin C \le \sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad (2)$$

Vì $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} > 0$ nên :

$$(2) \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 2.2.2.

CMR trong mọi tam giác ta đều có :

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \le \frac{7}{4} + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Lời giải :

Ta có : $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \le \frac{3}{4} + \cos A + \cos B + \cos C \quad (1)$$

mà :

$$\cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C$$
$$\cos B = \sin C \sin A - \cos C \cos A$$
$$\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

nên :

$$(1) \Leftrightarrow \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \le \frac{3}{4} \quad (2)$$

Thật vậy hiển nhiên ta có :

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \le \frac{1}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \quad (3)$$

Mặt khác ta có : $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

$\Rightarrow (3)$ đúng $\Rightarrow (2)$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 2.2.3.

Cho ΔABC bất kỳ. CMR :

$$\frac{1}{1+2\cos A + 4\cos A \cos B} + \frac{1}{1+2\cos B + 4\cos B \cos C} + \frac{1}{1+2\cos C + 4\cos C \cos A} \ge 1$$

Lời giải :

Đặt vế trái bất đẳng thức cần chứng minh là T.
Theo **AM – GM** ta có :

$$T[3 + 2(\cos A + \cos B + \cos C) + 4(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A)] \ge 9 \quad (1)$$

mà : $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

và hiển nhiên : $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \le \frac{(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{3} \le \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow 3 + 2(\cos A + \cos B + \cos C) + 4(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A) \le 9 \quad (2)$$

Từ $(1),(2)$ suy ra $T \ge 1 \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.2.4.

CMR với mọi ΔABC bất kỳ, ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$2(ab+bc+ca) \geq 4\sqrt{3}S + a^2 + b^2 + c^2 \quad (1)$$

Ta có :

$$\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$$

$$\cot B = \frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$$

$$\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow 4S\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) \geq 4\sqrt{3}S + 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A} - \cot A\right) + \left(\frac{1}{\sin B} - \cot B\right) + \left(\frac{1}{\sin C} - \cot C\right) \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 2.2.5.

CMR trong mọi tam giác, ta có :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \leq \frac{5}{8} + \frac{r}{4R}$$

Lời giải :

Áp dụng công thức : $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, ta đưa bất đẳng thức đã cho về dạng tương đương sau :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{5}{8} \quad (1)$$

Ta có : $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \leq \frac{5}{8} \quad (2)$$

Theo **AM – GM**, ta có :

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \geq 2 \Rightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right) \geq 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \le \frac{1}{2}\left(\sin A\tan\frac{B}{2} + \sin B\tan\frac{A}{2}\right)$$

Tương tự ta có :

$$2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{2}\left(\sin B\tan\frac{C}{2} + \sin C\tan\frac{B}{2}\right)$$

$$2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \le \frac{1}{2}\left(\sin C\tan\frac{A}{2} + \sin A\tan\frac{C}{2}\right)$$

Từ đó suy ra :

$$2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left[\tan\frac{A}{2}(\sin B + \sin C) + \tan\frac{B}{2}(\sin C + \sin A) + \tan\frac{C}{2}(\sin A + \sin B)\right]$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \ge 2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

Khi đó :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \le$$

$$\le \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) - \frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C - 1) = \frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C) = \frac{1}{4}$$

mà $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \le \frac{5}{8}$$

$\Rightarrow (2)$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.2.6.

Cho ΔABC bất kỳ. CMR :

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C}\right)^3 \le \frac{a^2b^2c^2}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$$

Lời giải :

Ta có :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C} = 4S$$

nên bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$64S^3 \le \frac{a^2b^2c^2}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} \quad (1)$$

Mặt khác ta cũng có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow a^2 \ge 2bc - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow a^2 \ge 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\tan\frac{A}{2}} \ge \frac{4bc\sin^2\frac{A}{2}}{\tan\frac{A}{2}} = 2bc\sin A = 4S$$

Tương tự ta cũng có :

$$\frac{b^2}{\tan\frac{B}{2}} \ge 4S \quad ; \quad \frac{c^2}{\tan\frac{C}{2}} \ge 4S$$

$\Rightarrow (1)$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.2.7.

CMR trong mọi tam giác ta có :

$$(1+b+c-bc)\cos A + (1+c+a-ca)\cos B + (1+a+b-ab)\cos C \le 3$$

Lời giải :

Ta có vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh bằng :

$$(\cos A + \cos B + \cos C) + [(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C] - (ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B)$$

Đặt :

$$P = \cos A + \cos B + \cos C$$

$$Q = (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$$

$$R = ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B$$

Dễ thấy $P \le \frac{3}{2}$

Mặt khác ta có :

$$b\cos C + c\cos B = 2R(\sin B\cos C + \sin C\cos B) = 2R\sin(B+C) = 2R\sin A = a$$

Tương tự :

$$c\cos A + a\cos C = b$$

$$a\cos B + b\cos A = c$$

$$\Rightarrow Q = a + b + c$$

Và ta lại có :

$$ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2}{2} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

$$\Rightarrow P + Q + R \le \frac{3}{2} + (a+b+c) - \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = 3 - \frac{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}{3} \le 3$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.2.8.

Cho ΔABC bất kỳ. CMR :

$$R + r \ge \sqrt[4]{3}\sqrt{S}$$

Lời giải :

Ta có :

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{2R^3\sin A\sin B\sin C}{8} = \sqrt{\frac{S}{2\sin A\sin B\sin C}}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{S}{R(\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{\sqrt{8}\sqrt{2\sin A\sin B\sin C}}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Vậy :

$$R + r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2\sin A\sin B\sin C}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2\sin A\sin B\sin C}} + \frac{\sqrt{8}\sqrt{2\sin A\sin B\sin C}}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Theo **AM – GM** ta có :

$$\frac{R+r}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{S\sqrt{S}\sqrt{\sin A\sin B\sin C}}{8\sin A\sin B\sin C(\sin A + \sin B + \sin C)}}$$

mà :

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin A\sin B\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\Rightarrow R + r \ge \sqrt[3]{\frac{4S\sqrt{S}}{4\sqrt[4]{27}.3\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{3}\sqrt{S} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.2.9.

CMR trong mọi tam giác ta có :

$$\frac{8}{3}\left(\frac{S}{2r}\right)^2 \ge \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{bc\sqrt{bc}}{b+c}+\frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \ge \frac{8}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^2$$

Lời giải :

Theo **AM – GM** ta có :

$$\frac{ab\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{bc\sqrt{bc}}{b+c}+\frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \le \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Do $S = pr \Rightarrow \frac{8}{3}\left(\frac{S}{2r}\right)^2 = \frac{(a+b+c)^2}{6}$

Lại có :

$$\frac{ab+bc+ca}{2} \le \frac{(a+b+c)^2}{6}$$

$\Rightarrow \frac{8}{3}\left(\frac{S}{2r}\right)^2 \ge \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{bc\sqrt{bc}}{b+c}+\frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \Rightarrow$ vế trái được chứng minh xong.

Ta có :

$$a+b+c = 2R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$\sin A+\sin B+\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow a+b+c \le 3R\sqrt{3}$$

Theo **AM – GM** ta có :

$$S^2 = p\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)} \le p\frac{abc}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^2 \le \frac{8}{3}\cdot\frac{p\frac{abc}{8}}{\left(\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{9}{2}\cdot\frac{abc}{a+b+c} = \frac{9abc}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}$$

Một lần nữa theo **AM – GM** ta có :

$$\frac{9abc}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} \le \frac{9abc}{3.\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \le \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{bc\sqrt{bc}}{b+c}+\frac{ca\sqrt{ca}}{c+a}$$

$\Rightarrow$ vế phải chứng minh xong $\Rightarrow$ Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

Ví dụ 2.2.10.

Cho ΔABC bất kỳ. CMR :

$$\frac{a^8}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{b^8}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{c^8}{\cos^2\frac{C}{2}} \ge \left(\frac{abc\sqrt{6}}{3R}\right)^4$$

Lời giải :

Áp dụng **BCS** ta có :

$$\frac{a^8}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{b^8}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{c^8}{\cos^2\frac{C}{2}}\ge\frac{\left(a^4+b^4+c^4\right)^2}{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}$$

mà :

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{abc}{R}\right)^4=\left(16S^2\right)^2$$

Vì thế ta chỉ cần chứng minh : $a^4+b^4+c^4\ge 16S^2$

Trước hết ra có : $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$ (1)

Thật vậy : $(1)\Leftrightarrow a^2\left(a^2-bc\right)+b^2\left(b^2-ca\right)+c^2\left(c^2-ab\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left[a^2+(b+c)^2\right](b-c)^2+\left[b^2+(c+a)^2\right](c-a)^2+\left[c^2+(a+b)^2\right](a-b)^2\ge 0$ (đúng!)

Mặt khác ta cũng có :

$$16S^2=16p(p-a)(p-b)(p-c)=(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\quad(2)$$

Từ $(1),(2)$ thì suy ra ta phải chứng minh : $abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ (3)

Đặt :

$$x=a+b-c$$
$$y=b+c-a$$
$$z=c+a-b$$

vì a,b,c là ba cạnh của một tam giác nên $x,y,z>0$

Khi đó theo **AM – GM** thì :

$$abc=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}\ge\frac{\left(2\sqrt{xy}\right)\left(2\sqrt{yz}\right)\left(2\sqrt{zx}\right)}{8}=xyz=(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

$\Rightarrow(3)$ đúng $\Rightarrow$ đpcm.

2.3 Đưa về vector và tích vô hướng :

Phương pháp này luôn đưa ra cho bạn đọc những lời giải bất ngờ và thú vị. Nó đặc trưng cho sự kết hợp hoàn giữa đại số và hình học. Những tính chất của vector lại mang đến lời giải thật sáng sủa và đẹp mắt. Nhưng số lượng các bài toán của phương pháp này không nhiều.

Ví dụ 2.3.1.

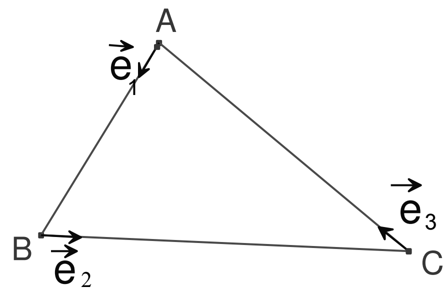
CMR trong mọi tam giác ta có :

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

Lời giải :

Lấy các vector đơn vị $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ lần lượt trên các cạnh AB, BC, CA.

Hiển nhiên ta có :



$\left(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}\right)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 3 + 2\cos\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right) + 2\cos\left(\vec{e_2}, \vec{e_3}\right) + 2\cos\left(\vec{e_3}, \vec{e_1}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow 3 - 2\left(\cos A + \cos B + \cos C\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.3.2.

Cho ΔABC nhọn. CMR :

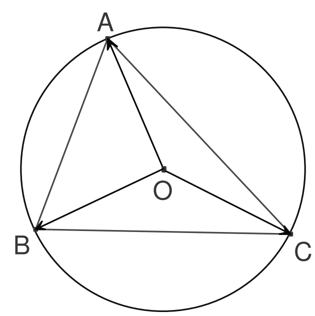
$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}$$

Lời giải :

Gọi O, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm ΔABC.

Ta có : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

Hiển nhiên :



$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2\left[\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) + \cos\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) + \cos\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)\right] \ge 0$

$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2\left(\cos 2C + \cos 2A + \cos 2B\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow$ đpcm.

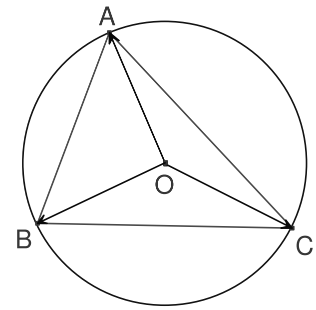
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = 0 \Leftrightarrow O \equiv G \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 2.3.3.

Cho ΔABC *nhọn. CMR* $\forall x, y, z \in R$ *ta có :*

$$yz\cos 2A + zx\cos 2B + xy\cos 2C \geq -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Lời giải :



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
Ta có :

$$\left(x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2yz\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + 2zx\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos 2C + 2yz\cos 2A + 2zx\cos 2B \geq 0$$

$$\Leftrightarrow yz\cos 2A + zx\cos 2B + xy\cos 2C \geq -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$\Rightarrow$ đpcm.

2.4. Kết hợp các bất đẳng thức cổ điển :

*Về nội dung cũng như cách thức sử dụng các bất đẳng thức chúng ta đã bàn ở chương 1: **“Các bước đầu cơ sở”**. Vì thế ở phần này, ta sẽ không nhắc lại mà xét thêm một số ví dụ phức tạp hơn, thú vị hơn.*

Ví dụ 2.4.1.

CMR $\forall \Delta ABC$ *ta có :*

$$\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải :

Theo **AM – GM** ta có :

$$\frac{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

Mặt khác :

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

Suy ra :

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\geq$$

$$\geq\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{9}{2}\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}\qquad(1)$$

mà ta cũng có : $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow\frac{9}{2}\cdot\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}\geq\frac{9}{2}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{2}\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) :

$$\Rightarrow\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\geq\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.4.2.

Cho ΔABC nhọn. CMR :

$$(\cos A+\cos B+\cos C)(\tan A+\tan B+\tan C)\geq\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải :

Vì ΔABC nhọn nên $\cos A,\cos B,\cos C,\tan A,\tan B,\tan C$ đều dương.

Theo **AM – GM** ta có : $\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\geq\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}$

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)}{\cos A\cos B\cos C}=\frac{\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C}{2\cos A\cos B\cos C}$$

$$\geq \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{\sin A\cos A\sin B\cos B\sin C\cos C}}{2\cos A\cos B\cos C}$$

Suy ra :

$$(\cos A+\cos B+\cos C)(\tan A+\tan B+\tan C)\geq \frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C\sin A\cos A\sin B\cos B\sin C\cos C}}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{9}{2}\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}\quad (1)$$

Mặt khác : $\tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}\cdot\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}\geq \frac{9}{2}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{2}\quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$(\cos A+\cos B+\cos C)(\tan A+\tan B+\tan C)\geq\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.4.3.

Cho ΔABC tùy ý. CMR :

$$\left(\tan\frac{A}{2}+\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}\right)+\left(\tan\frac{B}{2}+\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}\right)+\left(\tan\frac{C}{2}+\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\right)\geq 4\sqrt{3}$$

Lời giải :

Xét $f(x)=\tan x\ \ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó : $f''(x)=$

Theo **Jensen** thì : $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}\ \ (1)$

Xét $g(x)=\cot x\ \ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Và $g''(x)=2(1+\cot^2 x)\cot x>0\ \ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Theo **Jensen** thì : $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}\quad (2)$

Vậy $(1)+(2)\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.4.4.

CMR trong mọi tam giác ta có :

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\geq\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Lời giải :

Ta sử dụng bổ đề sau :
Bổ đề : Cho $x, y, z > 0$ và $x+y+z \leq S$ thì :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geq\left(1+\frac{2}{S}\right)^3 \quad (1)$$

Chứng minh bổ đề :
Ta có :

$$VT(1)=1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)+\frac{1}{xyz} \quad (2)$$

Theo **AM – GM** ta có :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}\geq\frac{9}{S} \quad (3)$$

Dấu bằng xảy ra trong $(3) \Leftrightarrow x=y=z=\frac{S}{3}$

Tiếp tục theo **AM –GM** thì :

$$S \geq x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

$$\Rightarrow \frac{S^3}{27}\geq xyz \Rightarrow \frac{1}{xyz}\geq\frac{27}{S^3} \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{S}{3}$

Vẫn theo **AM – GM** ta lại có :

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{xyz}\right)^2} \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{S}{3}$

Từ $(4)(5)$ suy ra :

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geq\frac{27}{S^2} \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong $(4)(5) \Leftrightarrow x=y=z=\frac{S}{3}$

Từ $(2)(3)(4)(6)$ ta có :

$$VT(1) \geq 1 + \frac{9}{S} + \frac{27}{S^2} + \frac{27}{S^3} = \left(1 + \frac{3}{S}\right)^3$$

Bổ đề được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong $(3)(4)(6)$

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{S}{3}$$

Áp dụng với $x = \sin A > 0, y = \sin B > 0, z = \sin C > 0$

mà ta có $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ vậy ở đây $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Theo bổ đề suy ra ngay :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin A = \sin B = \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 2.4.5.

CMR trong mọi tam giác ta có :

$$l_a + l_b + l_c \leq p\sqrt{3}$$

Lời giải :

Ta có : $l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$ (1)

Theo **AM – GM** ta có $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \leq 1$ nên từ (1) suy ra :

$$l_a \leq \sqrt{p(p-a)} \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow b = c$

Hoàn toàn tương tự ta có :

$$l_b \leq \sqrt{p(p-b)} \quad (3)$$

$$l_c \leq \sqrt{p(p-c)} \quad (4)$$

Dấu bằng trong $(3)(4)$ tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Từ $(2)(3)(4)$ suy ra :

$$l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{p}\left(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}\right) \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong $(2)(3)(4) \Leftrightarrow a = b = c$

Áp dụng **BCS** ta có :

$$\left(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)^2 \le 3(3p-a-b-c)$$
$$\Rightarrow \sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \le \sqrt{3p} \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Từ $(5)(6)$ ta có : $l_a+l_b+l_c \le p\sqrt{3} \quad (7)$

Đẳng thức trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong $(5)(6) \Leftrightarrow a=b=c$ $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 2.4.6.

Cho ΔABC bất kỳ. CMR :

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \ge 4-\frac{2r}{R}$$

Lời giải :

Ta có : $S=\dfrac{abc}{4R}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow \frac{2r}{R}=\frac{8S^2}{pabc}=\frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}=\frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{abc}$$

$$=\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc}=\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-a^3-b^3-c^3-2abc}{abc}$$

$$\Rightarrow 4-\frac{2r}{R}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+6-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\le\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.4.7.

Cho ΔABC nhọn. CMR :

$$\left(\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}-c\right)\left(\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}-a\right)\left(\frac{c}{\cos C}+\frac{a}{\cos A}-b\right)\ge 27abc$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}-\sin C\right)\left(\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}-\sin A\right)\left(\frac{\sin C}{\cos C}+\frac{\sin A}{\cos A}-\sin B\right)\ge 27\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin C}{\cos A\cos B}-\sin C\right)\left(\frac{\sin A}{\cos B\cos C}-\sin A\right)\left(\frac{\sin B}{\cos C\cos A}-\sin B\right)\geq 27\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}\cdot\frac{1-\cos B\cos C}{\cos B\cos C}\cdot\frac{1-\cos C\cos A}{\cos C\cos A}\geq 27$$

Đặt $\begin{cases} x=\tan\dfrac{A}{2}\\ y=\tan\dfrac{B}{2}\\ z=\tan\dfrac{C}{2}\\ 0<x,y,z<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos A=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\\ \cos B=\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\\ \cos C=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\end{cases}$ và $\begin{cases}\tan A=\dfrac{2x}{1-x^2}\\ \tan B=\dfrac{2y}{1-y^2}\\ \tan C=\dfrac{2z}{1-z^2}\end{cases}$

Ta có : $$\frac{1-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}=\frac{1-\dfrac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}}{\dfrac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}}=\frac{2(x^2+y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)}$$

Mặt khác ta có : $x^2+y^2\geq 2xy$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}\geq\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}=\tan A\tan B \quad (1)$$

Tương tự : $\dfrac{1-\cos B\cos C}{\cos B\cos C}\geq\tan B\tan C \quad (2)$

$\dfrac{1-\cos C\cos A}{\cos C\cos A}\geq\tan C\tan A \quad (3)$

Nhân vế theo vế ba bất đẳng thức $(1)(2)(3)$ ta được :

$$\frac{1-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}\cdot\frac{1-\cos B\cos C}{\cos B\cos C}\cdot\frac{1-\cos C\cos A}{\cos C\cos A}\geq\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C$$

Ta đã biết : $\tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt{3}\Rightarrow\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C\geq 27$

Suy ra :

$$\frac{1-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}\cdot\frac{1-\cos B\cos C}{\cos B\cos C}\cdot\frac{1-\cos C\cos A}{\cos C\cos A}\geq 27$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.4.8.

CMR $\forall\Delta ABC$ *ta có :*

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right)$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương dương với :

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{36}{35}\left(\frac{(a+b+c)^2}{4}+\frac{2abc}{a+b+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow 35\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 9(a+b+c)^2+\frac{72abc}{a+b+c}$$

Theo **BCS** thì : $(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$$\Rightarrow 9(a+b+c)^2 \le 27\left(a^2+b^2+c^2\right) \quad (1)$$

Lại có : $\begin{cases} \dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc} \\ \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 9abc$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 72abc$$

$$\Leftrightarrow 8\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge \frac{72abc}{a+b+c} \quad (2)$$

Lấy (1) cộng (2) ta được :

$$27\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 9(a+b+c)^2+\frac{72abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow 35\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 9(a+b+c)^2+\frac{72abc}{a+b+c}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.4.9.

CMR trong ΔABC ta có :

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \ge 6$$

Lời giải :

Theo **AM – GM** ta có :

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \ge 3\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}} \quad (1)$$

mà :

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)(\sin A+\sin B)}{\sin A\sin B\sin C}$$

Lại theo **AM – GM** ta có :

$$\begin{cases}\sin A+\sin B\ge 2\sqrt{\sin A\sin B}\\ \sin B+\sin C\ge 2\sqrt{\sin B\sin C}\\ \sin C+\sin A\ge 2\sqrt{\sin C\sin A}\end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)(\sin A+\sin B)\ge 8\sin A\sin B\sin C$$

$$\Rightarrow \frac{(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)(\sin A+\sin B)}{\sin A\sin B\sin C}\ge 8 \quad (2)$$

Từ $(1)(2)$ suy ra :

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\ge 3\sqrt[3]{8}=6$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.4.10.

CMR trong mọi ΔABC *ta có :*

$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A\ge 9\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$R\sin A\sin B+R\sin B\sin C+R\sin C\sin A\ge 9r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\cdot\frac{a}{2}\ge 9r^2$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 36r^2$$

Theo công thức hình chiếu :

$$a=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{a}\right);\ b=r\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{a}\right);\ c=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{a}\right)$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca=r^2\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)+r^2\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)+$$
$$+r^2\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

Theo **AM – GM** ta có :

$$\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)\geq\left(2\sqrt{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}\right)\left(2\sqrt{\cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}}\right)=4\sqrt{\cot^2 C\cot A\cot B}\quad(1)$$

Tương tự :

$$\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)\geq 4\sqrt{\cot^2 A\cot B\cot C}\quad(2)$$
$$\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\geq 4\sqrt{\cot^2 B\cot C\cot A}\quad(3)$$

Từ $(1)(2)(3)$ suy ra :

$$\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)+\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)+$$
$$+\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)\geq 12\sqrt[3]{\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}}\quad(4)$$

Mặt khác ta có : $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}\Rightarrow\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}\geq 27\quad(5)$

Từ $(4)(5)$ suy ra : $12\sqrt[3]{\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}}\geq 12.3=36\quad(6)$

Từ $(4)(6)$ suy ra đpcm.

2.5. Tận dụng tính đơn điệu của hàm số :

Chương này khi đọc thì bạn đọc cần có kiến thức cơ bản về đạo hàm, khảo sát hàm số của chương trình 12 THPT. Phương pháp này thực sự có hiệu quả trong các bài bất đẳng thức lượng giác. Để có thể sử dụng tốt phương pháp này thì bạn đọc cần đến những kinh nghiệm giải toán ở các phương pháp đã nêu ở các phân trước.

Ví dụ 2.5.1.

CMR : $\sin x>\frac{2x}{\pi}$ *với* $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải :

Xét $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{\pi}$ với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

Xét $g(x)=x\cos x-\sin x$ với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow g'(x)=-x\sin x<0\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

$\Rightarrow g(x)<g(0)=0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)>f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.5.2.

CMR : $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x$ *với* $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{\sin x}{x}>(\cos)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\cos)^{-\frac{1}{3}}-x>0$$

Xét $f(x)=\sin x(\cos x)^{-\frac{1}{3}}-x$ với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta có : $f'(x)=(\cos x)^{\frac{2}{3}}-\dfrac{1}{3}\sin^2 x(\cos x)^{-\frac{4}{3}}-1$

$$f''(x)=\frac{2}{3}(\cos x)^{-\frac{1}{3}}(1-\sin x)+\frac{4}{9}\sin^3 x(\cos x)^{-\frac{7}{4}}>0\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow f'(x)$ đồng biến trong khoảng đó $\Rightarrow f'(x)>f'(0)=0$

$\Rightarrow f(x)$ cũng đồng biến trong khoảng đó $\Rightarrow f(x)>f(0)=0\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.5.3.

CMR nếu a là góc nhọn hay $a=0$ *thì ta có :*

$$2^{\sin a}+2^{\tan a}\ge 2^{a+1}$$

Lời giải :

Áp dụng **AM – GM** cho hai số dương $2^{\sin a}$ và $2^{\tan a}$ ta có :

$$2^{\sin a}+2^{\tan a}\geq 2\sqrt{2^{\sin a}2^{\tan a}}=2\sqrt{2^{\sin a+\tan a}}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh : $\sin a+\tan a>2a$ với $0<a<\dfrac{\pi}{2}$

Xét $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta có :

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2=\frac{\cos^3 x-2\cos^2 x+1}{\cos^2 x}=\frac{(1-\cos x)[1+\cos x(1-\cos x)]}{\cos^2 x}>0\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng đó $\Rightarrow f(a)>f(0)$ với $a\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \sin a+\tan a>2a$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2^{\sin a+\tan a}}\geq 2\sqrt{2^{2a}}=2^{a+1}$$

$\Rightarrow 2^{\sin a}+2^{\tan a}\geq 2^{a+1}$ (khi $a=0$ ta có dấu đẳng thức xảy ra).

Ví dụ 2.5.4.

CMR trong mọi tam giác ta đều có :

$$1+\cos A\cos B+\cos A\cos B+\cos A\cos B\leq\frac{13}{12}(\cos A+\cos B+\cos C)+\cos A\cos B\cos C$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$1-2\cos A\cos B\cos C+2(\cos A\cos B+\cos A\cos B+\cos A\cos B)+1\geq\frac{13}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2(\cos A\cos B+\cos A\cos B+\cos A\cos B)+1\geq\frac{13}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow (\cos A+\cos B+\cos C)^2+1\leq\frac{13}{6}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C+\frac{1}{\cos A+\cos B+\cos C}\leq\frac{13}{6}$$

Đặt $t=\cos A+\cos B+\cos C\Rightarrow 1<t\leq\dfrac{3}{2}$

Xét hàm đặc trưng : $f(t)=t+\dfrac{1}{t}$ với $t\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right]$

Ta có : $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}>0\ \forall t\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right]\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.

$$\Rightarrow f(x)\leq f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{6}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.5.5.

Cho ΔABC *có chu vi bằng 3. CMR :*

$$3\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right) + 8R\sin A\sin B\sin C \geq \frac{13}{4R^2}$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$3.4R^2\sin^2 A + 3.4R^2\sin^2 B + 3.4R^2\sin^2 C + 4(2R\sin A)(2R\sin B)(2R\sin C) \geq 13$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13$$

Do vai trò của a,b,c là như nhau nên ta có thể giả sử $a \leq b \leq c$

Theo giả thiết : $a + b + c = 3 \Rightarrow a + b > c \Rightarrow 3 - c > c \Rightarrow 1 \leq c < \frac{3}{2}$

Ta biến đổi :

$$\begin{aligned} T &= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \\ &= 3\left(a^2 + b^2\right) + 3c^2 + 4abc \\ &= 3\left[(a+b)^2 - 2ab\right] + 3c^2 + 4abc \\ &= 3(3-c)^2 + 3c^2 + 4abc - 6ab \\ &= 3(3-c)^2 + 3c^2 + 2ab(2c-3) \\ &= 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2ab(3-2c) \end{aligned}$$

vì $c < \frac{3}{2} \Rightarrow 2c - 3 < 0 \Rightarrow 3 - 2c > 0$

và $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-c}{2}\right)^2 \Rightarrow -2ab \geq -2\left(\frac{3-c}{2}\right)^2$

Do đó : $T \geq 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2\left(\frac{3-c}{2}\right)^2(3-2c)$

$$= c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} = f(c)$$

Xét $f(c) = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2}$ với $1 \leq c < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 3c \geq 0 \quad \forall c \in \left[1;\frac{3}{2}\right) \Rightarrow f(c)$ đồng biến trên khoảng đó.

$\Rightarrow f(c) \geq f(1) = 13 \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.5.6.

Cho ΔABC *bất kỳ. CMR :* $\frac{r^2}{S} + \frac{p}{r} \geq \frac{28}{3\sqrt{3}}$

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{cases} \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \\ \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{cases} \Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p-a}{p}\cdot\frac{p-b}{p}\cdot\frac{p-c}{p}}$$

và $\frac{r^2}{S} = \frac{S}{p^2} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2} = \sqrt{\frac{p-a}{p}\cdot\frac{p-b}{p}\cdot\frac{p-c}{p}}$

Do đó : $\frac{r^2}{S} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

Mặt khác :

$$\frac{p}{r} = \frac{a+b+c}{2(p-a)\tan\frac{A}{2}} = \frac{a+b+c}{(b+c-a)\tan\frac{A}{2}} = \frac{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}{2R(\sin B + \sin C - \sin A)\tan\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \ge \frac{28}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}} + \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \ge \frac{28}{3\sqrt{3}}$$

Đặt $t = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \Rightarrow t \ge 3\sqrt{3}$

Xét $f(t) = t + \frac{1}{t}$ với $t \ge 3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0 \quad \forall t \ge 3\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \min f(t) = f\left(3\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{28}{3\sqrt{3}} \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.5.7.

CMR với mọi ΔABC *ta có :*

$$(2R+a)(2R+b)(2R+c)<8R^3e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{2R+a}{2R}\cdot\frac{2R+b}{2R}\cdot\frac{2R+c}{R}<e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{a}{2R}\right)\left(1+\frac{b}{2R}\right)\left(1+\frac{c}{2R}\right)<e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C)<e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Xét $f(x)=\ln(1+x)-x$ với $0<x<1$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}<0\ \ \forall x\in(0;1)$$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó $\Rightarrow f(x)<f(0)=0$

$$\Rightarrow \ln(1+x)<x$$

Lần lượt thay $x=\{\sin A,\sin B,\sin C\}$ vào bất đẳng thức trên rồi cộng lại ta được :

$$\ln(1+\sin A)+\ln(1+\sin B)+\ln(1+\sin C)<\sin A+\sin B+\sin C$$

$$\Leftrightarrow \ln[(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C)]<\sin A+\sin B+\sin C$$

$$\Leftrightarrow (1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C)<e^{\sin A+\sin B+\sin C}$$

mà $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C)<e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.5.8.

Cho ΔABC. *CMR :*

$$\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right)\left(1+\cos^2 C\right)\ge\frac{125}{16}$$

Lời giải :

Không mất tổng quát giả sử $C=\min\{A,B,C\}$.Ta có :

$$\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right)=\left(1+\frac{1+\cos 2A}{2}\right)\left(1+\frac{1+\cos 2B}{2}\right)$$

Xét $P=4\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right)=(3+\cos 2A)(3+\cos 2B)$

$$\Rightarrow P=9+3(\cos 2A+\cos 2B)+\cos 2A\cos 2B$$

$$=9+6\cos(A+B)\cos(A-B)+\frac{1}{2}[\cos(2A+2B)+\cos(2A-2B)]$$

$$= 9 - 6\cos C\cos(A-B) + \frac{1}{2}\left[2\cos^2(A+B) + 2\cos^2(A+B) - 2\right]$$

$$= 9 - 6\cos C\cos(A-B) + \cos^2 C + \cos^2(A+B) - 1$$

do $|\cos(A-B)| \le 1$

$$\Rightarrow P \ge 9 - 6\cos C + \cos^2 C = (3-\cos C)^2$$

mà $\cos C > 0$

$$\Rightarrow P\left(1+\cos^2 C\right) \ge (3-\cos C)^2\left(1+\cos^2 C\right)$$

Mặt khác ta có : $0 < C \le 60^0 \Rightarrow \cos C \ge \frac{1}{2}$

Xét $f(x) = (3-x)^2\left(1+x^2\right)$ với $x \in \left[\frac{1}{2};1\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(x-3)(x-1)(2x-1) \ge 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right)$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.

$$\Rightarrow f(x) \ge f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{125}{16} \Rightarrow \left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right)\left(1+\cos^2 C\right) \ge \frac{125}{16} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.5.9.

Cho ΔABC bất kỳ. CMR :

$$2\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) - (\cot B + \cot C) \le 2\sqrt{3}$$

Lời giải :

Xét $f(x) = \frac{2}{\sin x} - \cot x$ với $x \in (0;\pi)$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{2\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \max f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{\sin x} - \cot x \le \sqrt{3}$$

Thay x bởi B, C trong bất đẳng thức trên ta được :

$$\begin{cases} \frac{2}{\sin B} - \cot B \le \sqrt{3} \\ \frac{2}{\sin C} - \cot C \le \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.5.10.

CMR : $\frac{1}{3} < \sin 20^0 < \frac{7}{20}$

Lời giải :

Đặt $a = \sin 20^0 \Rightarrow 0 < a < \sin 30^0 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{2}$

Ta có : $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^0 = \sin 3.20^0 = 3\sin 20^0 - 4\sin^3 20^0 \Rightarrow 3a - 4a^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow 4a^3 - 3a + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow a$ là nghiệm của phương trình : $4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Xét đa thức : $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ta có : $f(-1) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-2}{2} < 0$

$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow f(-1)f(0) < 0$ Bởi vì $f(x)$ liên tục trên toàn trục số .Do đó đa thức $f(x)$ có một nghiệm thực trên khoảng $(-1;0)$

Lại có : $\begin{cases} f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{27\sqrt{3}-46}{54} > 0 \\ f\left(\frac{7}{20}\right) = \frac{1000\sqrt{3}-1757}{2000} < 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{7}{20}\right) < 0$

$\Rightarrow$ đa thức $f(x)$ có một nghiệm thực trên khoảng $\left(\frac{1}{3};\frac{7}{20}\right)$

Lại có : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{2} < 0$ và $f(1) = \frac{\sqrt{3}+2}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$

$\Rightarrow$ đa thức $f(x)$ có một nghiệm thực trên khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$

Bởi vì $a \in \left(0;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a$ là nghiệm thực trên khoảng $\left(\frac{1}{3};\frac{7}{20}\right) \Rightarrow$ đpcm.

2.6. Bài tập :

Cho ΔABC . CMR :

2.6.1. $\sqrt{3}(\cos 2A - \cos 2C) + \cos B \le \frac{5}{2}$

2.6.2. $\sqrt{3}\cos 2A + 2\cos 2B + 2\sqrt{3}\cos 2C \ge -4$

2.6.3. $(\sqrt{5}+1)(\cos 2A + \cos 2B) - (3+\sqrt{5})\cos 2C \le 4 + \sqrt{5}$

2.6.4. $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge 4 - \sqrt{3}$ với ΔABC có một góc $\ge \frac{2\pi}{3}$

2.6.5. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \le \frac{1}{4r^2}$

2.6.6. $\frac{abc}{r} \ge \frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c}$

2.6.7. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 2$

2.6.8. $\frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 2B} + \frac{1}{\sin 2C} \ge \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\tan A \tan B \tan C$

2.6.9. $a\tan\frac{A}{2} + b\tan\frac{B}{2} + c\tan\frac{C}{2} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$

2.6.10. $\frac{\sin A \sin B \sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} \le \frac{1}{6\sqrt{3}}$

2.6.11. $1 + \cos A \cos B \cos C \ge 9\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

2.6.12. $m_a + m_b + m_c \le 4R + r$

2.6.13. $h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \le p^2$

2.6.14. $a^2(p-b)(p-c) + b^2(p-c)(p-a) + c^2(p-a)(p-b) \le p^2 R^2$

2.6.15. $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \ge \cos A \cos B \cos C$

Chương 3 :

Áp dụng vào một số vấn đề khác

“Có học thì phải có hành”

Sau khi đã xem xét các bất đẳng thức lượng giác cùng các phương pháp chứng minh thì ta phải biết vận dụng những kết quả đó vào các vấn đề khác.

Trong các chương trước ta có các ví dụ về bất đẳng thức lượng giác mà dấu bằng thường xảy ra ở trường hợp đặc biệt : tam giác đều, cân hay vuông …Vì thế lại phát sinh ra một dạng bài mới : định tính tam giác dựa vào điều kiện cho trước.

Mặt khác với những kết quả của các chương trước ta cũng có thể dẫn đến dạng toán tìm cực trị lượng giác nhờ bất đẳng thức. Dạng bài này rất hay : kết quả được “giấu” đi, bắt buộc người làm phải tự “mò mẫm” đi tìm đáp án cho riêng mình. Công việc đó thật thú vị ! Và tất nhiên muốn giải quyết tốt vấn đề này thì ta cần có một “vốn” bất đẳng thức “kha khá”.

Bây giờ chúng ta sẽ cùng kiểm tra hiệu quả của các bất đẳng thức lượng giác trong chương 3 : **“Áp dụng vào một số vấn đề khác”**

Mục lục :

3.1. Định tính tam giác :

3.1.1. Tam giác đều :

Tam giác đều có thể nói là tam giác đẹp nhất trong các tam giác. Ở nó ta có được sự đồng nhất giữa các tính chất của các đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác, tâm ngoại tiếp, tâm nội tiếp, tâm bàng tiếp tam giác … Và các dữ kiện đó lại cũng trùng hợp với điều kiện xảy ra dấu bằng ở các bất đẳng thức lượng giác đối xứng trong tam giác. Do đó sau khi giải được các bất đẳng thức lượng giác thì ta cần phải nghĩ đến việc vận dụng nó trở thành một phương pháp khi nhận dạng tam giác đều.

Ví dụ 3.1.1.1.

CMR ΔABC *đều khi thỏa :* $m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$

Lời giải :

Theo **BCS** ta có :

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \le 3\left(m_a^{\ 2} + m_b^{\ 2} + m_c^{\ 2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 \le \frac{9}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 \le 9R^2\left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right)$$

mà : $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$

$$\Rightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 \le 9R^2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{81}{4}R^2$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3.1.1.2.

CMR nếu thỏa $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{4c}$ *thì* ΔABC *đều.*

Lời giải :

Ta có :

$$\frac{\sqrt{ab}}{4c} \le \frac{a+b}{8c} = \frac{2R(\sin A + \sin B)}{2R.8\sin C} = \frac{2R.2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2R.8.2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{8\sin\frac{C}{2}} \le \frac{1}{8\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \le \frac{1}{8\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \le 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) - 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{A+B}{2} - 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} \ge 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3.1.1.3.

CMR ΔABC *đều khi nó thỏa :* $2(h_a + h_b + h_c) = (a+b+c)\sqrt{3}$

Lời giải :

Điều kiện đề bài tương đương với :

$$2.2p\left(\frac{r}{a} + \frac{r}{b} + \frac{r}{c}\right) = (a+b+c)\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{a} + \frac{r}{b} + \frac{r}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mặt khác ta có :

$$\frac{1}{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cot\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{B}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right)$$

Tương tự :

$$\frac{1}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}} \le \frac{1}{4}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}} \le \frac{1}{4}\left(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}+\frac{1}{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}} \le \frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \le \frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right) \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3.1.1.4.

CMR nếu thỏa $S = 3Rr\frac{\sqrt{3}}{2}$ *thì* ΔABC *đều.*

Lời giải :

Ta có :

$$S = 2R^2\sin A\sin B\sin C = 2R^2.2.2.2.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = r4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\le r4R\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2}Rr$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3.1.1.5.

CMR ΔABC *đều khi nó thỏa* $m_a m_b m_c = pS$

Lời giải :

Ta có :

$$m_a^{\,2} = \frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right) = \frac{1}{4}\left(b^2+c^2+2bc\cos A\right) \ge \frac{1}{2}bc\left(1+\cos A\right) = bc\cos^2\frac{A}{2}$$

mà :

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \cos^2 A = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

$$\Rightarrow m_a \ge \sqrt{p(p-a)}$$

Tương tự :

$$\begin{cases} m_b \ge \sqrt{p(p-b)} \\ m_c \ge \sqrt{p(p-c)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_a m_b m_c \ge p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pS$$

$\Rightarrow$ đpcm.

3.1.2. Tam giác cân :

Sau tam giác đều thì tam giác cân cũng đẹp không kém. Và ở đây thì chúng ta sẽ xét những bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra khi hai biến bằng nhau và khác biến thứ ba. Ví dụ $A = B = \frac{\pi}{6}; C = \frac{2\pi}{3}$ *. Vì thế nó khó hơn trường hợp xác định tam giác đều.*

Ví dụ 3.1.2.1.

CMR ΔABC *cân khi nó thỏa điều kiện* $\tan^2 A + \tan^2 B = 2\tan^2\frac{A+B}{2}$ *và nhọn.*

Lời giải :

Ta có : $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = \frac{2\sin(A+B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)} = \frac{2\sin C}{\cos(A-B)-\cos C}$

vì $\cos(A-B) \le 1 \Rightarrow \cos(A-B) - \cos C \le 1 - \cos C = 2\sin^2\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2\sin C}{\cos(A-B)-\cos C} \ge \frac{2\sin C}{2\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin^2\frac{C}{2}} = 2\cot\frac{C}{2} = 2\tan\frac{A+B}{2}$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B \ge 2\tan\frac{A+B}{2}$$

Từ giả thiết : $\tan^2 A + \tan^2 B = 2\tan^2\frac{A+B}{2} \le 2\left(\frac{\tan A + \tan B}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow 2\left(\tan^2 A + \tan^2 B\right) \le \tan^2 A + \tan^2 B + 2\tan A\tan B$$

$$\Leftrightarrow (\tan A - \tan B)^2 \le 0$$
$$\Leftrightarrow \tan A = \tan B$$
$$\Leftrightarrow A = B$$
$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3.1.2.2.

CMR ΔABC *cân khi thỏa* $h_a = \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$

Lời giải :

Trong mọi tam giác ta luôn có : $h_a \le l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$

mà $b + c \ge 2\sqrt{bc} \Rightarrow \dfrac{2bc}{b+c} \le \dfrac{bc}{\sqrt{bc}} = \sqrt{bc}$

$$\Rightarrow \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \le \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2} \Rightarrow h_a \le \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC cân $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3.1.2.3.

CMR nếu thỏa $r + r_a = 4R\sin\frac{B}{2}$ *thì* ΔABC *cân.*

Lời giải :

Ta có :

$$r + r_a = (p-b)\tan\frac{B}{2} + p\tan\frac{B}{2} = (2p-b)\tan\frac{B}{2} = (a+c)\tan\frac{B}{2} = 2R(\sin A + \sin C)\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$= 4R\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = 4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = 4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2} \le 4R\sin\frac{B}{2}$$

$\Rightarrow r + r_a \le 4R\sin\dfrac{B}{2}$ Đẳng thức xảy ra khi ΔABC cân $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3.1.2.4.

CMR nếu $S = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)$ *thì* ΔABC *cân.*

Lời giải :

Ta có : $a^2 + b^2 \le 2ab \Rightarrow \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right) \ge \frac{1}{2}ab \ge \frac{1}{2}ab\sin C = S$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right) \ge S \Rightarrow \Delta ABC$ cân nếu thỏa điều kiện đề bài.

Ví dụ 3.1.2.5.

CMR ΔABC *cân khi thỏa* $2\cos A + \cos B + \cos C = \frac{9}{4}$

Lời giải :

Ta có :

$$2\cos A + \cos B + \cos C = 2\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= -4\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = -\left(2\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cos^2\frac{B-C}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4}$$

$$= -\left(2\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\sin^2\frac{B-C}{2} + \frac{9}{4} \le \frac{9}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $B = C \Rightarrow$ đpcm.

3.1.3. Tam giác vuông :

Cuối cùng ta xét đến tam giác vuông, đại diện khó tính nhất của tam giác đối với bất đẳng thức lượng giác. Dường như khi nhận diện tam giác vuông, phương pháp biến đổi tương đương các đẳng thức là được dùng hơn cả. Và ta hiếm khi gặp bài toán nhận diện tam giác vuông mà cần dùng đến bất đẳng thức lượng giác.

Ví dụ 3.1.3.1.

CMR ΔABC *vuông khi thỏa* $3\cos B + 6\sin C + 4\sin B + 8\cos C = 15$

Lời giải :

Theo **BCS** ta có :

$$\begin{cases} 3\cos B + 4\sin B \le \sqrt{\left(3^2 + 4^2\right)\left(\cos^2 B + \sin^2 B\right)} = 5 \\ 6\sin C + 8\cos C \le \sqrt{\left(6^2 + 8^2\right)\left(\sin^2 C + \cos^2 C\right)} = 10 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3\cos B + 4\sin B + 6\sin C + 8\cos C \le 15$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 3\cos B + 4\sin B = 5 \\ 6\sin C + 8\cos C = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos B}{3} = \dfrac{\sin B}{4} \\ \dfrac{\sin C}{6} = \dfrac{\cos C}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan B = \dfrac{4}{3} \\ \cot C = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \tan B = \cot C \Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

3.2. Cực trị lượng giác :

Đây là lĩnh vực vận dụng thành công và triệt để bất đẳng thức lượng giác vào giải toán. Đặc biệt trong dạng bài này, gần như ta là người đi trong sa mạc không biết phương hướng đường đi, ta sẽ không biết trước kết quả mà phải tự mình dùng các bất đẳng thức đã biết để tìm ra đáp án cuối cùng. Vì lẽ đó mà dạng toán này thường rất "khó xơi", nó đòi hỏi ta phải biết khéo léo sử dụng các bất đẳng thức cũng như cần một vốn liếng kinh nghiệm về bất đẳng thức không nhỏ.

Ví dụ 3.2.1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x,y) = \frac{a\sin^4 x + b\cos^4 y}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{a\cos^4 x + b\sin^4 y}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}$$

với a,b,c,d *là các hằng số dương.*

Lời giải :

Đặt $f(x,y) = af_1 + bf_2$ *với* $f_1 = \dfrac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \dfrac{\cos^4 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}$

$$f_2 = \frac{\cos^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\sin^4 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}$$

Ta có : $c + d = c\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + d\left(\sin^2 y + \cos^2 y\right)$

Do đó :

$$(c+d)f_1 = \left[\left(c\sin^2 x + d\cos^2 y\right) + \left(c\cos^2 x + d\sin^2 y\right)\right]\left[\frac{\sin^4 x}{c\sin^2 x + d\cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c\cos^2 x + d\sin^2 y}\right]$$

$$\geq \left(\sqrt{c\sin^2 x + d\cos^2 y}\,\frac{\sin^2 x}{\sqrt{c\sin^2 x + d\cos^2 y}} + \sqrt{c\cos^2 x + d\sin^2 y}\,\frac{\cos^2 x}{\sqrt{c\cos^2 x + d\sin^2 y}}\right)^2 = 1$$

$\Rightarrow f_1 \geq \dfrac{1}{c+d}$ Tương tự : $f_2 \geq \dfrac{1}{c+d}$. Vậy $f(x,y) = af_1 + bf_2 \geq \dfrac{a+b}{c+d}$

Ví dụ 3.2.2.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :
$P = \cos 3A + \cos 3B - \cos 3C$

Lời giải :

Ta có : $\cos 3C = \cos 3[\pi - (A+B)] = \cos[3\pi - 3(A+B)] = -\cos 3(A+B)$ nên

$$P = \cos 3A + \cos 3B + \cos 3(A+B) = 2\cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\cos^2 3\left(\frac{A+B}{2}\right) - 1$$

$$\Rightarrow P + \frac{3}{2} = 2\cos^2 3\left(\frac{A+B}{2}\right) + 2\cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{1}{2} = f(x,y)$$

$$\Delta' = \cos^2 3\left(\frac{A-B}{2}\right) - 1 \leq 0 \Rightarrow P \geq -\frac{3}{2}$$

$$P = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ \cos 3\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\cos 3\left(\dfrac{A-B}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 3\left(\dfrac{A-B}{2}\right) = 1 \\ \cos 3\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\cos 3\left(\dfrac{A-B}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \cos 3A = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{2\pi}{9} \\ A = \dfrac{4\pi}{9} \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $P_{\min} = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B = \dfrac{2\pi}{9}, C = \dfrac{5\pi}{9} \\ A = B = \dfrac{4\pi}{9}, C = \dfrac{\pi}{9} \end{array}\right.$

Ví dụ 3.2.3.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$$

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned} P &= \frac{3}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} - 1 \\ &= \frac{3}{3 - \left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right)} - 1 \\ &\le \frac{3}{3 - \frac{9}{4}} - 1 = 3 \end{aligned}$$

Do đó : $P_{\max} = 3 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 3.2.4.

Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$

Lời giải :

Điều kiện : $\sin x \ge 0, \cos x \ge 0$

Ta có : $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x} \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Mặt khác : $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x} \ge -\sqrt{\cos x} \ge -1$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi$

Vậy $\begin{cases} y_{\max} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ y_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = k2\pi \end{cases}$

Ví dụ 3.2.5.

Cho hàm số $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$. *Hãy tìm Max y trên miền xác định của nó.*

Lời giải :

Vì sinx và cosx không đồng thời bằng 1 nên y xác định trên R.

Y_0 thuộc miền giá trị của hàm số khi và chỉ khi $Y_0 = \dfrac{2+\cos x}{\sin x + \cos x - 2}$ có nghiệm.

$\Leftrightarrow Y_0 \sin x + (Y_0 - 1)\cos x = 2Y_0 + 2$ có nghiệm.

$$(2Y_0 + 2)^2 \le {Y_0}^2 + (Y_0 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2{Y_0}^2 + 10Y_0 + 3 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5-\sqrt{19}}{2} \le Y_0 \le \frac{-5+\sqrt{19}}{2}$$

Vậy $y_{\max} = \dfrac{-5+\sqrt{19}}{2}$

3.3. Bài tập :

CMR ΔABC đều nếu nó thỏa một trong các đẳng thức sau :

3.3.1. $\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = \dfrac{3}{4}$

3.3.2. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sin A + \sin B + \sin C$

3.3.3. $\dfrac{1}{\sin 2A} + \dfrac{1}{\sin 2B} + \dfrac{1}{\sin 2C} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\tan A\tan B\tan C$

3.3.4. $\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\cot A + \cot B + \cot C}\right)^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$

3.3.5. $\dfrac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a+b+c} = \dfrac{1}{2}$

3.3.6. $m_a m_b m_c = abc\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

3.3.7. $l_a l_b l_c = abc\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

3.3.8. $bc\cot\dfrac{A}{2} + ca\cot\dfrac{B}{2} + ab\cot\dfrac{C}{2} = 12S$

3.3.9. $\left(1+\dfrac{1}{\sin A}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin B}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sin C}\right) = 5 + \dfrac{26\sqrt{3}}{9}$

3.3.10. $\dfrac{\sin A\sin B\sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \dfrac{1}{6\sqrt{3}}$

Chương 4 :

Một số chuyên đề bài viết hay, thú vị liên quan đến bất đẳng thức và lượng giác

Đúng như tên gọi của mình, chương này sẽ bao gồm các bài viết chuyên đề về bất đẳng thức và lượng giác. Tác giả của chúng đều là các giáo viên, học sinh giỏi toán mà tác giả đánh giá rất cao. Nội dung của các bài viết chuyên đề đều dễ hiểu và mạch lạc. Bạn đọc có thể tham khảo nhiều kiến thức bổ ích từ chúng. Vì khuôn khổ chuyên đề nên tác giả chỉ tập hợp được một số bài viết thật sự là hay và thú vị :

Mục lục :

Xung quanh bài toán Ecdôs trong tam giác

Nguyễn Văn Hiến
(Thái Bình)

Bất đẳng thức trong tam giác luôn là đề tài rất hay. Trong bài viết nhỏ này, chúng ta cùng trao đổi về một bất đẳng thức quen thuộc : **Bất đẳng thức Ecdôs**.

Bài toán 1 : Cho một điểm M trong ΔABC. Gọi R_a, R_b, R_c là khoảng cách từ M đến A, B, C và d_a, d_b, d_c là khoảng cách từ M đến BC, CA, AB thì :

$$R_a + R_b + R_c \ge 2(d_a + d_b + d_c) \quad (E)$$

Giải : Ta có :

$$R_a \ge h_a - d_a = \frac{2S_{ABC} - 2S_{BMC}}{a} = \frac{2S_{AMB} + 2S_{AMC}}{a} = \frac{cd_c + bd_b}{a}$$

Bằng cách lấy đối xứng M qua phân giác góc A

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow R_a \ge \frac{bd_c + cd_b}{a} \\ \text{Tương tự : } \quad &R_b \ge \frac{ad_c + cd_a}{b} \\ &R_c \ge \frac{ad_b + bd_a}{c} \end{aligned}\right\} (1)$$

$$\Rightarrow R_a + R_b + R_c \ge d_a\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + d_b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + d_c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \ge 2(d_a + d_b + d_c) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Thực ra (E) chỉ là trường hợp riêng của tổng quát sau :

Bài toán 2 : Chứng minh rằng :

$$R_a^{\ k} + R_b^{\ k} + R_c^{\ k} \ge 2^k\left(d_a^{\ k} + d_b^{\ k} + d_c^{\ k}\right) \quad (2)$$

với $1 \ge k > 0$

Giải : Trước hết ta chứng minh :

Bổ đề 1 : $\forall x, y > 0$ và $1 \ge k > 0$ thì :

$$(x + y)^k \ge 2^{k-1}\left(x^k + y^k\right) \quad (H)$$

Chứng minh :

$$(H) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + 1\right)^k \ge 2^{k-1}\left(\frac{x^k}{y^k} + 1\right) \Leftrightarrow f(a) = (a+1)^k - 2^{k-1}\left(a^k + 1\right) \ge 0 \text{ với } \frac{x}{y} = a > 0$$

Vì $f'(a) = k\left[(a+1)^{k-1} - (2a)^{k-1}\right] = 0 \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $k = 1$. Với $k = 1$ thì (H) là đẳng thức đúng.

Do $a > 0$ và $1 > k > 0$ thì ta có :

$f(a) \ge 0 \ \forall a > 0$ và $1 > k > 0$

$\Rightarrow (H)$ được chứng minh.
Trở lại bài toán 2 :
Từ hệ (1) ta có :

$$R_a{}^k \geq \left(\frac{bd_c}{a}+\frac{cd_b}{a}\right)^k \geq 2^{k-1}\left[\left(\frac{bd_c}{a}\right)^k+\left(\frac{cd_b}{a}\right)^k\right]$$

(Áp dụng bổ đề (H) với $x=\frac{bd_c}{a}$; $y=\frac{cd_b}{a}$)

Tương tự :

$$R_b{}^k \geq 2^{k-1}\left[\left(\frac{ad_c}{b}\right)^k+\left(\frac{cd_a}{b}\right)^k\right]$$

$$R_c{}^k \geq 2^{k-1}\left[\left(\frac{ad_b}{c}\right)^k+\left(\frac{bd_a}{c}\right)^k\right]$$

$$\Rightarrow R_a{}^k+R_b{}^k+R_c{}^k \geq 2^{k-1}\left\{d_a{}^k\left[\left(\frac{b}{c}\right)^k+\left(\frac{c}{b}\right)^k\right]+d_b{}^k\left[\left(\frac{a}{c}\right)^k+\left(\frac{c}{a}\right)^k\right]+d_c{}^k\left[\left(\frac{a}{b}\right)^k+\left(\frac{b}{a}\right)^k\right]\right\}$$

$$\geq 2^k\left(d_a{}^k+d_b{}^k+d_c{}^k\right)$$

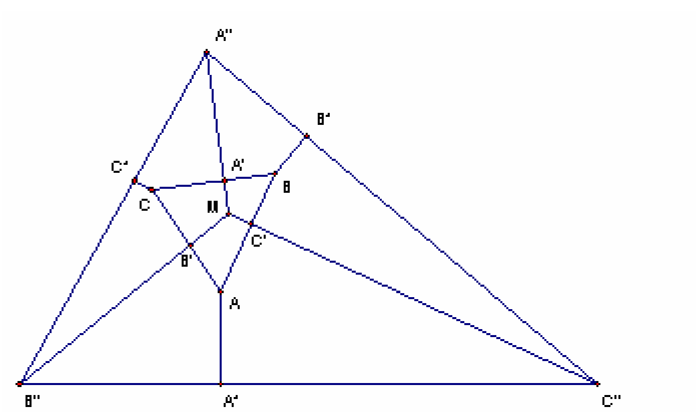
$\Rightarrow$ đpcm.
Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều và M là tâm tam giác. Áp dụng (E) ta chứng minh được bài toán sau :

Bài toán 3 : Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c} \geq 2\left(\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}\right) \quad (3)$$

Giải : Thực hiện phép nghịch đảo tâm M, phương tích đơn vị ta được :

$$\begin{cases} MA^* = \frac{1}{R_a} \\ MB^* = \frac{1}{R_b} \\ MC^* = \frac{1}{R_c} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} MA'' = \frac{1}{d_a} \\ MB'' = \frac{1}{d_b} \\ MC'' = \frac{1}{d_c} \end{cases}$$



Áp dụng (E) trong $\Delta A''B''C''$:

$$MA''+MB''+MC'' \geq 2(MA^*+MB^*+MC^*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c} \geq 2\left(\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}\right)$$

$\Rightarrow$ đpcm.
Mở rộng kết quả này ta có bài toán sau :

Bài toán 4 : Chứng minh rằng :

$$2^k\left(d_a{}^k+d_b{}^k+d_c{}^k\right) \geq R_a{}^k+R_b{}^k+R_c{}^k \quad (4)$$

với $0 > k \ge -1$

Hướng dẫn cách giải : Ta thấy (4) dễ dàng được chứng minh nhờ áp dụng (2) trong phép biến hình nghịch đảo tâm M, phương tích đơn vị. Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều và M là tâm tam giác.

Bây giờ với $k > 1$ thì từ hệ (1) ta thu được ngay :

Bài toán 5 : Chứng minh rằng :

$R_a{}^2 + R_b{}^2 + R_c{}^2 > 2\left(d_a{}^2 + d_b{}^2 + d_c{}^2\right)$ (5)

Xuất phát từ bài toán này, ta thu được những kết quả tổng quát sau :

Bài toán 6 : Chứng minh rằng :

$R_a{}^k + R_b{}^k + R_c{}^k > 2\left(d_a{}^k + d_b{}^k + d_c{}^k\right)$ (6)

với $k > 1$

Giải : Chúng ta cũng chứng minh một bổ đề :

Bổ đề 2 : $\forall x, y > 0$ và $k > 1$ thì :

$$(x+y)^k \ge x^k + y^k \quad (G)$$

Chứng minh :

$(G) \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y} + 1\right)^k > \dfrac{x^k}{y^k} + 1 \Leftrightarrow g(a) = (a+1)^k - a^k - 1 > 0$ (đặt $\dfrac{x}{y} = a > 0$)

Vì $g'(a) = k\left[(a+1)^{k-1} - a^{k-1}\right] > 0 \ \forall a > 0 \ ; k > 1$

$\Rightarrow g(a) > 0 \ \forall a > 0 \ ; k > 1$

$\Rightarrow (G)$ được chứng minh xong.

Sử dụng bổ đề (G) vào bài toán (6) :

Từ hệ (1) :

$R_a{}^k \ge \left(\dfrac{bd_c}{a} + \dfrac{cd_b}{a}\right)^k > \left(\dfrac{bd_c}{a}\right)^k + \left(\dfrac{cd_b}{a}\right)^k$ (đặt $x = \dfrac{bd_c}{a}$; $y = \dfrac{cd_b}{a}$)

Tương tự :

$$R_b{}^k > \left(\frac{ad_c}{b}\right)^k + \left(\frac{cd_a}{b}\right)^k$$

$$R_c{}^k > \left(\frac{ad_b}{c}\right)^k + \left(\frac{bd_a}{c}\right)^k$$

$$\Rightarrow R_a{}^k + R_b{}^k + R_c{}^k > d_a{}^k\left[\left(\frac{b}{c}\right)^k + \left(\frac{c}{b}\right)^k\right] + d_b{}^k\left[\left(\frac{a}{c}\right)^k + \left(\frac{c}{a}\right)^k\right] + d_c{}^k\left[\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k\right]$$
$$\ge 2\left(d_a{}^k + d_b{}^k + d_c{}^k\right)$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 7 : Chứng minh rằng :

$$d_a{}^k + d_a{}^k + d_a{}^k > 2\left(R_a{}^k + R_a{}^k + R_a{}^k\right) \quad (7)$$

với $k < -1$

Hướng dẫn cách giải : Ta thấy (7) cũng được chứng minh dễ dàng nhờ áp dụng (6) trong phép biến hình nghịch đảo tâm M, phương tích đơn vị. Đẳng thức không thể xảy ra trong (6) và (7).

Xét về quan hệ giữa (R_a, R_b, R_c) với (d_a, d_b, d_c) ngoài bất đẳng thức (E) và những mở rộng của nó, chúng ta còn gặp một số bất đẳng thức rất hay sau đây. Việc chứng minh chúng xin dành cho bạn đọc :

1) $R_aR_bR_c \ge 8d_ad_bd_c$

2) $\dfrac{d_b + d_c}{R_a} + \dfrac{d_a + d_c}{R_b} + \dfrac{d_a + d_b}{R_c} \le 3$

3) $R_aR_bR_c \ge (d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b + d_c)$

4) $R_a{}^2R_b{}^2R_c{}^2 \ge (R_ad_a + R_bd_b)(R_ad_a + R_cd_c)(R_bd_b + R_cd_c)$

Ứng dụng của đại số vào việc phát hiện và chứng minh bất đẳng thức trong tam giác

Lê Ngọc Anh
(HS chuyên toán khóa 2005 – 2008
Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)

1/ Chúng ta đi từ bài toán đại số sau: **Với** $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **ta luôn có:**

$$\frac{x}{2} < tg\frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi} < \sin x < x.$$

Chứng minh: Ta chứng minh 2 bất đẳng thức: $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ và $tg\frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$.

Đặt $f(x) = \frac{1}{x}\sin x$ là hàm số xác định và liên tục trong $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có: $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Đặt $g(x) = x\cos x - \sin x$ trong $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ khi đó $g'(x) = -x\sin x \le 0 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trong đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nên $g(x) < g(0) = 0$ với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Do đó $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ hay $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ với $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $h(x) = \frac{1}{x}tgx$ xác định và liên tục trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $h'(x) = \frac{x - \sin x}{2x^2\cos^2\frac{x}{2}} > 0$ $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $h(x)$ đồng biến, do đó $h(x) < h\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ hay $tg\frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$ với $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Còn 2 bất đẳng thức $tg\frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ và $\sin x < x$ dành cho bạn đọc tự chứng minh.

Bây giờ mới là phần đáng chú ý:

Xét ΔABC: $BC = a$, $BC = b$, $AC = b$. Gọi ***A, B, C*** là độ lớn các góc bằng radian; ***r, R, p, S*** lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nửa chu vi và diện tích tam giác; l_a, h_a, m_a, r_a, tương ứng là độ dài đường phân giác, đường cao, đường trung tuyến và bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh ***A...***

Bài toán 1: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{p\pi}{4R} < A\cos^2 x + B\cos^2 B + C\cos^2 C < \frac{p}{R}$$

Nhận xét:

Từ định lí hàm số sin quen thuộc trong tam giác ta có: $\sin A+\sin B+\sin B=\frac{p}{R}$ và **bài toán đại số** ta dễ dàng đưa ra biến đổi sau $A\cos^2 A<2tg\frac{A}{2}\cos^2 A=\sin A<\frac{4}{\pi}A\cos^2 A$, từ đó đưa đến lời giải như sau.

Lời giải:

Ta có: $A\cos^2 A<2tg\frac{A}{2}\cos^2 A=\sin A<\frac{4}{\pi}A\cos^2 A \Rightarrow \sum A\cos^2 A<\sum\sin A=\frac{p}{R}$

và $\frac{4}{\pi}\sum A\cos^2 A>\sum\sin A=\frac{p}{R}\Rightarrow\sum A\cos^2 A>\frac{p\pi}{4R}$. Từ đây suy ra đpcm.

Trong một tam giác ta có nhận xét sau: $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1$ kết hợp với $tg\frac{x}{2}<\frac{2x}{\pi}$ nên ta có $\frac{2A}{\pi}\frac{2B}{\pi}+\frac{2B}{\pi}\frac{2C}{\pi}+\frac{2C}{\pi}\frac{2A}{\pi}>tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1 \Rightarrow$ $A.B+B.C+C.A>\frac{\pi^2}{4}$ (1). Mặt khác $tg\frac{x}{2}>\frac{x}{2}$ nên ta cũng dễ dàng có $\frac{A}{2}\frac{B}{2}+\frac{B}{2}\frac{C}{2}+\frac{C}{2}\frac{A}{2}<tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1$ từ đây ta lại có $A.B+B.C+C.A<4$ (2). Từ (1) và (2) ta có bài toán mới.

<u>**Bài toán 2**</u>**:** Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{\pi^2}{4}<A.B+B.C+C.A<4$$

Lưu ý: Khi dùng cách này để sáng tạo bài toán mới thì đề toán là ΔABC phải là nhọn vì trong **bài toán đại số** thì $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Lời giải bài toán tương tự như nhận xét ở trên.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}$ thì ta có ngay $A.B+B.C+C.A\le\frac{(A+B+C)^2}{3}=\frac{\pi^2}{3}$. Từ đây ta có bài toán "chặt" hơn và "đẹp" hơn:

$$\frac{\pi^2}{4}\langle A.B+B.C+C.A\le\frac{\pi^2}{3}$$

Bây giờ ta thử đi từ công thức $\mathbf{l_a}$, $\mathbf{h_a}$, $\mathbf{m_a}$, $\mathbf{r_a}$ để tìm ra các công thức mới.

Trong ΔABC ta luôn có: $2S=bc\sin A=cl_a\sin\frac{A}{2}+bl_a\sin\frac{A}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_a} = \frac{b+c}{2bc\cos\frac{A}{2}} > \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c} > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} > \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c} > \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right).$$

Như vậy chúng ta có **Bài toán 3**.

Bài toán 3: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c} > \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)$$

Mặt khác, ta lại có $\frac{bc}{l_a} = \frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}} = \frac{2R(\sin B+\sin C)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)}$. Áp dụng **bài toán đại số** ta được:

$$\frac{R(B+C)}{\pi - A}\pi > \frac{bc}{l_a} > \frac{R\frac{2(B+C)}{\pi}}{\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}} \Rightarrow \frac{\pi R(B+C)}{B+C} > \frac{bc}{l_a} > \frac{4R(B+C)}{\pi(B+C)} \Rightarrow \pi R > \frac{bc}{l_a} > \frac{4R}{\pi}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có: $\pi R > \frac{ab}{l_c} > \frac{4R}{\pi}$ và $\pi R > \frac{ca}{l_b} > \frac{4R}{\pi}$. Từ đây, cộng 3 chuỗi bất đẳng thức ta được:

Bài toán 4: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{12R}{\pi} < \frac{ab}{l_c}+\frac{bc}{l_a}+\frac{ca}{l_b} < 3\pi R$$

Trong tam giác ta có kết quả $\sin A = \frac{h_b}{c} = \frac{h_c}{b}$, $\sin B = \frac{h_c}{a} = \frac{h_a}{c}$ và $\sin C = \frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}$, mà từ kết quả của **bài toán đại số** ta dễ dàng có $2 < \sin A + \sin B + \sin C < \pi$, mà $2(\sin A+\sin B+\sin C) = h_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + h_b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) + h_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, từ đây ta có được **Bài toán 5.**

Bài toán 5: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$4 < h_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + h_b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) + h_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) < 2\pi$$

Ta xét tiếp bài toán sau:

Bài toán 6: Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ta luôn có:

$$\frac{4}{\pi^2}\left(A^2+B^2+C^2\right) < \frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3R^2} < A^2+B^2+C^2$$

Nhận xét: Liên hệ với m_a^2 trong tam giác ta có $m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$, từ đó ta suy ra $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)=3R^2\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)$ và từ đưa đến lời giải.

Lời giải:

Áp dụng **bài toán đại số** ta được: $\frac{4x^2}{\pi^2}<\sin^2 x<x^2$ ta lần lượt có: $\frac{4A^2}{\pi^2}<\sin^2 A<A^2$, $\frac{4B^2}{\pi^2}<\sin^2 B<B^2$ và $\frac{4C^2}{\pi^2}<\sin^2 C<C^2$.

Cộng 3 chuỗi bất đẳng thức trên ta được:

$\frac{4}{\pi^2}\left(A^2+B^2+C^2\right)<\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C<A^2+B^2+C^2$, mà ta có: $m_a^2+m_b^2+m_c^2=3R^2\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin C^2\right)\Leftrightarrow\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3R^2}=\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)$, từ đây ta được: $\frac{4}{\pi^2}\left(A^2+B^2+C^2\right)<\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3R^2}<A^2+B^2+C^2$ (đpcm).

Bây giờ ta thử sáng tạo một bất đẳng thức liên quan tới $\mathbf{r_a}$, ta có công thức tính $\mathbf{r_a}$ là $r_a=ptg\frac{A}{2}$, từ **bài toán đại số** $\frac{x}{2}<tg\frac{x}{2}<\frac{2x}{\pi}$ chắc chắn ta dễ dàng tìm thấy $\frac{A}{2}<\frac{r_a}{p}<\frac{2A}{\pi}$, tương tự ta cũng có $\frac{B}{2}<\frac{r_a}{p}<\frac{2B}{\pi}$ và $\frac{C}{2}<\frac{r_a}{p}<\frac{2C}{\pi}$, cộng 3 chuỗi bất đẳng thức ta thu được $\frac{A+B+C}{2}<\frac{r_a+r_b+r_c}{p}<\frac{2(A+B+C)}{\pi}$ và ta thu được **Bài toán 7.**

<u>Bài toán 7</u>: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\frac{A+B+C}{2}<\frac{r_a+r_b+r_c}{p}<\frac{2\left(A+B+C\right)}{\pi}$$

Ta tìm hiểu bài toán sau:

<u>Bài toán 8</u>: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

$$\pi\left(2R-r\right)<aA+bB+cC<4\left(2R-r\right)$$

Nhận xét: Ta có các kết quả: $r_a=ptg\frac{A}{2}$, $r_b=ptg\frac{B}{2}$, $r_c=ptg\frac{C}{2}$, $r=\left(p-a\right)tg\frac{A}{2}=$ $=\left(p-b\right)tg\frac{B}{2}=\left(p-c\right)tg\frac{C}{2}$ dẫn đến $r_a=r+atg\frac{A}{2}$, $r_b=r+btg\frac{B}{2}$, $r_c=r+ctg\frac{C}{2}$ và $r_a+r_b+r_c=4R+r$ (các kết quả này bạn đọc tự chứng minh), từ đó ta suy ra $4R+r=3r+ptg\frac{A}{2}+ptg\frac{A}{2}+ptg\frac{A}{2}$ và nhờ kết quả này ta dễ dàng đánh giá tổng $aA+bB+cC$ từ **bài toán đại số** nên ta dễ có lời giải như sau.

Lời giải:

Ta có: $r_a = ptg\frac{A}{2}$, $r_b = ptg\frac{B}{2}$, $r_c = ptg\frac{C}{2}$, $r = (p-a)tg\frac{A}{2} = (p-b)tg\frac{B}{2} = (p-c)tg\frac{C}{2}$, từ đó dẫn đến $r_a = r + atg\frac{A}{2}$, $r_b = r + btg\frac{B}{2}$, $r_c = r + ctg\frac{C}{2}$. Mà ta lại có: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ suy ra $4R + r = 3r + ptg\frac{A}{2} + ptg\frac{A}{2} + ptg\frac{A}{2}$. Áp dụng **bài toán đại số** ta được:

● $4R + r = 3r + ptg\frac{A}{2} + ptg\frac{A}{2} + ptg\frac{A}{2} < 3r + \frac{2}{\pi}(aA + bB + cC)$

$\Leftrightarrow \pi(2R - r) < aA + bB + cC$

● $4R + r = 3r + ptg\frac{A}{2} + ptg\frac{A}{2} + ptg\frac{A}{2} > 3r + \frac{1}{2}(aA + bB + cC)$

$\Leftrightarrow 4(2R - r) > aA + bB + cC$

Kết hợp 2 điều trên ta có điều phải chứng minh.

Sau đây là các bài toán được hình thành từ các công thức quen thuộc để các bạn luyện tập:

Bài toán: Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn ta luôn có:

a/ $2\pi p - 8(R + r) < aA + bB + cC < 2\pi p - 2\pi(R + r)$.

b/ $\frac{\pi S}{2} < (p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) < 2S$.

c/ $abc < a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c) < \frac{\pi}{2}abc$.

d/ $4 < l_a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + l_b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + l_c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) < 2\pi$.

2/Chúng ta xét hàm: $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ **với** $\forall x \in (0, \pi)$.

Ta có $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trong $(0, \pi)$ và $f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$. Đặt $g(x) = \sin x - x\cos x$, $x \in (0, \pi)$, ta có $g'(x) = x\sin x \geq 0 \Rightarrow g(x)$ đồng biến trong đoạn $(0, \pi) \Rightarrow g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ nên hàm $f(x)$ đồng biến .

Chú ý 3 bất đẳng thức đại số:

1.Bất đẳng thức AM-GM:

Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$, ta luôn có:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

2.Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

Cho 2 bộ n số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ trong đó $b_i > 0, i = \overline{1, n}$. Ta luôn có:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

3.Bất đẳng thức Chebyshev:

Cho 2 dãy $(a_1,a_2,...,a_n)$ và $(b_1,b_2,...,b_n)$ cùng tăng hoặc cùng giảm, tức là:

$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \end{cases}$, thì ta có:

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}$$

Dấu "=" xảy ra $\left[\begin{array}{l} a_1=a_2=...=a_n \\ b_1=b_2=...=b_n \end{array}\right.$.

Nếu 2 dãy đơn điệu ngược chiều thì đổi chiều dấu bất đẳng thức.

Xét trong tam giác ABC có $A \geq B$ (A,B số đo hai góc A,B của tam giác theo radian).

- $A \geq B \Rightarrow \frac{A}{\sin A} \geq \frac{B}{\sin B}$ (theo chứng minh trên thì hàm $f(x)=\frac{x}{sinx}$)

$\Rightarrow \frac{A}{\frac{a}{2R}} \geq \frac{B}{\frac{b}{2R}} \Rightarrow \frac{A}{B} \geq \frac{a}{b}$, mà $A \geq B \Leftrightarrow a \geq b$. Như vậy ta suy ra nếu $a \geq b$ thì $\frac{A}{B} \geq \frac{a}{b}$ (i).

- Hoàn toàn tương tự : $a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{A}{a} \geq \frac{B}{b} \geq \frac{C}{c}$ và như vậy ta có $(a-b)\left(\frac{A}{a}-\frac{B}{b}\right) \geq 0$, $(b-c)\left(\frac{B}{b}-\frac{C}{c}\right) \geq 0$ và $(c-a)\left(\frac{C}{c}-\frac{A}{a}\right) \geq 0$ .Cộng 3

bất đẳng thức ta được $\sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{A}{a}-\frac{B}{b}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 2(A+B+C) \geq \sum_{cyc}(b+c)\frac{A}{a}$ (1).

- Cộng $A+B+C$ vào 2 vế của (1) ta thu được: $3(A+B+C) \geq (a+b+c)\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}\right)$ (2)

- Trừ $A+B+C$ vào 2 vế của (1) ta thu được: $(A+B+C) \geq 2\sum_{cyc}(p-a)\frac{A}{a}$ (3).

Chú ý rằng $A+B+C=\pi$ và $a+b+c=2p$ nên (2) $\Leftrightarrow 3\pi \geq 2p\sum_{cyc}\frac{A}{a} \Leftrightarrow$ $\sum_{cyc}\frac{A}{a} \leq \frac{3\pi}{2p}$ (ii), và (3) $\Leftrightarrow \sum_{cyc}(p-a)\frac{A}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ (iii).

- Mặt khác ta có thể áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 bộ số

$\left(\frac{A}{a},\frac{B}{b},\frac{C}{c}\right)$ và $(p-a, p-b, p-c)$. Ta có: $a \geq b \geq c \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{a} \geq \frac{B}{b} \geq \frac{C}{c} \\ p-a \leq p-b \leq p-c \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{cyc}(p-a)\frac{A}{a}}{3} \leq \frac{(p-a+p-b+p-c)}{3}\frac{\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}\right)}{3} \Leftrightarrow \sum_{cyc}(p-a)\frac{A}{a} \leq \frac{p\sum_{cyc}\frac{A}{a}}{3}$$. Mà

$\sum_{cyc}\frac{A}{a} \leq \frac{3\pi}{2p}$ ta suy ra: $\sum_{cyc}(p-a)\frac{A}{a} \leq \frac{p\sum_{cyc}\frac{A}{a}}{3} \leq \frac{p\frac{3\pi}{2p}}{3}$ hay $\sum_{cyc}(p-a)\frac{A}{a} \leq \frac{p\sum_{cyc}\frac{A}{a}}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ (iv).

- Ta chú ý đến hai bất đẳng thức (ii) và (iii):

-Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số $\frac{A}{a},\frac{B}{b},\frac{C}{c}$ ta được: $\sum_{cyc}\frac{A}{a} \geq 3\left(\frac{A.B.C}{a.b.c}\right)^{\frac{1}{3}}$ kết hợp với bất đẳng thức (ii) ta suy ra $3\left(\frac{A.B.C}{a.b.c}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{3\pi}{2p} \Leftrightarrow \frac{a.b.c}{A.B.C} \geq \left(\frac{2p}{\pi}\right)^3$ (v). Mặt khác, ta lại có $\sum_{cyc}\frac{a}{A} \geq 3\left(\frac{a.b.c}{A.B.C}\right)^{\frac{1}{3}}$, mà theo (v) ta dễ dàng suy ra $\left(\frac{a.b.c}{A.B.C}\right)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{2p}{\pi}$, từ đó ta có bất đẳng thức $\sum_{cyc}\frac{a}{A} \geq \frac{6p}{\pi}$ (vi).

-Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz , ta có :

$\sum_{cyc}\frac{A}{a} = \sum_{cyc}\frac{A^2}{aA} \geq \frac{(A+B+C)^2}{Aa+Bb+Cc} = \frac{\pi^2}{Aa+Bb+Cc}$ (vii), mà ta đã tìm được $2\pi p - 8(R+r) < Aa+Bb+Cc < 2\pi p - 2\pi(R+r)$ (bài tập a/ phần trước) nên $\sum_{cyc}\frac{A}{a} > \frac{\pi^2}{2\pi(p-R-r)}$ (viii) (chỉ đúng với tam giác nhọn).

-Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số $(p-a)\frac{A}{a},(p-b)\frac{B}{b},(p-c)\frac{C}{c}$ ta được:

$$(p-a)\frac{A}{a}+(p-b)\frac{B}{b}+(p-c)\frac{C}{c} \geq 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)\frac{A.B.C}{a.b.c}} = 3\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}\frac{A.B.C}{4S.R}} = 3\sqrt[3]{\frac{S.A.B.C}{4p.R}} \Rightarrow$$

$\sum_{cyc}(p-a)\frac{A}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}\frac{A.B.C}{4S.R}}$ (4)mà $\sum_{cyc}(p-a)\frac{A}{a} \leq \frac{p\sum_{cyc}\frac{A}{a}}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ (theo iv) nên từ (4)

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}\frac{A.B.C}{4S.R}} \leq \frac{p\sum_{cyc}\frac{A}{a}}{3} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{729S.A.B.C}{4R} \leq p^4\left(\sum_{cyc}\frac{A}{a}\right)^3 \Rightarrow \frac{729S.A.B.C}{4R} \leq p^4\left(\frac{3\pi}{2p}\right)^3$$

$\Leftrightarrow 54S.A.B.C \leq \pi^3.p.R$ (ix).

- Xét tổng $T=\left(\frac{\sqrt{x}}{b\sqrt{By}}+\frac{\sqrt{y}}{a\sqrt{Ax}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{z}}{a\sqrt{Ax}}+\frac{\sqrt{x}}{c\sqrt{Cz}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{y}}{c\sqrt{Cz}}+\frac{\sqrt{z}}{b\sqrt{By}}\right)^2$.

Ta có: $T\ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}.\frac{1}{a^2A}+\frac{z+x}{y}.\frac{1}{b^2B}+\frac{x+y}{z}.\frac{1}{c^2C}-2\left(\frac{1}{ab\sqrt{AB}}+\frac{1}{bc\sqrt{BC}}+\frac{1}{ca\sqrt{CA}}\right)\ge 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}.\frac{bc}{aA}+\frac{z+x}{y}.\frac{ca}{bB}+\frac{x+y}{z}.\frac{ab}{cC}-2\left(\frac{c}{\sqrt{AB}}+\frac{a}{\sqrt{BC}}+\frac{b}{\sqrt{CA}}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}.\frac{bc}{aA}+\frac{z+x}{y}.\frac{ca}{bB}+\frac{x+y}{z}.\frac{ab}{cC}\ge 2\left(\frac{a}{\sqrt{BC}}+\frac{b}{\sqrt{CA}}+\frac{c}{\sqrt{AB}}\right)(5).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được: $\frac{a}{\sqrt{BC}}+\frac{b}{\sqrt{CA}}+\frac{c}{\sqrt{AB}}\ge 3\left(\frac{abc}{ABC}\right)^{\frac{1}{3}}\ge\frac{6p}{\pi}$ (6).

Từ (5) và (6) ta được: $\frac{y+z}{x}.\frac{bc}{aA}+\frac{z+x}{y}.\frac{ca}{bB}+\frac{x+y}{z}.\frac{ab}{cC}\ge\frac{6p}{\pi}$ (7).

Thay (x, y, z) trong (7) bằng (*p-a, p-b, p-c*) ta được: $\frac{bc}{A(p-a)}+\frac{ca}{B(p-b)}+\frac{ab}{C(p-c)}\ge\frac{12p}{\pi}$ (x)

Thay (x, y, z) trong (7) bằng *(bc, ca, ab)* ta được: $\frac{b+c}{A}+\frac{c+a}{B}+\frac{a+b}{C}\ge\frac{12p}{\pi}$ (xi).

3/ Chúng ta xét bất đẳng thức sau: sinx ≥ $\frac{2x}{\pi}$ với $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$(phần chứng minh bất đẳng thức này dành cho bạn đọc).

Theo định lí hàm số sin ta có $\sin A=\frac{a}{2R}$ và kết hợp với bất đẳng thức trên ta được $\frac{a}{2R}\ge\frac{2A}{\pi}\Leftrightarrow\frac{a}{A}\ge\frac{4R}{\pi}$, từ đó ta dễ dàng suy ra $\sum_{cyc}\frac{a}{A}>\frac{12R}{\pi}$.

4/ Bất đẳng thức: $\frac{\sin x}{x}\ge\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2+x^2}$ với $\forall x\in(0,\pi]$ **(bất đẳng thức này xem như bài tập dành cho bạn đọc).**

Bất đẳng thức trên tương đương $\frac{\sin x}{x}\ge 1-\frac{2x^2}{\pi^2+x^2}\Leftrightarrow \sin x\ge x-\frac{2x^3}{\pi^2+x^2}$ (1).

Trong tam giác ta có: $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) (bạn đọc tự chứng minh).Từ (1) và (2) ta thu được $\frac{3\sqrt{3}}{2}\ge\sum_{cyc}\sin A>A+B+C-2\left(\frac{A^3}{\pi^2+A^2}+\frac{B^3}{\pi^2+B^2}+\frac{C^3}{\pi^2+C^2}\right)\Rightarrow$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}>\pi-2\left(\frac{A^3}{\pi^2+A^2}+\frac{B^3}{\pi^2+B^2}+\frac{C^3}{\pi^2+C^2}\right)\Leftrightarrow\frac{A^3}{\pi^2+A^2}+\frac{B^3}{\pi^2+B^2}+\frac{C^3}{\pi^2+C^2}>\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức cho 3 góc *A, B, C* ta thu được $\frac{\sin A}{A} > \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2}$, $\frac{\sin B}{B} > \frac{\pi^2 - B^2}{\pi^2 + B^2}$ và $\frac{\sin C}{C} > \frac{\pi^2 - C^2}{\pi^2 + C^2}$, cộng các bất đẳng thức ta được: $\frac{\sin A}{A} + \frac{\sin B}{B} + \frac{\sin C}{C} > \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2} + \frac{\pi^2 - B^2}{\pi^2 + B^2} + \frac{\pi^2 - C^2}{\pi^2 + C^2}$, từ đây áp dụng định lí hàm số sin $\sin A = \frac{a}{2R}$ ta có $\frac{\frac{a}{2R}}{A} + \frac{\frac{b}{2R}}{B} + \frac{\frac{c}{2R}}{C} > \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2} + \frac{\pi^2 - B^2}{\pi^2 + B^2} + \frac{\pi^2 - C^2}{\pi^2 + C^2}$ hay $\sum_{cyc} \frac{a}{A} > 2R \sum \frac{\pi^2 - A^2}{\pi^2 + A^2}$.

Thử trở về cội nguồn của môn lượng giác

Lê Quốc Hán
Đại học Sư phạm Vinh

"Lượng giác học" có nguồn gốc từ Hình học. Tuy nhiên phần lớn học sinh khi học môn Lượng giác học (giải phương trình lượng giác, hàm số lượng giác …), lại thấy nó như là một bộ phận của môn Đại số học, hoặc như một công cụ để giải các bài toán hình học (phần tam giác lượng) mà không thấy mối liên hệ hai chiều giữa các bộ môn ấy.

Trong bài viết này, tôi hy vọng phần nào có thể cho các bạn một cách nhìn "mới" : dùng hình học để giải các bài toán lượng giác.

Trước hết, ta lấy một kết quả quen thuộc trong hình học sơ cấp : "Nếu G là trọng tâm tam giác ABC và M là một điểm tùy ý trong mặt phẳng chứa tam giác đó thì" :

$$MG^2=\frac{1}{3}\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right) \quad \text{(Định lý Lép-nít)}$$

Nếu $M\equiv O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì $MA^2+MB^2+MB^2=3R^2$ nên áp dụng định lý hàm số sin, ta suy ra : $OG^2=R^2-\frac{4}{9}R^2\left(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\right)$

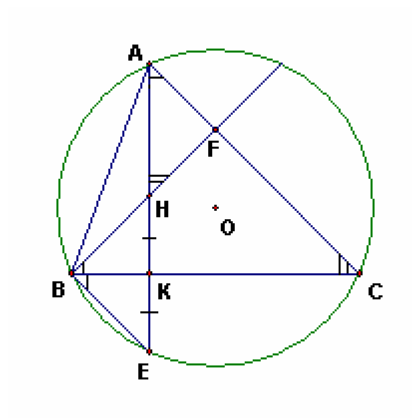
$$\Rightarrow OG^2=\frac{4}{9}R^2\left(\frac{9}{4}-\left(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\right)\right) \quad (1)$$

Từ đẳng thức (1), suy ra :

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\le\frac{9}{4} \quad (2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $G\equiv O$, tức là khi và chỉ khi ΔABC đều.

Như vậy, với một kiến thức hình học lớp 10 ta đã phát hiện và chứng minh được bất đẳng thức (2). Ngoài ra, hệ thức (1) còn cho ta một "nguồn gốc hình học" của bất đẳng thức (2), điều mà ít người nghĩ đến. Bằng cách tương tự, ta hãy tính khoảng cách giữa O và trực tâm H của ΔABC. Xét trường hợp ΔABC có 3 góc nhọn. Gọi E là giao điểm của AH với đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Thế thì :



$\wp_{H/(O)}=OH^2-R^2=\overline{HE}.\overline{HA}$

Do đó : $OH^2=R^2-AH.HE \quad (*)$

với :

$$AH=\frac{AF}{\sin C}=AB.\frac{\cos A}{\sin C}=2R\sin C\frac{\cos A}{\sin C}=2R\cos A$$

và $HE=2HK=2BK\cot C=2AB\cos B\cot C$

$$=2.2R\sin C\cos B\frac{\cos C}{\sin C}=4R\cos B\cos C$$

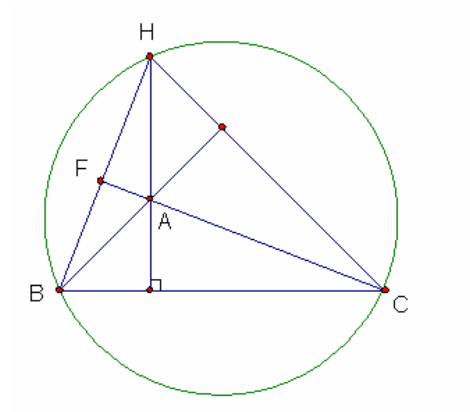
Thay vào $(*)$ ta có :

$$OH^2=8R^2\left(\frac{1}{8}-\cos A\cos B\cos C\right) \quad (3)$$

Nếu $\angle BAC = 90^0$ chẳng hạn, thì (3) là hiển nhiên. Giả sử ΔABC có góc A tù. Khi đó $\wp_{H/(O)} = R^2 - OH^2 = \overline{HA}.\overline{HE}$ trong đó $AH = -2R\cos A$ nên ta cũng suy ra (3).

Từ công thức (3), ta suy ra :

$$\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8} \quad (4)$$



(Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều). Cũng như bất đẳng thức (2), bất đẳng thức (4) đã được phát hiện và chứng minh chỉ với kiến thức lớp 10 và có một "nguồn gốc hình học" khá đẹp. Cần nhớ rằng, "xưa nay" chưa nói đến việc phát hiện, chỉ riêng việc chứng minh các bất đẳng thức đó, người ta thường phải dùng các công thức lượng giác (chương trình lượng giác lớp 11) và định lý về dấu tam thức bậc hai.

Có được (1) và (3), ta tiếp tục tiến tới. Ta thử sử dụng "đường thẳng Ơle".

Nếu O, G, H là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và trực tâm ΔABC thì O, G, H thẳng hàng và : $OG = \frac{1}{3}OH$. Từ $OG^2 = \frac{1}{9}OH^2$.

Từ $(1)(3)$ ta có :

$$\frac{9}{4} - \left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right) = \frac{1}{4}\left(1 - 8\cos A\cos B\cos C\right)$$

hay $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

Thay $\sin^2\alpha$ bằng $1 - \cos^2\alpha$ vào đẳng thức cuối cùng, ta được kết quả quen thuộc :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1 \quad (5)$$

Chưa nói đến việc phát hiện ra (5), chỉ riêng việc chứng minh đã làm "nhức óc" không biết bao nhiêu bạn trẻ mới làm quen với lượng giác. Qua một vài ví dụ trên đây, hẳn các bạn đã thấy vai trò của hình học trong việc phát hiện và chứng minh các hệ thức "thuần túy lượng giác". Mặt khác, nó cũng nêu lên cho chúng ta một câu hỏi : Phải chăng các hệ thức lượng giác trong một tam giác khi nào cũng có một "nguồn gốc hình học" làm bạn đường ? Mời các bạn giải vài bài tập sau đây để củng cố niềm tin của mình.

1. Chứng minh rằng, trong một tam giác ta có $d^2 = R^2\left(1 - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$ trong đó d là khoảng cách giữa đường tròn tâm ngoại tiếp và nội tiếp tam giác đó.
Từ đó hãy suy ra bất đẳng thức quen thuộc tương ứng.

- 2. Cho ΔABC. Dựng trong mặt phẳng ABC các điểm O_1 và O_2 sao cho các tam giác O_1AB và O_2AC là những tam giác cân đỉnh O_1, O_2 với góc ở đáy bằng 30^0 và sao cho O_1 và C ở cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, O_2 và B ở cùng một nửa mặt phẳng bờ AC.

a) Chứng minh :

$$O_1O_2^{\,2} = \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S\right)$$

b) Suy ra bất đẳng thức tương ứng :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3}\sin A \sin B \sin C$$

3. Chứng minh rằng nếu ΔABC có 3 góc nhọn, thì :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2$$

4. Cho tứ diện OABC có góc tam diện đỉnh O ba mặt vuông, $OA = OB + OC$. Chứng minh rằng :

$$\sin(\angle OAB + \angle OAC) = \cos \angle BAC$$

(Hãy dùng phương pháp ghép hình)

Phương pháp giải một dạng bất đẳng thức lượng giác trong tam giác

Nguyễn Lái
GV THPT Lương Văn Chánh – Phú Yên

Giả sử $f(A,B,C)$ là biểu thức chứa các hàm số lượng giác của các góc trong ΔABC
Giả sử các góc A,B,C thỏa mãn hai điều kiện :

1) $f(A)+f(B)\ge 2f\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$ hoặc $f(A)f(B)\ge f^2\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$ (1)

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B$

2) $f(C)+f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\ge 2f\left(\dfrac{C+\dfrac{\pi}{3}}{2}\right)$ hoặc $f(C)f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\ge f^2\left(\dfrac{C+\dfrac{\pi}{3}}{2}\right)$ (2)

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $C=\dfrac{\pi}{3}$ Khi cộng hoặc nhân $(1)(2)$ ta sẽ có bất đẳng thức :

$$f(A)+f(B)+f(C)\ge 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ hoặc } f(A)f(B)f(C)\ge f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C$. Tương tự ta cũng có bất đẳng thức với chiều ngược lại. Để minh họa cho phương pháp trên ta xét các bài toán sau đây :

Thí dụ 1. Chứng minh rằng với mọi ΔABC ta luôn có :

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$$

Lời giải. Ta có :

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}\ge\frac{4}{2+\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}}\ge\frac{4}{2+\sqrt{2(\sin A+\sin B)}}\ge\frac{2}{1+\sqrt{\sin\dfrac{A+B}{2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}\ge\frac{2}{1+\sqrt{\sin\dfrac{A+B}{2}}}\quad(3)$$

Tương tự ta có : $\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin\dfrac{\pi}{3}}}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{\sin\dfrac{C+\dfrac{\pi}{3}}{2}}}$ (4)

Cộng theo vế (3) và (4) ta có :

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}}\geq 2\left(\frac{1}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}}}\right)\geq\frac{4}{1+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Thí dụ 2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có :

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\geq\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Lời giải. Ta có :

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)=1+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A\sin B}\geq 1+\frac{2}{\sqrt{\sin A\sin B}}+\left(\frac{1}{\sqrt{\sin A\sin B}}\right)^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin A\sin B}}\right)^2=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(A-B)-\cos(A+B)}}\right)^2\geq\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(A+B)}}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2\qquad(5)$$

Tương tự : $$\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}}\right)^2\qquad(6)$$

Nhân theo vế của (5) và (6) ta có :

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}}\right)^2\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)^4$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Thí dụ 3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có :

$$\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2} \geq \frac{3}{64}$$

Lời giải. Trường hợp tam giác ABC tù hoặc vuông.

Giả sử $A = \max\{A, B, C\} \geq \frac{\pi}{2}$, lúc đó $\cos\frac{A-B}{2} > 0$ và $\cos\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right) > 0$.

Ta có :

$$\frac{\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}}{2} \geq \left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1-\frac{\cos A+\cos B}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\geq \frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)^3 = \sin^6\frac{A+B}{4} \Rightarrow \sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2} \geq 2\sin^6\frac{A+B}{4} \quad (7)$$

Tương tự ta có : $\sin^6\frac{C}{2}+\sin^6\frac{\frac{\pi}{3}}{2} \geq 2\sin^6\frac{C+\frac{\pi}{3}}{4} \quad (8)$

Cộng theo vế của (7) và (8) ta được :

$$\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}+\sin^6\frac{\frac{\pi}{3}}{2} \geq 2\left(\sin^6\frac{A+B}{4}+\sin^6\frac{C+\frac{\pi}{3}}{4}\right) \geq 4\sin^6\frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{8}$$

$$\Rightarrow \sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2} \geq 3\sin^6\frac{\pi}{6} = \frac{3}{64} \quad (9)$$

Trường hợp tam giác ABC nhọn, các bất đẳng thức $(7),(8),(9)$ luôn đúng.

Thí dụ 4. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có :

$$(\cos A+\sin A)(\cos B+\sin B)(\cos C+\sin C) \leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3$$

Lời giải. Ta có :

$$(\cos A+\sin A)(\cos B+\sin B)(\cos C+\sin C) = 2\sqrt{2}\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)$$

nên bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\le\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 \quad (*)$$

- Nếu $\max\{A,B,C\}\ge\frac{3\pi}{4}$ thì vế trái của $(*)$ không dương nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

- Nếu $\max\{A,B,C\}<\frac{3\pi}{4}$ thì : $\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)>0,\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)>0,\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)>0$

nên $\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(A-B)\right]$

$$\le\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)\right]\le\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\le\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (10)$$

Tương tự :

$$\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\le\cos^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (11)$$

Do đó nhân theo vế của (10) và (11) ta sẽ có :

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\le\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\le\cos^4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\le\cos^3\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3$$

Do đó :

$$(\cos A+\sin A)(\cos B+\sin B)(\cos C+\sin C)\le 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.
Mời các bạn tiếp tục giải các bài toán sau đây theo phương pháp trên.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có :

1) $\tan^3\frac{A}{2}+\tan^3\frac{B}{2}+\tan^3\frac{C}{2}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$

2) $\frac{1}{\sin^n\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^n\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^n\frac{C}{2}}\ge 3.2^n \quad (n\in N)$

3) $A\cos\frac{A}{4} + B\cos\frac{B}{4} + C\cos\frac{C}{4} \le \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - B\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - C\right) \ge \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}\right)^3 \cos A \cos B \cos C$

với ΔABC nhọn.

Chương 5 :

Bất đẳng thức như thế nào là hay ?
Làm sao có thể sáng tạo bất đẳng thức ?

Bạn đọc đã làm quen với bất đẳng thức từ THCS. Bước đầu các bạn có thể chỉ học các bất đẳng thức kinh điển : ***AM – GM****,* ***BCS****,* ***Jensen****,* ***Chebyshev****, … hay bắt đầu đọc* ***SOS****,* ***ABC****,…Vậy đã bao giờ bạn đọc tự hỏi* ***Bất đẳng thức như thế nào là hay? Làm sao có thể sáng tạo bất đẳng thức ?*** *Đó thực sự là những vấn đề thú vị đáng để quan tâm và bình luận. Sau đây là một số ý kiến của giáo viên toán, học sinh chuyên toán về vấn đề này :*

Thầy **Đặng Bảo Hòa** (*GV chuyên toán Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ*) :

Bất kỳ bất đẳng thức nào cũng đều có cái hay và cái đẹp riêng của nó. Đặc biệt những bất đẳng thức vận dụng nhiều khía cạnh của cái bất biến trong bất đẳng thức là bất đẳng thức hay!!!

Thầy **Trần Diệu Minh** (*GV chuyên toán Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ*) :

Từ bất đẳng thức ban đầu mà suy ra được nhiều bất đẳng thức khác là bất đẳng thức hay!!!

Cô **Tạ Thanh Thủy Tiên***(GV chuyên toán Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)*

Bất đẳng thức là một trong những đề tài được nhiều người quan tâm nhất. Quan hệ của chúng rất rộng, đi sâu vào là rất khó.Việc chứng minh bất đẳng thức lỏng là tương đối dễ, còn việc làm chặt chúng mới là một công việc khó khăn và đầy ký thú!!!

Thầy **Trần Phương** *(GĐ Trung tâm hỗ trợ nghiên cứu và phát triển các sản phẩm trí tuệ, là tác giả nhiều cuốn sách hay về toán học sơ cấp)* :

Chứng minh bất đẳng thức là công việc đòi hỏi trí thông minh sáng tạo và sự khéo léo.

Phạm Kim Hùng *(SV khóa 9 Cử nhân tài năng – Trường ĐHKHTN – ĐHQGHN, là tác giả cuốn sách* ***"Secrets in Inequalities"****(Sáng tạo bất đẳng thức) nổi tiếng)* :

Điều khó khăn nhất khi chúng ta tiếp cận với bất đẳng thức là sự khẳng định nó có đúng hay không. Thực tế thì khi giải một bài toán mang tính "giả thuyết" là một việc khá mạo hiểm và mất nhiều thời gian, thậm chí sau những cố gắng như vậy thì kết quả thu được chỉ là một phản ví dụ chứng minh bất đẳng thức sai. Nhưng trong toán học thì những điều như thế này hoàn toàn rất bình thường và các bạn không cần phải e ngại khi *tự phủ định* một bài toán mình đặt ra như vậy cả, vì đó sẽ là bước đầu tiên để bạn sáng tạo ra được một bài toán hay và có ý nghĩa.

Lê Hoàng Anh *(HS chuyên toán khóa 2004 – 2007 Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)* :

Bất đẳng thức là một mảng toán rất khó, nhưng lại là sân chơi để cho những học sinh giỏi toán thể hiện năng lực của mình.

Nguyễn Huỳnh Vĩnh Nghi *(HS chuyên toán khóa 2004 – 2007 Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)* :

Bất đẳng thức hay là bất đẳng thức có những phát biểu đẹp và cách chứng minh thật đặc sắc, có thể khơi gợi trong những học sinh giỏi toán phát triển và tổng quát bài toán.

Lê Ngọc Anh *(HS chuyên toán khóa 2005 – 2008 Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)* :

Sáng tạo bất đẳng thức là tập hợp các nghiên cứu rời rạc, các bất đẳng thức đơn lẻ rồi "biến hoá" ra một bất đẳng thức mới. Khi đó ta sẽ càng ngày càng làm chặt nó hơn. Cuối cùng ta sẽ có một bất đẳng thức nhìn vào là hết biết đường làm. ☺

Trần Đăng Khuê *(HS chuyên toán khóa 2005 – 2008 Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)* :

Lấy ý tưởng từ một bất đẳng thức khác (khó!) và phát biểu dưới một cách khác sau khi đã áp dụng một số bổ đề.Tất nhiên khi đó trình độ phải cao hơn, cách làm phải khó hơn, thế mới là sáng tạo !!!

Lê Phước Duy *(HS chuyên toán khóa 2005 – 2008 Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)* :

Bất đẳng thức có tính tổng quát, khó, đẹp là bất đẳng thức hay!!!

Huỳnh Hữu Vinh *(HS chuyên toán khóa 2005 – 2008 Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)* :

Những bất đẳng thức ở dạng tổng quát mà trường hợp đặc biệt của nó là những bất đẳng thức cơ bản, quen thuộc là bất đẳng thức hay!!!

Chương 6 :

Hướng dẫn giải bài tập

1.4.1.

Chứng minh $\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C \geq \dfrac{(\cot A + \cot B + \cot C)^3}{9}$

và $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

1.4.2.

Xét hàm $f(x) = \sin\dfrac{x}{4}$ với $x \in (0;\pi)$

Chứng minh $f''(x) < 0$ và $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Cuối cùng sử dụng **Jensen**.

1.4.3.

Ta đã có : $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

và theo **AM – GM** thì : $(\sin A + \sin B + \sin C)\left(\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C}\right) \geq 9$

1.4.4

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$3 - (\cos A + \cos B + \cos C) + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

1.4.5.

Chứng minh $\cot A + +\cot B + \cot C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$

và $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \dfrac{9}{4}$

1.4.6.

Để ý $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} > 0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2} \ge 8\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow (\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \ge 8\sin A \sin B \sin C$$

Tiếp theo dùng **AM – GM** để chứng minh tiếp.

1.4.7.

Đặt $x = \tan\dfrac{A}{2}$; $y = \tan\dfrac{B}{2}$; $z = \tan\dfrac{C}{2} \Rightarrow xy + yz + zx = 1$

Theo **BCS** thì : $3\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) \ge (xy + yz + zx)^2$

$$\Rightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \ge \frac{1}{3} \quad (1)$$

Theo **AM – GM** thì :

$$\frac{xy + yz + zx}{3} \ge \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Rightarrow xyz \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}xyz \le 1 \quad (2)$$

Từ (1) suy ra : $1 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \ge \dfrac{4}{3}$ và theo (2) có $\dfrac{4}{3} \ge 4\sqrt{3}xyz$

Dẫn đến :

$$1 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \ge 4\sqrt{3}xyz$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) \ge 8\sqrt{3}xyz$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + x^2\right)\left(1 + y^2\right)\left(1 + z^2\right) + \left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)\left(1 - z^2\right) \ge 8\sqrt{3}xyz$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\left(1 - x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)}\cdot\frac{\left(1 - y^2\right)}{\left(1 + y^2\right)}\cdot\frac{\left(1 - z^2\right)}{\left(1 + z^2\right)} \ge \sqrt{3}\,\frac{2x}{1 + x^2}\cdot\frac{2y}{1 + y^2}\cdot\frac{2z}{1 + z^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos A\cos B\cos C \ge \sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

1.4.8.

Theo **AM – GM** chứng minh được :

$$4\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \ge 3\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{3}{p}\right)$$

và $3\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}+\frac{3}{p}\right)\geq\frac{4\sqrt[3]{3}}{S}\Rightarrow$ đpcm.

1.4.9. & 1.4.10.

Ta có : $(2m_a)^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$$\Rightarrow am_a\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{am_a}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{m_a}\geq\dfrac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2+c^2} & (1)\\[2ex]\dfrac{m_a}{a}\geq\dfrac{2\sqrt{3}m_a{}^2}{a^2+b^2+c^2} & (2)\end{cases}$$

Tương tự (1):

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{b}{m_b}\geq\dfrac{2\sqrt{3}b^2}{a^2+b^2+c^2}\\[2ex]\dfrac{c}{m_c}\geq\dfrac{2\sqrt{3}c^2}{a^2+b^2+c^2}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\geq2\sqrt{3}$$

Tương tự (2) :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{m_b}{b}\geq\dfrac{2\sqrt{3}m_b{}^2}{a^2+b^2+c^2}\\[2ex]\dfrac{m_c}{c}\geq\dfrac{2\sqrt{3}m_c{}^2}{a^2+b^2+c^2}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

1.4.11.

Chứng minh : $m_al_a=\frac{(p-a)\left(2b^2+2c^2-a^2\right)bc}{(b+c)^2}$

và $\left(2b^2+2c^2-a^2\right)bc\geq\frac{(b+c)^4-a^2(b+c)^2}{4}$

$$\Rightarrow m_al_a\geq p(p-a)$$

Tương tự cho m_bl_b và m_cl_c rồi cộng các bất đẳng thức lại $\Rightarrow$ đpcm.

1.4.12.

Ta có : $m_a < \dfrac{b+c}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{a^2 m_a} > \dfrac{\dfrac{1}{a^2}}{\dfrac{b+c}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2 m_a} + \frac{1}{b^2 m_b} + \frac{1}{c^2 m_c} > \frac{\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)}{\dfrac{b+c}{2} + \dfrac{c+a}{2} + \dfrac{a+b}{2}} \geq \frac{3}{abc} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

1.4.13.

Theo **AM – GM** thì : $(p-a)(p-b) \leq \dfrac{c^2}{4} \Rightarrow$ đpcm.

1.4.14.

Chứng minh : $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{1}{r}$ rồi dùng **AM – GM**.

1.4.15.

Xét hàm $f(x) = \sin x \ \forall x \in (0 ; \pi)$ có $f''(x) < 0$

Áp dụng **Jensen** thì : $\sin\dfrac{A+3B}{4} \geq \dfrac{\sin A + 3\sin B}{4}$

Áp dụng **AM – GM** thì : $\dfrac{\sin A + 3\sin B}{4} \geq \sqrt[4]{\sin A \sin^3 B}$

Từ đó suy ra đpcm.

2.6.1.

Chú ý $\left(\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$ với O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

2.6.2.

Chú ý $\left(2\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$

2.6.3.

Chú ý $\left(\left(\sqrt{5}+1\right)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$

2.6.4.

Giả sử $A \geq \frac{2\pi}{3}$

Chứng minh : $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \tan\frac{A}{2} + 2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)$

Xét $f(A) = \tan\frac{A}{2} + 2\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)$

Dễ thấy : $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right)$

mà $2\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow f(A) \geq f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 - \sqrt{3}$

2.6.5.

Dễ thấy :

$$\frac{1}{4r^2} = \frac{4p^2}{16S^2} = \frac{(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} = \frac{1}{c^2-(a-b)^2} + \frac{1}{a^2-(b-c)^2} + \frac{1}{b^2-(c-a)^2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

2.6.6.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b) \geq 0$$

2.6.7.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0$$

2.6.8.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$$

2.6.9

Chứng minh $f(x) = \tan x$ tăng trên $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a \geq b \geq c \\ \tan\frac{A}{2} \geq \tan\frac{B}{2} \geq \tan\frac{C}{2} \end{cases}$

Tiếp theo sử dụng **Chebyshev** $\Rightarrow$ đpcm.

2.6.10.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

2.6.11.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)\ge 9abc$$

2.6.12.

Ta có : $m_a{}^2=R^2\left(1+2\cos A\cos(B-C)+\cos^2 A\right)\le R^2\left(1+2\cos A+\cos^2 A\right)$

$$\Rightarrow m_a\le R(1+\cos A)$$

$$\Rightarrow m_a+m_b+m_c\le 3R+R\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)=4R+r$$

2.6.13.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

2.6.14.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$x^2+2x(y\cos 2C+z\cos 2B)2yz\cos 2A+y^2+z^2\ge 0$$

với $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$

Xét $\Delta'\Rightarrow$ đpcm.

2.6.15.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\tan A\tan B\tan C\ge\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C\ge\tan\frac{B+C}{2}+\tan\frac{C+A}{2}+\tan\frac{A+B}{2}\quad(*)$$

Xét $f(x)=\tan x\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Theo **Jensen** thì : $\tan\frac{A+B}{2}\le\frac{\tan A+\tan B}{2}\Rightarrow$ đpcm.

Chứng minh các bất đẳng thức sau rồi xét khi dấu bằng xảy ra :

3.3.1. $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\le\frac{3}{4}$

3.3.2. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\le\sin A+\sin B+\sin C$

3.3.3. $\frac{1}{\sin 2A}+\frac{1}{\sin 2B}+\frac{1}{\sin 2C}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\tan A\tan B\tan C$

3.3.4. $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{\cot A+\cot B+\cot C}\right)^2\le\frac{a^2b^2c^2}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}$

3.3.5. $\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}\le\frac{1}{2}$

3.3.6. $m_am_bm_c\ge abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

3.3.7. $l_al_bl_c\le abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

3.3.8. $bc\cot\frac{A}{2}+ca\cot\frac{B}{2}+ab\cot\frac{C}{2}\ge 12S$

3.3.9. $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\ge 5+\frac{26\sqrt{3}}{9}$

3.3.10. $\frac{\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}\le\frac{1}{6\sqrt{3}}$