Phong Thanh Dương

HS lớp 11, trường THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh

……………………………………………………………………………………………..

Bài T9-419 (THTT số tháng 5 – 2012)

Đề bài

Cho a, b, c > 0 và thoả mãn $15\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=10\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+2012$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $5a^2+2ab+2b^2\ge 9\sqrt[9]{a^{12}b^6}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}\le\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2b}}$, dấu "=" xảy ra khi a = b. Tương tự ta có $\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}\le\frac{1}{3\sqrt[3]{b^2c}},\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\le\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2a}}$.

Dẫn tới $P\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}}\right)$, dấu "=" xảy ra khi a = b = c. Ta có $P^2\le\frac{1}{3^2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}}\right)^2\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^4b^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b^4c^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c^4a^2}}\right)$ (áp dụng bất đẳng thức $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2\le\frac{x^2+y^2+z^2}{3}$). Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{a^4b^2}},\quad \frac{2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{b^4c^2}},\quad \frac{2}{c^2}+\frac{1}{a^2}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{c^4a^2}}.$$

Như vậy $P^2\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ (*), dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Từ giả thiết và áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$, ta có

$$15\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=10\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+2012\le 10\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+2012$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{2012}{5}\overset{(*)}{\Rightarrow} P^2\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le\frac{2012}{15}\Rightarrow P\le\sqrt{\frac{2012}{15}}(**).$$

Dấu "=" ở (**) xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{\frac{15}{2012}}$. Vậy $\max P\le\sqrt{\frac{2012}{15}}$.

<u>Tổng quát bài toán</u>

<u>Đề bài</u>

Cho các hằng số dương $x,y,z,t,\alpha,\beta,\gamma$ mà $0<t\le 1,\alpha>\beta>0$, và hằng số $n\in\mathbb{N}^*$. Cho n biến số thực dương $a_1,...,a_n$ thoả mãn $\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}=\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ib_i}+\gamma$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(xa_i^2+ya_ic_i+zc_i^2)^t}$. Ở đó $(b_1,...,b_n)$ và $(c_1,...,c_n)$ là hai hoán vị cho trước của $(a_1,...,a_n)$ (Quy tắc xác định hai hoán vị này là không thay đổi).

<u>Lời giải</u>

a) Đầu tiên ta xét hàm số $f(X)=X^\lambda, X>0,\lambda\ge 1$, có $f'(X)=\lambda.X^{\lambda-1}$, $f''(X)=\lambda(\lambda-1)X^{\lambda-2}\ge 0, X>0,\lambda\ge 1$. Do đó hàm f(X) có đồ thị quay bề lõm lên trên, và nhờ bất đẳng thức Jensen ta có $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^\lambda\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^\lambda$ (1), với $X_1,...,X_n>0$, dấu "=" ở (1) xảy ra khi $\lambda=1$ hoặc $X_1=...=X_n$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ib_i}\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\right).\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i^2}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\right)^2\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ib_i}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}$$

$$\Rightarrow\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}=\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ib_i}+\gamma\le\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}+\gamma\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\le\frac{\gamma}{\alpha-\beta}(2).$$

Dấu "=" ở (2) xảy ra khi hai bộ (a_i), (b_i) tỉ lệ và $\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}=\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ib_i}+\gamma$.

c) Tiếp theo, do x, y, z > 0 nên $0<\frac{x}{x+y+z}<\frac{x}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}<1,$ và $0<\frac{z}{x+y+z}<\frac{x}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}<1.$ Vì $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ nên tồn tại hai dãy số $(p_k), (q_k)\subset\mathbb{Q}$ sao cho $\lim\limits_{k\to+\infty} p_k=\frac{x}{x+y+z}, \lim\limits_{k\to+\infty} q_k=\frac{z}{x+y+z},$ và $0<p_k<p_k+q_k<1, 0<q_k<p_k+q_k<1,$ với k đủ lớn. Ta biểu diễn p_k, q_k ở dạng phân số, sau đó gọi m_k là bội chung nhỏ nhất của hai mẫu của hai số đó, bây giờ viết $p_k=\frac{u_k}{m_k}, q_k=\frac{v_k}{m_k}$ với m_k, u_k, v_k, $m_k-u_k-v_k$ là những số nguyên dương và $m_k\geq 2$ (với k đủ lớn). Bây giờ với k đủ lớn, với $i=\overline{1,n},$ áp dụng bất đẳng thức Côsi và bất đẳng thức (1), ta có

$$u_k a_i^2+v_k c_i^2+(m_k-u_k-v_k)a_i c_i\geq m_k\sqrt[m_k]{a_i^{m_k+u_k-v_k}.c_i^{m_k-u_k+v_k}}$$

$$\Rightarrow p_k a_i^2+q_k c_i^2+(1-p_k-q_k)a_i c_i\geq a_i^{1+p_k-q_k}.c_i^{1-p_k+q_k}\qquad (i=\overline{1,n})$$

$$\Rightarrow F_k:=\sum_{i=1}^{n}(p_k a_i^2+q_k c_i^2+(1-p_k-q_k)a_i c_i)^{-t}\leq\sum_{i=1}^{n}(a_i^{1+p_k-q_k}.c_i^{1-p_k+q_k})^{-t}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{n}F_k\right)^{\frac{1}{t}}\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i^{1+p_k-q_k}.c_i^{1-p_k+q_k})^{-t}\right)^{\frac{1}{t}}\overset{(1)}{\leq}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i^{1+p_k-q_k}.c_i^{1-p_k+q_k})^{-1}(3).$$

Cũng với k đủ lớn và áp dụng bất đẳng thức Côsi, $i=\overline{1,n},$ ta có tiếp

$$\frac{m_k+u_k-v_k}{a_i^2}+\frac{m_k-u_k+v_k}{c_i^2}\geq\frac{2m_k}{\sqrt[(2m_k)]{a_i^{2(m_k+u_k-v_k)}.c_i^{2(m_k-u_k+v_k)}}}$$

hay $$\frac{1+p_k-q_k}{a_i^2}+\frac{1-p_k+q_k}{c_i^2}\geq\frac{2}{a_i^{(1+p_k-q_k)}.c_i^{(1-p_k+q_k)}}\qquad (i=\overline{1,n},)$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1+p_k-q_k}{a_i^2}+\frac{1-p_k+q_k}{c_i^2}\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1+p_k-q_k)}.c_i^{(1-p_k+q_k)}\right)^{-1}\ (4).$$

Từ (2), (3) và (4), với k đủ lớn, suy ra

$$\left(\frac{1}{n}F_k\right)^{\frac{1}{t}}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\leq\frac{\gamma}{n(\alpha-\beta)}\Rightarrow F_k\leq n^{1-t}\left(\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)^{t}$$ (5). Cho $k\to+\infty$ thì $p_k\to\frac{x}{x+y+z},$

$q_k \to \dfrac{z}{x+y+z}$, $(1-p_k-q_k) \to \dfrac{y}{x+y+z}$, và $F_k \to (x+y+z)^t F$ nên (5) sẽ trở thành $(x+y+z)^t F \le n^{1-t}\left(\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)^t \Leftrightarrow F \le n^{1-t}\left(\dfrac{\gamma}{(x+y+z)(\alpha-\beta)}\right)^t = \text{const}$ (6).

Ở (6) có thể xảy ra dấu "=", chẳng hạn khi $a_1 = \ldots = a_n = \sqrt{\dfrac{n(\alpha-\beta)}{\gamma}}$.

Vậy $\boxed{\max F = n^{1-t}\left(\dfrac{\gamma}{(x+y+z)(\alpha-\beta)}\right)^t}$.

Nhận xét

Bài toán **T9/419** chính là một trường hợp riêng của bài toán tổng quát nói trên, với $t = \dfrac{1}{2}, n = 3, \alpha = 15, \beta = 10, \gamma = 2012, x = 5, y = z = 2,$ còn a_1, a_2, a_3 chính là a, b, c.

…………………………………………