CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Cô: **Trương Thị Mỹ Hoàn**

Ta đã biết tích phân của hàm số f từ a đến b theo công thức Niuton – Lepnit là:

$$A=\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ (giả sử $a < b$)

Để tính tích phân ta cần tìm được một nguyên hàm của f và đó là vấn đề chính của bài toán tích phân. Sau đây xin giới thiệu một số phương pháp tính tích phân thực sự là các phương pháp tính nguyên hàm.

A. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ:

I. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN LOẠI 1:

Nếu A có dạng: $A=\int_a^b f(u(x)).u'(x)dx$

Trong đó:
- $f(t)$ là hàm số liên tục trên $[u(a); u(b)]$
- $u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ và $u(x)\in\left[u(a);u(b)\right]$

Khi đó ta đặt:
* $t = u(x)$ suy ra $dt = u'(x)dx$
* Đổi cận:

x	a	b
t	$u(a)$	$u(b)$

* Thay vào: $A=\int_a^b f(u(x)).u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$

Các ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1 Tính $I=\int_1^e \dfrac{1-\ln x}{x\sqrt[3]{1+7\ln x}}dx$

Giải: Đặt $t=\sqrt[3]{1+7\ln x} \Rightarrow t^3-1=7\ln x \Rightarrow 3t^2dt=\dfrac{7}{x}dx$

Đổi cận:

x	1	e
t	1	2

Thay vào: $I=\int_1^2 \dfrac{\left(8-t^3\right)3t}{47}dt = \dfrac{3}{49}\int_1^2\left(8t-t^4\right)dt = \dfrac{3}{49}\left(4t-\dfrac{t^5}{5}\right)\Bigg|_1^2 = \dfrac{87}{245}$

VÍ DỤ 2 Tính $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.\left(1+\sin^2 x\right)^3 dx$

Giải: Đặt $t=1+\sin^2 x \Rightarrow dt=\sin 2xdx$

Đổi cận:

x	0	$\pi/2$
t	1	2

Thay vào: $A=\int_1^2 t^3dt=\left.\frac{t^4}{4}\right|_1^2=\frac{15}{4}$

VÍ DỤ 3 Tính $A=\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+5}$

Giải: Biến đổi $A=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{e^x(e^x+5)}$

Đặt $t=e^x+5 \Rightarrow dt=e^x dx$

Đổi cận:

x	0	$\ln 2$
t	6	7

Thay vào: $A=\int_6^7\frac{dt}{(t-5)t}=\frac{1}{5}\ln\left.\left|\frac{t-5}{t}\right|\right|_6^7=\frac{12}{35}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1 Tính các tích phân sau:

1) $\int_1^e\frac{\ln x\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}{x}dx$ KQ: $\frac{6\sqrt{2}-3}{8}$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{\ln x}{1+x^2}dx$ KQ: 0

3) $\int_1^e\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx$ KQ: 1/4

4) $\int_0^4\frac{\ln\sqrt{2x+1}}{\sqrt{(2x+1)^3}}dx$ KQ: $\frac{1}{2}(2-\ln 3)$

5) $\int_1^e\left(\frac{1}{x\,.\sqrt{1+\ln x}}+3x^2\right)\ln xdx$ KQ: $\frac{5-2\sqrt{2}+2e^3}{3}$

Bài 2 Tính các tích phân sau:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$ KQ: $\ln\left(2+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2)^3}dx$ KQ: $\frac{5\sqrt{2}-7}{2}$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,dx$ KQ: $\ln\left(\sqrt{3}+1\right)$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x}dx$ KQ: $2\sqrt{3}$

5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\sin x}dx$ KQ: $-\frac{2}{3}+\ln 2$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}.dx$ KQ: $2-2\ln 2$

7) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x.\cos x}$ KQ: $\frac{14}{3}-\frac{26\sqrt{3}}{27}-\frac{1}{2}\ln\left(21-12\sqrt{3}\right)$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x.\sin 2x.dx$ KQ: $\frac{31}{80}$

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3+4\sin x-\cos 2x}dx$ KQ: $\ln 2-\frac{1}{2}$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{tg^3 x}{\cos 2x}dx$ KQ: $-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$

Bài 4 Tính các tích phân sau:

1) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$ KQ: $\ln\frac{3}{2}$

2) $\int_0^{\ln 2} \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$ KQ: $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$

3) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$ KQ : $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4) $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$ KQ: $\frac{1}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$

Bài 5 Tính các tích phân sau:

1) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+1)}$ KQ: $\frac{2}{3}\ln\frac{4}{3}$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$ KQ: $2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ln\frac{3-2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$

3) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx$ KQ: $\frac{\sqrt[3]{81}-1}{6}$

4) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}.\sqrt{\mathrm{x}^2-1}}$ KQ: $\frac{\pi}{3}$

5) $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}dx$ KQ: 2 + ln2

6) $\int_{\sqrt{7}}^4 \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}\,.\sqrt{\mathrm{x}^2+9}}$ KQ: $\frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}$

7) $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$ KQ: $\frac{29}{270}$

8) $\int_{\frac{5}{2}}^5 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$ KQ: $-\frac{5\sqrt{5}}{2}-\frac{5}{2}\ln(7-4\sqrt{3})$

9) $\int_0^1 \left(2x^3+1\right)^7.x^5.dx$ KQ: $\frac{6151}{54}$

10) $\int_1^9 \frac{\mathrm{x}+1}{2+\sqrt[3]{\mathrm{x}-1}}dx$ KQ: $\frac{316}{5}-72\ln 2$

11) $\int_0^1 \mathrm{x}^3.\sqrt{1-\mathrm{x}^2}\,.\,\mathrm{dx}$ KQ: $\frac{2}{15}$

12) $\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{1+\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^4-\mathrm{x}^2+1}\mathrm{dx}$ KQ: $\frac{\pi}{4}$

13) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{x}^5+2x^3}{\sqrt{\mathrm{x}^2+1}}dx$ KQ: $\frac{26}{5}$

14) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{x+4}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx$ KQ: 28ln2 – 8ln3 – 8

II PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN LOẠI 2

Nếu $A=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Trong đó:

* $x = u(t)$ là hàm số liên tục trên $[\alpha;\beta]$

* Với $u(\alpha)=a;\ u(\beta)=b$ và $a\le u(t)\le b;\ \forall t\in[\alpha;\beta]$

Khi đó ta đặt:

* $x = u(t)$ suy ra $dx = u'(t)dt$

* Đổi cận:

x	a	b
t	α	β

* Thay vào: $A=\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(u(t)).u'(t)dt=\int_\alpha^\beta g(t)dt$

Các ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1 Tính $I=\displaystyle\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{\left(36-x^2\right)^3}}dx$

Giải: Đặt $x = 6\sin t$ $x=6\sin t\Rightarrow dx=6\cos t dt$

Đổi cận:

x	0	3
t	0	$\pi/6$

Thay vào: $I=\displaystyle\int_0^{\pi/6}\frac{36\sin^2 t}{(6\cos x)^3}6\cos t dt=\int_0^{\pi/6}\tan^2 t dt$

$$=\int_0^{\pi/6}\left[\left(1+\tan^2 t\right)-1\right]dt=\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\pi/6}=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{6}$$

VÍ DỤ 2 Tính $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+2\sin^2 x}.dx$

Giải: Biến đổi: chia tử và mẫu cho $\cos^2 x$ ta được $I=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{1/\cos^2 x}{1+3\tan^2 x}dx$

Đặt $x=\tan t\Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)dt$ tant

Đổi cận:

x	0	$\pi/4$
t	0	1

Thay vào: $I=\int_0^1 \frac{dt}{1+3t^2}$

Sau đó lại đặt $\sqrt{3}t=\tan u \Rightarrow dt=\left(1/\sqrt{3}\right)\left(1+\tan^2 u\right)du$

Đổi cận

t	0	1
u	0	$\pi/3$

Thay vào: $I=\int_0^{\pi/3}\frac{\left(1/\sqrt{3}\right)\left(1+\tan^2 u\right)du}{1+\tan^2 u}=\int_0^{\pi/3}\left(1/\sqrt{3}\right)du=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1 Tính các tích phân sau:

1) $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^2}$ KQ: $\frac{\pi+2}{216}$

2) $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$ KQ: $\ln\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{3}+2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}$

3) $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx$ KQ: $\ln\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$

4) $\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ KQ: $\frac{2+\pi}{8}$

5) $\int_{-\ln\sqrt{2}}^{-\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ KQ: $-\frac{\pi}{12}$

6) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$ KQ: $\frac{\pi}{6}$

7) $\int_0^1 \frac{dx}{x^4+4x^2+3}$ KQ: $\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$

8) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$ KQ: $\frac{\pi}{8}$

9) $\int_0^1 \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^4+x^2+1}dx$ KQ: $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

10) $\int_{-1}^0 (x+1)\sqrt{-x^2-2x}dx$ KQ: $\frac{2}{15}$

11) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$ KQ: $\frac{\pi}{16}$

12) $\int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{3}} \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{3+2x-x^2}}$ KQ: $\frac{1}{4}\left(\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{3}-1\right)$

13) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}dx$ KQ: $\frac{\sqrt{3}}{27}$

14) $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{1-4x^2}.dx$ KQ: $\frac{\pi}{128}$

15) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ KQ: $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

B PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Nếu A có dạng: $A=\int_a^b u(x).v'(x)dx$

Khi đó ta đặt:

$$u=u(x)\Rightarrow du=u'(x)dx$$
$$dv=v'(x)dx\Rightarrow v=v(x)$$

Thì $A=u(x).v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x).u'(x)dx$

Viêt gọn $A=u.v\Big|_a^b-\int_a^b vdu$

Các ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1 Tính $\int_0^1 \frac{x.\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Giải: Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Rightarrow du=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ dv=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \quad \Rightarrow v=\sqrt{x^2+1}\end{cases}$

Suy ra $I=\sqrt{x^2+1}.\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1-\int_0^1 dx=\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-1$

VÍ DỤ 2 Tính $I=\int_0^4 \sqrt{x^2+16}dx$

Giải: Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+16} \Rightarrow du=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx \\ dv=dx \qquad \Rightarrow v=x \end{cases}$

Suy ra: $I=x\sqrt{x^2+16}\Big|_0^4-\int\limits_0^4 \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx=\ 16\sqrt{2}-\int\limits_0^4\left(\sqrt{x^2+16}-\dfrac{16}{\sqrt{x^2+16}}\right)dx$

$=\ 16\sqrt{2}-I+\int\limits_0^4 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx$

$\Rightarrow 2I=16\sqrt{2}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)\Big|_0^4$

$\Rightarrow I=\dfrac{1}{2}\left(16\sqrt{2}+\ln\dfrac{4+4\sqrt{2}}{4}\right)=8\sqrt{2}+\dfrac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}$

VÍ DỤ 3 Tính $I=\int\limits_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx$

Giải: Đặt $\begin{cases} u=\cos(\ln x) \Rightarrow du=\dfrac{-\sin(\ln x)}{x}dx \\ dv=dx \qquad \Rightarrow v=x \end{cases}$

Suy ra $I=x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^\pi}+\int\limits_1^{e^\pi}\sin(\ln x)dx=\ -e^\pi-1+M$; với $M=\int\limits_1^{e^\pi}\sin(\ln x)dx$

Đặt $\begin{cases} u_1=\sin(\ln x) \Rightarrow du_1=\dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx \\ dv_1=dx \qquad \Rightarrow v_1=x \end{cases}$

Suy ra $M=x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^\pi}-\int\limits_1^{e^\pi}\cos(\ln x)dx=\ -\mathrm{I}$

Vậy $I=-e^\pi-1-I \Rightarrow I=\dfrac{-e^\pi-1}{2}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Tính các tích phân sau:

1) $\int\limits_0^\pi e^x\sin 2x dx$ KQ: $\dfrac{2-2e^\pi}{5}$

2) $\int_1^e (1-\ln x)^2 dx$ KQ: 2e- 5

3) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$ KQ: $\frac{\pi^2}{2}-4$

4) $\int_0^{\pi/2} 18x\sin^2 x.\cos x dx$ KQ: $3\pi-4$

5) $\int_4^8 \sqrt{x^2-16}dx$ KQ: $16\sqrt{3}-\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2}$

6) $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$ KQ: $\frac{\pi}{2}-2+\ln 2$

7) $\int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x}.\sin x.\cos^3 x dx$ KQ: $\frac{e-2}{2}$

8) $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)dx$ KQ: $\frac{e^\pi+1}{2}$

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}.\sin x.\cos^3 x dx$ KQ: 9/ $\frac{1}{2}(e-2)$

10) $\int_0^1 x\ln(x^2+1)dx$ KQ: $\ln 2-\frac{1}{2}$

11) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}$ KQ: $\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-1$

12) $\int_0^{\pi/4} e^x\left(\tan^2 x+\tan x-1\right)dx$ KQ: $e^{\pi/4}$

13) $\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{\ln^2 x}-\frac{1}{\ln x}\right)dx$ KQ: $e-\frac{e^2}{2}$

14) $\int_0^{\pi/2} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ KQ: $\frac{\pi}{2}$

15) $\int_1^2 \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}dx$ KQ: $\ln 4-\frac{5}{8}\ln 3$

16) $\int_0^{\pi/2} \sin x.\ln(1+\cos x)dx$ KQ: $2\ln 2-1$

C . MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN KHÁC .

Sau đây xin hệ thống thêm một số phương pháp tích phân đặc biệt, mà việc chuẩn bị rất cần thiết cho việc giải các bài toán với mức độ nâng cao hơn.

I. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ HỮU TỶ.
II. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ VÔ TỶ.
III. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.
IV. CÁC LỚP TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT.

I . TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ HỮU TỶ.

Đây là một dạng toán rất cơ bản, hầu hết các bài toán tích phân đều đưa về việc tính tích phân của một hàm số hữu tỷ. Trong phần nầy hệ thống thêm một số dạng mẫu mực, để giúp các em học sinh ôn tập trước khi thi Đại Học và Cao Đẳng.

Đặt vấn đề: Tính tích phân $I=\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ với bậc $P(x)$ < bậc $Q(x)$.

Dạng 1:

1) $I=\int_a^b \frac{1}{Ax^2+Bx+C}dx \quad (A\neq 0)$.

Ta có: $Ax^2+Bx+C=A\left[(x+\frac{B}{2A})^2-\frac{\Delta}{4A^2}\right]$.

Ta xét 3 trường hợp:

- Nếu tam thức có 2 nghiệm phân biệt ☞dùng công thức: $\int \frac{dx}{x^2-k^2}=\frac{1}{2k}.\ln\left|\frac{x-k}{x+k}\right|+C.$
- Nếu tam thức có nghiệm kép ☞ dùng công thức $\int \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$
- Nếu tam thức vô nghiệm ☞ đưa về $\int \frac{dx}{x^2+k^2}$, đổi biến bằng cách đặt $x = k.\tan t$.

2) $I=\int_a^b \frac{mx+n}{Ax^2+Bx+C}dx \quad (A\neq 0)$.

a) Ta đặt $mx+n = k(Ax^2+Bx+C)'+p$
b) Đồng nhất, tìm 2 số k, p. Đưa về bài toán dạng 1.

VÍ DỤ 1: Tính $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x-2}$

Giải: Ta có: $x^2 - x - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2$. Do đó: $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|_0^1 = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{4}$.

VÍ DỤ 2: Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x + 7} dx$.

Giải: Ta có thể đổi biến trước bằng cách đặt $t = \sin x$, đưa về $I = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(t+2)^2 + (\sqrt{3})^2}$

Sau đó, đặt $t + 2 = \sqrt{3}.\tan u,\ u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Hoặc có thể giải trực tiếp: $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{(\sin x + 2)^2 + (\sqrt{3})^2} dx$.

Đặt $\sin x + 2 = \sqrt{3}.\tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ KQ: $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

VÍ DỤ 3: Tính $I = \int_{-1/2}^{0} \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$

Giải: + Đặt $x + 1 = k(2x + 1) + p$. Ta tìm được $k = \frac{1}{2}; p = \frac{1}{2}$.

+ Ta có: $I = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{0} \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{0} \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$.

Đặt $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ KQ: $I = -\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} + \frac{\pi}{9}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Tính các tích phân sau:

1) $I = \int_0^1 \frac{x}{x^4 + 4x^2 + 3} dx$ KQ: $I = \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$

2) $I = \int_{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$. KQ: $I = -\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

3) $I=\int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$ KQ: $I=3\ln 4-\frac{9}{4}$

4) $I=\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+10x+1}{x^2+2x+9}dx$ KQ: $I=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}+\frac{1}{2}$

5) $I=\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$ KQ: $I=\ln\frac{9}{2}$

DẠNG 2: $I=\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ với bậc $P(x)$ < bậc $Q(x)$.

- $Q(x)$ có nghiệm đơn: ta đặt $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+...$
- $Q(x)$ có nghiệm bội α : ta đặt $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^k}+\frac{B}{(x-\alpha)^{k-1}}+...+\frac{C}{(x-\alpha)}$.
- $Q(x)$ có chứa tam thức ax^2+bx+c vô nghiệm:

ta đặt $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{Mx+n}{ax^2+bx+c}+...$

+ Dùng phương pháp đồng nhất thức, tìm các số A, B, …..
+ Đưa về các dạng đã học.

VÍ DỤ 1: Tính $I=\int_0^1 \frac{3}{1+x^3}dx$.

Giải: + Nhận xét: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

+ Đặt $\frac{3}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

Đồng nhất được: A = 1, B = –1; C = 2.

Chú ý: Có thể đặt: $\frac{3}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B(2x-1)}{x^2-x+1}+\frac{C}{x^2-x+1}$.

Đồng nhất được: A = 1, B = –1/2; C = 3/2. KQ: $I=\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

VÍ DỤ 2: Tính $I=\int_{-1}^0 \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$

Giải: + Đặt: $\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}$

Đồng nhất thức được: A = 3, B = –7, C = 5.

\+ $I = \int_{-1}^{0} (\frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4})dx$. KQ: $I =$ 7ln3 – 5ln5 .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1) $I = \int_{0}^{1} \frac{x-1}{(x-2)^2.(x+3)}dx$ KQ: $I = \frac{1}{10} + \frac{4}{25}\ln\frac{3}{8}$

2) $I = \int_{0}^{1} \frac{4x-2}{(x+2).(x^2+1)}dx$ KQ: I = 3ln2 – 2ln3

3) $I = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{4x^2-4}{4x^2-1}dx$ KQ: $I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}\ln\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{3}$

4) $I = \int_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{(x^2-1)^2}dx$ KQ: $I = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}$

II . TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ VÔ TỶ .

\+ Lớp tích phân nầy, thường ta thường dùng kỷ thuật đổi biến để giải.

\+ Tôi xin giới thiệu thêm một số dạng cơ bản.

1) Dạng 1: $I= \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$. Đặt $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

VÍ DỤ 1: Tính $I = \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)^5}}dx$

Giải: Ta biến đổi: $I = \int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.\frac{1}{(1+x)^2}dx$

Đặt $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt \end{cases}$. Đổi cận, ta được: $I = \int_{0}^{1} t^2dt = \frac{1}{3}$.

Ghi chú : Ta có thể đặt x = cos2t , cách giải cũng khá hay .

2) Dạng 2: $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}})dx$. Đặt: $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$

VÍ DỤ 2: Tính I = $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+8)}}dx$

Giải: Đặt: $t = \sqrt{x+1}+\sqrt{x+8} \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}}{2\sqrt{(x+1)(x+8)}}dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+8)}} = \frac{2dt}{t}$

Đổi cận, ta được: $I = 2.\int_{1+2\sqrt{2}}^{3+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = 2\ln\frac{3+\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$

3) Dạng 3: I = $\int_\alpha^\beta \frac{1}{(ax+b)\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx$. Đặt t = $\frac{1}{ax+b}$

VÍ DỤ 3: Tính: I = $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$

Giải: Đặt $t = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x = \frac{1-t}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt$

Đổi cận, ta được $I = -\int_1^{\sqrt{3}/3} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$

Đổi biến, đặt $u = t+\sqrt{t^2+1}$, ta được: $I = \int_{\sqrt{3}}^{1+\sqrt{2}} \frac{du}{u} = \ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Tính các tích phân sau

1) $I = \int_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$ KQ: $I = 46/15$

2) $I = \int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}dx$ KQ: $I = \frac{14}{5} - \frac{3\sqrt[3]{4}}{10}$

3) $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}dx$ HD: Đặt $t = 1+\sqrt{1+x^2}$ KQ: $I = 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

4) $I = \int_2^6 \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}dx$ KQ: $I = 4\sqrt{2} - 2\ln(3+2\sqrt{2})$

5) $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$ KQ: $I = \frac{2\sqrt{2}-1}{15}$

III . TÍCH PHÂN HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC:

+ Lớp tích phân nầy thường gặp nhất trong các đề thi tuyển sinh Đại Học và Cao Đẳng.

+ Ngoài việc học sinh cần nắm vững các công thức biến đổi lượng giác, học sinh còn phải nắm vững các dạng toán tích phân cơ bản, để có thể giải được bài toán.

+ Tôi xin hệ thống một số dạng toán thường gặp, để giúp học sinh vận dụng để giải bài toán tích phân dạng nầy.

1) Dạng 1: ***(dạng cơ bản)***

a) $I=\int_a^b f(x;\sin^{2k+1}x)dx$ Đặt: $t=\cos x$

b) $I=\int_a^b f(x;\cos^{2k+1}x)dx$ Đặt: $t=\sin x$

c) $I=\int_a^b f(x;\cos^{2k}x,\sin^{2k}x)dx$ Đặt: $t=\tan x$ hay $t=\cot x$ (tùy thuộc vào 2 cận)

d) $I=\int_a^b f(x;\cos x,\sin x)dx$ Đặt: $t=\tan\frac{x}{2}$ hay $t=\cot\frac{x}{2}$ (tùy thuộc vào 2 cận)

e) $I=\int_a^b f(x;\cos x\pm\sin x;\sin x.\cos x)dx$ Đặt $t=\sin x\pm\cos x$

Thực hiện đổi biến, ta đưa về bài toán tích phân hàm số hữu tỷ.

VÍ DỤ 1: Tính $I=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{4\sin^2 x-1}dx$.

Giải: Đặt $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x.dx$

Đổi cận, ta được: $I=\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{1-t^2}{4t^2-1}dt=-\frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}/2}^{1}[1-\frac{3}{(2t+1)(2t-1)}]dt$

KQ: $I=\frac{\sqrt{2}-2}{8}+\frac{3}{16}\ln\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{3}$

VÍ DỤ 2: Tính: $I=\int_0^{\pi/6}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx$

Giải: Đặt t = tanx $\Rightarrow\begin{cases} dx=\frac{1}{1+t^2}dt \\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\end{cases}$

Đổi cận, ta được: $I = -\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{t^4}{t^2-1}dt$ KQ: $I = -\frac{10\sqrt{3}}{27} - \frac{1}{2}\ln\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$.

VÍ DỤ3: Tính: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4.\sin x + 3.\cos x + 5}$

Giải: Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Đổi cận, ta được: $I = \int_0^1 \frac{1}{(t+2)^2}dt$ KQ: $I = \frac{1}{6}$

VÍ DỤ4: Tính: $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sin 2x + 2(1+\sin x + \cos x)}dx$

Giải: Đặt t = sin$x$ + cos$x$ $\Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)dx = -\sqrt{2}.\sin(x - \frac{\pi}{4}).dx$ và $\sin 2x = t^2 - 1$.

Đổi cận, ta được: $I = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(t+1)^2}$ KQ: $I = \frac{4-3\sqrt{2}}{4}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Tính các tích phân sau:

1) $I = \int_0^{\pi/2} \sin^5 x.dx$ KQ: $I = \frac{8}{15}$

2) $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$ KQ: $I = \frac{15}{8} - 2\ln 2$

3) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x.\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ KQ: $I = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$

4) $I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^6 x}$ KQ: $I = \frac{28}{15}$

5) $I = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan x}{\cos^4 x}dx$ KQ: $I = \frac{25}{12}$

6) $I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cot^4 x}{\cos 2x}dx$ KQ: $I = \frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1})$

7) I = $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3 + \sin 2x}} dx$ KQ: $I = \frac{\pi}{6}$

8) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x + \sin x} dx$ KQ: $I = \ln 2$

9) $I = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x - \sqrt{3}.\sin x + 2}$ KQ: $I = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn: Biến đổi mẫu thức = $2.\cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$

10) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x} dx$ KQ: $I = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1})$

Hướng dẫn: Biến đổi $f(x) = \frac{2(\sin x + \cos x)}{(1 + \sin 2x)(2 - \sin 2x)}$ và đặt $t = \sin x - \cos x$.

2) Dạng 2:

Trong dạng nầy, xin giới thiệu 2 dạng toán, mà cách giải khá hay.

Các em học sinh có thể dùng làm tài liệu ôn tập.

a) $I = \int_\alpha^\beta \frac{m\sin x + n\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^k} dx$ ($k \in \{1; 2; 3\}$)

* Đặt: $m\sin x + n\cos x = A(m\sin x + n\cos x) + B(m\cos x - n\sin x)$

b) $I = \int_\alpha^\beta \frac{m\sin x + n\cos x + p}{a\sin x + b\cos x + c} dx$.

* Đặt: $m\sin x + n\cos x + p = A(m\sin x + n\cos x + p) + B(m\cos x - n\sin x) + C$

Dùng đồng nhất thức, tìm các số *A*, *B*, *C* …..

VÍ DỤ 1: Tính: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{4\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$

Giải: Đặt: $4.\sin x = A(\sin x + \cos x) + B(\cos x - \sin x) = (A + B)\cos x + (A - B)\sin x$.

Đồng nhất thức, tìm $A = 2$; $B = -2$

Ta được: $I = 2.\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2} dx - 2.\int_0^{\pi/2} \frac{d(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^3}$ KQ: $I = 2$

Chú ý: Ta có thể dùng phương pháp liên kết với $J = \int_0^{\pi/2} \frac{4\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$, bằng cách tính $I + J$ và $I - J$.

VÍ DỤ 2: Tính: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + 7\cos x + 6}{4\sin x + 3\cos x + 5}dx$

Giải: Đặt: sin$x$ + 7 cos$x$ + 6 = A(4sin$x$ + 3cos$x$ + 5) + B(4cos$x$ – 3sin$x$) + C.

Đồng nhất thức được: A = 1; B = 1; C = 1.

Ta được: $\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{4\cos x - 3\sin x}{4\sin x + 3\cos x + 5}dx + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5}dx$.

KQ: $I = \frac{\pi}{2} + \ln\frac{9}{8} + \frac{1}{6}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Tính các tích phân sau:

1) $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + 2\sin x}{4\cos x + 3\sin x}dx$ KQ: $I = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}\ln\frac{7\sqrt{2}}{8}$

2) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}dx$ KQ: I = 1 + ln2

3) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{5\cos x + \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}dx$ KQ: $I = 3\sqrt{2}.\ln(\sqrt{2} + 1)$

4) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{4\cos x - 7\sin x}{(2\sin x + \cos x)^3}dx$ KQ: $I = \frac{1}{8}$

5) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin x + 11\cos x + 3}{2\sin x + 3\cos x + 1}dx$ KQ: $I = \frac{3\pi}{2} + \ln\frac{3}{4}$

6) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2\cos x + 2}dx$ KQ: $I = -\frac{\pi}{10} - \frac{3}{5}\ln\frac{4}{5} + \frac{7}{5}\ln 2$

IV . LỚP CÁC TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT:

+ Trong lớp tích phân nầy, ta thường dùng các bổ đề để hổ trợ. Do chương trình giáo khoa đã giảm tải, nên việc nêu, chứng minh và áp dụng để giải toán, xin phép không nêu ra ở phần nầy.

+ Trong phần nầy, xin giới thiệu 2 cách giải đặc biệt mà các em học sinh có thể dùng ôn tập cho kỳ thi tuyển sinh sắp tới.

VÍ DỤ 1: Tính: $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{2^x + 1}dx$ (1)

Giải:

Nhận xét: + Bài toán không thể giải bằng các kỷ thuật đã học.

+ Hai cận tích phân đối nhau.

Đặt $x = -t$. Đổi biến ta được: $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2^t.\cos t}{2^t + 1} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2^x.\cos x}{2^x + 1} dx$ (2)

Cộng vế (1) và (2) được: $2.I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx$. Tóm lại: $I = 1$

> *** Bổ đề:** Nếu hàm *f* liên tục và là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thì
> $$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx \ \ (\alpha > 0, 0 < a \neq 1)$$

VÍ DỤ 2: Tính $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$

Giải: Đặt $x = \frac{\pi}{4} - t$. Đổi biến, ta được: $I = \int_0^{\pi/4} \ln 2 dx - \int_0^{\pi/4} \ln(1 + tanx) dx = \ln 2.\frac{\pi}{4} - I$

KQ: $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$

> *** Bổ đề:** Nếu hàm *f* liên tục trên [*a*; *b*] thì
> $$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

1) $I = \int_{-1}^{1} \ln^3(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ KQ: $I = 0$

2) $I = \int_{-1/2}^{1/2} \cos x.\ln(\frac{1 - x}{1 + x}) dx$ KQ: $I = 0$

3) $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}}$ KQ: I = 1 .

4) $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x + 1).(x^2 + 1)}$ KQ: $I = \frac{\pi}{2}$

5) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$ KQ: $I = \frac{\pi}{4}$

6) $I = \int_0^{\pi} \frac{x.\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ KQ: $I = \frac{\pi^2}{4}$

7) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{5cosx - 4\sin x}{(\cos x + \sin x)^3}dx$ KQ: $I = \frac{1}{2}$