# LỜI NÓI ĐẦU

Ngày nay phép tính vi tích phân chiếm một vị trí hết sức quan trọng trong Toán học, tích phân được ứng dụng rộng rãi như để tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay, nó còn là đối tượng nghiên cứu của giải tích, là nền tảng cho lý thuyết hàm, lý thuyết phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng...Ngoài ra phép tính tích phân còn được ứng dụng rộng rãi trong Xác suất, Thống kê, Vật lý, Cơ học, Thiên văn học, y học...

Phép tính tích phân được bắt đầu giới thiệu cho các em học sinh ở lớp 12, tiếp theo được phổ biến trong tất cả các trường Đại học cho khối sinh viên năm thứ nhất và năm thứ hai trong chương trình học Đại cương. Hơn nữa trong các kỳ thi Tốt nghiệp THPT và kỳ thi Tuyển sinh Đại học phép tính tích phân hầu như luôn có trong các đề thi môn Toán của khối A, khối B và cả khối D. Bên cạnh đó, phép tính tích phân cũng là một trong những nội dung để thi tuyển sinh đầu vào hệ Thạc sĩ và nghiên cứu sinh.

Với tầm quan trọng của phép tính tích phân, chính vì thế mà tôi viết một số kinh nghiệm giảng dạy tính tích phân của khối 12 với chuyên đề **"TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH - ĐỔI BIẾN SỐ VÀ TỪNG PHẦN"** để phần nào củng cố, nâng cao cho các em học sinh khối 12 để các em đạt kết quả cao trong kỳ thi Tốt nghiệp THPT và kỳ thi Tuyển sinh Đại học và giúp cho các em có nền tảng trong những năm học Đại cương của Đại học.

Trong phần nội dung chuyên đề dưới đây, tôi xin được nêu ra một số bài tập minh họa cơ bản tính tích phân chủ yếu áp dụng phương pháp phân tích, phương pháp đổi biến số, phương pháp tích phân từng phần. Các bài tập đề nghị là các đề thi Tốt nghiệp THPT và đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng của các năm để các em học sinh rèn luyện kỹ năng tính tích phân và phần cuối của chuyên đề là một số câu hỏi trắc nghiệm tích phân.

Tuy nhiên với kinh nghiệm còn hạn chế nên dù có nhiều cố gắng nhưng khi trình bày chuyên đề này sẽ không tránh khỏi những thiếu sót, rất mong được sự góp ý chân tình của quý Thầy Cô trong Hội đồng bộ môn Toán Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Đồng Nai. Nhân dịp này tôi xin cảm ơn Ban lãnh đạo nhà trường tạo điều kiện tốt cho tôi và cảm ơn quý thầy cô trong tổ Toán trường Nam Hà, các đồng nghiệp, bạn bè đã đóng góp ý kiến cho tôi hoàn thành chuyên đề này. Tôi xin chân thành cám ơn./.

# MỤC LỤC

# I. NGUYÊN HÀM:

## I.1. ĐỊNH NGHĨA NGUYÊN HÀM:

Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a;b) nếu với mọi $x \in (a;b)$:

$$F'(x) = f(x)$$

**VD1:** a) Hàm số $F(x) = x^3$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ trên R

b) Hàm số F(x) = lnx là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0;+\infty)$

## I.2. ĐỊNH LÝ:

Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a;b) thì:

a) Với mọi hằng số C, F(x) + C cũng là một nguyên hàm của f(x) trên khoảng đó.

b) Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số f(x) trên khoảng (a;b) đều có thể viết dưới dạng F(x) + C với C là một hằng số.

Theo định lý trên, để tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x) thì chỉ cần tìm một nguyên hàm nào đó của nó rồi cộng vào nó một hằng số C.

Tập hợp các nguyên hàm của hàm số f(x) gọi là họ nguyên hàm của hàm số f(x) và được ký hiệu: $\int f(x)dx$ (hay còn gọi là tích phân bất định)

Vậy: $\int f(x)dx = F(x) + C$

**VD2:** a) $\int 2xdx = x^2 + C$ b) $\int \sin x dx = -\cos x + C$ c) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$

## I.3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2) $\int a.f(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a \neq 0)$

3) $\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4) $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f\left(u(x)\right)u'(x)dx = F\left(u(x)\right) + C$

**VD3:** a) $\int \left(5x^4 - 6x^2 + 8x\right)dx = x^5 - 2x^3 + 4x^2 + C$

b) $\int 6\cos x.\sin x dx = -6\int \cos x.d(\cos x) = -3\cos^2 x + C$

## I.4. BẢNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM:

# BẢNG CÁC NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

| NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SƠ CẤP THƯỜNG GẶP | NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ HỢP |
|---|---|
| 1/ $\int dx = x + C$ | 1/ $\int du = u + C$ |
| 2/ $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ | 2/ $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ |
| 3/ $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C \quad (x \neq 0)$ | 3/ $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C \quad (u = u(x) \neq 0)$ |
| 4/ $\int e^{x}dx = e^{x} + C$ | 4/ $\int e^{u}du = e^{u} + C$ |
| 5/ $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$ | 5/ $\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$ |
| 6/ $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ | 6/ $\int \cos u\, du = \sin u + C$ |
| 7/ $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ | 7/ $\int \sin u\, du = -\cos u + C$ |
| 8/ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1 + tg^2 x\right) dx = tgx + C \ (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$ | 8/ $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \left(1 + tg^2 u\right) du = tgu + C \ (u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$ |
| 9/ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \left(1 + cotg^2 x\right) dx = -cotgx + C \ (x \neq k\pi)$ | 9/ $\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \left(1 + cotg^2 u\right) du = -cotgu + C \ (u \neq k\pi)$ |

## CÁC CÔNG THỨC BỔ SUNG

| ❖ CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM THƯỜNG GẶP: | ❖ CÁC CÔNG THỨC LŨY THỪA: |
|---|---|
| 1/ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C \quad (x \neq 0)$ | 1/ $a^m . a^n = a^{m+n}$ |
| 2/ $\int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (a \neq 0)$ | 2/ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ; $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ |
| 3/ $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C \ (a \neq 0)$ | 3/ $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$ ; $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ |
| 4/ $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C \quad (a \neq 0)$ | ❖ CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC: |
| 5/ $\int a^{kx}dx = \frac{a^{kx}}{k.\ln a} + C \quad (0 \neq k \in R, 0 < a \neq 1)$ | a. CÔNG THỨC HẠ BẬC: |
| 6/ $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C \ (a \neq 0)$ | 1/ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 2/ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ |
| 7/ $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C \ (a \neq 0)$ | b. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG |
| 8/ $\int tgx\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$ | 1/ $\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$ |
| 9/ $\int cotgx\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C \quad (x \neq k\pi)$ | 2/ $\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$ |
| | 3/ $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$ |

## II. TÍCH PHÂN:

### II.1. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH:

Giả sử hàm số f(x) liên tục trên một khoảng K, a và b là hai phần tử bất kỳ của K, F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K. Hiệu F(b) – F(a) được gọi là tích phân từ a đến b của f(x). Ký hiệu:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

### II.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN:

1/ $\int_a^a f(x)dx = 0$

2/ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3/ $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx \quad (k \neq 0)$

4/ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5/ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $c \in (a;b)$

6/ Nếu $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7/ Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

8/ Nếu $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a;b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

9/ t biến thiên trên $[a;b] \Rightarrow G(t) = \int_a^t f(x)dx$ là một nguyên hàm của $f(t)$ và $G(a) = 0$

### II.3. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH:

***Chú ý 1:*** Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ ta phân tích $f(x) = k_1 f_1(x) + \ldots + k_m f_m(x)$

Trong đó: $k_i \neq 0 \quad (i = 1,2,3,\ldots,m)$ các hàm $f_i(x) \quad (i = 1,2,3,\ldots,m)$ có trong bảng nguyên hàm cơ bản.

VD4: Tính các tích phân sau:

$$1)\ I=\int_{-1}^{2}(3x^2-4x+3)dx=(x^3-2x^2+3x)\Big|_{-1}^{2}$$

$$=(2^3-2.2^2+3.2)-((-1)^3-2.(-1)^2+3.(-1))=12$$

Nhận xét: Câu 1 trên ta chỉ cần áp dụng tính chất 4 và sử dụng công thức 1/ và 2/ trong bảng nguyên hàm.

$$2)\ I=\int_{1}^{2}\frac{3x^4-6x^3+4x^2-2x+4}{x^2}dx$$

Nhận xét: Câu 2 trên ta chưa áp dụng ngay được các công thức trong bảng nguyên hàm, trước hết tách phân số trong dấu tích phân (lấy tử chia mẫu) rồi áp dụng tính chất 4 và sử dụng công thức 1/, 2/, 3/ trong bảng nguyên hàm.

$$\Rightarrow I=\int_{1}^{2}\frac{3x^4-6x^3+4x^2-2x+4}{x^2}dx=\int_{1}^{2}(3x^2-6x+4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})dx$$

$$=(x^3-3x^2+4x-2ln|x|-\frac{4}{x})\Big|_{1}^{2}=4-2ln2$$

$$3)\ I=\int_{0}^{2}\frac{x^2-5x+3}{x+1}dx$$

Nhận xét: Câu 3 trên ta cũng chưa áp dụng ngay được các công thức trong bảng nguyên hàm, trước hết phân tích phân số trong dấu tích phân (lấy tử chia mẫu) rồi áp dụng tính chất 4 và sử dụng công thức 1/, 2/ trong bảng nguyên hàm và công thức 3/ bổ sung.

$$\Rightarrow I=\int_{0}^{2}\frac{x^2-5x+3}{x+1}dx=\int_{0}^{2}\left(x-6+\frac{9}{x+1}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-6x+9ln|x+1|\right)\Bigg|_{0}^{2}=2-12+9ln3=9ln3-10$$

$$4)\ I=\int_{0}^{1}e^x\left(2xe^{-x}+5^xe^{-x}-e^{-x}\right)dx$$

Nhận xét: Câu 4: biểu thức trong dấu tích phân có dạng tích ta cũng chưa áp dụng ngay được các công thức trong bảng nguyên hàm, trước hết nhân phân phối rút gọn rồi áp dụng tính chất 4 và sử dụng công thức 1/, 2/, 5/ trong bảng nguyên hàm.

$$\Rightarrow I=\int_{0}^{1}e^x\left(2xe^{-x}+5^xe^{-x}-e^{-x}\right)dx=\int_{0}^{1}\left(2x+5^x-1\right)dx=\left(x^2+\frac{5^x}{ln5}-x\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{4}{ln5}$$

$$5)\ I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(4cosx+2sinx-\frac{2}{cos^2x})dx=(4sinx-2cosx-2tgx)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}-2+2=\sqrt{2}$$

Nhận xét: Câu 5 trên ta chỉ cần áp dụng tính chất 4 và sử dụng công thức 6/, 7/ và 8/ trong bảng nguyên hàm.

6) $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} (4sin2x - 12cos4x)dx = (-2cos2x - 3sin4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = -\sqrt{2} - 3 + 2 = -1 - \sqrt{2}$

Nhận xét: Câu 6 trên ta cũng chỉ cần áp dụng tính chất 4 và sử dụng công thức 6/ , 7/ trong bảng nguyên hàm phần các công thức bổ sung.

7) $I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} sin^2(2x - \frac{\pi}{4})dx$

Nhận xét: Câu 7 học sinh có thể sai vì sử dụng nhầm công thức 2/ trong bảng bảng nguyên hàm cột bên phải, bởi đã xem $u^2 = sin^2(2x - \frac{\pi}{4})$ (hơi giống đạo hàm hàm số hợp). Với câu 7 trước hết phải hạ bậc rồi sử dụng công thức 6/ trong bảng nguyên hàm phần các công thức bổ sung.

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} sin^2(2x - \frac{\pi}{4})dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}} \left(1 - cos(4x - \frac{\pi}{2})\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 - sin4x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}cos4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}cos\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}cos0\right) = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{16}$$

8/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{16}} cos6x.cos2xdx$

Nhận xét: Ở câu 8: biểu thức trong dấu tích phân có dạng tích ta cũng chưa áp dụng ngay được các công thức trong bảng nguyên hàm, trước hết phải biến đổi lượng giác biến đổi tích thành tổng rồi áp dụng tính chất 4 và sử dụng công thức 6/ trong bảng nguyên hàm phần các công thức bổ sung.

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{16}} cos6x.cos2xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{16}} (cos8x + cos4x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}sin8x + \frac{1}{4}sin4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{16}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}sin\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}sin0 + \frac{1}{4}sin0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{1}{16}(1 + \sqrt{2})$$

9) $I = \int_{-2}^{2} |x^2 - 1|dx$

Nhận xét: Câu 9 biểu thức trong dấu tích phân có chứa giá trị tuyệt đối, ta hướng học sinh khử dấu giá trị tuyệt đối bằng cách xét dấu biểu thức $x^2 - 1$ trên [-2;2] và kết hợp với tính chất 5/ của tích phân để khử giá trị tuyệt đối.

$$\Rightarrow \mathrm{I} = \int_{-2}^{2} \left|x^2 - 1\right| dx = \int_{-2}^{-1} \left(x^2 - 1\right) dx - \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right) dx + \int_{1}^{2} \left(x^2 - 1\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_{1}^{2} = 5$$

10) $\mathrm{I} = \int_{2}^{3} \frac{3x+9}{x^2 - 4x - 5} dx$

Nhận xét: Câu 10 trên ta không thực hiện phép chia đa thức được như câu 2 và 3, mặt khác biểu thức dưới mẫu phân tích được thành $(x-5)(x+1)$ nên ta tách biểu thức trong dấu tích phân như sau: $\frac{3x+9}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1} = \frac{4}{x-5} - \frac{1}{x+1}$ (phương pháp hệ số bất định)

$$\Rightarrow \mathrm{I} = \int_{2}^{3} \frac{3x+9}{x^2 - 4x - 5} dx = \int_{2}^{3} \left(\frac{4}{x-5} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left(4\ln|x-5| - \ln|x+1|\right)\Big|_{2}^{3}$$

$$= 4\ln 2 - \ln 4 - 4\ln 3 + \ln 3 = 2\ln 2 - 3\ln 3 = \ln\frac{4}{27}$$

***Chú ý 2:*** Để tính $\mathrm{I} = \int \frac{a'x + b'}{ax^2 + bx + c} dx \qquad (b^2 - 4ac \geq 0)$ ta làm như sau:

***TH1***: Nếu $b^2 - 4ac = 0$, khi đó ta luôn có sự phân tích $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$

$$\Rightarrow \mathrm{I} = \int \frac{a'(x + \frac{b}{2a}) + b' - \frac{ba'}{2a}}{a(x + \frac{b}{2a})^2} dx = \frac{a'}{a} \int \frac{dx}{x + \frac{b}{2a}} + \frac{b' - \frac{ba'}{2a}}{a} \int \frac{dx}{(x + \frac{b}{2a})^2}$$

***TH2:*** Nếu $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Ta xác định A,B sao cho

$a'x + b' = A(x - x_1) + B(x - x_2)$, đồng nhất hai vế $\Rightarrow \begin{cases} A + B = a' \\ Ax_1 + Bx_2 = -b' \end{cases}$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{a} \int \frac{A(x - x_1) + B(x - x_2)}{(x - x_1)(x - x_2)} dx = \frac{1}{a} \int \left(\frac{A}{x - x_2} + \frac{B}{x - x_1}\right) dx.$$

***Chú ý 3:***

***TH1:*** Để tính $I = \int \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}dx$ ta làm như sau:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$$

***TH2:*** Để tính $I = \int \frac{P(x)}{(x-a_1)^m(x-a_2)^k\ldots(x-a_n)^r}dx$ ta làm như sau:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^m(x-a_2)^k\ldots(x-a_n)^r} = \frac{A_1}{(x-a_1)^m} + \frac{A_2}{(x-a_2)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a_m)} + \ldots$$

***TH3:*** Để tính $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ với P(x) và Q(x) là hai đa thức:

* Nếu bậc của P(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của Q(x) thì lấy P(x) chia cho Q(x).
* Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn bậc của Q(x) thì tìm cách đưa về các dạng trên.

Nhận xét: Ví dụ 4 trên gồm những bài tập tính tích phân đơn giản mà học sinh có thể áp dụng ngay bảng công thức nguyên hàm để giải được bài toán hoặc với những phép biến đổi đơn giản như nhân phân phối, chia đa thức, đồng nhất hai đa thức, biến đổi tích thành tổng...Qua ví dụ 4 này nhằm giúp các em thuộc công thức và nắm vững phép tính tích phân cơ bản.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ 1: Tính các tích phân sau:

1) $I = \int_0^1 (x\sqrt{x} + 2x^3 + 1)dx$

2) $I = \int_1^2 \frac{2x^2\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} - 3x + 1}{x^2}dx$

3) $I = \int_{-1}^0 \frac{x^3 - 3x^2 - 5x + 3}{x-2}dx$

4) $I = \int_{-2}^2 \left(x^2 + x - 3\right)^2 dx$

5) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(sinx + cos2x - sin3x\right)dx$

6) $I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} 4sinx.sin2x.sin3xdx$

7) $I = \int_0^{\frac{\pi}{16}} cos^4 2xdx$

8) $I = \int_{-2}^2 \left|x^2 + 2x - 3\right|dx$

9) $I = \int_1^4 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

10) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

11) $I = \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$

12) $I = \int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3(x+3)}dx$

13) $I = \int \frac{xdx}{x^4 - 6x^2 + 5}$

14) $I = \int \frac{x^7dx}{(1+x^4)^2}$

## II.4. TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ:

### II.4.1. Phương pháp đổi biến số loại 1:

Ta có chú ý (SGK trang 123): Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ chỉ phụ thuộc vào hàm số f(x), cận a và b mà không phụ thuộc vào cách ký hiệu biến số tích phân. Tức là:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$$

Trong một số trường hợp tính tích phân mà không tính trực tiếp bằng công thức hay qua các bước phân tích ta vẫn không giải được. Ta xét các trường hợp cơ bản sau:

VD5: Tính các tích phân sau:

1) $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

Phân tích: Biểu thức trong dấu tích phân có chứa căn bậc hai, ta không khử căn bằng phép biến đổi bình phương hai vế được, ta thử tìm cách biến đổi đưa căn bậc hai về dạng $\sqrt{A^2}$, khi đó ta sẽ liên tưởng ngay đến công thức: $\sqrt{1-sin^2x} = \sqrt{cos^2x} = |cosx|$, do đó:

Đặt $x = \sqrt{2}sint \Rightarrow dx = \sqrt{2}costdt$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Đổi cận: $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}sint = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$x = 0 \Rightarrow \sqrt{2}sint = 0 \Rightarrow t = 0$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{2}cost.dt}{\sqrt{2-2sin^2t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{2}cost.dt}{\sqrt{2(1-sin^2t)}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} \text{ ( vì } t \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow cost > 0\text{)}$$

Trong VD trên khi ta thay đổi như sau: $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$. Học sinh làm tương tự và được kết quả $I = \frac{\pi}{2}$. Kết quả trên bị sai vì hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ không xác định khi $x = \sqrt{2}$.

Do đó khi ra đề ở dạng trên Giáo viên cần chú ý: hàm số $f(x)$ xác định trên [a;b]

2) $I = \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \sqrt{3 - x^2}dx$

Đặt $x = \sqrt{3}sint \Rightarrow dx = \sqrt{3}costdt$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Đổi cận: $x = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \sqrt{3}sint = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$x = 0 \Rightarrow \sqrt{2}sint = 0 \Rightarrow t = 0$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{3 - 3sin^2t}.\sqrt{3}cost.dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3cos^2t.dt = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 + cos2t).dt = \frac{3}{2}\left(t + \frac{1}{2}sin2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

a) Khi gặp dạng $\int_\alpha^\beta \sqrt{a^2 - x^2}dx$ hay $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a > 0)

Đặt $x = a.sint \Rightarrow dx = a.cost.dt$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

( Để biến đổi đưa căn bậc hai về dạng $\sqrt{A^2}$, tức là: $\sqrt{a^2 - a^2sin^2x} = \sqrt{a^2cos^2x} = a.|cosx|$ )

Đổi cận: $x = \beta \Rightarrow t = \beta' \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$x = \alpha \Rightarrow t = \alpha' \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Lưu ý: Vì $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \alpha', \beta' \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow cost > 0$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{a^2 - a^2sin^2t}.acostdt = \int_{\alpha'}^{\beta'} a^2cost^2dt$$, hạ bậc $cos^2t$.

$$hay \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{a.costdt}{\sqrt{a^2 - a^2sin^2t}} = \int_{\alpha'}^{\beta'} dt$$

Đến đây, công thức nguyên hàm không phụ thuộc vào biến số nên ta tính được tích phân theo biến số t một cách dễ dàng. Ở đây ta cần lưu ý: Biểu thức trong dấu tích phân này là hàm số theo biến số t đơn điệu trên [α;β].

Ta mở rộng tích phân dạng trên như sau:

b) Khi gặp dạng $\int_\alpha^\beta \sqrt{a^2 - u^2(x)}dx$ hay $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{a^2 - u^2(x)}}$ (a > 0)

Đặt $u(x) = a.sint \Rightarrow u'(x).dx = a.cost.dt$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Đổi cận: $x=\beta \Rightarrow t=\beta' \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$x=\alpha \Rightarrow t=\alpha' \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

VD6: Tính tích phân sau: $I=\int_{2}^{2+\frac{\sqrt{6}}{2}}\sqrt{-x^2+4x-1}\,dx$. Ta có: $I=\int_{2}^{2+\frac{\sqrt{6}}{2}}\sqrt{3-(x-2)^2}\,dx$

Đặt $x-2=\sqrt{3}sint \Rightarrow dx=\sqrt{3}cost.dt$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Đổi cận: $x=2+\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow sint=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$x=2 \Rightarrow sint=0 \Rightarrow t=0$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{3-3sin^2t}.\sqrt{3}cost.dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}3cos^2t.dt$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+cos2t).dt=\frac{3}{2}\left(t+\frac{1}{2}sin2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

VD7: Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{2+x^2}dx$

Nhận xét: Ta thấy tam thức bậc hai ở mẫu số vô nghiệm nên ta không sử dụng phương pháp hệ số bất định như ví dụ 4.10 và không phân tích biểu thức trong dấu tích phân được như chú ý 2 và chú ý 3.

Đặt: $x=\sqrt{2}tgt \Rightarrow dx=\sqrt{2}.\left(1+tg^2t\right)dt$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận: $x=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}tgt=\sqrt{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$x=0 \Rightarrow \sqrt{2}tgt=0 \Rightarrow t=0$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}.\left(1+tg^2t\right)dt}{2+2tg^2t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

c) Khi gặp dạng $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{a^2+x^2}$ (a > 0)

Nhận xét: $a^2 + x^2 = 0$ vô nghiệm nên ta không phân tích biểu thức trong dấu tích phân được như chú ý 2 và chú ý 3.

Đặt $x=a.tgt \Rightarrow dx=a.\left(1+tg^2t\right)dt$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận: $x=\beta \Rightarrow t=\beta' \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$x=\alpha \Rightarrow t=\alpha' \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Ta xét ví dụ tương tự tiếp theo:

VD8: Tính tích phân sau: $I=\int_{1}^{1+\sqrt{2}}\frac{dx}{x^2-2x+3}$

Nhận xét: Ta thấy tam thức bậc hai ở mẫu số vô nghiệm nên ta phân tích mẫu số được thành: $a^2+u^2(x)$.

Ta có: $I=\int_{1}^{1+\sqrt{2}}\frac{dx}{x^2-2x+3}=\int_{1}^{1+\sqrt{2}}\frac{dx}{2+(x-1)^2}$

Đặt $x-1=\sqrt{2}tgt \Rightarrow dx=\sqrt{2}.(1+tg^2t)dt$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận:

$x=1+\sqrt{2}\Rightarrow tgt=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$x=1 \Rightarrow tgt=0 \Rightarrow t=0$

$$\Rightarrow I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}.(1+tg^2t)dt}{2+2tg^2t}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

Vậy:

d) Khi gặp dạng $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{a^2+u^2(x)}$ (a > 0)

Với tam thức bậc hai $a^2+u^2(x)$ vô nghiệm thì

Đặt $u(x)=a.tgt\Rightarrow u'(x)dx=a.(1+tg^2t)dt$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Đổi cận: $x=\beta \Rightarrow t=\beta' \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$x=\alpha \Rightarrow t=\alpha' \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

**Tóm lại:** Phương pháp đổi biến số dạng 1:

Định lý: Nếu

1. Hàm số x = u(t) có đạo hàm liên tục, đơn điệu trên đoạn [α;β].
2. Hàm số hợp f [u(t)] được xác định trên đoạn [α;β].

3. u(α) = a, u(β) = b.

thì $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t).dt$

Từ đó ta rút ra quy tắc đổi biến số dạng 1 như sau:

**B1**: Đặt $x = u(t)$ (*với u(t) là hàm có đạo hàm liên tục trên* $[\alpha;\beta]$, *f(u(t)) xác định trên* $[\alpha;\beta]$ *và* $u(\alpha) = a,\ u(\beta) = b$) và xác định $\alpha, \beta$

**B2**: Thay vào ta có: $I = \int_a^b f(u(t)).u'(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

Một số dạng khác thường dùng phương pháp đổi biến số dang 1:

* Hàm số trong dấu tích phân chứa $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ *hay* $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}$ ta thường đặt $x = \dfrac{a}{b}sint$

* Hàm số trong dấu tích phân chứa $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ *hay* $\dfrac{1}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}}$ ta thường đặt $x = \dfrac{a}{bsint}$

* Hàm số trong dấu tích phân chứa $\dfrac{1}{a^2 + b^2x^2}$ ta thường đặt $x = \dfrac{a}{b}tgt$

* Hàm số trong dấu tích phân chứa $\sqrt{x(a - bx)}$ ta thường đặt $x = \dfrac{a}{b}sin^2t$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ 2: Tính các tích phân sau:

1) $I = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}dx$

2) $I = \int_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - 3x^2}}dx$

3) $I = \int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}dx$

4) $I = \int_1^{\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}dx$

5) $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x(2 - x)}}dx$

6) $I = \int_0^1 \dfrac{dx}{x^2 + x + 1}$

Hướng dẫn: Câu 4: Đặt $x = \dfrac{1}{sint}$ Câu 5: Đặt $x = 2sin^2t$

VD9: Chứng minh rằng: Nếu hàm số f(x) liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)dx$$

Áp dụng phương pháp trên để tính các tích phân sau :

1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{sin^4x}{sin^4x + cos^4x}dx$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + tgx)dx$

Giải

VT = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)dx$ Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

$\Rightarrow$ VT $= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)dx =$ VP (đpcm)

Áp dụng phương pháp trên để tính các tích phân sau :

1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^4x}{sin^4x + cos^4x}dx$

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{sin^4(\frac{\pi}{2} - t)}{sin^4(\frac{\pi}{2} - t) + cos^4(\frac{\pi}{2} - t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^4t}{sin^4t + cos^4t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^4x}{sin^4x + cos^4x}dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^4x}{sin^4x + cos^4x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^4x}{sin^4x + cos^4x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}.$$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + tgx)dx$

Đặt $x = \frac{\pi}{4} - t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ ; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$

$$\Rightarrow I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} ln[1 + tg(\frac{\pi}{4} - t)]dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + \frac{1 - tgt}{1 + tgt})dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [ln2 - ln(1 + tgt)]dt = ln2.\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - I$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi ln2}{4} \Rightarrow I = \frac{\pi.ln2}{8}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ 3: Tính các tích phân sau:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x dx$ **HD**: Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$.

**2)** Cho $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx$. CMR:

a) $I = 2\int_0^a f(x)dx$ nếu f(x) là hàm số chẵn.

b) $I = 0$ nếu f(x) là hàm số lẻ.

**3)** Chứng minh rằng: Nếu f(x) là hàm số chẵn thì $\int_{-b}^{b} \frac{f(x)}{a^x + 1}dx = \int_0^b f(x)dx$.

Áp dụng: Tính $I = \int_{-2}^{2} \frac{2x^2 + 1}{2^x + 1}dx$.

**4)** Chứng minh rằng: $\int_0^{\pi} xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)dx$ (HD: Đặt $x = \pi - t$)

Áp dụng: Tính $I = \int_0^{\pi} \frac{xsinx}{4 + sin^2 x}dx$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ 4: Tính các tích phân sau: (Các đề tuyển sinh Đại học)

a) $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}dx$ (ĐH TCKT 1997)

b) $I = \int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3}dx$ (ĐH Y HP 2000)

c) $I = \int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}dx$ (ĐH T.Lợi 1997)

d) $I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx$ (ĐH SPHN 2000)

e) $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}$ (ĐH TCKT 2000)

f) $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 4x^2 + 3}$ (ĐH T.Lợi 2000)

g) $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$ (ĐH N.Ngữ 2001)

h) $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ (ĐH BKHN 1995)

**II.4.2. Phương pháp đổi biến số loại 2:** (Dạng nghịch)

Nếu tích phân có dạng $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx$

Đặt: $u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx$

Đổi cận: $x = b \Rightarrow u_2 = u(b)$

$x = a \Rightarrow u_1 = u(a)$

$\Rightarrow I = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$

a) Một số dạng cơ bản thường gặp khi đổi biến số loại 2:(Dạng nghịch)

Trong một số trường hợp tính tích phân bằng phương pháp phân tích hay tính tích phân bằng tích phân đổi biến số loại 1 không được nhưng ta thấy biểu thức trong dấu tích phân có chứa:

1. Lũy thừa thì ta thử đặt u bằng biểu thức bên trong của biểu thức có chứa lũy thừa cao nhất.

2. Căn thức thì ta thử đặt u bằng căn thức.

3. Phân số thì ta thử đặt u bằng mẫu số.

4. cosx.dx thì ta thử đặt u = sinx.

5. sinx.dx thì ta thử đặt u = cosx.

6. $\frac{dx}{cos^2x}$ hay (1 + tg$^2$x)dx thì ta thử đặt u = tgx.

7. $\frac{dx}{sin^2x}$ hay (1 + cotg$^2$x)dx thì ta thử đặt u = cotgx.

8. $\frac{dx}{x}$ và chứa lnx thì ta thử đặt u = lnx.

VD 10: Tính các tích phân sau:

1. a) $I = \int_0^1 (x^3+1)^5 x^2 dx$

Đặt: $u = x^3+1 \Rightarrow du = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{du}{3}$

Đổi cận:

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $u$ | $1$ | $2$ |

$$\Rightarrow I = \int_1^2 u^5 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_1^2 u^5 du = \left.\frac{u^6}{18}\right|_1^2 = \frac{2^6}{18} - \frac{1^6}{18} = \frac{7}{2}$$

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+sinx)^3.cosx.dx$ (Tương tự)

2. a) $I = \int_0^2 \sqrt{4+3x^2}.12x.dx$

Đặt: $u = \sqrt{4+3x^2} \Rightarrow u^2 = 4+3x^2$

$\Rightarrow 2udu = 6xdx \Rightarrow 12xdx = 4udu$

Đổi cận:

| $x$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|
| $u$ | $2$ | $4$ |

$\Rightarrow \mathrm{I} = \int_2^4 u.4u.du = \int_2^4 4u^2.du = \left.\frac{4u^3}{3}\right|_2^4 = \frac{4.4^3}{3} - \frac{4.2^3}{3} = \frac{224}{3}$

b) $\mathrm{I} = \int_0^2 \sqrt{1+2x^2}.x^3.dx$ (HD: $\mathrm{I} = \int_0^2 x^2.\sqrt{1+2x^2}.xdx$ )

Đặt $u = \sqrt{1+2x^2} \Rightarrow u^2 = 1+2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{u^2-1}{2}$

$\Rightarrow 2udu = 4xdx \Rightarrow xdx = \frac{udu}{2}$ ...

c) $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+7x^3}}dx$ Đặt $u^3 = \sqrt[3]{1+7x^3} \Rightarrow u^3 = 1+7x^3$

$\Rightarrow 3u^2du = 21x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{u^2du}{7}$

Đổi cận:

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $u$ | $1$ | $2$ |

$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{u^2}{7u}du = \frac{1}{7}\int_1^2 udu = \left.\frac{1u^2}{14}\right|_1^2 = \frac{2^2}{14} - \frac{1^2}{14} = \frac{3}{14}$

3.a) $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$ Ta có: $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^2.x}{x^2+1}dx$

Đặt $u = x^2+1 \Rightarrow x^2 = u-1$

$\Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{du}{2}$

Đổi cận:

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $u$ | $1$ | $2$ |

$\Rightarrow \mathrm{I} = \int_1^2 \frac{u-1}{2u}du = \frac{1}{2}\int_1^2\left(1-\frac{1}{u}\right)du = \left.\left(u - ln|u|\right)\right|_1^2 = \frac{1}{2}(2-ln2-1) = \frac{1}{2}(1-ln2)$

b) $\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$ (HD: Đặt $u = \sqrt{x^3+2}$ )

4.a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^4x.cosx.dx$ Đặt: $u=sinx\Rightarrow du=cosx.dx$

Đổi cận:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ |
|---|---|---|
| $u$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ |

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{1}{2}} u^4du=\left(\frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{160}$$

b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{1+3cosx}dx$ (HD: Đặt $u=1+3cosx$ )

c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3sinx}.cosxdx$ (HD: Đặt $u=\sqrt{1+3sinx}$ )

5.a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x+sinx}{\sqrt{1+3cosx}}dx$ (Đề ĐH khối A – 2005)

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2sinxcosx+sinx}{\sqrt{1+3cosx}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx(2cosx+1)}{\sqrt{1+3cosx}}dx$

Đặt $u=\sqrt{1+3cosx}\Rightarrow u^2=1+3cosx\Rightarrow cosx=\frac{u^2-1}{3}$

$$\Rightarrow 2udu=-3sinxdx\Rightarrow sinxdx=\frac{-2udu}{3}$$

Đổi cận:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $u$ | $2$ | $1$ |

$$\Rightarrow I=\int_2^1\frac{\left(2\frac{u^2-1}{3}+1\right)\left(\frac{-2udu}{3}\right)}{u}dx=\frac{2}{9}\int_1^2\left(2u^2+1\right)du$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{2u^3}{3}+u\right)\Bigg|_1^2=\frac{2}{9}\left(\frac{2.2^3}{3}+2-\frac{2.1^3}{3}-1\right)=\frac{34}{27}$$

Nhận xét: Đối với những bài chứa căn thức, học sinh có thể đặt u bằng biểu thức trong dấu căn, nhưng sau khi đổi biến thì tích phân mới vẫn còn chứa căn thức nên việc tính tiếp theo sẽ phức tạp hơn (tức là học sinh phải đưa về $x^{\alpha}$). Ví dụ: Cách 2 của câu 5

5.a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x+sinx}{\sqrt{1+3cosx}}dx$ (Đề ĐH khối A – 2005)

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2sinxcosx+sinx}{\sqrt{1+3cosx}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx(2cosx+1)}{\sqrt{1+3cosx}}dx$

Đặt $u=1+3cosx\Rightarrow cosx=\frac{u-1}{3}$

$\Rightarrow du=-3sinxdx\Rightarrow sinxdx=\frac{-du}{3}$

Đổi cận:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $u$ | $4$ | $1$ |

$$\Rightarrow I=\int_4^1\frac{\left(2\frac{u-1}{3}+1\right)\left(\frac{-du}{3}\right)}{\sqrt{u}}du=\frac{1}{9}\int_1^4\frac{(2u+1)}{\sqrt{u}}du$$

$$=\frac{1}{9}\int_1^4\left(2\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)=\frac{1}{9}\int_1^4\left(2u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{4}{3}u\sqrt{u}+2\sqrt{u}\right)\Bigg|_1^4$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{32}{3}+4-\frac{4}{3}-2\right)=\frac{34}{27}$$

Nhận xét: Rõ ràng cách giải 2 đặt u bằng biểu thức trong căn thấy phức tạp hơn so với cách 1.

b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x.cosx}{1+cosx}dx$ (ĐH khối B – 2005)

6.a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(tgx+1)^2}{cos^2x}dx$ Đặt: $u=tgx+1\Rightarrow du=\frac{dx}{cos^2x}$

Đổi cận:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|
| $u$ | $1$ | $2$ |

$$\Rightarrow I=\int_1^2u^2du=\left(\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{tg^2x-3tgx+1}{cos^2x}dx$ (HD: Đặt $u=tgx$)

7.a) $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{cotgx}}{sin^2x}dx$

Đặt: $u=cotgx\Rightarrow du=\frac{-dx}{sin^2x}$

Đổi cận:

| $x$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $u$ | $1$ | $0$ |

$\Rightarrow I=-\int_1^0 e^u du=\int_0^1 e^u du=e^u\Big|_0^1=e-1$

b) $I=\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3cotgx+1}}{sin^2x}dx$ (HD: Đặt $u=\sqrt{3cotgx+1}$)

8.a) $I=\int_1^{e^3}\frac{\sqrt{1+lnx}.dx}{x}$ Đặt $u=\sqrt{1+lnx}\Rightarrow u^2=1+lnx\Rightarrow 2udu=\frac{dx}{x}$

Đổi cận:

| $x$ | $1$ | $e^3$ |
|---|---|---|
| $u$ | $1$ | $2$ |

$\Rightarrow I=\int_1^2 u.2udu=2\int_1^2 u^2du=\frac{2u^3}{3}\Big|_1^2=\frac{2.2^3}{3}-\frac{2.1^3}{3}=\frac{14}{3}$

b) $I=\int_1^{e^7}\frac{lnx.\sqrt[3]{1+lnx}}{x}dx$

Đặt $u=\sqrt[3]{1+lnx}\Rightarrow u^3=1+lnx\Rightarrow u^3-1=lnx\Rightarrow 3u^2du=\frac{dx}{x}$

Đổi cận:

| $x$ | $1$ | $e^7$ |
|---|---|---|
| $u$ | $1$ | $2$ |

$\Rightarrow I=\int_1^2(u^3-1).u.3u^2du=3\int_1^2(u^6-u^3)du=3\left(\frac{u^7}{7}-\frac{u^4}{4}\right)\Big|_1^2=3\left(\frac{2^7}{7}-\frac{2^4}{4}\right)=\frac{300}{7}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ 5:

1. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5sinx-1)^3\cos^3x.dx$ b) $I=\int_0^2\sqrt{1+2x^2}.x^3.dx$ c) $I=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+26x^3}}dx$

d) $I=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{sinx}{1+3cosx}dx$ e) $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^4x.cosx.dx$ f) $I=\int_0^{\frac{p}{4}}\cos^5x dx$

g) $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2x.\cos^3x.dx$ h) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3sinx}.cosxdx$ i) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+sin2x)^3.cos2x.dx$

j) $I=\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{sinx-\sin^3x}.dx$ k) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x}{1+\cos^2x}dx$ l) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{tgx}+1}{\cos^2x}dx$

2. Tính các tích phân sau: (Các đề thi tốt nghiệp)

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5x dx$ (TNTHPT Năm 93-94) b) $I=\int_1^2\frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$ (TNTHPT Năm 95-96)

c) $I=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+2}.x^3.dx$ (TNTHPT Năm 96-97) d) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 4x.dx$ (TNTHPT Năm 98-99)

e) $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(sin6xsin2x+6).dx$ (TNTHPT 00-01) f) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin^2x)cosx.dx$ (TNTHPT 04-05)

3. Tính các tích phân sau: (Các đề thi tuyển sinh Đại học)

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x+sinx}{\sqrt{1+3cosx}}dx$ (ĐH khối A – 2005)

b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x.cosx}{1+cosx}dx$ (ĐH khối B – 2005)

c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{sinx}+sinx)cosxdx$ (ĐH khối D – 2005)

d) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x}{\sqrt{\cos^2x+4\sin^2x}}dx$ (ĐH khối A – 2006)

e) $I=\int_{ln3}^{ln5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$ (ĐH khối B – 2006)

f) $I=\int_0^1(x-2)e^{2x}dx$ (ĐH khối D – 2006)

4. Tính các tích phân sau: (Các dạng khác)

a) $I=\int_0^{13}\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$ b) $I=\int_0^3x\sqrt{x+1}.dx$ c) $I=\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

d) $I=\int_0^{\frac{p}{3}}\frac{2\sin 2x+3\sin x}{\sqrt{6\cos x-2}}dx$ e) $I=\int_1^{e^7}\frac{1}{x\sqrt[3]{1+\ln x}}dx$ f) $I=\int_1^{e^3}\frac{\sqrt{1+\ln x}.dx}{x.\ln x}$

g) $I=\int_1^{e^7}\frac{\ln x.\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$ h) $I=\int_{e^{-1}}^{e^4}\frac{1}{x.\ln x.\ln(\ln x)}dx$ i) $I=\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{4}}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.dx$

k) $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ l) $I=\int_0^{\ln 5}\sqrt{e^x-1}\,dx$ m) $I=\int_0^e\frac{(x+1)}{x(1+xe^x)}dx$ (HD: t = $xe^x$)

5. Tính các tích phân sau: (Các đề thi tuyển sinh Đại học)

1) $I=\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (ĐH T.Mại 1997); 2) $I=\int_0^1 x^5\left(1-x^3\right)^6dx$ (ĐH KTQD 1997)

3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3x}{1+\cos^2x}dx$ (ĐH QGHN 1997); 4) $I=\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$ (ĐHQGTPHCM 1998)

5) $I=\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}dx$ (ĐHBKHN98); 6) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\left(\sin^4x+\cos^4x\right)dx$ (ĐHBKHN 98)

7) $I=\int_0^{\frac{7}{3}}\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$ (ĐH GTVT 1998); 8) $I=\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}$ (ĐH QGHN 1998)

9) $I=\int_0^{\pi}\sin^3x\cos xdx$ (ĐH DLHV 1998); 10) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\cos^4x}dx$ (ĐHQGTPHCM 1998)

11) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\left(1+\sin^2x\right)^3dx$ (ĐHNT 1999); 12) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4x}{\sin^4x+\cos^4x}dx$ (ĐH GTVT 1999)

13) $I=\int_0^1\frac{dx}{e^{2x}+3}$ (ĐH Cđoàn 2000); 14) $I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$ (ĐH BKHN 2000)

15) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sin^4x+\cos^4x}dx$ (ĐH CThơ 2000); 16) $I=\int_1^2\frac{dx}{x\left(x^3+1\right)}$ (ĐH NNghiệp 2000)

17) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6x}{\cos^6x+\sin^6x}dx$ (ĐH Huế 2000); 18) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ (ĐHNN1-KB 01)

19) $I=\int_1^2\frac{dx}{x\left(x^4+1\right)}$ (ĐH Aninh 2001) 20) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\sin 2xdx$ (ĐH NL HCM 2001)

21) $I=\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^3}dx$ (ĐH Luật HCM 2001); 22) $I=\int_2^3\frac{x^7}{1+x^8-2x^4}dx$ (CĐSPNtrang 2002)

23) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[3]{\sin x}\right)dx$ (CĐSPQN 2002); 24) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2x}{1+\sin 2x}dx$ (ĐHCĐ khối B 2003)

25) $I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ (ĐH-CĐ khối A 2003); 26) $I=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$ (ĐH-CĐ khối D 2003)

## II.5. TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN:

Định lý: Nếu u(x) và v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn [a;b] thì:

$$\int_a^b u(x).v'(x)dx = \left[u(x).v(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x).dx$$

hay $$\int_a^b u(x).dv = \left[u(x).v(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b v(x).du$$

hay $$\int_a^b u.dv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b v.du$$

a) Phương pháp tính tích phân từng phần:

Bước 1: Biến đổi $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$

Bước 2: Đặt $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = df_1(x) \\ v = \int f_2(x)dx \end{cases}$ ($v$ là một nguyên hàm của $f_2(x)$ )

Bước 3: Tính $I = u.v\Big|_a^b - \int_a^b v.du$

Chú ý: Khi tính tích phân từng phần ta phải nắm nguyên tắc sau:

+ Chọn phép đặt $dv$ sao cho dễ xác định được $v$

+ $\int_a^b vdu$ phải dễ xác định hơn $\int_a^b udv$

b) Một số dạng thường dùng phương pháp tích phân từng phần:

Nếu biểu thức trong dấu tích phân có chứa:

Dạng 1: $P(x)sin(nx).dx$; $P(x)cos(nx).dx$; $P(x).e^{nx}dx$; $P(x).a^{nx}dx$ ta nên đặt:

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = sin(nx)dx \text{ hay } cos(nx)dx \text{ hay } e^{nx}dx \text{ hay } a^{nx}dx \end{cases}$$

Dạng 2: $P(x)lnx.dx$; $P(x)log_a x.dx$ ta nên đặt:

$$\begin{cases} u = lnx \text{ hay } u = log_a x \\ dv = P(x)dx \end{cases}$$

Dạng 3: $a^x sin(nx)dx$ hay $e^x cos(nx)dx$ hay $a^x cos(nx)dx$ hay $a^x cos(nx)dx$ thì phải sử dụng tích phân từng phần đến hai lần.

VD 11: Tính các tích phân sau:

1. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(3x-1)\cos 3x\,dx$

Đặt: $\begin{cases} u=3x-1 \\ dv=\cos 3x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=3dx \\ v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}(3x-1)\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\,dx=0+\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{2}{3}$$

2. $I=\int_0^1(2x+1)\ln(x+1)dx$

Đặt: $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ dv=(2x+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x+1} \\ v=x^2+x=x(x+1) \end{cases}$

$$\Rightarrow I=(x^2+x)\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1 x\,dx=2\ln 2-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=2\ln 2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\ln 4$$

3. $I=\int_0^1\left(4x^2-2x-1\right)e^{2x}dx$ (ĐH GTVT 2004)

Đặt: $\begin{cases} u=4x^2-2x-1 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(8x-2)dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=(4x^2-2x-1).\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1-\int_0^1(4x-1)\frac{1}{2}e^{2x}dx=A-B$$

$$A=(4x^2-2x-1).\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$

$B=\int_0^1(4x-1)e^{2x}dx$ Đặt: $\begin{cases} u=4x-1 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=4dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow (4x-1)\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1-\int_0^1 2e^{2x}dx=\frac{3}{2}e^2+\frac{1}{2}-e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow I=A-B=-1$$

Nhận xét: Ví dụ trên là dạng 1 của tích phân từng phần $\int P(x).e^{nx}dx$ do đó hướng học sinh đặt $u=P(x)$ nhưng do $P(x)$ là tam thức bậc hai nên ta tính tích phân từng phần hai lần. Tù đó rút ra nhận xét chung cho học sinh: Nếu $P(x)$ là đa thức bậc k thì tính tích phân từng phần k lần.

4. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4e^x cos^2 x dx$

Nhận xét: Dạng 3 của tích phân từng phần là tích phân có dạng $\int e^x sin(nx)dx$ nhưng biểu thức trong dấu tích phân của ví dụ trên chứa $cos^2 x$ do đó hạ bậc ta sẽ đưa tích phân về đúng dạng 3.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4e^x cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2e^x (1 + cos2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2e^x (1 + cos2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2e^x cos2x dx = I_1 + I_2$$

Ta có:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2e^x dx = 2e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2e^{\frac{\pi}{4}} - 2$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2e^x cos2x dx$$

Đặt: $\begin{cases} u = cos2x \\ dv = 2e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2.sin2x dx \\ v = 2e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = 2e^x cos2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^1 4e^x sin2x dx = -2 + B$$

$$B = \int_0^1 4e^x sin2x dx$$

Đặt: $\begin{cases} u = sin2x \\ dv = 4e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2.cos2x dx \\ v = 4e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow B = 4e^x sin2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^1 8e^x cos2x dx = 4e^{\frac{\pi}{4}} - 4I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = -2 + B = -2 + 4e^{\frac{\pi}{4}} - 4I_2$$

$$\Leftrightarrow 5I_2 = -2 + 4e^{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{5}\left(-2 + 4e^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$I = I_1 + I_2 = 2e^{\frac{\pi}{4}} - 2 + \frac{1}{5}\left(-2 + 4e^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{14}{5}e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{12}{5}$$

Nhận xét: Ở ví dụ trên học sinh phải tính tích phân từng phần hai lần, trong khi tính lần hai biểu thức xuất hiện tích phân I cần tính ban đầu nên ta còn gọi dạng trên là tích phân từng phần lặp. Trong dạng bài tập này khi làm học sinh cần lưu ý về dấu khi sử dụng công thức tích phân từng phần.

5. A = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cos^2x}dx$ . Từ đó suy ra: B = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x.tg^2xdx$ (ĐH NN Khối B 2000)

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{cos^2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = tgx \end{cases} \Rightarrow A = x.tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(cosx)}{cosx}$

$$= \frac{\pi}{4} + ln\left|cosx\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}ln2$$

$$\Rightarrow B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x.tg^2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x.(\frac{1}{cos^2x} - 1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x.\frac{1}{cos^2x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}ln2 - \frac{\pi^2}{32}$$

6. $I = \int_2^3 ln\left(x^2 - x\right)dx$ (ĐHCĐ Khối D 2004)

Đặt: $\begin{cases} u = ln(x^2 - x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{(2x-1)dx}{x^2 - x} = \frac{(2x-1)dx}{x(x-1)} \\ v = x - 1 \end{cases}$

(nguyên hàm v = x + c nên thay c = -1 để khử mẫu số)

$\Rightarrow I = (x-1).ln(x^2 - x)\Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x-1}{x}dx = 2ln6 - 2ln2 + 1 = 2ln3 + 1$

Nhận xét: Trong dạng bài tập tích phân từng phần có chứa ln(u(x)) thường xuất hiện phân số nên rèn luyện cho học sinh khéo léo kết hợp thêm tính chất của nguyên hàm $\int f(x)dx = F(x) + C$ với C là một hằng số thích hợp ta có thể đơn giản được phân số để cho bước tính tích phân tiếp theo đơn giản hơn.

Một ví dụ tương tự: $I = \int_3^4 2xln(x-2)dx$

7. $I = \int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} sin\sqrt[3]{x}dx$ (ĐH KTrúc HN 2001);

Nhận xét: Ở ví dụ trên học sinh phải nhận xét được rằng bước đầu phải đổi biến số.

Đặt $u = \sqrt[3]{x} \Rightarrow u^3 = x \Rightarrow 3u^2 = dx$

Đổi cận:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$ |

| $u$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3u^2 sinudu \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2 sinxdx$ ta biến đổi như trên để học sinh dễ nhận dạng tích phân từng phần dạng 1.

Nhận xét: Đến đây tích phân tiếp theo có dạng 1 của tích phân từng phần.

Do đa thức là bậc hai nên để tính I, học sinh phải tính tích phân từng phần 2 lần:

Đặt $\begin{cases} u = 3x^2 \\ dv = cosx.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 6xdx \\ v = sinx \end{cases}$

$$\Rightarrow I = 3x^2 sinx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6xsinxdx = \frac{3\pi^2}{4} - I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6xsinxdx$$

Đặt $\begin{cases} u = 6x \\ dv = sinxdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 6dx \\ v = -cosx \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = -6x.cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6cosxdx = 6x.sinx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi$$

$$\Rightarrow I = -\frac{3\pi^2}{4} + I_1 = \frac{3\pi^2}{4} - 3\pi$$

Nhận xét: Qua ví dụ trên, để tính tích phân đôi khi học sinh phải áp dụng cả hai phương pháp đổi biến số loại 2 và tích phân từng phần.

Ví dụ tương tự: (phối hợp hai phương pháp)

a) $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} sin\sqrt{x}dx$ b) $I = \int_0^1 x.ln(1+x^2)dx$ c) $I = \int_0^{e^{\frac{\pi^2}{4}}} \frac{cos\sqrt{lnx}}{x}dx$

d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx} sin2x.dx$ e) $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{ln\sqrt{tgx}}{cos^2 x}dx$ f) $I = \int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ 6:

1. Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$ b) $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(12x-2)\cos 2x\,dx$ c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2x^2-4)\sin 2x\,dx$

d) $I=\int_0^1 (2x-1)\ln(x+1)dx$ e) $I=\int_2^3 (2x-1)\ln(x-1)dx$ f) $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

g) $I=\int_0^1 2x\ln^2(x+1)dx$ h) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(12x-4+e^x)\sin x\,dx$ i) $I=\int_2^3 2x\ln^2(x-1)dx$

j) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\sin^2 x)\cos x\,dx$ (TNTHPT – 2005)

2. Tính các tích phân sau: (Các đề thi tuyển sinh Đại học)

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\sin 4x\,dx$ (ĐH A.Ninh 1997) b) $I=\int_0^1 (x-1)e^{2x}dx$ (ĐH DLNN-T.Học 1997)

c) $I=\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$ (ĐH A.Ninh 1998) d) $I=\int_0^{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} \cos\sqrt{x}\,dx$ (ĐH DLNN-T.Học 1998)

e) $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$ (ĐH Huế 1998) f) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\left(2\cos^2 x-1\right)dx$ (ĐH TCKT 1998)

g) $I=\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$ (ĐH Cđoàn 2000) h) $I=\int_1^{10} x\lg^2 x\,dx$ (ĐH Y Dược 2001)

i) $I=\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} \sin\sqrt[3]{x}\,dx$ (ĐH KTrúc HN 2001); j) $I=\int_1^e x^2\ln^2 x\,dx$ (ĐH KTế HDương 2002)

k) $I=\int_1^e \frac{x^2+1}{x}\ln x\,dx$ (ĐHCĐ Dự bị 2-2003); l) $I=\int_{-1}^0 x\left(e^{2x}+\sqrt[3]{x+1}\right)dx$ (ĐHCĐ D.bị 2003)

m) $I=\int_0^1 x^3e^{x^2}dx$ (ĐHCĐ Dự bị 2-2003); n) $I=\int_0^1\left(x^2+2x\right)e^{-x}dx$ (ĐH GTVT 2003)

## III. Kiểm tra kết quả của một bài giải tính tích phân bằng máy tính CASIO fx570-MS

Trong một số trường hợp một số bài tích phân phức tạp đã giải được kết quả nhưng chưa đánh giá được độ chính xác của kết quả là đúng hay sai, khi đó ta có thể sử dụng máy tính cầm tay CASIO fx-570MS để kiểm tra kết quả. Ví dụ với đề thi Khối A năm 2005 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ ta sử dụng máy tính như sau:

+ Với kết qủa giải tay là $\frac{34}{27}$ ta chuyển sang số thập phân ≈ 1,259259…

+ Đối với bài tích phân lượng giác trước hết chuyển sang chế độ Rad.

+ Quy trình bấm máy CASIO fx-570MS như sau:

| ∫dx | ( | ( | sin | ( | 2 | ALPHA | X | ) | + | sin |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ALPHA | X | ) | ÷ | √ | ( | 1 | + | 3 | cos | ALPHA |
| X | ) | , | 0 | , | SHIFT | π | ÷ | 2 | ) | = |

Và kết qủa máy tính là 1,2593. So với kết quả gần đúng trên đồng nghĩa với đáp số bài giải bằng tay trên đã đúng.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ 7: **CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN**

**Câu 1:** $\int_0^1 |2x+1|\,dx$ có giá trị bằng:

A. 2 B. 0 C. -2 D. 3

**Câu 2:** $\int_0^e |x^2-1|\,dx$ có giá trị bằng:

A. 1 B. 0 C. -1 D. $\frac{1}{2}$

**Câu 3:** Chọn mệnh đề đúng:

A. $\frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{3-2sin^2x} \le \frac{\pi}{2}$

B. $0 \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{3-2sin^2x} \le \frac{\pi}{2}$

C. $0 \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{3-2sin^2x} \le \frac{\pi}{4}$

D. $\frac{1}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{3-2sin^2x} \le \frac{\pi}{2}$

**Câu 4:** $\int_1^e \frac{lnx}{x}\,dx$ có giá trị bằng:

A. 1 B. 0 C. -1 D. e

**Câu 5:** $\int_0^1 (x+2)^4\,dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{211}{5}$ B. 211 C. 201 D. $\frac{201}{5}$

**Câu 6:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{sinx} cosx\, dx$ có giá trị bằng:

A. e - 1 B. 0 C. e D. 1 - e

**Câu 7:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{1+3cosx}.\, sinx\, dx$ có giá trị bằng:

A. 3 B. $\frac{5}{3}$ C. 1 D. 2

**Câu 8:** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ B. $\frac{\pi}{9}$ C. $\frac{\pi}{9\sqrt{3}}$ D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

**Câu 9:** $\int_1^2 \frac{(2x-1)dx}{x^2-x-1}$ có giá trị bằng:

A. $ln\frac{2}{3}$ B. $ln\frac{3}{2}$ C. $ln\frac{4}{9}$ D. $ln\frac{9}{4}$

**Câu 10:** $\int_0^1 \frac{(4x+2)dx}{x^2+x+1}$ có giá trị bằng:

A. $3ln2$ B. $2ln3$ C. $ln4$ D. $ln6$

**Câu 11:** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ có giá trị bằng:

A. $ln(2+\sqrt{5})$ B. $ln(\sqrt{2}+5)$ C. $ln(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ D. $ln(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

**Câu 11:** $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+6x+1}}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{15}$

**Câu 12:** $\int_1^2 \frac{(4x+6)dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$ có giá trị bằng:

A. $4ln(2+\sqrt{3})$ B. $6ln(2+\sqrt{3})$ C. $8ln(2+\sqrt{3})$ D. $10ln(2+\sqrt{3})$

**Câu 13:** $\int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{x^2+1}\, dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{26}{3}$ B. $\frac{28}{3}$ C. $\frac{32}{3}$ D. $\frac{34}{3}$

**Câu 14:** $\int_{2}^{\sqrt{6}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$

**Câu 15:** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ có giá trị bằng:

A. $ln\sqrt{2}$ B. $ln2$ C. $ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ D. $ln\left(\sqrt{2}+2\right)$

**Câu 16:** $\int_{1}^{2} \frac{dx}{cosx+1}$ có giá trị bằng:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

**Câu 17:** $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{sinx+1}$ có giá trị bằng:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

**Câu 18:** $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{sinx-2cosx-2}$ có giá trị bằng:

A. $-ln2$ B. $ln2$ C. $1-ln2$ D. $1+ln2$

**Câu 19:** $\int_{0}^{\pi} \left(\frac{sinx-cosx}{sinx+cosx}\right)^2 dx$ có giá trị bằng:

A. $1+\frac{\pi}{4}$ B. $-1+\frac{\pi}{4}$ C. $1-\frac{\pi}{4}$ D. $-1-\frac{\pi}{4}$

**Câu 20:** $\int_{0}^{\pi} \frac{cosx}{11-7sinx-cos^2x} dx$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{1}{3}ln\frac{5}{8}$ B. $-\frac{1}{3}ln5$ C. $\frac{1}{3}ln\frac{8}{5}$ D. $\frac{1}{3}ln\frac{5}{8}$

**Câu 21:** $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+cosx}{4-sin^2x} dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{1}{8}ln3$ B. $\frac{1}{6}ln3$ C. $\frac{1}{4}ln3$ D. $\frac{1}{2}ln3$

**Câu 22:** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ln\left(\frac{1+sinx}{1+cosx}\right) dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{3\pi}{2}$ C. 0 D. 1

**Câu 23:** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin4x}{sin^4x + cos^4x} dx$ có giá trị bằng:

A. $-ln2$ B. $-ln2$ C. $-ln3$ D. $-ln3$

**Câu 24:** Cho hàm số f(x) liên tục trên R và thỏa f(-x) + f(x) = $\cos^7$x. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{16}{35}$ B. $\frac{32}{35}$ C. $\frac{24}{35}$ D. $\frac{12}{35}$

**Câu 25:** Cho hàm số f(x) liên tục trên R và thỏa 3 f(-x) + f(x) = $\cos^4$x.$\sin^5$x **.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{4}$

**Câu 26:** $\int_{0}^{2} \left|x^2 - x\right| dx$ có giá trị bằng:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

**Câu 27:** $\int_{-1}^{2} \left|x^3 - 2x^2 - x + 2\right| dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{37}{12}$ C. 14 D. $\frac{41}{12}$

**Câu 28:** $\int_{-3}^{2} \left|x^2 - 3x + 2\right| dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{59}{2}$ B. $\frac{2}{59}$ C. $-\frac{59}{2}$ D. $-\frac{2}{59}$

**Câu 29:** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5 - 4cos^2x - 4sinx}\, dx$ có giá trị bằng: $\left( \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5 - 4cos^2x - 4sinx}\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left|2sinx - 1\right| dx \right)$

A. $-2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$ B. $2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$ C. $2\sqrt{3} + 2 - \frac{\pi}{6}$ D. $2\sqrt{3} + 2 + \frac{\pi}{6}$

**Câu 30:** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |2cosx - 1|\, dx$ có giá trị bằng:

A. $2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{3}$ B. $2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{3}$ C. $2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{6}$ D. $2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$

**Câu 31:** $\int_{-1}^{2} \left(|2^x - 4|\right) dx$ có giá trị bằng:

A. $2 + \frac{1}{ln2}$ B. $3 + \frac{1}{ln2}$ C. $4 + \frac{1}{ln2}$ D. $5 + \frac{1}{ln2}$

**Câu 32:** $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{1 + |1 - x|}$ có giá trị bằng:

A. $ln2$ B. $2ln2$ C. $3ln2$ D. $4ln2$

**Câu 33:** $\int_{-1}^{2} \left(|x| - |x - 1|\right) dx$ có giá trị bằng:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

**Câu 34:** $\int_{0}^{2} \left(|1 - x| - |1 + x|\right) dx$ có giá trị bằng:

A. 5 B. 7 C. 9 D. 11

**Câu 35:** $\int_{0}^{1} xlnxdx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{e^2 + 1}{2}$ B. $\frac{e^2 + 1}{4}$ C. $\frac{e^2 + 1}{1}$ D. $\frac{e^2 + 1}{3}$

**Câu 36:** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xcosxdx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{\pi}{2} + 2$ B. $\frac{\pi}{2} - 2$ C. $\frac{\pi}{2} + 1$ D. $\frac{\pi}{2} - 1$

**Câu 37:** $\int_{0}^{1} xe^x dx$ có giá trị bằng:

A. 7 B. 5 C. 3 D. 1

**Câu 38:** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x sin2x\, dx$ có giá trị bằng:

A. $-\frac{2}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$ B. $-\frac{1}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$ C. $\frac{2}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$ D. $\frac{1}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$

**Câu 39:** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\, dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{1}{5}\left(e^{\pi}+2\right)$ B. $\frac{1}{5}\left(e^{\pi}-2\right)$ C. $\frac{1}{5}\left(2e^{\pi}+1\right)$ D. $\frac{1}{5}\left(2e^{\pi}-1\right)$

**Câu 40:** $\int_0^{1} e^{2x}(x-2)\, dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{5-3e^2}{4}$ B. $\frac{3e^2-5}{4}$ C. $\frac{3e^2-5}{2}$ D. $\frac{5-3e^2}{2}$

**Câu 41:** $\int_0^{e^{\pi}} \cos(\ln x)\, dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$ B. $-\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$ C. $\frac{1}{2}\left(e^{\pi}-1\right)$ D. $\frac{1}{2}\left(-e^{\pi}+1\right)$

**Câu 42:** $\int_0^{e} \sin(\ln x)\, dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{(\sin 1-\cos 1)e+1}{2}$ B. $\frac{(\sin 1-\cos 1)e-1}{2}$ C. $\frac{(\cos 1-\sin 1)e+1}{2}$ D. $\frac{(\cos 1-\sin 1)e+1}{2}$

**Câu 43:** $\int_0^{e} e^{x}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\, dx$ có giá trị bằng:

A. $e^{\frac{\pi}{2}}$ B. $e^{\pi}$ C. $e^{\frac{3\pi}{2}}$ D. $e^{2\pi}$

**Câu 44:** $\int_0^{e} e^{x}\frac{1+x^2}{(1+x)^2}\, dx$ có giá trị bằng:

A. 0 B. 1 C. e D. 2

**Câu 45:** $\int_0^{e} e^{x}\frac{x}{(1+x)^2}\, dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{e-2}{2}$ B. $\frac{e+2}{2}$ C. $\frac{e-1}{2}$ D. $\frac{e+1}{2}$

**Nhận xét:** Trong phần nội dung chuyên đề trên, tôi chỉ nêu ra một số bài tập minh họa cơ bản tính tích phân chủ yếu áp dụng phương pháp phân tích, phương pháp đổi biến số, phương pháp tích phân từng phần. Các bài tập đề nghị là các đề thi Tốt nghiệp THPT và đề thi tuyển sinh Đại học Cao đẳng của các năm trước để các em học sinh rèn luyện kỹ năng tính tích phân, bên cạnh đó cũng hướng dẫn học sinh kiểm tra kết quả bài giải của mình có kết quả đúng hay sai bằng máy tính cầm tay CASIO fx-570MS và phần cuối của chuyên đề là một số câu hỏi trắc nghiệm tích phân. Để phần nào củng cố, nâng cao cho các em học sinh khối 12 để các em đạt kết quả cao trong kỳ thi Tốt nghiệp THPT và kỳ thi Tuyển sinh Đại học và giúp cho các em có nền tảng trong những năm học Đại cương của Đại học.

Tuy nhiên với kinh nghiệm còn hạn chế nên dù có nhiều cố gắng nhưng khi trình bày chuyên đề này sẽ không tránh khỏi những thiếu sót, rất mong được sự góp ý chân tình của quý Thầy Cô trong Hội đồng bộ môn Toán Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Đồng Nai. Một lần nữa tôi xin cảm ơn Ban lãnh đạo nhà trường tạo điều kiện tốt cho tôi và cảm ơn quý thầy cô trong tổ Toán trường Nam Hà, các đồng nghiệp, bạn bè đã đóng góp ý kiến cho tôi hoàn thành chuyên đề này. Tôi xin chân thành cám ơn./.

# TÀI LIỆU THAM KHẢO


1. Sách giáo khoa giải tích 12
2. Sách giáo viên giải tích 12
3. Tuyển tập các chuyên đề và kỹ thuật tính tích phân - Trần Phương
4. Đạo hàm và tích phân - Võ Đại Mau & Võ Đại Hoài Đức
5. Chuyên đề tích phân và đại số tổ hợp xác suất - Phạm An Hòa & Nguyễn Vũ Thanh
6. Các dạng toán cơ bản giải tích 12 - Nguyễn Ngọc Khoa
7. Trắc nghiệm khách quan giải tích và tích phân - Đoàn Vương Nguyên.

# NHẬN XÉT

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………