TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT
KHOA TOÁN - TIN HỌC

TẠ LÊ LỢI

GIẢI TÍCH 1

(Giáo Trình)

-- ***Lưu hành nội bộ*** --

Đà Lạt 2008

Hướng dẫn sinh viên đọc giáo trình

Đây là giáo trình **Giải tích 1** dành cho sinh viên năm thứ nhất ngành Toán hay ngành Toán Tin. Nội dung đề cập đến một số khái niệm cơ bản nhất của giới hạn dãy và chuỗi số thực, tính liên tục, phép tính vi phân và tích phân của hàm số một biến số thực. Để đọc được giáo trình này sinh viên chỉ cần biết chút ít lý thuyết tập hợp và ánh xạ, cùng với một vài lý luận logic toán căn bản (e.g. qui tắc tam đoạn luận, phương pháp phản chứng, phương pháp qui nạp). Giáo trình được trình bày theo lối tuyến tính, vậy người đọc lần đầu nên đọc lần lượt từng phần theo thứ tự.

Để đọc một cách tích cực, sau các khái niệm và định lý sinh viên nên đọc kỹ các ví dụ, làm một số bài tập nêu liền đó. Ngoài ra học toán phải làm bài tập. Một số bài tập căn bản nhất của mỗi chương được nêu ở phần cuối của giáo trình.

Về nguyên tắc nên đọc mọi phần của giáo trình. Tuy vậy, có thể nêu ở đây một số điểm cần lưu ý ở từng chương:

I. Số thực - Dãy số. Lần đầu đọc có thể bỏ qua: khái niệm giới hạn trên, giới hạn dưới (ở 2.4), tính không đếm được của $\mathbf{R}$ (mục 4.5)
II. Giới hạn và tính liên tục.
III. Phép tính vi phân. Lần đầu đọc có thể bỏ qua: khảo sát tính lồi (mục 4.5), vẽ đường cong (mục 4.7).
IV. Phép tính tích phân. Kỹ thuật tính tích phân (mục 1.4) nên đọc khi làm bài tập.
V. Chuỗi số. Có thể bỏ qua Định lý Riemann (mục 1.4).

Để việc tự học có kết quả tốt sinh viên nên tham khảo thêm một số tài liệu khác có nội dung liên quan (đặc biệt là phần hướng dẫn giải các bài tập). Khó có thể nêu hết tài liệu nên tham khảo, ở đây chỉ đề nghị các tài liệu sau (bằng tiếng Việt):

[1] Jean-Marier Monier, *Giải tích 1* , NXB Giáo dục.
[2] Y.Y. Liasko, A.C. Bôiatruc, IA. G. Gai, G.P. Gôlôvac, *Giải tích toán học - Các ví dụ và các bài toán*, Tập I và Phần I (Tập II), NXB Đại học và trung học chuyên nghiệp.

Ngoài ra, sinh viên nên tìm hiểu và sử dụng một số phần mềm máy tính hỗ trợ cho việc học và làm toán như Maple, Mathematica,...

Chúc các bạn thành công!

Giải tích 1

Tạ Lê Lợi

Mục lục

Chương I. Số thực - Dãy số
1. Số thực 1
2. Dãy số 5
3. Các định lý cơ bản 10
4. Các ví dụ 11

Chương II. Giới hạn và tính liên tục
1. Hàm số 17
2. Giớ hạn của hàm 25
3. Hàm số liên tục 31

Chương III. Phép tính vi phân
1. Đạo hàm - Vi phân 37
2. Các định lý cơ bản 39
3. Đạo hàm cấp cao - Công thức Taylor 41
4. Một số ứng dụng 43

Chương IV. Phép tính tích phân
1. Nguyên hàm - Tích phân bất định 57
2. Tích phân xác định 67
3. Một số ứng dụng 75
4. Tích phân suy rộng 79

Chương V. Chuỗi số
1. Chuỗi số 85
2. Các dấu hiệu hội tụ 89

Bài tập 95

I. Số thực - Dãy số

Chương này sẽ đề cập đến tập các số thực, là tập nền cho các nghiên cứu ở các chương sau. Phần tiếp theo sẽ nghiên cứu đến dãy số thực cùng với khái niệm cơ bản nhất của giải tích: giới hạn.

I. Số thực

Tập hợp các số hữu tỉ rất thuận tiện khi biểu diễn và thực hiện các phép toán trên các số, nhưng nó không đủ dùng. Chẳng hạn, đã từ lâu người ta nhận thấy đường chéo của hình vuông là vô ước. Nói một cách số học, không có số hữu tỉ q nào mà $q^2 = 2$, i.e. $\sqrt{2}$ không là số hữu tỉ. Như vậy, ta cần mở rộng tập số hữu tỉ để có thể đo hay biểu diễn mọi độ dài. Tập các số được thêm vào gọi là các **số vô tỉ**, còn tập mở rộng gọi là **tập các số thực**. Có nhiều phương pháp xây dựng tập các số thực. Trong giáo trình này ta dùng phương pháp tiên đề.

1.1 Các tiên đề. Tập các số thực $\mathbf{R}$ là một trường số, được sắp thứ tự toàn phần và đầy đủ, i.e. $\mathbf{R}$ thoả 3 tiên đề sau:

• **Tiên đề về cấu trúc trường.** Trên $\mathbf{R}$ có phép cộng và nhân:

$+ : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto x+y$

$\cdot :\ \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto xy$

Hai phép toán trên thỏa mãn:

$\forall x,y$	$x+y$	$=$	$y+x$	(tính giao hoán)
$\forall x,y,z$	$(x+y)+z$	$=$	$x+(y+z)$	(tính kết hợp)
$\exists 0, \forall x,$	$x+0$	$=$	x	(0 gọi là số không)
$\forall x, \exists -x$	$x+(-x)$	$=$	0	($-x$ gọi là phần tử đối của x)
$\forall x,y$	xy	$=$	yx	(tính giao hoán)
$\forall x,y,z$	$(xy)z$	$=$	$x(yz)$	(tính kết hợp)
$\exists 1 \neq 0, \forall x$	$1x$	$=$	x	(1 gọi là số một)
$\forall x \neq 0, \exists x^{-1}$	xx^{-1}	$=$	1	(x^{-1} gọi là phần tử nghịch đảo của x)
$\forall x,y,z$	$x(y+z)$	$=$	$xy+xz$	(tính phân phối)

• **Tiên đề về thứ tự.** Trên $\mathbf{R}$ có một quan hệ thứ tự toàn phần $\leq$ thỏa mãn:

$\forall x,y$	$x \leq y$ hoặc $y \leq x$		
$\forall x$	$x \leq x$		(tính phản xạ)
$\forall x,y$	$x \leq y,\ y \leq x$	$\Rightarrow\ x = y$	(tính đối xứng)
$\forall x,y,z$	$x \leq y,\ y \leq z$	$\Rightarrow\ x \leq z$	(tính bắc cầu)
$\forall x,y,z$	$x \leq y$	$\Rightarrow\ x+z \leq y+z$	
$\forall x,y$	$0 \leq x,\ 0 \leq y$	$\Rightarrow\ 0 \leq xy$	

• **Tiên đề về cận trên đúng.** Mọi tập con của $\mathbf{R}$ khác trống và bị chặn trên đều tồn tại cận trên đúng thuộc $\mathbf{R}$.

Các khái niệm bị chặn trên và cận trên đúng sẽ được làm rõ sau. Trước hết ta có định lý sau (không chứng minh)

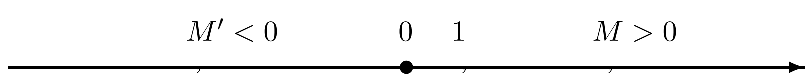
Định lý. *Tồn tại duy nhất trường số thực* $\mathbf{R}$.
Tính duy nhất theo nghĩa là nếu $\mathbf{R}'$ là một trường số thực, thì tồn tại một song ánh giữa $\mathbf{R}$ và $\mathbf{R}'$ bảo toàn các phép toán cộng, nhân và bảo toàn thứ tự.

Các ký hiệu và thuật ngữ.

Dấu tổng: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n$. Dấu tích: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdots x_n$.
Phép trừ: $x - y = x + (-y)$ Phép chia: $\dfrac{x}{y} = xy^{-1}$

So sánh:
$x \leq y$ còn viết $y \geq x$, đọc là "x bé hơn hay bằng y" hay " y lớn hơn hay bằng x".
$x < y$ hay $y > x$ nếuu $x \leq y$ và $x \neq y$, đọc là "x bé hơn y" hay "y lớn hơn x".
Nếu $0 < x$, thì x gọi là số dương. Nếu $x < 0$, thì x gọi là số âm.
Khoảng:
khoảng mở $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$,
khoảng đóng hay đoạn $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$.
Tương tự, định nghĩa khoảng nửa đóng, nửa mở $[a, b), (a, b]$.

Biểu diễn hình học. $\mathbf{R}$ được biểu diễn bằng một đường thẳng, trên đó cố định một gốc O ứng với số 0, cố định một điểm $1 \neq 0$ ứng với số 1, và định hướng dương là hướng từ 0 đến 1. Khi đó, mỗi điểm M trên đường thẳng tương ứng với một số thực gọi là độ dài đại số của OM (dương nếu M và 1 cùng một phía đối với 0, âm nếu khác phía).



1.2 Supremum - Infimum.
Tập $A \subset \mathbf{R}$ gọi là **bị chặn trên** nếuu tồn tại $b \in \mathbf{R}$, sao cho $x \leq b, \forall x \in A$.
Khi đó b gọi là một **cận trên** của A.
Tập $A \subset \mathbf{R}$ gọi là **bị chặn dưới** nếuu tồn tại $a \in \mathbf{R}$, sao cho $a \leq x, \forall x \in A$.
Khi đó a gọi là một **cận dưới** của A.
Một **tập bị chặn** nếuu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.
b^* gọi là **cận trên đúng của** A, ký hiệu $b^* = \sup A$, nếuu b^* là cận trên bé nhất của A.
a^* gọi là **cận dưới đúng của** A, ký hiệu $a^* = \inf A$, nếuu a^* là cận dưới lớn nhất của A.

Ví dụ. Cho $A = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}, \cdots\}$. Khi đó $\sup A = 1, \inf A = \frac{1}{2}$.
Ví dụ. Tập $A = \{q : q$ là số hữu tỉ và $q^2 < 2\}$ là tập khác trống, bị chặn. Theo tiên đề về cận trên đúng tồn tại $a^* = \inf A$ và $b^* = \sup A$ thuộc $\mathbf{R}$. Tuy A là tập con của tập các số hữu tỉ nhưng a^* và b^* đều không là số hữu tỉ, vì không có số hữu tỉ q mà $q^2 = 2$.

Nhận xét. Tập các số hữu tỉ là một trường được sắp thứ tự, i.e thoả hai tiên đề đầu của 1.1. Vậy tiên đề thứ ba về cận trên đúng là cốt yếu đối với trường số thực. Về mặt hình học, tập $\mathbf{R}$ 'làm đầy' các chỗ trống của tập các số hữu tỉ trên đường thẳng.

Không nhất thiết $\sup A \in A$ hay $\inf A \in A$. Khi chúng thuộc A, ta định nghĩa:
M là **phần tử lớn nhất của** A và ký hiệu $M = \max A$, nếuu $M = \sup A$ và $M \in A$.
m là **phần tử bé nhất của** A và ký hiệu $m = \min A$, nếuu $m = \inf A$ và $m \in A$.

Bài tập: Cho $A \subset \mathbf{R}$ là tập bị chặn trên. Chứng minh: $a = \sup A$ khi và chỉ khi a là một cận trên của A và $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A : a - \epsilon < x_\epsilon$

1.3 Các tập con $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$. Tập các số thực chứa các tập số tự nhiên, tập số nguyên, tập số hữu tỉ được ký hiệu và định nghĩa tương ứng:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{N} & = \{n: \ n = 0 \text{ hay } \ n = \overbrace{1 + \cdots + 1}^{n \text{ lần}} \ \} \\ \mathbf{Z} & = \{p: \ p \in \mathbf{N} \text{ hay } \ -p \in \mathbf{N} \ \} \\ \mathbf{Q} & = \{\dfrac{p}{q}: \ p \in \mathbf{Z}, \ q \in \mathbf{N}, \ q \neq 0 \ \}/\sim, \text{ trong đó quan hệ } \dfrac{p'}{q'} \sim \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow \ pq' - qp' = 0 \end{array}$$

Các tính chất quen biết về số ở bậc trung học đều có thể chứng minh dựa vào các tiên đề nêu trên.

1.4 Trị tuyệt đối. Cho $x \in \mathbf{R}$. **Trị tuyệt đối của** x:

$$|x| = \begin{cases} \ x & \text{nếu} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

Tính chất. Với mọi số thực x, y ta có:
$|x| \geq 0, \ |xy| = |x||y|, \ |x + y| \leq |x| + |y|$ (**bất đẳng thức tam giác**).

1.5 Các hệ qủa. Từ hệ tiên đề ta suy ra một số hệ qủa quan trọng sau

Nguyên lý Archimède. *Với mọi $x \in \mathbf{R}$, tồn tại $n \in \mathbf{N}$, sao cho $x < n$.*

Chứng minh: Gỉa sử ngược lại: $n \leq x, \forall n \in \mathbf{N}$. Theo tiên đề về cận trên đúng tồn tại $a = \sup \mathbf{N}$.
Do định nghĩa về sup, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ mà $a - 1 < n_0$. Suy ra $a < n_0 + 1 \in \mathbf{N}$, vô lý. $\square$

Bài tập: Chứng minh:
(1) Mọi $x, y > 0$ đều tồn tại $n \in \mathbf{N}$, sao cho $x < ny$.
(2) Mọi $x > 0$ đều tồn tại $n \in \mathbf{N}$, sao cho $0 < \dfrac{1}{n} < x$.
(3) Mọi $x > 0$ đều tồn tại $n \in \mathbf{N}$, sao cho $n \leq x < n + 1$.

Phần nguyên của $x \in \mathbf{R}$, được ký hiệu và định nghĩa:

$$[x] = \text{ số nguyên } n \text{ thỏa } n \leq x < n + 1$$

Bài tập: Tính $[0,5]$, $[-2,5], [0,0001]$.

Tính trù mật của số hữu tỉ trong R.
Với mọi $x, y \in \mathbf{R}$, $x < y$, tồn tại $r \in \mathbf{Q}$ sao cho $x < r < y$.
Với mọi $x \in \mathbf{R}$, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $r \in \mathbf{Q}$, sao cho $|x - r| < \epsilon$.

Chứng minh: Hai phát biểu trên là tương đương (?).
Theo nguyên lý trên, tồn tại $n \in \mathbf{N}$: $0 < \dfrac{1}{n} < y - x$.
Tồn tại $m \in \mathbf{N}$: $m \leq nx < m + 1$, i.e. $\dfrac{m}{n} \leq x < \dfrac{m+1}{n}$.
Suy ra $r = \dfrac{m+1}{n} \in \mathbf{Q}$, thỏa: $x < r = \dfrac{m+1}{n} = \dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{n} < x + (y - x) = y$. □

Bài tập: Chứng minh **tính trù mật của số vô tỉ trong R**.

Nhận xét. Như vậy, tập số hữu tỉ cũng như tập số vô tỉ đều trù mật hay 'dày đặc' trên đường thẳng thực. Phần cuối chương sẽ thấy tập số vô tỉ 'nhiều hơn' tập số hữu tỉ.

Căn bậc n của số dương. *Với mọi số thực $x > 0$ và $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ tồn tại duy nhất số thực $y > 0$, sao cho $y^n = x$.*
Khi đó ta gọi y là **căn bậc n của** x và ký hiệu $y = \sqrt[n]{x}$.

Chứng minh: Xét tập $A = \{t \in \mathbf{R} : t^n \leq x\}$. Dễ thấy $A \neq \emptyset$ (vì chứa $t = 0$) và bị chặn trên (bởi $1 + x$). Vậy tồn tại $y = \sup A$.
Ta chứng minh $y^n = x$:
Giả sử $y^n < x$. Khi đó với $0 < h < 1$ ta có

$$(y+h)^n \leq y^n + h(\sum_{k=1}^{n} C_n^k y^{n-k}) = y^n + h((y+1)^n - y^n)$$

Vậy nếu chọn $0 < h < \dfrac{x - y^n}{(y+1)^n - y^n}$ và $h < 1$, thì $(y+h)^n < x$, i.e. $y + h \in A$, mà $y + h > y = \sup A$, vô lý.
Giả sử $y^n > x$. Lập luận tương tự như trên ta tìm được $k > 0$, $(y - k)^n > x$, i.e $y - k$ là một chặn trên của A bé hơn $y = \sup A$, vô lý. □

Nhận xét. Như vậy trên $\mathbf{R}$ còn có phép toán lấy căn, chẳng hạn $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{16}$.
Bài tập: Các số nêu trên, số nào vô tỉ? số nào hữu tỉ?

1.6 Tập số thực mở rộng $\overline{\mathbf{R}}$. Trong nhiều trường hợp ta cần đến các số 'vô cùng lớn'. Ký hiệu ∞ gọi là **vô cùng** và tập $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
Qui ước: Với mọi $x \in \mathbf{R}$, $-\infty < x < +\infty$ và

$$\begin{aligned} & x + (+\infty) = +\infty, \ x + (-\infty) = -\infty \\ & x(+\infty) = +\infty \ \text{ nếu } x > 0, \ x(+\infty) = -\infty \ \text{ nếu } x < 0 \\ & \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

Nhận xét. Không thể định nghĩa hợp lý: $\infty - \infty, \ 0\,\infty, \ \dfrac{\infty}{\infty}$.
Khi tập con A không bị chặn dưới (trên) ta ký hiệu $\inf A = -\infty$ ($\sup A = +\infty$).

2. Dãy số.

2.0 Khái niệm.
Khi thực hiện phép chia 1 cho 3 ta lần lượt có các số hạng:

$0 \quad 0,3 \quad 0,33 \quad 0,333 \quad 0,3333 \quad \cdots$

Archile đuổi rùa và chạy nhanh gấp đôi rùa nên khoảng cách rút ngắn dần:

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2^2} \quad \frac{1}{2^3} \quad \frac{1}{2^4} \quad \cdots$

Thông tin lan truyền cứ một người biết thì sau đó lại thông tin cho một người khác:

$1 \quad 2 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad \cdots$

Dãy 0-1:

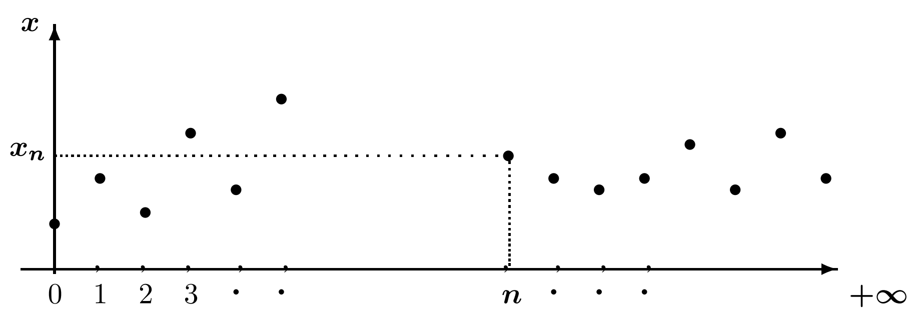
$0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \cdots$

Các dấu chấm chấm để chỉ các số còn tiếp tục, tiếp tục nữa.
Nhận xét.
• Các ví dụ trên cho các dãy có tính vô hạn và có thứ tự.
• Các số hạng của dãy đầu 'càng ngày càng gần' $\frac{1}{3}$, các số hạng của dãy thứ nhì 'càng ngày càng gần' với 0. Còn các số hạng của dãy thứ ba 'càng ngày càng rất lớn'. Dãy cuối cùng có các số hạng giao động.

2.1 Dãy số. Một **dãy số trong** $X \subset \mathbf{R}$ là bộ vô hạn có thứ tự các số trong X:

$$(x_n)_{n\in\mathbf{N}} = x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$$

Một cách chính xác, một dãy trong X là một ánh xạ $x : \mathbf{N} \to X,\ n \mapsto x_n = x(n)$
Về mặt hình học, dãy trên được biểu diễn bởi đồ thị của nó trong mặt phẳng $\mathbf{R}^2$, i.e. dãy điểm $\{\ (n, x_n) :\ n \in \mathbf{N}\ \}$



Tập các số tự nhiên $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ là vô hạn (nếu $n \in \mathbf{N}$, thì $n+1 \in \mathbf{N}$) và có thứ tự ($0 < 1 < 2 < 3 < \cdots$), nên được dùng để 'đánh số' các số hạng của dãy.

Thường người ta cho dãy số bằng các phương pháp:
• Liệt kê. Ví dụ: các dãy cho ở trên, một dãy mã hoá bởi bảng mã $\Sigma = \{0, 1, \cdots, N\}$ là dãy có dạng $(x_0, x_1, x_2, \cdots)$, với các $x_n \in \Sigma$.
• Hàm. Ví dụ: các dãy ở trên có thể cho bởi $x_n = 3.10^{-1} + 3.10^{-2} + \cdots + 3.10^{-n}$, $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, $x_n = 2^n$, hay $x_n = 1 - (-1)^n$.

• Đệ qui. Ví dụ: Dãy $x_n = n!$ định nghĩa bởi $x_0 = 1, x_{n+1} = (n+1)x_n$ $(n \geq 1)$.
Dãy đệ qui cấp 1: $x_0 \in \mathbf{R}$ là giá trị đầu, $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 0, 1, \cdots)$, trong đó f là một hàm số cho trước.
Dãy Fibonacci: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ $(n \geq 2)$ là dãy đệ qui cấp 2.

Bài tập: Tính mười số hạng đầu của dãy Fibonaci.
Bài tập: Cho $f(x) = \sqrt{1+x}$ hay $f(x) = 4\lambda x(1-x)$ $(\lambda \in \{0.7,\ 0.8,\ 0.9\})$. Hãy vẽ đồ thị của dãy $x_{n+1} = f(x_n)$, khi $x_0 = 1$.
Bài tập: Chứng minh tập các số nguyên tố là vô hạn. Lập thuật toán tính $x_n =$ số nguyên tố thứ n.

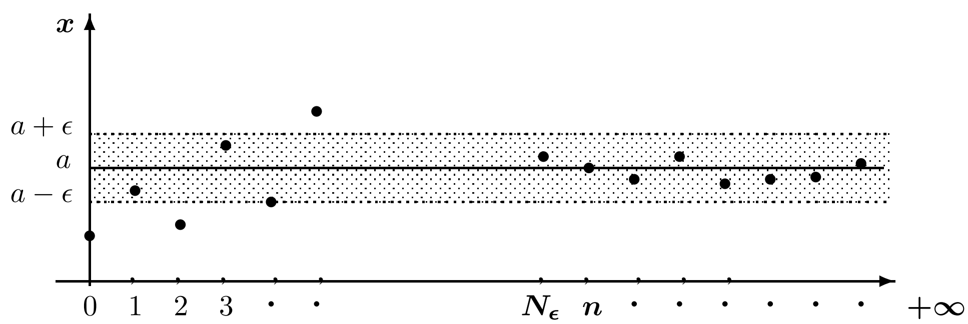
Chú ý. Ta ký hiệu phân biệt tập các số $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ với dãy số $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là bộ thứ tự.

2.2 Giới hạn. Điểm $a \in \mathbf{R}$ gọi là **giới hạn của dãy số** $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nếuu với mọi $\epsilon > 0$, bé tùy ý, đều tìm được số tự nhiên N_ϵ, đủ lớn và phụ thuộc ϵ, sao cho khi $n > N_\epsilon$, thì $|x_n - a| < \epsilon$, viết theo lối ký hiệu

$$\forall \epsilon > 0, \exists N :\ n > N \ \Rightarrow\ |x_n - a| < \epsilon$$

Khi đó ta nói dãy (x_n) **hội tụ về** a và ký hiệu là

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{hay} \quad \lim x_n = a \quad \text{hay} \quad x_n \to a, \text{ khi } n \to \infty$$



Nhận xét.
• Định nghĩa giới hạn của dãy không phụ thuộc vào hữu hạn số hạng đầu của dãy.
• Dễ thấy: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$
• Về mặt hình học, các điều trên có nghĩa là đồ thị của dãy tiệm cận với đường thẳng $\{(x,y) :\ y = a\ \}$ trong $\mathbf{R}^2$.
• Nếu (x_n) hội tụ, thì giới hạn là duy nhất. Thực vậy, nếu a và b cùng là giới hạn của (x_n), thì $|a-b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| \to 0$, khi $n \to \infty$. Vậy $|a-b| = 0$, hay $a = b$.

Bài tập: Xét $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, với $n = 1, 2, \cdots$. Theo định nghĩa hãy kiểm nghiệm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, bằng cách điền tiếp vào bảng sau

ϵ	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1.000}$	$\frac{1}{1.000.000}$
N_ϵ	1	100			

Nhận xét. Nếu ϵ càng bé, thì N_ϵ càng lớn, i.e. $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 \;\Rightarrow\; N_{\epsilon_1} \geq N_{\epsilon_2}$.

Để chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ta cần đánh giá sai số $|x_n - a|$. Thường ta cần tìm một bất đẳng thức dạng $|x_n - a| \leq f(N)$, khi $n > N$. Từ đó có thể tìm được N phụ thuộc ϵ sao cho $f(N) < \epsilon$. Sau đó là việc viết chứng minh hình thức:
' Với mọi $\epsilon > 0$. Gọi N như đã tìm được ở trên. Khi $n > N$, ta có $|x_n - a| \leq f(N) < \epsilon$.'

Ví dụ.
a) Để chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$, với mọi $p > 0$, tiến hành như sau:
Ta nhận thấy khi $n > N$, ta có bất đẳng thức $|\dfrac{1}{n^p} - 0| = \dfrac{1}{n^p} < \dfrac{1}{N^p}$.
Vậy với $\epsilon > 0$, chọn số nguyên $N > \sqrt[p]{\dfrac{1}{\epsilon}}$, chẳng hạn $N = [\sqrt[p]{\dfrac{1}{\epsilon}}] + 1$. Khi đó nếu $n > N$, thì $|\dfrac{1}{n^p} - 0| < \dfrac{1}{N^p} < \epsilon$.
b) Chứng minh dãy $(x_n) = 0 \quad 0,3 \quad 0,33 \quad 0,333 \quad 0,3333 \quad \cdots \to \dfrac{1}{3}$, viết như sau:
Với $\epsilon > 0$. Gọi $N = [3/\epsilon]$. Khi $n > N$, ta có

$$|x_n - \frac{1}{3}| = |0,\underbrace{33\cdots3}_{n\ \text{lần}} - \frac{1}{3}| < \frac{3}{10^n} < \frac{3}{10^N} < \frac{3}{N} < \epsilon$$

2.3 Dãy phân kỳ. Dãy không hội tụ gọi là **dãy phân kỳ**. Có 2 loại:

• Loại dãy **tiến ra vô cùng** như dãy (2^n) ở trên.
Ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, nếuu $\forall E > 0, \exists N : n > N \Rightarrow\; x_n > E$
Ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, nếuu $\forall E > 0, \exists N : n > N \Rightarrow\; x_n < -E$

• Loại dãy **giao động** như dãy 0-1 ở ví dụ trên. Dãy loại này có các số hạng tập trung gần một số giá trị, gọi là các giới hạn riêng mà sẽ được đề cập sau.

Ví dụ. Ta có giới hạn quan trọng sau (xem chứng minh ở phần 4.1)

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |a| < 1 \\ 1 & \text{nếu } a = 1 \\ +\infty & \text{nếu } a > 1 \\ \text{giao động} & \text{nếu } a \leq -1 \end{cases}$$

2.4 Dãy con - Giới hạn riêng. Cho dãy (x_n). Cho một dãy tăng các số tự nhiên $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \cdots$, khi đó dãy $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ gọi là một **dãy con** của dãy (x_n).
Nói một cách khác, một dãy con là dãy cho bởi qui tắc hợp của một dãy các số tự nhiên tăng và dãy (x_n) :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ k & \mapsto & n(k) = n_k & \mapsto & x_{n_k} = x_{n(k)} \end{array}$$

Điểm $a \in \mathbf{R}$ gọi là một **giới hạn riêng** của dãy nếuu tồn tại một dãy con của nó hội tụ về a. Chẳng hạn dãy $((-1)^n)$ không hội tụ, dãy con các số hạng chỉ số chẵn là dãy hằng (1), còn dãy con các số hạng chỉ số lẻ là dãy hằng (-1). Vậy dãy có hai giới hạn riêng là 1 và -1.

Nhận xét. Từ định nghĩa suy ra:
• Nếu dãy (x_n) hội tụ về a, thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ về a.
• a là một giới hạn riêng của (x_n) khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại vô số chỉ số $n \in \mathbf{N}$, sao cho $|x_n - a| < \epsilon$.

Giới hạn trên, ký hiệu $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \sup\{a : a$ là giới hạn riêng của $(x_n)\}$
Giới hạn dưới, ký hiệu $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \inf\{a : a$ là giới hạn riêng của $(x_n)\}$

Ví dụ.
a) Cho $x_n = (-1)^n$. Khi đó $\limsup x_n = 1$, còn $\liminf x_n = -1$.
b) Cho $x_n = (-1)^n n$. Khi đó $\limsup x_n = +\infty$, còn $\liminf x_n = -\infty$.
c) Cho $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$. Khi đó $\limsup x_n = \boxed{}$, còn $\liminf x_n = \boxed{}$.
d) Dãy **mưa đá**: Cho giá trị đầu $x_0 \in \mathbf{R}$. Với $n \geq 1$, định nghĩa

$$x_n = \begin{cases} 3x_{n-1} + 1 & \text{nếu } x_{n-1} \text{ lẻ} \\ \frac{1}{2}x_{n-1} & \text{nếu } x_{n-1} \text{ chẵn} \end{cases}$$

Chẳng hạn, với $x_0 = 17$ ta có dãy: $17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \cdots$
Để ý là khi một số hạng nào đó của dãy là 1, thì sau đó dãy lặp: $1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \cdots$.
Bài toán sau vẫn chưa có lời giải: với mọi giá trị đầu x_0, tồn tại n để $x_n = 1$?

Nhận xét. Từ định nghĩa ta có (xem như bài tập):
• Luôn tồn tại $\limsup x_n$, $\liminf x_n$ (có thể là ∞).
• $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.
• (x_n) có giới hạn khi và chỉ khi $\liminf x_n = \limsup x_n$.
• $\limsup x_n = M$ hữu hạn khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$, có vô số số hạng $x_n > M - \epsilon$, và chỉ có hữu hạn số hạng $x_n > M + \epsilon$.
• $\liminf x_n = m$ hữu hạn khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$, có vô số số hạng $x_n < m + \epsilon$ và chỉ có hữu hạn số hạng $x_n < m - \epsilon$.

2.5 Tính chất của giới hạn.

(1) **Tính bị chặn**: *Nếu (x_n) hội tụ, thì tồn tại M sao cho $|x_n| < M, \forall n$.*
(2) **Tính bảo toàn các phép toán**: *Giả sử (x_n) và (y_n) là các dãy hội tụ. Khi đó các dãy $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$, $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ (giả thiết thêm $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$) hội tụ, và*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \ , \ \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n \ , \ \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

(3) **Tính bảo toàn thứ tự**: *Gỉa sử (x_n) và (y_n) là các dãy hội tụ và với mọi n đủ lớn $x_n \leq y_n$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$*
(4) **Tính kẹp (sandwich)**: *Gỉa sử với mọi n đủ lớn ta có $x_n \leq y_n \leq z_n$, và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$*

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. *Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Chứng minh: Gỉa sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.
(1) Theo định nghĩa, với $\epsilon = 1$, tồn tại N, sao cho $|x_n - a| < 1, \forall n > N$.
Gọi $M = \max\{|x_0|, \cdots, |x_N|, |a|+1\}$. Khi đó $|x_n| < M, \forall n$.
(2) Ta dùng các bất đẳng thức:

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

$$|x_n y_n - ab| \leq |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq M|y_n - b| + |b||x_n - a|.$$

Ngoài ra, nếu $b \neq 0$, thì với $\epsilon = |b|/2$, tồn tại N: $|y_n - b| < |b|/2$, $\forall n > N$. Vậy khi $n > N$, thì $|y_n| = |b - b + y_n| \geq |b| - |y_n - b| > |b|/2$ và ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{x_n b - y_n a}{b y_n}\right| = \left|\frac{x_n b - ab}{b y_n} + \frac{ab - y_n a}{b y_n}\right| \\
&\leq \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|a||b - y_n|}{|b y_n|} \\
&\leq \frac{|x_n - a|}{|b|/2} + \frac{|a||b - y_n|}{|b||b|/2}
\end{aligned}$$

Khi $n \to +\infty$, vế phải và do vậy vế trái các bất đẳng thức trên $\to 0$. Suy ra sự tồn tại các giới hạn và các công thức ở (2).
(3) Gỉa sử khi n đủ lớn $x_n \leq y_n$. Gỉa sử phản chứng là $a > b$. Khi đó với $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$, thì với mọi n đủ lớn, ta có $|x_n - a| < \epsilon$ và $|y_n - b| < \epsilon$. Suy ra $y_n < b + \epsilon = \frac{a+b}{2} = a - \epsilon < x_n$, điều này trái giả thiết.
(4) Với $\epsilon > 0$. Theo gỉa thiết $\lim x_n = \lim z_n = a$, suy ra tồn tại N_1 sao cho:
$|x_n - a| < \epsilon, |z_n - a| < \epsilon$, khi $n > N_1$.
Theo gỉa thiết tồn tại N_2 sao cho $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \geq N_2$. Khi $n \geq \max(N_1, N_2)$, từ các bất đẳng thức trên suy ra $-\epsilon < x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a < \epsilon$, i.e. $|y_n - a| < \epsilon$.
Vậy $\lim y_n = a$. $\square$

Nhận xét.
- Một dãy bị chặn chưa chắc hội tụ, chẳng hạn dãy $((-1)^n)$.
- Nếu các dãy $(x_n), (y_n)$ hội tụ và $x_n < y_n, \forall n$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Bài tập: Chứng minh nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{|x_n|} = \sqrt[p]{|a|}$.

Ví dụ. Tính
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 3n + 6}{3n^2 + 4n + 2}$.
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$.
Để tính giới hạn đầu, chú ý là n^2 (lũy thừa bậc cao nhất) là vô cùng lớn so với n, nên ta đưa n^2 làm thừa số chung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 6}{3n^2 + 4n + 2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1 - 3/n + 6/n^2)}{n^2(3 + 4/n + 2/n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 3/n + 6/n^2}{3 + 4/n + 2/n^2} \\
&= \frac{1 - \lim 3/n + \lim 6/n^2}{3 + \lim 4/n + \lim 2/n^2} = \frac{1 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Để tính giới hạn sau, ta nhân lượng liên hiệp để khử căn:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2} &- \sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}})} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{(\lim\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\lim\sqrt{1+\frac{1}{n}})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. Các định lý cơ bản.

Theo ngôn ngữ của dãy số, tập các số hữu tỉ là không "đầy đủ" vì có các dãy số trong $\mathbf{Q}$ nhưng không hội tụ về một số thuộc $\mathbf{Q}$, chẳng hạn dãy $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Các định lý sau đây thể hiện tính đầy đủ của tập số thực $\mathbf{R}$.

3.1 Nguyên lý đơn điệu bị chặn.
Một dãy đơn điệu không giảm và bị chặn trên thì hội tụ, i.e.

$$(x_n \le x_{n+1}, \forall n) \& (\exists M, x_n < M, \forall n) \;\Rightarrow\; \exists \lim x_n$$

Một dãy đơn điệu không tăng và bị chặn dưới thì hội tụ, i.e.

$$(x_n \ge x_{n+1}, \forall n) \& (\exists m, m < x_n, \forall n) \;\Rightarrow\; \exists \lim x_n$$

Chứng minh: Trước hết nhận xét là nếu (x_n) không tăng và bị chặn dưới, thì dãy $(-x_n)$ không giảm và bị chặn trên. Vậy chỉ cần chứng minh cho trường hợp (x_n) không giảm và bị chặn trên.
Do giả thiết bị chặn trên suy ra $a = \sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ hữu hạn.
Ta chứng minh $\lim x_n = a$. Cho $\epsilon > 0$.
Theo định nghĩa của cận trên bé nhất: mọi $x_n \le a$ và tồn tại x_N sao cho $a - \epsilon < x_N$.
Từ tính đơn điệu không giảm, khi $n > N$, $a - \epsilon < x_n \le a < a + \epsilon$, i.e $|x_n - a| < \epsilon$.
Vậy $\lim x_n = a$. $\square$

Nhận xét. Nếu (x_n) không giảm nhưng không bị chặn trên, thì $\lim x_n = +\infty$.
Tương tự, nếu (x_n) không tăng nhưng không bị chặn dưới, thì $\lim x_n = -\infty$.

3.2 Nguyên lý dãy đoạn lồng nhau. *Cho dãy các đoạn lồng nhau $I_n = [a_n, b_n]$, sao cho $I_n \supset I_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Khi đó tồn tại điểm chung cho mọi I_n, i.e. $\cap_{n\in\mathbf{N}} I_n \neq \emptyset$*

Chứng minh: Từ giả thiết ta có $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$. Vậy dãy (a_n) không giảm và bị chặn trên còn (b_n) không tăng và bị chặn dưới. Theo nguyên lý trên tồn tại $a = \lim a_n$ và $\lim b_n = b$. Hơn nữa, do tính bảo toàn thứ tự, $a \leq b$. Rõ ràng $[a, b] \subset I_n, \forall n$. $\square$

3.3 Định lý Bolzano-Weierstrass. *Mọi dãy bị chặn đều tồn tại dãy con hội tụ.*

Chứng minh: Ta tìm dãy con hội tụ bằng phương pháp chia đôi:
Gỉa sử $a_0 \leq x_n \leq b_0, \forall n$. Chia đôi đoạn $I_0 = [a_0, b_0]$. Một trong hai đoạn chia chứa vô số số hạng x_n, gọi là I_1. Chọn n_1, $x_{n_1} \in I_1$. Tương tự, chia đôi I_1 có một trong hai đoạn con chứa vô số số hạng x_n, gọi là I_2. Chọn $n_2 > n_1$, $x_{n_2} \in I_2$. Lặp lại cách làm trên, ta có:
a) $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_k$ b) Độ dài đoạn I_k là $\frac{b_0 - a_0}{2^k}$ c) $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ và $x_{n_k} \in I_k$
Theo nguyên lý dãy đoạn lồng nhau tồn tại $a \in I_k, \forall k$. Ta có $|x_{n_k} - a| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^k} \to 0$, khi $k \to \infty$. Vậy dãy con $(x_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ hội tụ về a. $\square$

3.4 Tiêu chuẩn Cauchy. *Dãy (x_n) hội tụ khi và chỉ khi (x_n) là dãy Cauchy, i.e.*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : \ n, m > N \ \Rightarrow \ |x_n - x_m| < \epsilon$$

Chứng minh: ($\Leftarrow$) Gỉa sử $\lim x_n = a$. Khi đó với $\epsilon > 0$, tồn tại N: $|x_n - a| < \epsilon/2$, $\forall n > N$. Vậy với $m, n > N$, $|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.
($\Rightarrow$) Gỉa sử (x_n) là dãy Cauchy.
Dãy (x_n) là bị chặn: vì với $\epsilon = 1$, tồn tại N sao cho $x_N - 1 < x_n < x_N + 1, \forall n > N$.
Chọn $M = \max\{|x_0|, \cdots, |x_N|, |x_N| + 1\}$. Khi đó $|x_n| \leq M, \forall n$.
Theo định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại dãy con $(x_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ hội tụ về a.
Ta chứng minh dãy (x_n) hội tụ về a: từ bất đẳng thức $|x_k - a| \leq |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|$.
Do $n_k \geq k$, khi $k \to \infty$, thì $n_k \to \infty$. Khi đó $|x_k - x_{n_k}| \to 0$, do là dãy Cauchy; và $|x_{n_k} - a| \to 0$, do dãy con hội tụ về a. Vậy $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$. $\square$

Nhận xét. Trong thực hành, thường dùng tiêu chuẩn Cauchy dưới dạng:

$$|x_n - x_{n+p}| \to 0 \text{ , khi } n \to \infty, \text{ với mọi } p = 0, 1, \cdots$$

Như vậy không cần biết trước hoặc phỏng đoán trước giới hạn (nếu có) của một dãy, tiêu chuẩn Cauchy thuận lợi để kiểm tra sự hội tụ của một dãy.

4. Các ví dụ.

4.1 Một số giới hạn cơ bản.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^p} = 0 \quad (p > 0)$
b) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$
c) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
d) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$
e) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^p}{a^n} = 0 \quad (a > 1)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ nếu $|a| < 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ nếu $a > 1$

Chứng minh: a) Đã chứng minh.
b) Trường hợp $a \geq 1$, xét $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Ta chứng minh $\lim x_n = 0$.
Theo công thức nhị thức Newton, do $x_n \geq 0$, ta có $a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n$.
Suy ra $0 \leq x_n \leq \dfrac{a-1}{n}$. Từ tính chất sandwich $\lim x_n = 0$.
Trường hợp $0 < a < 1$, áp dụng trường hợp trên cho $\dfrac{1}{a}$.
c) Xét $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Từ công thức nhị thức Newton suy ra

$$n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

Vậy $0 \leq x_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$. Từ tính chất sandwich $\lim x_n = 0$, i.e. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.
d) Từ bất đẳng thức $n! > \left(\dfrac{n}{3}\right)^n$ (có thể chứng minh bằng qui nạp), suy ra $\sqrt[n]{n!} > \dfrac{n}{3}$.
Từ đó dễ suy ra giới hạn cần tìm.
e) Vì $a > 1$, $a^{\frac{1}{p}} = 1 + u$ $(u > 0)$. Theo công thức nhị thức Newton suy ra

$$(a^{\frac{1}{p}})^n = (1 + u)^n > \frac{n(n-1)}{2} u^2$$

Suy ra $\lim \dfrac{n^p}{a^n} = \lim \left(\dfrac{n}{(a^{\frac{1}{p}})^n}\right)^p = 0$.
f) Suy từ e) với $p = 0$ $\square$

4.2 Số e. Hai dãy số sau là hội tụ về cùng một giới hạn

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{và} \quad t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = e$ gọi là **cơ số Neper**.

Chứng minh: Dãy (s_n) tăng, $s_n = 1 + 1 + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{1.2.3} + \cdots + \dfrac{1}{1.2\ldots n} < 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} < 3$. Vậy theo nguyên lý đơn điệu tồn tại $\lim s_n = e$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \ t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}.$$

Suy ra $t_n < t_{n+1}$ và $t_n \leq s_n < 3$. Vậy tồn tại $\lim t_n = e'$.
Ta chứng minh $e = e'$. Do $t_n \leq s_n$, suy ra $e' \leq e$.
Mặt khác, với $n \geq m$, ta có

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Khi m cố định, $n \to \infty$, suy ra $e' \geq 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{m!} = s_m$
Cho $m \to \infty$, ta có $e' \geq e$. □

Mệnh đề. *e là số vô tỉ.* $\quad$ *($e = 2,71828\cdots$).*

Chứng minh: Gỉa sử phản chứng $e = \dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}$. Theo chứng minh trên, ta co $0 < e - s_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \cdots < \dfrac{1}{n!n}$.
Khi đó $0 < n!(e - s_n) < \dfrac{1}{n}$. Do $n!e, n!s_n$ là các số nguyên, bất đẳng thức là vô lý. □

4.3 Ví dụ. Dùng tiêu chuẩn Cauchy, ta có:
a) $x_n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, trong đó $|x| < 1$ và $|a_k| < M, \forall k$, là dãy hội tụ.
b) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ là dãy phân kỳ.

Chứng minh: a) Ta có đánh giá

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| \leq |a_{n+1}||x|^{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}||x^{n+p}| \\ &\leq M|x|^{n+1} + \cdots + M|x|^{n+p} \leq M|x|^{n+1}(1 + \cdots + |x|^p) \\ &\leq M|x|^{n+1}\frac{1}{1-|x|} \end{aligned}$$

Suy ra khi $n \to \infty$, $|x_{n+p} - x_n| \to 0$, với mọi p, i.e. (x_n) là dãy Cauchy nên hội tụ.
b) Với $n, m = 2n$, ta có $|x_m - x_n| = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$. Vậy (x_n) không thỏa tiêu chuẩn Cauchy nên phân kỳ. □

4.4 Biểu diễn thập phân của số thực. Cho $x \in \mathbf{R}$. Khi đó dãy số nguyên $a_0 = [x] \in \mathbf{Z}$, $a_n = [10^n(x - a_0 - \dfrac{a_1}{10} - \cdots - \dfrac{a_{n-1}}{10^{n-1}})] \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, thỏa

$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \;\to\; x \;, \quad \text{khi } n \to \infty$$

Nói cách khác, ta có biểu diễn $x = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$.
Suy ra tập các số hữu tỉ là trù mật trong $\mathbf{R}$.

Chứng minh: Đặt $a_0 = [x]$. Ta có $a_0 \leq x < a_0 + 1$, i.e. $0 \leq x - a_0 < 1$.
Khi đó $a_1 = [10(x - a_0)] \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ và thỏa $\dfrac{a_1}{10} \leq x - a_0 < \dfrac{a_1 + 1}{10}$.
(Về mặt hình học, nếu chia $[0, 1]$ thành mười đoạn bằng nhau, thì $x - a_0$ thuộc một trong các đoạn đó).
Do $0 \leq x - a_0 - \dfrac{a_1}{10} < \dfrac{1}{10}$, tồn tại $a_2 \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, $\dfrac{a_2}{10^2} \leq x - a_0 - \dfrac{a_1}{10} < \dfrac{a_2 + 1}{10^2}$.
Lặp lý luận trên, ở bước thứ n ta có $0 \leq x - a_0 - \dfrac{a_1}{10} - \cdots - \dfrac{a_n}{10^n} < \dfrac{1}{10^n}$.
Gọi $a_{n+1} = [10^{n+1}(x - a_0 - \dfrac{a_1}{10} - \cdots - \dfrac{a_n}{10^n})]$. Khi đó $a_{n+1} \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, và
$0 \leq x - a_0 - \dfrac{a_1}{10} - \cdots - \dfrac{a_n}{10^n} - \dfrac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \dfrac{1}{10^{n+1}}$.

Vậy với x_n xây dựng trên ta có $0 \leq x - x_n < \frac{1}{10^n}$. Suy ra $\lim x_n = x$. □

Nhận xét.
• Biểu diễn thập phân một số thực như trên là không duy nhất. Chẳng hạn,

$$1,000\cdots = 0,999\cdots \qquad 0,5 = 0,4999\cdots$$

• Biểu diễn thập phân số hữu tỉ hoặc có độ dài hữu hạn hoặc có chu kỳ. Chẳng hạn,

$$\frac{1}{2} = 0,5\ ,\ \frac{1}{3} = 0,333\cdots\ ,\ 0,123123123\cdots = 123 \times \frac{1}{10^3 - 1}$$

Trong khi đó biểu diễn thập phân số vô tỉ luôn có độ dài vô hạn và không có chu kỳ.

4.5 Tính không đếm được của R.
Để xét đến số lượng phần tử của một tập ta có khái niệm **lực lượng** . Hai tập X, Y gọi là **cùng lực lượng** nếuu tồn tại một song ánh từ X lên Y. Dễ thấy quan hệ 'cùng lực lượng' là quan hệ tương đương trên lớp các tập. Ba lớp đáng quan tâm:
(1) Một tập gọi là **hữu hạn** n phần tử nếuu nó cùng lực lượng với $\{1, 2, \cdots, n\}$.
(2) Một tập gọi là (vô hạn) **đếm được** nếuu nó cùng lực lượng với $\mathbf{N}$.
Một song ánh $\mathbf{N} \to X$ còn gọi là một phép đánh số thứ tự các phần tử của X.
Một tập hữu hạn hoặc đếm được gọi là tập **không quá đếm được**.
(3) Một tập gọi là **không đếm được** nếuu nó là tập vô hạn và không là tập đếm được.

Ví dụ. Các tập $2\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ là đếm được vì có thể đánh số thứ tự được (Bài tập).

Mệnh đề. $\mathbf{R}$ *là không đếm được.*

Chứng minh: Ta chứng minh với $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$, khoảng $[a, b]$ là không đếm được. Gỉa sử phản chứng là nó đếm được, i.e. $[a, b] = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Chia đôi $[a, b]$, có một đoạn I_1, sao cho $x_1 \notin I_1$. Lại chia đôi I_1, có một đoạn I_2, sao cho $x_2 \notin I_2$. Lặp lại quá trình này, ta có dãy đoạn lồng nhau $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$, sao cho $x_n \notin I_n$. Theo nguyên lý dãy đoạn lồng nhau, tồn tại $x \in \cap_{n \in \mathbf{N}} I_n$. Vậy $x \in [a, b]$. Mặt khác, theo cách xây dựng $x \neq x_n, \forall n$, nên $x \notin [a, b]$. Mâu thuẫn. □

Nhận xét. Vậy có thể nói số lượng các số hữu tỉ là ít hơn nhiều so với số lượng các số vô tỉ.

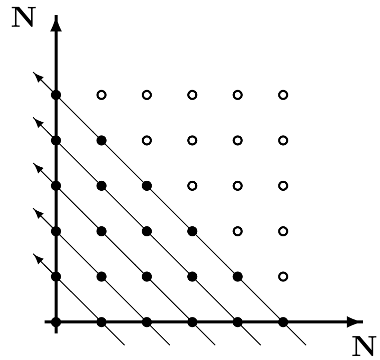
Bài tập: Để hiểu thêm về tập đếm được, hãy chứng minh các kết quả:
• Một tập con của $\mathbf{N}$ là không quá đếm được.
(Hd: Nếu $X \subset \mathbf{N}$ vô hạn, thì xây dựng ánh xạ từ $\mathbf{N}$ lên X:

$$0 \mapsto x_0 = \min X,\ n \mapsto \min(X \setminus \{x_0, \cdots, x_{n-1}\})$$

Rồi chứng minh ánh xạ trên song ánh)
• Cho X là tập đếm được và $f : X \to Y$ là toàn ánh. Khi đó Y không quá đếm được.
(Hd: Xét ánh xạ $m : Y \to X, m(y) = \min f^{-1}(y)$. Chứng minh m là song ánh từ $Y \to m(Y)$. Từ đó áp dụng bài tập trên.)

• Tập $\mathbf{N}^2$ là đếm được.
(Hd: Phép đánh số theo đường chéo là song ánh. Cụ thể đó là ánh xạ:

$$f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}, f(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n \qquad)$$



• Nếu $(X_n)_{n\in I}$ là một họ đếm được các tập đếm đươc, thì hợp của chúng $X = \cup_{n\in I} X_n$ là đếm được.
(Hd: Ta có song ánh $\mathbf{N} \to I, n \mapsto i_n$ và với mỗi n một song ánh $\mathbf{N} \to X_n, m \mapsto f_n(m)$. Vậy $\mathbf{N}^2 \to X, (m,n) \mapsto f_{i_n}(m)$ là toàn ánh. Rồi áp dụng bài tập thứ hai)
• Tập mọi dãy số mà các số hạng chỉ nhận giá trị 0 hay 1 là không đếm được.
(Hd: Kết quả này hơi lạ? Để chứng minh dùng phản chứng: giả sử tập X nêu trên đếm được, i.e. có song ánh $\mathbf{N} \to X, n \mapsto x_n$, với

$$\begin{array}{ccccccc}
x_0 & = & x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & \cdots & & \cdots \\
x_1 & = & x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & & \cdots \\
x_2 & = & x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & & \cdots \\
\vdots & & & & & \ddots & & \\
x_n & = & x_{n,0} & x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}$$

Dùng qui tắc đường chéo của Cantor, xây dựng dãy $y = (y_n)$ như sau: $y_n = 1$ nếu $x_{n,n} = 0$, $y_n = 0$ nếu $x_{n,n} = 1$. Khi đó y vừa thuộc X (vì là dãy chỉ có $0,1$) vừa không thuộc X (vì $y \neq x_n, \forall n$))

4.6 Công thức Stirling. Để đánh giá độ lớn của $n!$ ta có công thức sau (không chứng minh):

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \text{ trong đó } 0 < \theta_n < 1$$

II. Giới hạn và tính liên tục

Hàm số là một mô hình toán học để mô tả mối quan hệ giữa một đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng khác. Chương này sẽ đề cập đến khái niệm hàm số và giới hạn của hàm số, nhằm nghiên cứu mối liên quan của sự biến đổi của các đại lượng. Phần cuối sẽ nghiên cứu tính chất cơ bản của các hàm số mà sự phụ thuộc nêu trên là "liên tục".

1. Hàm số

1.1 Định nghĩa. Một **hàm số** (thực của một biến thực) là một ánh xạ

$$f : X \to Y,\ x \mapsto y = f(x)$$

trong đó X, Y là các tập con của $\mathbf{R}$. Vậy với mỗi giá trị của **biến** $x \in X$, có duy nhất một giá trị $y = f(x) \in Y$.

X gọi là **miền xác định** của f

$f(X) = \{y \in \mathbf{R} :\ \exists x \in X, y = f(x)\}$ gọi là **miền giá trị** của f

Thường hàm được cho bởi 3 cách sau:

(1) **Công thức**: biểu thị sự phụ thuộc của đại lượng y theo đại lượng x bằng một công thức. Chẳng hạn, $y = 2\pi x,\ y = mx,\ y = mx^2$.
Qui ước là miền xác định, nếu không được xác định rõ, được hiểu là tập:

$$\{x \in \mathbf{R} :\ f(x) \text{ có nghĩa (thực) } \}$$

Ví dụ. Hàm $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ có miền xác định là
$\{x \in \mathbf{R} : x - 1 \geq 0, x - 2 \neq 0\} = [1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Đôi khi hàm có thể cho bởi nhiều biểu thức, như các hàm sau:
Hàm phần nguyên: $f(x) = [x] = n$ là số nguyên thỏa $n \leq x < n + 1$.

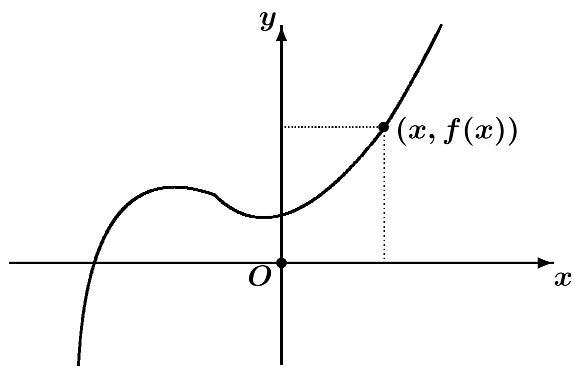
Hàm dấu (signum): $f(x) = \text{ sign}\, x = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ \ \ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ +1 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

Hàm đặc trưng của tập D: $\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in D \\ 0 & \text{nếu } x \notin D \end{cases}$

Bài tập: Tính $[1,5],\ [-\pi],\ [e],\ [\sin x],\ \ \text{sign}\,(-2),\ \ \text{sign}\,(2^{64}),\ \ \text{sign}\,(-[0,3])$.

Các hàm số còn có thể cho dưới dạng giới hạn, tích phân, chuỗi hàm, ... sẽ được đề cập ở các phần sau.

(2) **Đồ thị**: $f = \{(x,y) : x \in X, y = f(x)\}$ là tập con của $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$.
Việc cho hàm bởi đồ thị có thuận lợi về mặt trực quan. Biểu diễn hình học của $\mathbf{R}^2$ là mặt phẳng với hệ **tọa độ Descartes** mà $(0,0)$ đồng nhất với gốc O, $\mathbf{R} \times 0$ là trục Ox, còn $0 \times \mathbf{R}$ là trục Oy là 2 đường thẳng vuông góc nhau. Khi đó mỗi $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tương ứng 1-1 với một điểm trêm mặt phẳng có hình chiếu vuông góc lên Ox là $(x,0)$ và hình chiếu lên Oy là $(0,y)$.
Như vậy đồ thị hàm f là tập con trong mặt phẳng (thường là đường cong), mà khi nhìn vào nó ta có thông tin về hàm f (e.g. tính tăng giảm, cực trị, nghiệm,...).



Để vẽ đồ thị hàm số ta thường dùng 2 phương pháp sau:
- Vẽ trực tiếp: chấm một số điểm của đồ thị $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))$ trên mặt phẳng rồi nối chúng lại bởi các đường thẳng hay đường cong. Thường đường cong nhận được càng "gần" với đồ thị f khi số điểm càng nhiều. Phương pháp này thường được dùng để vẽ đồ thị bằng máy tính.
- Vẽ qua việc khảo sát hàm số: như đã được học ở trung học, và sẽ được đề cập ở chương sau. Phương pháp này xác định điểm mang thông tin quan trọng của hàm (miền xác định, cực trị, uốn, nghiệm,...) cũng như tính chất của hàm trên từng miền (tăng, giảm, tiệm cận,...)
Bài tập: Vẽ đồ thị hàm phần nguyên $[x]$ và hàm dấu $\operatorname{sign}(x)$.

(3) **Lập bảng**: khi miền xác định hữu hạn. Thường dùng trong thí nghiệm, thực nghiệm hay kinh tế.

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

Bài tập: Lập các bảng của các phép hoán vị 3 phần tử.

1.2 Các phép toán trên hàm.

Cộng-Trừ-Nhân-Chia: Cho $f, g : X \to \mathbf{R}$. Khi đó có thể định nghĩa các hàm $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (nếu $g(x) \neq 0, \forall x \in X$) một cách tự nhiên như sau:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad fg(x) = f(x)g(x), \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in X$$

Hàm hợp: Cho $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Khi đó hàm hợp $g \circ f : X \to Z$ định nghĩa là $g \circ f(x) = g(f(x))$.
Hàm ngược: Cho $f : X \to Y$ là song ánh. Khi đó có hàm ngược $f^{-1} : Y \to X$, định nghĩa là $f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; y = f(x)$.

Bài tập: Vẽ đồ thị hàm phần dư $f(x) = x - [x]$.
Bài tập: Cho $f(x) = [x]$ và $g(x) = \operatorname{sign}(x)$. Tìm $f \circ g$ và $g \circ f$. Chúng có bằng nhau?
Bài tập: Chứng minh đồ thị hàm số ngược đối xứng với đồ thị hàm số qua phân giác thứ nhất.

1.3 Một số tính chất đặc biệt của hàm.
Hàm đơn điệu. Hàm f gọi là **không giảm** (t.ư. tăng) trên X nếuu

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{ t.ư. } f(x_1) < f(x_2))$$

Hàm f gọi là **không tăng** (t.ư. giảm) trên X nếuu

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{ t.ư. } f(x_1) > f(x_2))$$

Ví dụ.
a) Hàm $f(x) = x^n$, với $n \in \mathbf{N}$, là hàm tăng trên $[0, +\infty)$.
b) Hàm $f(x) = [x]$ và $g(x) = \operatorname{sign}(x)$ là hàm không giảm trên $\mathbf{R}$.

Bài tập: Tùy theo n chẵn hay lẻ, xét tính đơn điệu của $f(x) = x^n$ trên $\mathbf{R}$.

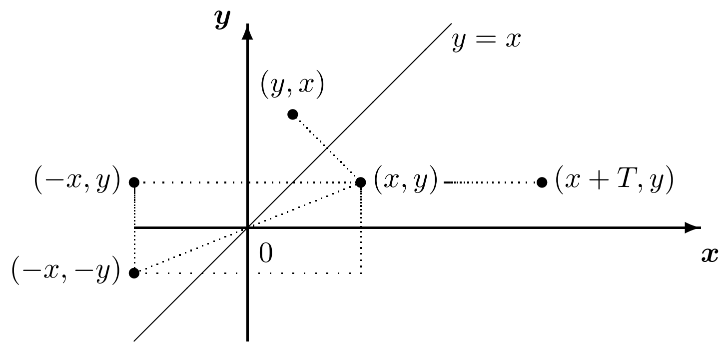
Hàm chẵn - Hàm lẻ. Cho X là tập đối xứng, i.e. nếu $x \in X$ thì $-x \in X$.
Hàm f gọi là **hàm chẵn** trên X nếuu $f(-x) = f(x), \forall x \in X$.
Hàm f gọi là **hàm lẻ** trên X nếuu $f(-x) = -f(x), \forall x \in X$.

Ví dụ. Các hàm $x^2, \cos x$ là chẵn, còn $x^3, \sin x$ là lẻ trên $\mathbf{R}$.

Nhận xét. Mọi hàm f trên tập đối xứng là tổng của một hàm chẵn và một hàm lẻ:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \;+\; \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Bài tập: Chứng minh Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục tung Oy và hàm số lẻ đối xứng qua gốc O. (xem tọa độ của các điểm đối xứng của $(x, y = f(x))$)



Hàm tuần hoàn. Hàm f xác định trên X gọi là **tuần hoàn** nếuu tồn tại $T > 0$ sao cho $f(x+T) = f(x), \forall x \in X$.
Khi đó số dương T nhỏ nhất thỏa điều kiện trên gọi là **chu kỳ** của f.

Nhận xét. Nếu $x \in X$, thì $x + T \in X$ và ... . Vậy $x + nT \in X$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Hơn nữa $f(x+nT) = f(x)$.
Bài tập: Đồ thị một hàm tuần hoàn chu kỳ T có tính chất gì?

Ví dụ.
a) Với $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, các hàm $\sin kx$, $\cos kx$ tuần hoàn, có chu kỳ $\dfrac{2\pi}{k}$.
b) Hàm phần dư $f(x) = x - [x]$ là tuần hoàn, có chu kỳ là 1.

Bài tập: Chứng minh hàm đặc trưng của tập $\mathbf{Q}$: $\chi_{\mathbf{Q}}$, là hàm tuần hoàn nhưng không có chu kỳ.

1.4 Các hàm sơ cấp.

• **Các hàm số sơ cấp cơ bản** là các hàm: x^α, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\arctan x$ (hay còn lý hiệu $\mathrm{arctg}\, x$).
Sau đây ta nhắc lại các tính chất cơ bản của chúng.

Hàm exponent: $\exp(x) = e^x = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.
(1) Miền xác định là $\mathbf{R}$, miền giá trị là $(0, +\infty)$.
(2) Tính chất cần nhớ: $e^0 = 1,\ e^{x+x'} = e^x e^{x'}$
(3) Hàm đơn điệu tăng.

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\left|\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n - 1\right| \leq |t|(e-1) \quad \text{khi} \quad |t| \leq 1 \qquad (*)$$

Theo công thức nhị thức $\left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n = 1 + t\displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{t^{k-1}}{n^k}$, suy ra khi $|t| \leq 1$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n - 1\right| &\leq |t| \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{|t|^{k-1}}{n^k} \leq |t| \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{|t|^{k-1}}{n^k} \\
&\leq |t| \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = |t| \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1\right) \leq |t|(e-1)
\end{aligned}$$

Bây giờ ta chứng minh (1). Cho $x \in \mathbf{R}$. Xét dãy $x_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. Ta cần chứng minh (x_n) có giới hạn.
Khi $x > 0$, như ở chứng minh cho giới hạn của e, (x_n) là dãy tăng. Để chứng minh

dãy bị chặn trên, gọi $N \in \mathbf{N}$, $x \le N$. Khi đó

$$x_n \le \left(1+\frac{N}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{N.n} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n.N} \le 3^N$$

Vậy tồn tại $\exp(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, khi $x \ge 0$.

Khi $x < 0$, thì $-x > 0$ và ta có $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \dfrac{(1-\frac{x^2}{n^2})^n}{(1-\frac{x}{n})^n}$

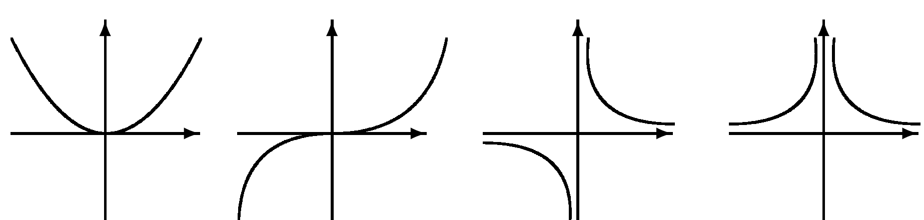
Theo bất đẳng thức $(*)$, với $t = \dfrac{x^2}{n}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{x^2}{n^2})^n = 1$. Từ tính chất giới hạn thương $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\exp(-x)}$. Vậy $\exp(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.
Dễ thấy $e^0 = 1$. Ngoài ra, ta có

$$\frac{(1+\frac{x}{n})^n\left(1+\frac{x'}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x+x'}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{xx'}{n^2(1+\frac{x+x'}{n})}\right)^n$$

Cho $n\to\infty$, áp dụng $(*)$ với $t = \dfrac{xx'}{n(1+\frac{x+x'}{n})}$, ta có $\dfrac{e^x e^{x'}}{e^{x+x'}} = 1$. Vậy ta có (2).
Để ý là $e^x > 0$ và $e^t > 1$ khi $t > 0$. Nếu $x < x'$, thì $e^x - e^{x'} = e^x(1-e^{x'-x}) < 0$. Vậy e^x là hàm tăng. □

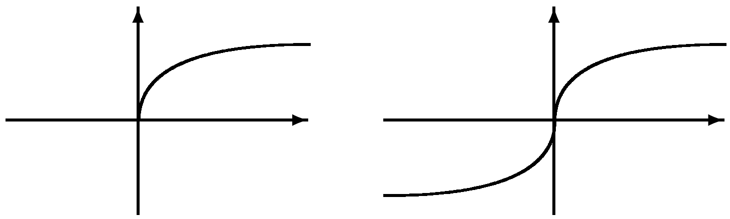
Hàm logarithm cơ số tự nhiên: $\ln x$ là hàm ngược của hàm e^x.
Miền xác định là $(0,+\infty)$, miền giá trị là $\mathbf{R}$. Hàm đơn điệu tăng.
Tính chất cần nhớ: $\ln e = 1$, $\ln x + \ln x' = \ln xx'$

Hàm lũy thừa: $x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R})$.
- Lũy thừa nguyên dương: với $n \in \mathbf{N}$, $x^n = x\cdots x$ (tích n lần).
Miền xác định là $\mathbf{R}$. Khi n lẻ hàm tăng. Khi n chẵn hàm giảm trên $(-\infty,0)$, tăng trên $[0,+\infty)$.
- Lũy thừa nguyên âm: với $n \in \mathbf{N}$, $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.
Miền xác định là $\mathbf{R}\setminus 0$. Khi n lẻ hàm giảm trên từng khoảng xác định. Khi n chẵn hàm tăng trên $(-\infty,0)$ và giảm trên $(0,+\infty)$.



$y = x^{2n}$ $\quad$ $y = x^{2n+1}$ $\quad$ $y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ $\quad$ $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$

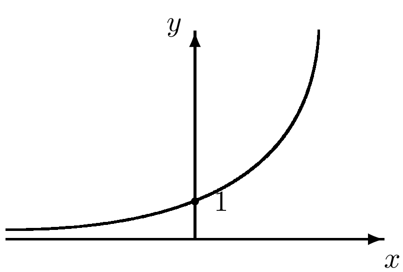
- Hàm căn thức: với $n \in \mathbf{N}$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
Nó là hàm ngược của hàm lũy thừa nguyên x^n. Khi n lẻ, hàm có miền xác định là $\mathbf{R}$ và tăng. Khi n chẵn, hàm có miền xác định là $[0, +\infty)$ vàtăng.



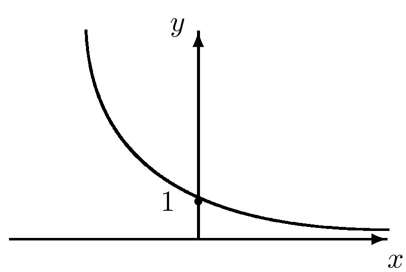
$y = \sqrt[2n]{x}$ $\qquad$ $y = \sqrt[2n+1]{x}$

- Lũy thừa hữu tỉ: với $m, n \in \mathbf{Z}, n > 0$, $x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$.
Miền xác định phụ thuộc n chẵn hay lẻ và m dương hay âm.
Bài tập: Tìm miền xác định của hàm lũy thừa hữu tỉ và miền đơn điệu của nó.
- Lũy thừa vô tỉ: khi α là số vô tỉ, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
Miền xác định là $(0, +\infty)$. Hàm tăng khi $\alpha > 0$ và giảm khi $\alpha < 0$.
Tính chất cần nhớ: $(xx')^\alpha = x^\alpha x'^\alpha$

Hàm mũ: $a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$.
Miền xác định là $\mathbf{R}$, miền giá trị là $(0, +\infty)$. Hàm tăng khi $a > 1$ và giảm khi $0 < a < 1$.
Tính chất cần nhớ: $a^{x+x'} = a^x a^{x'}$

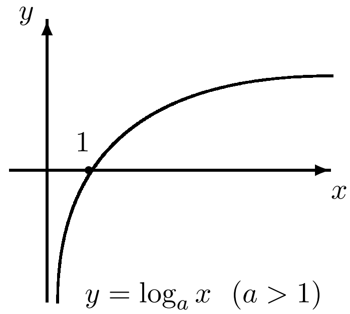


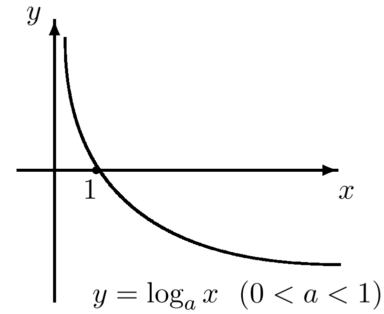
$y = a^x \quad (a > 1)$



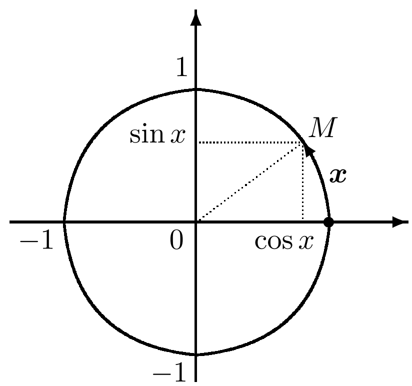
$y = a^x \quad (0 < a < 1)$

Hàm logarithm: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} \quad ((a > 0, a \neq 1)$.
Miền xác định là $(0, +\infty)$, miền giá trị là $\mathbf{R}$. Hàm tăng khi $a > 1$ và giảm khi $0 < a < 1$.
Tính chất cần nhớ: $\log_a x + \log_a x' = \log_a xx'$,
$\log_a x = \log_a b \log_b x$.
$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.
Hàm a^x và $\log_a x$ là các hàm ngược của nhau: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

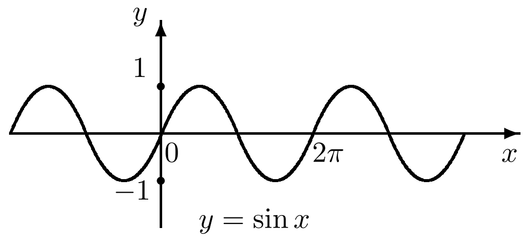




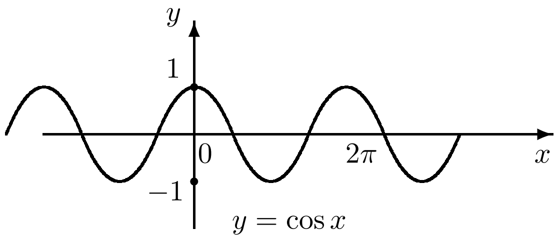
Các hàm lượng giác: Có thể dùng vòng tròn lượng giác để định nghĩa các hàm lượng giác. Cho vòng tròn đơn vị trong hệ trục Descartes. Mỗi $x \in \mathbf{R}$ ứng với một điểm M trên đường tròn có độ dài cung từ $(1,0)$ đến M là $x \bmod 2\pi$. Như vậy, các giá trị x khác nhau bội lần 2π sẽ có chung một điểm trên đường tròn. Khi đó độ dài đại số của hình chiếu của M lên trục tung gọi là $\sin x$, và lên trục hoành gọi là $\cos x$.



Hàm $\sin x$: Miền xác định là $\mathbf{R}$, miền giá trị là $[-1,1]$. Là hàm lẻ và tuần hoàn chu kỳ 2π.
Hàm $\cos x$: Miền xác định là $\mathbf{R}$, miền giá trị là $[-1,1]$. Là hàm chẵn và tuần hoàn chu kỳ 2π.
Tính chất cần nhớ: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
Hàm $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$: Miền xác định với mọi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, miền giá trị là $\mathbf{R}$. Là hàm lẻ và tuần hoàn chu kỳ π.
Hàm $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$: Miền xác định với mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$, miền giá trị là $\mathbf{R}$. Là hàm lẻ và tuần hoàn chu kỳ π.

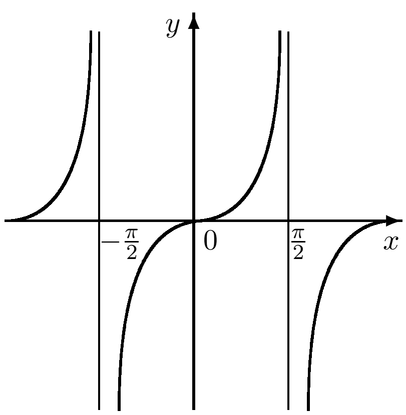


$y = \sin x$

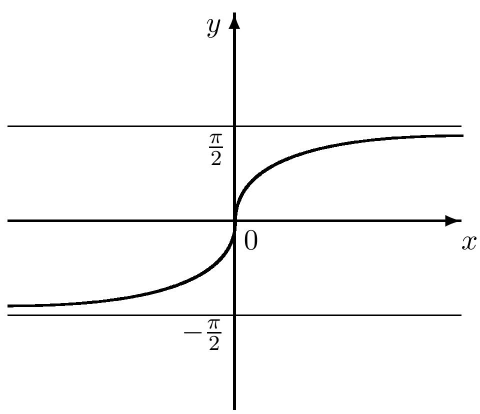


$y = \cos x$

Các hàm lượng giác ngược: Hạn chế trên một miền đơn điệu của hàm lượng giác, ta định nghĩa:
Hàm $\arcsin x : [-1, 1] \to [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, là hàm ngược của hàm $\sin : [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.
Hàm $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$, là hàm ngược của hàm $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.
Hàm $\arctan x : \mathbf{R} \to (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$, là hàm ngược của hàm $\tan : (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$.
Hàm $\operatorname{arccot} x : \mathbf{R} \to (0, \pi)$, là hàm ngược của hàm $\cot : (0, \pi) \to \mathbf{R}$.



$y = \tan x$



$y = \arctan x$

• **Các hàm sơ cấp** là các hàm được lập thành bởi một số hàm sơ cấp cơ bản bằng các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép hợp thành.
Chẳng hạn, $f(x) = 2^x + \sqrt[3]{x} - \ln(\ln(\ln(x^2+1)))$ hay $f(x) = \dfrac{x^2 + e^{-x}\tan 5x}{\sqrt{x-1} + \sin(\pi x)}$
Cũng để ý là các hàm: $a^x, \log_a x, \cos x, \tan x, \cot x, \arcsin x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$,

$\operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x, \arccos x = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ được xem là không cơ bản.
Sau đây là các hàm sơ cấp thường gặp khác:

Hàm đa thức: $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, với $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$ cho trước.
Ví dụ. Hàm bậc một, như $y = 2x + 1$. Hàm bậc hai, như $y = x^2 + 5x - 1$. Hàm bậc ba, như $y = x^3 - 3x + 1$.

Hàm hữu tỉ: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, với P, Q là các hàm đa thức.
Ví dụ. Hàm nhất biến, như $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. Hàm bậc 2 trên bậc 1, như $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Các hàm Hyperbolic: các hàm sau gọi là hàm coshyperbolic, sinhyperbolic, tanhyperbolic và cotanhyperbolic

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \ \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Bài tập: Chứng minh các công thức:
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$
$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.
Vẽ đồ thị các hàm số trên.

2. Giới hạn của hàm.

2.1 Lân cận - Điểm tụ. Cho $X \subset \mathbf{R}$ và $a \in \mathbf{R}$.
Một **lân cận của** a là một khoảng tâm a: $\{x \in \mathbf{R} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$, với $\delta > 0$ nào đó.
a gọi là **điểm tụ của** X nếuu với mọi lân cận U của a, $U \cap X \setminus \{a\} \neq \emptyset$, nói cách khác tồn tại một dãy (x_n) trong $X \setminus \{a\}$ hội tụ về a.
Ví dụ. Khoảng mở (a, b) có các điểm tụ là mọi điểm $x \in [a, b]$. Tập $\{\dfrac{1}{n} : n \in N\}$ chỉ có một điểm tụ là 0.

2.2 Giới hạn. Cho $f : X \to \mathbf{R}$ và a là điểm tụ của X. Hàm f gọi là **có giới hạn** $L \in \mathbf{R}$ **khi** x **tiến tới** a nếuu với mọi $\epsilon > 0$ (bé tùy ý), tồn tại $\delta > 0$ (đủ bé, phụ thuộc a và ϵ) sao cho khi $x \in X$ mà $0 < |x - a| < \delta$, thì $|f(x) - L| < \epsilon$.
Viết bằng ký hiệu:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in X, 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon$$

Khi đó ký hiệu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$, khi $x \to a$.

Về mặt hình học: Với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho đồ thị của f khi $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ chứa trong hình chữ nhật tâm (a, L) độ dài các cạnh $2\delta \times 2\epsilon$.

Nhận xét. Các nhận xét sau xem như bài tập:

• Định nghĩa theo ngôn ngữ epsilon-delta ở trên của Cauchy tương đương với định nghĩa theo ngôn ngữ dãy của Heine:

$$\forall x_n \in X \setminus \{a\}, \lim_{n\to\infty} x_n = a \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

• Ta có: $\lim_{x\to a} f(x) = L \ \Leftrightarrow \ \lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$.

• Giới hạn nếu có là duy nhất.

• Tiêu chuẩn Cauchy: *Tồn tại* $\lim_{x\to a} f(x)$ *khi và chỉ khi*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x, x' \in X, 0 < |x-a| < \delta, 0 < |x'-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

Ví dụ.

a) Chứng minh bằng định nghĩa $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$: Với $\epsilon > 0$ bé tùy ý, chọn $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Khi đó với mọi x mà $|x-0| < \delta$ suy ra $|x^2 - 0| < \delta^2 = \epsilon$

b) Không tồn tại $\lim_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$. Dựa vào mệnh đề phủ định của định nghĩa giới hạn theo dãy và tính duy nhất của giới hạn, ta tìm 2 dãy, chẳng hạn $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $x'_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, cùng tiến về 0, nhưng 2 dãy $\sin\dfrac{1}{x_n} = \sin 2n\pi = 0$, $\sin\dfrac{1}{x'_n} = \sin(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$ không tiến về cùng giới hạn khi $n \to \infty$.

c) Hàm có thể không xác định tại a, nhưng có giới hạn tại đó:

$f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ có $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, vì $|f(x) - 0| = |x\sin\dfrac{1}{x}| \leq |x| \to 0$, khi $x \to 0$.

d) Hàm xác định tại a, nhưng có $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$:

$f(x) = [1 - |x|]$ có $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$

2.3 Tính chất cơ bản. *Cho* $f, g, \varphi : X \to \mathbf{R}$ *và* a *là điểm tụ của* X. *Gỉa sử* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *và* $\lim_{x\to a} g(x) = M$. *Khi đó*

(1) **Tính bảo toàn các phép toán:**

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = L \pm M \quad \lim_{x\to a} fg(x) = LM \quad \lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{L}{M} \ (\textit{ gỉa thiết } M \neq 0)$$

(2) **Tính bảo toàn thứ tự:** *Nếu gỉa thiết thêm* $f(x) \leq g(x)$ *với mọi* x *ở một lân cận của* a, *thì* $L \leq M$.

(3) **Tính kẹp (sandwich):** *Nếu gỉa thiết thêm* $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ *với mọi* x *ở một lân cận của* a *và* $L = M$, *thì* $\lim_{x\to a} \varphi(x) = L$.

(4) **Giới hạn hợp (đổi biến):** *Giả sử* $\lim_{x\to a} f(x) = L, \lim_{y\to L} g(y) = A$, *và tồn tại* $\delta > 0$ *sao cho khi* $0 < |x-a| < \delta$ *thì* $f(x) \neq L$. *Khi đó* $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = \lim_{y\to L} g(y) = A$.

Chứng minh: Dùng định nghĩa giới hạn theo dãy và tính chất của giới hạn dãy số. □

Bài tập: Cho $f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$. Chứng minh $\lim_{x\to 0} g(f(x)) \neq \lim_{y\to 0} g(y)$.
Điều này có mâu thuẫn với 2.3 (4) ?

2.4 Giới hạn các hàm sơ cấp. *Nếu f là hàm sơ cấp và a thuộc miền xác định của nó, thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Chứng minh: Do các tính chất (1) và (4) nêu trên, ta chỉ cần chứng minh cho hàm số sơ cấp cơ bản.

$\lim\limits_{x\to a} e^x = e^a$: Khi $|x| \leq 1$, ta có $\left|\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n - 1\right| \leq |x|(e-1)$.

Khi $n \to +\infty$, ta có $|e^x - 1| \leq |x|(e-1)$. Vậy $\lim\limits_{x\to 0} |e^x - 1| = 0$, hay $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$.

Suy ra, khi đổi biến $u = x - a$, ta có

$$\lim_{x\to a} e^x = \lim_{x\to a} e^{x-a}e^a = \lim_{u\to 0} e^u e^a = e^a$$

$\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$: Ta có $0 \leq |\sin t| \leq |t|$. Suy ra

$|\sin x - \sin a| = |2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}| \leq 2|\dfrac{x-a}{2}| \to 0$, khi $x \to a$.

Các giới hạn của hàm $\ln x$ và $\arctan x$ suy từ tính liên tục của hàm ngược (sẽ được chứng minh ở phần sau). □

Hệ qủa. *Nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ và $\neq 1$, và $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, thì*

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

2.5 Giới hạn một phía. Cho $f : X \to \mathbf{R}$.

L gọi là **giới hạn phải** (t.ư. **trái**) của $f(x)$ khi x tiến về a nếuu

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : |f(x) - L| < \epsilon, \forall x \in X, 0 < x - a < \delta \quad (\text{ t.ư. } \; 0 < a - x < \delta)$$

Khi đó có thể dùng các ký hiệu

$$L = f(a+) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) \quad (\text{ t.ư. } L = f(a-) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x))$$

Trong định nghĩa trên phải giả thiết $(a, a+\delta) \cap X \neq \emptyset$ (t.ư. $(a-\delta, a) \cap X \neq \emptyset$) với mọi $\delta > 0$.

Ví dụ.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}$ sign $(x) = 1$ còn $\lim\limits_{x\to 0^-}$ sign $(x) = -1$

b) $\lim\limits_{x\to n^+} [x] = n$, còn $\lim\limits_{x\to n^-} [x] = n - 1$, với $n \in \mathbf{Z}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$, còn $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{x-1}$ không tồn tại vì miền xác định của hàm không chứa các điểm $x < 1$

Nhận xét. Tồn tại $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ khi và chỉ khi tồn tại $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Bài tập: Chứng minh nếu f đơn điệu trên (a, b), thì tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ với mọi $x_0 \in (a, b)$

2.6 Giới hạn vô cùng - Giới hạn ở vô cùng. Có thể mở rộng các khái niệm trên khi $a = \pm\infty$ hay $L = \pm\infty$.
Một lân cận của $+\infty$ là tập dạng $(R, +\infty)$, một lân cận của $-\infty$ là tập dạng $(-\infty, -R)$, với $R > 0$ nào đó.
Ta có các định nghĩa

$$\begin{array}{lll}
\lim\limits_{x\to a} f(x) & = +\infty & \Leftrightarrow \ \forall E > 0, \exists \delta > 0 : f(x) > E, \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \\
\lim\limits_{x\to a} f(x) & = -\infty & \Leftrightarrow \ \forall E > 0, \exists \delta > 0 : f(x) < -E, \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \\
\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) & = L & \Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0, \exists R > 0 : |f(x) - L| < \epsilon, \forall x \in X, x > R \\
\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) & = L & \Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0, \exists R > 0 : |f(x) - L| < \epsilon, \forall x \in X, x < -R
\end{array}$$

Bài tập: Nêu các giả thiết cho điểm a đối với X ở các định nghĩa trên.
Bài tập: Nêu định nghĩa cho các ký hiệu sau:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Bài tập: Nêu định nghĩa cho các ký hiệu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$

Ví dụ.
a) Với $p > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^p} = +\infty$.
b) Với $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.
c) Với $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$.
d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

2.7 Dạng vô định. Trong nhiều trường hợp ta không thể dùng tính chất tổng, hiệu, tích, thương để tính giới hạn vì các phép toán không có nghĩa, gọi là các **dạng vô định**:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Khi đó ta phải tìm các phương pháp khác nhau để tính gọi là **khử dạng vô định**.

Ví dụ. Một phương pháp để khử dạng vô định là nhân lượng liên hiệp.
a) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2-1}\right)$ (dạng vô định $\infty - \infty$)
Ta nhân lượng liên hiệp, để khử dạng vô định:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2-1}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+7} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+7} - \sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+7) - (x^2-1)}{\sqrt{x^2+7} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2+7} + \sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

b) Tính $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ (dạng vô định $\dfrac{0}{0}$)

Ta nhân lượng liên hiệp của tử và của mẫu, để khử dạng vô định:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\frac{(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)}\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt[3]{1}^2+\sqrt[3]{1}+1)} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Ví dụ. Một số giới hạn cơ bản cần biết:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$.

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x} = p$.

Chứng minh: a) Khi $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$, ta có $|\sin x|<|x|<|\tan x|$.

Suy ra $1<\left|\dfrac{x}{\sin x}\right|<\dfrac{1}{|\cos x|}$. Áp dụng tính chất sandwich ta có giới hạn cần tìm.

b) Cho (x_n) là dãy tiến đến $+\infty$. Đặt $n_k=[x_k]$. Ta có $\dfrac{1}{n_k+1}\le\dfrac{1}{x_k}\le\dfrac{1}{n_k}$.

Suy ra $\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}\le\left(1+\dfrac{1}{x_k}\right)^{x_k}\le\left(1+\dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$.

Từ $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k = e$ và tính chất sandwich, suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$.

Đổi biến và áp dụng giới hạn vừa chứng minh, ta có

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y} = \lim_{y\to+\infty}(\frac{y}{y-1})^y = \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}(1+\frac{1}{y-1}) = e$$

Tương tự, ta có $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to\infty}(1+\dfrac{1}{y})^y = e$.

c) Đổi biến và áp dụng b) ta có

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln(\lim_{x\to0}(x+1)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1$$

d) Đổi biến $u=a^x-1$, $x=\log_a(u+1)=\dfrac{\ln(u+1)}{\ln a}$. Từ c) ta có

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{u\to0}\frac{u\ln a}{\ln(u+1)} = \ln a$$

e) Đổi biến và áp dụng c), d) ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^p-1}{x} &= \lim_{x\to0}\frac{e^{p\ln(1+x)}-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^{p\ln(1+x)}-1}{p\ln(1+x)}\frac{p\ln(1+x)}{x}\\ &= \lim_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}\lim_{x\to0}\frac{p\ln(1+x)}{x} = \ln e.p = p\end{aligned}$$

Ví dụ. Áp dụng các giới hạn trên.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{(x-3)\frac{3x}{x-3}} = \lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{u\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-3}} = e^3$

Bài tập: Từ các giới hạn trên, tính: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin lx}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$.

2.8 Ký hiệu o và O. Cho $a\in\mathbf{R}$ hay $a=\pm\infty$.
Để so sánh các hàm số tại lân cận a, người ta thường dùng các ký hiệu sau:

$f(x)\sim g(x)$ khi $x\to a$, nếuu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, và nói $f(x)$ và $g(x)$ là **tương đương**.

$f(x)=o(g(x))$ khi $x\to a$, nếuu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, và nói $f(x)$**vô cùng bé so với** $g(x)$.

$f(x)=O(g(x))$ khi $x\to a$, nếuu $\exists C>0: |f(x)|\le C|g(x)|$, khi x thuộc lân cận a.

Vậy $f(x)=o(1)$, khi $x\to a \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.
$f(x)=O(1)$, khi $x\to a \;\Leftrightarrow\; f(x)$ bị chặn ở lân cận a.
$f(x)=g(x)+o(g(x))$, khi $x\to a \;\Leftrightarrow\; f(x)\sim g(x)$ khi $x\to a$.

Chú ý. Để ý $o(g(x))$ và $O(g(x))$ là ký hiệu để chỉ lớp hàm, không là hàm cụ thể. Thay vì viết $f(x)\in o(g(x))$, theo thói quen người ta viết $f(x)=o(g(x))$.

Bài tập: $o(g(x))-o(g(x))=\,?\quad O(g(x))-O(g(x))=\,?$

Có thể dùng so sánh để tính giới hạn:

Bài tập: Chứng minh khi $x\to a$ ta có:
Nếu $f(x)\sim f_1(x)$, $g(x)\sim g_1(x)$, thì $f(x)g(x)\sim f_1(x)g_1(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}\sim\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.
Tìm ví dụ $f(x)\sim f_1(x)$, $g(x)\sim g_1(x)$, nhưng $f(x)+g(x)\not\sim f_1(x)+g_1(x)$.

Bài tập: Chứng minh khi $x\to a$ ta có:
Nếu $f(x)=o(\varphi(x))$, $g(x)=o(\varphi(x))$, thì $f(x)\pm g(x)=o(\varphi(x))$.
Nếu $f(x)=O(\varphi(x))$, $g(x)=O(\varphi(x))$, thì $f(x)+g(x)=O(\varphi(x))$.
Nếu $f(x)=o(\varphi(x))$ và g bị chặn thì $f(x)g(x)=o(\varphi(x))$.
Nếu $f(x)=O(\varphi(x))$ và g bị chặn thì $f(x)g(x)=O(\varphi(x))$.

Thường các hàm mẫu để so sánh là: $(x-a)^n, e^x, \ln x$.

Ví dụ. Khi $x \to 0$, từ các ví dụ trước ta có các so sánh:

$$\begin{array}{lcl}
(1+x)^\alpha & = & 1+\alpha x+o(x) \\
e^x & = & 1+x+o(x) \\
\ln(1+x) & = & x+o(x) \\
\sin x & = & x+o(x) \\
\cos x & = & 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x)
\end{array}
\quad \text{hay} \quad
\begin{array}{lcl}
(1+x)^\alpha & \sim & 1+\alpha x \\
e^x & \sim & 1+x \\
\ln(1+x) & \sim & x \\
\sin x & \sim & x \\
\cos x & \sim & 1-\dfrac{x^2}{2}
\end{array}$$

Ví dụ. Khi $x \to +\infty$, ta có:

$$\begin{array}{lcll}
(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)^{\frac{1}{m}} & \sim & a_n^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n}{m}} & (a_n \neq 0) \\
\dfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m} & \sim & \dfrac{a_nx^n}{b_mx^m} & (a_n, b_m \neq 0) \\
\log_a x = o(x^n) & & & (a>1, n>0) \\
x^n = o(a^x) & & & (a>1, n>0)
\end{array}$$

Ví dụ. Có thể dùng so sánh tương đương để đưa giới hạn về dạng đơn giản.
a) Để tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 2x}$, ta so sánh $\sqrt{1+x}-1 \sim \dfrac{x}{2}$ và $\sin 2x \sim 2x$ khi $x \to 0$.
Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x/2}{2x} = \dfrac{1}{4}$.
b) Để tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x+\tan^3 x}$, ta so sánh $\ln(1+\sin x) \sim \ln(1+x)$ và $x+\tan^3 x \sim x+x^3 \sim x$ khi $x \to 0$.
Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x+\tan^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Ví dụ. Với $n \in \mathbf{N}$, khi n đủ lớn, theo công thức Stirling, ta có

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad \text{suy ra } n! = O(n^n), \ a^n = o(n!).$$

3. Hàm số liên tục.

3.1 Định nghĩa. Cho f là hàm xác định trên một tập X chứa a. Hàm f gọi là **liên tục tại** a nếuu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Như vậy f liên tục tại a, tương đương với một trong các điều sau

- Hàm f xác định tại a, tồn tại $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, và $L = f(a)$.

- Ngôn ngữ epsilon-delta: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)-f(a)| < \epsilon$

- Ngôn ngữ dãy: Mọi dãy (x_n) trong X mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Ký hiệu $C(X)$ tập mọi hàm liên tục tại mọi điểm thuộc X.

Hàm f gọi là **liên tục phải tại** a nếuu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
Hàm f gọi là **liên tục trái tại** a nếuu $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
Nhận xét. f liên tục tại a khi và chỉ khi f liên tục trái và liên tục phải tại a.

Một hàm không liên tục tại a gọi là hàm **gián đoạn tại** a.

Mệnh đề. *Các hàm số sơ cấp là liên tục trên miền xác định của chúng.*

Chứng minh: Suy từ giới hạn các hàm sơ cấp. □

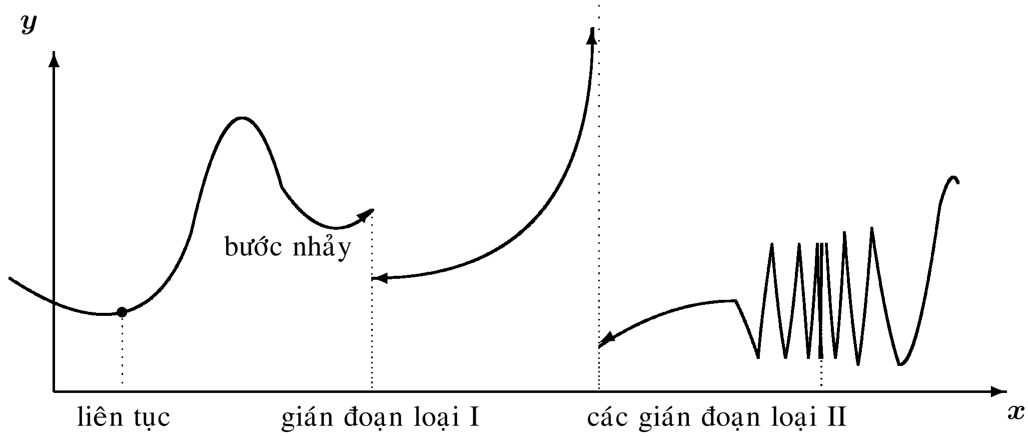
Ví dụ.
a) Hàm $f(x) = \dfrac{1}{x}$ gián đoạn tại 0 vì không xác định tại đó.
b) Hàm $f(x) = \operatorname{sign} x$ tuy xác định tại 0, nhưng gián đoạn tại đó, vì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0) = 0$.
c) Hàm $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, nếu $x \neq 0$; và $f(0) = L$. Do $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, nên f liên tục tại 0 nếu và chỉ nếu $1 = f(0) = L$.
d) Hàm $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, nếu $x \neq 0$; $f(0) = L$. Không thể có giá trị L nào để f liên tục tại 0, vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$.
e) Hàm Dirichlet

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \text{ hữu tỉ} \\ 1 & \text{nếu} \quad x \text{ vô tỉ} \end{cases}$$

không liên tục tại mọi điểm. Thật vậy với a hữu tỉ khi đó $f(a) = 0$, và do tính trù mật của tập sô vô tỉ trên $\mathbf{R}$, tồn tại dãy (x_n) gồm toàn số vô tỉ hội tụ về a, nhưng $f(x_n) = 1$ không hội tụ về $f(a) = 0$. Tương tự lập luận cho a là vô tỉ.

Bài tập: Xét tính liên tục của hàm $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ nếu $x \neq 0$; $f(0) = 0$ và hàm phần nguyên $g(x) = [x]$.

Hàm f gọi là **có gián đoạn loại I tại** a nếuu tồn tại $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a^-)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$, nhưng có "bước nhảy" $|f(a^+) - f(a^-)| \neq 0$.
Hàm gọi là **có gián đoạn loại II tại** a nếu nó có gián đoạn tại a nhưng không là gián đoạn loại I.



Bài tập: Xét các hàm ở ví dụ trên có gián đoạn thuộc loại nào.
Bài tập: Chứng minh một hàm đơn điệu trên $[a, b]$ chỉ có thể có gián đoạn loại I.

3.2 Tính chất.
(1) *Tổng, hiệu, tích, thương (với điều kiện mẫu khác* 0*) của các hàm liên tục tại* a *là hàm liên tục tại đó.*
(2) *Nếu* f *liên tục tại* a *và* g *liên tục tại* $f(a)$*, thì hàm hợp* $g \circ f$ *liên tục tại* a*.*
(3) *Nếu* f *liên tục tại* a *và* $f(a) > L$*, thì* $f(x) > L$ *ở lân cận* a*, i.e. tồn tại* $\delta > 0$ *sao cho* $f(x) > L$ *với mọi* x *mà* $|x - a| < \delta$*.*

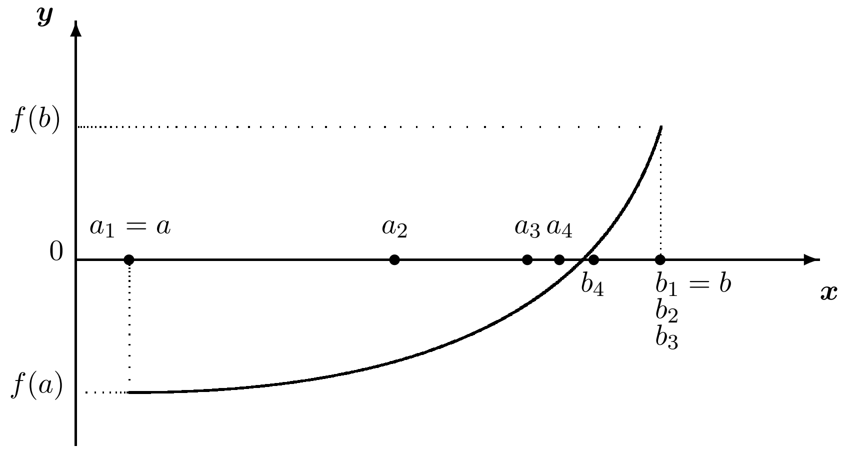
Chứng minh: (1) và (2) suy từ các tính chất của giới hạn hàm.
(3) suy từ định nghĩa: Với $\epsilon = \dfrac{f(a) - L}{2}$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho khi $|x - a| < \delta$, thì $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$. Suy ra khi đó $f(x) > f(a) - \epsilon = \dfrac{f(a) + L}{2} > \dfrac{L + L}{2} = L$ □

Ví dụ. Cho f và g là các hàm liên tục tại a. Khi đó $|f|, \max(f, g), \min(f, g)$ là liên tục tại a. Thật vậy, $|f|$ là hợp của hàm f và hàm $x \mapsto |x|$ (là hàm liên tục tại mọi điểm). Ngoài ra, ta có $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ nên tính liên tục suy từ tính chất trên.

Phần còn lại của chương này đề cập đến 3 định lý cơ bản của hàm liên tục trên khoảng.

Về mặt trực quan, định lý sau phát biểu là nếu một liên tục trên một khoảng, thì nó có đồ thị là đường liền nét (không có bước nhảy). Một cách chính xác, ta có

3.3 Định lý giá trị trung gian (Bolzano-Cauchy). *Cho* f *liên tục trên* $[a, b]$*.*
(1) *Nếu* $f(a)$ *và* $f(b)$ *trái dấu nhau, thì tồn tại* $c \in (a, b)$ *sao cho* $f(c) = 0$*.*
(2) *Tổng quát hơn, nếu* γ *nằm giữa* $f(a), f(b)$*, thì tồn tại* $c \in (a, b)$ *sao cho* $f(c) = \gamma$*.*



Chứng minh: (1) Không mất tính tổng quát, giả sử $f(a) < 0 < f(b)$. Ta dùng phương pháp chia đôi để tìm nghiệm c của phương trình $f(c) = 0$:
Chia đôi đoạn $[a, b]$ bởi điểm $t = \dfrac{a+b}{2}$. Nếu $f(t) = 0$, thì $c = t$ là giá trị cần tìm. Còn 2 trường hợp:
- Nếu $f(t)f(a) < 0$, thì đặt $a_1 = a, b_1 = t$.
- Nếu $f(t)f(b) < 0$, thì đặt $a_1 = t, b_1 = b$.
Khi đó $f(a_1)$ và $f(b_1)$ trái dấu nhau. Lặp lại cách chia đôi $[a_1, b_1]$ như trên. Tiếp tục quá trình này, thì hoặc sau hữu hạn bước ta tìm được giá trị c mà $f(c) = 0$, hoặc ta có một dãy các đoạn lồng nhau $[a_n, b_n], n \in \mathbf{N}$, mà $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ và $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. Theo nguyên lý dãy đoạn lồng nhau tồn tại $a_n < c < b_n, \forall n \in \mathbf{N}$. Ta chứng minh $f(c) = 0$.
Do $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$, khi $n \to \infty$, nên $\lim a_n = \lim b_n = c$. Do f liên tục tại c và tính bảo toàn thứ tự, nên $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$ và $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \ge 0$. Vậy $f(c) = 0$.
(2) Xét $F(x) = f(x) - \gamma$. Khi đó F liên tục trên $[a, b]$ và $F(a)F(b) \le 0$. Áp dụng (1) ta có c sao cho $F(c) = f(c) - \gamma = 0$, i.e. $f(c) = \gamma$. □

Nhận xét. Phương pháp chia đôi ở chứng minh trên cho phép tìm nghiệm gần đúng của hàm liên tục trên một đoạn.
Bài tập: Tính gần đúng $\sqrt{2}$ với sai số 10^{-1}, bằng cách tìm nghiệm $x^2 - 2 = 0$ trên $[1, 2]$.

Hệ qủa. *Nếu hàm f liên tục trên $[a, b]$ và a, b là hai nghiệm liên tiếp của $f(x) = 0$, thì f không đổi dấu trên (a, b).*

Hệ qủa. *Nếu hàm f liên tục và đơn điệu tăng (giảm) trên $[a, b]$, thì tồn tại hàm ngược f^{-1} liên tục trên $[f(a), f(b)]$ (trên $[f(b), f(a)]$)*

Chứng minh: Rõ ràng khi f đơn điệu trên $[a, b]$, thì nó là song ánh từ $[a, b]$ lên $f[a, b]$. Do định lý trên $f[a, b]$ là một khoảng và do tính đơn điệu các đầu mút của khoảng đó phải là $f(a), f(b)$. Như vậy tồn tại $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$.

Để chứng minh tính liên tục của f^{-1} tại $y_0 \in [c,d]$, cho (y_n) là dãy tiến về y_0. Đặt $x_0 = f^{-1}(y_0)$ và $x_n = f^{-1}(y_n)$. Ta cần chứng minh $x_n \to x_0$. Giả sử phản chứng là có một dãy con (x_{n_k}) tiến về $x' \neq x_0$. Do f đơn ánh, $f(x') \neq f(x_0)$. Mặt khác, do f liên tục $f(x_{n_k}) \to f(x')$. Nhưng dãy $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y_0 = f(x_0)$, mâu thuẫn. □

Ví dụ.
a) Mọi đa thức bậc lẻ đều có nghiệm (thực). Thật vậy, cho $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, với $a_n \neq 0$ và n lẻ. Do $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\operatorname{sign}(a_n)\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \operatorname{sign}(a_n)\infty$, nên tồn tại $a < 0 < b$ sao cho $f(a)$ và $f(b)$ trái dấu nhau. Theo định lý giá trị trung gian tồn tại $c \in (a,b)$ để $f(c) = 0$, i.e. c là nghiệm của $f(x) = 0$.
b) Nếu $f : [a,b] \to [a,b]$ liên tục, thì tồn tại $c : f(c) = c$ (điểm c gọi là **điểm bất động của** f). Thật vậy, xét hàm $F(x) = f(x) - x$. F liên tục trên $[a,b]$ và $F(a) = f(a) - a \geq 0$ còn $F(b) = f(b) - b \leq 0$. Theo định lý giá trị trung gian tồn tại $c \in [a,b]$, $F(c) = f(c) - c = 0$, i.e. $f(c) = c$.

3.4 Định lý max min (Weierstrass). *Nếu f là hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$, thì f bị chặn và đạt* max *và* min *trên đoạn đó, i.e. tồn tại $\alpha,\beta \in [a,b]$ sao cho* $f(\alpha) = \max\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ $f(\beta) = \min\{f(x) : a \leq x \leq b\}$

Chứng minh: Giả sử phản chứng là f không bị chặn. Khi đó với mọi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại $x_n \in [a,b]$ mà $|f(x_n)| > n$. Do dãy (x_n) bị chặn, theo định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại dãy con $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ hội tụ về $c \in [a,b]$. Do f liên tục, ta có $|f(c)| = \lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$ vô lý.
Từ tính bị chặn các giá trị $M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ và $m = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ là hữu hạn. Ta chứng minh tồn tại α,β sao cho $f(\alpha) = M$, $f(\beta) = m$. Theo tính chất của sup, với mọi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại $x_n \in [a,b]$ sao cho $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leq M$. Lại theo định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại dãy con (x_{n_k}) hội tụ về α. Từ tính liên tục của f và tính sandwich khi cho $k \to \infty$, ta có $f(\alpha) = M$.
Việc chứng minh tồn tại β sao cho $f(\beta) = m$ tiến hành tương tự (bài tập). □

Bài tập: Chứng minh hàm $\arctan x$ có supremum là $\dfrac{\pi}{2}$ và infimum là $-\dfrac{\pi}{2}$, nhưng không có $\max, \min$ trên $\mathbf{R}$.

3.5 Liên tục đều. Hàm f gọi là **liên tục đều trên tập** X nếuu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X, |x - x'| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

Nhận xét. Để hiểu rõ hơn tính liên tục đều ta so sánh với tính liên tục:
• Chỉ nói đến tính liên tục đều trên một tập chứ không tại một điểm.
• Tính liên tục đều trên X suy ra tính liên tục trên X.
• Tính liên tục không suy ra tính liên tục đều. Ví dụ hàm $f(x) = \dfrac{1}{x}$ là liên tục nhưng không liên tục đều trên $(0,+\infty)$. Để chứng minh f không liên tục đều trên X, có thể dùng mệnh đề phủ định của định nghĩa liên tục đều

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0 : \exists x, x' \in X, |x - x'| < \delta \ , \ |f(x) - f(x')| \geq \epsilon$$

Cụ thể, ta tìm được $\epsilon = 1$, với mọi $0 < \delta < 1$, tìm được $x_\delta = \delta, x'_\delta = \dfrac{\delta}{2} \in (0, +\infty)$ tuy $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$, nhưng $|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| = \dfrac{1}{\delta} \geq \epsilon = 1$

• Trong định nghĩa về tính liên tục đều trên X, δ chỉ phụ thuộc ϵ, mà không phụ thuộc $x \in X$. Điều này khác cơ bản với định nghĩa liên tục tại a, ở đó δ phụ thuộc vào a, i.e. khi a thay đổi thì δ thay đổi.

Bài tập: Chứng minh hàm $f(x) = \dfrac{1}{x}$ liên tục tại a bằng ngôn ngữ ϵ-δ. Chứng tỏ với $\epsilon > 0$ cố định, $\delta > 0$ là phụ thuộc a. Cụ thể, a càng gần 0, thì δ càng phải bé.

3.6 Định lý về tính liên tục đều (Cantor). *Nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì f liên tục đều trên đoạn đó*

Chứng minh: Giả sử phản chứng f không liên tục đều trên $[a, b]$. Khi đó tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $n \in \mathbf{N}$, tìm được $x_n, x'_n \in [a, b]$, sao cho

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \quad \text{nhưng} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon \qquad (*)$$

Do (x_n) là dãy bị chặn, nên tồn tại dặy con (x_{n_k}) hội tụ về $c \in [a, b]$. Do $|x'_{n_k} - c| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| \to 0$, khi $k \to \infty$ ta cũng có (x'_{n_k}) hội tụ về c. Do f liên tục $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(c)$. Vậy $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})|$ bé tùy ý khi k đủ lớn. Điều này mâu thuẫn với $(*)$. $\square$

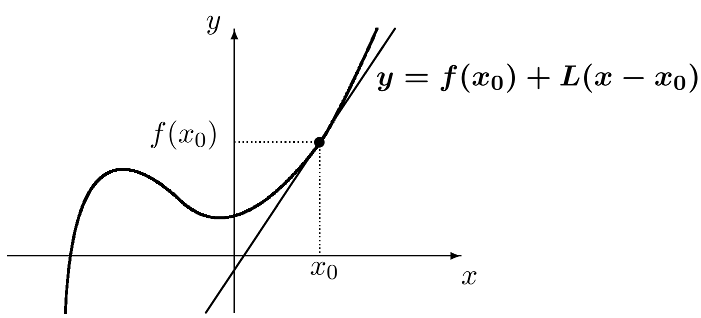
III. Phép tính vi phân

Chương này nghiên cứu tính chất của các hàm có thể xấp xỉ bởi hàm tuyến tính tại lân cận một điểm nào đó: các hàm khả vi. Khái niệm này cho phép nghiên cứu sâu hơn tính chất địa phương của một hàm: tính đơn điệu, cực trị, tiệm cận,... ; hay hình dạng của một đồ thị, một đường cong, ... Để xấp xỉ hàm bởi hàm đa thức bậc cao hơn, chương này sẽ nêu lên công thức Taylor, được xem là công thức nền tảng của phép tính vi phân hàm 1 biến.

1. Đạo hàm - Vi phân

1.1 Hàm khả vi. Cho $f : (a,b) \to \mathbf{R}$. Hàm f gọi là **khả vi tại** x_0 nếuu f có thể xấp xỉ bởi một hàm bậc nhất tại x_0, i.e. tồn tại $L \in \mathbf{R}$ sao cho

$$\begin{array}{llll} & f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + L\Delta x + o(\Delta x)\ , & & \text{khi } \Delta x \to 0 \\ \text{hay là} & f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0)\ , & & \text{khi } x \to x_0 \end{array}$$



Mệnh đề. *Hàm f khả vi tại x_0 khi và chỉ khi giới hạn sau đây tồn tại và hữu hạn*

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Chứng minh: Suy trực tiếp từ định nghĩa. □

Nhận xét. Nếu f khả vi tại x_0, thì f liên tục tại x_0. Điều đó suy từ

$$f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + o(x - x_0) \to 0, \text{ khi } x \to x_0$$

Một hàm liên tục không nhất thiết khả vi, chẳng hạn hàm $f(x) = |x|$ ở ví dụ phần sau.

1.2 Đạo hàm - Vi phân. Hàm f gọi là **có đạo hàm** tại x_0 nếuu giới hạn ở mệnh đề trên tồn tại (có thể bằng vô cùng). Khi đó giới hạn đó gọi là **đạo hàm của f tại** x_0 và ký hiệu là $f'(x_0)$, i.e.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Khi $f'(x_0)$ hữu hạn, hàm tuyến tính $L : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \Delta x \mapsto L(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$,
gọi là **vi phân của** f **tại** x_0 và ký hiệu là $df(x_0)$.

Nhận xét. Nếu $f(x) = x$, thì $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} = 1, \forall x_0 \in \mathbf{R}$.
Suy ra $dx(\Delta x) = \Delta x$. Vậy có thể viết

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \quad \text{hay} \quad f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Đôi khi ta cần khái niệm **đạo hàm phía phải (trái) của** f **tại** x_0,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nhận xét. Tồn tại $f'(x_0)$ khi và chỉ khi tồn tại $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ và $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Ví dụ.
a) Hàm $f(x) = e^x$ có đạo hàm $f'(x) = e^x$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x$$

b) Hàm $f(x) = \sin x$ có đạo hàm $f'(x) = \cos x$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \end{aligned}$$

c) Hàm $f(x) = |x|$ liên tục, không khả vi tại $x_0 = 0$ và có đạo hàm 2 phía tại đó:
$\dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ không tồn tại giới hạn khi $\Delta x \to 0$.
Lấy giới hạn theo phía, ta có

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1 \quad f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

d) Hàm $f(x) = \sqrt[3]{x}$ không khả vi tại 0 và có đạo hàm $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \infty$.

1.3 Ý nghĩa của đạo hàm. Cho hàm $y = f(x)$ xác định ở lân cận x_0. Với mỗi giá trị x gần x_0, ký hiệu

$\Delta x = x - x_0$ gọi là **số gia của biến tại** x_0,
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ gọi là **số gia của hàm** tương ứng.

• **Xấp xỉ bậc 1**: hàm f khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$. Khi đó vi phân $f'(x_0)\Delta x$ là xấp xỉ tuyến tính tốt nhất cho Δy ở lân cận x_0.
Nói cách khác, hàm $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ là xấp xỉ bậc 1 tốt nhất của hàm $y = f(x)$ tại lân cận x_0.

• **Hệ số góc của tiếp tuyến**: Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc xét các điểm $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ trên đồ thị hàm f. Khi đó tỉ số

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = Độ dốc của M_0M = tang góc tạo bởi M_0M và Ox.

Nếu f khả vi tại x_0, thì đồ thị của nó có tiếp tuyến tại M_0 và

$f'(x_0) =$ Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị của f tại $(x_0, f(x_0))$.

Phương trình tiếp tuyến đó là $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

• **Vận tốc**: Nếu $f(x)$ biểu diễn quãng đường đi của chuyển động tại thời điểm x, thì tỉ số

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = Vận tốc trung bình trong thời gian Δx.

Nếu f khả vi tại x_0, thì $f'(x_0)$ là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm x_0.

• Một cách tổng quát, đạo hàm $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ biểu thị sự biến thiên của đại lượng $y = f(x)$ theo đại lượng x tại x_0.

1.4 Qui tắc tính.

• *Giả sử f, g là các hàm khả vi tại x_0. Khi đó các hàm $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (với điều kiện $g(x_0) \neq 0$) là khả vi tại x_0 và ta có*

(1) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

(2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(3) $(\dfrac{f}{g})'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$

• *Giả sử f khả vi tại x_0 và g khả vi tại $f(x_0)$. Khi đó $g \circ f$ khả vi tại x_0 và*

(4) $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

• *Giả sử f đơn điệu thực sự, i.e. tăng hay giảm, và $f'(x_0) \neq 0$. Khi đó hàm ngược f^{-1} khả vi tại $y_0 = f(x_0)$ và*

(5) $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Chứng minh: Công thức (1) suy từ tính chất giới hạn của tổng, hiệu.
Công thức (2) suy từ

$$f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) = (f(x+\Delta x) - f(x))g(x+\Delta x) + f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))$$

Chia hai vế cho Δx, rồi cho $\Delta x \to 0$, ta có công thức.

Tương tự, công thức (3) suy từ

$$\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(f(x+\Delta x)-f(x))g(x) - f(x)(g(x+\Delta x)-g(x))}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

Để chứng minh (4) ta có

$$g(f(x+\Delta x)) - g(f(x)) = \frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{f(x+\Delta x)-f(x)}(f(x+\Delta x)-f(x))$$

Đặt $y = f(x), \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, thay vào

$$\frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = \frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Theo giả thiết khi $\Delta x \to 0$, thì $\Delta y \to 0$ và ta có (4).
Công thức (5) suy từ (4) vì $f^{-1}\circ f(x) = x$, nên $(f^{-1})'(y_0)f'(x_0) = 1$, với $y_0 = f(x_0)$ □

Nhận xét. Công thức (4) gọi là **công thức đạo hàm hợp** và trong thực hành thường được viết dưới dạng sau

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dx} \quad \text{hay} \quad g'_x = g'_y\, y'_x$$

trong đó $g = g(y)$ và $y = f(x)$.

1.5 Đạo hàm các hàm sơ cấp. Với điều kiện biểu thức có nghĩa và x là biến, ta có

$$\begin{array}{lcll}
(\mathrm{x}^\alpha)' & = & \alpha x^{\alpha-1} & \\
(a^x)' & = & a^x \ln a & \text{Đặc biệt: } (e^x)' = e^x \\
(\log_a x)' & = & \dfrac{1}{x\ln a} & \text{Đặc biệt: } (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \\
(\sin x)' & = & \cos x & \\
(\cos x)' & = & -\sin x & \\
(\tan x)' & = & \dfrac{1}{\cos^2 x} & \\
(\operatorname{cotan} x)' & = & -\dfrac{1}{\sin^2 x} & \\
(\arcsin x)' & = & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
(\arccos x)' & = & -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
(\arctan x)' & = & \dfrac{1}{1+x^2} & \\
(\operatorname{arccot} x)' & = & -\dfrac{1}{1+x^2} &
\end{array}$$

Chứng minh: Suy từ qui tắc tính và đạo hàm hàm e^x và $\sin x$ (bài tập) □

Ví dụ. Tính đạo hàm theo công thức.
a) Cho $f(x) = e^{ax}\sin bx$. Khi đó

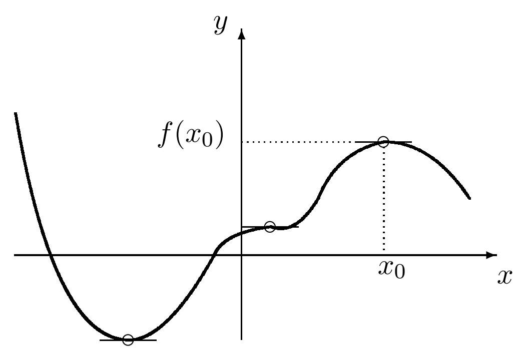
$$f'(x) = (e^{ax})'\sin bx + e^{ax}(\sin bx)' = ae^{ax}\sin bx + e^{ax}b\cos bx = e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$

b) Cho $g(x) = x^x$. Để tính $g'(x)$, xét $\ln g(x) = x \ln x$.
Theo công thức đạo hàm hợp $\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.
Suy ra $g'(x) = g(x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

2. Các định lý cơ bản

2.1 Định lý Fermat. *Gỉa sử $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ khả vi tại x_0. Nếu f đạt cực trị tại x_0, thì $f'(x_0) = 0$*

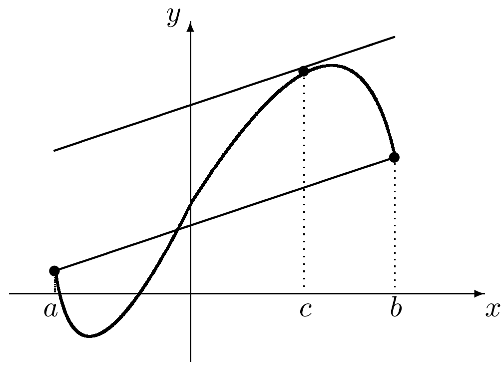
Chứng minh: Gỉa sử f đạt cực đại tại x_0 (đối với cực tiểu thì xét $-f$).
Khi đó $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$, khi Δx đủ bé.
Vậy $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ và $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$.
Do $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, nên $f'(x_0) = 0$. □



Nhận xét. Khi $f'(x_0) = 0$ chưa chắc f đạt cực trị tại x_0. Chẳng hạn hàm $f(x) = x^3$.

2.2 Định lý Rolle. *Nếu f là hàm liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) và $f(a) = f(b)$, thì tồn tại $c \in (a,b) :\ f'(c) = 0$*

Chứng minh: Do f liên tục trên đoạn $[a,b]$, nên tồn tại $x_1, x_2 \in [a,b]$ sao cho:
$f(x_1) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) = M$ và $f(x_2) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) = m$.
Nếu $m = M$, thì f là hàm hằng nên $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a,b)$.
Nếu $m < M$, do $f(a) = f(b)$ nên x_1 hoặc x_2 khác hai đầu mút a, b. Theo định lý Fermat $f'(x_1) = 0$ hoặc $f'(x_2) = 0$. □



2.3 Định lý gía trị trung bình. *Nếu f, g là các hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b), thì tồn tại $c \in (a, b)$:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Đặc biệt, tồn tại $c \in (a, b)$: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Chứng minh: Xét hàm $F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$. Dễ kiểm tra F liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $F(a) = F(b) = 0$. Theo định lý Fermat tồn tại $c \in (a, b)$: $F'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$. □

Đẳng thức cuối trong định lý trên gọi là **công thức số gia hữu hạn** và có thể viết dưới dạng

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x)\Delta x,$$

trong đó $x_0, x_0 + \Delta x \in (a, b)$ và $0 < \theta < 1$ phụ thuộc vào $x_0, \Delta x$.
Suy ra $|f(x) - f(y)| \leq \sup\limits_{c \in (a,b)} |f'(c)||x - y|$, với mọi $x, y \in [a, b]$.

Ví dụ.
a) Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, thì f là hàm hằng trên (a, b).
b) Nếu $f'(x) = g'(x), \forall x \in (a, b)$, thì $f - g$ là hàm hằng, i.e. $f = g+$ const.
c) Do $(\sin x)' = \cos x$ có trị tuyệt đối bị chặn bởi 1, nên ta có bất đẳng thức

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Tương tự, $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2} \leq 1$, nên

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbf{R}$$

3. Đạo hàm cấp cao - Công thức Taylor.

Đạo hàm cấp 1 cho phép xấp xỉ hàm f tại lân cận một điểm x_0 bởi hàm bậc 1. Hỏi có thể xấp xỉ bởi đa thức bậc cao hơn, với độ sai số bé hơn? i.e.

$$f(x_0 + \Delta x) = \text{ Đa thức bậc } n \text{ theo } \Delta x + o(\Delta x^n) \ , \quad \text{khi } \Delta x \to 0$$

Để trả lời câu hỏi trên, ta cần khái niệm sau.

3.1 Đạo hàm cấp cao. Nếu f khả vi tại mọi điểm thuộc (a, b), thì f' là hàm xác định trên (a, b). Nếu f' khả vi tại x_0, thì ta có **đạo hàm cấp hai** $f''(x_0) = (f')'(x_0)$.
Định nghĩa đệ qui **đạo hàm cấp n của f tại x_0**:

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0), f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0)$$

Vi phân cấp n của f tại x_0, được ký hiệu và định nghĩa

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) dx^n$$

Vậy vi phân cấp n tại một điểm là đa thức thuần nhất bậc n và $f^{(n)}(x_0) = \dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.
Ký hiệu $C^n(a, b)$ không gian các hàm f khả vi đến cấp n trên (a, b) và $f^{(n)}$ liên tục trên (a, b). Khi đó ta nói f **thuộc lớp** C^n.

3.2 Qui tắc tính. *Gỉa sử f, g là các hàm khả vi đến cấp n tại x_0 và α là số. Khi đó*
(1) $(f + g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$.
(2) $(\alpha f)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0)$.
(3) $(fg)^{(n)}(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$ *(công thức Leibniz).*

Chứng minh: Bằng phương pháp qui nạp, (Bài tập) □

Bài tập: Chứng minh các công thức đạo hàm cấp n sau:

$$\begin{array}{lcl} (x^\alpha)^{(n)} & = & \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) x^{\alpha - n} \\ (a^x)^{(n)} & = & a^x (\ln a)^n \\ (\log_a x)^{(n)} & = & \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a} \\ (\sin ax)^{(n)} & = & a^n \sin(ax + n\frac{\pi}{2}) \end{array}$$

3.3 Công thức Taylor. *Gỉa sử f có đạo hàm đến cấp $n + 1$ trên (a, b) chứa x_0. Khi đó với mọi $x \in (a, b)$, tồn tại $0 < \theta < 1$ sao cho*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Chứng minh: Khi x cố định, gọi M là số thỏa

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + M(x - x_0)^{n+1}.$$

Xét hàm $h(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)(x-t)^k - M(x-t)^{n+1}$.
Ta có $h(x) = h(x_0) = 0$. Theo định lý Rolle tồn tại $c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1$, sao cho $h'(c) = 0$, i.e.

$-\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n + (n+1)M(x-c)^n = 0$, hay $M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ □

Nhận xét. Đa thức sau gọi là **đa thức Taylor bậc n của f tại x_0**:

$$T_n f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

• Nếu f có đạo hàm đến cấp n, thì f có thể xấp xỉ bởi đa thức Taylor bậc n, i.e. ta có biểu diễn

$$f(x) = \; T_n f(x) \; + \; R_n(x)$$

với **phần dư Taylor bậc** n: $R_n(x) = f(x) - T_n f(x)$.
Biểu diễn trên còn gọi là **khai triển Taylor** của hàm f tại x_0.
• Dễ kiểm tra $R(x_0) = R'(x_0) = \cdots = R^{(n)}(x_0) = 0$. Từ đó (bằng qui nạp) ta có **phần dư dạng Peano**:

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{khi } x \to x_0$$

• Nếu f có đạo hàm đến cấp $n + 1$, thì ta có **phần dư dạng Lagrange**:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \text{với } \theta \in (0, 1)$$

Hơn nữa, nếu đạo hàm cấp $n + 1$ bị chặn bởi M, thì công thức trên cho phép đánh gía cụ thể sai số của phần dư

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

Chú ý. Điều kiện $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$, không suy ra f có đạo hàm cấp 2 tại x_0. Chẳng hạn, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 D(x)$, trong đó D là hàm Dirichlet.

3.4 Công thức Maclaurin. Công thức Taylor tại $x_0 = 0$ còn gọi là **công thức Maclaurin**. Sau đây là các khai triển của một số hàm sơ cấp.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n \cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1}\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \\
&\qquad \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}
\end{aligned}$$

Ví dụ. Khi khai triển hàm sơ cấp có thể dùng hợp của các khai triển trên.
Khai triển đến cấp 6, tại lân cận 0:

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \frac{1}{3!}(-x^2)^3 + O((-x^2)^4) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + O(x^8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}(x^3)^2 + O((x^3)^3) = 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8}x^6 + O(x^9)$$

4. Một số ứng dụng

4.1 Tính xấp xỉ. Nếu f khả vi đến cấp $n+1$, thì có thể xấp xỉ $f(x)$ bởi đa thức Taylor bậc n tại x_0:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)\Delta x + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n$$

Với sai số

$$|R_n(\Delta x)| = \frac{|f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)|}{(n+1)!}|\Delta x|^{n+1} = o(\Delta x^n)$$

Ví dụ.
a) Để tính xấp xỉ $\sqrt[n]{1+x}$ khi x bé, có thể dùng vi phân của hàm $\sqrt[n]{1+x}$ tại $x_0 = 1$

$$\sqrt[n]{1+x} \approx \sqrt[n]{1} + (\sqrt[n]{1+x})'|_{x=1}x \;=\; 1 + \frac{1}{n}x$$

Muốn sai số bé hơn cần khai triển cấp cao hơn.
b) Để tính e với sai số $< \epsilon$, dùng công thức xấp xỉ

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

với sai số $|R_n| = |\dfrac{e^\theta}{(n+1)!}| \leq \dfrac{3}{(n+1)!}$.
Vậy nếu yêu cầu $\epsilon = 10^{-3}$, ta cần tính đến $n = 6$.
Còn nếu yêu cầu $\epsilon = 10^{-6}$, cần $n = 9$.

Ví dụ. Dùng khai triển Taylor tính giới hạn.
a) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - x^2\ln(1 + \dfrac{1}{x}))$.
Ta có $\ln(1+\dfrac{1}{x})) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$.
Vậy $x - x^2\ln(1+\dfrac{1}{x}) = \dfrac{1}{2} + x^2 o(\dfrac{1}{x^2}) \to \dfrac{1}{2}$, khi $x \to +\infty$.
b) Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} - \sqrt{1-x^2+x^3}}{\ln(1+x^2)}$.
Ta có $e^{x^2} - \sqrt{1-x^2+x^3} = 1 + x^2 + o(x^3) - (1 + \dfrac{1}{2}(-x^2+x^3) + o(x^2) = \dfrac{3}{2}x^2 + o(x^2)$.
và $\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$.
Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} - \sqrt{1-x^2+x^3}}{\ln(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x^2}{x^2} = \dfrac{3}{2}$.

Nhận xét. Các giới hạn ở ví dụ trên có thể dùng qui tắc L'Hospital sau đây (tuy nhiên tiến hành qui tắc này ở ví dụ b) sẽ phức tạp hơn).

4.2 Qui tắc L'Hospital. Để tính giới hạn các dạng vô định $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$ các qui tắc sau rất hữu ích.

Mệnh đề. *Cho f, g là các hàm khả vi trên khoảng I có thể trừ tại $x_0 \in I$.*
(1) *Nếu $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ và $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, thì*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(2) *Nếu $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ và $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, thì*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(với điều kiện các giới hạn vế phải tồn tại, có thể bằng vô cùng).

Chứng minh: (1) Trường hợp $x_0 \neq \pm\infty$: Do gỉa thiết có thể thác triển f, g thành hàm liên tục tại x_0 khi cho $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
Theo định lý giá trị trung bình, tồn tại c nằm giữa x_0, x: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
Khi $x \to x_0$, thì $c \to x_0$ và ta có đẳng thức cần chứng minh.
Trường hợp $x_0 = \pm\infty$: Áp dụng trường hợp trên cho hàm $F(t) = f(\dfrac{1}{t}), G(t) = g(\dfrac{1}{t})$.
(2) Chứng minh tương tự. $\square$

Ví dụ.

a) Với $p > 0$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^p} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{px^{p-1}} = 0$

b) Với $p > 0$, dùng qui tắc L'Hospital nhiều lần đến khi $p \leq k$, ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{px^{p-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)x^{p-k}}{e^x} = 0$$

Nhận xét. Có thể đưa các dạng vô định về dạng $\dfrac{0}{0}$ hay $\dfrac{\infty}{\infty}$ theo cách sau:

Dạng $0.\infty$: dùng biến đổi $fg = \dfrac{f}{1/g}$

Dạng $\infty-\infty$: dùng biến đổi $f - g = \dfrac{1}{1/f} - \dfrac{1}{1/g} = \dfrac{1/g - 1/f}{1/fg}$

Các dạng $1^\infty, 0^0, \infty^0$: khi đó $f^g = e^{g\ln f}$, vậy lấy log ta có $g\ln f$ là dạng $0.\infty$.

Ví dụ.

a) Với $p > 0$, ta có $\lim\limits_{x\to0^+} x^p\ln x = \lim\limits_{x\to0a+}\dfrac{\ln x}{x^{-p}} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1/x}{-px^{-p-1}} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^p}{-p} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{2\cos x + \sin x} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to0^+} x^x = \lim\limits_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x} = e^0 = 1$

d) $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-x-1}}$ (dạng 1^∞)

Đặt $y = (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-x-1}}$. Khi đó $\ln y = \dfrac{\ln(1+x^2)}{e^x - x - 1}$ (dạng $\dfrac{0}{0}$)

Ta có $\lim\limits_{x\to0}\ln y = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\overline{\dfrac{2x}{1+x^2}}}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+x^2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{e^x} = 2$

Vậy $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-x-1}} = e^2$.

Nhận xét. Bài tập sau cho thấy một số trường hợp không thể dùng qui tắc L'Hospital

Bài tập: Cho $f(x) = \sin^2 x\sin\frac{1}{x}$, $g(x) = e^x - 1$. Chứng minh tồn tại $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, nhưng không tồn tại $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4.3 Khảo sát tính đơn điệu.

Mệnh đề. *Cho f là hàm khả vi trên một khoảng I. Khi đó*

(1) *f không giảm (t.ư. không tăng) trên I khi và chỉ khi $f' \geq 0$ (t.ư. $f' \leq 0$) trên I.*

(2) *Nếu $f' > 0$ (t.ư. $f' < 0$) trên I, thì f tăng (t.ư. giảm) trên I.*

Chứng minh: Dựa vào định nghĩa và định lý gía trị trung bình. □

Ví dụ. Dùng tính đơn điệu của hàm số có thể chứng minh một số bất đẳng thức,

chẳng hạn
a) $e^x > 1 + x \quad (x \neq 0)$
b) $(x^p + y^p)^{\frac{1}{p}} > (x^q + y^q)^{\frac{1}{q}} \quad (0 < x, y$ và $0 < p < q)$
Để chứng minh a) ta xét sự biến thiên của hàm $f(x) = e^x - x$.
Ta có $f'(x) = e^x - 1$, nên $f'(x) < 0$ khi $x < 0$ và $f'(x) > 0$ khi $x > 0$. Suy ra f giảm trên $(-\infty, 0)$ và tăng trên $(0, +\infty)$. Vậy $f(x) = e^x - x > f(0) = 1$ với mọi $x \neq 0$. Đó là bất đẳng thức cần chứng minh.
Bất đẳng thức b) tương đương với tính đơn điệu giảm của hàm $g(t) = (x^t + y^t)^{\frac{1}{t}}$ trên $(0, +\infty)$.
Để chứng minh ta cần xét dấu đạo hàm $g'(t)$. Ta có $\ln g(t) = \dfrac{\ln(x^t + y^t)}{t}$.
Tính toán ta có $\dfrac{g'(t)}{g(t)} = \dfrac{-x^t \ln(\frac{x^t+y^t}{x^t}) - y^t \ln(\frac{x^t+y^t}{y^t})}{t^2(x^t + y^t)}$.
Suy ra $g'(t) < 0, \forall t > 0$. Vậy g giảm trên $(0, +\infty)$.

4.4 Khảo sát cực trị. Để giải bài toán cực trị có thể dùng 2 kết qủa sau:

Mệnh đề. *Cho f là hàm khả vi trên khoảng I. Khi đó*
(1) *Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0, thì f đạt cực đại tại x_0, i.e. $f(x_0) \geq f(x)$ với mọi x thuộc lân cận x_0.*
(2) *Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua x_0, thì f đạt cực tiểu tại x_0, i.e. $f(x_0) \leq f(x)$ với mọi x thuộc lân cận x_0.*

Chứng minh: Suy từ sự biến thiên của hàm số theo đạo hàm. □

Mệnh đề. *Cho f là hàm khả vi đến cấp n trên một khoảng I chứa x_0. Nếu $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ và $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Khi đó*
(1) *Nếu n chẵn và $f^{(n)}(x_0) > 0$, thì f đạt cực tiểu tại x_0.*
(2) *Nếu n chẵn và $f^{(n)}(x_0) < 0$, thì f đạt cực đại tại x_0.*
(3) *Nếu n lẻ, thì f không đạt cực trị tại x_0.*

Chứng minh: Dựa vào công thức Taylor:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \Delta x^n + o(\Delta x^n)$$

□

Ví dụ.
a) Chứng minh $e^x > 1 + x \quad (x \neq 0)$: Xem ví dụ ở phần trước.
b) Cho $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$. Ta có
$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x, \quad f'(0) = 0$
$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, \quad f''(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad f^{(3)}(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad f^{(4)}(0) = 4 > 0$
Vậy hàm đạt cực tiểu tại $x = 0$.
c) Tìm $\max, \min$ biểu thức $x\sqrt{1 - x^2}$.
Hàm $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$, xác định với mọi $x \in [-1, 1]$. Dựa vào định lý Weierstrass

hàm f liên tục trên đoạn $[-1,1]$ nên tồn tại $\max, \min$ trên đó. Theo định lý Fermat các điểm nghi ngờ là cực trị là các điểm x mà $f'(x) = 0$, hay 2 điểm đầu mút $f(-1), f(1)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

So sánh các giá trị $f(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{2}, f(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\dfrac{1}{2}, f(-1) = 0, f(+1) = 0$. Suy ra

$$f_{\max} = f = f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}, \quad f_{\min} = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$$

d) Tìm hình trụ có thể tích lớn nhất khi diện tích mặt S không đổi:
Gọi r là bán kính đáy và h là chiều cao hình trụ. Khi đó thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ là

$V = \pi r^2 h$ và $s = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h$.

Theo giả thiết s là hằng, nên $h = \dfrac{s - 2\pi r^2}{2\pi r}$. Vậy bài toán là cần tìm giá trị lớn nhất của hàm

$V(r) = \pi r^2 \left(\dfrac{s-2\pi r^2}{2\pi r}\right) = \dfrac{1}{2} r(s - 2\pi r^2)$, với $r \in [0, \sqrt{\dfrac{s}{\pi}}]$

Ta có $V'(r) = \dfrac{1}{2}(s - 6\pi r^2)$, $V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\dfrac{s}{6\pi}}$.

Do V' đổi dấu từ dương sang âm khi r qua $\sqrt{\dfrac{s}{6\pi}}$, nên $V(r)$ đạt $\max$ tại đó. Khi đó $h = 2\sqrt{\dfrac{s}{6\pi}} = 2r$. Vậy thể tích V đạt giá trị lớn nhất khi chiều cao bằng đường kính hình trụ.

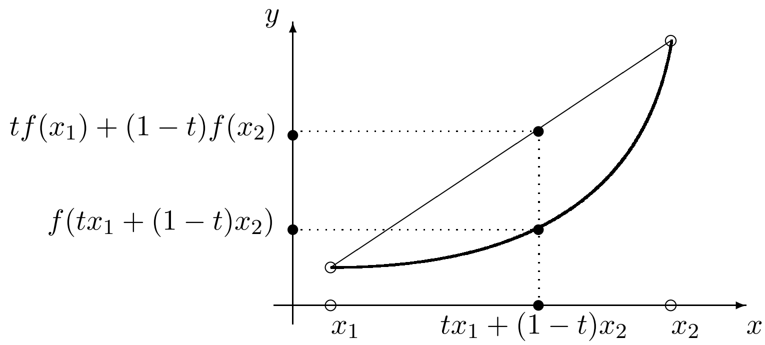
4.5 Khảo sát tính lồi, lõm. Cho f là hàm xác định trên khoảng I.
Hàm f gọi là **lồi** nếuu với mọi $x_1, x_2 \in I$ và $0 < t < 1$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Hàm f gọi là **lõm** nếuu với mọi $x_1, x_2 \in I$ và $0 < t < 1$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Về mặt hình học f là hàm lồi khi và chỉ khi mọi cung của đồ thị f nằm dưới dây cung chắn cung đó. Tương tự, f là lõm khi và chỉ khi mọi cung của đồ thị f nằm trên dây cung chắn cung đó.



Điểm $M(x_0, f(x_0))$ gọi là **điểm uốn** của đồ thị hàm f nếuu M phân các giữa phần lồi và phần lõm của đồ thị hàm f.

Bài tập: Bằng qui nạp chứng minh **bất đẳng thức Jensen**: Nếu f lồi trên I, thì với mọi $x_1, \cdots, x_n \in I,\ t_1, \cdots, t_n \geq 0, t_1 + \cdots + t_n = 1$,

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n)$$

Viết cách khác, với mọi $x_1, \cdots, x_n \in I,\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \geq 0$,

$$f(\frac{\alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}) \leq \frac{\alpha_1f(x_1) + \cdots + \alpha_nf(x_n)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n},$$

Mệnh đề. *Cho f có đạo hàm cấp 1 hay 2 trên khoảng I. Khi đó*
(1) *f lồi (lõm) nếu và chỉ nếu f' không giảm (không tăng).*
(2) *f lồi (lõm) nếu và chỉ nếu $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$).*
(3) *f lồi (lõm) nếu và chỉ nếu đồ thị f nằm trên (dưới) tiếp tuyến bất kỳ.*

Chứng minh: Chỉ cần chứng minh cho trường hợp f lồi. Theo mối quan hệ giữa tính đơn điệu và đạo hàm ta có (1) $\Leftrightarrow$ (2). Còn (2) $\Leftrightarrow$ (3) suy từ tính chất hình học của tính lồi.
Trước hết ta có tính chất tương đương của tính lồi:
Hàm f lồi trên I khi và chỉ khi với mọi $x_1, x_2 \in I$ mà $x_1 < x_2$ và $x = tx_1 + (1-t)x_2 \in (x_1, x_2)$, ta có

$$\begin{array}{rlcl} f(x) = & f(tx_1 + (1-t)x_2) & \leq & tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \\ \Leftrightarrow & (x_2 - x_1)f(x) & \leq & (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2) \\ \Leftrightarrow & (x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x) & \leq & (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2) \\ \Leftrightarrow & (x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) & \leq & (x - x_1)(f(x_2) - f(x)) \\ \Leftrightarrow & \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} & \leq & \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \end{array}$$

Bây giờ chứng minh (1).
($\Rightarrow$) Nếu f lồi trên I, thì theo bất đẳng thức trên, khi cho $x \to x_1$, $x \to x_2$ rồi so sánh, ta có $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, i.e. f' không tăng.
($\Leftarrow$) Nếu f' không tăng, thì với $x_1, x_2 \in I$ và $x_1 < x_2$, khi $x \in (x_1, x_2)$, ta có

$\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1)$, với c_1 nào đó trong (x_1, x)

$\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2)$, với c_2 nào đó trong (x, x_2)

Từ đó tính không tăng của f', suy ra $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.

Theo tính chất tương đương nêu trên, suy ra f là lồi trên I. □

Hệ quả. *Cho f có đạo hàm cấp trên khoảng I. Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua x_0, thì $M(x_0, f(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị hàm f.*

Ví dụ.

a) Hàm $f(x) = \ln x$ là lõm trên $I = (0, \infty)$. Từ bất đẳng thức Jensen với $x_1, \cdots x_n > 0$, ta có

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n}$$

Suy ra trung bình cọng lớn hơn trung bình nhân:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

Thay x_k bởi x_k^{-1} vào bất đẳng thức trên, ta có trung bình nhân lớn hơn trung bình điều hòa:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}, \quad (x_1, \cdots, x_n > 0)$$

c) Hàm $f(x) = e^x$ là hàm lồi. Từ bất đẳng thức Jensen ta có

$$e^{t_1x_1 + t_2x_2} \leq t_1 e^{x_1} + t_2 e^{x_2}, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}, t_1, t_2 > 0, t_1 + t_2 = 1$$

Đặt $a = e^{t_1x_1}, b = e^{t_2x_2}$ và $p = t_1^{-1}, q = t_2^{-1}$, ta có

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (a, b > 0, p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

Bài tập: Áp dụng bất đẳng thức trên chứng minh với $p, q > 0$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, ta có:

Bất đẳng thức Hőlder:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Bất đẳng thức Minkowski:

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p}$$

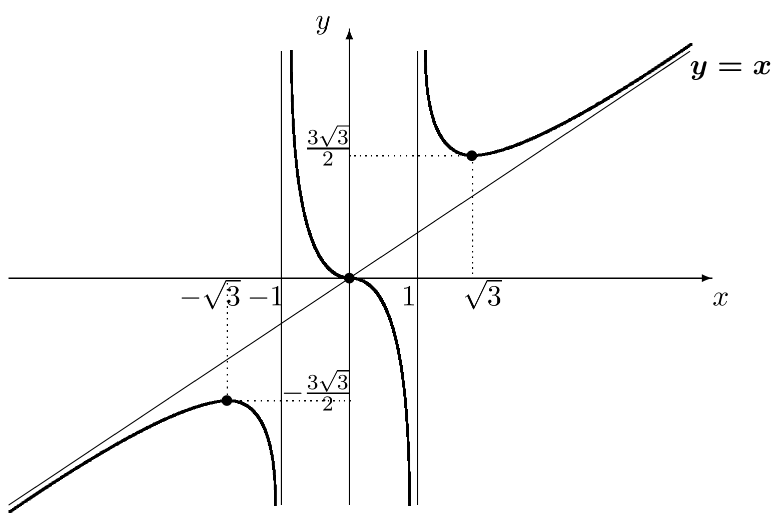
4.6 Khảo sát hàm số. Khảo sát một hàm số nhằm mục đích có những thông tin căn bản và cần biết về hàm số đó. Thường những thông tin đó là: miền xác định, tính chẵn lẻ, chu kỳ, chiều biến thiên, cực trị, tính lồi lõm, tiệm cận và một số giá trị đặc biệt của hàm số đó. Những thông tin này được thể hiện trực quan qua đồ thị của hàm số.

Ví dụ. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Miền xác định: $\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$.
$y' = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$
$y'' = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Tiệm cận đứng: $x = \pm 1$, vì $\lim\limits_{x\to\pm 1} y = \infty$.
Tiệm cận xiên: $y = x$, vì $y = x + \dfrac{x}{x^2-1}$ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y - x) = 0$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty\|\|^{+\infty}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty\|\|^{+\infty}$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:



Bài tập: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{x^2-1}$

4.7 Vẽ đường cong.

• Đường cong cho bởi phương trình tham số.

Cho phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in (\alpha, \beta)$

Trong hệ trục Descartes, phương trình trên xác định đường cong

$$C = \{(x, y) : x = x(t), y = y(t), \alpha < t < \beta\}$$

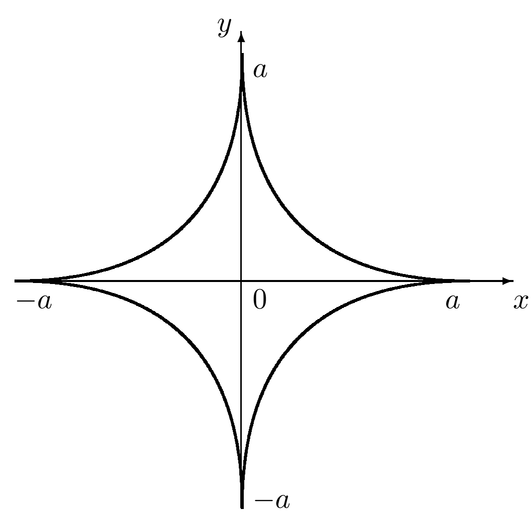
Chẳng hạn, $x = a\cos t, y = a\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, xác định đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$.
Để vẽ C, ta tiến hành tương tự như việc khảo sát đồ thị hàm số, với các chú ý sau:
Theo công thức đạo hàm hợp, đạo hàm của y theo x: $\dfrac{dy}{dx}(x(t)) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.
Tiệm cận đứng là $x = a$, nếu $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ và $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$.
Tiệm cận ngang là $y = b$, nếu $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ và $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$.
Tiệm cận xiên là $y = kx + b$, nếu $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$ và $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = k$ và $\lim\limits_{t\to t_0}(y(t) - kx(t)) = b$.

Ví dụ. Đường Astroid: $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t\ \ (a > 0)$.

Miền xác định là $\mathbf{R}$. Các hàm có chu kỳ 2π, nên chỉ xét trên một chu kỳ $t \in [0, 2\pi]$.
$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t,\ x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$.
$y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t,\ \ y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$.
Do $-a \le x(t), y(t) \le a$, nên đồ thị không có tiệm cận.
Bảng biến thiên:

t	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
x'	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0
x	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	a
y'	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
y	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	0

Đồ thị:



Nhận xét.
• Ta có $\dfrac{y'}{x'}(x(t)) = -\tan t$, vậy tiếp tuyến với đồ thị nằm ngang khi $t = 0, \pi, 2\pi$ và thẳng đứng khi $t = \pi/2, 3\pi/2$.
• Khử t, ta có phương trình đường Astriod: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Ví dụ. Lá Descartes: $x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$.

Đổi biến $y = tx$, thay vào: $x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0$.
Ta có phương trình tham số của đường cong:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad (t \neq -1)$$

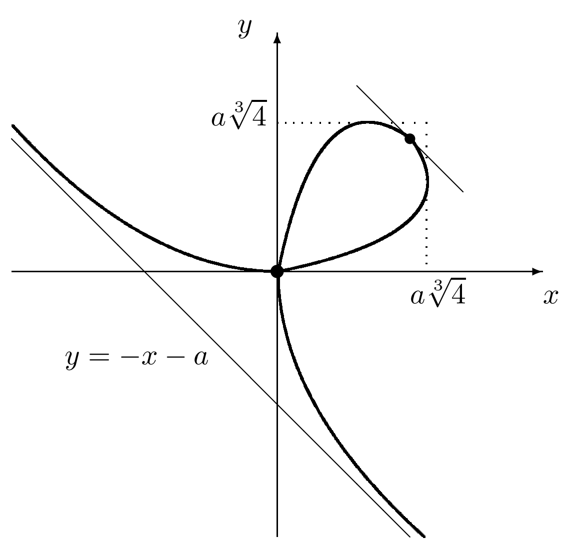
$$x' = 3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}, \quad x' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$y' = 3a\frac{2-t^3}{(1+t^3)^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow t = 0, \sqrt[3]{2}$$

Tiệm cận: khi $t \to -1$, $x \to \infty, y \to \infty$ và ta có $\dfrac{y}{x} \to k = -1 \quad y - kx \to -a$
Vậy đường cong tiệm cận đường thẳng $y = -x - a$.
Bảng biến thiên:

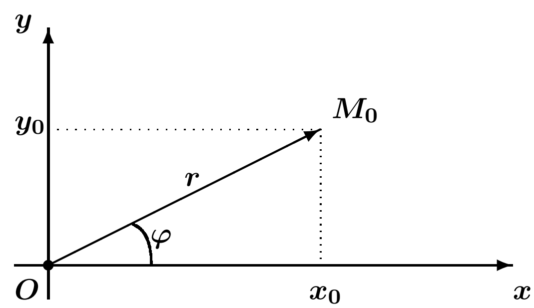
t	$-\infty$	-1		0		$1/\sqrt[3]{2}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x'	+	$\|\|$	+		+	0	$-$		$-$	
x	$0\nearrow$	$^{+\infty}\|\|_{-\infty}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0
y'	$-$	$\|\|$	$-$	0	+		+	0	$-$	
y	$0\searrow$	$_{-\infty}\|\|^{+\infty}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0

Đồ thị:



Nhận xét. Ta có $\dfrac{dy}{dx}(x(t)) = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$, vậy tiếp tuyến với đồ thị nằm ngang khi $t = 0, \sqrt[3]{2}$ và thẳng đứng khi $t = 1/\sqrt[3]{2}$.

• **Đường cong cho trong tọa độ cực.** Ngoài tọa độ Descartes, trong nhiều trường hợp người ta còn dùng **tọa độ cực** , xây dựng như sau:
Trong mặt phẳng cố định một gốc O và một nửa trục Ox. Khi đó ta có ánh xạ:
$(r,\varphi) \in \mathbf{R}_+ \times [0,2\pi)$ ứng với điểm M mà $|\vec{OM}| = r$ và $(\vec{Ox},\vec{OM}) = \varphi$
Cặp (r,φ) gọi là tọa độ cực của M, r gọi là **bán kính** , φ là **góc cực**.



Nếu (x,y) là tọa độ Descartes và (r,φ) là tọa độ cực của M, thì ta có các hệ thức:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

Bài tập: Viết tọa độ cực của các điểm có tọa độ Descartes: $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(-1,1)$, và $(-1,0)$.

Thường người ta dùng **tọa độ cực suy rộng** khi cho $\varphi \in \mathbf{R}$ ở công thức trên.

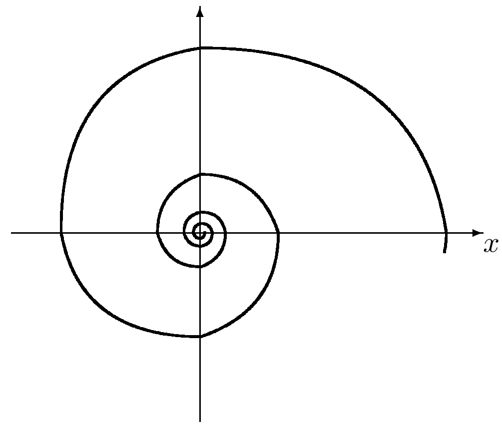
Bây giờ cho hàm số $r = r(\varphi)$, $\varphi \in \Phi$ trong tọa độ cực suy rộng. Khi đó hàm số xác định đường cong

$$C = \{M(x,y) : x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi, \ \varphi \in \Phi\}$$

Chẳng hạn, hàm hằng $r = a \quad (a > 0)$, xác định đường tròn tâm O bán kính a.
Để vẽ C có thể dùng phương pháp của đường cong cho bởi tham số φ như phần trên.
Một cách thông dụng hơn là khảo sát trực tiếp sự biến thiên của bán kính r theo góc cực φ.

Ví dụ. Đường xoắn logarithm: $r = ae^{-k\varphi} \quad (a > 0, k > 0)$.

Miền xác định: với mọi $\varphi \in \mathbf{R}$.
$r' = -ake^{-k\varphi} < 0$. Suy ra r giảm (khi φ tăng)
Đồ thị



Ví dụ. Hoa 3 cánh: $r = a \sin 3\varphi$.

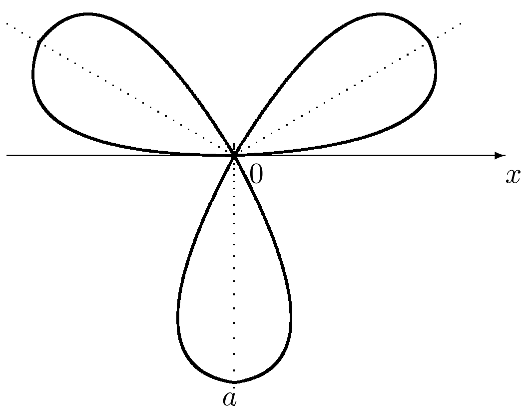
Miền xác định là $\mathbf{R}$. Hàm có chu kỳ là $2\pi/3$, hơn nữa là hàm lẻ nên chỉ cần xét $\varphi \in [0, \dfrac{\pi}{3}]$.

$r' = 3a \cos 3\varphi,\ r' = 0 \ \Leftrightarrow\ \varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

Bảng biến thiên:

φ	0		$\pi/6$		$\pi/3$
r'		$+$	0	$-$	
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0

Đồ thị



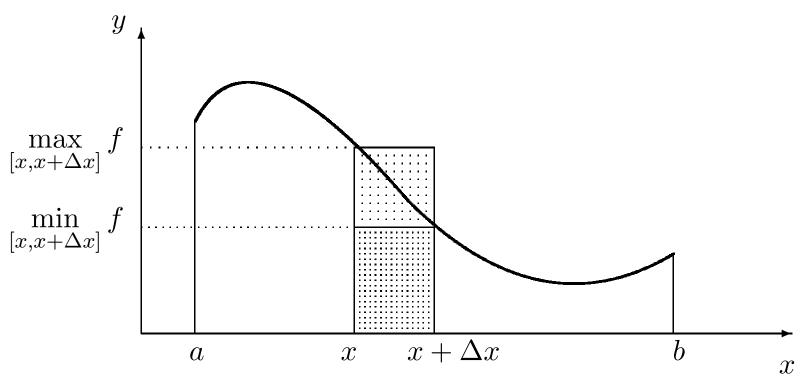
IV. Phép tính tích phân

Chương này sẽ đề cập đến một khái niệm cơ bản của giải tích: tích phân. Nó là công cụ để xét đến các tính chất toàn cục, chẳng hạn các bài toán liên quan đến kích thước như tính diện tích, thể tích, độ dài, ... , hay các kết luận với các từ "nói chung", "trung bình", "hầu hết", ... Tuy vậy khái niệm này có mối quan hệ chặt chẽ với khái niệm đạo hàm, chúng có thể xem là các phép toán ngược của nhau thông qua công thức Newton-Leibniz. Phần cuối chương sẽ nêu một số áp dụng.

Để gợi ý cho phép tính tích phân, ta có thể liên hệ đến bài toán diện tích: Cho f là hàm liên tục trên $[a,b]$ và không âm. Gọi $F(x)$ là diện tích hình giới hạn bởi f trên $[a,x]$. Khi so sánh phần diện tích trên $[x,x+\Delta x]$, với các diện tích hình chữ nhật, ta có

$$\min_{[x,x+\Delta x]} f.\Delta x \leq F(x+\Delta x) - F(x) \leq \max_{[x,x+\Delta x]} f.\Delta x$$

Khi cho $\Delta x \to 0$, ta có mối quan hệ $F'(x) = f(x)$.



Tương tự như vậy đối với mối quan hệ giữa vận tốc f và quãng đường đi F của một chuyển động theo thời gian x.

1. Nguyên hàm - Tích phân bất định

Phần này ta nghiên cứu bài toán ngược của bài toán lấy đạo hàm.

1.1 Định nghĩa. Cho $f:(a,b)\to\mathbf{R}$. Hàm F gọi là **nguyên hàm của** f nếuu

$$F'(x) = f(x) \quad \text{hay} \quad dF(x) = f'(x)dx\ ,\ \forall x \in (a,b)$$

Nhận xét. F và G là các nguyên hàm của f trên (a,b) khi và chỉ khi $F - G =$ const.

Họ mọi nguyên hàm của f gọi là **tích phân bất định của** f và ký hiệu $\displaystyle\int f(x)dx$.

Vậy nếu F là một nguyên hàm của f trên (a,b), thì $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)+C$,
trong đó C là hằng số tùy ý.
Từ định nghĩa, đạo hàm và tích phân là hai phép toán ngược của nhau:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{và} \quad \int F'(x)dx = F(x)$$

Bài toán 1. Những hàm nào có nguyên hàm?
Bài toán 2. Tìm nguyên hàm của một hàm đã cho.

Nhận xét. Ở phần sau sẽ chứng minh mọi hàm liên tục là có nguyên hàm.
Hàm $f(x) = (x\sin\dfrac{1}{x})'$ có nguyên hàm nhưng không liên tục.
Hàm $f(x) = \text{ sign}(x)$ không có nguyên hàm (tại sao?).

Bài toán đầu sẽ được xét ở phần sau. Sau đây là các qui tắc chính để tìm nguyên hàm.

1.2 Qui tắc tính.
Tính tuyến tính. *Nếu f,g có nguyên hàm trên một khoảng và $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, thì trên khoảng đó*

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx \ + \ \beta\int g(x)dx$$

Công thức đổi biến. *Nếu $x=\varphi(t)$ là hàm có đạo hàm liên tục trên khoảng J, và $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng $I=\varphi(J)$, thì*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t)$$

Công thức tích phân từng phần. *Nếu u,v là các hàm có đạo hàm liên tục trên một khoảng, thì trên đó*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Hay viết theo lối vi phân $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu.$

Chứng minh: Suy từ định nghĩa và công thức đạo hàm: tổng, tích và hợp. $\square$

Từ đạo hàm các hàm sơ cấp, tính ngược lại, ta có

1.3 Tích phân một số hàm sơ cấp. Với x thuộc một khoảng mà hàm dưới dấu tích phân xác định và C là hằng trên mỗi khoảng đó, ta có

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{x}^{\alpha}\mathrm{dx} &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)\\
\int \frac{1}{x}dx &= \ln|x| + C\\
\int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \text{Đặc biệt: } \int e^x dx = e^x + C\\
\int \sin x dx &= -\cos x + C\\
\int \cos x dx &= \sin x + C\\
\int \frac{1}{\cos^2 x}dx &= \tan x + C\\
\int \frac{1}{\sin^2 x}dx &= -\operatorname{cotan} x + C\\
\int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C\\
\int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C\\
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \arcsin\frac{x}{a} + C\\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} &= \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C\\
\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C\\
\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C
\end{aligned}$$

Bài tập: Hãy kiểm tra đạo hàm vế phải bằng hàm trong dấu tích phân ở vế trái.

Ví dụ.

a) $\displaystyle\int (2^x + \sin x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx = \int 2^x dx + \int \sin x dx - \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \cos x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$. Đổi biến $t = \dfrac{x}{a}$. Suy ra $dx = adt$.

Thay vào ta có $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\arctan t + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

c) Để tính $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, có thể đổi biến $x = a\sin t,\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Khi đó $dx = a\cos tdt$, thay vào ta có

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= a^2\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = a^2\int \cos^2 tdt\\
&= a^2\int \frac{\cos 2t+1}{2}dt = \frac{a^2}{2}(\frac{\sin 2t}{2} + t) + C = \frac{a^2}{2}(\sin t\cos t + t) + C
\end{aligned}$$

Thay $t = \arcsin\dfrac{x}{|a|}$ vào $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

d) Để tính $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$, có thể đổi biến $x = a\sinh t = a\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Khi đó $dx = a\cosh t dt$ và $x^2 + a^2 = a^2(\sinh^2 t + 1) = a^2\cosh^2 t$. Thay vào ta có

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a^2}dx &= a^2\int \cosh^2 t dt = a^2\int\left(\frac{\cosh 2t + 1}{2}\right)dt\\ &= \frac{a^2}{4}(\sinh 2t + 2t) + C = \frac{a^2}{4}(2\sinh t\cosh t + 2t) + C\end{aligned}$$

Từ phương trình $e^{2t} - \dfrac{2x}{a}e^t - 1 = 0$, ta có $t = \ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)$. Vậy

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln^x + \sqrt{x^2+a^2}| \ + \ C$$

Bài tập: Tính: $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$.

Ví dụ. Dạng $\int f^\alpha(x)f'(x)dx$, tính bằng đổi biến.
a) $\int x^2\sqrt{x^3+5} = \int (x^3+5)^{\frac{1}{2}}\dfrac{d(x^3+5)}{3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{2}{3}(x^3+5)^{\frac{3}{2}} + C$.
b) $\int \sin^4 x\cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \dfrac{\sin^5 x}{5} + C$.
c) $\int \tan x dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \dfrac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$
Bài tập: Tính: $\int (ax+b)^\alpha dx$, $\int \cos^3 x\sin x dx$, $\int$ cotan $x dx$.

Ví dụ. Các dạng $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin ax dx$, $\int P(x)\cos ax dx$,
trong đó P là đa thức, có thể dùng tích phân từng phần.
a) Tính $I_n = \int x^n \ln x dx$.
Khi $n \neq -1$, tích phân từng phần, đặt

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & \Rightarrow \ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^n dx & \quad\ \ v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\end{array}$$

Ta có $I_n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \dfrac{1}{n+1}\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$
Khi $n = -1$, $I_{-1} = \int \dfrac{\ln x}{x}dx = \int \ln x d(\ln x) = \dfrac{\ln^2 x}{2} + C$
b) Tính $I = \int (x^2+x+1)\sin x dx$. Tích phân từng phần với

$$\begin{array}{ll} u = x^2+x+1 & \Rightarrow \ du = (2x+1)dx \\ dv = \sin x dx & \quad\ \ v = -\cos x\end{array}$$

Ta có $I = -(x^2+x+1)\cos x + \int (2x+1)\sin x dx$.
Tích phân từng phần lần nữa, đặt

$$\begin{array}{lll} u = 2x+1 & \Rightarrow & du = 2dx \\ dv = \cos x dx & & v = \sin x \end{array}$$

Ta có $\int (2x+1)\sin x dx = (2x+1)\sin x - 2\int \sin x dx = (2x+1)\sin x + 2\cos x dx + C$.
Thay vào, ta có $I = -(x^2+x+3)\cos x + (2x+1)\sin x + C$.
c) Tính $A = \int e^{ax}\cos bx dx,\ B = \int e^{ax}\sin bx dx$.
Tích phân từng phần, với $dv = e^{ax}dx$, ta có

$$\begin{array}{lll} A & = & \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}B \\ B & = & \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}A \end{array}$$

Từ đó suy ra

$$A = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + \ C$$
$$B = \int e^{ax}\sin x dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + \ C$$

Nhận xét. Ta có $\int P(x)\sin ax dx = A(x)\sin ax + B(x)\cos ax + C$, với A, B là các đa thức bậc $<$ bậc P. Từ đó có thể đạo hàm 2 vế để xác định các hệ số của A, B.

Bài tập: Xác định dạng của các tích phân nêu ở đầu ví dụ. Dựa vào đó, dùng đạo hàm để tính lại các ví dụ trên.

Bài tập: Tích phân các hàm sơ cấp: $\ln x, \arctan x, \arcsin x$.

Ví dụ. Công thức qui nạp cho $I_n = I_n(a) = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad (n \in \mathbf{N})$
Ta có $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \ + \ C$.
Khi $n > 1$ có thể tích phân từng phần:

$$\begin{array}{lll} I_n & = & \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^n}dx - \frac{1}{a^2}\int \frac{x.x}{(x^2+a^2)^n}dx \\ & = & \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\right) \end{array}$$

Từ đó ta có công thức qui nạp:

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

1.4 Kỹ thuật tính tích phân các lớp hàm đặc biệt.[1]

• Tích phân hàm hữu tỉ.

Thuật toán Bernoulli tích phân hàm hữu tỉ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Bước 1: Chia đa thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$,

trong đó $M(x)$ là đa thức, bậc đa thức $P_1(x) <$ bậc đa thức $Q(x)$.

Bước 2: Phân tích mẫu thành các thừa số bậc một hay bậc hai

$$Q(x) = A(x-a)^m \cdots (x^2+px+q)^n \cdots$$

trong đó các a là các nghiệm của Q, và các p, q thỏa $p^2 - 4q < 0$.

Bước 3: Phân tích thành các phân thức hữu tỉ dạng

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \cdots \\ &+ \frac{B_1x + C_1}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2+px+q)^n} + \cdots \end{aligned}$$

trong đó các A_i, B_i, C_i có thể tìm được bằng **phương pháp hệ số bất định**[2]

Bước 4: Tính các tích phân cơ bản dạng

$$\text{I. } \frac{1}{x-a} \qquad \text{II. } \frac{1}{(x-a)^m} \qquad \text{III. } \frac{Bx+C}{x^2+px+q} \qquad \text{IV. } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} \quad (p^2-4q<0)$$

Mệnh đề. *Tích phân của hàm hữu tỉ là tổng các hàm: hữu tỉ, logarithm và arctang.*

Chứng minh: Theo Bước 1, ta có $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int M(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$.

Tích phân $\displaystyle\int M(x)dx$ là đa thức.

Các tích phân ở Bước 4 có phương pháp tính như sau:

Dạng I. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c$.

Dạng II. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + c \qquad (m \neq 1)$

Dạng III. $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (C - \frac{Bp}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q}$.

Biến đổi $x^2+px+q = (x+\dfrac{p}{2})^2 + \dfrac{4q-p^2}{4}$. Đổi biến $t = x + \dfrac{p}{2}$, đặt $a = \dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$.

Từ công thức các tích phân cơ bản suy ra

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$$

Dạng IV. $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + (C - \frac{Bp}{2})\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

Để tính tích phân cuối, biến đổi như ở dạng III. Với $t = x + \dfrac{p}{2}$, $a = \dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, ta có

[1] Phần này sinh viên tự đọc

[2] Cụ thể xem ví dụ

tích phân đã xét ví dụ ở phần trước, tính truy hồi

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2a^2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1} \\ &= \cdots \\ &= \frac{\text{Đa thức bậc } < n-1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + A\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + c \end{aligned}$$

Từ Bước 3 và các tích phân cơ bản trên, suy ra mệnh đề. □

Ví dụ.

a) Các bước tương ứng để tính $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}dx$:

Bước 1: $\dfrac{x^3+x+1}{x^3+x} = 1 + \dfrac{1}{x^3+x}$.

Bước 2: $x^3+x = x(x^2+1)$.

Bốc 3: $\dfrac{1}{x^3+x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

Để tính A, B, C, có thể tiến hành phương pháp hệ số bất định như sau:
Hoá đồng mẫu và đồng nhất tử 2 hàm hữu tỉ, ta có

$$\begin{aligned} 1 &\equiv A(x^2+1) + (Bx+C)x \\ 1 &\equiv (A+B)x^2 + Cx + A \end{aligned}$$

Vì hai đa thức bằng nhau khi và chỉ các hệ số của các bậc $1, x, x^2, \cdots$ tương ứng bằng nhau, suy ra

$$A = 1, C = 0, A+B = 0 \Leftrightarrow A = 1, B = -1, C = 0$$

Vậy $\dfrac{1}{x^3+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$

Bước 4: Dựa vào cách tính tích phân cơ bản, ta có

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}dx &= \int dx + \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{xdx}{x^2+1} \\ &= x + \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \end{aligned}$$

b) Tính $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^2}$. Các bước tương ứng:

Bước 1: đã thỏa vì bậc của tử nhỏ hơn bậc mẫu.

Bước 2: $x^5 - x^2 = x^2(x-1)(x^2+x+1)$.

Bước 3: $\dfrac{1}{x^5-x^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1} + \dfrac{Dx+E}{x^2+x+1}$.

Dùng phương pháp hệ số bất định suy ra

$$\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{0}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$$

Bước 4: Tính các tích phân dạng cơ bản, ta có

$$\int \frac{dx}{x^5-x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Bài tập: Dựa vào phương pháp nêu trên tính: $\int \frac{dx}{x^4 - x^2 - 2}$, $\int \frac{(x+1)dx}{x^4 - x^2 - 2}$, $\int \frac{x^2 dx}{x^6 - 1}$, $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$, $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+x+1)^2}$, $\int \frac{(x^5+1)dx}{x^4 - 8x^2 + 16}$.

Nhận xét. Phương pháp trên đòi hỏi phân tích đa thức thành nhân tử bất khả qui (bước 2, tương đương với việc tìm nghiệm đa thức) rất tốn thời gian. Hiện nay các hệ đại số máy tính thường dựa vào **thuật toán Hermit-Ostrogradski** mà ý tưởng cơ bản dựa vào:

Mệnh đề. *Ký hiệu*

$$\begin{array}{rcl} Q(x) & = & A(x-a)^n \cdots (x^2+px+q)^m \cdots , \\ Q_1(x) & = & A(x-a)^{n-1} \cdots (x^2+px+q)^{m-1} \cdots , \\ D(x) & = & (x-a) \cdots (x^2+px+q) \cdots \end{array}$$

Khi đó nếu $P(x)$ *là đa thức sao cho* $\deg P < \deg Q$, *thì*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{M(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

trong đó $M(x), N(x)$ *là các đa thức và* $\deg M < \deg Q_1$, $\deg N < \deg D$.

Bài tập: Tìm A, B, C, D, E sao cho

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x+1)^2} + \int (\frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}) dx$$

• **Tích phân hàm căn thức.**

(1) Dạng $\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}) dx$, ($R$ là hàm hữu tỉ, $r_1, \cdots, r_n \in \mathbf{Q}$).

Phương pháp: đổi biến $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$ với m là bội chung nhỏ nhất của mẫu các r_i.

Bài tập: Chứng minh sau khi đổi biến tích phân đa về tích phân hàm hữu tỉ.

Ví dụ. Tính $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+3} - 1)\sqrt{x+3}}$: Đổi biến $t^4 = x + 3$. Khi đó $dx = 4t^3 dt$. Thay vào tích phân ta có

$$\int \frac{t^3 dt}{(t-1)t^2} = \int \frac{tdt}{t-1} = 4(t + \ln|t-1|) + C = 4(\sqrt[4]{x+3} + \ln|\sqrt[4]{x+3} - 1|) + C$$

Bài tập: Tính $\int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$, $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx$, $\int x \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} dx$

(2) Dạng $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, ($R$ là hàm hữu tỉ).

Phương pháp đổi biến Euler:

- Nếu ax^2+bx+c vô nghiệm thực (khi đó $a>0$), thì đổi biến $t=\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}$.
- Nếu $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, thì đổi biến $t(x-x_1)=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$.

Bài tập: Chứng minh sau khi đổi biến tích phân đa về tích phân hàm hữu tỉ.
Ví dụ.
a) Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+bx+c}}$: Đổi biến $t=x+\sqrt{x^2+bx+c}$.
Khi đó $bx+c=t^2-2tx, bdx=2tdt-2tdx-2xdt, \frac{dx}{t-x}=\frac{2dt}{b+2t}$. Thay vào, ta có

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+bx+c}}=\int \frac{dt}{\frac{b}{2}+t}=\ln\left|\frac{b}{2}+x+\sqrt{x^2+bx+c}\right|+C$$

b) Tính $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$: Đổi biến $t(a-x)=\sqrt{a^2-x^2}$.
Khi đó $x=\frac{a(t^2-1)}{t^2+1}, dx=\frac{4atdt}{(t^2+1)^2}$. Thay vào tích phân ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a^2}\int \frac{2t^2+2}{t^4+1}dt &= \frac{1}{2a^2}\int\left(\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)dt\\ &= \frac{1}{a^2\sqrt{2}}(\arctan(\sqrt{2}t+1)+\arctan(\sqrt{2}t-1))+C\end{aligned}$$

trong đó $t=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.
Bài tập: Tính $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$, $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x}}$, $\int \sqrt{-x^2+4x+10}dx$

Phương pháp đổi biến lượng giác: Trước hết biến đổi

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

Đổi biến $u=x+\frac{b}{2a}$, $du=dx$. Thay vào ta có các dạng
$\int R(u,\sqrt{\alpha^2-u^2})du$, đổi biến $t=\alpha\sin u$
$\int R(u,\sqrt{\alpha^2+u^2})du$, đổi biến $t=\alpha\tan u$
$\int R(u,\sqrt{u^2-\alpha^2})du$, đổi biến $t=\frac{\alpha}{\sin u}$

Ví dụ. Tính $\int \frac{dx}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}$: Đổi biến $x=a\sin t$. Khi đó $dx=a\cos t dt$. Ta có

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}=\int \frac{a\cos tdt}{(\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t})^3}=\int \frac{a\cos tdt}{a^3\cos^3 t}=\frac{1}{a^2}\tan t+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$$

• **Tích phân hàm lượng giác.**

(1) Dạng $\int R(\sin x, \cos x)dx$, (R là hàm hữu tỉ).

Phương pháp chung: đổi biến $t = \tan\frac{x}{2}$.

Bài tập: Chứng minh sau khi đổi biến tích phân đưa về tích phân hàm hữu tỉ.

Ví dụ. Tính $\int \frac{dx}{1+\epsilon\cos x}$ $(0 < \epsilon < 1)$: Đổi biến $t = \tan\frac{x}{2}$.

Khi đó $x = 2\arctan t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Thay vào ta có

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\epsilon\cos x} &= \int \frac{2dt}{(1-\epsilon)t^2+1+\epsilon} = \frac{2}{1-\epsilon}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \\ &= \frac{2}{1-\epsilon}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\arctan t\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} + C = \frac{2}{1-\epsilon^2}\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\right) + C\end{aligned}$$

Để đỡ tích phân hàm hữu tỉ bậc cao, trong các trường hợp đặc biệt:
Khi $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, đổi biến $t = \cos x$.
Khi $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, đổi biến $t = \sin x$.
Khi $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, đổi biến $t = \tan x$.

Bài tập: Tính $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}, \int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx, \int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^3 x}$.

(2) Dạng $\int \sin^m x\cos^n x dx$.

Phương pháp: Khi m hay n lẻ, đổi biến $t = \cos x$ hay $t = \sin x$.
Khi m, n đều chẵn dùng công thức nhân đôi.

Bài tập: Tính $\int \sin^4 x\cos^5 x dx$, $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$

1.5 Chú ý. Không như việc tính đạo hàm, bài toán lấy tích phân là bài toán khó. Không có qui tắc tính tích phân tích, thương, hợp. Tuy nhiên, hiện nay các thuật toán tính tích phân bằng ký hiệu đã được phát triển và được gài đặt ở một số hệ đại số máy tính như Maple, Mathematica, $\cdots$ cho phép tính tích phân rất hiệu lực.
Để ý là tích phân lớp hàm hữu tỉ vượt ra khỏi lớp hàm hữu tỉ (phải thêm vào hàm log và arctan). Cũng cần biết người ta đã chứng minh tích phân nhiều hàm sơ cấp không là hàm sơ cấp, i.e. tích phân lớp hàm sơ cấp vượt ra khỏi lớp hàm sơ cấp. Chẳng hạn
các tích phân: $\int e^{-x^2}dx, \int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx$
các tích phân Fresnel: $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$
các tích phân nhị thức: $\int x^m(ax^n+b)^p dx$, với $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n}+p \notin \mathbf{Z}$.
các tích phân Elliptic: $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}, \int \frac{dx}{(1+hx)\sqrt{1-k^2x^2}}$
trong đó $0 < k < 1$

2. Tích phân xác định.

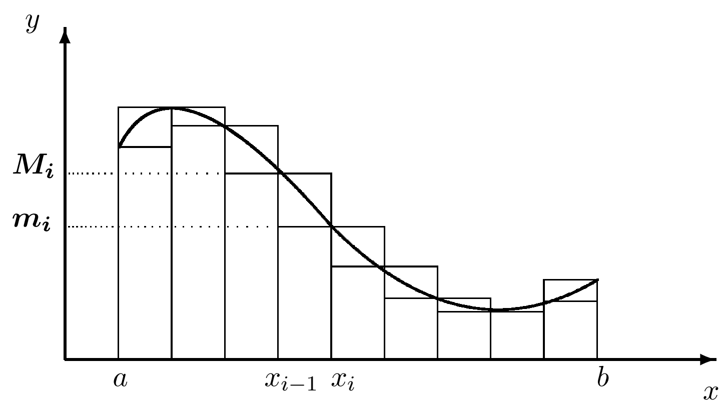
Để hiểu tích phân xác định một cách trực quan, ta nên liên hệ với bài toán tính diện tích hình phẳng (xem phần ứng dụng). Nó gồm các bước chính: chia nhỏ, lấy tổng, qua giới hạn.

2.1 Tích phân Riemann.
Một **phân hoạch** đoạn $[a,b]$ là một dãy hữu hạn các điểm $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ sao cho: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
Viết $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và $|P| = \max\{\Delta x_i : 0 \le i \le n\}$.
Gỉa sử $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ là hàm bị chặn. Với mỗi phân hoạch P như trên, đặt

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

Lập **tổng Darboux dưới:** $L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

Lập **tổng Darboux trên:** $U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$



Nhận xét. Cho các phân hoạch P, P'. Khi đó $P^* = P \cup P'$ là phân hoạch **mịn hơn** P, P', theo nghĩa là mọi đoạn chia I^* của P^* đều tồn tại các đoạn chia I, I' của P, P' sao cho $I^* \subset I, I^* \subset I'$. Khi đó

$$\inf_I f(x) \le \inf_{I^*} f(x) \le \sup_{I^*} f(x) \le \sup_{I'} f(x)$$

Suy ra

$$L(f,P) \le L(f,P^*) \le U(f,P^*) \le U(f,P')$$

Vậy tập các tổng trên và tổng dưới (theo mọi phân hoạch) là bị chặn, nên tồn tại $\sup, \inf$. Ta định nghĩa **tích phân dưới** và **tích phân trên** :

$$\underline{I}(f) = \sup_P L(f,P) \quad \text{và} \quad \overline{I}(f) = \inf_P U(f,P)$$

Ta có, $L(f,P) \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le U(f,P')$, với mọi phân hoạch P, P'.

Định nghĩa. Hàm f gọi là **khả tích (Riemann) trên** $[a,b]$, ký hiệu $f \in \mathcal{R}[a,b]$, nếuu $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. Khi đó giá trị chung đó gọi là **tích phân của** f **trên** $[a,b]$, và ký hiệu là

$$\int_a^b f \quad \text{hay} \quad \int_a^b f(x)dx$$

Từ định nghĩa ta có tiêu chuẩn thường được sử dụng sau

Tiêu chuẩn Riemann. *Hàm bị chặn f là khả tích trên $[a,b]$ khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại phân hoạch P đoạn $[a,b]$, sao cho:* $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.

Bài tập: Chứng minh: *Hàm bị chặn f là khả tích trên $[a,b]$ khi và chỉ khi tồn tại dãy phân hoạch P_n đoạn $[a,b]$, sao cho:* $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0.$ *, khi $n \to \infty$.*
Khi đó $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n).$

Ví dụ.
a) Nếu $f \equiv c$ (const), thì f khả tích và $\displaystyle\int_a^b f = c(b-a)$.
Tổng quát, nếu f là hàm bậc thang trên $[a,b]$, i.e. tồn tại phân hoạch $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ đoạn $[a,b]$, sao cho $f(x) = c_i$, khi $x \in [x_{i-1}, x_i]$, thì f khả tích và
$\displaystyle\int_a^b f = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$.
b) Hàm Dirichlet sau đây là không khả tích Riemann trên $[0,1]$:

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ 1 & \text{nếu } x \text{ vô tỉ} \end{cases}$$

Với mọi phân hoạch P, $L(\mathcal{D},P) = 0$, $U(\mathcal{D},P) = 1$.

2.2 Tổng Riemann. Cho $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ là hàm bị chặn. Với mỗi phân hoạch $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ của $[a,b]$ và mỗi họ các điểm $\xi_P = \{c_1, \cdots, c_n\}$, với $x_{i-1} \le c_i \le x_i$, ta có **tổng Riemann**:

$$S(f,P,\xi_P) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

Rõ ràng $L(f,P) \le S(f,P,\xi_P) \le U(f,P)$
Định lý sau cho phép định nghĩa tích phân là giới hạn của tổng Riemann.

Định lý. *Hai điều sau tương đương:*
(1) *Hàm f là khả tích trên $[a,b]$.*
(2) *Tồn tại* $\displaystyle\lim_{|P|\to 0} S(f,P,\xi_P) = I$*, theo nghĩa*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall P,\ |P| < \delta \ \Rightarrow\ |S(f,P,\xi_P) - I| < \epsilon,\ \forall \xi_P$$

Khi đó $\displaystyle\int_a^b f = I.$

Chứng minh:
• (1) $\Rightarrow$ (2): Gỉa sử $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Với $\epsilon > 0$, tồn tại phân hoạch P_0, sao cho:

$$U(f,P_0) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{4}$$

Gọi $M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ và n_0 là số điểm chia của P_0.
Đặt $\delta_1 = \min(\epsilon/4Mn_0, |P_0|)$. Khi đó với mọi phân hoạch $P = \{x_i : i \in I\}$ mà $|P| < \delta_1$, ta phân tổng trên thành 2 tổng

$$U(f,P) = \sum_{i\in I} M_i \Delta x_i = \sum_{i\in I_1} M_i\Delta x_i + \sum_{i\in I_2} M_i \Delta x_i \ ,$$

trong đó $I_1 = \{i \in I : [x_{i-1}, x_i]$ không chứa điểm chia của P_0 $\}$,
$I_2 = \{i \in I : [x_{i-1}, x_i]$ chứa điểm chia của P_0 $\}$.
Do cách chọn δ_1, mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ chứa nhiều nhất một điểm thuộc P_0. Ta có

$$\sum_{i\in I_2} M_i\Delta x_i \leq \sum_{i\in I_1} M\delta_1 \leq n_0 M\delta_1 \leq \frac{\epsilon}{4}$$

$$\sum_{i\in I_1} M_i\Delta x_i \leq U(f,P_0) + \sum_{i\in I_2} M\delta_1 \leq U(f,P_0) + \frac{\epsilon}{4} \quad \text{(tại sao?)}$$

Vậy

$$U(f,P) \leq U(f,P_0) + \frac{\epsilon}{2} < \int_a^b f + \epsilon$$

Lập luận tương tự, tồn tại $\delta_2 > 0$, sao cho mọi phân hoạch P mà $|P| < \delta_2$, ta có

$$L(f,P) > \int_a^b f - \epsilon$$

Suy ra với $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, mọi phân hoạch P mà $|P| < \delta$, và mọi ξ_P, ta có

$$\int_a^b f - \epsilon < L(f,P) \leq S(f,P,\xi_P) \leq U(f,P) < \int_a^b f + \epsilon$$

Từ đó suy ra (2).
• (2) $\Rightarrow$ (1): Gỉa sử $\lim\limits_{|P|\to 0} S(f,P,\xi_P) = I$. Với $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho mọi phân hoạch P mà $|P| < \delta$, mọi ξ_P, ta có

$$I - \frac{\epsilon}{2} < S(f,P,\xi_p) < I + \frac{\epsilon}{2}$$

Cố định P như trên. Khi cho ξ_P thay đổi, ta có

$$L(f,P) = \inf_{\xi_P} S(f,P,\xi_P) \quad \text{và} \quad U(f,P) = \sup_{\xi_P} S(f,P,\xi_P)$$

Suy ra

$$I - \frac{\epsilon}{2} \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq I + \frac{\epsilon}{2}$$

Theo tiêu chuẩn Riemann suy ra $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Cho $\epsilon \to 0$, ta có $I = \displaystyle\int_a^b f$. $\square$

Từ định lý trên ta có thể xem tích phân như giới hạn của tổng. Cụ thể, ta có

Hệ qủa. *Gỉa sử $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Cho một dãy $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ các phân hoạch của $[a,b]$, sao cho $|P_n| \to 0$ (khi $n \to \infty$). Khi đó*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n, \xi_n) = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n)$$

trong đó ξ_n là các điểm chọn tùy ý theo P_n.

Nhận xét. Cho $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, phân hoạch đều $[a,b]$ thành n đoạn, và trên mỗi đoạn chọn điểm đầu mút. Lập tổng Riemann tương ứng

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{(b-a)}{n}\right)$$

Khi đó $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S_n$.

• Công thức trên cho phép tính tích phân thông qua giới hạn của tổng S_n (hay xấp xỉ tích phân bởi tổng S_n).

• Ngược lại, công thức trên cũng cho phép tính giới hạn của tổng S_n thông qua việc tính tích phân.

Ví dụ. Gỉa sử đã biết hàm $f(x) = x^p$, với $p > 0$, là khả tích. Khi đó

a) $\displaystyle\int_0^1 x dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx \ (= \frac{1}{p+1})$

Bài tập: Tính $\displaystyle\int_a^b x^2 dx$, thông qua tổng Riemann ứng với phân hoạch đều.

Bài tập: Tính $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x}$, $0 < a < b$, thông qua tổng Riemann ứng với phân hoạch $[a,b]$ bởi các điểm tạo thành cấp số nhân $\{x_k = aq^k, k = 0, \cdots, n\}$.

Bài toán. Hàm nào thì khả tích?

2.3 Các lớp hàm khả tích Riemann.

Mệnh đề.

(1) Nếu f giới nội và chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn trên $[a,b]$, thì $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

(2) Nếu f đơn điệu trên $[a,b]$, thì $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Chứng minh: Ta kiểm tra tiêu chuẩn Riemann.

(1) Để đơn giản ta xét f chỉ gián đoạn tại một điểm $c \in (a,b)$ (trường hợp tổng quát chứng minh tương tự). Gọi $M = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$.

Cho $\epsilon > 0$. Gọi $\epsilon_1 < \epsilon/4M$, sao cho: $a < c - \epsilon_1 < c + \epsilon_1 < b$.
Do f liên tục trên hai đoạn $[a, c-\epsilon_1]$ và $[c+\epsilon_1, b]$, nên f liên tục đều trên đó. Với $\epsilon_2 = \epsilon/2(b-a)$, tồn tại $\delta > 0$: $|f(x)-f(y)| < \epsilon_2$, khi $x, y \in [a, c-\epsilon_1] \cup [c+\epsilon_1, b], |x-y| < \delta$.
Gọi P là phân hoạch $[a, b]$, sao cho $|P| < \delta$ và gồm các điểm:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} = c - \epsilon_1 < x_k = c + \epsilon_1 < \cdots < x_n = b$$

Để ý là nếu $i \neq k$, thì $M_i - m_i < \epsilon_2$, còn $M_k - m_k < 2M$.
Suy ra

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i \neq k} (M_i - m_i)\Delta x_i + (M_k - m_k)\Delta x_k < (b-a)\epsilon_2 + 2M\epsilon_1 < \epsilon$$

(2) Gỉa sử f đơn điệu không giảm (trường hợp đơn điệu không tăng chứng minh tơng tự). Cho $\epsilon > 0$. Gọi $\delta = \epsilon/(f(b)-f(a))$. Khi đó với mọi phân hoạch $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ của $[a, b]$, mà $|P| < \delta$ ta có

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i < \delta(f(b) - f(a) < \epsilon$$

Vậy theo tiêu chuẩn Riemann f khả tích. □

Tính khả tích của hàm hợp. *Cho* $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $m \leq f \leq M$. *Nếu* φ *là hàm liên tục trên* $[m, M]$. *Khi đó* $h = \varphi \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Chứng minh: Ta kiểm tra điều kiện Riemann. Cho $\epsilon > 0$. Do φ liên tục đều trên $[m, M]$, tồn tại $\delta > 0$ với $\delta < \epsilon$, sao cho: $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon$ khi $|x - y| < \delta$.
Do $f \in \mathcal{R}[a, b]$, tồn tại phân hoạch $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ sao cho:

$$U(f,P) - L(f,P) < \delta^2 \qquad (*)$$

Gọi M_i, m_i là sup, inf của f trên $[x_{i-1}, x_i]$. Gọi M_i^*, m_i^* là sup, inf của h trên $[x_{i-1}, x_i]$.
Chia $1, \cdots, n$ thành hai loại: $I_1 = \{i : M_i - m_i < \delta\}$ và $I_2 = \{i : M_i - m_i \geq \delta\}$.
Khi đó nếu $i \in I_1$, thì $M_i^* - m_i^* \leq \epsilon$, và nếu $i \in I_2$, thì $M_i^* - m_i^* \leq 2K$,
trong đó $K = \sup\{|\varphi(t)| : m \leq t \leq M\}$.
Do $(*)$ ta có

$$\delta \sum_{i \in I_2} \Delta x_i \leq \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i)\Delta x_i < \delta^2$$

Suy ra $\sum_{i \in I_2} \Delta x_i < \delta$. Cuối cùng ta có đánh giá

$$\begin{aligned} U(h,P) - L(h,P) &= \sum_{i \in I_1} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i + \sum_{i \in I_2} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i \\ &< \epsilon(b-a) + 2K\delta \ < \ (b - a + 2K)\epsilon. \end{aligned}$$

□

Bài tập: Chứng minh nếu $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, thì $f + g, fg, |f|, \max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{R}[a, b]$.

2.4 Tính chất.

Mệnh đề. *Cho* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *và* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Khi đó*

(1) $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ *và* $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(2) $\alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$ *và* $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

(3) *Nếu* $f \leq g$ *trên* $[a,b]$, *thì* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(4) $|f|$ *khả tích trên* $[a,b]$ *và* $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

(5) *Nếu* $a < c < b$, *thì* $f \in \mathcal{R}[a,c]$ *và* $f \in \mathcal{R}[c,b]$ *và* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Chứng minh: (1)(2)(3) được chứng minh dựa vào việc qua giới hạn của các tổng Riemann.
(4) Vì $|f|$ là hợp của hàm liên tục $\varphi(t) = |t|$ và $f \in \mathcal{R}[a,b]$, nên $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.
Hơn nữa, do $-|f| \leq f \leq |f|$, áp dụng (3), ta có bất dẳng thức cần chứng minh.
(5) Do $f \in \mathcal{R}[a,b]$, nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại phân hoạch P sao cho:

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

Xem P chứa c (nếu chưa thì thêm vào). Gọi P_1 là các điểm chia của P thuộc $[a,c]$, còn P_2 là các điểm chia của P thuộc $[c,b]$. Khi đó

$$U(f,P) - L(f,P) = (U(f,P_1) - L(f,P_1)) + (U(f,P_2) - L(f,P_2)) < \epsilon$$

Suy ra $U(f,P_1) - L(f,P_1) < \epsilon$ và $U(f,P_2) - L(f,P_2) < \epsilon$.
Theo tiêu chuẩn Riemann $f \in \mathcal{R}[a,c]$ và $f \in \mathcal{R}[c,b]$.
Từ tổng Riemann $S(f,P,\xi_p) = S(f,P_1,\xi_{P_1}) + S(f,P_2,\xi_{P_2})$, cho $|P| \to 0$, ta có công thức ở (5). $\square$

Định lý giá trị trung bình. *Cho* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. *Nếu* g *không đổi dấu, thì tồn tại* μ, *với* $m = \inf f \leq \mu \leq M = \sup f$, *sao cho*

$$\int_a^b fg = \mu \int_a^b g$$

Đặc biệt, khi $g = 1$, *ta có* $\int_a^b f = \mu(b-a)$.

Hơn nữa, nếu f *liên tục, thì tồn tại* $a < c < b$ *sao cho:* $\int_a^b f = f(c)(b-a)$

Chứng minh: Chỉ cần chứng minh cho $g \geq 0$. Từ $mg \leq fg \leq Mg$, suy ra

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g$$

Khi đó $\mu = \dfrac{\int_a^f g}{\int_a^b g}$, nếu $\int_a^b g \neq 0$, và $\mu = 0$, nếu $\int_a^b g = 0$, thực hiện đẳng thức cần tìm.

Hơn nữa nếu $g = 1$ và f liên tục, thì theo định lý giá trị trung gian, tồn tại $c \in (a, b)$, sao cho $f(c) = \mu$. Suy ra đẳng thức cuối của định lý. $\square$

Bài tập: Cho f liên tục và không đổi dấu trên $[a, b]$. Chứng minh nếu $\displaystyle\int_a^b f = 0$, thì $f \equiv 0$. Nêu ví dụ nếu bỏ điều kiện f liên tục, thì phát biểu không đúng.

2.5 Định lý cơ bản.

Cho $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Định nghĩa hàm $\quad F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$.
Nhận xét. F là hàm liên tục trên $[a, b]$. Điều đó suy từ

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)dt\right| \leq \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)||x - x_0|$$

Định lý. *Nếu f là hàm liên tục, thì F là nguyên hàm của f, i.e.*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f\right) = f(x), \quad x \in [a, b]$$

Chứng minh: Theo định lý giá trị trung bình ta có

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f = f(x + \theta\Delta x) \quad , 0 < \theta < 1$$

Cho $\Delta x \to 0$, do f liên tục, ta có $F'(x) = f(x)$. $\square$

2.6 Tính tích phân xác định. Từ định lý trên ta có các công thức tính tích phân xác định cơ bản sau:
• **Công thức Newton-Leibniz.** *Nếu hàm f có nguyên hàm F trên $[a, b]$, thì*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

• **Công thức đổi biến.** *Nếu hàm f liên tục trên khoảng J, và φ là hàm khả vi liên tục từ khoảng I vào J, thì với mọi $a, b \in I$, ta có*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

• **Công thức tích phân từng phần.** *Nếu u, v là các hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$, thì*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Chứng minh: Công thức Newton-Leibniz suy từ định lý cơ bản:
Do $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(F(x) - \int_a^x f\right) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, nên $F(x) - \displaystyle\int_a^x f = C$. Cho

$x = a$ ta có $C = F(a)$. Cho $x = b$ ta có công thức.
Công thức đổi biến suy từ công thức trên và qui tắc đạo hàm hợp:
Hàm $F(x) = \int_{\varphi(a)}^{x} f$ là nguyên hàm của $f(x)$.
Đặt $G(t) = F(\varphi(t))$. Khi đó $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, i.e. $G(t)$ là nguyên hàm của $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Vậy

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(b) - G(b) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Công thức tích phân từng phần suy từ công thức Newton-Leibniz và qui tắc đạo hàm tích. (Bài tập) □

Nhận xét. Có những hàm khả tích nhưng không có nguyên hàm. Chẳng hạn, các hàm bậc thang như hàm $\operatorname{sign} x$.

Ví dụ.
a) **Công thức Leibniz tính số π.** Ta có $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
Mặt khác áp dụng công thức tổng của cấp số nhân $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, với $q = -x^2$, ta có

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + R_n, \quad \text{trong đó} \quad R_n = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Lấy tích phân hai vế ta có

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \epsilon_n$$

trong đó

$$|\epsilon_n| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}dx\right| \le \left|\int_0^1 x^{2n+2}dx\right| = \frac{1}{2n+3}$$

b) Tính $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$: Đổi biến $x = a\sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin t}a\cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1)dt = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2} + t)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi}{4} \end{aligned}$$

c) Công thức qui nạp cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $(n \in \mathbf{N})$:
Khi $n = 0, 1$, ta có $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \dfrac{\pi}{2}$ và $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
Khi $n \ge 2$, tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) = -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\cos^2 x dx \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

Vậy ta có công thức $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$, $(n \geq 2)$.
Suy ra $I_{2n} = \dfrac{1.3\cdots(2n-1)}{2.4\cdots 2n}\dfrac{\pi}{2}$ và $I_{2n+1} = \dfrac{2.4\cdots 2n}{1.3\cdots 2n+1}$.
Bài tập: Từ kết qủa trên chứng minh **công thức Wallis**:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2.4\cdots 2n}{1.3\cdots(2n-1)} 2 \quad \text{và} \quad I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{khi} \quad n \to \infty$$

Bài tập: Chứng minh:
a) Nếu f là hàm chẵn trên $[-a, a]$, thì $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
b) Nếu f là hàm lẻ trên $[-a, a]$, thì $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
c) Nếu f là hàm có chu kỳ T, thì $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ với mọi a.

3. Một số ứng dụng.

Archimède (thế kỷ thứ 3 trước Công nguyên) đã tiến hành tính diện tích, thể tích và độ dài đường cong một số hình bằng phương pháp như tích phân, tuy thời đó ông chưa có những lập luận thật chặt chẽ.
Ý: phân hình cần tính độ dài (diện tích, thể tích) thành các đoạn thẳng (hình chữ nhật, hình khối lập phương) rồi lấy tổng. Nếu phân hoạch càng nhỏ, thì tổng độ dài (diện tích, thể tích) của các hình đơn giản đó càng gần với giá trị cần tìm. Sau đó là lập luận về giới hạn.

3.1 Tính diện tích. Gỉa sử hình có thể phân thành các hình thang cong giới hạn bởi hàm liên tục $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, với $f \geq 0$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Gọi P là phân hoạch $[a, b]$. Khi đó $L(f, P) =$ Tổng diện tích các hình chữ nhật nằm gọn trong D. $U(f, P) =$ Tổng diện tích các hình chữ nhật phủ kín D.
Từ đó ta định nghĩa **diện tích miền** D là gía trị

$$S(D) = \int_a^b f$$

• Nếu f_1, f_2 là các hàm liên tục trên $[a, b]$, thì diện tích miền D giới hạn bởi f_1, f_2 là

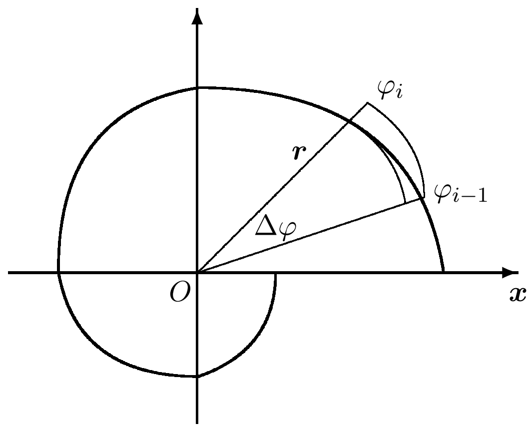
$$S(D) = \int_a^b |f_1 - f_2|$$

• Nếu D là miền giới hạn bởi đờng cong kín cho bởi phương trình tham số:
$x = x(t), y = y(t)$, là các hàm khả vi liên tục theo $t \in [\alpha, \beta]$, thì

$$S(D) = \left|\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt\right| = \left|\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt\right|$$

• Gỉa sử miền D giới hạn bởi đường cong cho trong tọa độ cực $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$, i.e

$$D = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbf{R}^2 : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$$



Với phân hoạch P: $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_n = \beta$, ta có

(Diện tích hình quạt tròn bán kính r, chắn cung độ dài $\Delta\varphi$) = $\dfrac{1}{2}r^2\Delta\varphi$.

Vậy

$L(\frac{1}{2}r^2, P) =$ Tổng diện tích các hình quạt nằm gọn trong D.

$U(\frac{1}{2}r^2, P) =$ Tổng diện tích các hình quạt phủ kín D.

Từ định nghĩa tích phân, ta có

$$S(D) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

Ví dụ.

a) Tính diện tích miền giới hạn bởi các Parabol $y^2 = 2px,\ x^2 = 2py\ \ (p > 0)$.

Áp dụng công thức nêu trên với $f_1(x) = \sqrt{2px},\ f_2(x) = \dfrac{x^2}{2p}$. Hoành độ các giao điểm $f_1(x) = f_2(x) \ \Leftrightarrow\ x = 0, 2p$.

$$S = \int_0^{2p}\left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p}\right)\Bigg|_0^{2p} = \frac{4}{3}p^2$$

b) Tính diện tích Ellip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$. Phương trình tham số của Ellip: $x = a\cos t, y = b\sin t$. Áp dụng công thức ta có

$$S = ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 2t)dt = \pi ab$$

c) Diện tích giới hạn bởi đường xoắn ốc cho trong tọa độ cực: $r = a\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{6}\ \varphi^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}a^2\pi^3$$

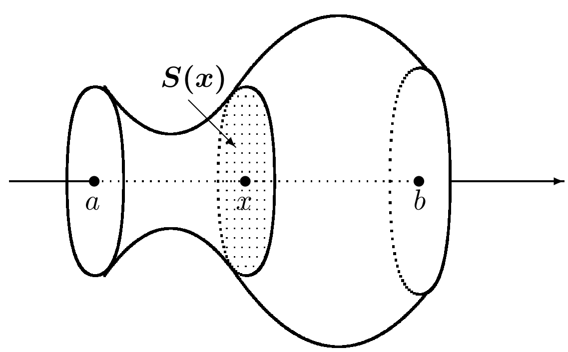
Ví dụ. Cho $y = f(x)$ là hàm tăng trên $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$ và $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Gọi $x = g(y)$ là hàm ngược. Với $x, y > 0$, so sánh diện tích hình chữ nhật cạnh x, y với diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm f, ta có **bất đẳng thức Young**

$$xy \ \le \ \int_0^x f \ + \int_0^y g \qquad (x, y \geq 0)$$

Suy ra với $f(x) = x^{p-1}, g(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ $(p > 0)$, ta có

$$xy \ \le \ \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

3.2 Tính thể tích. Cho H là hình khối trong không gian. Gỉa sử với mọi $x \in [a, b]$, mặt phẳng vuông góc với Ox cắt H theo thiết diện có diện tích $S(x)$. Gỉa thiết thêm là H nằm giữa 2 mặt phẳng $x = a$ và $x = b$.



Gọi P là phân hoạch $[a, b]$. Khi đó

$L(S, P)$ = Tổng thể tích các hình trụ nằm gọn trong H.

$U(S, P)$ = Tổng thể tích các hình trụ phủ kín H.

Từ đó thể tích hình H được định nghĩa là số

$$V(H) = \int_a^b S(x)dx$$

• H là **hình chóp** với đáy có diện tích B, chiều cao h. Khi đó $S(x) = B(\frac{x}{h})^2$, khi $0 \leq x \leq h$. Vậy

$$V(H) = \int_0^h B(\frac{x}{h})^2 dx = \frac{1}{3}Bh$$

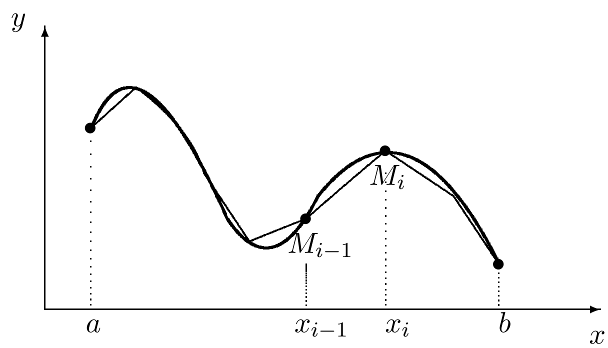
• H gọi là **hình tròn xoay** nếu H là hình trong $\mathbf{R}^3$ được tạo ra khi xoay quanh trục Ox miền $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq |f(x)|\}$, với f là hàm liên tục. trên $[a, b]$. Khi đó $S(x) = \pi f^2(x)$, và thể tích H là

$$V(H) = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Ví dụ. Tính thể tích hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq Ra2$. Mặt cầu là mặt tròn xoay khi quay quanh Ox đồ thị hàm $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, -R \leq x \leq R$. Áp dụng công thức ta có

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi R^3$$

3.3 Tính độ dài cung. Cho đường cong $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, y = f(x)\}$. Với mỗi phân hoạch $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ đoạn $[a, b]$, ta có các điểm tương ứng $M_i(x_i, f(x_i))$ trên C.



Độ dài mỗi đoạn $M_{i-1}M_i$ là

$$\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\Delta x_i,$$

trong đó $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$. Như vậy tổng Riemann

$$S(\sqrt{1 - f^2}, P, \{c_i\}) = \text{ Độ dài đường gấp khúc } M_0M_1 \cdots M_n$$

Vậy nếu f khả vi liên tục, thì **độ dài cung** C là giá trị

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

• Nếu C cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$, là các hàm khả vi liên tục theo $t \in [\alpha, \beta]$, thì theo phép đổi biến tích phân

$$l(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

• Nếu C cho trong tọa độ cực $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$, thì từ $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, ta có

$$l(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$$

Ví dụ.
a) Tính độ dài cung $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$. Do tính đối xứng của đường cong, Áp dụng công thức, ta có

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\sin t\cos^2 t)^2 + (3a\cos t\sin^2 t)^2}dt = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2tdt = -3a\cos 2t|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

c) Tính độ dài một vòng xoắn ốc cho trong tọa độ cực: $r = a\varphi$. Theo công thức

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}d\varphi \\ &= a(\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2+1} + \frac{1}{2}\ln|\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}|)\Big|_0^{2\pi} = \frac{a}{2}(2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})) \end{aligned}$$

3.4 Diện tích mặt. Có thể tính diện tích mặt theo phương pháp lập luận như trên. Chẳng hạn diện tích mặt tròn xoay khi quay đồ thị hàm khả vi liên tục $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ quanh trục Ox, được tính bởi

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Ví dụ. Tính diện tích mặt cầu bán kính R. Áp dụng công thức trên với hàm $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, -R \leq x \leq R$, ta có

$$S = 2\pi\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}dx = 2\pi R\int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2$$

4. Tích phân suy rộng.

Ta đã xét tích phân của hàm bị chặn, trên tập bị chặn $[a,b]$. Phần này xét đến khái niệm tích phân hàm không bị chặn hay tích phân trên tập không bị chặn. Trước hết xét các ví dụ sau:

a) $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan b \ \to \frac{\pi}{2}$, khi $b \to +\infty$.
b) $\displaystyle\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{a} \ \to 2$, khi $a \to 0^+$.
c) $\displaystyle\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b \ \to +\infty$, khi $b \to +\infty$.
d) $\displaystyle\int_0^b \cos xdx = \sin b$, không tồn tại giới hạn khi $b \to +\infty$.

Như vậy khi cho các cận tích phân tiến đến giới hạn vô cùng hay tại các giá trị mà hàm dưới dấu tích phân không xác định, có một số trường hợp tồn tại giới hạn (và giá trị giới hạn có một ý nghĩa nào đó). Vì vậy người ta cần mở rộng khái niệm tích phân.

4.1 Tích phân suy rộng loại 1. Gỉa sử f xác định trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên mỗi đoạn hữu hạn $[a, b]$ với $b > a$. Khi đó **tích phân suy rộng loại 1** của f trên $[a, +\infty)$ được ký hiệu và định nghĩa

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

nếu giới hạn vế phải tồn tại.
Nếu giới hạn trên hữu hạn thì tích phân trên gọi là **hội tụ**, trường hợp ngược lại thì gọi là **phân kỳ**.
Tương tự, ta định nghĩa

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \quad = \quad \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

và cũng có khái niệm hội tụ, phân kỳ tương ứng.

4.2 Tích phân suy rộng loại 2. Gỉa sử f xác định trên $[a, b)$ và khả tích trên mỗi đoạn $[a, b-\epsilon]$ với $\epsilon > 0$. Khi đó **tích phân suy rộng loại 2** của f trên $[a, b)$ được ký hiệu và định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

nếu giới hạn vế phải tồn tại.
Nếu giới hạn trên hữu hạn thì tích phân trên gọi là **hội tụ**, trường hợp ngược lại thì gọi là **phân kỳ**.
Tương tự, ta định nghĩa tích phân suy rộng của f trên $(a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

Một cách tổng quát, nếu f không xác định tại hữu hạn điểm $-\infty \leq a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b \leq +\infty$, thì ta định nghĩa tích phân suy rộng

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a_1}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{a_2} f(x)dx + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{c_{n-1}} f(x)dx + \int_{c_{n-1}}^{a_n} f(x)dx$$

trong đó $a_i < c_i < a_{i+1}$, với gỉa thiết các tích phân vế phải hội tụ.

Ví dụ. Do nguyên hàm của $\dfrac{1}{x^p}$ là $\dfrac{-1}{(p-1)x^{p-1}}$ khi $p \neq 1$, và là $\ln|x|$ khi $p = 1$, nên

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ hội tụ khi và chỉ khi $p > 1$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ hội tụ khi và chỉ khi $p < 1$.

Nhận xét.
• Do định nghĩa tích phân suy rộng là việc qua giới hạn của tích phân trên đoạn nên

các tính chất: tuyến tính, bất đẳng thức, phân đoạn,$\cdots$, vẫn đúng đối với tích phân suy rộng.

• Ta cũng có thể tính tích phân suy rộng bằng các công thức Newton-Leibniz, đổi biến hay tích phân từng phần.

Cũng từ lý thuyết giới hạn ta có tiêu chuẩn sau:

4.3 Tiêu chuẩn Cauchy.

(1) *Cho f xác định trên $[a, +\infty)$. Khi đó $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\Delta > 0$, sao cho với mọi $b_1, b_2 > \Delta$, ta có*

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$

(2) *Cho f xác định trên $[a, b)$. Khi đó $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho với mọi $b - \delta < b_1, b_2 < b$, ta có*

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$

4.4 Các dấu hiệu hội tụ.

(1) Trường hợp tích phân loại 1: *Cho f, g là các hàm xác định trên $[a, +\infty)$. Ta có các dấu hiệu sau:*

Hội tụ tuyệt đối: *Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ, thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.*

So sánh: *Gỉa sử $|f(x)| \leq |g(x)|, \forall x \in [a, +\infty)$. Khi đó*

Nếu $\int_a^{+\infty} |g(x)|dx$ hội tụ, thì $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.

Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ, thì $\int_a^{+\infty} |g(x)|dx$ phân kỳ.

Giới hạn: *Gỉa sử $\lim\limits_{x\to\infty} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = K$. Khi đó*

Nếu $K \neq 0$, thì $\int_a^{+\infty} |g(x)|dx$ và $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ cùng hội tụ hay phân kỳ.

Nếu $K = 0$, thì $\int_a^{+\infty} |g(x)|dx$ hội tụ suy ra $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.

Dirichlet: *Nếu $\sup\limits_{a<b<\infty} \left| \int_a^b f(x)dx \right| < \infty$, còn φ là hàm khả vi liên tục, đơn điệu và $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, thì $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ hội tụ*

Chứng minh: Ta kiểm tra tiêu chuẩn Cauchy. Dùng lại ký hiệu ở 4.3.

Dấu hiệu đầu suy từ $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx$

2 dấu hiệu tiếp theo suy từ $\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \le (K+1)\int_{b_1}^{b_2} |g(x)|dx$

Chỉ cần chứng minh dấu hiệu Dirichlet trường hợp φ giảm về 0 (?). Khi đó $\varphi' \le 0$. Đặt $F(x) = \int_a^x f$. Theo giả thiết $|F(x)| < M, \forall x$. Tích phân từng phần, áp dụng định lý giá trị trung bình, ta có

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\varphi(x)dx\right| = |F\varphi|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} F(x)\varphi'(x)dx| \le M|\varphi(b_2)| + M|\varphi(b_1)| + M|\varphi(b_2) - \varphi(b_1)$$

Do $\varphi(x) \to 0$, khi $x \to \infty$, nên tiêu chuẩn Cauchy thoả. □

(2) Trường hợp tích phân loại 2: *Cho f, g là các hàm xác định trên $[a, b)$. Ta có các tiêu chuẩn sau:*

Hội tụ tuyệt đối: *Nếu* $\int_a^b |f(x)|dx$ *hội tụ, thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ.*

So sánh: *Gỉa sử* $|f(x)| \le |g(x)|, \forall x \in [a, b)$. *Khi đó*

Nếu $\int_a^b |g(x)|dx$ *hội tụ, thì* $\int_a^b |f(x)|dx$ *hội tụ.*

Nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ *phân kỳ, thì* $\int_a^b |g(x)|dx$ *phân kỳ.*

Giới hạn: *Gỉa sử* $\lim\limits_{x\to b^-} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = K$. *Khi đó*

Nếu $K \ne 0$, *thì* $\int_a^b |g(x)|dx$ *và* $\int_a^b |f(x)|dx$ *cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.*

Nếu $K = 0$, *thì* $\int_a^b |g(x)|dx$ *hội tụ suy ra* $\int_a^b |f(x)|dx$ *hội tụ.*

Dirichlet: *Nếu* $\sup\limits_{a<b'<b} \left|\int_a^{b'} f(x)dx\right| < \infty$, *còn* φ *là hàm đơn điệu và* $\lim\limits_{x\to b^-} \varphi(x) = 0$, *thì* $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$ *hội tụ .*

Chứng minh: Việc chứng minh tương tự như tích phân loại 1 hay bằng phép đổi biến $t = \dfrac{1}{x-b}$ đưa tích phân loại 2 về tích phân loại 1 □

Ví dụ.

a) Xét $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

So sánh: $e^{-x^2} \le e^{-|x|}$, và $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ. Suy ra tích phân đang xét hội tụ.

b) Xét $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^p}dx$, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^p}dx \quad (p > 0)$.

Theo dấu hiệu Dirichlet tích phân $\int_1^b \sin x dx$ hay $\int_1^b \cos x dx$ bị chặn và $\dfrac{1}{x^p}$ giảm về 0, nên tích phân trên hội tụ.

c) **Tích phân Fresnel:** $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 dx$ hội tụ vì sau khi đổi biến $t = x^2$, tích phân có dạng đã cho ở ví dụ b) với $p = \frac{1}{2}$.

d) Tích phân sau hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Tính hội tụ suy từ ví dụ b) với $p = 1$.

Tích phân không hội tụ tuyệt đối suy từ đánh giá

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &\geq \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &&\geq \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| dx &&\geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty, \quad \text{khi } n \to \infty\end{aligned}$$

e) Xét $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} dx \quad (p < 1)$.

So sánh giới hạn: với $p < q < 1$, $\dfrac{\ln x}{x^p} : \dfrac{1}{x^q} = x^{q-p} \ln x \to 0$, khi $x \to 0^+$, và $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$ hội tụ. Suy ra tích phân đang xét hội tụ.

f) **Hàm Gamma**: $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$, hội tụ khi $p > 0$.

Điều đó suy từ:

so sánh với hàm $\dfrac{1}{x^{p-1}}$, $\displaystyle\int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx$, hội tụ khi $p - 1 > -1$,

so sánh với hàm $e^{-\frac{x}{2}}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$, hội tụ với mọi p.

g) **Hàm Beta**: $B(p, q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1} dx$, hội tụ khi $p, q > 0$.

Điều đó suy từ:

$\displaystyle\int_0^{1/2} x^{p-1} (1 - x)^{q-1} dx$, có kỳ dị tại $x = 0$, hội tụ khi $p - 1 > -1$

$\displaystyle\int_{1/2}^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1} dx$, có kỳ dị tại $x = 1$, hội tụ khi $q - 1 > -1$.

Bài tập: Chứng minh: $\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p)$, $\quad \forall p > 0$.

Suy ra: $\Gamma(n + 1) = n! \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = n!$, $\quad n \in \mathbf{N}$.

V. Chuỗi số

Chương này ta sẽ xét đến lý thuyết các tổng vô hạn: chuỗi. Tuy là một trường hợp riêng của dãy, nhưng vì vai trò và các tính chất đặc thù của nó, nên thường lý thuyết chuỗi được khảo sát riêng. Chương này cũng nêu một số dấu hiệu thường được sử dụng để xét sự hội tụ của chuỗi số.

1. Chuỗi số

1.1 Định nghĩa. Một **chuỗi số** lập từ dãy số (a_n) là tổng hình thức vô hạn

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Dãy **tổng riêng thứ** n của chuỗi: $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

Dãy **phần dư thứ** n của chuỗi: $\quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$

Chuỗi trên gọi là **hội tụ về** S nếuu tồn tại $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Khi đó ta nói **chuỗi có tổng** là S, và ký hiệu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$. Trường hợp ngược lại, i.e giới hạn trên không tồn tại, thì chuỗi gọi là **phân kỳ**.

Ví dụ.

a) Xét **chuỗi hình học**: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$.

Khi $x \neq 1$, ta có $\quad S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

Vậy nếu $|x| < 1$, chuỗi hội tụ và $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$. Nếu $|x| \geq 1$, chuỗi phân kỳ.

b) Xét **chuỗi điều hòa**: $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$.

So sánh diện tích miền giới hạn bởi đồ thị hàm $y = \dfrac{1}{x}$, $x \in [1, n]$, ta có

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} = \ln n$$

Vậy chuỗi điều hòa phân kỳ.

c) Xét $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$. So sánh từng số hạng, ta có

$$\begin{aligned} S_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} &\leq 1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} \\ &\leq 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}<2-\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Vậy dãy tổng riêng tăng và bị chặn trên nên chuỗi đã cho hội tụ.

d) Chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1-1+1-1+\cdots$ phân kỳ vì dãy tổng riêng là dãy 1-0.

Bài tập: Tính tổng của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$

Không phải lúc nào cũng dễ dàng tính được tổng của một chuỗi. Sau đây chúng ta sẽ xét đến tính hội tụ của chuỗi.

1.2 Tiêu chuẩn hội tụ. Dãy tổng riêng hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy. Dãy đơn điệu tăng hội tụ khi và chỉ khi nó bị chặn trên. Từ đó ta có 2 tiêu chuẩn quan trọng sau

Tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi. *Chuỗi* $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ *hội tụ khi và chỉ khi với mọi* $\epsilon>0$*, tồn tại* N*, sao cho với mọi* $N\leq n<m$*, ta có* $|S_m-S_n| = |\sum_{k=n+1}^{m}a_k|<\epsilon$

Tiêu chuẩn cho chuỗi số dương. *Gỉa sử* $a_k\geq 0, \forall k$*. Khi đó* $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ *hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng bị chặn, i.e tồn tại* M*, sao cho* $\sum_{k=0}^{n}a_k<M, \forall n$

Hệ qủa. (Điều kiện cần) *Nếu* $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ *hội tụ, thì* $\lim_{k\to\infty}a_k = 0$.

Ví dụ. Dùng tiêu chuẩn Cauchy cho một chứng minh khác về sự phân kỳ của chuỗi điều hòa:

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Ta cũng thấy ở ví dụ này $a_k = \frac{1}{k}\to 0$, nhưng chuỗi không hội tụ, i.e. điều ngược lại của điều kiện cần nói chung không đúng.

1.3 Tính chất.

Tính tuyến tính. *Nếu* $\sum_{k=0}^{\infty}a_k, \sum_{k=0}^{\infty}b_k$ *hội tụ và* $c\in\mathbf{R}$*, thì* $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)$*,* $\sum_{k=0}^{\infty}ca_k$ *hội tụ và*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k + \sum_{k=0}^{\infty}b_k \qquad \sum_{k=0}^{\infty}ca_k = c\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

Tính phân đoạn. *Sự hội tụ của chuỗi không phụ thuộc vào hữu hạn số hạng đầu, i.e với mỗi* $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *hội tụ khi và chỉ khi* $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ *hội tụ. Khi đó*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

Tính kết hợp. *Gỉa sử* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *hội tụ về* S. *Lập chuỗi có các số hạng*

$$b_0 = a_0 + \cdots + a_{n_0}, b_1 = a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1}, \cdots , b_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}, \cdots$$

Khi đó $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *cũng hội tụ về* S.

Chứng minh: Hai tính chất đầu suy từ giới hạn của tổng các dãy.
Chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ có dãy tổng riêng là dãy con của dãy tổng riêng của $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Từ sự hội tụ của dãy suy ra sự hội tụ của dãy con. Điều đó chứng minh tính chất thứ ba. $\square$

Nhận xét. Chuỗi phân kỳ không có các tính chất trên. Ví dụ chuỗi $1-1+1-1+\cdots$ khác với $(1-1)+(1-1)+\cdots = 0$, hay là $1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1$.

Hoán vị các số hạng. Cho $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ và $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ là song ánh. Lập chuỗi có các số hạng là hoán vị của chuỗi đã cho: $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$.

Nói chung, $\sum_k a_k$ hội tụ về S, không suy ra $\sum_k a_{\sigma(k)}$ hội tụ về S. Xét ví dụ chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Đó là chuỗi hội tụ và có tổng là $\ln 2$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Từ tính chất tuyến tính, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln 2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \\ &= 0 + \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} - 0 - \frac{1}{8} + \cdots \end{aligned}$$

Cộng hai chuỗi trên và dùng tính chất kết hợp, ta có

$$\begin{aligned} \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 &= (1+0) + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - 0) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + 0) + (-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \end{aligned}$$

Chuỗi vế phải lập từ hoán vị chuỗi xuất phát, nhưng có tổng khác $\ln 2$.
Thật ra, định lý sau cho thấy có thể hoán vị các số hạng của chuỗi như chuỗi trên,

để có chuỗi nhận mọi gía trị cho trước.

1.4 Định lý Riemann. *Gỉa sử* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *là chuỗi hội tụ. Khi đó*

(1) *Nếu* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *hội tụ, thì chuỗi* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ *hội tụ về cùng một tổng, với mọi song ánh* $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$

(2) *Nếu* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *phân kỳ. Khi đó với mọi* $c \in \mathbf{R}$*, tồn tại phép hoán vị* $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$*, sao cho* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = c$.

Chứng minh: Trước hết ta có nhận xét là nếu $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ là chuỗi số dương hội tụ, thì $\sum_{k=0}^{\infty} p_{\sigma(k)}$ cũng hội tụ. Thật vậy với mọi $n \in \mathbf{N}$, gọi $N = \max(\sigma(0), \cdots, \sigma(n))$, dãy tổng riêng của chuỗi hoán vị là bị chặn trên:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \leq \sum_{k=1}^{N} p_k < \sum_{k=0}^{\infty} p_k$$

nên hội tụ.
Bây giờ xét phần dương và phần âm của a_k: $p_k = \max(a_k, 0)$ và $q_k = -\min(a_k, 0)$. Khi đó $p_k, q_k \geq 0$, $a_k = p_k - q_k$ và $|a_k| = p_k + q_k$.
(1) Nếu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hội tụ về S và $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ hội tụ, thì các chuỗi số dương $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$ bị chặn trên bởi $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, nên hội tụ. Theo nhận xét trên ta có

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k - \sum_{k=0}^{\infty} q_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} q_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$$

(2) Nếu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hội tụ và $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ phân kỳ, thì $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ và $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$ phân kỳ $(= +\infty)$, với $\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty} q_k = 0$.
Cho $c \in \mathbf{R}$, lập chuỗi hoán vị từ như sau:
Gọi k_0 là số bé nhất sao cho: $c < p_0 + \cdots + p_{k_0}$.
Gọi k_1 là số bé nhất sao cho: $p_0 + \cdots + p_{k_0} - q_0 - \cdots - q_{k_1} < c$.
Gọi k_2 là số bé nhất sao cho: $c < p_0 + \cdots + p_{k_0} - q_0 \cdots - q_{k_1} + p_{k_0+1} + \cdots + p_{k_2}$.
Lặp như vậy ta có hoán vị các số hạng của chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mà tổng riêng giao động quanh c và tiến về c. $\square$

2. Các dấu hiệu hội tụ

2.1 Các dấu hiệu hội tụ tuyệt đối.

Hội tụ tuyệt đối: *Nếu* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *hội tụ, thì* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *hội tụ.*

So sánh: *Gỉa sử tồn tại* N*, sao cho* $|a_k| \leq |b_k|, \forall k \geq N$*. Khi đó*

Nếu $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ *hội tụ, thì* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *hội tụ. Nếu* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *phân kỳ, thì* $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ *phân kỳ.*

So sánh giới hạn: *Gỉa sử* $\lim_{k\to\infty} \dfrac{|a_k|}{|b_k|} = K$*.*

Nếu $K \neq 0$*, thì* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *và* $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ *cùng hội tụ hay phân kỳ.*

Nếu $K = 0$*, thì* $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ *hội tụ suy ra* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *hội tụ*

và $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *phân kỳ suy ra* $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ *phân kỳ.*

D'Alembert: *Gỉa sử* $\lim_{k\to\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = r$*. Khi đó*

Nếu $r < 1$*, thì* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *hội tụ. Nếu* $r > 1$*, thì* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *phân kỳ.*

Cauchy: *Gỉa sử* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = r$*. Khi đó*

Nếu $r < 1$*, thì* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *hội tụ. Nếu* $r > 1$*, thì* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *phân kỳ. .*

Tích phân: *Gỉa sử* $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ *là hàm đơn điệu giảm về* 0*. Khi đó tích phân* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ *và chuỗi* $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ *cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.*

Chứng minh: Từ bất đẳng thức tam giác ta có $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$. Tiêu chuẩn Cauchy suy ra dấu hiệu đầu.

Dấu hiệu so sánh suy từ $\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |b_k|$, và tính hội tụ của chuỗi số dương tương đương với tính bị chặn của dãy tổng riêng.

Gỉa sử $\lim_{k\to\infty} \dfrac{|a_k|}{|b_k|} = K$. Khi đó với $\epsilon > 0$, tồn tại N, sao cho khi $k > N$,

$$(K - \epsilon)|b_k| \leq |a_k| \leq (K + \epsilon)|b_k|$$

Vậy dấu hieụ so sánh giới hạn suy từ dấu hiệu so sánh.

Gỉa sử giới hạn của tỉ số $\lim_{k\to\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = r$.

Trường hợp $r < 1$: với $r < p < 1$, tồn tại N, sao cho $|a_{n+1}| < p|a_n|, \forall n \geq N$.

Suy ra $|a_{N+k}| < p^k|a_N|, k = 0, 1, 2, \cdots$. Từ dấu hiệu so sánh

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq |a_N| \sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{|a_N|}{1-p}$$

suy ra chuỗi $\sum |a_k|$ hội tụ.
Trường hợp $r > 1$: với $r > q > 1$, tồn tại N, sao cho $|a_{n+1}| > q|a_n|, \forall n \geq N$.
Tương tự đánh giá trên, từ việc so sánh với chuỗi phân kỳ $\sum q^k$, suy ra chuỗi $\sum |a_k|$ phân kỳ.
Gỉa sử giới hạn của căn số $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{|a_k|} = r$.
Trường hợp $r < 1$: với $r < p < 1$, tồn tại N, sao cho $\sqrt[n]{|a_n|} < p, \forall n \geq N$.
Suy ra $|a_n| < p^n, \forall n \geq N$. Ta có phần dư

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} p^k = \frac{p^{N+1}}{1-p}$$

suy ra chuỗi $\sum |a_k|$ hội tụ.
Trường hợp $r > 1$: với $r > q > 1$, tồn tại N, sao cho $|a_n| > q^n, \forall n \geq N$.
Tương tự đánh giá trên, từ việc so sánh với chuỗi phân kỳ $\sum q^k$, suy ra chuỗi $\sum |a_k|$ phân kỳ.
Giả sử f giảm trên $[0, +\infty)$. Khi đó $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, khi $k \leq x \leq k+1$.
Suy ra $f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$. Vậy với $0 < n < m$, ta có

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} f(k) \leq \int_n^m f(x)dx \leq \sum_{k=n}^{m} f(k)$$

Từ tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của tích phân suy rộng và của chuỗi, suy ra tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ và chuỗi $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ. □

Ví dụ.
a) Xét sự hội tụ của $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{2^k}$. Dùng đấu hiệu so sánh: $\left|\dfrac{\sin k}{2^k}\right| \leq \dfrac{1}{2^k}$ và chuỗi hình học $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ hội tụ. Chuỗi đã cho hội tụ.

b) Dấu hiệu so sánh giới hạn: ta thường so sánh $|a_k|$ với $\dfrac{1}{k^p}$, khi $k \to \infty$.

Ở ví dụ e) sẽ chứng minh $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ hội tụ khi $p > 1$, phân kỳ khi $p \leq 1$.

Chuỗi $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ phân kỳ vì $\dfrac{k}{k^2+1} \sim \dfrac{1}{k}$, khi $k \to \infty$.

Chuỗi $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^5+k^3+1}}$ hội tụ vì $\dfrac{k}{\sqrt{k^5+k^3+1}} \sim \dfrac{1}{k^{3/2}}$, khi $k \to \infty$.

Chuỗi $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)^p$ hội tụ khi $p > 1$ vì theo khai triển Taylor của $\ln(1+x)$

và e^x (với $x = \dfrac{1}{k}$) ta có so sánh

$$\begin{aligned} a_k &= \left(e - \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^p = \left(e - e^{k\ln(1+\frac{1}{k})}\right)^p \\ &= \left(e - e^{k(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+o(\frac{1}{k^2}))}\right)^p = \left(e - e^{1-\frac{1}{2k}+o(\frac{1}{k}))}\right)^p \\ &= \left(e - e(1-\tfrac{1}{2k}+o(\tfrac{1}{k}))\right)^p = \left(\frac{1}{2k}+o(\frac{1}{k})\right)^p \sim \frac{1}{2^p k^p} \end{aligned}$$

c) Xét sự hội tụ của $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k!\left(\frac{x}{k}\right)^k$. Dùng dấu hiệu D'Alembert:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} x\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty} x\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{-1} = |x|e^{-1}$$

Vậy chuỗi hội tụ khi $|x| < e$ và phân kỳ khi $|x| > e$.

Khi $|x| = e$, theo công thức Stirling $k! \sim \sqrt{2\pi k}k^k e^{-k}$, nên $|a_k| = k!\dfrac{e^k}{k^k} \sim \sqrt{2\pi k}$. Vậy khi đó chuỗi phân kỳ theo điều kiện cần.

d) Xét sự hội tụ của $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}(1+\frac{1}{k})^{k^2}$. Dùng dấu hiệu Cauchy:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k})^k = \frac{e}{2} > 1$$

Vậy chuỗi phân kỳ.

e) Xét sự hội tụ của $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$. Dùng dấu hiệu tích phân ta xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$. Hàm giảm trên $[1,\infty)$ và tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ hội tụ khi và chỉ khi $p > 1$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $p > 1$.

Tương tự, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln^p k}$ hội tụ khi và chỉ khi $p > 1$. Điều này suy từ sự hội tụ của $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}$.

Bài tập: Xét sự hội tụ của các chuỗi số $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+a^k}\quad (a>0)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k^3+1}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k+1)}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{2^{k^2}}$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k\ln(\ln k)}$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k\ln k\ln(\ln k)\ln(\ln\ln k))}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^p}$.

Nhận xét. Khi $r = 1$ dấu hiệu D'Alembert cũng nh dấu hiệu Cauchy không kết luận được chuỗi hội tụ hay phân kỳ (xem ví dụ e))

Nhận xét. Dấu hiệu Cauchy mạnh hơn dấu hiệu D'Alembert theo nghĩa sau:

Nếu $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = r$, *thì* $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = r$.

Chiều ngược lại không có. Chẳng hạn chuỗi với số hạng $a_k = \dfrac{3+(-1)^k}{2^{k+1}}$.

Chứng minh: Từ gỉa thiết với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại N sao cho

$$(r-\epsilon)|a_k| < |a_{k+1}| < (r+\epsilon)|a_k|, \ \forall k \geq N$$

Suy ra

$$(r-\epsilon)^{k-N}|a_N| < |a_k| = |a_{N+(k-N)}| < (r+\epsilon)^{k-N}|a_N|$$

Hay $\quad A(r-\epsilon)^k < |a_k| < B(r+\epsilon)^k$, với $A = |a_N|/(r-\epsilon)^N$ và $B = |a_N|/(r+\epsilon)^N$.
Suy ra $\sqrt[k]{A}(r-\epsilon) < \sqrt[k]{|a_k|} < \sqrt[k]{B}(r+\epsilon)$.
Vậy $\quad r-\epsilon \leq \liminf \sqrt[k]{|a_k|} \leq \limsup \sqrt[k]{|a_k|} \leq r+\epsilon$.
Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi $\epsilon > 0$, nên $r \leq \liminf \sqrt[k]{|a_k|} \leq \limsup \sqrt[k]{|a_k|} \leq r$.
Suy ra $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = r$.
Bài tập: Chứng minh phần sau của khẳng định trên. □

2.2 Các dấu hiệu hội tụ cho chuỗi đan dấu.

Dirichlet: *Nếu dãy các tổng riêng* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ *bị chặn và* (b_k) *là dãy đơn điệu hội tụ về* 0*, thì* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ *hội tụ.*

Leibniz: *Nếu dãy* (a_k) *đơn điệu về* 0*, thì* **chuỗi đan dấu** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ *hội tụ.*

Abel: *Nếu* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *hội tụ và* (b_k) *là dãy đơn điệu bị chặn, thì* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ *hội tụ.*

Chứng minh: Trước hết ta có công thức tính tổng từng phần:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m} (S_k - S_{k-1}) b_k = S_m b_m - S_{n-1} b_n - \sum_{k=n}^{m-1} S_k (b_{k+1} - b_k)$$

Bây giờ ta chứng minh dấu hiệu Dirichlet. Gỉa sử $|S_n|$ bị chặn bởi M và (b_k) là dãy đơn điệu hội tụ về 0. Theo công thức trên, ta có

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \leq M|b_m| + M|b_n| + M\sum_{k=n}^{m-1} |b_{k+1} - b_k| = M(|b_m| + |b_n| + |b_m - b_n|)$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ hội tụ.

Dấu hiệu Leibniz suy từ dấu hiệu Dirichlet vì tổng riêng $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k$ bị chặn.

Để chứng minh dấu hiệu Abel, gỉa sử $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ hội tụ và (b_k) là dãy tăng đến b.

Đặt $c_k = b - b_k$. Khi đó c_k giảm về 0, và theo dấu hiệu Dirichlet $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k c_k$ hội tụ.

Suy ra $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b - \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k$ hội tụ.
Trường hợp dãy (b_k) giảm, áp dụng kết qủa trên cho $(-b_k)$. □

Ví dụ.
a) p-**chuỗi đan dấu** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}$, với $p > 0$, là hội tụ theo dấu hiệu Leibniz.
b) Xét các chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$.
Từ công thức lượng giác

$$\begin{aligned} 2\sin kx \sin \tfrac{1}{2}x &= \cos(k - \tfrac{1}{2})x - \cos(k + \tfrac{1}{2})x \\ 2\cos kx \sin \tfrac{1}{2}x &= \sin(k + \tfrac{1}{2})x - \sin(k - \tfrac{1}{2})x \end{aligned}$$

Suy ra khi $\sin \frac{1}{2}x \neq 0$, i.e. $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, thì

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx &= \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2\sin \frac{1}{2}x} \\ \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x}{2\sin \frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

Vế phải bị chặn, nên theo dấu hiệu Dirichlet hai chuỗi trên hội tụ khi $x \neq 2k\pi$.

Bài tập

Số thực - Dãy số.

1. Chứng minh các số sau là vô tỉ: $\sqrt{3}, \sqrt{2}+\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3}$, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d \in \mathbf{Q}, ad-bc \neq 0, x \notin \mathbf{Q})$.

2. Tìm $\sup A, \inf A, \max A, \min A$, nếu tồn tại, khi:
a) $A = \{\dfrac{1}{n+1} : n \in \mathbf{N}\}$ b) $A = \{\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbf{N}\}$
c) $A = \{\dfrac{1+(-1)^n}{n+1} - n^2 : n \in \mathbf{N}\}$

3. Cho $A, B \subset \mathbf{R}$. Giả sử A bị chặn và $B \subset A$. So sánh $\sup A, \sup B, \inf A, \inf B$.

4. Cho $A, B \subset \mathbf{R}$ là các tập khác trống bị chặn. Chứng minh
$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B), \inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
Đối với $A \cap B$ thì sao?

5. Chứng minh tập các số **dyadic** $D = \{\dfrac{m}{2^n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ là trù mật trong $\mathbf{R}$.

6. Cho D trù mật trong $\mathbf{R}$, và F là tập con hữu hạn của D. Chứng minh $D \setminus F$ trù mật trong $\mathbf{R}$.

7. Với $\epsilon \in \{\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \cdots, \frac{1}{10^n}\}$, tìm N_ϵ, sao cho: $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon, \ \forall n \geq N_\epsilon$.
Để ý khi ϵ càng bé, thì N_ϵ càng lớn. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

8. Tìm N sao cho $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 0,03, \ \forall n \geq N$. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$.

9. Dãy nào trong các dãy sau đây hội tụ, tiến ra vô cùng hay giao động:
a) $a_n = \frac{1}{2^n}$ b) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ c) $a_n = 10^n$ d) $a_n = n\sin\frac{\pi}{n}$
e) $a_n = (-1)^n \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})$ f) $a_n = -n^2$

10. Chứng minh các dãy sau là vô cùng bé, i.e. cho $\epsilon > 0$, tìm N sao cho $|a_n| < \epsilon$, với mọi $n \geq N$
a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ b) $a_n = \sin\frac{\pi}{n}$ c) $a_n = q^n$ $(|q| < 1)$

11. Chứng minh các dãy sau là vô cùng lớn, i.e. cho $E > 0$, tìm N sao cho $|a_n| > E$, với mọi $n \geq N$
a) $a_n = (-1)^n n$ b) $a_n = \ln\ln n$ c) $a_n = q^n$ $(|q| > 1)$

12. Điền vào các giới hạn cơ bản sau:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} =$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{a^n} =$ $(a > 1)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} =$
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} =$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n =$

13. Tính các giới hạn sau:
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2+n-7}{7n^2-2n+6}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}$
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5-2^n}{5+2^{n+1}}$ e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$ f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$
g) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+3})$ h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$
i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ j) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})$
k) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n}$ $(|a|,|b|<1)$ l) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3+\sin n}$

14. Cho $\alpha\in\mathbf{R}$. Gỉa sử $\dfrac{\alpha}{\pi}\notin\mathbf{Z}$. Chứng minh không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n\alpha$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n\alpha$.

15. Chứng minh nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$, thì dãy $((-1)^n a_n)$ giao động.

16. Chứng minh nếu $a_n \leq M$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, thì $L \leq M$.

17. Chứng minh nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.

18. Cho ví dụ dãy $(|a_n|)$ hội tụ nhưng dãy (a_n) không hội tụ. Nếu giới hạn là 0 thì sao?

19. Cho $a_n = \dfrac{1.3...(2n-1)}{2.4.6...2n}$. Chứng minh $a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

20. Dựa vào tính chất kẹp $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$, tính $\lim\limits_{n\to+\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1)$

21. Chứng minh nếu dãy (a_n) giới nội, còn (b_n) tiến về 0, thì (a_nb_n) tiến về 0.

22. Lập luận sau sai ở đâu?

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2} = 0.\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2} = 0$$

23. Đúng hay sai: một dãy số dương không bị chặn thì tiến ra vô cùng.

24. Cho $a_0 = 1,\ a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}$. Chứng minh dãy (a_n) đơn điệu, bị chặn. Tìm $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gọi là **tỉ lệ vàng**.

25. Chứng minh dãy $t_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ giảm. Suy ra $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$.

26. Cho $a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$. Chứng minh dãy (a_n) là dãy đơn điệu, bị chặn nên hội tụ. $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,5772156649\cdots$ gọi là **hằng số Euler**.

27. Đúng hay sai: nếu (a_n) đơn điệu tăng và $a_{n+1}-a_n \leq \dfrac{1}{n}$, thì (a_n) hội tụ.

28. Cho $a_1 > a_2 > 0$ và $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2}, (n \geq 2)$. Chứng minh dãy $a_1, a_3, a_5, \ldots$ giảm, dãy $a_2, a_4, a_6, \ldots$ tăng. Suy ra tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Tính L

29. Dùng tiêu chuẩn Cauchy xét sự hội tụ các dãy:
a) $s_n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, trong đó $|x| < 1$, và $|a_k| < M, \forall k$.
b) $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

30. Giả sử tồn tại $0 < r < 1$, sao cho $|a_{n+1} - a_n| \leq Cr^n, \forall n$. Chứng minh (a_n) là dãy Cauchy nên hội tụ.

31. Cho $a_0 = 1,\ a_n = 1 + \dfrac{1}{a_{n-1}}$. Chứng minh $\dfrac{3}{2} \leq a_n \leq 2$, khi $n \geq 1$. Suy ra (a_n) là dãy Cauchy (nên hội tu). Tìm $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

32. Chứng minh dãy $a_n = e^{\sin 5n}$ có dãy con hội tụ.

33. Tìm một dãy giới nội có 3 dãy con hội tụ về 3 giới hạn khác nhau.

34. Tìm $\limsup_{n\to\infty} a_n$ và $\liminf_{n\to\infty} a_n$ khi:
a) $a_n = (-1)^n(2 + \dfrac{3}{n})$ b) $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$

35. Cho dãy số dương (a_n). Chứng minh nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, thì dãy trung bình cộng và dãy trung bình nhân:
$$s_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \qquad p_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$
cũng hội tụ về a

36. Cho dãy số dương (a_n). Chứng minh nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.
Áp dụng cho $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

Giới hạn và tính liên tục của hàm số

1. Cho $f : I \to \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$. Xét dãy số (x_n) được định nghĩa đệ qui:
$$x_0 \in I \text{ là giá trị đầu, } x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$
Ta có thể dùng đồ thị hàm f để khảo sát các tính chất của dãy (x_n) (tính đơn điệu, bị chặn, hội tu, $\cdots$) bằng cách:
- Vẽ các điểm $(x_n, f(x_n)), (x_{n+1}, x_{n+1}), (x_{n+1}, f(x_{n+1}), n = 0, 1, 2, \cdots$.
- Từ đó tìm qui luật của dãy (x_n) phụ thuộc vào giá trị đầu x_0 và f.
Hãy tiến hành cách làm trên khi:
a) $f(x) = \sqrt{1+x}$ b) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ c) $f(x) = x^2 - x + 1$.

2. Cho $\epsilon > 0$, tìm $\delta > 0$ (phụ thuộc ϵ và a) sao cho $|f(x) - L| < \epsilon$, khi $|x - a| < \delta$.
a) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ a = 1,\ L = 1$ b) $f(x) = x^2,\ a = 2,\ L = 4$.

3. Chứng minh $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ không tồn tại bằng cách chỉ ra 2 dãy số (x_n) và (x'_n) cùng tiến về 0, nhưng 2 dãy $(\sin\dfrac{1}{x_n})$ và $(\sin\dfrac{1}{x'_n})$ tiến về 2 giới hạn khác nhau.

4. Điền vào các giới hạn cơ bản:
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=$
d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x}=$

5. Tính các giới hạn:
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$
d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 8x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{2}{x^2}}$
h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-4x+2}\right)^x$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3\sin x}{x-\sin x}}$

6. Chứng minh khi $x\to 0$, ta có
a) $(1+x)^p=1+px+o(x)$ b) $\sin x=x+o(x)$ c) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x)$
d) $e^x=1+x+o(x)$ e) $\ln(1+x)=x+o(x)$
Viết lại các đẳng thức trên bởi so sánh tương đương $\sim$.

7. Hãy so sánh a^x $(a>1)$, x^p, $\ln x$, khi $x\to+\infty$.

8. Tìm giới hạn phía phải và trái tại 0 của các hàm:
a) sign$x$ b) $[x]$ c) $\sqrt{x}$

9. Chứng minh nếu f liên tục tại a và $f(a)>0$, thì tồn tại $h>0$ sao cho $f(x)>0$ với mọi $x, a-h<x<a+h$.

10. Chứng minh nếu f và g liên tục thì $|f|$, $\max(f,g)$. $\min(f,g)$ cũng liên tục.

11. Xét tính liên tục của các hàm:
a) $f(x)=\dfrac{x+x^2}{x^2-1}$, $x\neq\pm 1$. $f(\pm 1)=0$
b) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $x\neq 0$. $f(0)=\alpha$.
c) $f(x)=x^{\frac{1}{x-1}}$, $x\neq 1$. $f(1)=\alpha$.

12. Cho $f(x)=\operatorname{sign}x$ và $g(x)=x(1-x^2)$.
Tìm $f(g(x))$. Suy ra các điểm gián đoạn của $f\circ g$.

13. Chứng minh "Bổ đề dán": Giả sử f liên tục trên $[a,b]$ và g liên tục trên $[b,c]$. Định nghĩa hàm h bởi $h(x)=f(x)$, $x\in[a,b]$ còn $h(x)=g(x)$, $x\in(b,c]$. Khi đó h liên tục khi và chỉ khi $f(b)=g(b)$.

14. Xác định các điểm gián đoạn và loại của chúng, khi:
a) $f(x)=\operatorname{arctg}(\dfrac{1}{x^2-1})$ b) $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$ c) $f(x)=\operatorname{sign}(\sin\dfrac{\pi}{x})$.

15. Cho $f : [0,1] \to [0,1]$ xác định bởi: nếu $x = \dfrac{p}{q}$ là phân số tối giản thì $f(x) = \dfrac{1}{q}$; nếu x vô tỉ thì $f(x) = 0$. Chứng minh f liên tục tại các điểm vô tỉ, không liên tục tại các điểm hữu tỉ.
(Hd: với mọi $\epsilon > 0$ chỉ có hữu hạn phân số tối giản $\dfrac{p}{q}$ mà $\dfrac{1}{q} > \epsilon$)

16. Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thỏa $f(tx) = tf(x)$ với mọi $t, x \in \mathbf{R}$. Chứng minh f liên tục.

17. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, liên tục và thỏa: $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

18. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, liên tục và thỏa: $f(x+y) = f(x)f(y)$.

19. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, liên tục và thỏa: $f(xy) = f(x) + f(y)$.

20. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, liên tục và thỏa: $f(xy) = f(x)f(y)$.

21. Tìm ví dụ f liên tục trên $\mathbf{R}$ nhưng f không đạt $\max$, $\min$.

22. Tìm ví dụ f tiên tục trên $[0,1)$ đạt $\max$ nhưng không đạt $\min$.

23. Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ liên tục và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Chứng minh tồn tại $\min\{f(x) : x \in \mathbf{R}\}$.

24. Chứng minh một đa thức bậc lẻ luôn có nghiệm thực.

25. Chứng minh **Định luật Descartes**: Cho đa thức
$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_jx^j - a_{j+1}x^{j+1} - \cdots - a_nx^n,$$
trong đó $a_k \geq 0, \forall k$, và $a_0 + \cdots + a_j > 0, a_{j+1} + \cdots + a_n > 0$. Khi đó $P(x)$ có đúng một nghiệm dương.
(Hd: Hàm $\dfrac{P(x)}{x^j}$ giảm trên $(0, +\infty)$.)

26. Chứng minh phương trình $\tan x = x$ có vô số nghiệm.

27. Cho f là hàm liên tục trên khỏang I. Chứng minh với mọi $x_1, \cdots, x_n \in I$, tồn tại $c \in I$, sao cho $f(c) = \dfrac{1}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n))$.

28. Chứng minh nếu $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ là hàm liên tục, thì f có điểm bất động, i.e. tồn tại $x_0 \in [a,b]$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

29. Cho $f : [1,2] \longrightarrow [0,3]$ liên tục, $f(1) = 0, f(2) = 3$. Chứng minh f có điểm bất động.

30. Cho $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ là hàm liên tục, $f(a)f(b) < 0$. Nêu phương pháp xấp xỉ tìm nghiệm phong trình $f(x) = 0$.

31. Tính gần đúng $\sqrt{2}$ với sai số ϵ bằng phương pháp chia đôi tìm nghiệm $x^2 - 2 = 0$.

32. Với $\epsilon > 0$ cho trước, tìm $\delta > 0$ sao cho: $|\sin x - \sin x'| < \epsilon$, khi $|x - x| < \delta$. Suy ra tính liên tục đều của hàm sin trên $\mathbf{R}$.

33. Cho hàm $f : X \to \mathbf{R}$. Giả sử f thoả **điều kiện Lipschitz** trên X:

$$\exists L > 0 : \; |f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|, \quad \forall x, x' \in X$$

Chứng minh khi đó f liên tục đều trên X.

34. Xét tính liên tục đều của các hàm sau trên miền được chỉ định:
a) $f(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 1$. Trên miền $0 \leq x < \infty$ thì sao?
b) $f(x) = x + \sin x$, $-\infty \leq x < +\infty$ c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $0 \leq x < \infty$.
d) $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$, $0 < x < \infty$. (Hãy vẽ đồ thị)

Phép tính vi phân

1. Cho hàm f xác định trên một khoảng chứa x_0. Gỉa sử f có thể xấp xỉ bởi hàm bậc nhất tại x_0, nghĩa là

$$f(x_0 + h) \;=\; a \;+\; bh \;+\; o(h), \text{ khi } h \to 0$$

Chứng minh khi đó $a = f(x_0)$, $b = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

2. Chứng minh khi $h \to 0$, ta có:
a) $(x + h)^2 = x^2 + 2x.h + o(h)$ b) $\sin(x + h) = \sin x + \cos x.h + o(h)$

3. Tính $f'(x)$, trên miền xác định của nó:
a) $f(x) = \sin x^2$ b) $f(x) = \cos^3(2x)$ c) $f(x) = \ln(\sin(x^2 + 1))$
d) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x + \sqrt{x}}}$ e) $f(x) = x^x$ f) $f(x) = (a^x)^a$ g) $f(x) = (x^a)^x$
h) $f(x) = \sqrt[x]{x}$ i) $f(x) = x(1 + x^2)^{\tan x}$

4. Xét tính khả vi và tính đạo hàm một phía $f'_+(x), f'_-(x)$ của:
a) $f(x) = |x^2 - 1|$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
c) $f(x) = x^n \sin\dfrac{1}{x}$, nếu $x \neq 0$; $f(0) = 0$, với $n \in \mathbf{N}$

5. Chứng minh hàm $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$, $f(0) = 0$ là khả vi nhưng f' không liên tục.

6. Xác định a để đồ thị hàm $f(x) = ax^2$ tiếp xúc với đồ thị hàm $g(x) = \ln x$.

7. Xác định góc giữa các tiếp tuyến của các đường cong $y = x^2$ và $x = y^2$ tại giao điểm.

8. Đúng hay sai: nếu hàm f xác định trên (a, b), khả vi tại c và $f'(c) > 0$, thì f đơn điệu tăng trên một lân cận của c.

9. Cho $f(x) = x$, nếu x hữu tỉ; $f(x) = \sin x$, nếu x vô tỉ. Chứng minh $f'(0) = 1$, nhưng f không tăng.

10. Chứng minh nếu f khả vi tại $c \in (a, b)$ và $f'(c) > 0$, thì tồn tại $x, c < x < b$ sao cho $f(x) > f(c)$.

11. Dựa vào tính đơn điệu chứng minh các bất đẳng thức: a) $1+x<e^x \quad (x\neq 0)$
b) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x \quad (x>0)$ c) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x \quad (x>0)$
d) $(x^p+y^p)^{1/p}<(x^q+y^q)^{1/q} \quad (0<x,y;0<q<p)$

12. Cho $\varphi:(a,b)\to\mathbf{R}$ là hàm khả vi. Giả sử tồn tại $M>0$, $|\varphi(x)|<M, \forall x\in(a,b)$.
Đặt $f(x)=x+\epsilon\varphi(x),\ x\in(a,b)$. Chứng minh f là đơn ánh khi ϵ khá bé.

13. Chứng minh không tồn tại $k\in\mathbf{R}$ để phương trình $x^3-3x+k=0$ có 2 nghiệm trên $[0,1]$.

14. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$, thì phương trình $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ có ít nhất một nghiệm trên $[0,1]$.
(Hd: Xét hàm $f(x)=\dfrac{a_0x^{n+1}}{n+1}+\cdots+a_nx$)

15. Cho hàm f có đạo hàm cấp n trên $[a,b]$. Áp dụng định lý Rolle chứng minh: nếu $f(x)=0$ có 3 nghiệm thuộc $[a,b]$, thì tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho $f''(c)=0$. Hãy tổng quát hoá khi $f(x)=0$ có $n+1$ nghiệm.

16. Chứng minh tính chất Darboux: Nếu f có đạo hàm tại mọi điểm trên $[a,b]$, thì f' nhận mọi giá trị trung gian giữa $f'(a)$ và $f'(b)$.
(Hd: Xét hàm $g(x)=f(x)-\gamma x$ với γ là gía trị nằm giữa $f'(a)$ và $f'(b)$, rồi chứng minh g phải đạt max hay min tại một điểm $c\in(a,b)$)

17. Từ bài trên chứng minh hàm $f(x)=0$ nếu $-1\le x<0$, $f(x)=1$ nếu $0\le x\le 1$, không thể có nguyên hàm trên $[-1,1]$.

18. Các hàm số sau có thoả định lý giá trị trung bình? Nếu có, hãy tìm c để $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$:
a) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}\ (0\le x\le 2)$ b) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}\ (2\le x\le 4)$
c) $f(x)=Ax+B\ (a\le x\le b)$ d) $f(x)=1-x^{2/3}\ (-1\le x\le 1)$

19. Giả sử f liên tục trên $[3,5]$, khả vi trên $(3,5)$ và $f(3)=6,\ f(5)=10$. Chứng minh tồn tại $c\in(3,5)$ sao cho đờng thẳng tiếp xúc với f tại điểm có hoành độ c đi qua gốc tọa độ.

20. Tìm gía trị c thỏa $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ đối với các hàm:
a) $f(x)=x,\ g(x)=x^2\ (0\le x\le 1)$
b) $f(x)=\sin x,\ g(x)=\cos x\ (-\dfrac{\pi}{2}\le x\le 0)$.

21. Áp dụng định lý giá trị trung bình chứng minh các bất đẳng thức:
a) $|\sin a-\sin b|\le|a-b|$ b) $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$
c) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1} \quad (x>0)$

22. Dựa vào $|f(x)-f(a)| \le \sup\limits_{c\in[a,x]} |f'(c)||x-a|$, đánh giá sự hội tụ của $f(x)$ về $f(a)$ theo ngôn ngữ ϵ-δ: với sai số $\epsilon > 0$ cho trước, tìm δ, sao cho khi $|x-a| < \delta$, thì $|f(x)-f(a)| < \epsilon$.
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

23. Cho f và g là hai hàm khả vi đến cấp n, $h = fg$. Chứng minh công thức Leibniz:
a) $h''(c) = f''(c)g(c) + 2f'(c)g'(c) + f(c)g''(c)$.
b) $h^{(n)}(c) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(c)g^{(n-k)}(c)$.

24. Dùng công thức Leibniz tính $f^{(100)}$ khi:
a) $f(x) = x^3 \sin x$ b) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{a}}$ c) $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

25. Tính đạo hàm cấp n của các hàm $a^x,\ \sin(ax+b),\ \log_a x,\ (1+x)^p$.

26. Tính $f^{(n)}(x)$ của hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.
(Hd: Hãy phân tích $f(x)$ thành các phân thức hữu tỉ)

27. Viết khai triển Taylor tại x_0 của hàm $f(x) = x^n$.

28. Từ khai triển Taylor tại $x = 0$ của hàm $f(x) = (1+x)^n$, suy ra công thức nhị thức Newton.

29. Tìm đa thức bậc 4, thỏa: $P(2) = -1, P'(2) = 0, P''(2) = -12, P'''(2) = 24$.

30. Chứng minh với mọi $a > 0, h > 0, n \in \mathrm{N}$, tồn tại $\theta \in [0,1]$ sao cho:

$$\frac{1}{a+h} = \frac{1}{a} - \frac{h}{a^2} + \frac{h^2}{a^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}h^{n-1}}{a^n} + \frac{(-1)^n h^n}{(a+\theta h)^{n+1}}.$$

31. Dựa vào khai triển Taylor các hàm sơ cấp cơ bản, viết khai triển Taylor tại 0, dạng phần dư Peano, đến bậc 4, các hàm sau:
a) $f(x) = \ln(2\cos x + \sin x)$. b) $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$. c) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

32. Cho $f(x) = \ln(1+x)$ và $g(x) = \arctan x$.
a) Tính $f^{(n)}(0)$ và $g^{(n)}(0)$. Suy ra khai triển Taylor của f và g tại $x_0 = 0$.
b) Suy ra các công thức tính gần đúng:
$\ln 2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n} + R_n$
$\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{2n+1} + R_n$
c) Hãy xác định N sao cho khi $n > N$, thì sai số $|R_n| < 10^{-3}$

33. Dùng công thức Taylor tính gần đúng các giá trị: $\sqrt[3]{29}, \sin 46^o, \ln(1,05)$, với sai số $< 10^{-3}$

34. Dùng qui tắc L'Hospital hay khai triển Taylor tính:
a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{0,0001}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x})$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ $(a, b > 0)$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1 + x^3} - 1}$ g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$

35. Chứng tỏ *không thể dùng* qui tắc L'Hospital để tính các giới hạn sau. Hãy tính các giới hạn đó bằng cách khác:
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$

36. **Công thức sai phân**. Cho f là hàm khả vi đến cấp n. Định nghĩa:
Sai phân cấp 1 của f tại a: $\Delta_h f(a) = f(a+h) - f(a)$
Sai phân cấp k của f tại a: $\Delta_h^k f(a) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(a))$, $k = 2, 3, \cdots, n$.
a) Tính $\Delta_h^2 f(a)$.
b) Dùng qui tắc L'Hospital suy ra công thức tính gần đúng:

$$f''(a) \sim \frac{\Delta_h^2 f(a)}{h^2} = \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}, \text{ khi } h \to 0$$

c) Tính $\Delta_h^k f(a)$.
d) Suy ra công thức tính gần đúng $f^{(n)}(a) \sim \dfrac{\Delta_h^n f(a)}{h^n}$, khi $h \to 0$.

37. Tìm max, min các hàm sau:
a) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $x \in [-10, 10]$ b) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$, $x \in [-1, 1]$
c) $f(x) = x^n(1 - x)^m$, $x \in [0, 1]$

38. Cho $a, b > 0$ và $m, n \in \mathbf{N}$.
a) Tìm giá trị lớn nhất của $a^m b^n$, khi $a + b$ là hằng.
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^m + b^n$, khi ab là hằng.

39. Tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất, nội tiếp và có các cạnh song song với các trục của Ellip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

40. Tìm giá trị a sao cho $p(x) = x^2 + a$ có sai số bé nhất với 0 trên $[-1, 1]$, i.e. giá trị a làm cực tiểu $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |p(x)|$.

41. Sai số của $f(x)$ và $g(x)$ trên $[a, b]$ được định nghĩa là $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$. Tìm sai số khi:
a) $f(x) = x^n, g(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$
b) $f(x) = 1 + x + \cdots + x^n, g(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, $x \in [-r, r]$ $(0 < r < 1$

42. Khảo sát các hàm số:
a) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ b) $f(x) = 2\arctan x + \arctan\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right)$

c) $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$ e) $f(x) = xe^{-x}$
f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

43. Xét phương trình bậc 3: $x^3 + px + q = 0$. Dùng phương pháp khảo sát hàm số, hãy xác định điều kiện của p, q sao cho phương trình:
a) vô nghiệm b) có 1 nghiệm c) có 2 nghiệm d) có 3 nghiệm.
Hãy vẽ tập hợp (p, q) đó trong mặt phẳng.

44. Hãy dùng tính chất lồi hay lõm của hàm số chứng minh các bất đẳng thức:
a) $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{1}{2}(e^a + e^b)$ b) $\ln\dfrac{a+b}{2} \geq \ln\sqrt{ab}$ $(a, b > 0)$
c) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n \leq \dfrac{1}{2}(x^n + y^n)$ $(x, y > 0, n > 1)$
d) $x\ln x + y\ln y \geq (x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$ $(x, y > 0)$

45. Chứng minh với $p, q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, ta có:
a) $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$, $(a, b > 0,)$

b) **Bất đẳng thức Hölder**: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

(Hd: Chia vế trái cho vế phải rồi áp dụng a) cho từng số hạng)

c) **Bất đẳng thức Minkowski**: $\displaystyle\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p}$

(Hd: Từ $|a_k + b_k|^p \leq |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + |b_k||a_k + b_k|^{p-1}$, áp dụng b))

46. **Phương pháp Newton**. Cho $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ là hàm khả vi đến cấp 2.
Giả sử $f(a) < 0 < f(b)$, và $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0, \forall x$
Để tìm dãy hội tụ về nghiệm của $f(x) = 0$, ta lập dãy sau: $x_0 = b$,
$x_{n+1} =$ giao điểm của tiếp tuyến của f tại $(x_n, f(x_n))$ với trục hoành
a) Hãy vẽ hình để thấy ý của phương pháp.
b) Chứng minh: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
c) Chứng minh với giả thiết trên (x_n) hội tụ về nghiệm của $f(x) = 0$.
d) Dùng phương pháp trên tính gần đúng $\sqrt{2}$ với sai số 10^{-6}, bằng cách xét $f(x) = x^2 - 2, x \in [1, 2]$.
e) Các giả thiết tương tự nào cho f để có thể áp dụng phương pháp Newton?

Phép tính tích phân

1. Tính các tích phân bất định:
○ Bằng phương pháp đổi biến:

a) $\int x\sqrt{4+x^2}dx$ b) $\int xe^{-x^2}dx$ c) $\int \dfrac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ d) $\int \dfrac{\sin x\cos^3 x dx}{1+\cos^2 x}$

e) $\int \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ f) $\int \sqrt{4-x^2}dx$ g) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$

∘ Bằng phương pháp tích phân từng phần:

a) $\int x^2e^{-x}dx$ b) $\int x^2\ln x dx$ c) $\int \dfrac{\ln x}{x^3}dx$ d) $\int e^x\sin x dx$ e) $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}dx$

∘ Hàm hữu tỉ:

a) $\int \dfrac{dx}{x^4-x^2-2}$ b) $\int \dfrac{dx}{(x^2-1)(x^2+1)}$ c) $\int \dfrac{x+1}{(x^2+1)^2}dx$ d) $\int \dfrac{x^2dx}{x^6-1}$

e) $\int \dfrac{dx}{x(x^2+1)^2}$ f) $\int \dfrac{dx}{x^4+1}$ g) $\int \dfrac{x^2dx}{(1-x)^{100}}$

∘ Hàm căn thức:

a) $\int \dfrac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$ b) $\int x\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}dx$ c) $\int \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

d) $\int \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ e) $\int \dfrac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x}}$ f) $\int \sqrt{-x^+4x+10}dx$

∘ Hàm lượng giác:

a) $\int \dfrac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$ b) $\int \dfrac{dx}{1+\epsilon\cos x}$ $(\epsilon>0)$ c) $\int \sin^4 x dx$

d) $\int \cos^5 x dx$ e) $\int \cos 3x\sin 5x dx$ f) $\int \sin^4 x\cos^5 x dx$ g) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$

2. Dùng công thức qui nạp theo $n\in\mathbf{N}$, tính:
   a) $I_n(a)=\int \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ b) $I_n=\int \sin^n x dx$, $J_n=\int \cos^n x dx$
   c) $I_n=\int x^ne^{-x}dx$

3. Biết rằng các hàm sau tuy có nguyên hàm nhưng nguyên hàm của chúng không là hàm sơ cấp:
$$e^{-x^2},\ \frac{\sin x}{x},\ \frac{1}{\ln x},\ \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\quad (0<k<1)$$
   Chứng minh các hàm sau cũng vậy: $\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$, $\ln x\cos x$, $\dfrac{e^x}{x}$, $\sin x^2$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi}}$.

4. Lập tổng trên và tổng dưới của f với phân hoạch P:
   a) $f(x)=x$, $x\in[0,1]$, $P=\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$.
   b) $f(x)=x$, $x\in[0,1]$, $P=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n}{n}\}$.
   c) $f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$, $P=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n}{n}\}$.
   d) $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $P=\{0,\frac{\pi}{2n},\frac{2\pi}{2n},\cdots,\frac{n\pi}{2n}\}$.
   e) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in[a,b]$, $P=\{a,aq,\cdots,aq^n=b\}$ $(0<a<b)$.
   Nêu ý nghĩa hình học việc lấy tổng ở trên.

5. Tính các giới hạn của tổng trên ở bài b) c) d) ở trên khi $n \to \infty$.
   (Hd: $2\sin\frac{x}{2}(\sin x + \cdots + \sin nx) = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x)$

6. Cho f là hàm khả tích trên $[a, b]$. Chứng minh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k(b-a)}{n}) = \int_a^b f(x)dx$$

   Tính a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}((\frac{1}{n})^2 + (\frac{2}{n})^2 + \cdots + (\frac{n}{n})^2)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{3}{n}} + e^{\frac{3.2}{n}} + \cdots + e^{\frac{3n}{n}})$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n})$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$

7. Cho $S_n = \frac{1}{n}\left[(1+\frac{1}{n})\sin\frac{2\pi}{n} + (1+\frac{2}{n})\sin\frac{4\pi}{n} + \cdots + (1+\frac{n}{n})\sin\frac{2n\pi}{n}\right]$
   a) Biểu diễn $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ qua tích phân xác định.
   b) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

8. Cho f là hàm đơn điệu trên $[0, 1]$. Chứng minh

$$\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = O(\frac{1}{n})$$

9. Đúng hay sai: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

10. Phát biểu các tính chất đã sử dụng trong việc tính tích phân:
    $\int_0^2 (3x^2 - 5)dx = 3\int_0^2 x^2dx \ - \ 5\int_0^2 dx = 3(\frac{2^3}{3} - 0) - 5(2 - 0)$.

11. Đúng hay sai: nếu $|f|$ khả tích, thì f cũng khả tích.

12. Các hàm nào trong các hàm sau khả tích Riemann trên $[0, 1]$:
    a) Hàm đặc trưng của tập $\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \cdots, 1\}$ b) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $f(0) = 7$
    c) $f(x) = \frac{1}{n}$, nếu $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$; $f(x) = 0$ trong trường hợp còn lại.
    d) Hàm Dirichlet: $\mathcal{D}(x) = 0$, nếu x hữu tỉ; $\mathcal{D}(x) = 1$, nếu x vô tỉ.

13. Đúng hay sai: nếu f khả tích trên $[a, b]$ và $f(x) = g(x)$ trừ ra một tập đếm được, thì g khả tích.

14. Đúng hay sai: nếu f khả tích trên $[a, b]$ và $f(x) = g(x)$ trừ ra một tập con hữu hạn, thì g khả tích.

15. Cho f là hàm liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh hàm $F(x) = \int_a^x f$ liên tục trên $[a, b]$ và thỏa $|F(x) - F(y)| \leq \max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|\,|x - y|$.

16. Với $0 \le x \le 1$, chứng minh $\dfrac{x^2}{\sqrt{2}} \le \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}} \le x^2$.
Suy ra $\dfrac{1}{3\sqrt{2}} \le \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx \le \frac{2}{3}$.

17. Chứng minh $\dfrac{2\pi^2}{9} \le \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\sin x}dx \le \frac{4}{9}\pi^2$.

18. Cho f là hàm liên tục trên $[a,b]$, $f \ge 0$. Chứng minh:
a) nếu tồn tại c sao cho $f(c) > 0$, thì $\int_a^b f > 0$.
b) nếu $\int_a^b f = 0$, thì $f \equiv 0$.

19. Chứng minh nếu f, g là các hàm khả tích trên $[a,b]$, thì

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

20. a) Với $n = 1, 2, 3, \cdots$, chứng minh $\displaystyle\int_1^n \ln x dx \ < \ \ln n! \ < \ \int_1^{n+1} \ln x dx$.
b) Suy ra $e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}$, và đánh giá $n! = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n O(n)$.

21. Cho $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ là hàm dương, đơn điệu giảm. Gọi

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k) \text{ và } I_n = \int_1^n f(x)dx$$

a) Chứng minh $f(k) < \displaystyle\int_{k-1}^k f(x)dx < f(k-1) \quad (k = 2, 3, \cdots)$
b) Chứng minh dãy $(S_n - I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ giảm, và có giới hạn thuộc $[0, f(1)]$.
c) Áp dụng cho dãy $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

22. Dùng định lý giá trị trung bình của tích phân, chứng minh hàm
$f(x) = x + \displaystyle\sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, luôn có nghiệm trong $(-\pi, \pi)$.

23. Cho f là hàm liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$

24. Cho $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t + t^6}dt$. Tính $\dfrac{df}{dx}$ và $\dfrac{df}{dt}$.

25. Giả sử f liên tục, $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f$. Tìm $F'(x)$.

26. Giả sử hàm φ khả vi trên $[a,b]$, hàm f liên tục trên $\varphi([a,b])$. Chứng minh $\dfrac{d}{dx}(\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(t)dt) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

27. Tính tích phân xác định:

∘ Bằng phương pháp đổi biến:

a) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$ b) $\int_1^a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$

∘ Bằng phương pháp tích phân từng phần:

a) $\int_0^1 xe^x dx$ b) $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ c) $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$

∘ Hàm hữu tỉ:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}$ b) $\int_0^1 \frac{xdx}{(1+x)^2}$ c) $\int_0^1 \frac{x^5dx}{1+x^2}$ d) $\int_0^1 \frac{dx}{x^4+4x^2+3}$

∘ Hàm căn thức:

a) $\int_{\sqrt{2}/3}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ b) $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{2+x}+1}$

∘ Hàm lượng giác:

a) $\int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\cos^2 x-3}$ b) $\int_0^\pi \sin^4 x dx$ c) $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$ d) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$

28. Cho f là hàm khả tích trên $[-a,a]$. Chứng minh:
a) Nếu f là hàm chẵn, thì $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$ b) Nếu f là hàm lẻ, thì $\int_{-a}^a f = 0$

29. Cho f là hàm có chu kỳ T và khả tích trên $[0,T]$. Chứng minh với mọi $a\in\mathbf{R}$, ta có $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$

30. Cho f là hàm liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh:
a) $\int_0^\pi f(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ b) $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$
Áp dụng tính $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$, $\int_0^\pi \frac{x^3\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

31. Lập luận sau sai ở đâu?
Cho $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$. Khi đó $f(x)=\frac{d}{dx}(\frac{-1}{1+x})$.
Vậy $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^a f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}(\frac{-1}{1+a}-\frac{1}{1+a}) = 0.$

32. Tính các tích phân suy rộng:
a) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2/3}}$ b) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{4/3}}$ c) $\int_0^1\frac{dx}{x^{2/3}}$ d) $\int_0^1\frac{dx}{x^{4/3}}$ e) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$
f) $\int_0^{+\infty} x\cos x dx$ g) $\int_0^{+\infty} x\ln x dx$ h) $\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

33. Dùng các dấu hiệu thích hợp, xét sự hội tụ các tích phân:
a) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}$ b) $\int_1^{+\infty}\frac{x^n dx}{1+x^m}$ $(n\geq 0)$ c) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)dx}{x^n}$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x dx}{2+x^n}$ e) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ f) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$ g) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$

h) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x dx}{1-x^2}$ i) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$

34. Xét sự hội tụ của các tích phân sau ($p, q, p_1, \cdots, p_n$ là các tham số):

a) $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x}dx$ c) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$

d) Hàm Gamma $\Gamma(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{p-1}dx$

e) Hàm Beta $B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos^p x\sin^q x}$ g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$

35. Chứng minh tích phân sau hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$

36. Cho f là hàm liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ hội tụ.

Chứng minh $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi/2}f(\sin u)du$

(để ý là tích phân vế phải không là tích phân suy rộng).

37. Chứng minh hàm $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t^{3/2}}dt$ $(0<x<\infty)$ đạt max tại $x=\pi$.

38. Nhờ tổng Riemann của tích phân $\displaystyle\int_0^1\ln x dx$, suy ra $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

39. Trong $\mathbf{R}^2$, tính diện tích miền giới hạn bởi các đường cong:

a) $y=x^2+4,\ y=x+4$ b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ y=x^2$ (phần dưới)

c) $y=\ln(\dfrac{k}{x}),\ y=0,\ x=1,\ x=e\ \ (k>0)$. Tìm $k\in\mathbf{N}$ để diện tích $<e-2$.

d) Đường Cycloid: $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ và $y=0$ (tính một nhịp)

e) Đường Lemniscate cho trong tọa độ cực: $r^2=a^2\cos 2\varphi$

f) Đường trái tim cho trong tọa độ cực: $r=a(1+\cos\varphi)$

40. Tìm giá trị lớn nhất của $I(t)=\displaystyle\int_0^1|e^x-t|dx$.

41. Trong $\mathbf{R}^3$, tính thể tích vật thể mặt tròn xoay giới hạn bởi mặt cong:

a) Tạo bởi đường cong $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ -a\le x\le a$, xoay quanh trục Ox.

b) Tạo bởi đường cong $y^2=4-x,\ 0\le x\le 4$, xoay quanh trục Oy.

42. Trong $\mathbf{R}^2$, tính độ dài các đường cong:

a) $y^2=\dfrac{1}{9}x^3,\ 0\le x\le 1, y>0$ b) $y^2=2px, a\le x\le b$

c) Đường Astroide: $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$

d) Cho trong tọa độ cực: $r=\sin^3\dfrac{\varphi}{3},\ 0\le\varphi\le\pi/2$

Chuỗi số .

1. Biểu diễn các số sau dưới dạng chuỗi số:
$0,61111\cdots,\quad 1,33333\cdots,\quad -2,343434\cdots,\quad e,\ \pi,\ \ \ln 2.$

2. Lập luận sau sai ở đâu?
Cho $S = 1+2+4+8+16+\cdots$. Khi đó $2S = 2+4+8+\cdots = S-1$. Vậy $S=-1$.

3. Chứng minh nếu $a_1+a_2+a_3+\cdots$ hội tụ về S, thì $a_2+a_3+\cdots$ hội tụ về $S-a_1$.

4. Chứng minh các chuỗi sau hội tụ vì dãy tổng riêng hội tụ. Xác định tổng:
a) $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\dfrac{1}{4.5}+\dfrac{1}{5.6}+\cdots$
b) $\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}+\dfrac{1}{10.13}+\cdots$
c) $\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{4.6}+\dfrac{1}{7.9}+\dfrac{1}{10.12}+\dfrac{1}{13.15}+\cdots$
d) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\cdots$
e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k+3^k}{6^k}$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1-x}{1+x})^k.$ g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$
h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+m)}$ $(m\in\mathbf{N})$

5. Dùng các dấu hiệu hội tụ thích hợp, xét sự hội tụ của các chuỗi sau:
a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{k!}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1+k}{1+k^2}$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{4+2^k}$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\ln k}{k^2+2k+3}$ e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!3^k}{k^k}$
f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$ g) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^k}$ h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{k})^{2k}}{e^k}$ i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ j) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$
k) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^p\ln^q k}$ l) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sin kx$

6. Cho $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{(-1)^k}{k}$. Chứng minh $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ phân kỳ.
(chú ý là $a_k>0$ và $a_k\to 0$, nhưng không đơn điệu).

7. Cho chuỗi $(\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{4})^1+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{4})^3+(\frac{1}{2})^4+\cdots$. Hãy kiểm tra sự hội tụ bằng dấu hiệu D'Alembert. Chuỗi có hội tụ?

8. Xét chuỗi $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$. Gọi tổng riêng thứ n là S_n.
a) Khi $p>0$, chứng minh $\dfrac{1}{(k+1)^p} < \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x^p}dx < \frac{1}{k^p}$ $(k=1,2,\cdots)$.
Suy ra chuỗi hội tu khi và chỉ khi $p>1$.

b) Khi $p > 1$, chứng minh $S_{n-1} + \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \ < \ S \ < \ S_n + \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$

c) Suy ra ta có sai số: $\dfrac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}} < S - S_n < \dfrac{1}{(p-1)n^{p-1}}$

9. Cho $a_k, b_k > 0$. Gỉa sử $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ và $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ hội tụ. Chứng minh
$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k, \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2, \ \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)^2, \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ cũng hội tụ.

10. Lập luận sau sai vì sao?

$$\begin{aligned} 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots \ &= \ 1 + (\tfrac{1}{2} - 1) + \tfrac{1}{3} + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{5} + (\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3}) + \cdots \\ &= \ (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots) \ - 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \cdots \\ &= \ (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots) \ - \ (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots) \\ &= \ 0. \end{aligned}$$

11. Đúng hay sai:
$1 + x^2 + x + x^4 + x^6 + x^3 + x^8 + x^{10} + x^5 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$, với $|x| < 1$.