

Khám Phá Ứng Dụng Của Cực Và Đối Cực



KHÁM PHÁ ỨNG DỤNG CỦA CỰC VÀ ĐỐI CỰC

Hoàng Quốc Khánh

Cực và đối cực là một công cụ mạnh và thú vị của hình học. Với cực và đối cực ta có thể đưa ra cách nhìn khá nhất quán với một số dạng toán đặc trưng (quan hệ vuông góc, thẳng hàng, đồng quy, ...).

Cực và đối cực mà thường gặp ở bậc THPT là cực và đối cực với đường tròn hoặc cặp đường thẳng. Đây là một bài viết đề cập đến ứng dụng của cực và đối cực đối với đường tròn.

A) KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN CÓ:

Để có thể hiểu cặn kẽ bài viết này mỗi bạn đọc cần trang bị cho mình những kiến thức cơ sở về hình học phẳng và về phép nghịch đảo, hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa, tứ giác điều hòa, đường tròn trực giao, định lý Pappus, định lý Pascal, ...

B) KIẾN THỨC CƠ SỞ VỀ CỰC VÀ ĐỐI CỰC ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN

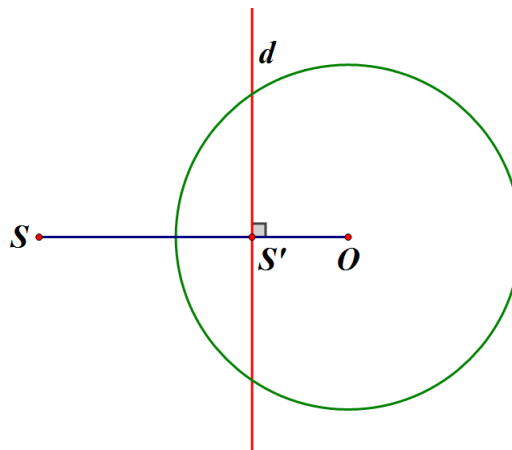
I. ĐỊNH NGHĨA:

Trên mặt phẳng cho đường tròn (O, R) và một điểm S khác O .

Phép nghịch đảo cực O phương tích R^2 biến S thành S' .

Gọi d là một đường thẳng qua S' và vuông góc với OS . Khi ấy ta gọi:

- d là đường đối cực của S đối với đường tròn (O) .
- S là cực của d đối với đường tròn (O) .



Ghi chú: Có thể nhiều bạn sẽ thấy định nghĩa này hình như khác với các định nghĩa phổ biến ở Việt Nam (chẳng hạn xem [2] hoặc [4]) tuy nhiên tác giả thấy rằng định nghĩa trên ngắn gọn hơn mà vẫn đảm bảo tính chính xác của vấn đề nên đã chọn nó và cũng rất vui vì thấy trong [5] cũng dùng nó.

II. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ:

Trong mục này, các định lý sẽ chưa đưa ra chứng minh ngay vì lý do riêng.

• **Định lý 1:** Tập hợp các điểm P liên hợp với điểm S (cho trước) đối với đường tròn (O) là đường đối cực của S . (Ta nói hai điểm S và P liên hợp với nhau đối với đường tròn (O) nếu đường tròn đường kính SP trực giao với (O))

Từ đây ta thu được:

Hệ quả 1: Với hai điểm S, P trên mặt phẳng mà P nằm trên đường đối cực của S đối với (O) và SP cắt (O) ở M, N thì bốn điểm S, P, M, N lập thành một hàng điểm điều hòa.

Hệ quả 2: (Đảo của Hệ quả 1) Với hai điểm S, P trên mặt phẳng mà SP cắt (O) ở M, N thỏa mãn bốn điểm S, P, M, N lập thành một hàng điểm điều hòa thì P nằm trên đường đối cực của S và S nằm trên đường đối cực của P .

• **Định lí 2:** OS vuông góc với đường đối cực của S .

• **Định lí 3:** Với hai điểm S, Q , đường đối cực của S đi qua Q khi và chỉ khi đường đối cực của Q sẽ đi qua S . (**Định lí La Hire**)

• **Định lí 4:** Ba điểm (khác tâm đường tròn xét cực và đối cực) thẳng hàng khi và chỉ khi ba đường đối cực của chúng đồng quy hoặc song song.

• **Định lí 5:** Bốn điểm (khác tâm đường tròn xét cực và đối cực) lập thành một hàng điểm điều hòa khi và chỉ khi các đường đối cực của chúng lập thành một chùm điều hòa.

III. MỘT SỐ CÁCH XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG ĐỐI CỰC THÔNG DỤNG:

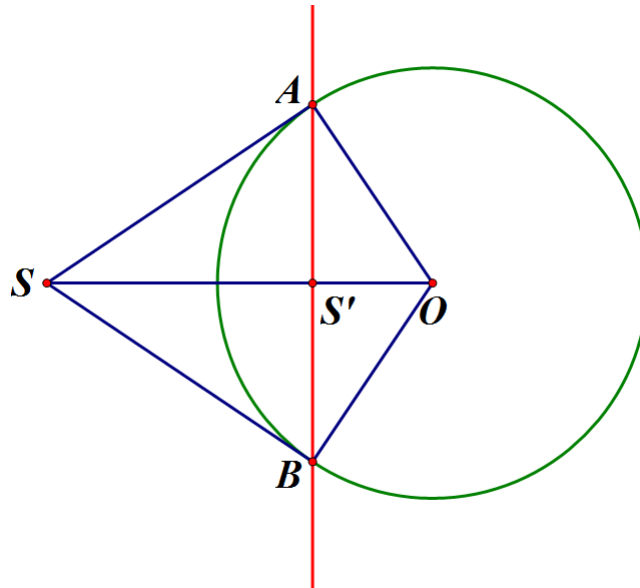
Đây sẽ là một phần rất quan trọng để bạn có thể tư duy nhanh theo lối cực đối cực!

■ **Trường hợp 1:** Khi cực S ở ngoài đường tròn (O) .

Ta có 2 cách dựng đơn giản sau đây:

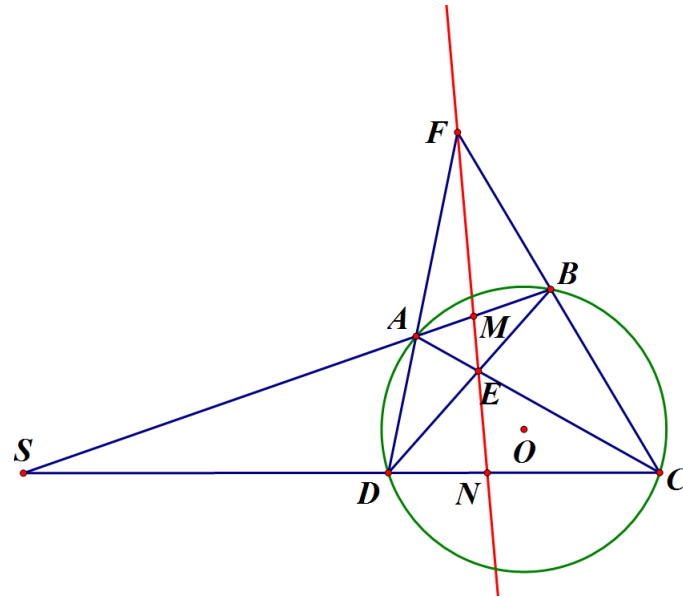
• **Cách 1:** Từ S kẻ tới (O) hai tiếp tuyến SA, SB (A, B là tiếp điểm). Khi đó đường đối cực của S đối với (O) là AB .

Gợi ý chứng minh: Dựa vào định nghĩa.



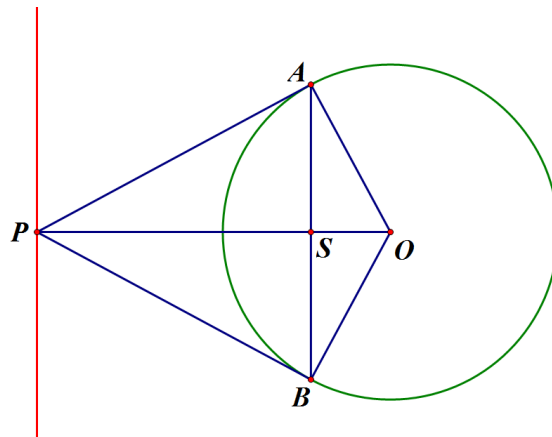
• **Cách 2:** Từ S kẻ tới (O) hai cát tuyến SAB, SCD . Giả sử AD cắt BC ở E , AC cắt BD ở F . Khi đó đường đối cực của S đối với (O) là EF .

Gợi ý chứng minh: Giả sử FE cắt AB, CD lần lượt ở M, N . Hãy dùng Định lí Menelaus hoặc kiến thức về tỉ số kép để chứng minh: $(SMAB) = (SNCB) = -1$ rồi dùng **Hệ quả 2** là ra.

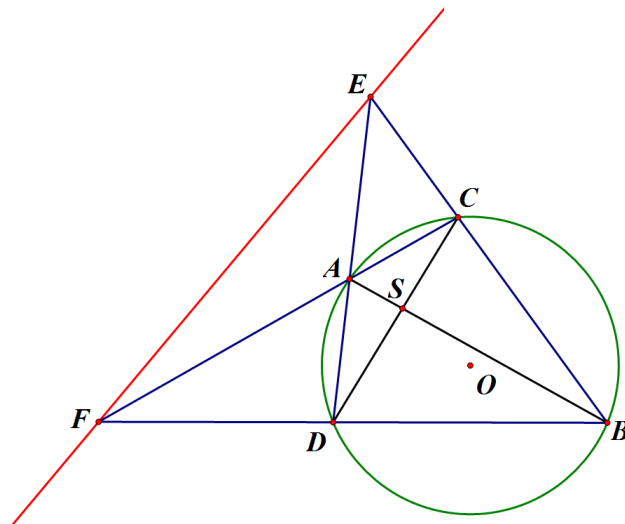


■ Trường hợp 2: Khi cực S nằm trong đường tròn (O) .

• Cách 1: Qua S dựng đường vuông góc với OS , đường này cắt (O) ở A, B . Tiếp tuyến của (O) tại A, B cắt nhau ở P . Khi đó đường đối cực của S đối với (O) là đường thẳng qua P vuông góc với OS .

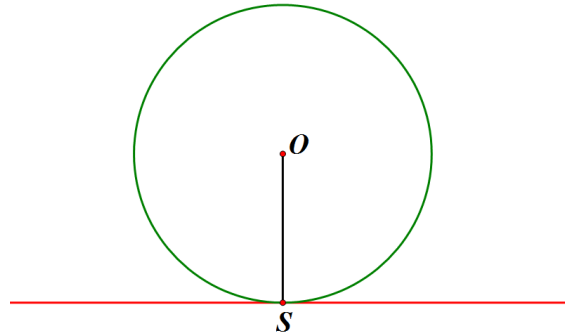


• Cách 2: Qua S dựng hai dây cung AB và CD . Giả sử AD cắt BC ở E , AC cắt BD ở F . Khi đó đường đối cực của S đối với (O) là EF .



■ Trường hợp 3: S nằm trên (O) .

Rất đơn giản: Tiếp tuyến của (O) tại S chính là đường đối cực của S đối với (O) .



IV. MỘT SỐ CÁCH XÁC ĐỊNH CỰC THÔNG DỤNG:

Điều này dành cho bạn đọc tự tìm hiểu dựa vào mục trên.

C) KHÁM PHÁ ỨNG DỤNG CỦA CỰC VÀ ĐỐI CỰC:

Những bài toán dưới đây đều là những bài toán hay và đa phần chúng có thể giải bằng phương pháp khác, tuy nhiên những lời giải được chọn tất nhiên sẽ thể hiện ý tưởng của bài viết. Chúc các bạn sẽ có nhiều niềm vui khi theo dõi nó.

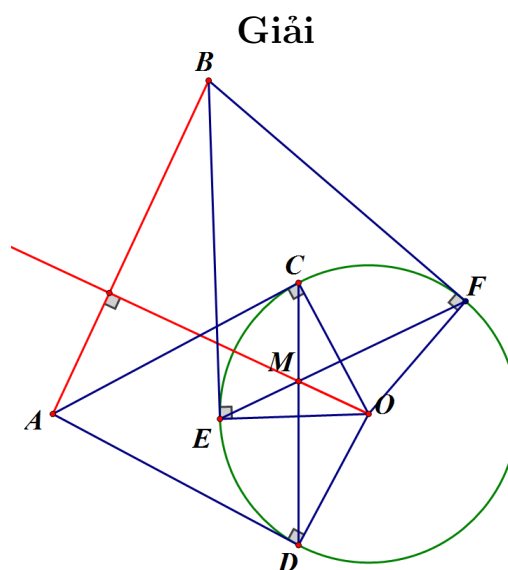
I. BÀI TOÁN VỀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC, SONG SONG GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG:

Định lí 2 chính là "chủ tướng" của những ý tưởng để giải quyết các bài toán ở mục này.

Chúng ta hãy đến với bài toán sau:

Bài toán 1: Cho đường tròn (O) tâm O và bán kính R . Qua M vẽ hai dây cung CD và EF không đi qua tâm O . Hai tiếp tuyến tại C, D của (O) cắt nhau tại A , hai tiếp tuyến tại E, F của (O) cắt nhau tại B . Chứng minh rằng OM và AB vuông góc với nhau.

(T7/362 - Tạp chí toán học và tuổi trẻ)



Ta xét cực và đối cực đối với (O) .

Đường đối cực của A là CD đi qua M nên đường đối cực của M sẽ đi qua A . (Định lí 3) (1)

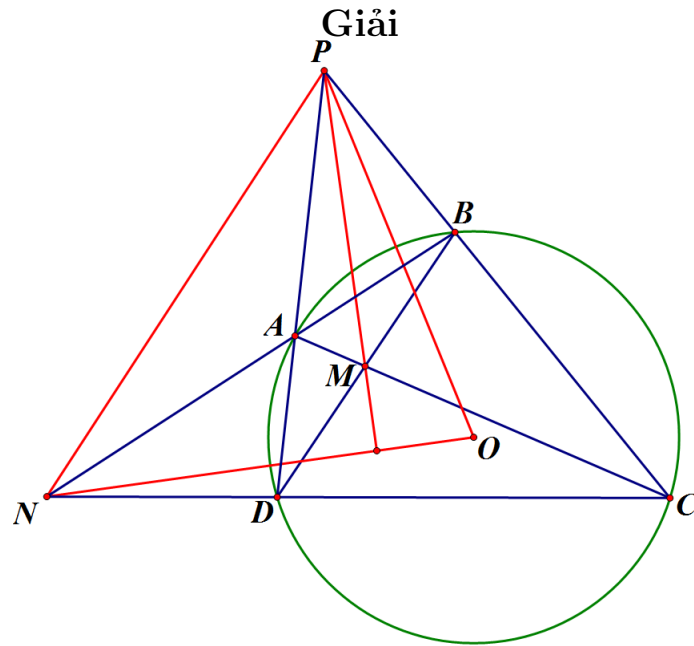
Tương tự có đường đối cực của M đi qua B . (2)

Từ (1) và (2) suy ra đường đối cực của M chính là AB .

Đến đây theo **Định lí 2** ta có điều phải chứng minh. \square

Tiếp theo là một định lí rất nổi tiếng của hình học phẳng cùng cách chứng minh vô cùng ngắn gọn dựa trên cực và đối cực!

Bài toán 2 (Định lí Brocard): Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Giả sử AC cắt BD ở M , AB cắt CD ở N , AD cắt BC ở P . Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác MNP .



Xét cực và đối cực đối với (O) .

Ta thấy PM là đường đối cực của N nên theo **Định lí 2** có ON vuông góc với PM (1).

Tương tự có: OM vuông góc với PN (2).

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh! \square

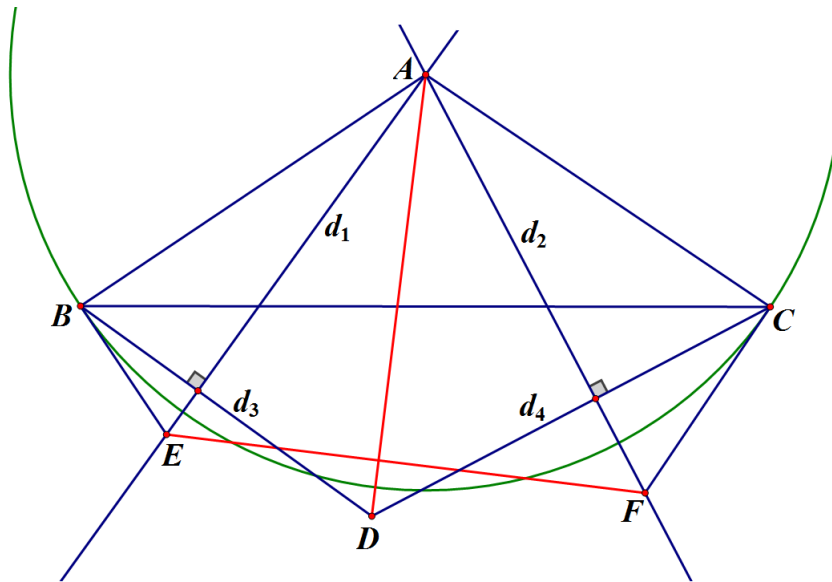
Và một ví dụ ý nghĩa nữa mà các bạn nên suy nghĩ trước khi đọc lời giải:

Bài toán 3: Cho tam giác ABC cân tại A . Hai đường thẳng d_1, d_2 bất kì qua A . Các đường thẳng qua B, C tương ứng vuông góc với d_1, d_2 cắt nhau tại D . Đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt d_1 tại E . Đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt d_2 tại F . Chứng minh rằng AD vuông góc với EF .

Giải

Bạn có thấy xuất hiện đường tròn nào ở đề toán không? Rõ ràng là không nhỉ?

Đúng là bài toán không có đường tròn trong đề nhưng xuất hiện một "yếu tố tròn" đáng quan tâm là $AB = AC$, để từ đó "đường tròn có ích" xuất hiện: Đường tròn tâm A bán kính AB (gọi tắt là (A)).



Xét cực và đối cực đối với (A) .

Ta thêm một số kí hiệu:

d_3 là đường thẳng qua B và vuông góc với d_1 .

d_4 là đường thẳng qua C và vuông góc với d_2 .

Dễ nhận thấy BE, CF là các tiếp tuyến của (A) .

Nhận thấy: Đường đối cực của E sẽ đi qua B và vuông góc với AE , hay chính là d_3 .

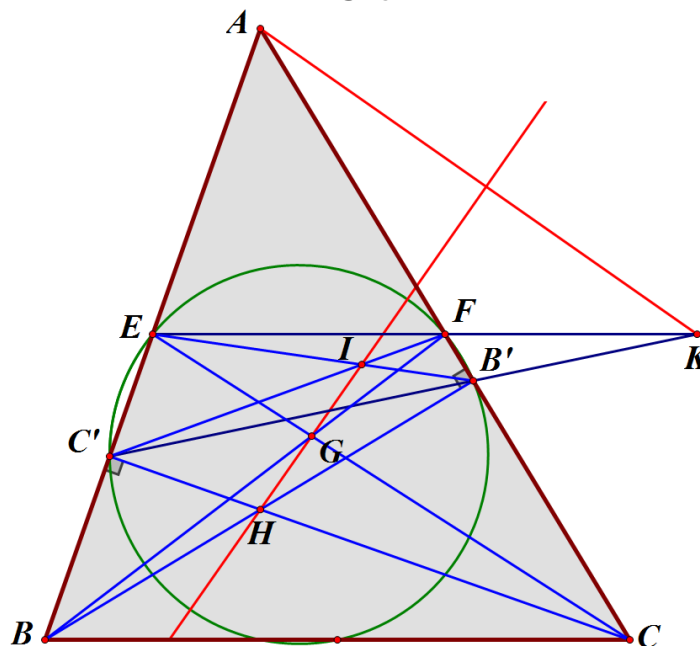
Tương tự đường đối cực của F sẽ là d_4 .

Chú ý đến **Định lí 3** ta sẽ có cực của EF chính là D . Do vậy theo **Định lí 2** thì bài toán được giải quyết! \square

Tiếp đến là ba bài toán có mức độ cao hơn một chút:

Bài toán 4: Cho tam giác ABC với các đường cao BB', CC' . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, AB . EF cắt $B'C'$ ở K . Chứng minh rằng AK vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC .

Giải



Ta sẽ xét cực và đối cực đối với đường tròn Euler của tam giác ABC (kí hiệu là (S) với S là tâm). Gọi I là giao điểm của FB' và EC' , G là giao điểm của CF và BE , H là giao điểm của BB' và CC' . Sử dụng định lý Pappus cho hai bộ 3 điểm (F, C', B) và (E, B', C) ta suy ra H, G, I thẳng hàng.

Do đó SI chính là đường thẳng Euler của tam giác ABC (1)

Mặt khác, chú ý E, F, B', C' cùng nằm trên (S) thì suy ra AK chính là đường đối cực của I , đến đây dùng **Định lý 2** ta có SI vuông góc với AK . (2)

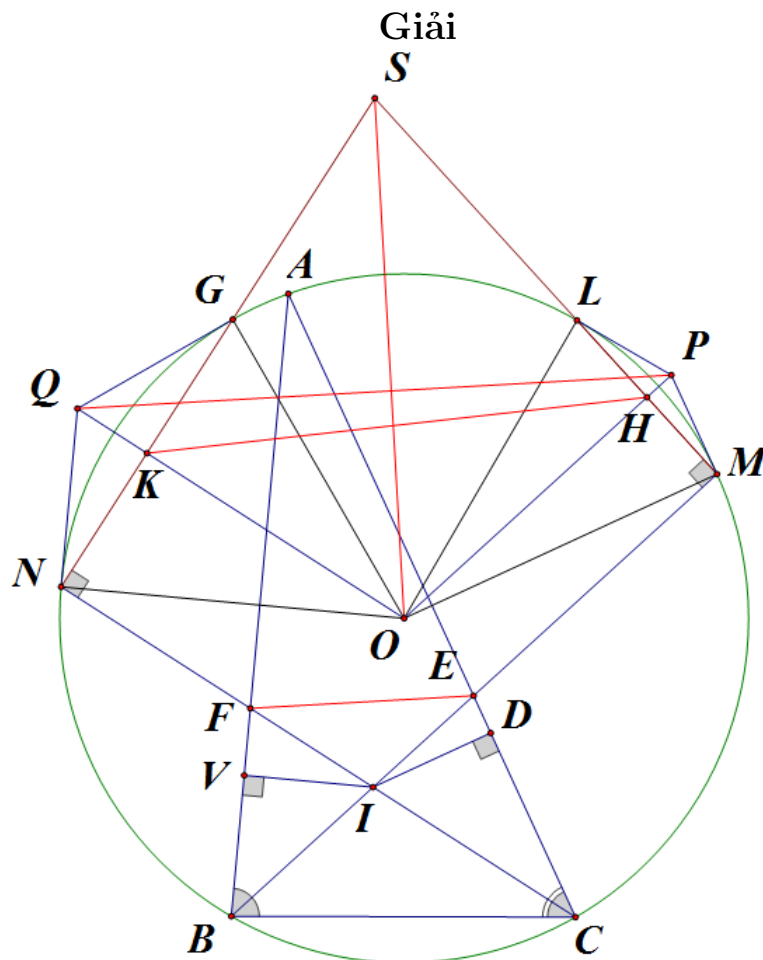
Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh. \square

Bình luận: Như các bạn đã biết H và O là hai điểm đẳng giác và như vậy bài toán sau xuất hiện:

Bài toán 4.1: Gọi hai điểm P, Q là hai điểm đẳng giác đối với tam giác ABC . Kẻ PH, PK lần lượt vuông góc với AB, AC ; kẻ QM, QN lần lượt vuông góc với AB, AC . Giả sử HK cắt MN ở S . Khi đó AS có vuông góc với PQ hay không?

Thật tuyệt vời là chúng vẫn vuông góc với nhau! Tuy nhiên bạn cũng sẽ dễ dàng cảm nhận được nếu làm hoàn toàn tương tự trong bài 4 thì không "trảm" được bài này, nói rõ ràng hơn là định lý Pappus đã bị rơi vào thế yếu, chúng ta vẫn dùng được ý tưởng của cực và đối cực nhưng cần một công cụ khác hữu ích hơn khi chứng minh tính thẳng hàng. Các bạn thử suy nghĩ xem và vấn đề sẽ được giải quyết trong một bài viết tới của tác giả...

Bài toán 5: (Hoàng Quốc Khánh) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) . Các phân giác trong BE, CF cắt lại (O) lần lượt ở M, N . Đường thẳng qua M vuông góc với BM cắt đường thẳng qua N vuông góc với CN tại S . Chứng minh rằng SO vuông góc với EF .



Xét cực và đối cực với (O) .

Ta sẽ xác định đường đối cực của S , rồi chứng minh nó song song với EF .

SN, SM cắt lại (O) lần lượt ở L, G .

Chú ý rằng ta có C, O, G thẳng hàng; B, O, L thẳng hàng.

Tiếp tuyến của (O) tại G, N cắt nhau ở Q .

Tiếp tuyến của (O) ở L, M cắt nhau ở P .

OP cắt LM ở H , OQ cắt NG ở K .

Ta thấy:

Đường đối cực của Q là GN đi qua S nên đường đối cực của S đi qua Q . (**Định lí 3**)

Tương tự có đường đối cực của S cũng đi qua P .

Do đó đường đối cực của S là PQ .

Bây giờ ta cần chứng minh $PQ \parallel EF$.

Chú ý rằng $IE \parallel OP, IF \parallel OQ$ thế nên để có $PQ \parallel EF$ ta chỉ cần chứng minh $(\vec{FI}, \vec{FE}) \equiv (\vec{QO}, \vec{QP}) \pmod{2\pi}$.

Mặt khác nhận thấy: $\overline{OK} \cdot \overline{OQ} = OG^2 = OL^2 = \overline{OH} \cdot \overline{OP}$

Từ đó suy ra Q, K, H, P đồng viên nên $(\vec{QO}, \vec{QP}) \equiv (\vec{HK}, \vec{HO}) \pmod{2\pi}$

Suy ra ta cần có $(\vec{FI}, \vec{FE}) \equiv (\vec{HK}, \vec{HO}) \pmod{2\pi} (*)$

Kẻ ID, IV lần lượt vuông góc với AC, AB chú ý rằng:

$$\begin{aligned} \frac{IE}{IF} &= \frac{\sin \widehat{IED}}{\sin \widehat{IFV}} = \frac{\sin \widehat{IFV}}{\sin \widehat{IED}} \quad (\text{vì } ID = IV) \\ &= \frac{\sin \left(A + \frac{C}{2} \right)}{\sin \left(A + \frac{B}{2} \right)} = \frac{\sin \widehat{NAC}}{\sin \widehat{MAB}} = \frac{CM}{BM} \quad (\text{Theo định lý hàm sin}) = \frac{OK}{OH} \quad (1) \end{aligned}$$

(Vì OK là đường trung bình của tam giác GNC , OH là đường trung bình của tam giác LBM)

Lại có $IE \parallel OH, IF \parallel OK$ nên $(\vec{IE}, \vec{IF}) \equiv (\vec{OH}, \vec{OK}) \pmod{2\pi}$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác IEF đồng dạng với tam giác OKH . Do đó $(*)$ đúng nên có điều cần chứng minh. \square

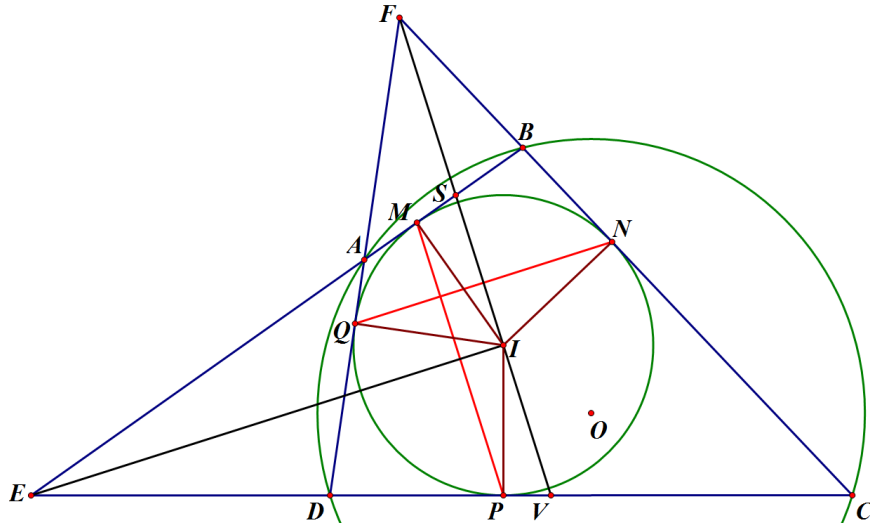
Bình luận: Các bạn hãy suy nghĩ về bài toán sau:

Bài toán 5.1: Giả sử AD, BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác nhọn ABC . Gọi M, N lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (DE, CF) và (DF, BE) . Chứng minh rằng đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng MN đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC . (**Tạp chí toán học và tuổi trẻ**)

Bài toán 5 được tác giả nghĩ ra độc lập với **Bài toán 5.1** nhưng có một điều khá thú vị là hai bài trên gần như tương đương.

Bài toán 6: Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (I) và nội tiếp (O) . Tiếp điểm của (I) trên AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q . Chứng minh rằng MP vuông góc với NQ .

Giải



Trường hợp tứ giác $ABCD$ có ít nhất 1 cặp cạnh đối song song thì đơn giản, ta sẽ giải bài toán trong trường hợp còn lại.

Xét cực và đối cực đối với (I) . AB cắt CD ở E . AD cắt BC ở F .

Ta thấy cực của MP là E , cực của NQ là F . Để giải bài toán ta cần chứng minh IE và IF vuông góc với nhau.

Thật vậy:

Chú ý IE, IF lần lượt là phân giác của $\widehat{AED}, \widehat{AFB}$.

Gọi giao điểm của IF với AB và CD lần lượt là S, V , ta cần chứng minh tam giác ESV cân tại E .

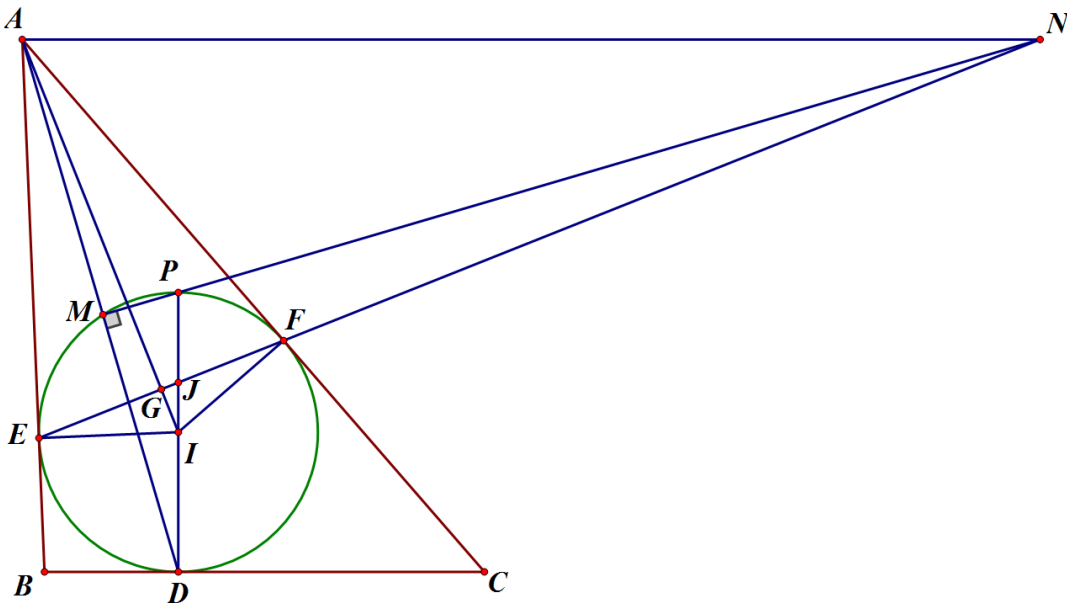
Ta thấy:

$(\vec{SE}, \vec{SV}) \equiv (\vec{FA}, \vec{FS}) + (\vec{AM}, \vec{AF}) \equiv (\vec{FS}, \vec{FB}) + (\vec{CB}, \vec{CD}) \equiv (\vec{VS}, \vec{VE}) \pmod{2\pi}$ suy ra tam giác ESV cân ở E .

Suy ra điều cần chứng minh. \square

Bài toán 7: Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp là (I) . Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . AD cắt lại (I) ở M . Đường thẳng qua M vuông góc với AD cắt EF ở N . Chứng minh rằng $AN \parallel BC$.

Giải



Xét cực và đối cực đối với (I) .

Gọi P là giao điểm thứ hai của MN với (I) . Dễ thấy D, P, I thẳng hàng.

EF cắt IP, IA lần lượt ở J, G .

Ta thấy $\overline{AM} \cdot \overline{AD} = AE^2 = \overline{AG} \cdot \overline{AI}$ suy ra M, G, I, D đồng viên.

Do đó:

$$\begin{aligned} (GM, GF) &\equiv (GA, GF) - (GA, GM) \equiv \frac{\pi}{2} - (DI, DM) \equiv (MD, MP) - (DI, DM) \\ &\equiv (PM, PD) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Suy ra $MGJP$ nội tiếp.

Từ đó có: $\overline{NJ} \cdot \overline{NG} = \overline{NP} \cdot \overline{NM} = \overline{NE} \cdot \overline{NF}$.

Chú ý rằng G là trung điểm của FE nên suy ra $(NJE F) = -1$ (Theo Maclaurine) Hay N thuộc đường đối cực của J (theo **Hệ quả 2**) (1).

Mặt khác đường đối cực của A là EF đi qua J nên đường đối cực của J đi qua A (**Định lí 3**) (2).

Từ (1) và (2) suy ra đường đối cực của J là AN , theo **Định lí (2)** ta có IJ vuông góc với AN .

Mà IJ vuông góc với BC nên suy ra điều phải chứng minh. \square

Bình luận:

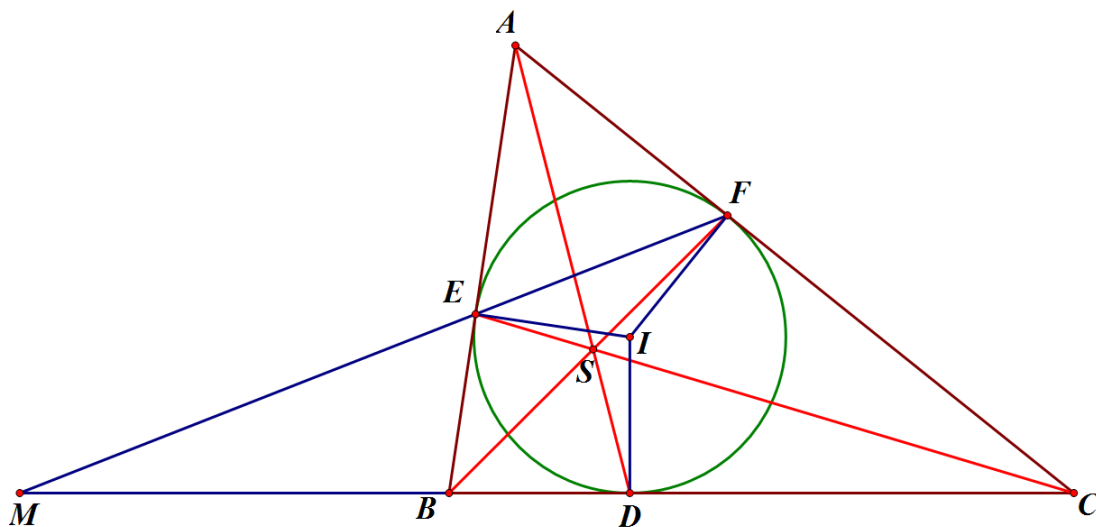
Có thể khái quát ý tưởng dùng cực và đối cực để chứng minh tính song song như sau: Giả sử có hai đường thẳng d, d' và đường tròn (O) . Để chứng minh $d \parallel d'$ ta cần chứng minh tâm O nằm trên đường nối hai cực của d và d' đối với (O) (Trường hợp có một trong hai đường đi qua tâm đường tròn xét cực và đối cực thì đơn giản hơn). Và tất nhiên để chứng minh tính thẳng hàng liên quan tới tâm đường tròn ta có thể làm ngược lại, điều đó sẽ được bàn chi tiết hơn ở phần sau.

II. CHỨNG MINH TÍNH THẲNG HÀNG VÀ ĐỒNG QUY:

Đây là dạng ứng dụng phổ biến và có lẽ được nhiều bạn quen dùng nhất. Về phần này, các bài toán ví dụ sẽ có mức độ không cao lắm nhưng đủ để thể hiện cách thức sử dụng, những bài toán khó hơn sẽ được đặt ở phần bài tập. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng bài toán sau:

Bài toán 8: Cho tam giác ABC với (I) là đường tròn nội tiếp. Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Gọi M, N, P lần lượt là điểm chung của các cặp đường thẳng (EF, BC) , (DF, CA) , (DE, AB) . Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Giải



Xét cực và đối cực đối với (I) .

Đường đối cực của A là EF qua M , nên đường đối cực của M qua A . (**Định lí 3**).

Mặt khác dễ thấy đường đối cực của M đi qua D nên suy ra đường đối cực của M là AD .

Hoàn toàn tương tự ta có:

Đường đối cực của N là BE và đường đối cực của P là CF .

Dùng định lí Ceva ta sẽ có AD, BE, CF đồng quy nên theo **Định lí 4** ta có M, N, P thẳng hàng.

Đó là điều phải chứng minh. \square

Bình luận: Bài toán trên có thể mở rộng như sau:

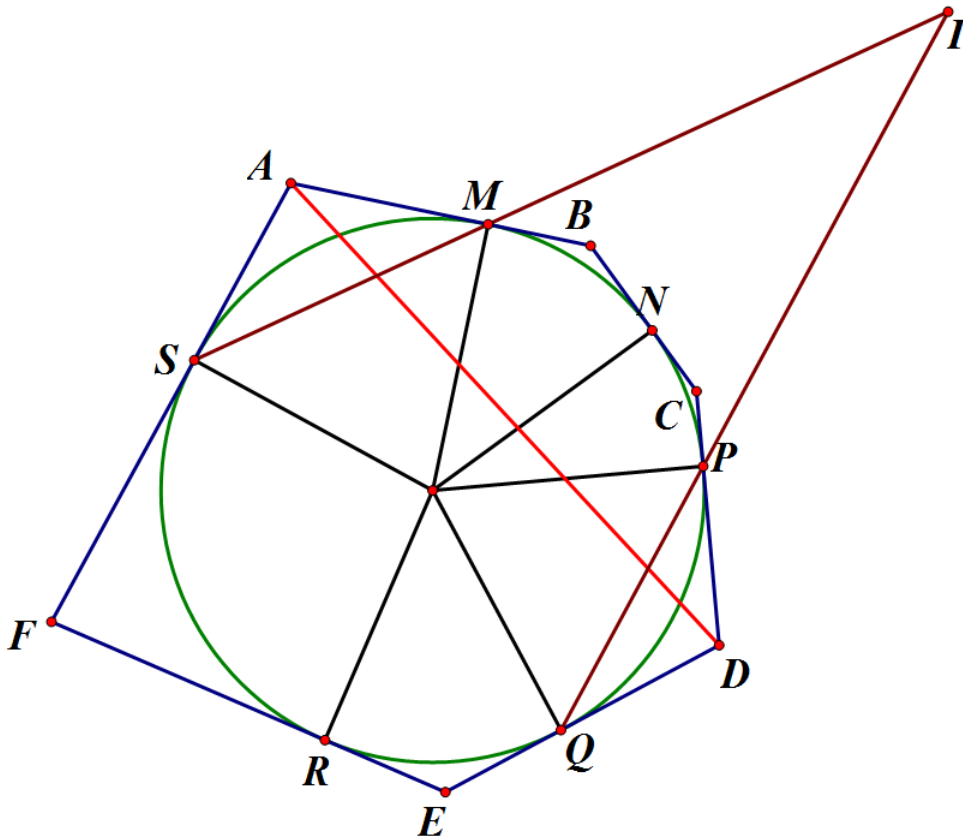
Bài toán 8.1: Cho tam giác ABC và ba điểm D, E, F theo thứ tự thuộc BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy và D, E, F khác trung điểm đoạn thẳng. Gọi M, N, P lần lượt là điểm chung của các cặp đường thẳng $(EF, BC), (DF, CA), (DE, AB)$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bạn có thể giải **Bài toán 8.1** bằng định lí Menelaus nhưng thậm chí bài toán mở rộng này cũng chỉ là trường hợp đặc biệt của định lí Desargues mà thôi!

Trong bài toán 8 có sử dụng kết quả AD, BE, CF đồng quy và ngay sau đây tôi sẽ trình bày một kết quả mở rộng hơn của nó:

Bài toán 9: (Định lí Brianchon) Chứng minh rằng ba đường chéo của một lục giác ngoại tiếp đồng quy.

Giải



Ta kí hiệu $ABCDEF$ là lục giác ngoại tiếp (O) . Tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DE, EF, FA lần lượt là M, N, P, Q, R, S .

Xét cực và đối cực đối với (O) .

Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(SM, PQ), (MN, QR), (NP, RS)$.

Dùng Định lí Pascal cho lục giác nội tiếp $MNPQRS$ ta có I, J, K thẳng hàng.

Theo **Định lí 4** thì các đường đối cực của I, J, K đồng quy.

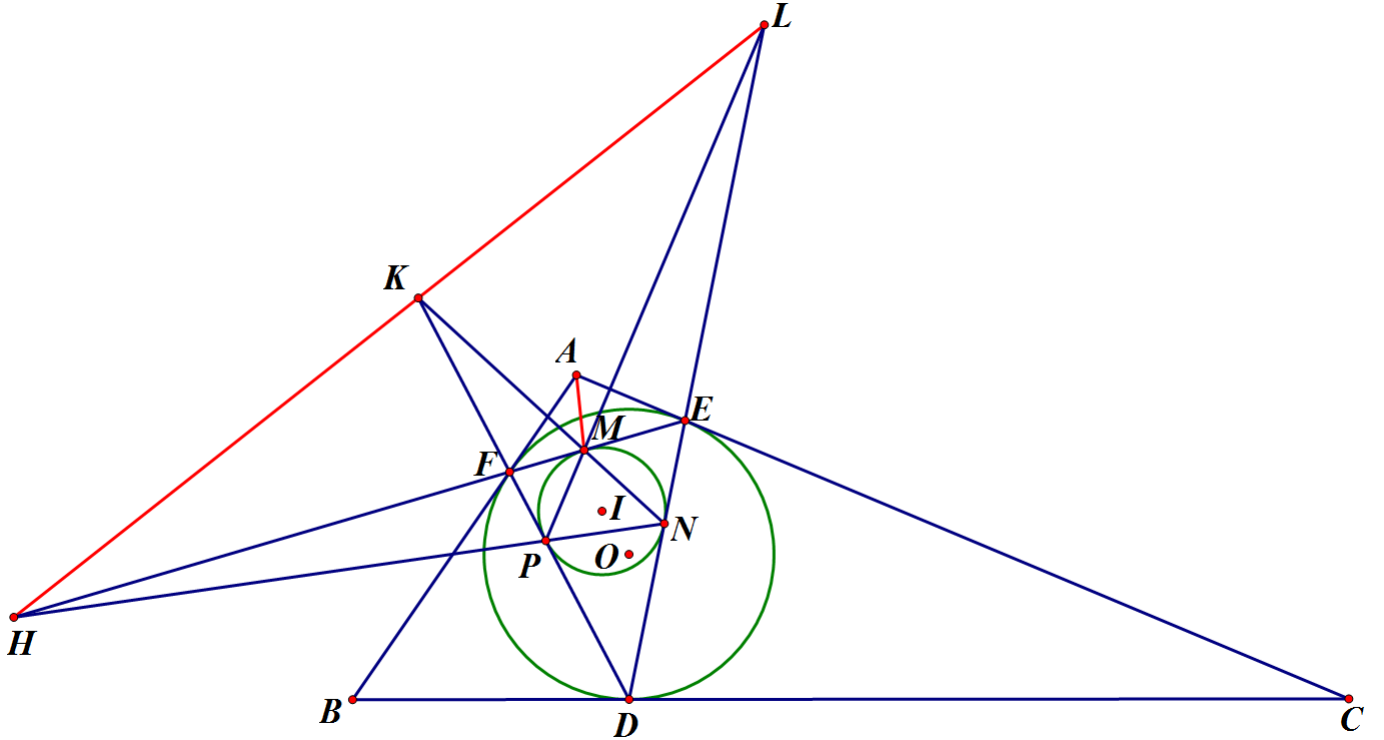
Mà dễ thấy các đường đối cực của I, J, K lần lượt là AD, BE, CF nên ta có AD, BE, CF đồng quy.

Như vậy ta có điều cần chứng minh! \square

Bài toán sau là một sự phát triển từ bài toán 8 và có nhiều điểm thú vị.

Bài toán 10: Cho tam giác ABC , đường tròn nội tiếp tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường tròn nội tiếp tam giác DEF tiếp xúc với EF, FD, DE lần lượt tại M, P, N . Chứng minh rằng AM, BP, CN đồng quy.

Giải



Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF và ABC .

Gọi H, K, L lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(MP, EF), (MN, FD), (MP, DE)$.

Theo **Bài toán 8** ta có H, K, L thẳng hàng. (*)

Chú ý rằng DM, FN, EP đồng quy nên $(HMF E) = -1$

Do đó M thuộc đường đối cực của H đối với (O) (theo **Hệ quả 2**)

Mặt khác dễ thấy A thuộc đường đối cực của H đối với (O) nên ta có AM là đường đối cực của H đối với (O) . (1)

Tương tự có:

BP là đường đối cực của K đối với (O) . (2)

CN là đường đối cực của L đối với (O) . (3)

Từ (1), (2), (3), (*) và **Định lí 4** ta có điều cần chứng minh. \square

Bình luận: Bài toán này có thể mở rộng như sau:

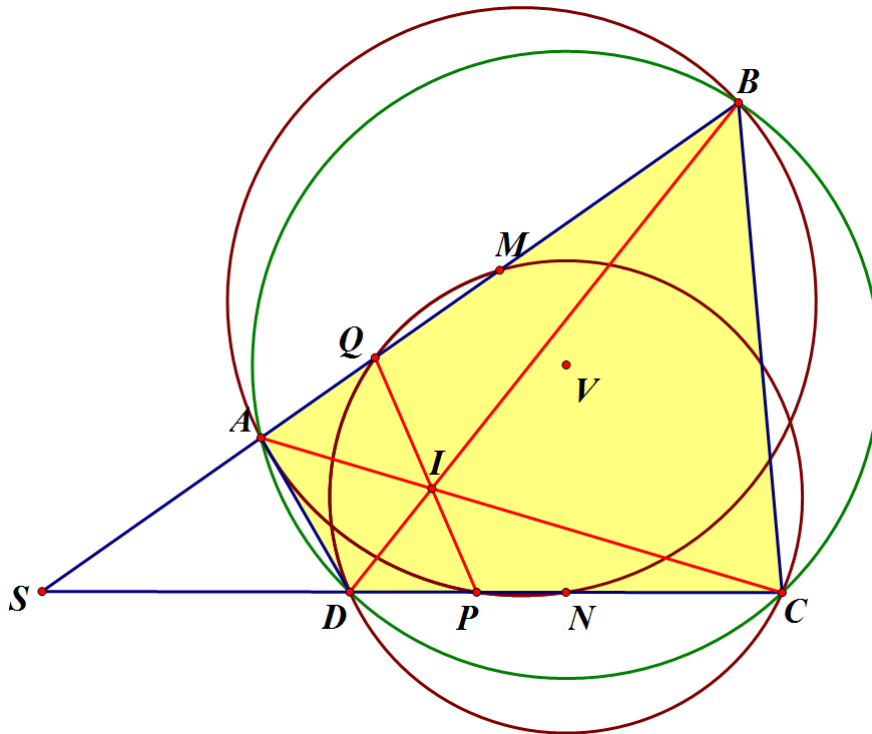
Bài toán 10.1: Cho tam giác ABC . D, E, F thuộc BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy. M, P, N thuộc EF, FD, DE sao cho DM, EP, FN đồng quy. Chứng minh rằng AM, BP, CN đồng quy.

Chứng minh của bài 10.1 bạn có thể tìm trong [1].

Qua 3 bài toán trên hẳn các bạn đã thấy rõ hiệu lực của **Định lí 4** cho những bài toán ở phần này. Tuy nhiên có những trường hợp mà **Định lí 4** lại làm phức tạp vấn đề và có thể làm bài toán khó lên rất nhiều bởi vì việc dựng cực hoặc đường đối cực là phức tạp. Trong những trường hợp ấy ta cần linh hoạt và tinh ý hơn, không thể cứ áp dụng máy móc được. Một ví dụ hay mà ý tưởng giải là phương pháp tập hợp điểm được đề cập ngay sau đây:

Bài toán 11: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) . M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . (ABN) cắt lại AB ở P . (CDM) cắt lại CD ở Q . Chứng minh rằng AC, PQ, BD đồng quy.
(Kí hiệu (ABC) là đường tròn đi qua ba điểm A, B, C .)

Giải



Khi $AB \parallel CD$ thì bài toán đơn giản, ta sẽ xét trường hợp còn lại:

Gọi S là giao điểm của AB và CD .

Gọi d là đường đối cực của S đối với (O) .

Gọi I là giao điểm của AC và BD thì dễ thấy I thuộc d (1)

Ta thấy: $\overline{SM} \cdot \overline{SQ} = \overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$.

Chú ý M là trung điểm của AB nên ta có $(SQAB) = -1$.

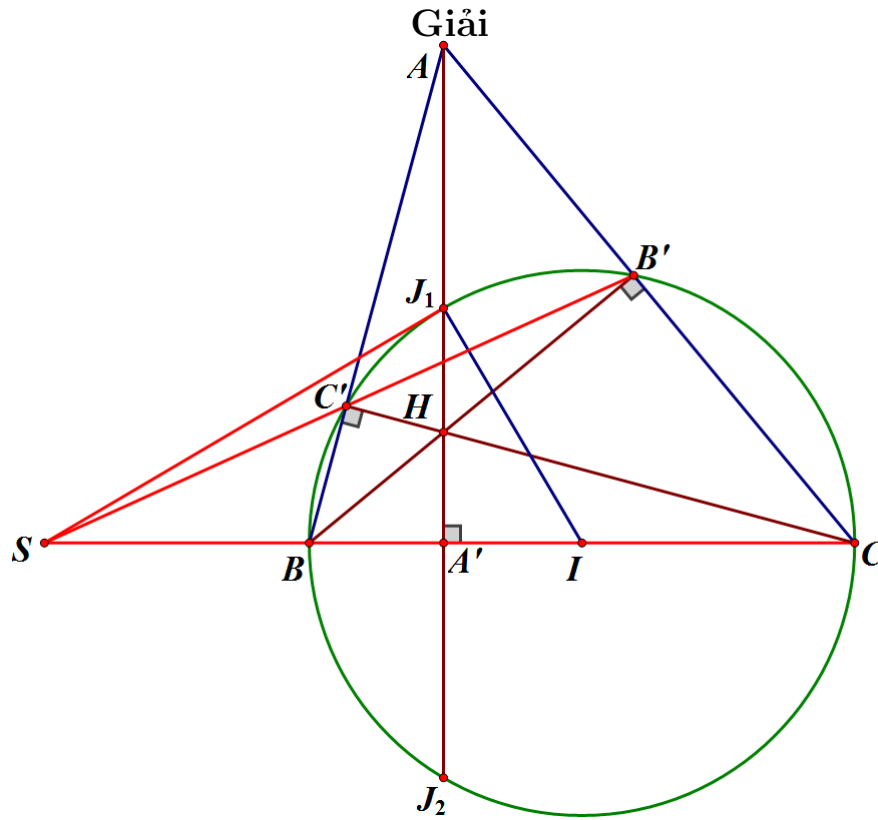
Theo **Hệ quả 2** sẽ có Q thuộc d (2)

Tương tự có P thuộc d (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra điều cần chứng minh. \square

Có những trường hợp mà có đường thẳng tham gia đồng quy không có cực hoặc điểm tham gia thẳng hàng không có đường đối cực với đường tròn. Ta sẽ xét bài toán sau:

Bài toán 12: Trong tam giác ABC kẻ các đường cao AA', BB', CC' và gọi H là trực tâm của tam giác. Gọi J là một giao điểm của AA' với đường tròn (I) đường kính BC . Chứng minh rằng $BC, B'C'$ và tiếp tuyến tại J của (I) đồng quy.



Gọi giao điểm của AH với (I) là J_1, J_2 như hình vẽ, thế thì J sẽ là J_2 hoặc J_1 . Ta sẽ chứng minh $BC, B'C'$ và tiếp tuyến tại J_1 của (I) đồng quy. (với J_2 thì tương tự)

Xét cực và đối cực đối với (I) .

Ta thấy BC không hề có cực, nên **Định lí 4** hoàn toàn bất lực!

Ta sẽ sử dụng một phương thức khác:

Gọi giao điểm của BC và $B'C'$ là S .

Ta thấy:

AH là đường đối cực của S , mà AH đi qua J_1 nên đường đối cực của J_1 sẽ đi qua S (**Định lí 3**) hay tiếp tuyến tại J_1 đi qua S . Vậy ta có điều cần chứng minh. \square

Bình luận:

- Đây là một bài tập trong cuốn "Bài tập hình học 10 nâng cao" đi kèm SGK.
- Bài toán thật đơn giản khi ta thay đổi cách nhìn.
- Ta thấy SH là đường đối cực của A nên AI vuông góc với SH (Nội dung một bài trong [3])
- $B'C'$ đi qua cực của J_1J_2 nên cực của $B'C'$ nằm trên J_1J_2 , lập bài toán đảo và thay đổi đôi chút ta có thể đi đến bài toán sau:

Bài toán 12.1: Cho tam giác nhọn ABC . Gọi M là trung điểm của BC và BE, CF là các đường cao của tam giác. Lấy D (khác M) là một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác EFM thỏa mãn $DE = DF$. Chứng minh rằng AD vuông góc với BC . (**Mathlinks Contest**)

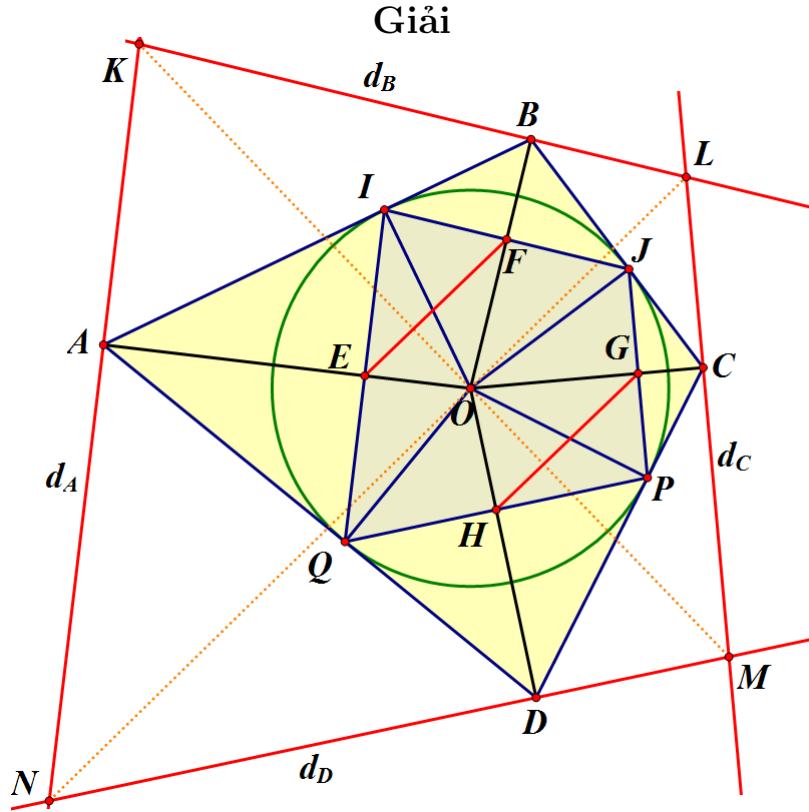
- Trong **Bài toán 12.1**, nhìn đỉnh tam giác vuông là trực tâm của tam giác ấy thì ta có thể mở rộng như sau:

Bài toán 12.2: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) . AC và BD cắt nhau ở I . Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác AID và BIC . HK cắt (O) ở M và N . Gọi J là giao điểm của tiếp tuyến tại M, N của (O) . S là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng S, I, J thẳng hàng.

Tiếp đến ta xét bài toán sau:

Bài toán 13: Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các đường thẳng d_A, d_B, d_C và d_D tương ứng vuông góc với OA, OB, OC, OD . Các cặp đường thẳng d_A và d_B, d_B và d_C, d_C và d_D, d_D và d_A tương ứng cắt nhau ở K, L, M, N . Chứng minh rằng KM và LN cắt nhau tại O .

(Trích cuộc thi toán mùa đông tại Bulgaria, 1996)



Xét cực và đối cực đối với (O) .

Ta thấy O không có đường đối cực, **Định lí 4** lại vô dụng.

Rất thú vị rằng ở đây **Định lí 2** lại cho thấy sức mạnh của mình!

Gọi I, J, P, Q lần lượt là tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DA .

Gọi E, F, G, H lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng: $(OA, IQ), (OB, IJ), (OC, JP), (OD, PQ)$.

Ta sẽ chứng minh K, O, M thẳng hàng, còn lại tương tự.

Theo giả thiết bài toán ta sẽ có:

d_A là đường đối cực của E .

d_B là đường đối cực của F .

Từ đó dễ có EF là đường đối cực của K . (1)

Tương tự thì GH là đường đối cực của M . (2)

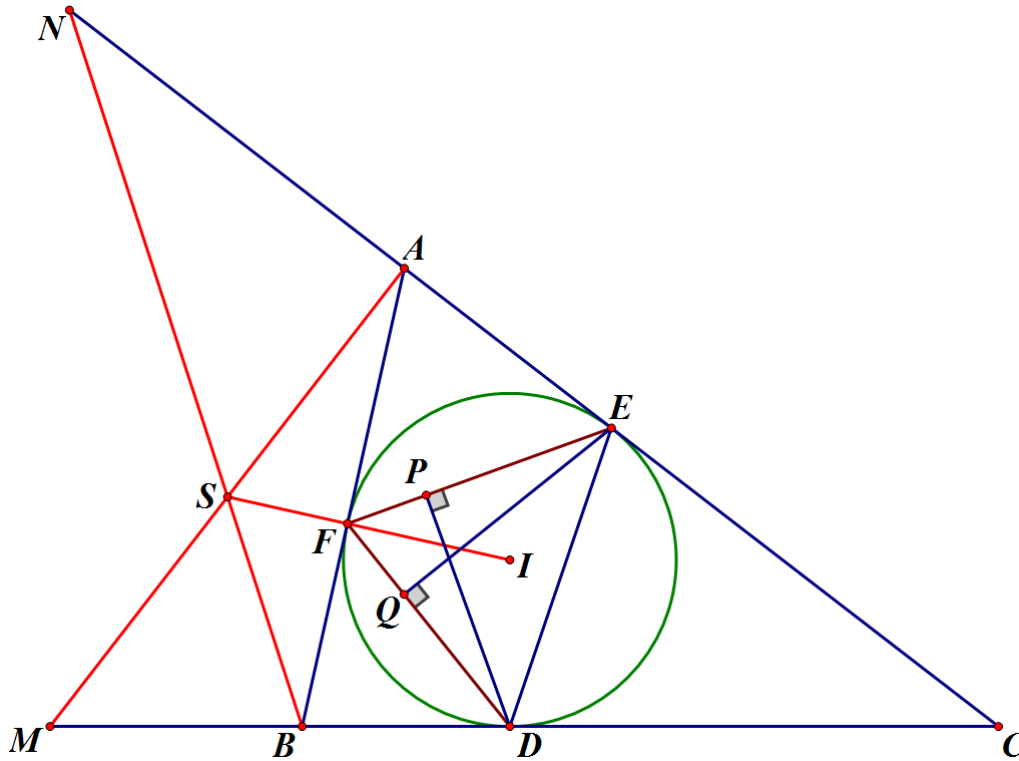
Mặt khác dễ thấy $EF \parallel GH$ (3)

Từ (1), (2), (3), **Định lí 2** và Tiên đề Euclid ta dễ có điều cần chứng minh. \square

Một bài nữa với cùng ý tưởng:

Bài toán 14: (Hoàng Quốc Khánh) Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) . Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Trên BC ta lấy điểm M , trên AC lấy điểm N sao cho $IM \parallel EF$, $IN \parallel DF$. Chứng minh rằng AM, BN, IF đồng quy.

Giải



Xét cực và đối cực đối với (I) .

Kẻ DP, EQ lần lượt vuông góc với FE, FD .

Gọi giao điểm của AM và BN là S , ta sẽ chứng minh I, F, S thẳng hàng.

Ta thấy đường đối cực của M phải đi qua D và vuông góc với IM mà $IM \parallel EF$ nên suy ra DP là đường đối cực của M .

Suy ra P thuộc đường đối cực của M (1)

Mà P thuộc EF là đường đối cực của A (2)

Từ (1), (2) và **Định lí 3** ta sẽ suy ra AM là đường đối cực của P (3)

Tương tự BN là đường đối cực của Q (4)

Từ (3), (4) và **Định lí 3** ta lại suy ra đường đối cực của S là PQ .

Mặt khác $(PF, PQ) \equiv (DE, DQ) \equiv (FB, FQ) \pmod{\pi}$

Suy ra $PQ \parallel AB$.

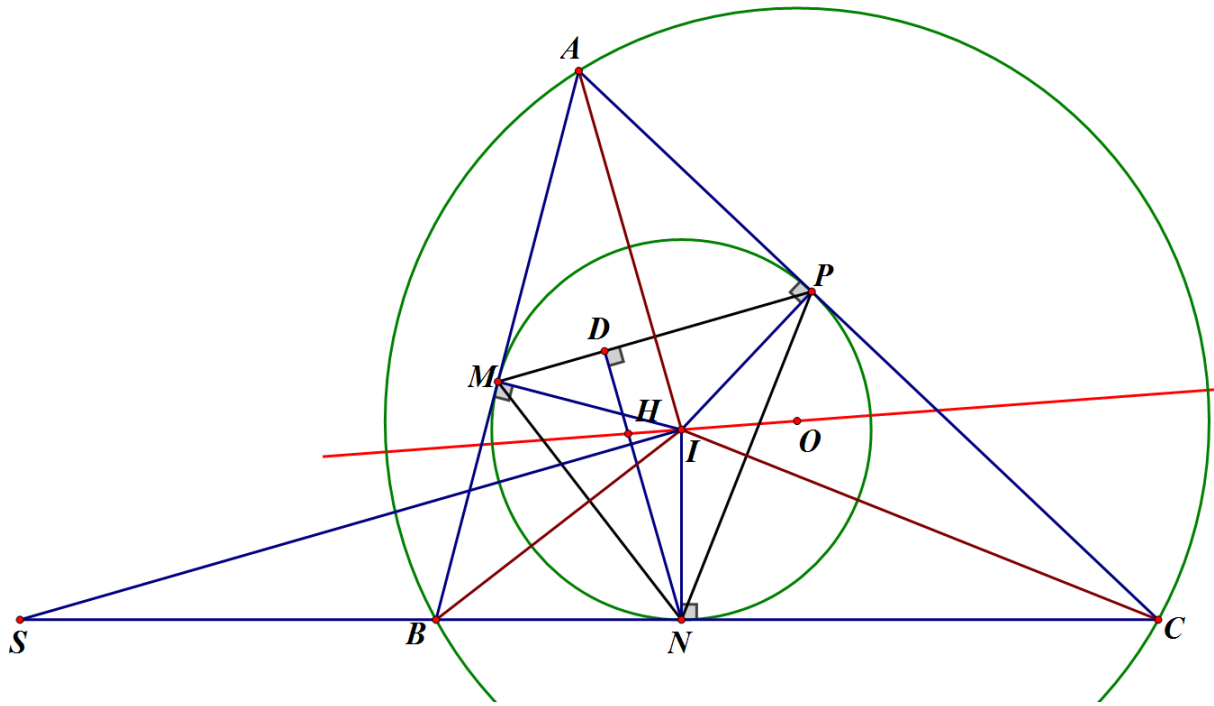
Từ đó dễ có điều cần chứng minh. \square

Hai bài sau lấy ý tưởng chính từ [1]:

Bài toán 15: Gọi M, N, P là các giao điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh AB, BC, CA tương ứng. Chứng minh rằng trực tâm tam giác MNP , tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thẳng hàng.

(1995 Iranian Math Olympiad)

Giải



Gọi (I) , (O) lần lượt là các đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi H là trực tâm tam giác MNP .

Xét cực và đối cực đối với (I) .

Kẻ ND vuông góc với MP , ME vuông góc với NP .

Trên BC lấy điểm S sao cho IS vuông góc với ND .

Trên AB lấy điểm V sao cho IV vuông góc với ME .

Thế thì VS sẽ là đường đối cực của H nên VS vuông góc với IH (1)

Bây giờ để ý tiếp:

$$(\vec{IS}, \vec{IB}) \equiv (\vec{IS}, \vec{IA}) + (\vec{IA}, \vec{IB}) \equiv \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + (\vec{CI}, \vec{CB}) \equiv (\vec{CI}, \vec{CB}) \pmod{2\pi}$$

$$\text{Nên: } SI^2 = \overline{SB} \cdot \overline{SC}$$

$\Rightarrow S$ thuộc trục đẳng phương của $(I, 0)$ và (O) .

Tương tự V cũng thuộc trục đẳng phương của $(I, 0)$ và (O) .

Do đó VS vuông góc với OI (2)

Từ (1) và (2) sẽ dễ có điều cần chứng minh. \square

Bình luận:

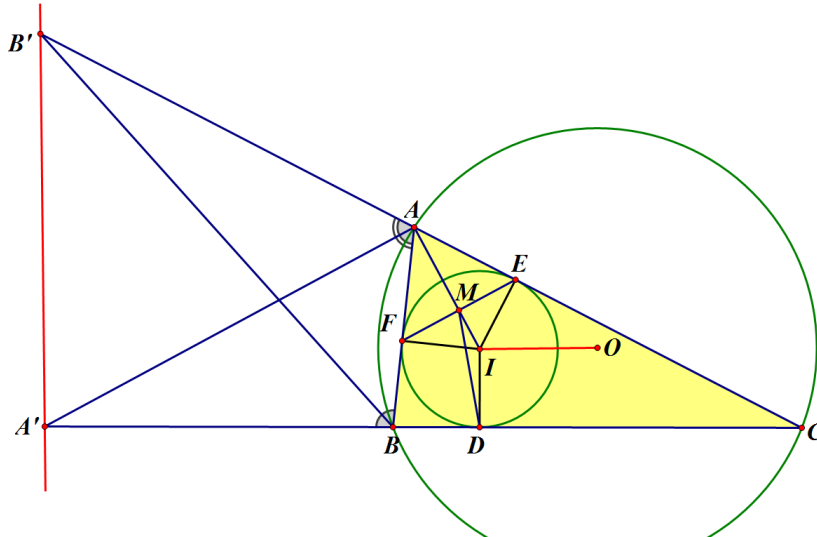
• Bài toán này có một hệ quả đơn giản sau:

Bài toán 15.1: Gọi D, E, F là chân các đường cao của tam giác ABC . Đường tròn nội tiếp tam giác DEF tiếp xúc với các cạnh tại G, H, I . Chứng minh rằng hai tam giác ABC và GHI có chung đường thẳng Euler. (**Balkan Senior 1990**)

• Chúng ta cũng có thể xét vấn đề tương tự với tứ giác, bạn đọc có thể tự suy nghĩ xem sao bởi rất thú vị vì nó vẫn đúng!

Bài toán 16: Cho tam giác ABC không cân, các phân giác ngoài các góc A, B, C cắt các cạnh đối diện lần lượt tại A', B', C' . Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng và đường thẳng $A'B'C'$ vuông góc với OI , trong đó O và I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC .

Giải



Tiếp điểm của đường tròn (I) nội tiếp tam giác trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F .

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của FE, FD, DE .

Xét cực và đối cực đối với (I) .

Ta thấy AA' là đường đối cực của M nên A' thuộc đường đối cực của M .

Mà A' thuộc BC là đường đối cực của D nên từ **Định lí 3** sẽ có đường đối cực của A' là DM (1)

Tương tự đường đối cực của B', C' lần lượt là EN, FP . (2)

Chú ý DM, EN, FP đồng quy tại trọng tâm G của tam giác DEF (3)

Từ (1), (2), (3) và **Định lí 2, 3** ta có A', B', C' thẳng hàng và đường thẳng $A'B'C'$ vuông góc với IG (là đường thẳng Euler của tam giác DEF).

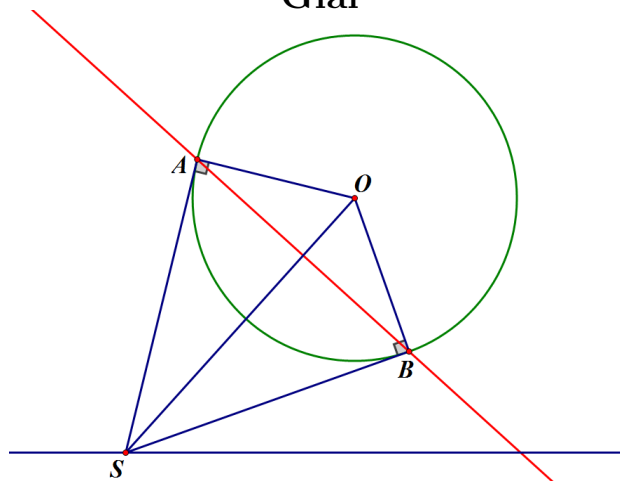
Kết hợp điều này với kết quả **Bài toán 15** ta có điều cần chứng minh. \square

III. CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH:

Với **Định lí 3** ta có một công cụ khá hữu ích để giải quyết dạng bài này. Trước tiên sẽ là một bài toán quen thuộc:

Bài toán 17: Cho đường tròn (O) và một đường thẳng d nằm ngoài (O) . Một điểm S chạy trên (O) . Từ S ta kẻ tới (O) hai tiếp tuyến SA, SB (A, B là tiếp điểm). Chứng minh rằng khi S chạy trên d thì AB luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Xét cực và đối cực đối với (O) .

Gọi I là cực của d , vì d cố định nên I cố định.

S thuộc d suy ra đường đối cực của S sẽ đi qua cực của d hay AB đi qua I cố định. \square

Bình luận: Ý tưởng là chuyển bài toán đi qua điểm cố định thành bài toán quỹ tích nhờ **Định lí 2** và **Bài toán 17** đã được giải quyết thật gọn nhẹ. Ta sẽ dùng ý tưởng ấy trong một bài toán thú vị hơn sau đây:

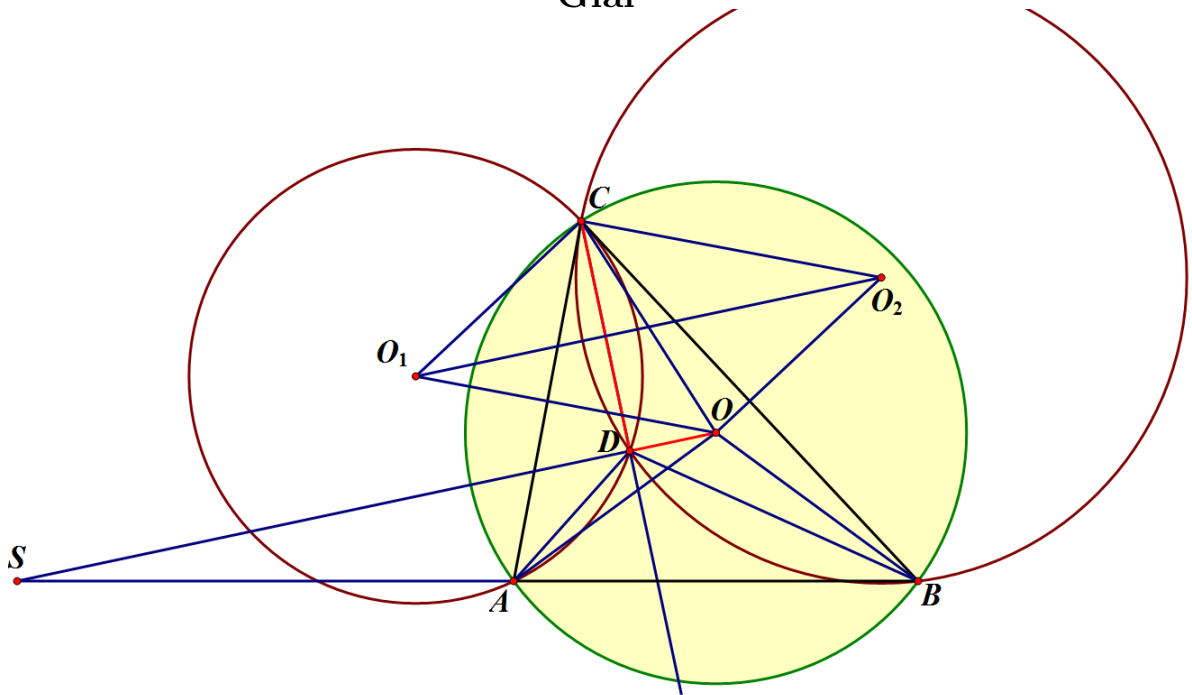
Bài toán 18: Trong mặt phẳng cho đường tròn (O) cố định bán kính R . Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên (O) sao cho ba điểm A, B, O không thẳng hàng. Xét một điểm C nằm trên đường tròn (O) , C không trùng với A và B . Dựng đường tròn (O_1) đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng BC ở C ; dựng đường tròn (O_2) đi qua B và tiếp xúc với đường thẳng AC ở C . Hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai D khác C . Chứng minh rằng:

1) $CD \leq R$.

2) Đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định, khi điểm C di động trên đường tròn (O) sao cho C không trùng với A và B . ((O) kí hiệu đường tròn tâm O).

(Trích bài thi HSG quốc gia Việt Nam bảng A năm học 2004-2005)

Giải



Câu 1:

Ta thấy $O_1C \perp CB, OO_2 \perp CB$.

suy ra $O_1C \parallel OO_2$

Tương tự $O_2C \parallel OO_1$.

Suy ra OO_1CO_2 là hình bình hành.

Nên O_1O_2 đi qua trung điểm của OC .

Mà O_1O_2 đi qua trung điểm của CD nên $O_1O_2 \parallel OD$.

Lại vì $O_1O_2 \perp CD$ nên $\widehat{ODC} = 90^\circ$.

Từ đó sẽ có $CD \leq OC (= R)$.

Câu 2:

Chú ý rằng:

$$\begin{aligned}(DA, DB) &\equiv (DA, DC) + (DC, DB) \\ &\equiv \frac{(O_1A, O_1C) + (O_2C, O_2B)}{2} \equiv 2(CA, CB) \equiv (OA, OB) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Suy ra A, D, O, B đồng viên.

Ta thấy OD, AB , tiếp tuyến tại C của (O) lần lượt là các trục đẳng phương của từng cặp đường tròn $(ADOB)$ và (COD) , (O) và $(ADOB)$, (O) và (COD) .

Do đó 3 đường nói trên đồng quy ở một điểm S .

Xét cực và đối cực đối với (O) .

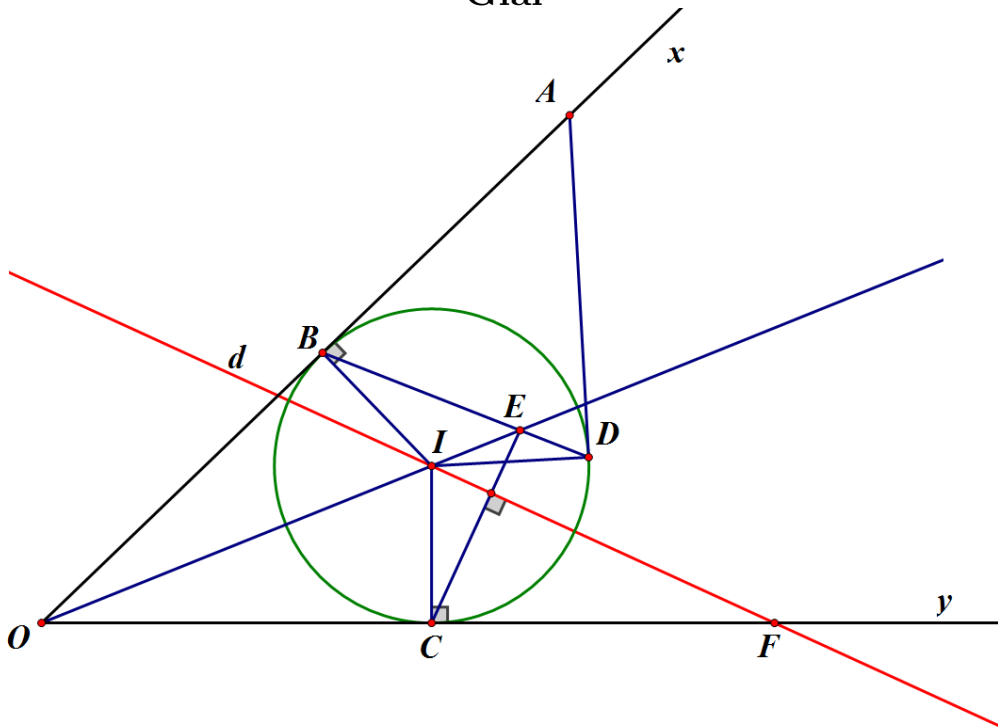
Chú ý đường đối cực của S phải đi qua C và vuông góc với OS nên CD là đường đối cực của S .

Vì S thuộc AB cố định nên CD sẽ đi qua cực của AB là một điểm cố định. Đó là điều phải chứng minh. \square

Bạn đã thấy sự hữu dụng của **Định lý 3** trong dạng toán này rồi nhỉ? Thế nhưng khi đường thẳng cần chứng minh đi qua điểm cố định lại đi qua tâm đường tròn xét cực và đối cực thì sao? Đường thẳng ấy rõ ràng là không có cực vậy thì ta phải làm thế nào? Biết trường hợp này là sẽ gặp phải nhưng do thời gian gấp rút nên mình chỉ tìm được bài toán khá đơn giản (nhưng thể hiện được ý tưởng) như sau:

Bài toán 19: (Hoàng Quốc Khánh) Cho góc xOy cố định và một điểm A cố định nằm trên tia Ox . Đường tròn (I) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với với hai tia Ox, Oy . Gọi tiếp điểm của (I) trên Ox, Oy lần lượt là B, C . Từ A ta kẻ tiếp tuyến AD tới (I) (D là tiếp điểm, D khác B). OI cắt BD ở E . Gọi d là đường thẳng qua I và vuông góc với CE . Chứng minh rằng khi (I) di động (nhưng thỏa mãn điều kiện bài toán) thì d luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Xét cực và đối cực đối với (I) . d cắt Oy ở F .

Đường đối cực của F là CE (qua E) suy ra đường đối cực của E sẽ đi qua F (**Định lí 3**) (1)

Đường đối cực của A là BD (qua E) suy ra đường đối cực của E sẽ đi qua A (**Định lí 3**) (2)

Từ (1), (2) và **Định lí 3** ta suy ra AF là đường đối cực của E .

Theo **Định lí 2** ta có AF vuông góc với EI , mà EI là phân giác góc xOy nên dễ có F cố định.

Từ đó có điều cần chứng minh. \square

IV. LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN QUỸ TÍCH:

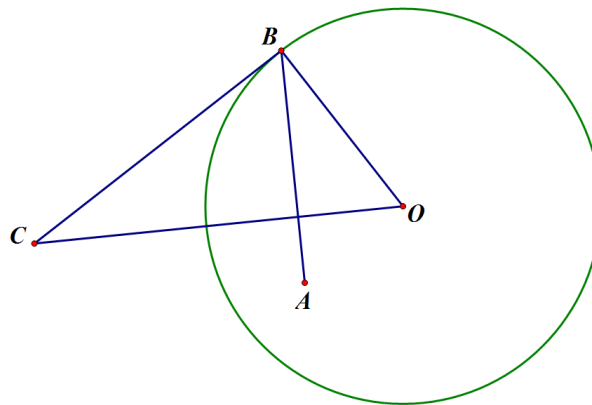
Phương pháp ở phần này hữu ích với những bài mà quỹ tích cần tìm có dạng thẳng. Ngược lại với phần trên, ta sẽ quy bài toán quỹ tích về bài toán chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định!

Hy vọng bạn sẽ nắm được tư tưởng bình pháp qua hai bài toán sau:

Bài toán 20: Cho đường tròn (O, R) và điểm A cố định nằm trong đường tròn. Điểm B di động trên đường tròn (O) . Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn tại C . Tìm tập hợp điểm C .

(Đề kiểm tra chọn đội tuyển học sinh giỏi toán quận 3, TP. Hồ Chí Minh 2001-2002)

Giải



■ **Phần thuận:** Xét cực và đối cực đối với (O) .

Ta thấy đường đối cực của C là đường thẳng qua B vuông góc với OC nên AB chính là đường đối cực của C .

Gọi d là đường đối cực của A . Dễ thấy d cố định.

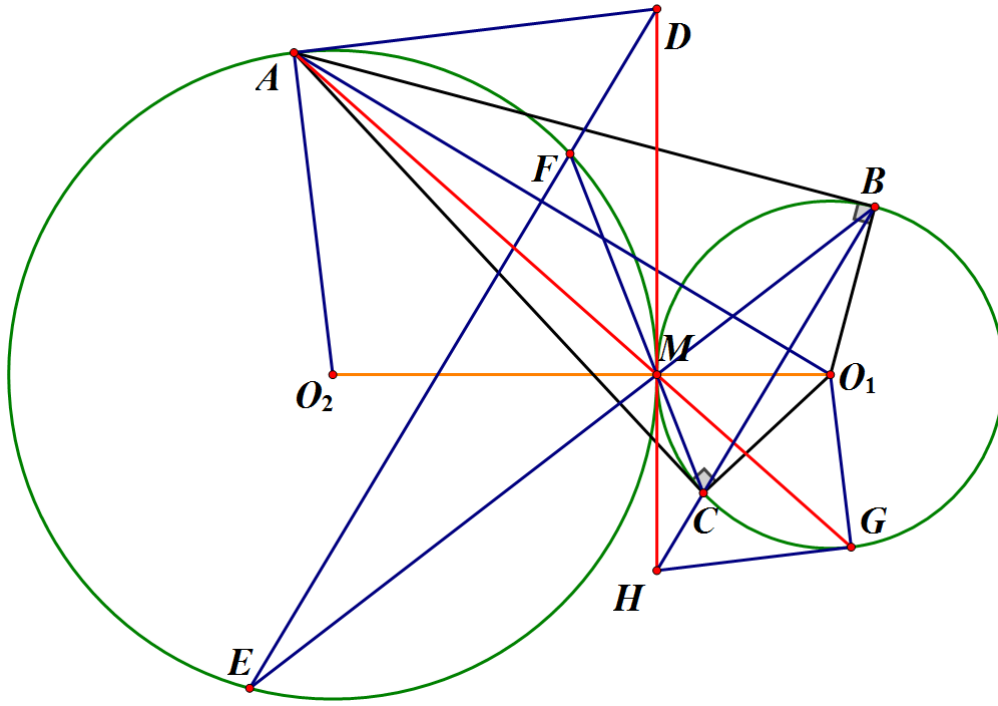
Vì đường đối cực của C đi qua A nên C thuộc d .

Đến đây các bạn hãy tự hạn chế tập hợp điểm lại rồi tiến hành phần đảo. \square

Bài toán 21: Trong mặt phẳng cho hai đường tròn cố định $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc nhau tại điểm M và bán kính đường tròn (O_2) lớn hơn bán kính đường tròn (O_1) . Xét điểm A nằm trên đường tròn (O_2) sao cho ba điểm O_1, O_2, A không thẳng hàng. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O_1) (B, C là tiếp điểm). Các đường thẳng MB và MC cắt lại đường tròn (O_2) tương ứng tại E và F . Gọi D là giao điểm của đường thẳng EF và tiếp tuyến tại A của đường tròn (O_2) . Chứng minh rằng điểm D di động trên một đường thẳng cố định khi A di động trên đường tròn (O_2) sao cho ba điểm O_1, O_2, A không thẳng hàng.

(HSG quốc gia Việt Nam bảng A năm học 2002-2003)

Giải



Có hai trường hợp là tiếp xúc trong hoặc ngoài với nhau. Ở đây sẽ giải khi chúng tiếp xúc ngoài, khi tiếp xúc trong thì hoàn toàn tương tự.

AM cắt lại (O_1) ở G .

Tiếp tuyến của (O_1) tại G, M cắt nhau ở H .

Xét cực và đối cực đối với (O_1) .

Ta thấy:

Đường đối cực của H là MG đi qua A nên đường đối cực của A sẽ đi qua H , nói cách khác B, C, H thẳng hàng. Trong phép vị tự tâm M biến $(O_1) \mapsto (O_2)$ thì:

$B \mapsto E, C \mapsto F, G \mapsto A$

Suy ra: $H \mapsto D$ qua phép vị tự ấy.

Do đó: D, M, H thẳng hàng.

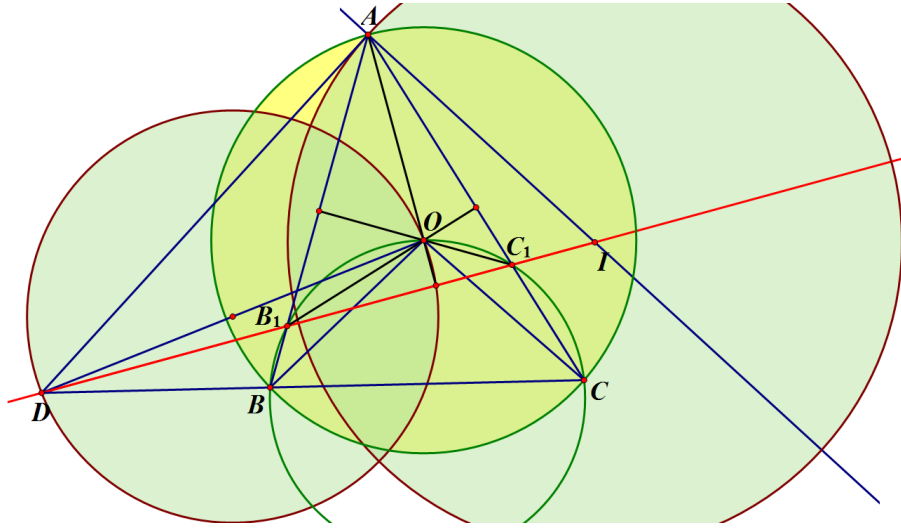
Lại chú ý HM là tiếp tuyến chung của nên D luôn thuộc một đường cố định là tiếp tuyến chung của $(O_1), (O_2)$. \square

V. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC:

Ở đây sẽ có bài toán khác những dạng bài trên nhưng cũng có những bài toán dựa trên những dạng bài ấy.

Bài toán 22: Cho ABC là một tam giác và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của nó. Các đường thẳng AB và AC cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC ở B_1, C_1 tương ứng. Gọi D là giao điểm của BC và B_1C_1 . Chứng minh rằng đường tròn tiếp xúc với AD tại A và có tâm nằm trên B_1C_1 trực giao với đường tròn đường kính OD . (MOP 1997)

Giải



Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc với AD tại A và có tâm nằm trên B_1C_1 .

Xét cực và đối cực đối với (I) .

$$\text{Ta thấy: } (AB_1, AC_1) \equiv \frac{(OB, OC)}{2} \equiv \frac{(C_1B, C_1C)}{2} \pmod{\pi}$$

$$\Rightarrow C_1A = C_1B \quad (1)$$

$$\text{Mà } OA = OB \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } C_1O \perp AB \quad (3)$$

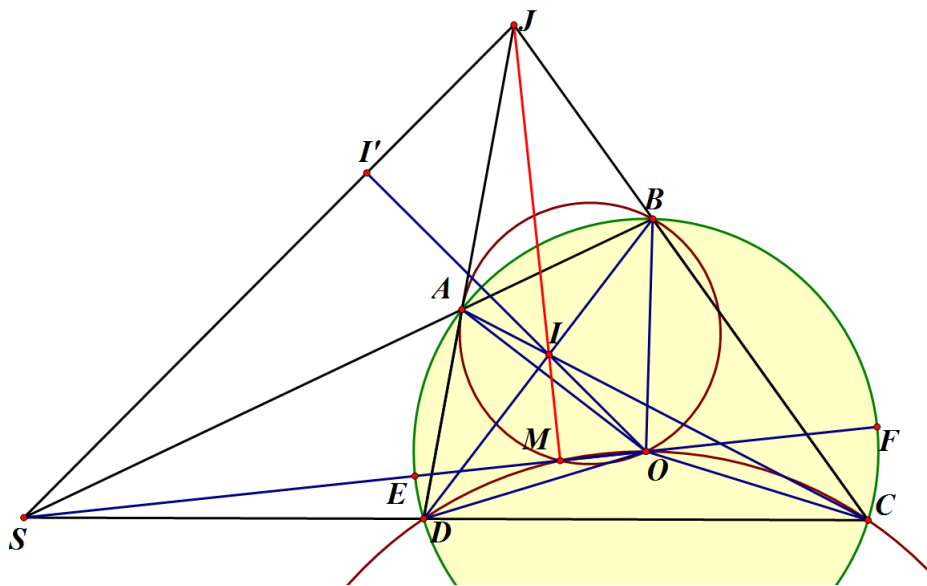
$$\text{Tương tự: } B_1O \perp AC \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } AO \perp B_1C_1.$$

Từ đây sẽ dễ có O thuộc đường đối cực của D và theo **Định lí 1** sẽ có điều phải chứng minh. \square

Bài toán 23: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) . AC cắt BD ở I . Gọi M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của các cặp đường tròn: (AOB) và (COD) , (BOC) và (AOD) . Chứng minh rằng O, I, M, N đồng viên.

Giải



Xét cực và đối cực đối với (O) .

Cách 1:

Ta thấy AB, OM, CD lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (AOB) và (O) ; (AOB) và (COD) ; (COD) và (O) nên AB, CD, OM đồng quy ở một điểm mà ta gọi là S .

SO cắt (O) ở E, F .

Ta thấy:

$$\overline{SE} \cdot \overline{SF} = \overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SM} \cdot \overline{SO}$$

Chú ý rằng O là trung điểm EF nên ta có $(SMEF) = -1$, do đó M thuộc đường đối cực của S (1)

Mà I cũng thuộc đường đối cực của S (2)

Từ (1) và (2) suy ra IM là đường đối cực của S , do đó $\widehat{IMO} = 90^\circ$ (3)

Tương tự có $\widehat{INO} = 90^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra điều cần chứng minh.

Cách 2:

Xét phép nghịch đảo cực O phương tích R^2 :

$$A \mapsto A, B \mapsto B, C \mapsto C, D \mapsto D$$

$$\text{Do đó: } (AOB) \mapsto AB, (COD) \mapsto CD$$

$$\text{Nên } M \mapsto S \text{ (a)}$$

$$\text{Tương tự } N \mapsto J \text{ (J là giao điểm của AD và BC) (b)}$$

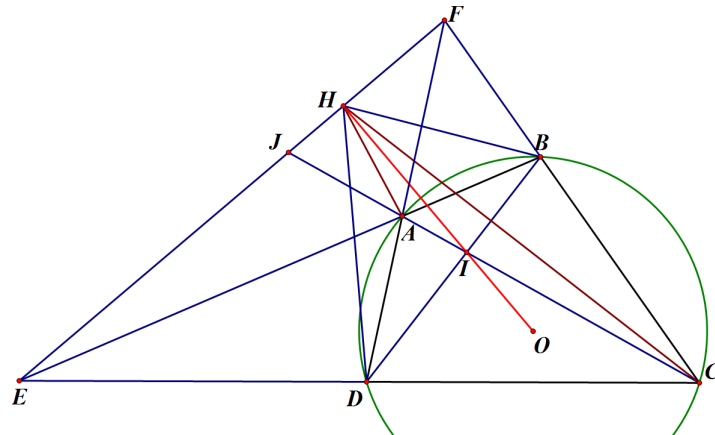
$$\text{Gọi } I' \text{ là ảnh của I qua phép nghịch đảo ấy. (c)}$$

$$\text{Vì SJ là đường đối cực của I nên theo định nghĩa ta sẽ có } I' \text{ thuộc SJ, hay } S, I', J \text{ thẳng hàng. (d)}$$

$$\text{Từ (a), (b), (c) và (d) ta có điều cần chứng minh. } \square$$

Bài toán 24: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) . AB cắt CD ở E , AD cắt BC ở F , AC cắt BD ở I , OI cắt EF ở H . Chứng minh rằng $\widehat{AHD} = \widehat{BHC}$.

Giải



Xét cực và đối cực đối với (O) .

EF là đường đối cực của I nên khi AC cắt FE ở J thì $(JIAC) = -1$.

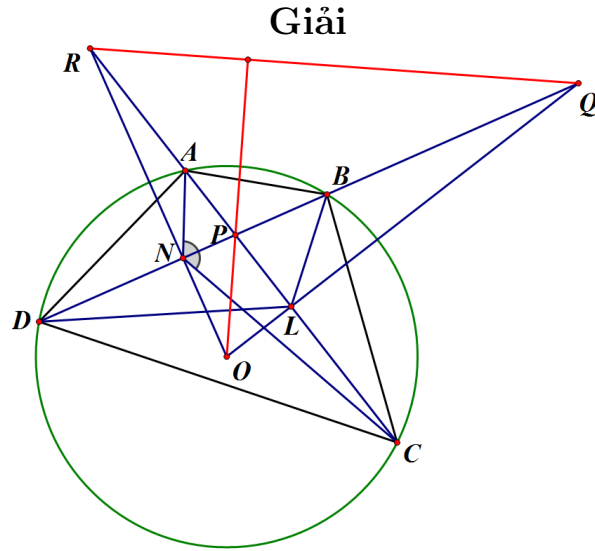
OI cắt EF ở H thì $OH \perp EF$

Từ hai điều đó suy ra HI là phân giác của \widehat{AHC} (1)

Tương tự thì HI là phân giác của \widehat{BHD} (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh. \square

Bài toán 25: Gọi L, N tương ứng là trung điểm các đường chéo AC, BD của tứ giác nội tiếp $ABCD$. Giả sử NB là phân giác của \widehat{ANC} . Chứng minh rằng LA là phân giác của \widehat{BLD} .



Trường hợp AC và BD vuông góc với nhau khá đơn giản, xin dành cho bạn đọc, ở đây sẽ xét khi chúng không vuông góc.

Xét cực và đối cực đối với đường tròn (O) ngoại tiếp $ABCD$.

AC và BD cắt nhau ở P .

Gọi d là đường đối cực của P .

Gọi giao điểm của các cặp đường thẳng (LO, BD) và (NO, AC) lần lượt là Q, R .

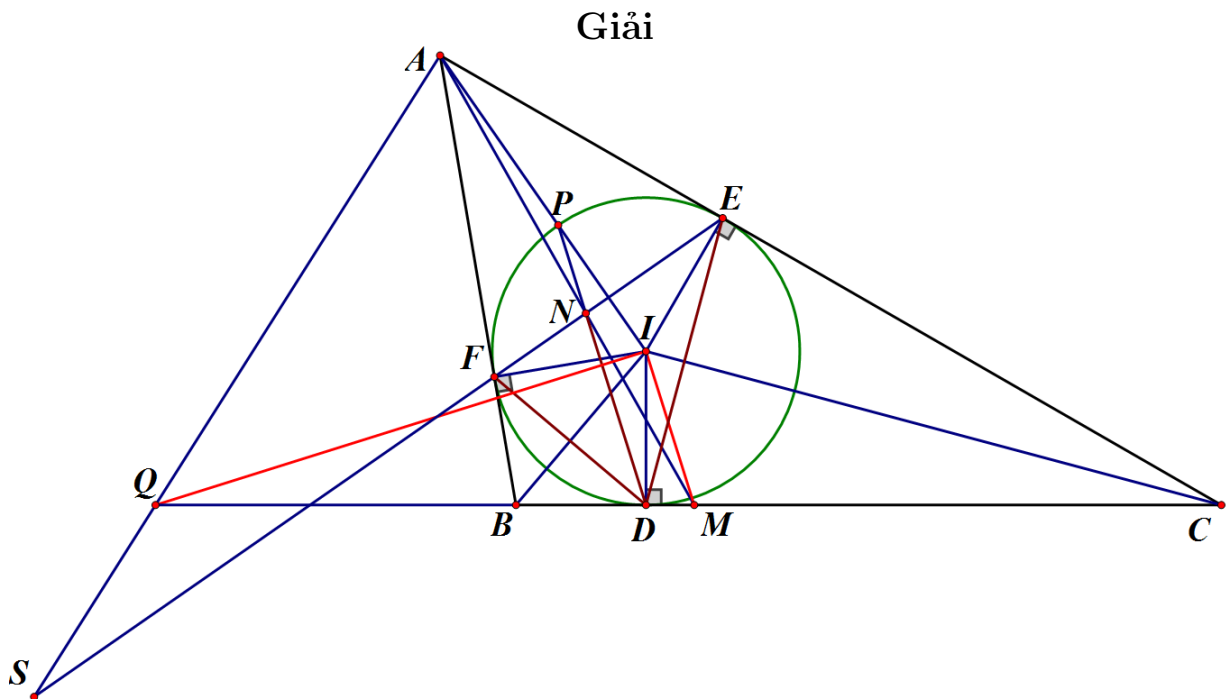
Do BD là phân giác của \widehat{ANC} và $ON \perp BD$ nên dễ có $(ACPR) = -1 \Rightarrow R$ thuộc d (1)

Mặt khác do $QL \perp PR, RN \perp PQ$ nên $OP \perp QR$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ngay PR là d .

Từ đó sẽ có: $(BDPQ) = -1$, kết hợp với $\widehat{PLQ} = 90^\circ$ là thu được điều phải chứng minh. \square

Bài toán 26: Cho tam giác ABC nhận (I) là tâm đường tròn nội tiếp. Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Phân giác trong tại I của tam giác BIC cắt BC ở M . AM cắt FE ở N . Chứng minh rằng DN là phân giác của góc EDF .



Xét cực và đối cực đối với (I) .

Gọi P là giao điểm của (I) và đoạn IA .

Trên BC lấy điểm Q sao cho IQ vuông góc với PD .

Bạn hãy chứng minh IQ là phân giác ngoài tại I của tam giác IBC .

Từ đó sẽ có: $(QMBC) = -1$.

Nên $A(QNFE) = -1$.

Suy ra nếu EF cắt AQ ở S thì $(SNFE) = -1$ từ đó dễ có SA là đường đối cực của N , nên Q thuộc đường đối cực của N .

Từ **Định lí 3** ta có N thuộc đường đối cực của S .

Mà dễ thấy DP là đường đối cực của S nên D, N, P thẳng hàng, từ đó có điều cần chứng minh. \square

Bài toán 27: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có K là điểm Lemoine (Điểm đồng quy của ba đường đối trung). AK, BK, CK cắt lại (O) tương ứng ở D, E, F . Chứng minh rằng K cũng là điểm Lemoine của tam giác DEF .

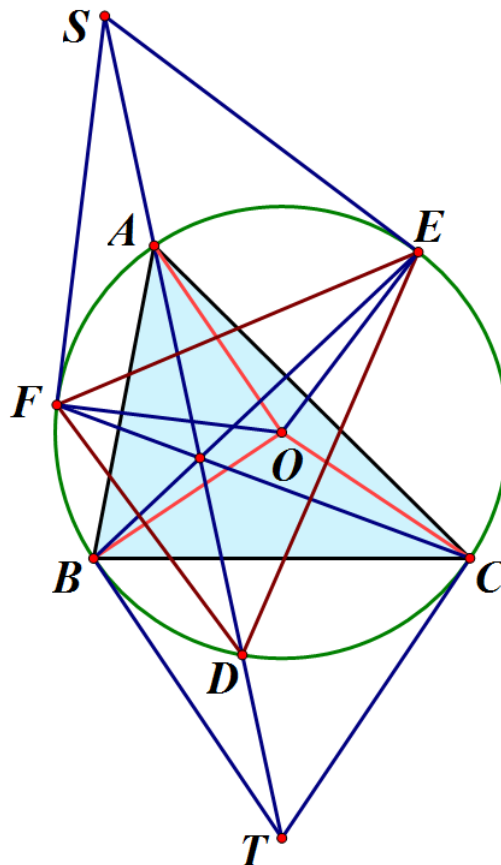
Giải

Trước hết tác giả xin nhắc lại một bổ đề đẹp, là một kết quả căn bản mang tính nền tảng khi tìm hiểu về các đường đối trung như sau:

Bổ đề: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Các tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở S . Khi đó AS là đường đối trung của tam giác ABC .

Chứng minh của nó đề nghị các bạn tự tìm hiểu.

■ Trở lại bài toán của chúng ta.



Xét cực và đối cực đối với (O) .

- Nếu tam giác ABC đều thì rất đơn giản.
- Nếu tam giác ABC vuông hoặc cân thì ý tưởng giải sau vẫn thực hiện được bằng cách chọn đỉnh thích hợp. Cụ thể là giả sử tam giác đó vuông hoặc cân ở C .

Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau ở T .

Tiếp tuyến của (O) tại E và F cắt nhau ở S .

Dựa vào bổ đề ta đã có A, K, D, T thẳng hàng.

Bây giờ, nếu gọi I là giao điểm của EF và BC thì ta lại thấy ngay S, D, K thẳng hàng vì cùng thuộc đường đối cực của I , do đó theo bổ đề thì có DA là đường đối trung của tam giác DEF .

Tương tự các bạn cũng chứng minh được EB là đường đối trung của tam giác DEF , đến đây thì còn gì để nói nhỉ? \square

27 bài toán đã qua đi, một cách khách quan mà nói thì với một người mới bắt đầu học **Cực và Đối Cực** thì nó là một chặng đường mang lại nhiều điều mới mẻ, còn đối với những người đã có kiến thức về **Cực và Đối Cực** thì nó là một chặng đường ra sao? Tất nhiên mà 29 không thể trả lời được câu hỏi này vì đó là cảm nhận của mỗi người, tuy nhiên mà 29 thực sự hy vọng kể cả với các bạn đã có kiến thức về **Cực và Đối Cực** trước đó rồi thì qua 27 bài toán đó sẽ có ít nhất một điều bổ ích và mới mẻ với các bạn. Hy vọng các bạn sẽ rèn luyện tốt với các bài tập đề nghị dưới đây, chúng là những bài toán được chọn khá tương thích với những kĩ thuật dùng ở trên. Theo ý kiến chủ quan của tác giả thì nếu bạn giải được 25 bài trong số đó trở lên tức là bạn đã hiểu khá rõ tư tưởng và dụng ý mà tác giả muốn truyền đạt.

V. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ:

Bài 1: Từ một điểm P ở ngoài một đường tròn tâm (O) , kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn tại A, B . Gọi M là điểm trên đoạn AB và cho C, D là các điểm trên đường tròn sao cho M là trung điểm CD . Giả sử các tiếp tuyến của đường tròn tại C, D cắt nhau ở Q . Chứng minh OQ vuông góc với PQ .

(Thi chọn đội tuyển IMO lần 3, Hồng Kông 1997)

Bài 2: Cho tam giác ABC . Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . K là một điểm bất kỳ thuộc đường thẳng EF . BK, CK cắt AC, AB lần lượt tại E', F' . Chứng minh rằng $E'F'$ tiếp xúc với (I) .

Bài 3: Cho tam giác ABC . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại K, L, M . Đường thẳng qua B và song song với MK cắt LM, LK lần lượt ở R, S . Chứng minh rằng góc RIS nhọn.

Bài 4: Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) . Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Trung tuyến ứng với đỉnh A của tam giác ABC cắt EF tại J . Chứng minh rằng D, I, J thẳng hàng.

Bài 5: (Hoàng Quốc Khánh) Cho tam giác ABC không cân ngoại tiếp (I) . Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . DE cắt AB ở P . Một đường thẳng qua C cắt AB, FE lần lượt ở M, N . PN cắt AC ở Q . Chứng minh rằng IM vuông góc với FQ .

Bài 6: Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (O) . Tiếp điểm thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q . AN, AP cắt (O) tại E, F . Chứng minh rằng ME, QF, AC đồng quy.

Bài 7: Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Từ điểm C trên AB nằm bên ngoài (O) kẻ cát tuyến CDE . Gọi OF là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BOD có tâm là O_1 . Đường thẳng CF cắt lại đường tròn (O_1) ở G . Chứng minh rằng O, A, E, G cùng nằm trên một đường tròn.

(2006 China Western Math Olympiad)

Bài 8: Cho đoạn AB cố định, C là một điểm di động trên tia đối của tia BA . Vẽ đường tròn (O) đường kính BC . Từ A kẻ tới (O) hai tiếp tuyến AD, AE (D, E là tiếp điểm). BD cắt CE ở M . Tìm quỹ tích điểm M .

Bài 9: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O) . Hai cát tuyến AMN, ABC thay đổi qua A . Gọi K là giao điểm thứ hai của (ABN) và (ACM) . Tìm tập hợp điểm K .

Bài 10: Cho tam giác ABC , các đường cao AA', BB', CC' . $B'C', C'A', A'B'$ lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P . Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng và đường thẳng MNP vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC .

Bài 11: Cho tam giác ABC có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AD . AO giao với BC tại E . F là giao điểm của hai tiếp tuyến với (O) tại B và C . AF cắt (O) tại P . Chứng minh rằng (O) tiếp xúc với (PDE) .

Bài 12: Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (O) . Gọi E, F là giao điểm của BD với (O) . H là hình chiếu của O lên AC . Chứng minh rằng: $\widehat{BHE} = \widehat{DHF}$. (T7/317 tạp chí Toán học và tuổi trẻ)

Bài 13: Một đường tròn tâm O đi qua các đỉnh A và C của tam giác ABC và cắt lại các đoạn AB, BC lần lượt ở K và N . Đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và KBN cắt nhau tại hai điểm phân biệt B và M . Chứng minh rằng góc OMB vuông (IMO 1985).

Bài 14: Cho đường tròn nội tiếp (O) của tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC . AM cắt (O) tại K và L . Qua K kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại điểm thứ hai là X , qua L kẻ

đường thẳng song song với BC cắt (O) tại điểm thứ hai là Y . AX và AY cắt BC lần lượt ở P và Q . Chứng minh rằng $BP = CQ$ (**Iran TST 2006**)

Bài 15: Hai đường tròn C_1 và C_2 cắt nhau tại hai điểm A, B . Một điểm P thay đổi trên đường tròn C_1 , P khác A và B . Các đường thẳng PA, PB lại cắt C_2 theo thứ tự tại D và E . Gọi M là trung điểm DE . Chứng minh rằng đường thẳng PM đi qua một điểm cố định.

(**Bài T5/292 tạp chí Toán học và tuổi trẻ**)

Bài 16: Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) và nội tiếp (O) với các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các đường cao kẻ từ A, B, C . Chứng minh rằng DA', BE', CF', OI đồng quy.

Bài 17: Cho tứ giác lồi $ABCD$. Ký hiệu O là giao điểm của AC và BD . Biết BO là đường đối trung của tam giác ABC và DO là đường đối trung của tam giác ADC . Chứng minh rằng AO là đường đối trung của tam giác ABD . (**IMO Team Preparation Contest, Romania 2006**)

Bài 18: Một tứ giác lồi $ABCD$ ($AC \neq BD$) nội tiếp trong một đường tròn tâm O . Gọi E là giao điểm của AC và BD , P là một điểm nằm trong $ABCD$ và thỏa mãn: $\widehat{PAB} + \widehat{PCB} = \widehat{PBC} + \widehat{PDC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng O, P, E thẳng hàng. (**China Hong Kong Math Olympiad 2006**)

Bài 19: (Hoàng Quốc Khánh) Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (O) . Tiếp điểm của (O) trên AB, BC, DA lần lượt là M, N, Q . Đường thẳng qua O song song với MN cắt AB ở E , đường thẳng qua O song song với MQ cắt AB ở F . Chứng minh rằng $DE \parallel CF$.

Bài 20: (Hoàng Quốc Khánh) Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (O) . Tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q . MN cắt PQ ở E , MQ cắt PN ở F , EB cắt FA ở I , ED cắt FC ở J . Chứng minh rằng EF, AD, BC, IJ đồng quy.

Bài 21: Cho đường tròn (O) đường kính BC và một điểm A nằm trên đường tròn. Kẻ AH vuông góc với BC . Dựng đường tròn tâm A bán kính AH cắt (O) ở E, F . Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của AH .

Bài 22: Cho tam giác ABC với các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) trên BC, CA, AB lần lượt là X, Y, Z . Gọi D, E, F là ba điểm nằm trên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Từ D, E, F kẻ tới (I) các tiếp tuyến (khác cạnh tam giác) DX', EY', FZ' . Chứng minh rằng AX', BY', CZ' đồng quy khi và chỉ khi D, E, F thẳng hàng hoặc AD, BE, CF đồng quy.

Bài 23 (Hoàng Quốc Khánh) Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (O) . Tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q . Gọi d là đường thẳng qua C và vuông góc với OC . Gọi E, F lần lượt là giao điểm của NQ, MP đối với d . Cho biết AD, BC, MP đồng quy, hãy chứng minh EB, FD, OC đồng quy. Điều ngược lại có đúng không?

Bài 24: Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (O) . Đường thẳng qua A vuông góc với AB cắt BO ở M . Đường thẳng qua A vuông góc với AD cắt DO ở N . Chứng minh rằng MN vuông góc với AC .

Bài 25: (Hệ quả từ một bài toán của Virgil Nicula) Cho đường tròn tâm (O) với dây cung AB . Trên AB lấy hai điểm C, D sao cho B là trung điểm CD . Gọi MN là một đường kính của (O) vuông góc với AB . MC, MD cắt lại (O) lần lượt ở P, Q . NC, ND cắt lại (O) lần lượt ở E, F . Chứng minh rằng EF, PQ, AB đồng quy.

Bài 26: Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài nó. Gọi (O') là đường tròn thay đổi nhưng luôn đi qua A và trực giao với (O) . Chứng minh rằng dây cung chung của (O) và (O') luôn

đi qua một điểm cố định.

Bài 27: (Hoàng Quốc Khánh) Cho đường tròn (O) và đường kính BC cố định. Một điểm A di động trên đường tròn. Kẻ AH vuông góc với BC . Gọi M là trung điểm của AH . BM cắt lại (O) ở N . Tiếp tuyến tại N của (O) cắt AC ở P . Tìm tập hợp điểm P .

Bài 28: (Hoàng Quốc Khánh) Cho tam giác cân ABC tại A nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ đường kính AD của đường tròn. S là một điểm di động trên đường tròn. SB cắt AC ở M , SD cắt BC ở N . Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 29: (Hoàng Quốc Khánh) Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (O) . Tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q . MQ cắt BC, CD lần lượt ở E, F . NP cắt AD, AB lần lượt ở G, H . Chứng minh rằng FG, QP, AC, MN, EH đồng quy.

Bài 30: Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng các đường thẳng Euler của các tam giác IBC, ICA, IAB và ABC đồng quy. (**Định lý Schiffler**)

Bài 31: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . $K \in (O)$. AK cắt tiếp tuyến tại B, C của (O) tại M, N . CM, BN cắt nhau tại H . Chứng minh rằng KH đi qua một điểm cố định.

Bài 32: Một đường tròn cắt các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt tại $D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2$. D_1E_1 cắt D_2F_2 ở L , E_1F_1 cắt E_2D_2 ở M , F_1D_1 cắt F_2E_2 ở N . Chứng minh rằng AL, BM và CN đồng quy. (**2005 Chinese Math Olympiad**)

Bài 33: Từ điểm A nằm ngoài (O) , ta kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B, C là các tiếp điểm) và hai cát tuyến AEF, AMN . CE cắt BM ở I , CF cắt BN ở J . Chứng minh rằng A, I, J thẳng hàng.

Nói riêng về **Bài toán 33**, thực ra nó không phải là một bài toán khó (khi dùng cực và đối cực) tuy nhiên như các bạn thấy nó cũng khá đẹp mắt, và còn một điều tuyệt vời hơn nữa nó chỉ là trường hợp suy biến của một bài toán khá sâu sắc có lẽ sẽ được trình bày trong một bài viết khác của tác giả và một người bạn rất thân. Tất nhiên tại sao bạn đọc lại không thử mở rộng nó nhỉ? Chúc các bạn thành công nhé.

D) TÀI LIỆU THAM KHẢO:

- [1] Một số bài toán dùng cực và đối cực - NeverStop (diendantoanhoc.net)
- [2] Cực và đối cực - Dương Bửu Lộc THPT chuyên Trần Đại Nghĩa
- [3] Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10 -Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình - Nhà xuất bản Giáo Dục
- [4] Các phép biến hình trong mặt phẳng - Nguyễn Mộng Hy -Nhà xuất bản Giáo Dục
- [5] Projective Geometry - Milovoje Luki'c
- [6] Tập chí toán học và tuổi trẻ - Nhà xuất bản Giáo Dục
- [7] Tuyển chọn các bài toán từ những cuộc thi tại một số nước Đông Âu - Nguyễn Văn Nho - Nhà xuất bản Giáo Dục
- [8] Harmonic Division and it's Applications - Cosmin Pohoata
- [9] Variations of the Steinbart Theorem - Darij Grinberg
- [10] <http://forum.mathscope.org/showthread.php?t=1838>
- [11] Pole and Polar - Kin Y.Li
- [12] <http://forum.mathscope.org/showthread.php?p=27220>
- [13] Các chuyên đề hình học bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học cơ sở - Trần Văn Tấn
- [14] Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 11 - Trần Văn Tấn.
- [15] Episodes in nineteenth and twentieth century Euclidean geometry - Ross Honsberger
- [16] Hàng điểm điều hòa -Nét đẹp quyến rũ trong hình học - Kim Luân (diendantoanhoc.net)

E) ĐÔI ĐIỀU TÂM SỰ:

Ứng dụng của cực và đối cực đối với đường tròn đã là một đề tài không còn mới, đã có nhiều tác giả khai thác và cũng khá đầy đủ. ma 29 viết chuyên đề này với mong muốn hệ thống các tư tưởng ứng dụng, điều đó là quan trọng, bởi nhờ nó mà ta không chỉ có thể giải toán mà còn có thể sáng tác thêm một số bài tập.

Bài viết được hoàn thành với những nỗ lực nhất định nhưng vẫn còn tồn tại những vấn đề làm bản thân tác giả không hài lòng lắm nhưng do năng lực có hạn nên ma 29 sẽ chỉnh sửa dần dần, ngoài ra rất mong nhận được từ các bạn những góp ý thiết thực. Hy vọng rằng qua 60 bài toán trên cực và đối cực sẽ là một công cụ gần gũi với bạn đọc và càng hy vọng hơn, nhờ cực và đối cực, các bạn sẽ là tác giả của nhiều bài toán hấp dẫn!

Thân ái.

Hoàng Quốc Khánh - ma 29

