NGUYỄN QUÝ DY - NGUYỄN SINH NGUYÊN
NGUYỄN VĂN NHO - VŨ VĂN THỎA - VŨ DƯƠNG THỤY

200

VÔ ĐỊCH TOÁN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

02-2006/CXB/88-1844/GD

Mã số : 8I204N6 - TTS

Lời nói đầu

Cho đến nay, *"Tuyển tập 200 bài thi Vô địch Toán"* đã được xuất bản thành 7 tập theo từng mảng kiến thức như sau :

> Tập 1 : 200 bài Số học, tập 2 : 200 bài Đại số, tập 3 : 200 bài Giải tích, tập 4: 200 bài Hình học phẳng, tập 5 : 200 bài Hình học không gian, tập 6 : 200 bài Lượng giác và tập 7 : 200 bài toán Tổ hợp.

Thật đáng mừng là các tập trước đây của bộ sách này đã được đông đảo bạn đọc đón nhận và gởi về chúng tôi những ý kiến đóng góp quý báu, nhất là quý thầy cô giáo và học sinh các trường THPT chuyên trong cả nước. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn !

Căn cứ vào nhu cầu bạn đọc và tính hệ thống kiến thức toán ở từng bộ môn, chúng tôi có nguyện vọng biên soạn thêm một số tập nữa. Trước mắt, chúng tôi giới thiệu tiếp cùng bạn đọc một số bài toán được trích nguyên hoặc biên soạn lại từ các đề thi Vô địch Toán quốc gia và quốc tế thuộc phần các bài toán Phương trình hàm.

Một *phương trình hàm*[1] thường được hiểu là một phương trình theo các biến và các hàm chưa biết, chẳng hạn, ta có các phương trình hàm đặc biệt sau đây :

$f(x + y) = f(x) + f(y)$ (Phương trình Cauchy)
$F(az) = aF(z)(1 - F(z))$ (Phương trình Poincaré)
$f((x + y)/2) = (f(x) + f(y))/2$ (Phương trình Jensen)
$g(x + y) + g(x - y) = 2g(x)g(y)$ (Phương trình d'Alembert)
$f(h(x)) = cf(x)$ (Phương trình Schröder)
$f(h(x)) = f(x) + 1$ (Phương trình Abel).

Tuy nhiên, theo nghĩa tổng quát, những phương trình hàm đã xuất hiện khắp nơi trong chương trình Toán học phổ thông, dưới dạng này hay dạng khác, mà tương ứng với từng dạng đó, ta có những quy luật khảo sát đặc thù. Theo nghĩa

[1] Functional equation

1 MỘT SỐ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN

Trong mục này, chúng tôi nêu ra các bài toán cơ bản, sắp xếp chúng theo dạng và gợi ý đôi dòng sơ lược về phương pháp giải thường được sử dụng.

- *Phương trình dạng f(A) = B*

Đặt A = t. Suy ra x theo t. Sau đó, thay vào A, B. Với phương trình dạng $f(g(x)) = h(x)$, thông thường, đặt $g(x) = t$.

Bài 1.

Tìm hàm số f(x) nếu biết rằng với mọi $x \neq 0$, ta có

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}.$$

Bài 2.

Tìm $f(\frac{x+1}{x})$ nếu biết, với $x \neq 0$: $f(\frac{2}{x+1}) = x^2 - 1$.

Bài 3.

Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ thoả mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = \frac{2x+5}{x^2+1}, \ \forall x \neq 1.$$

Bài 4.

Tìm tất cả hàm số $f : [0, 1] \to [0, 1]$ thoả mãn

a) $f(x) \neq f(y)$ với mọi $x \neq y$;

b) $2x - f(x) \in [0, 1]$ với mọi $x \in [0, 1]$;

c) $f(2x - f(x)) = x$, với mọi $x \in [0, 1]$.

Bài 5.

Tìm f(x) nếu biết, với mọi $x \neq 0$: $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = x$.

Bài 6.

Tìm f(x) nếu biết, với mọi $x \neq 0$:

$$f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x + 1 - \frac{1}{x}.$$

Bài 7.

Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả mãn điều kiện : với a, b, c là các hằng số cho trước mà $b^2 \neq 1$, ta có

$$\forall x \in R, f(x) = a - bf(c - x).$$

Bài 8.

Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ thoả mãn điều kiện

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}, \ \forall x \neq 0.$$

- *Hệ phương trình hàm*

Từ một trong hai phương trình, thay giá trị thích hợp để được một phương trình khác.
Từ hai phương trình này nhận được f(A) hoặc g(A).
Sau đó, trở lại dạng trên (các bài từ 1 đến 8).

Bài 9.

Tìm f(x) ; g(x) nếu biết, với mọi $x \in R$:

$$\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \dfrac{x+2}{2} \\ f\left(\dfrac{x+2}{2}\right) + g(x+5) = x + 4 \end{cases}$$

Bài 10.

Tìm f(x) ; g(x) nếu biết rằng với mọi $x \in R$ ta có

$$\begin{cases} f(x+1) + xg(x+1) = 2x \\ f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + g\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = x - 1, \ (x \neq 1) \end{cases}$$

(ii) $f(0) = \frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng f là hàm số hằng.

Bài 21.

Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thoả mãn

$$f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y), \text{ với mọi } x, y.$$

- *Sử dụng tính chất của hàm liên tục*

Chú ý. Hàm số f(x) liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, hay nếu mọi dãy (r_n) có giới hạn x_0 thì dãy tương ứng $(f(r_n))$ sẽ có giới hạn $f(x_0)$.

$$f\left(\lim_{n \to \infty} r_n\right) = \lim_{n \to \infty} f(r_n), \text{với} \lim_{n \to \infty} r_n = x_0.$$

f(x) liên tục trên [a,b] và $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$ thì $f(x) > 0$ hoặc $f(x) < 0$, $\forall x \in [a,b]$.

f(x) liên tục và đơn ánh trên [a,b] thì f(x) đơn điệu trên [a,b].

Bài 22.

Tìm hàm số liên tục f(x) thoả mãn

$$f(x^2).f(x) = 1, \text{ với mọi } x \in R.$$

Bài 23.

Cho $\alpha \in R$, $\alpha \neq \pm 1$. Tìm tất cả hàm số f(x) xác định và liên tục trên R^+ thoả mãn : $f(x^\alpha) = f(x)$ với mọi $x \in R^+$.

Bài 24.

Tìm các hàm số f(x) xác định và liên tục trên R và thoả mãn đồng thời hai điều kiện

(i) $f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x)f(y)$, $\forall x, y \in R$,

(ii) $f(0) = 1$; $\exists x_0 \in R : |f(x_0)| < 1$.

Bài 25.

Tìm tất cả hàm số liên tục f(x) xác định trong tập hợp các số thực và thoả mãn : $f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$, với mọi x.

Bài 26.

Cho a là số thực mà $0 < a < 1$ và hàm số f liên tục trên [0, 1] thoả mãn : $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) = (1 - a)f(x) + af(y),$$

với mọi $x, y \in [0, 1]$ và $x \le y$. Hãy xác định $f(\frac{1}{7})$.

Bài 27.

Cho f là hàm số liên tục từ R vào R sao cho

$$f(1) = 1, f(a + b) = f(a) + f(b)$$

với mọi a, b và $f(x)f(\frac{1}{x}) = 1$ với mọi $x \neq 0$. Chứng minh rằng

$$f(x) = x, \forall x \in R.$$

Bài 28.

Tìm hàm số liên tục $f: R \to R$ thoả mãn :

$$\forall x, y \in R, f(xy) = f(x).f(y).$$

Bài 29.

Tìm tất cả các hàm liên tục và thoả mãn

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x, \quad \forall x \in R.$$

Bài 30.

Tìm tất cả các hàm thoả mãn đồng thời các điều kiện :

a) f(x) xác định và liên tục trên R.

b) Với mỗi bộ số gồm 2n + 1 giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ mà $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+1}$ thì ta luôn có

$$f(x_{2n+3}) \ge \frac{1}{2n}(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + f(x_{n+2}) + f(x_{n+3}) + \ldots + f(x_{2n+1})).$$

Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương :

(i) $\forall x \in R$, $f(x) = f(ax)$;

(ii) $f(x) = \begin{cases} g(\{\log_a x\}) & \text{khi } x > 0 \\ m & \text{khi } x = 0, \\ h(\{\log_a(-x)\}) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

trong đó m là hằng số và g, h : [0, 1) → R là hàm số bất kì.

Bài 43.

Tìm hàm số f : R → R thoả mãn điều kiện

$$\forall x \in R,\ f(x) = 2f(2x) + 1.$$

Bài 44.

Tìm hàm số f : R → R thoả mãn điều kiện

$$\forall x \in R,\ f(3x) = -f(x).$$

Bài 45.

Cho hàm số f : R → R và số thực a > 0, a ≠ 1. Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương

(i) $x \in R$, $f(x) = f(-ax)$;

(ii) $f(x) = \begin{cases} f(a^2x) & \text{khi } x > 0 \\ f(-a^2x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$;

(iii) $f(x) = \begin{cases} g\left(\left\{\frac{1}{2}\log_a x\right\}\right) & \text{khi } x > 0 \\ m & \text{khi } x = 0, \\ g\left(\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a |x|\right\}\right) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

trong đó g : (0, 1) → R là hàm số và m là hằng số bất kì.

Bài 46.

Tìm hàm số f : R → R, thoả mãn điều kiện

$$\forall x \in R,\ f(2-3x) = f(x).$$

Bài 47.

Tìm các hàm f : (−1, 1) → R , biết f khả đao và

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right),\ \forall x, y \in (-1, 1).$$

- *Phương trình hàm và các hàm số chẵn - lẻ*

f(x) là hàm số chẵn trên (a, b)

$$\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : \begin{cases} -x \in (a,b) \\ f(-x) = f(x) \end{cases}.$$

f(x) là hàm số lẻ trên (a, b)

$$\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : \begin{cases} -x \in (a,b) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}.$$

Bài 48.

Cho các hàm số f(x), g(x) thoả mãn với mọi x, y :

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y) \end{cases},$$

trong đó f(x) là hàm số lẻ, $f(0) = 0$ và $f(x) \neq 0$ với $x \neq 0$. Chứng minh rằng :

a) g(x) là một hàm chẵn và $g(0) = 1$;

b) $f^2(x) + g^2(x) = 1$;

$f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x)$;

$g(3x) = 4g^3(x) - 3g(x)$, với mọi x.

Bài 49.

Cho hàm số f : R → R.Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương :

(i) $\forall x \in R$, $f(x) = f(-x)$;

(ii) $\forall x \in R$, $f(x) = g(x) + g(-x)$,

với g : R → R là hàm số nào đó ;

(ii) $\forall x \in R$, $f(x) = g(\{x\})$;

(iii) $\forall x \in R$, $f(x + a) = f(x)$;

(iv) $\forall x \in R$, $f(x) = g(\{\frac{x}{a}\})$,

trong đó $a \neq 0$ là số thực cho trước, $g : [0, 1) \to R$ là hàm số nào đó. Chứng minh rằng :

a) (i) tương đương với (ii) ;

b) (iii) tương đương (iv).

Bài 62.

Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$\forall x \in R,\ f(x + 2) = 1 + f(x).$$

Bài 63.

Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$\forall x \in R,\ f(x + 2) = 1 + 2f(x).$$

Bài 64.

Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$\forall x \in R,\ f(x + 2) = 1 + 2x + f(x).$$

Bài 65.

Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả mãn điều kiện

$$\forall x \in R,\ f(x + 1) = - f(x).$$

Bài 66.

Cho f là một hàm số từ tập hợp các số thực R vào chính nó sao cho với mọi $x \in R$, ta có $|f(x)| \leq 1$ và

$$f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7}).$$

Chứng minh rằng f là một hàm số tuần hoàn.

Bài 67.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên R và thoả mãn :

$$\begin{cases} f(x+3) \leq f(x) + 3 \\ f(x+2) \geq f(x) + 2,\ \forall x \in R. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $g(x) = f(x) - x$ là hàm tuần hoàn.

Bài 68.

Chứng minh rằng, nếu đồ thị của hàm $y = f(x)$ có nhiều hơn 1 tâm đối xứng thì ta tìm được hàm tuyến tính $l(x)$ và hàm tuần hoàn $p(x)$ sao cho $f(x) = l(x) + p(x)$.

Bài 69.

Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực $f(x)$ sao cho

$$\cos f(x),\ x \in R$$

là hàm số tuần hoàn.

Bài 70.

Chứng minh rằng nếu hàm số tuần hoàn $f(x)$ thoả mãn điều kiện $kf(x) = f(kx)$, $\forall x \in R$ với k là hằng số $\neq \pm 1; 0$ nào đó, thì f không có chu kì dương nhỏ nhất.

- *Sử dụng lí thuyết số*

Khi gặp phương trình hàm với các hàm số trên N, Z, ta thường sử dụng các kết quả của lí thuyết số như lí thuyết đồng dư, các định lí về số nguyên tố.

Bài 71.

Cho Q^+ là tập hợp các số hữu tỉ dương. Xác định hàm số $f : Q^+ \to Q^+$ sao cho $f(x.f(y)) = \frac{f(x)}{y}$, $\forall x, y \in Q^+$.

Bài 72.

Cho $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Hãy xác định xem có tồn tại hay không một hàm số đồng biến thực sự (đồng biến chặt chẽ) $f : N \to N$ sao cho hai tính chất sau được thoả mãn :

Bài 83.

a) Cho hai hàm f và g nhận giá trị nguyên, xác định trên tập các số nguyên. Chứng minh rằng h = fg không phải là toàn ánh.

b) Giả sử f là toàn ánh, nhận giá trị nguyên, xác định trên tập các số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại hai toàn ánh g và h, nhận giá trị nguyên, xác định trên tập các số nguyên, sao cho f = gh.

Bài 84.

(a) Có tồn tại hay không các hàm số $f: R \to R$ và $g: R \to R$ sao cho $f(g(x)) = x^2$ và $g(f(x)) = x^3$ với mọi $x \in R$?

(b) Có tồn tại hay không các hàm số $f: R \to R$ và $g: R \to R$ sao cho $f(g(x)) = x^2$ và $g(f(x)) = x^4$ với mọi $x \in R$?

Bài 85.

Giả sử hàm f(x) xác định trong khoảng (a, b). Trong trường hợp nào thì phương trình y.f(x) = 0 có nghiệm liên tục duy nhất y(x) với a < x < b ?

Bài 86.

Có tồn tại hay không một hàm f từ tập các số nguyên không âm vào chính nó sao cho với mọi n ta có:

$$f(f(n)) = n + 1987 \ ?$$

Bài 87.

Có tồn tại hay không một hàm f từ tập các số nguyên dương vào chính nó sao cho với mọi n, ta có:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(f(n)) = f(n) + n \ ? \\ f(n) < f(n+1) \end{cases}$$

Bài 88.

Gọi N_0 là tập hợp các số nguyên không âm. Chứng tỏ rằng tồn tại một song ánh f từ N_0 vào N_0 sao cho với mọi m, n thuộc N_0 ta có : $f(3mn + m + n) = 4f(m)f(n) + f(m) + f(n)$.

3 PHƯƠNG TRÌNH HÀM VÀ GIÁ TRỊ ĐẶC BIỆT CỦA HÀM SỐ

Bài 89.

Cho hàm số f(x) xác định với mọi $x \neq 0$ và thoả mãn đồng thời ba điều kiện

a) $f(1) = 1$;

b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} f(x), \forall x \neq 0$;

c) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \neq 0, x_1 + x_2 \neq 0$.

Chứng minh rằng $f\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{7}$.

Bài 90.

Xét tất cả các hàm f từ tập các số nguyên dương vào chính nó, thoả mãn $f(t^2 f(s)) = sf^2(t)$ với mọi s và t.

Hãy xác định giá trị nhỏ nhất có thể có của f(1998) (ở đây, kí hiệu $f^2(x)$ có nghĩa là $(f(x))^2$).

Bài 91.

Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên R thoả điều kiện : tồn tại x_1, x_2 sao cho $0 < x_1 < x_2$ và $f(x_1)f(x_2) < 0$. Chứng

$$f(i) = i + 1,$$

với $i = 1, 2, \dots, m - 1, m + 1, \dots, m + n - 1$;

$$f(m) = 1 \text{ và } f(m + n) = m + 1.$$

a) Chứng minh rằng nếu m và n lẻ thì tồn tại một hàm số $g : A \to A$ sao cho $g(g(a)) = f(a)$ với mọi $a \in A$.

b) Chứng minh rằng nếu m chẵn, thì $m = n$ nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm số $g : A \to A$ sao cho $g(g(a)) = f(a)$ với mọi $a \in A$.

Bài 101.

Giả sử M là tập hợp các hàm số $f: Z \to R$ thoả mãn điều kiện $f(0) \neq 0$ và :

$$f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m), \quad n, m \in Z.$$

a) Tìm tất cả các hàm $f \in M$ sao cho $f(1) = \frac{5}{2}$.

b) Tìm tất cả các hàm $f \in M$ sao cho $f(1) = \sqrt{3}$.

Bài 102.

Tìm tất cả các hàm số $f: Q \to Q$ sao cho f thoả mãn điều kiện $f(1) = 2$ và phương trình :

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1, \quad x, y \in Q.$$

Bài 103.

Cho hàm số $f : N^* \to R$ xác định bởi điều kiện:

a) $f(1) = 2$;

b) $f(n+1) = [f(n)]^2 - f(n) + 1$ với mọi $n \in N^*$.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$ ta đều có :

$$1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} < 1 - \frac{1}{2^{2^n}}.$$

Bài 104.

Các hàm số $f, g, h: N \to N$ thoả mãn ba điều kiện sau :

a) Hàm số $h(n)$ không nhận giá trị nào tại nhiều hơn một điểm $n \in N$.

b) Tập hợp giá trị hàm số $g(n)$ là N.

c) $f(n) = g(n) - h(n) + 1, \ n \in N$.

Chứng minh rằng ta luôn luôn có đồng nhất thức

$$f(n) = 1, \ n \in N.$$

Bài 105.

Cho hàm f xác định trên tập các số nguyên dương và cũng nhận giá trị nguyên dương. Giả sử với mọi n ta có :

$$(n+1) > f(f(n)).$$

Chứng minh rằng $f(n) = n$ với mọi n.

Bài 106.

Gọi S là tập các số nguyên không âm. Tìm tất cả các hàm đi từ S vào chính nó sao cho với mọi m, n ta có :

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n).$$

Bài 107.

Cho hàm số f xác định trên tập các số nguyên dương sao cho $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ và với mọi n nguyên dương ta có :

i) $f(2n) = f(n)$, ii) $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$,

iii) $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$.

Hãy xác định số tất cả các số nguyên dương n sao cho $n \leq 1998$ và $f(n) = n$.

Bài 108.

Gọi Q^+ là tập hợp tất cả các số hữu tỉ dương.

$(0, a)$, phương trình $(x-1)f(x) = xf'(x)$ có nghiệm.

Bài 118.

Cho hàm số $f : R \to R$ và $[a;b] \subset R$, $a < b$. Biết rằng

$$f_{\alpha}(x) = f(x) + f(\alpha x),\ \forall \alpha \in [a:b]$$

là hàm liên tục trên R. Chứng minh $f(x)$ cũng là hàm liên tục trên R.

Bài 119.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$ thoả mãn điều kiện $f(0) = f(1)$. Chứng minh phương trình :

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{2000}\right)$$

có nghiệm $x \in [0, 1]$.

Bài 120.

Chứng minh rằng hàm $f : R \to R$ thoả mãn

$$\forall x, y \in R, f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y) \qquad (1)$$

khi và chỉ khi :

$$\forall x, y \in R, f(x + y) = f(x) + f(y). \qquad (2)$$

Bài 121.

Cho hai hàm số $f, g : [a, b] \to [a, b]$ sao cho

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

là hàm số liên tục trên $[a, b]$ và ta có

$$f(g(x)) = g(f(x)),\ \forall x \in [a, b].$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm.

Bài 122.

Chứng minh rằng nếu hàm số $f : R \to R$ không đồng nhất bằng 0, thoả mãn phương trình hàm

$$f(x)f(y) = f(x + y),\ x, y \in R$$

đồng thời f có đạo hàm tại điểm $x = 0$, thì nó có đạo hàm bậc vô hạn tại bất kì điểm $x \in R$.

Bài 123.

Cho R^+ là tập hợp các số thực không âm; a và b là 2 số thực dương. Giả sử hàm số $f : R^+ \to R^+$ thoả mãn phương trình hàm $f(f(x)) + af(x) = b(a + b)x$.

Tính giới hạn khi $x \to +\infty$ của :

$$f\left(f(\ldots\ldots f(\frac{1}{f(x)}))\ldots\right) \text{ (2001 lần kí hiệu f)}.$$

Bài 124.

Gọi $f : R \to R$ là hàm số thoả mãn : mọi $x, y \in R$,

$$f(x^3 + y^3) = (x + y)(f(x)^2 - f(x)f(y) + f(y)^2). \qquad (1)$$

Chứng minh rằng với mọi $x \in R$, $f(1996x) = 1996f(x)$.

Bài 125.

Cho số hữu tỉ a và các số thực b, c, d. Xét hàm số

$$f : R \to [-1, 1]$$

thoả mãn điều kiện : với mọi $x \in R$, ta có

$$f(x + a + b) - f(x + b) = c[x + 2a + [x] - 2[x + a] - [b]] + d,$$

trong đó, kí hiệu [.] chỉ hàm phần nguyên.

Chứng minh rằng hàm f tuần hoàn, tức là, tồn tại một số $p > 0$ sao cho $f(x + p) = f(x)$ với mọi $x \in R$.

Bài 126.

Cho f là một hàm số từ tập hợp các số thực R vào chính nó sao cho với mọi $x \in R$, ta có $|f(x)| \le 1$ và

$$f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7}).$$

với $n \geq 2$ là một số tự nhiên và $k = \left[\frac{n-2}{3}\right]$.

a) Chứng minh

$$P_{n+3}(x) = 3P_{n+2}(x) - 3P_{n+1}(x) + (x+1)P_n(x).$$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên a sao cho $P_n(a^3)$ chia hết cho $3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ với mọi $n \geq 2$.

Bài 137.

Cho hai đa thức monic trên trường phức P và Q (đa thức monic là đa thức có hệ số của số hạng đầu tiên (*ứng với bậc cao nhất*) bằng 1) sao cho $P(P(x)) = Q(Q(x))$. Chứng minh rằng $P = Q$.

Bài 138.

Cho đa thức $P(x)$ có bậc lẻ và thoả mãn

$$P(x^2 - 1) = P(x)^2 - 1$$

với mọi x. Chứng minh rằng $P(x) = x$ với mọi số thực x.

Bài 139.

Tìm đa thức $f(x)$ với hệ số thực sao cho

$$f(2005) = 2037$$

đồng thời, với mọi x nguyên dương, ta có

$$f(x) = \sqrt{f(x^2+1) - 33} + 32.$$

7 MỘT SỐ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐỆ QUY

Bài 140.

Cho dãy các hàm số $(f_n(x))$ thoả mãn điều kiện

(i) $f_1(x) = x$, (ii) $f_{n-1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)}$.

Hãy tính $f_{1999}(1999)$.

Bài 141.

Cho M là tập hợp các hàm số $f : Z \to R$ thoả mãn điều kiện $f(0) \neq 0$ và đồng nhất thức

$$f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m), \text{ với } n, m \in Z.$$

a) Tìm tất cả hàm số $f(n) \in M$ sao cho $f(1) = \frac{5}{2}$.

b) Tìm tất cả hàm số $f(n) \in M$ sao cho $f(1) = \sqrt{3}$.

Bài 142.

Giả sử $f_1(x) = -\frac{2x+7}{x+3}$, $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$.

Tính $f_{2001}(2002)$.

Bài 143.

Cho dãy các hàm số $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

1) $f_n(x) : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$, $\forall n \in N$;

2) $f_0(x) = x$, $\forall x \in (0; +\infty)$;

3) $f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)}$, $\forall x \in (0; +\infty)$ và $\forall n \in N$.

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y).$$

Ngoài ra, f không đồng nhất bằng 0 và

$$|f(x)| \le 1, \forall x \in R.$$

Chứng minh rằng: $|g(x)| \le 1, \forall x \in R$.

Bài 151.

Gọi X là tập tất cả các số thực lớn hơn 1. Tìm tất cả các hàm f xác định trên X và nhận giá trị trên X sao cho

$$f(x^a y^b) \le (f(x))^{\frac{1}{4a}}(f(y))^{\frac{1}{4b}}$$

với mọi x, y và mọi số thực dương a, b.

Bài 152.

Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thoả mãn đồng thời các điều kiện:

1) $f(x+y)=f(x)f(y), \forall x, y \in R$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Bài 153.

Cho hàm số $f(x): R \to R$ liên tục sao cho với $\forall x \in R$ ta có $f(f(x))=-x^2$. Chứng minh rằng $f(x) \le 0, \forall x \in R$.

Bài 154.

Xác định các hàm số $f: R^+ \to R$ không đồng nhất bằng 0 và thoả mãn các điều kiện :

1) $f(xy)=f(x)+f(y), \forall x, y \in R^+$,

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

Bài 155.

Cho hàm số $f: R^+ \to R$ thoả mãn:

1) $f(xy)=f(x)+f(y), \forall x, y \in R^+$

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

Hãy xác định hàm số f.

Bài 156.

Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ tăng thực sự sao cho với mọi x, y ta có $f(f(x)+y)=f(x+y)+f(0)$.

Bài 157.

Tìm tất cả các hàm f và g thoả mãn các phương trình hàm :

$$f(2x+1)+2g(2x+1)=2x,$$

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x.$$

Bài 158.

Tìm tất cả các hàm liên tục $f: R \to [0, 1)$ sao cho với mọi x, y $\in$ R, $f(x^2+y^2)=f(x^2-y^2)+f(2xy)$.

Bài 159.

Tìm tất cả các hàm f thoả mãn phương trình hàm

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2).$$

Bài 160.

Tìm tất cả các hàm $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$ thoả mãn

$$f(f(x)+y)=xf(1+xy)$$

với mọi số thực dương x, y.

Bài 161.

Tìm tất cả các hàm f xác định trên tập các số thực và nhận giá trị thực thoả mãn 5 điều kiện sau đây :

x, y dương.

Bài 171.

Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định trên tập các số thực dương và thoả mãn

$$f(x) + 2.f(1/x) = 3x + 6$$

với mọi x thuộc miền xác định.

Bài 172.

Gọi R là tập tất cả các số thực, R^+ là tập các số thực dương. Gọi α, β là hai phần tử cho trước trong R, không cần phải khác nhau. Tìm tất cả các hàm $f : R^+ \to R$ sao cho

$$f(x)f(y) = y^{\alpha} f\left(\frac{x}{2}\right) + x^{\beta} f\left(\frac{y}{2}\right)$$

với mọi x, y thuộc R^+.

Bài 173.

Tìm tất cả các hàm số $f : R^+ \to R^+$ thoả mãn:

$$f(x^y) = [f(x)]^{f(y)}, \forall x, y \in R^+.$$

Bài 174.

Tìm tất cả các hàm số f: R → R, g: R → R sao cho

$$f(x + g(y)) = x\,f(y) - y\,f(x) + g(x)$$

với mọi $x, y \in R$.

Bài 175.

Cho f và g là các hàm số xác định trên R, nhận giá trị trên R. Với mọi x và y, giả sử

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y).$$

Ngoài ra, f không đồng nhất bằng 0 và

$$|f(x)| \le 1, \forall x \in R.$$

Chứng minh rằng: $|g(x)| \le 1, \forall x \in R$.

Bài 176.

Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thoả mãn: $f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y$, $\forall x, y \in R$.

Bài 177.

Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : (1; +\infty) \to R$ sao cho nếu f thoả mãn một trong hai đồng nhất thức:

$$f(xy) = xf(y) + yf(x),\ x, y > 1;$$

$$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y),\ x, y \in R$$

thì sẽ thoả mãn đồng nhất thức còn lại.

Bài 178.

Tìm tất cả hàm số $f : R \to R$ khả vi vô hạn và thoả mãn : $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, $x, y \in R$.

Bài 179.

Tìm tất cả những hàm $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $f(xf(y)) = yf(x)$, $\forall x, y \in (0, \infty)$;

ii) $f(x) \to \infty$ khi $x \to \infty$.

Bài 180.

Tìm tất cả các hàm số $f : R \to R$ thoả mãn:

$$f(x) = \max_{y \in R}\{xy - f(y)\},\quad \forall x \in R.$$

Bài 181.

Kí hiệu R^+ là tập các số thực không âm, hãy xác định tất cả các hàm $f : R^+ \to R^+$ thoả mãn các điều kiện sau:

a) $f(2) = 0$;

9 MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Bài 192.

R là tập hợp các số thực. Tìm tất cả các hàm liên tục và khả vi $f: R \to R$ sao cho với mọi số thực a ta có:

$$f^2(a) = 1990 + \int_0^a [f^2(x) + f'^2(x)]dx.$$

(Kí hiệu $f^2(x)$ ở đây có nghĩa là $(f(x))^2$).

Bài 193.

Có thể tồn tại hay không một hàm số $f(x): R \to R$ liên tục và thoả mãn điều kiện : với mọi số thực x, ta có $f(x)$ hữu tỉ khi và chỉ khi $f(x+1)$ vô tỉ ?

Bài 194.

Gọi X là tập các số thực không âm. Cho $f: X \to X$ là hàm bị chặn trên đoạn [0, 1] và thoả mãn bất đẳng thức

$$f(x)f(y) \le x^2 f\left(\frac{y}{2}\right) + y^2 f\left(\frac{x}{2}\right)$$

với mọi x, y. Chứng minh rằng $f(x) \le x^2$.

Bài 195.

Cho hàm f xác định trên tập số thực dương thoả mãn các tính chất sau:

(1) $f(1) = 1$,

(2) $f(x+1) = xf(x)$,

(3) $f(x) = 10^{g(x)}$.

với $g(x)$ là hàm xác định trên tập số thực sao cho

$$g[ty + (1-t)z] \le tg(y) + (1-t)g(z)$$

với mọi y, z và $0 \le t \le 1$.Chứng minh rằng:

(a) $t[g(n) - g(n-1)] \le g(n+t) - g(n) \le t[g(n+1) - g(n)]$

với n nguyên và $0 \le t \le 1$;

(b) $\frac{4}{3} \le f\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

Bài 196.

Cho n là số nguyên dương, X = { 1, 2, . . . , n } và k là số nguyên dương sao cho $\frac{n}{2} \le k \le n$. Xác định số tất cả các hàm số $f: X \to X$ sao cho các điều kiện sau được thoả

(i) $f^2 = f$,

(ii) Số phần tử của miền giá trị của f là k.

(iii) Với mỗi y thuộc miền giá trị của f, số tất cả các điểm x thuộc X sao cho f(x) = y là không quá 2.

Bài 197.

Cho hàm số $f: N \to N$ sao cho

(i) f đồng biến thực sự trên N ;

(ii) $f(mn) = f(m)f(n)$, $\forall m, n \in N$;

(iii) Nếu $m \ne n$ và $m^n = n^m$ thì $f(m) = n$ hay $f(n) = m$.

Hãy xác định f(30).

Bài 198.

Cho số nguyên $n \ge 3$ và số nguyên tố p, với

$$p \ge 2n - 3.$$

Gọi Ω là tập gồm n điểm trong mặt phẳng sao cho không có bất cứ ba điểm nào thẳng hàng.

1 MỘT SỐ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN

Bài 1.

Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ thay vào hàm số đề bài, suy ra

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}.$$

Từ đó $f(x) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} & \text{khi } t > 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{1+t^2}}{t} & \text{khi } t < 0 \end{array}\right.$.

Bài 2.

Đặt $t = \frac{2}{x+1} \Rightarrow x = \frac{2-t}{t}$. Từ đó

$$f(t) = \frac{4-4t}{t^2} \Rightarrow f(x) = \frac{4-4x}{x^2}$$

Suy ra $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{-4x}{x^2+2x+1}$.

Bài 3.

Đặt $\frac{x+2}{x+1} = t \Rightarrow x = \frac{t+2}{t-1}$. Từ giả thiết, ta có

$$f(t) = \frac{2\frac{t+2}{t-1}+5}{\left(\frac{t+2}{t-1}\right)^2+1} = \frac{7t^2-8t+1}{2t^2+2t+5}.$$

Do đó, $f(x) = \frac{7x^2-8x+1}{2x^2+2x+5}$. Đảo lại, dễ thấy hàm số

như thế thoả mãn điều kiện đề bài.

Bài 4.

Tìm tất cả hàm số $f : [0, 1] \to [0, 1]$ thoả mãn

a) $f(x) \neq f(y)$ với mọi $x \neq y$;

b) $2x - f(x) \in [0, 1]$ với mọi $x \in [0, 1]$;

c) $f(2x - f(x)) = x$, với mọi $x \in [0, 1]$.

Bài 5.

Thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta được $f(\frac{1}{x}) + 2f(x) = \frac{1}{x}$.

Như thế ta được hệ

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x \\ 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{2-x^2}{3x}.$$

Bài 6.

Thay $\frac{1}{1-x}$ bởi x ta được

$$f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = \frac{x^2-3x+1}{x(x-1)}.$$

Lấy phương trình đã cho trừ phương trình này thì được

$$f(\frac{1}{1-x}) - f(\frac{x-1}{x}) = x - \frac{1}{x-1}.$$

Trong phương trình này, thay $\frac{1}{1-x}$ bởi x thì nhận được

$$f(x) - f(\frac{1}{1-x}) = \frac{-x^2+x-1}{x} = -x + 1 - \frac{1}{x}.$$

Rồi từ phương trình đề bài và phương trình này suy ra mọi x. Đảo lại, dễ thấy hai hàm này thoả mãn điều kiện của bài toán.

Bài 12.

Trước hết, ta có

$$f(0) = f(1).f(0) - f(1 + 0) + 1 \Rightarrow f(0) = 1.$$

Giả sử $f(m) = m + 1$. Thế thì

$$f(m.1) = f(m)f(1) - f(m + 1) + 1$$

$$\Rightarrow f(m + 1) = f(m) + 1 = m + 2.$$

Vậy, với mọi $m \in N : f(m) = m + 1$.

Bây giờ, ta lại có

$$f(0) = f(1 - 1) = f(-1).f(1) - f(-1) + 1 \Rightarrow f(-1) = 0.$$

Ta lấy $-m \in N$:

$$f(m) = f[(-1)(-m)] = f(0).f(-m) - f(-1 - m) + 1 = 0 + m + 1.$$

Do vậy, với $m \in Z$, $f(m) = m + 1$.

Sau đó với $m \in Z$, $n \in Z^*$, $x \in R$ bất kì, ta có

$$f(x + 1) = f(1)f(x) - f(1.x) + 1 = f(x) + 1.$$

Từ đó với mọi m, bằng quy nạp, ta được

$$f(x + m) = f(x) + m,$$

$$f(m) = f(n\frac{m}{n}) = nf(\frac{m}{n}) - f(n - 1) = m + 1$$

$$\Rightarrow f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} + 1.$$

Bài 13.

a) Lấy $y = 0$ thì ta có $f(x)[f(0) - 1] = 0$ với mọi x. Vì f không đồng nhất 0 nên suy ra $f(0) = 1$. Lại lấy x và y đều bằng $\frac{x}{2}$ nên $2[f(\frac{x}{2})]^2 = f(x) + 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq -1$.

b) Ta có $f(x + y) = 2f(x)f(y) - f(x - y)$. Do đó

$$f(6) = f(3 + 3) = 2f(3)\,f(3) - f(3 - 3) = -1$$

$$f(9) = f(6 + 3) = 2f(6)\,f(3) - f(6 - 3) = 0$$

$$f(12) = f(9 + 3) = 2f(9)\,f(3) - f(6) = 1.$$

Giả sử $f[3(2k + 1)] = 0$, thế thì

$$f[3(2k + 3)] = f[3(2k + 1) + 6]$$

$$= 2f[3(2k + 1)]\,f(6) - f[3(2k - 1)] = 0.$$

Giả sử $f(3.4k) = 1$, thế thì

$$f[3(4k + 4)] = f[3.4k + 3.4] =$$

$$= 2f(3.4k).f(3.4) - f[3.4(k - 1)] = 2 - 1 = 1.$$

Giả sử $f[3(4k + 2)] = -1$; thế thì

$$f[3(4k + 6) = f[3(4k + 2) + 12] =$$

$$= 2f[3(4k + 2)]\,f(12) - f[3(4k - 2)]$$

$$= 2(-1).1 - (-1) = -1.$$

Mà $1992 = 3.4(166)$ nên ta có $f(1992) = 1$,

$1995 = 3(4.166 + 1) \Rightarrow f(1995) = 0$,

$1998 = 3(4.166 + 2) \Rightarrow f(1998) = -1$.

Bài 14.

a) Trước hết, bằng quy nạp ta nhận được

$$\forall x \in R, \forall n \in N, f(nx) = nf(x).$$

Sau đó, với m, n nguyên dương và x bất kì, ta có

$$m\,f\left(\frac{n}{m}x\right) = f\left(m.\frac{n}{m}x\right) = f(nx) = nf(x)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x).$$

Do vậy, với r hữu tỉ dương bất kì ta có :

$$f(rx) = rf(x), \forall x.$$

Từ đó, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ và

$$0 = f(0) = f(x - x) = f[x + (-x)] = f(x) + f(-x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Như vậy, sau cùng ta nhận được $\forall r \in Q$; $\forall x \in R$:

Suy ra $nf(\frac{1}{n}) = 1$. Từ đó $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, $\forall n \neq 0$.

Bây giờ, với mọi $p \in Z$, $n \in N^*$:

$$f(\frac{p}{n}) = f(p).f(\frac{1}{n}) = p.\frac{1}{n} = \frac{p}{n}.$$

Như thế : $\forall x \in Q : f(x) = x$. Sau cùng với tính liên tục ta được

$$\forall x \in R : f(x) = x.$$

Vậy, có hai hàm số thoả điều kiện đề bài :

$$f(x) = 0, \forall x \in R ; f(x) = x, \forall x \in R.$$

Bài 17.

Lấy y = 1, ta được

$$f(x) = \frac{f(x) + f(1)}{x + 1} \ (x \neq 1) \Rightarrow xf(x) = f(1).$$

Lấy x = 0 thì nhận được f(1) = 0, suy ra

$$\forall x \neq -1, 0 : f(x) = 0.$$

Hơn nữa thay vào hệ thức ban đầu, với x = 2 ; y = 0 thì nhận được

$$f(0) = \frac{f(2) + f(0)}{2} \Rightarrow f(0) = f(2) = 0.$$

Sau cùng, thay y = 0 ; x = – 1 thì được

$$f(0) = -f(-1) - f(0) \Rightarrow f(-1) = -2f(0) = 0.$$

Như vậy f(x) là hàm số đồng nhất không.

Bài 18.

Trong hệ thức đã cho, lấy x = y = 1 thì được

$$2f(1) = 2(f(1))^2 \Rightarrow f(1) = 0 \text{ hay } f(1) = 1.$$

Ta xét từng trường hợp

a) Nếu f(1) = 0 thì trong hệ thức đã cho, chọn y = 1, thì có f(x) = 0.

b) Nếu f(1) = 1, lại lấy y = 1 thì có

$$f(x) + x = (x + 1)f(x) \Rightarrow x(f(x) - 1) = 0.$$

Từ đó, với $x \neq 0$ ta có f(x) = 1.

Như vậy, hàm số tìm được là f(x) = 0, hoặc

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}, a \in R.$$

Bài 19.

Nếu f(x) thoả mãn hệ thức thứ nhất, thì

$$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x + y) = f(xy) + f(x) + f(y), x, y \in R$$

do đó f(x) thoả hệ thức thứ hai.

Bây giờ cho f(x) thoả mãn hệ thức thứ hai, đặt

$$y = u + v + uv,$$

thì được $f(x + u + v + xu + xv + uv + xuv) =$

$$= f(x) + f(u + v + uv) + f(xu + xv + xuv)$$

$$\Leftrightarrow f(x + u + v + xu + xv + uv + xuv) =$$

$$= f(x) + f(u) + f(v) + f(uv) + f(xu + xv + xuv). \quad (1)$$

Hoán đổi vị trí của biến số x và u trong biểu thức (1), ta được

$$f(x + u + v + xu + xv + uv + xuv) =$$

$$= f(x) + f(u) + f(v) + f(xv) + f(xu + uv + xuv). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$f(uv) + f(xu + xv + xuv) = f(xv) + f(xu + uv + xuv). \quad (3)$$

Trong (3), lấy x = 1 thì được

$$f(uv) + f(u + v + uv) = f(v) + f(u + 2uv)$$

$$\Leftrightarrow f(uv) + f(u) + f(v) + f(uv) = f(v) + f(u + 2uv)$$

suy ra

$$f(u) + 2f(uv) = f(u + 2uv). \quad (4)$$

Trong (4), lấy u = 0 thì được

$$f(0) = 3f(0) \Rightarrow f(0) = 0. \quad (5)$$

Trong (4) lấy v = – 1, thì được

$$f(-u) = f(u) + 2f(-u) \Rightarrow f(-u) = -f(u). \quad (6)$$

ta đã giả sử $f(1) \neq 0$, nên $1 \in G$).

. Nếu $x, y \in G$, thì $xy \in G$. Thật vậy, do (a) ở trên, $1/x \in G$, nên nếu $xy \notin G$, thì từ (4) ta được $y = (xy)(1/x) \notin G$, vô lí.

. Nếu $x, y \in G$, thì $x/y \in G$. Điều này được suy từ (a) và (b) một cách dễ dàng.

Tóm lại, G là một tập hợp chứa 1, không chứa 0, và khép kín đối với phép nhân và chia. Dễ dàng kiểm chứng rằng mọi tập hợp như thế sẽ thoả mãn (a) ở trên (vì $1 \in G$) và thoả mãn (4) : Nếu G khép kín dưới phép nhân và phép chia và $x \in G$, $y \notin G$, thế thì $xy \notin G$, vì nếu ngược lại ta có

$$y - (xy)/x \notin G, \text{ vô lí.}$$

Do đó, tính khép kín dưới phép nhân và phép chia đủ để xác định tập G, và ta có thể có lời giải đầy đủ của bài toán: Hàm số cần tìm có dạng

$$f(x) = \begin{cases} Cx & \text{khi } x \in G \\ 0 & \text{khi } x \notin G \end{cases}$$

trong đó C là một số thực cố định bất kì, và G là một tập hợp con của R khép kín dưới phép nhân và phép chia. Lưu ý rằng $C = 0$ là nghiệm " tầm thường " đã rút ra được từ trên.

Bài 22.

Từ giả thiết, ta có $f(x) \neq 0, \forall x \in R$;

$$f(0) = \pm 1 \text{ và } f(1) = \pm 1.$$

Ta lại có $f(x^2)f(x) = 1 = f(x^2)f(-x)$, $\forall x \in R$, suy ra

$$f(-x) = f(x), \forall x \in R.$$

Do đó ta chỉ cần xét trên R^+.

★ Xét $0 \leq x < 1$:

$$f(x) = \frac{1}{f(x^2)} = f(x^4) = f(x^{4^4}) = \ldots = \lim_{n \to \infty} f(x^n) = f(0) = \pm 1.$$

★ Tương tự với $x \geq 1$:

$$f(x) = \frac{1}{f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)} = f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \ldots = \lim_{n \to \infty} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = f(1) = \pm 1.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \ \forall x \\ f(x) = -1 \ \forall x \end{array}\right.$

Bài 23.

★ Nếu $|\alpha| < 1$ thì theo giả thiết ta có

$$f(x) = f(x^{\alpha}) = \ldots = f(x^{\alpha^n}), \forall x \in R^+ ; \forall n \in N.$$

Suy ra $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x^{\alpha^n}) = f(1), \forall x \in R^+$.

★ Nếu $|\alpha| > 1$, ta cũng thu được

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{\alpha}}) = \ldots = f(x^{(\frac{1}{\alpha})^n}), \forall x \in R^+ ; \forall n \in N.$$

Suy ra $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x^{(\frac{1}{\alpha})^n}) = f(1) \ \forall x \in R^+$.

Vậy $f(x) = c$, với $c \in R$ tuỳ ý.

Bài 24.

Vì $f(0) = 1$ và $f(x)$ liên tục trên R nên $\exists \varepsilon > 0$ sao cho

$$f(x) > 0, \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon). \qquad (1)$$

Khi đó, theo (1), với $n_0 \in N$ đủ lớn thì $f\left(\frac{x_0}{2^{n_0}}\right) > 0$.

Để ý rằng $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) < 1, \forall n \in N$.

Thật vậy, nếu $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \geq 1$ với n nguyên dương nào đó thì theo đề bài ta có

$$f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right]^2 - 1 \geq 1,$$

Mặt khác, vì f(x) là một hàm số liên tục nên $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\frac{1}{2})$.

Nhưng $f(x_{n+1}) = f(x_n^2 + \frac{1}{4}) = f(x_n)$ với mọi n. Vậy

$$f(x_0) = f(x_1) = \ldots,$$

điều đó có nghĩa là $f(x_0) = f(\frac{1}{2})$ với mọi $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$.

(II) $x_0 > \frac{1}{2}$. Xét dãy : (2) $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, định bởi

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}}.$$

Như trường hợp trên, ta chứng tỏ rằng (2) là dãy hội tụ và $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$. Lại nữa, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\frac{1}{2})$, và do

$$f(x_{n+1}) = f(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}) = f(x_n)$$

với mọi n nên ta có $f(x_0) = f(\frac{1}{2})$. Vì thế f(x) là một hàm hằng trong khoảng $[0, +\infty)$, và vì nó là hàm chẵn, nên nó cũng là hàm hằng với mọi x.

Ngược lại, mọi hàm hằng thoả điều kiện của bài toán.

Bài 26.

Trước hết, để ý rằng chỉ có một hàm f thoả mãn điều kiện đề bài. Thật vậy, các giá trị của f được cố định tại 0, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$, nghĩa là tại mọi $\frac{k}{2^n}$. Vì f liên tục, nên nó phải là hàm duy nhất trên cả [0, 1]. Cũng thế, f(x) = f(y) chỉ với x = y vì nếu f(x) = f(y) với x < y sẽ dẫn đến f(z) = f(x) với mọi $z \in [x, y]$, suy ra f(z) = f(x) với mọi $z \in [0, 1]$.

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{8} + \frac{x}{8}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)} = Af(Bx + C) + D.$$

Ta thấy rằng g(0) = 0, g(1) = 1 và

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = Af\left(B\frac{x+y}{2} + C\right) + D$$

$$= Af\left(\frac{Bx+C}{2} + \frac{By+C}{2}\right) + D$$

$$= (1-a)Af(Bx+C) + (1-a)D + aAf(By+C) + aD$$

$$= (1-a)g(x) + ag(y).$$

Điều đó có nghĩa là g = f. Cho nên

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = g\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{7}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)}$$

$$\text{hay } f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{8}\right)}{1 - f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{8}\right)}.$$

Để ý rằng $f(\frac{1}{2}) = a$, $f(\frac{1}{4}) = a^2$, $f(\frac{1}{8}) = a^3$, nên

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{a^3}{1 - a^2 + a^3}.$$

Bài 27.

Dễ thấy rằng f(0) = 0 và f(–x) = – f(x) với mọi x. Bằng quy nạp theo n ta có f(nx) = nf(x) với mọi n nguyên dương và mọi x. Suy ra f(n) = nf(1) = n với mọi n nguyên, do đó

Suy ra

$$g(x^4) = -g(x^2) = g(x),\ \forall x \in R. \qquad (2)$$

Do vậy, với $\forall x > 0$, ta có

$$g(x) = g\left(x^{4^{-n}}\right),\ \forall n \in N. \qquad (3)$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x^{4^{-n}} = 1$, và $g(x)$ liên tục nên từ (3) ta có

$$g(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x^{4^{-n}}\right) = g\left(\lim_{n\to\infty} x^{4^{-n}}\right) = g(1),\ \forall x > 0. \qquad (4)$$

Tóm lại, với $x > 0$ ta có $g(x) = g(1)$.

Mặt khác, thay trong (1) lần lượt $x = 1$ và $x = 0$:

$$\begin{cases} g(1) = -g(1) \\ g(0) = -g(0) \end{cases} \Rightarrow g(1) = g(0) = 0 \Rightarrow g(x) = 0,\ \forall x \geq 0.$$

Bây giờ, từ (1) lại suy ra $g(x) = 0$, mọi $x < 0$. Tóm lại, $g(x) = 0$ với mọi x, suy ra $f(x) = x$ với mọi x.

Đảo lại, $f(x) = x$ thoả mãn yêu cầu đầu bài.

Bài 30.

Cho $u < v$ là hai số thực bất kì, xét bộ các số (x_i) :

$$u = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+1} = v.$$

Cho $x_n \to u$ và $x_{n+1} \to v$, vì f là hàm số liên tục nên chuyển qua giới hạn ta có

$$f(v) \geq \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) \Rightarrow f(v) \geq f(u).$$

Nhưng, nếu cho $x_{n+1} \to v$ và $x_{n+2} \to v$ thì được

$$f(u) \geq \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) \Rightarrow f(u) \geq f(v).$$

Như thế $f(u) = f(v) \Rightarrow f(x)$ là hàm hằng. Do điều kiện c), ta có

$$f(x) = \log_{2003}2002.$$

Bài 31.

Vế trái chính là $[x^3f'(x)]'$; cho nên, từ giả thiết ta có

$$[x^3f'(x)]' = -1 \Rightarrow x^3f'(x) = -x + C_1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{C_1}{x^3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - \frac{C_1}{2x^2} + C_2.$$

Cho $x = 1$; $x = -1$, thì được

$$\begin{cases} C_2 - \dfrac{C_1}{2} = 0 \\ C_2 - \dfrac{C_1}{8} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{-4}{3} \text{ và } C_2 = \frac{-2}{3}.$$

Như vậy, $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{3x^2} - \dfrac{2}{3}$.

Bài 32.

Lần lượt lấy đạo hàm hai vế của biểu thức đã cho theo x và y ta có

$$\frac{1}{2}f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f'(x)}{2},\ \forall x \in R$$

$$\frac{1}{2}f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f'(y)}{2},\ \forall y \in R.$$

Suy ra $f'(x) = f'(y),\ \forall x, y \in R \Rightarrow f'(x) = C$ (hằng số).

Như vậy $f(x) = ax + b$.

Bài 33.

Để ý rằng $f(x) = 0$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Ta xét trường hợp $f(x) \neq 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in R$ để $f(x_0) \neq 0$. Theo giả thiết,

$$f(x_0) = f(x + (x_0 - x)) = f(x)f(x_0 - x) \neq 0,\ \forall x \in R.$$

Suy ra $f(x) \neq 0$, $\forall x \in R$. Mặt khác, từ giả thiết ta cũng có có thể tiếp tục đi đến $f(x) = a^x$, $a > 0$ (để ý $f(x) \neq 0$).

Bài 37.

Từ phương trình hàm đã cho, thay $x = 1$, $y = 0$, ta có

$$f(1) = f(1) - f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Thay $x = y = 1 \Rightarrow f(0) = a \Rightarrow a = 0$. Như vậy :

1) Nếu $a \neq 0$: Không tồn tại hàm thoả mãn đề bài.

2) Nếu $a = 0$: Khi đó phương trình hàm đã cho có dạng

$$f(x - y) = f(x) - f(y) \quad \forall x, y \in R.$$

Thay $x = 0$, ta có :

$$f(-y) = f(0) - f(y) \Rightarrow f(-y) = -f(y), \forall y \in R,$$

vậy $f(x)$ là hàm lẻ. Từ đó $\forall x, y \in R$, ta có :

$$f(x + y) = f(x - (-y)) = f(x) - f(-y),$$

hay $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Từ đó suy ra $f(x) = bx$, với b là hằng số.

Bài 38.

Đặt $\dfrac{x}{y} = t \Rightarrow x = ty$ và hệ thức đề bài trở thành

$f(t) = f(ty) - f(y) \Leftrightarrow f(ty) = f(t) + f(y)$; $\forall x, y \in R$.

Theo bài 15, ta được $f(x) = b\ln x$, $\forall x \in R^+$, với $b \in R$.

Bài 39.

Từ hệ thức đề bài ta được : $\forall x, y \in R$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2}{\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(y)}} \Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}, \quad (1)$$

trong đó $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Bây giờ, trong (1), lần lượt cho $y = 0$, rồi $x = 0$ thì được

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{g(x)}{2} \text{ và } g\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{g(y)}{2}.$$

như thế ta có $g(x + y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in R$.

Từ đó, ta được $g(x) = ax + b$. Vì $g(x) > 0$, $\forall x \in R$, nên $a = 0$ và $g(x) = b$ $(b > 0)$, do đó $f(x) = \dfrac{1}{b}$, $b > 0$.

Bài 40.

Đặt $x = e^u$, $y = e^v$, và $g(u) = f(e^u)$.

Khi đó $g(u)$ liên tục trên R. Từ điều kiện đã cho, suy ra $\forall u, v \in R$, ta có $f\left(\sqrt{e^u e^v}\right) = \dfrac{1}{2}\left(f(e^u) + f(e^v)\right)$, do đó

$$f\left(e^{\frac{u+v}{2}}\right) = \frac{f(e^u) + f(e^v)}{2} \Rightarrow g(u + v) = g(u) + g(v).$$

Từ đó suy ra $g(u) = au + b$, trong đó a, b là các hằng số. Như vậy $f(e^u) = au + b$. Với $x = e^u$, ta có $u = \ln x$, do đó

$$f(x) = a\ln x + b, \quad x > 0.$$

Bài 41.

Từ giả thiết ta có $f(x) \geq 0$, $\forall y \in R^+$. Nếu tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) = 0$ thì ta có

$$f\left(\sqrt{x_0 y}\right) = \sqrt{f(x_0)f(y)} = 0, \forall y \in R^+.$$

Trong trường hợp này $f(x) = 0$.

Nếu $f(x) > 0$, $\forall x \in R^+$ thì đặt

$$x = e^u, y = e^v, f(e^u) = g(u).$$

Thế thì $g(x)$ liên tục trên R và $g(x)$ thoả mãn

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \sqrt{g(u)g(v)} \ ; \forall u,v \in R,$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Hiển nhiên.

Bài 46.

$f(x + a) = f(2 - 3(x + a)) = f(-3x + a + 2 - 4a)$

$\Rightarrow 2 - 4a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Thế thì, $\forall x \in R$, $f(x + \frac{1}{2}) = f(-3x + \frac{1}{2})$.

Đặt $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow f(x) = g(x - \frac{1}{2})$, và ta được

$$\forall x \in R, g(x) = g(-3x).$$

Do đó có hàm số $h : [0, 1) \to R$ và hằng số m sao cho

$$g(x) = \begin{cases} h\left(\left\{\frac{1}{2}\log_3 x\right\}\right) & \text{khi } x > 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \\ h\left(\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_3 |x|\right\}\right) & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} h\left(\left\{\log_9\left(x - \frac{1}{2}\right)\right\}\right) & \text{khi } x > \frac{1}{2}\ ; \\ m & \text{khi } x = \frac{1}{2} \\ h\left(\left\{\frac{1}{2} + \log_9\left|x - \frac{1}{2}\right|\right\}\right) & \text{khi } x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bài 47.

Trước hết, để ý, khi $x, y \in (-1, 1)$, thì $\dfrac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$.

Thay $x = y = 0$, từ đề bài ta có $2f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

Đạo hàm hai vế của hệ thức :

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

lần lượt theo x, theo y và có

$$f'(x) = f'\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).\frac{1-y^2}{(1+xy)^2},\quad f'(y) = f'\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).\frac{1-x^2}{(1+xy)^2}.$$

Từ đó suy ra $(1-x^2)f'(x) = (1-y^2)f'(y)$, $\forall x, y \in (-1, 1)$.

Cho $y = 0$ ta được $(1-x^2)f'(x) = f'(0)$, hay

$$f'(x) = \frac{f'(0)}{1-x^2} = \frac{f'(0)}{2}\left(\frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)(1-x)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}f'(0)\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

Mặt khác, ta lại có $\left(-\dfrac{f'(0)}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \dfrac{1}{2}f'(0)\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right)$.

Suy ra $f(x) = -\dfrac{1}{2}f'(0)\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$, với C là hằng số. Vì $0 = f(0) = C$, nên suy ra

$$f(x) = -\frac{1}{2}f'(0)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Bài 48.

a) Với $x \neq 0$ bất kì, lấy $y = 0$ trong hệ thức thứ nhất :

$$f(x) = f(x + 0)) = f(x)g(0) + f(0)g(x) = f(x)g(0).$$

Vì $f(x) \neq 0$ nên ta có $g(0) = 1$. Mặt khác, với $x \neq 0$ ta có

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x)\,g(-x) + f(-x)g(x)$$
$$= f(x)g(-x) - f(x)g(x) \Rightarrow g(x) = g(-x)$$

nên g(x) là hàm số chẵn.

b) Từ hệ thức thứ hai, ta có với mọi x :

$$f(x) = h(x-1) + h(1-x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Bài 54.

Tương tự bài 49.

Bài 55.

Với bất kì $x \in R$, từ giả thiết ta có

$$f(x) - 1 = -[f(-x) - 1].$$

Đặt $g(x) = f(x) - 1$, hay $f(x) = g(x) + 1$, ta có :

$$\forall x \in R,\ g(x) = -g(-x).$$

Theo bài 54 : $g(x) = h(x) - h(-x)$, $\forall x \in R$, với h là hàm số $R \to R$ tuỳ ý. Suy ra

$$f(x) = 1 + h(x) - h(-x).$$

Bài 56.

Từ điều kiện đề bài, ta có : mọi $x \in R$,

$$\varphi(x) = f(x) + f(-x)$$

nên $\varphi(x)$ là hàm số chẵn. Cho nên :

Nếu $\varphi(x)$ không phải là hàm số chẵn : vô nghiệm.

Nếu $\varphi(x)$ là hàm số chẵn, ta viết

$$f(x) + f(-x) = \varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(-x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) = -[f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x)].$$

Do đó, theo bài 54, ta có $f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + h(x) - h(-x)$, trong đó $h : R \to R$ là hàm số tuỳ ý.

Bài 57.

Từ hệ thức đề bài, ta có, $\forall x \in R$:

$$f(\frac{b}{2} + x) = a - f(-x + \frac{b}{2})$$

6TT200BTVĐTOÁN/6B

$$\Leftrightarrow f(x + \frac{b}{2}) - \frac{a}{2} = -[f(-x + \frac{b}{2}) - \frac{a}{2}].$$

Đặt $g(x) = f(x + \frac{b}{2}) - \frac{a}{2}$, thì g là hàm số lẻ. Do đó, theo bài 54, ta có : $g(x) = h(x) - h(-x)$, với $g : R \to R$ là hàm số nào đó. Suy ra

$$f(x) = \frac{a}{2} + h(x - \frac{b}{2}) - h(-x + \frac{b}{2}).$$

Bài 58.

Thay x bởi x + 1, ta có

$$f(x+1) + f(x+2) = 1 \Leftrightarrow f(x+2) = 1 - f(x+1) = f(x).$$

Vậy f(x) là hàm số tuần hoàn, ta chỉ cần xét nó trên khoảng [0, 2). Với $0 \le x < 1$ thì $f(x) = x$ nên

$$f(x+1) = 1 - f(x) = 1 - x.$$

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow 1 \le t < 2$; ta có $f(t) = 2 - t$. Vậy

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{khi } 1 \le x < 2 \end{cases}.$$

Bài 59.

Từ điều kiện đã cho suy ra

$$f(x+a) \ge \frac{1}{2}, \forall x \in R^+,$$

từ đó $f(x) \ge \frac{1}{2}, x \in R^+$. Do vậy:

$$f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f^2(x+a)}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a)(1 - f(x+a))} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - a = 0 \\ 1 + 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Như thế, $f(x+2) + 2(x+2) + 5 = 2[f(x) + 2x + 5]$, hay

$$2^{-\frac{1}{2}(x+2)}[f(x+2) + 2(x+2) + 5] = 2^{-\frac{1}{2}x}[f(x) + 2x + 5].$$

Đặt $g(x) = 2^{-\frac{1}{2}x}[f(x) + 2x + 5]$.

Khi đó, với $h : [0, 1) \to R$ ta có

$$f(x) = 2^{-\frac{1}{2}x} h(\{\frac{x}{2}\}) - 2x - 5.$$

Bài 65.

Từ điều kiện đề bài ta nhận được, $\forall x \in R$:

$$(-1)^{[x+1]} f(x+1) = (-1)^{[x]} f(x).$$

Đặt $g(x) = (-1)^{[x]} f(x)$. Thế thì, $g(x+1) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = h(\{x\})$.

Vậy, với $h : [0, 1) \to R$, ta có

$$f(x) = (-1)^{[x]} h(\{x\}).$$

Bài 66.

Đặt $a = 1/6$, $b = 1/7$ thì $a + b = 13/42$.

Thay x bởi $x + a$, $x + 2a$,..., $x + 5a$ lần lượt rồi lấy tổng tất cả các phương trình này thì thu được

$$f(x + 1 + b) + f(x) = f(x + 1) + f(x + b).$$

Bây giờ, thay x bởi $x + b$, $x + 2b$,..., $x + 6b$ lần lượt và lấy tổng thì được $f(x + 2) + f(x) = 2f(x + 1)$ hay

$$f(x + 2) - f(x + 1) = f(x + 1) - f(x).$$

Nếu ta đặt $f(x + 1) - f(x) = c$ thì dễ dàng quy nạp theo n, chứng minh được $f(x + n) - f(x + n - 1) = c$. Từ đó suy ra

$$f(x + n) - f(x) = nc,$$

điều đó chứng tỏ rằng nếu $c \neq 0$ thì $f(x + n)$ không giới nội, trái với điều kiện $|f(x)| \leq 1$ với mọi x. Vì thế $c = 0$ và

$$f(x + 1) = f(x),$$

chứng tỏ tính tuần hoàn của f(x).

Bài 67.

Từ điều kiện đầu bài ta có:

$$g(x+6) = f(x+6) - x - 6$$
$$\leq f(x+3) + 3 - x - 6 \leq f(x) + 3 + 3 - x - 6 = g(x).$$

Vậy $g(x+6) \leq g(x)$, $\forall x \in R$. Ta cũng có

$$f(x+6) - x - 6 \geq f(x+4) + 2 - x - 6$$
$$\geq f(x+2) + 2 + 2 - x - 6 \geq f(x) + 2 + 2 + 2 - x - 6 = g(x).$$

Suy ra : $g(x+6) = g(x)$, $\forall x \in R$.

Vậy $g(x)$ là hàm tuần hoàn.

Bài 68.

Giả sử $O_1(a_1, b_1)$ và $O_2(a_2, b_2)$ là 2 tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Khi đó hoành độ và tung độ của điểm đối xứng với điểm $(x, f(x))$ qua $O_i (i = 1,2)$ là

$$2a_i - x \text{ và } 2b_i - f(x).$$

Vì các điểm đó cũng thuộc đồ thị nên:

$$f(2a_i - x) = 2b_i - f(x),\ i = 1,2.. \qquad (1)$$

(1) xảy ra với $\forall x \in$ miền xác định D của $y = f(x)$.

Gọi $l(x)$ là đường thẳng đi qua O_1, O_2 thì O_1, O_2 là tâm đối xứng của đồ thị $y = l(x)$. Do đó:

$$l(2a_i - x) = 2b_i - l(x),\ i = 1,2,\ \forall x \in R. \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh hàm số $p(x) = f(x) - l(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kì $T = 2(a_2 - a_1)$. Thật vậy, rõ ràng miền xác định của $p(x)$ trùng với miền xác định của $f(x)$ nên các đều là nghiệm của phương trình hàm đã cho.

Một hàm số $f: Q^+ \to Q^+$ thoả (a) có thể được dựng bằng cách xác định trên các số nguyên tố như sau :

$$f(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}) = f((p_1))^{n_1} f((p_2))^{n_2} \dots f((p_k))^{n_k},$$

trong đó p_j là kí hiệu số nguyên tố thứ j và $n_j \in Z$. Một hàm số như thế sẽ thoả (b) nếu và chỉ nếu nó thoả (b) với mỗi số nguyên tố.

Ta có cách dựng như sau :

$$f(p_j) = p_{j+1} \text{ nếu j lẻ }, \; f(p_j) = \frac{1}{p_{j-1}} \text{ nếu j chẵn.}$$

Mở rộng hàm này như trên thì được một hàm số $f: Q^+ \to Q^+$. Rõ ràng là $f(f(p)) = \frac{1}{p}$ với mọi số nguyên tố p, như thế f thoả mãn phương trình hàm đã nêu.

Bài 72.

Đặt $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Vì $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ nên hàm số $g(x) = \alpha x$ thoả với mọi $n \in N$: $g(g(n)) - g(n) - n = 0$.

Gọi [x] là phần nguyên của x, có nghĩa [x] là số nguyên k sao cho $k - 1 < x \le k$. Ta sẽ chứng minh rằng hàm số $f(n) = [g(n) + \frac{1}{2}]$ thoả các đòi hỏi. Ta nhận thấy rằng :

1. f đồng biến chặt chẽ, vì $\alpha > 1$ và

$$g(n + 1) > g(n) + 1 \text{ đúng.}$$

2. Vì $2 < \alpha < 1/2 + 3$ đúng, nên $f(1) = 2$.

3. Theo định nghĩa của f và g, $|f(n) - g(n)| < 1/2$ đúng với mọi $n \in N$. Bây giờ để ý là $f(f(n)) - f(n) - n$ là một số nguyên và ta có :

$$\begin{aligned}
&|f(f(n)) - f(n) - n| \\
&= |g(g(n)) - g(n) - n - g(g(n)) + f(f(n)) - f(n) + g(n)| \\
&= |g(g(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)| \\
&= |g(g(n)) - g(f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)| \\
&= |(\alpha - 1)(g(n) - f(n)) + g(f(n)) - f(f(n))| \\
&\le |(\alpha - 1)(g(n) - f(n))| + |g(f(n)) - f(f(n))| \\
&\le \frac{1}{2}(\alpha - 1) + \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} < 1.
\end{aligned}$$

Suy ra (2) được thoả mãn.

Bài 73.

Để ý rằng với x = 1 ta được

$$f(0) + 3f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{4}.$$

Mà một hàm số lẻ thì phải có $f(0) = 0$. Vậy không tồn tại một hàm như thế.

Bài 74.

Không tồn tại, vì ta có $x^2 = f(x) - f(-x)$.

Vế trái là hàm số chẵn, vế phải là hàm số lẻ.

Bài 75.

Từ giả thiết, ta có với mọi $x \neq 0$:

$$\sin(x^2 + \frac{a}{x^2}) = \sin(a^2x^2 + \frac{1}{x^2}).$$

Nếu $a \neq 1$: không tồn tại hàm số thoả điều kiện đề bài. Nếu $a = 1$: điều kiện đề bài trở thành

$$f(x) + f(\frac{1}{x}) = \sin(x^2 + \frac{1}{x^2}).$$

Từ đó, với $\varphi : (-1, 1) \to R$ là hàm số tuỳ ý, ta có :

$$g(g(x_1)) = f(x_1)\ ;\ g(g(x_2)) = f(x_2). \qquad (*)$$

Do $x_1 \neq x_2$, mà $f(x)$ là hàm nghịch biến, nên $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Từ đó theo (*) ta có

$$g(g(x_1)) \neq g(g(x_2)) \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2).$$

Vậy $g(x)$ là đơn ánh. Ta lại có kết quả :

(**) *Nếu $g(x)$ là đơn ánh và liên tục trên một khoảng nào đó thì trên khoảng này $g(x)$ phải là hàm đồng biến hoặc nghịch biến.*

Từ kết quả (**), suy ra : $g(g(x))$ là hàm đồng biến trên R, vì g(x) là hàm đồng biến hoặc nghịch biến.

Bây giờ, từ giả thiết $g(g(x)) = f(x),\ \forall x \in R$, suy ra $f(x)$ cũng là hàm đồng biến. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(x)$ là hàm nghịch biến.

Vậy không tồn tại hàm liên tục $g(x)$ như đề bài.

Chú ý. Có thể chứng minh (*) như sau : Giả sử $g(x)$ là đơn ánh và liên tục trên khoảng (a, b). Cho $x_1, x_2 \in (a, b)$ mà $a < x_1 < x_2 < b$. Do g(x) là đơn ánh nên $g(x_1) \neq g(x_2)$ Không mất tính tổng quát, cho $g(x_1) < g(x_2)$. Giả sử ngược lại rằng g(x) không đồng biến trên (a, b). Khi đó, tồn tại α, β sao cho $a < \alpha < \beta < b$ mà $g(\alpha) \geq g(\beta)$. Vì g(x) là đơn ánh nên $g(\alpha) \neq g(\beta)$, suy ra $g(\alpha) > g(\beta)$. Đặt :

$$h(t) = g(x_1 + t(\alpha - x_1)) - g(x_2 + t(\beta - x_2)),$$

với $0 \leq t \leq 1$. Ta cũng có $h(t)$ liên tục trên $[0, 1]$.

Đằng khác ta cũng có :

$$\begin{cases} h(0) = f(x_1) - f(x_2) < 0 \\ h(1) = f(\alpha) - f(\beta) > 0. \end{cases}$$

Do vậy, tồn tại t_0, $0 < t_0 < 1$ sao cho $h(t_0) = 0$, hay

$$g(x_1 + t_0(\alpha - x_1)) = g(x_2 + t_0(\beta - x_2)).$$

Vì g là đơn ánh nên ta được

$$x_1 + t_0(\alpha - x_1) = x_2 + t_0(\beta - x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(1 - t_0) + t_0(\alpha - \beta) = 0.$$

Nhưng lại có $(x_1 - x_2)(1 - t_0) + t_0(\alpha - \beta) < 2$ vì

$$0 < t_0 < 1,\ x_1 < x_2\ ;\ \alpha < \beta.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ điều phải chứng minh.

Khi $g(x_1) > g(x_2)$, lập luận hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $g(x)$ là hàm nghịch biến.

Bài 82.

Hàm số f thoả mãn đồng thời ba điều kiện đã nêu trên không tồn tại. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng tồn tại một hàm số $f : R \to R$ thoả mãn các điều kiện như thế.

Gọi c là cận trên của tập hợp $\{ f(x) : x \in R\}$. Ta có $c \geq 2$ vì

$$f(2) = f\left(1 + \frac{1}{1^2}\right) = f(1) + [f(1)]^2 = 2.$$

Cũng vậy, vì c là cận trên, nên tồn tại một dãy số x_k, k = 1, 2,... các số thực sao cho $f(x_k) \geq c - \frac{1}{k}$ với mọi k. Lúc đó:

$$c \geq f\left(x_k + \frac{1}{x_k^2}\right) = f(x_k) + \left[f\left(\frac{1}{x_k^2}\right)\right]^2 \geq c - \frac{1}{k} + \left[f\left(\frac{1}{x_k^2}\right)\right]^2.$$

biến thành nhân đôi và nhân đôi (hay nhân với một hằng số tuỳ ý) thành gấp đôi (hoặc gấp lên một hằng số). [Vì ta có ý định áp dụng biến đổi logarithm hai lần, nên giá trị của biến số phải lớn hơn 1; đó là lí do mà ta phải xét trước hết các hàm xác định trên $(1, \infty)$. Trong bước cuối cùng của bài giải, ta tiến hành mở rộng nó lên toàn bộ đường thẳng thực.]

Giả sử các hàm $F, G : (1, \infty) \to (1, \infty)$ thoả điều kiện (1). Ta xác định một cặp hàm mới $\varphi, \psi : R \to R$ bởi các công thức :

$$\varphi(x) = \log[\log F(2^{2^x})]$$

$$\text{và } \psi(x) = [\log\log G(2^{2^x})] \text{ với } x \in R,$$

từ đây về sau, logarithm đều lấy theo cơ số 2. Những hàm này thoả các phương trình

$$\varphi(\psi(x)) = x + 1 \text{ và } \psi(\varphi(x)) = x + 2 \text{ với } x \in R. \quad (2)$$

Đảo lại, nếu $\varphi, \psi : R \to R$ là các hàm bất kì thoả (2), thì ta có thể xác định các hàm $F, G : (1,\infty) \to (1, \infty)$ bằng cách đặt

$$F(x) = 2^{2^{2^{\varphi(\log\log x)}}} \text{ và } G(x) = 2^{2^{2^{\psi(\log\log x)}}}, \quad (3)$$

và những hàm này thoả hệ (1).

Các ví dụ về hàm φ, ψ thoả các phương trình (2) có thể tìm thấy ngay trong lớp hàm đơn giản nhất, đó là lớp các hàm tuyến tính. Xét $\varphi(x) = ax + b$ và $\psi(x) = cx + d$, và thay những biểu thức này vào các phương trình (2) , ta sẽ tìm thấy rằng các phương trình ấy thoả mãn nếu và chỉ nếu $a = \frac{1}{2}$, $c = 2$ và $2b + d = 2$. Chọn, chẳng hạn $b = 1$ và $d = 0$, theo các công thức của (3) ta thu được cặp

$$F(x) = 2^{2^{1 + \frac{1}{2}\log\log x}} \text{ và } G(x) = 2^{2^{2\log\log x}}.$$

Chúng xác định trên khoảng $(1, \infty)$ và thoả mãn các phương trình (1) đó. Cần phải lưu ý rằng các công thức xác định nó có thể được đơn giản thành

$$F(x) = 2^{2\sqrt{\log x}} \text{ và } G(x) = 2^{(\log x)^2} \text{ với } x > 1. \quad (4)$$

Việc còn lại là mở rộng miền xác định của nó lên cả R. Điều này có thể được thực hiện như sau. Ta định nghĩa:

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{khi } x \in (1,\infty) \\ \dfrac{1}{F(1/x)} & \text{khi } x \in (0,1) \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}, \quad \widetilde{G}(x) = \begin{cases} G(x) & \text{khi } x \in (1,\infty) \\ \dfrac{1}{G(1/x)} & \text{khi } x \in (0,1) \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases},$$

khi đó, $f(0) = g(0)$ và với $x \in R\setminus\{0\}$ ta có:

$$f(x) = \widetilde{F}(|x|),\ g(x) = \widetilde{G}(|x|).$$

Dễ dàng kiểm tra rằng các điều kiện được thoả mãn.

Bài 85.

Hiển nhiên $y = 0$ là một nghiệm liên tục của phương trình $f(x).y = 0$. (1)

Giả sử $y_1 = y_1(x)$ là hàm liên tục trong khoảng (a, b), $y_1 \neq 0$ và nó là nghiệm của phương trình (1). Khi đó ắt tồn tại điểm $x_1 \in (a,b)$ để cho $y_1(x_1) \neq 0$. Vì y_1 liên tục trong (a, b) nên tồn tại khoảng $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, $x_1 \in (\alpha, \beta)$ và $y_1(x) \neq 0$ với mọi $x \in (\alpha, \beta)$. Từ y_1 là nghiệm của phương trình (1) suy ra

$$f(x)y_1(x) = 0, \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Đẳng thức này tương đương với

$$f(x) = 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Từ đây suy ra rằng, nếu tập tất cả các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ không chứa bất kì một khoảng (α,β)

ta sẽ có $n \ge u_r + u_{r-1} = u_{r+1}$. Từ đó, thêm u_r vào khai triển của $n - u_r$ sẽ cho ta một khai triển theo dạng trên của n, chứng minh hoàn tất theo quy nạp.

Tiếp đến, ta cũng dùng quy nạp để chứng minh rằng

$$u_r + u_{r-2} + u_{r-4} + \ldots = u_{r+1} - 1.$$

Hiển nhiên điều này đúng với r = 1 và 2. Giả sử nó đúng với $r - 1$, khi đó ta có:

$$u_{r+1} + u_{r-1} + \ldots = u_{r+2} - u_r + u_{r-1} + u_{r-3} + \ldots$$

$$= u_{r+2} - u_r + u_r - 1 = u_{r+2} - 1.$$

Vậy công thức đúng với r + 1, suy ra nó đúng với mọi r.

Tiếp đến, ta chứng minh rằng biểu diễn của n là duy nhất. Hiển nhiên điều này đúng với n = 1. Giả sử nó đúng với mọi số nhỏ hơn n, nhưng biểu diễn cho n lại không duy nhất. Như thế ta sẽ có $n = u_r + \ldots = u_s + \ldots$. Nếu r = s thì biểu diễn cho $n - u_r$ không duy nhất, trái giả thiết quy nạp. Giả sử r > s. Nhưng số hạng $u_{s+1} - 1$ trong biểu diễn thứ hai lúc đó lại bé hơn u_r. Vậy biểu diễn cho n phải duy nhất, mệnh đề được chứng minh theo quy nạp.

Bây giờ, ta giả sử $n = b_r u_r + b_{r-1} u_{r-1} + \ldots + b_0 u_0$, đặt

$$f(n) = b_r b_{r-1} \ldots b_0 u_0 0.$$

Hiển nhiên khi $n = 1 = u_0$ thì $f(n) = u_1 = 2$.

Nếu $n = u_{a_1} + \ldots + u_{a_r}$ thì $f(n) = u_{a_1+1} + \ldots + u_{a_r+1}$ và

$$f(f(n)) = u_{a_1+2} + \ldots + u_{a_r+2},$$

do đó $f(n) + n = (u_{a_1} + u_{a_1+1}) + \ldots + (u_{a_r} + u_{a_r+1}) = f(f(n))$.

Vậy tồn tại hàm f như trên thoả mãn đề bài.

Bài 88.

Giả sử rằng hàm số f có tính chất đòi hỏi đã được tìm thấy. Ta sử dụng f để xác định một hàm số g: $3N_0+1 \to 4N_0+1$ như sau :

$$g(x) = 4f\left(\frac{x-1}{3}\right) + 1.$$

Hàm này rõ ràng được xác định, và ta có thể kiểm chứng dễ dàng rằng g là một song ánh từ $3N_0+1$ đến $4N_0+1$. Thật vậy, xét hàm số ngược cho bởi:

$$g^{-1}(y) = 3f^{-1}\left(\frac{y-1}{4}\right) + 1.$$

Cho m, n $\in N_0$; sử dụng định nghĩa của f và g ta có:

$$g((3m+1)(3n+1)) = g(3(3mn+m+n)+1)$$
$$= 4f(3mn+m+n) + 1 = 4(4f(m)f(n) + f(m) + f(n)) + 1$$
$$= (4f(m)+1)(4f(n)+1) = g(3m+1)g(3n+1).$$

Như vậy, ánh xạ g có *nhân tính*, theo nghĩa là $g(xy) = g(x).g(y)$ với mọi $x, y \in 3N_0 + 1$.

Ngược lại, cho trước song ánh có nhân tính g bất kì từ $3N_0 + 1$ lên $4N_0 + 1$, ta có thể dựng một hàm số f có tính chất đòi hỏi: đơn giản, chỉ cần xác định f bởi :

$$f(x) = \frac{g(3x+1)-1}{4}.$$

Dễ dàng kiểm chứng được f có tính chất đòi hỏi. Vấn đề còn lại là phải chỉ ra một song ánh như thế. Gọi P_1, P_2 là tập hợp các số nguyên tố lần lượt có dạng 3n + 1, 3n + 2, và gọi Q_1, Q_2 là tập hợp các số nguyên tố lần lượt có dạng 4n + 1, 4n + 3. Ta đã biết rằng mỗi tập hợp này có số phần tử vô hạn. Gọi h

Tóm lại, f(p) là số nguyên tố.

Nếu $f(p)=q$ thì $f(q)=p$.

Bây giờ ta xác định các hàm f trên tập các số nguyên tố thoả mãn các điều kiện: ảnh của số nguyên tố là một số nguyên tố và nếu $f(p)=q$ thì $f(q)=p$.

Giả sử $s=p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$ và $f(p_i)=q_i$, giả sử $t=q_1^{b_1}...q_r^{b_r}$ (nếu số t có nhiều hơn r nhân tử thì ta có thể thêm vào s các nhân tử p với số mũ bằng 0), khi đó ta suy ra :

$$t^2f(s)=q_1^{2b_1+a_1}...q_r^{2b_r+a_r},$$

$$f(t^2f(s))=p_1^{2b_1+a_1}...p_r^{2b_r+a_r}.$$

Bây giờ, để ý rằng $1998=2.3^3.37$, và

$$f(e)=3,\ f(3)=2,\ f(37)=5,$$

ta suy ra giá trị nhỏ nhất mà f(1998) đạt được là:

$$f(1998)=3.2^3.5=120.$$

Cách khác.

Gọi S là tập hợp các hàm số được xét. Lấy f là hàm số bất kì trong S và đặt $f(1) = a$.

Cho $n = 1$ và $m = 1$ thì được

$$f(f(m)) = a^2m,\quad f(an^2) = [\,f(n)\,]^2$$

với mọi $m, n \in \mathbf{N}$.

Các kết quả này cùng với phương trình ban đầu cho ta

$$[f(m)\,f(n)]^2 = [f(m)]^2\ f(an^2) = f(m^2f\,(f(an^2)))$$

$$= f(m^2a^2an^2) = f(a(amn)^2) = [f(amn)]^2.$$

Suy ra rằng $f(amn) = f(m)f(n)$ với mọi m, n; nói riêng, $f(am) = af(m)$, và vì thế

$$af(mn) = f(m)\,f(n) \quad \text{với mọi } m, n \in \mathbf{N}. \qquad (1)$$

Bây giờ ta chứng minh rằng f(n) chia hết cho a với mỗi $n \in \mathbf{N}$. Với số nguyên tố p cho trước, kí hiệu p^α và p^β lần lượt là luỹ thừa cao nhất của p sao cho các luỹ thừa này tương ứng chia hết a và f(n). Bằng phép quy nạp, kết hợp với (1), ta suy ra rằng $[f(n)]^k = a^{k-1}f(nk)$ với mọi $k\in\mathbf{N}$. Luỹ thừa cao nhất của p chia hết $[f(n)]^k$ là $p^{k\beta}$; luỹ thừa cao nhất của p chia hết A^{k-1} là $p^{(k-1)\alpha}$. Cho nên $k\beta \geq (k-1)\alpha$ với mọi $k\in\mathbf{N}$, điều này chỉ xảy ra nếu $\beta \geq \alpha$. Kết luận đúng với số nguyên tố p bất kì, và vì thế, a chia hết f(n).

Như vậy ta có thể đặt $g(n) = f(n)/a$, như thế ta được một hàm số mới g từ **N** vào chính nó. Các kết quả đã chứng minh trên đối với f có thể được diễn tả như sau:

$g(a) = a$, $g(mn) = g(m)\,g(n)$, $g(g(m)) = m$, với mọi $m, n \in \mathbf{N}$. (2)

Thật vậy, $g(mn) = g(m)g(n)$ tương đương với (1), còn $g(g(m)) = m$ thì được suy từ

$$ag(g(m) = g(a)g(g(m)) = g(ag(m)) = g(f(m))$$

$$= \frac{f(f(m))}{a} = \frac{a^2m}{a} = am.$$

Dễ dàng suy từ (2) rằng

$$g(n^2g(m)) = g(n^2)\,g(g(m)) = m[g(n)]^2$$

với mọi $m, n \in \mathbf{N}$ nên, g cũng là một hàm số trong S, và các giá trị của nó không vượt quá các giá trị tương ứng của f. Vậy thì ta có thể xét thu hẹp các hàm số g thoả mãn (2).

Điều chủ yếu cần đến là mỗi hàm số kiểu này nhận giá trị nguyên tố tại các số nguyên tố.

Thật vậy, gọi p là một số nguyên tố, và giả sử $g(p) = uv$ với các số nguyên dương u, v nào đó. Thế thì, do (2), $p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$, vì thế một trong các số g(u) và

Thay m = 0, suy ra $f(n) = -1-n$, với mọi n nguyên. Từ đó :

$$f(1991) = -1992.$$

Bây giờ, từ (b) ta có $g(n) = g(-n-1)$, mọi n nguyên. Vì g là đa thức trên tập các số nguyên, ta có thể mở rộng nó để thành một hàm thực thoả mãn $g(x) = g(-x-1)$ với mọi x thực. Mà một đa thức theo x thì có thể diễn tả như một đa thức theo $(x+\lambda)$ với λ là số thực bất kì. Chọn $\lambda = 1/2$, ta có $g(x) = P(x + 1/2)$. Thay x bởi $-x-1$, ta được

$$g(-x-1) = P(-x-1/2).$$

Như thế, $P(x+1/2) = P(-x-1/2)$. Suy ra g là một đa thức theo

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4},$$

do đó nó là đa thức theo $x^2 + x$.

Dạng tổng quát nhất của g là:

$$g(n) = a_0 + a_1 n(n+1) + a_2 n^2 (n+1)^2 + \ldots + + a_p n^p (n+1)^p,$$

trong đó các hệ số a_i đều là những số nguyên.

Bài 93.

Từ điều kiện đề bài, suy ra : $\forall$ n $\in$ Z, do f(n) = f(n) nên f(f(n)) = n và f(f(n) + 3) = n − 3. Từ đó,

$$f(n-3) = f(f(f(n)+3)) = f(n) + 3, \forall n \in Z.$$

Suy ra

$$f(n) = \begin{cases} f(0) - 3k & \text{khi } n = 3k \\ f(1) - 3k & \text{khi } n = 3k+1, \\ f(2) - 3k & \text{khi } n = 3k+2 \end{cases}$$

với k $\in$ Z. Vì $1995 \vdots 3$ nên; từ f(1995) = 1996 ta suy ra

$$f(0) - 1995 = 1996 \Rightarrow f(0) = 3991. \quad (1)$$

Ta lại suy ra được 0 = f(3991). Mà 3991 = 3.1330 + 1 nên

$$0 = f(1) - 3990 \Rightarrow f(1) = 3990.$$

* Nếu f(2) = 3t, t $\in$ Z, thì

$$2 = f(3t) = f(0) - 3t = 2991 - 3t$$

$$\Rightarrow 3989 = 3t \Rightarrow 3989 \vdots 3.$$

Đó là điều vô lí, nên $f(2) \neq 3t$, t $\in$ Z.

* Nếu f(2) = 3t + 1 thì

$$2 = f(3t+1) = f(1) - 3t = 3990 - 3t$$

$$\Rightarrow 3988 = 3t \Rightarrow 3988 \vdots 3 : \text{vô lí}.$$

Do đó $f(2) \neq 3t + 1$. Như vậy f(2) = 3t + 2. Tóm lại, ta được

$$f(n) = \begin{cases} 3991 - n & \text{khi } n \neq 3k+2 \\ 3t - n + 4 & \text{khi } n = 3k+2 \end{cases},$$

với t nguyên bất kì và k nguyên. Thử lại, ta được hàm số trên là nghiệm bài toán.

Bài 94.

Kí hiệu $f^2(n)$ thay cho f(f(n)). Từ (*), thay m bởi $f^2(m)$ thì được $f(f^2(m) + f^2(n)) = -f^2(f^2(m)+1) - n$.

Thay đổi vai trò giữa m và n ta có

$$f(f^2(n) + f^2(m)) = -f^2(f^2(n)+1) - m.$$

Từ hai hệ thức này ta được

$$f^2(f^2(m)+1) - f^2(f^2(n)+1) = m - n.$$

Lại theo (*) ta có

$$f^2(f^2(m)+1) = f(f^2(f^2(m)+1)) = f(-m - f^2(2))$$

và tương tự, ta có $f^2(f^2(n)+1) = f(-n - f^2(2))$ ...

Từ các giá trị trên, ta nhận thấy :

$$10 = 1+9\ ;\ 19 = 10+9 = 1+2.9$$
$$12 = 3+9\ ;\ 21 = 12+9 = 3+2.9$$
$$13 = 4+9\ ;\ 22 = 13+9 = 4+2.9$$
$$16 = 7+9\ ;\ 25 = 16+9 = 7+2.9\ \ldots$$

Ta sẽ dự đoán rằng đối với giá trị $f(n)$ sẽ thoả mãn công thức sau :

$$\begin{cases} f(4r+1) = f(1)+9r = 1+9r \\ f(4r+2) = f(2)+9r = 3+9r \\ f(4r+3) = f(3)+9r = 4+9r \\ f(4r+4) = f(4)+9r = 7+9r. \end{cases}$$

Công thức này được chứng minh bằng quy nạp :

- Với $r = 0, 1, 2,$ từ bảng trên suy ra công thức đã đúng.
- Giả sử công thức đã đúng đến $r = m$.
- Xét khi $r = m+1$.

Ta có hai nhận xét sau :

a) Dựa vào giả thiết quy nạp suy ra không có số nào trong các giá trị

$f(1), f(2), \ldots, f(4m+4)$ là đồng dư $2 \pmod 3$

(vì $1 \equiv 4 \equiv 7 \equiv 1 \pmod 3$; còn $3 \equiv 0 \pmod 3$).

b) Mọi số $\equiv 1 \pmod 3$ trong khoảng $[1, 9m+7]$ đều có mặt trong bảng danh sách các giá trị của hàm $f(n)$ từ $n = 1$, tới $n = 4m+4$. Giả sử tồn tại $j, k \in \{1, 2, \ldots, 4m+4\}$ sao cho

$f(4m+5)+f(j) = 3f(k)$, suy ra

$$9m+10+f(j) = 3f(k). \qquad (*)$$

Do $9m+10 \equiv 1 \pmod 3$, nên từ (*) suy ra $f(j) \equiv 2 \pmod 3$.

Nhưng điều này là vô lí, vì theo nhận xét a), $f(j)$ không có trong bảng danh sách từ trên.

Vậy ta có $f(4m+5) = 9m+10 = 9(m+1)+1$.

Bằng cách tương tự, ta chứng minh được

$$f(4m+6) = 9(m+1)+3$$
$$f(4m+7) = 9(m+1)+4$$
$$f(4m+8) = 9(m+1)+7.$$

Vậy công thức thiết lập $f(n)$ cũng đúng khi $n = m+1$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra với mọi $n = 1, 2, \ldots,$ ta có

$$f(4n+k) = \begin{cases} 9n+1, \text{ khi } k = 1 \\ 9n+3, \text{ khi } k = 2 \\ 9n+4, \text{ khi } k = 3 \\ 9n+7, \text{ khi } k = 4. \end{cases}$$

Bài 98.

Từ giả thiết $f(m+n) - f(m) - f(n)$ bằng 0 hay 1 ta suy ra $f(m+n) \geq f(m) + f(n)$.

Thay $m = n = 1$ ta có:

$0 = f(2) \geq 2f(1) \Rightarrow f(1) \leq 0$.

Mà $f(1) \geq 0$ (do gt) nên $f(1) = 0$.

Thay $m = 2, n = 1$ ta được

$f(3) = f(2) + f(1) + (0 \text{ hay } 1) = 0 \text{ hay } 1$.

Mà $f(3) > 0$ (gt), nên $f(3) = 1$.

Ta có $f(2.3) = f(3+3) \geq 2f(3) = 2$.

Giả sử $f((n-1).3) \geq n-1$, thì

$f(n.3) = f((n-1)3+3) \geq f((n-1)3) + f(3) \geq n-1+1 = n$.

Như thế ta có: $f(3.n) \geq n,\ \forall n$.

Hơn nữa, nếu bất đẳng thức nghiêm ngặt ">" xảy ra với một giá trị n, tức là $f(3.n) > n$ thì

$g(i) = m + i$ với $i = 1, 2,..., m$;

$g(m + i) = i + 1$ với $i = 1, 2,..., m - 1$;

$g(2m) = 1$.

Đảo lại, cho $M = \{1, 2,..., m\}$. Giả sử tồn tại một hàm số $g : A \rightarrow A$ sao cho $g(g(a)) = f(a)$ với mọi $a \in A$. Từ định nghĩa của f, suy ra rằng các phần tử của M vẫn còn thuộc M qua liên tiếp nhiều tác động của f. Hơn nữa, các giá trị chạy khắp M. Điều tương tự cũng đúng với tập hợp A\M. Các hàm số f là song ánh trong A, do đó, nếu tồn tại g thoả điều kiện đề bài, thì g cũng là song ánh.

Ta sẽ chứng minh rằng $g(M) \cap M = \varnothing$. Từ tính chất của hàm g, suy ra rằng tồn tại một $i \in M$ sao cho $g(i) \in M$. Xét dãy i, g(i), $g^2(i)$,... và dãy con i, f(i), $f^2(i)$, ... Dễ thấy rằng g(M) = M. Do đó, tồn tại một hoán vị $a_1, a_2,..., a_m$ các phần tử của M sao cho $g(a_1) = a_{i+1}$ với $i = 1, 2,..., m - 1$; $g(a_m) = a_1$ và $f(a_{2i-1}) = a_{2i+1}$ với $i = 1, 2,.., s - 1$; $f(a_{s-1}) = a_1$, trong đó $m = 2s$. Điều này trái với tính chất của f đã nêu trên.

Vậy $g(M) \cap M = \varnothing$.

Tương tự g(A\M) = A \ M. Sau cùng ta hãy để ý rằng khi bắt đầu từ một phần tử của M và lấy ảnh qua g thì ảnh này thuộc A\M, nhưng khi lấy ảnh qua g lần thứ hai thì ảnh này trở lại thuộc M. Điều tương tự cũng đúng với tập hợp A\M.Từ đó, và vì g song ánh, suy ra rằng M và A\M có cùng số phần tử, điều này có nghĩa là n = m (đpcm).

Bài 101.

Ta cho trong đồng nhất thức ban đầu đối với hàm số $f(n) \in M$ các giá trị $n = m = 0$, ta có:

$$(f(0))^2 = 2f(0).$$

Nhưng $f(0) \neq 0$, bởi vậy $f(0) = 2$.

Sau đó cho trong đồng nhất thức giá trị $m = 1$, ta nhận được đồng nhất thức:

$$f(n)f(1) = f(n+1) + f(n-1),\ n \in Z.$$

Nếu cho trước giá trị của hàm số $f(n)$ tại các điểm $n = 0$ và $n = 1$ thì từ đồng nhất thức này xác định được duy nhất các giá trị $f(2)$ và $f(-1)$, còn sau đó là $f(3)$ và $f(-2)$..., nghĩa là tất cả các giá trị $f(n)$ với $n \in Z$.

Như vậy hàm số $f(n)$ được xác định duy nhất theo điều kiện của bài toán, bởi vì

$$f(0) = 2 \text{ và } f(1) = \frac{5}{2} \text{ (phần a)}$$

$$\text{hoặc } f(1) = \sqrt{3} \text{ (phần b).}$$

Phần còn lại, ta thấy:

$$f(n) = 2^n + 2^{-n} \text{ và } f(n) = 2\cos\frac{\pi n}{6}$$

thoả mãn tất cả điều kiện a) và b) tương ứng. Thật vậy ta có:

a) $f(0) = 2^0 + 2^0 \neq 0$, $f(1) = 2^1 = 2^{-1} = \frac{5}{2}$,

$$f(n)f(m) = (2^n + 2^{-n})(2^m - 2^{-m})$$

$$= (2^{m+n} + 2^{-n-m}) + (2^{n-m} + 2^{m-n})$$

$$= f(n+m) + f(n-m)$$

với tất cả các $n, m \in Z$.

b) $f(0) = 2\cos 0 \neq 0$, $f(1) = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$,

$$f(n)f(m) = 2.\cos\frac{\pi n}{6} 2\cos\frac{\pi m}{6}$$

$$f(n+2)-1=f(n+1)[f(n+1)-1]$$
$$<2^{2^n}(2^{2^n}-1)<2^{2^n}.2^{2^n}=2^{2^{n+1}} \text{ và}$$
$$f(n+2)-1=f(n+1)[f(n+1)-1]$$
$$\geq(2^{2^{n-1}}+1).2^{2^{n-1}}=2^{2^n}+2^{2^{n-1}}>2^{2^n}+1.$$

Bài 104.

Ta chứng minh đồng nhất thức
$$g(n)\equiv h(n)\ (n\in N),$$
từ đó, vì có điều kiện b) sẽ dẫn đến:
$$f(n)\equiv g(n)-h(n)+1\equiv 1,\ n\in N.$$

Với bất kì $n\in N$ ta có:
$$h(n)=g(n)+1-f(n)\leq g(n)$$
(vì $f(n)\geq 1$). Giả sử rằng, đối với giá trị nào đó $n\in N$, đẳng thức $g(n)=h(n)$ không đúng, khi đó $h(n)<g(n)=k$. Theo điều kiện b) ta tìm các số $n_1,...n_{k-1}\in N$, để sao cho $g(n_i)=i$ khi $i=1,...k-1$. Bởi vậy mỗi số trong k số
$$h(n_1)\ ,\ ...\ ,\ h(n_{k-1})\ ,\ h(n)$$
thuộc vào tập hợp $\{1,...,k-1\}$, do đó, theo nguyên lí Dirichlê hàm số $h(n)$ nhận giá trị nào đó nhiều hơn một lần, điều này trái với điều kiện (a). Khẳng định đã được chứng minh.

Bài 105.

Trước tiên ta sẽ chứng tỏ rằng $f(1)<f(2)<f(3)...$. Ta sẽ chứng minh điều này bằng quy nạp.

Ta gọi S_n là phát biểu sau:

nếu $r\leq n$ *và* $m>r$ *thì* $f(r)<f(m)$.

Vì khi m > 1 thì f(m) > f(s), với $s=f(m-1)$, nên f(m) không thể là phần tử nhỏ nhất của tập

$$\{f(1),f(2),f(3),...\}.$$

Nhưng tập này bị chặn dưới bởi 0, nên chắc chắn nó phải có phần tử bé nhất. Suy ra phần tử này là f(1). Vậy S_1 đúng.

Giả sử S_n đúng. Lấy $m>n+1$, khi đó $m-1>n$, do đó ta có $f(m-1)>f(n)$ (vì S_n đúng). Nhưng cũng từ S_n ta có:
$$f(n)>f(n-1)>...>f(1),$$
do vậy, ta được $f(n)\geq n-1+f(1)\geq n$. Suy ra $f(m-1)\geq n+1$, từ đó $f(m)>f(n+1)$. Từ đây suy ra rằng S_{n+1} đúng.

Vậy S_n đúng với mọi n.

Nói cách khác, nếu $n\leq m$ thì $f(n)\leq f(m)$.

Giả sử với số m nào đó ta có $f(m)\geq m+1$, thế thì
$$f(f(m))>f(m+1),$$
điều này mâu thuẫn. Suy ra $f(m)\leq m$ với mọi m.

Nhưng do ta có $f(1)\geq 1$ và $f(m)>f(m-1)>...>f(1)$ nên $f(m)\geq m$ với mọi m. Suy ra $f(m)=m$ với mọi m.

Bài 106.

Cho m = n = 0, đẳng thức ở đề bài trở thành:
$$f(0+f(0))=f(f(0))+f(0),$$
suy ra $f(0)=0$, từ đó $f(f(0))=0$. Cho m = 0, ta có:
$$f(f(n))=f(n),$$
do đó đẳng thức ở đề bài có thể viết thành:
$$f(m+f(n))=f(m)+f(n).$$

Theo trên, f(n) là điểm bất động (ta nói x là điểm bất động của hàm f nếu f(x) = x). Gọi k là điểm bất động khác 0 bé nhất của hàm f. Nếu như k không tồn tại, thì f(n) = 0 với

$$2(1+2+2^2+2^3+2^4)+2^5-2=92.$$

Bài 108.

Trước tiên, ta chứng minh $f(1)=1$. Thật vậy, lấy $x=y=1$ ta có $f(f(1))=1$, suy ra

$$f(1)=f(f(1))=f(1f(f(1)))=\frac{f(1)}{f(1)}=1.$$

Tiếp đến, ta sẽ chứng minh rằng $f(xy)=f(x)f(y)$. Với mọi $y\in Q^+$, ta có

$$1=f(1)=f\left(\frac{1}{f(y)}\right)f(y)=\frac{f\left(\dfrac{1}{f(y)}\right)}{y},$$

do đó, nếu $z=\dfrac{1}{f(y)}$ thì $f(z)=y$. Từ đó suy ra:

$$f(xy)=f(xf(z))=\frac{f(x)}{z}=f(x)f(y).$$

Sau cùng, ta có $f(f(x))=f(1f(x))=\dfrac{f(1)}{x}=\dfrac{1}{x}$.

Bài toán không đòi hỏi chúng ta tìm *tất cả* các hàm mà chỉ yêu cầu tìm một hàm thoả mãn các điều kiện đã cho. Do vậy, ta phân tập các số nguyên tố thành 2 tập vô hạn:

$$S=\{p_1,p_2,\dots\},\ T=\{q_1,q_2,\dots\}.$$

Ta bắt đầu xây dựng hàm f thoả mãn yêu cầu bài toán bằng định nghĩa

$$f(p_n)=q_n,\ f(q_n)=\frac{1}{p_n}.$$

Sau đó, chúng ta mở rộng định nghĩa này trên tập các số hữu tỉ bằng cách dùng các hệ thức $f(xy)=f(x)f(y)$:

$$f\left(\frac{p_{i_1}p_{i_2}\dots q_{j_1}q_{j_2}\dots}{p_{k_1}p_{k_2}\dots q_{m_1}q_{m_2}\dots}\right)=\frac{p_{m_1}p_{m_2}\dots q_{i_1}q_{i_2}\dots}{p_{j_1}p_{j_2}\dots q_{k_1}q_{k_2}\dots}.$$

Thử lại, ta thấy hàm vừa xây dựng thoả mãn:

$$f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}.$$

Bài 109.

Dễ dàng kiểm tra rằng $f(x)=0$ và $f(x)=x$ là các nghiệm của bài toán. Giả sử hàm f là nghiệm của bài toán mà f không phải là hàm 0. Ta sẽ chứng minh rằng $f(x)=x$.

Thật vậy, cho $y=0$, ta được $xf(0)=0$, $\forall x\in Z$. Do đó ta có $f(0)=0$. Mặt khác, từ $f(x)=0$ ta suy ra $xf(y)=0$, $\forall y\in Z$, vì thế phải có $x=0$. Vậy : $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Nếu $f(1)\neq 1$, đặt $x=1$ và $y=\dfrac{1}{1-f(1)}$ thì được

$$f\left(\frac{1}{1-f(1)}\right)=f(1)+f\left(\frac{1}{1-f(1)}\right).$$

Suy ra rằng $f(1)=0$, điều này mâu thuẫn. Do đó $f(1)=1$. Cho $x=1$ ở phương trình ban đầu ta có $f(1+y)=1+f(y)$, suy ra $f(n)=n$ với mọi $n\in Z$. Cho $x=k\in Z$ và $y=z-1$ ở phương trình hàm ban đầu ta có

$$f(kz)=kf(z),\ \forall k\in Z,\ \forall z\in Z.$$

Hơn nữa, hàm f cộng tính, bởi vì :

$$f(a)+f(b)=f\left[\frac{a+b}{2}+\frac{\dfrac{a+b}{2}}{f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]+$$

phương trình hàm cho ta $f(x)=f(x)$ hay $f(y)=f(y)$. Còn nếu $x=2^a m$ và $y=2^b n$ với các số m, n lẻ và a, b là các số nguyên không âm thì ta có

$$f(x)+f(y)=f(2^a)+f(2^b)=f(x(1+2y))+f(y(1-2x)).$$

Bài 111.

Đặt $m=n=0$ ta được $f(0)=0$ và do đó $f(f(n))=f(n)$ với mọi $n \in \mathbf{N}_0$. Như thế phương trình hàm đã cho tương đương với

$$\begin{cases} f(m+f(n)) = f(m)+f(n), \\ f(0)=0. \end{cases}$$

Ta cũng để ý rằng nếu f(x) không phải là hàm zero thì f có các điểm bất động khác zero. (Ta nói x là điểm bất động của một hàm g nếu $g(x)=x$). Gọi a là điểm bất động khác zero bé nhất của f. Nếu $a=1$ thì dễ thấy rằng $f(2)=2$ và theo quy nạp, $f(n)=n$, với mọi $n \in \mathbf{N}_0$.

Giả sử $a>1$. Cũng theo quy nạp, $f(ka)=ka$ với mọi $k \geq 1$. Ta sẽ chứng minh rằng các điểm bất động của f đều có dạng ka với $k \geq 1$. Trước tiên để ý rằng tổng hai điểm bất động của f lại là một điểm bất động. Cho b là một điểm bất động bất kì của f. Chọn các số nguyên không âm q, r sao cho $b=aq+r$, $0 \leq r < a$. Thế thì ta có

$$b=f(b)=f(aq+r)=f(r+f(aq))=f(r)+f(aq)=f(r)+aq.$$

Suy ra $f(r)=r$, và vì $r<a$ ta phải có $r=0$. Điều đó chứng tỏ rằng các điểm cố định đều có dạng ka.

Vì tập hợp $\{f(n): n \in \mathbf{N}_0\}$ là một tập hợp các điểm cố định của f nên nói riêng $f(i)=an_i$ với mỗi $i<a$, với $n_0=0$ và $n_i \in N_0$. Lấy số nguyên dương n bất kì và viết

$$n=ka+i,$$

trong đó $0 \leq i < a$. Sử dụng phương trình hàm ta có:

$$f(n)=f(i+ka)=f(i+f(ka))=f(i)+ka=n_i a+ka=(n_i+k)a.$$

Ta sẽ kiểm chứng rằng hàm f như thế thoả phương trình hàm đã cho: lấy $m=ka+i$, $n=\ell a+j$, $0, i, j<a$. Thế thì:

$$f(m+f(n))=f(ka+i+f(\ell a+j))=f((k+\ell+n_j)a+i)$$

$$=(k+\ell+n_j+n_i)a=f(m)+f(n).$$

Như vậy, nếu f không đồng nhất zero, thì f có dạng như sau: với $a \in N$ và $n_1, n_2, \ldots, n_a \in N$ được chọn bất kì, ta có

$$f(n)=\left(\left[\frac{n}{a}\right]+n_i\right)a.$$

Bài 112.

Giả sử f là hàm cần tìm.

Lấy $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, và giả sử $f(n_1)=f(n_2)$.

Chọn một số $m \in \mathbb{N}^*$. Khi đó ta có :

$$\begin{cases} f\left(f(n_1)+m\right)=n_1+f(m+2004) \\ f\left(f(n_2)+m\right)=n_2+f(m+2004). \end{cases} \quad (1)$$

Từ (1) và do $f(n_1)=f(n_2)$, suy ra $n_1=n_2$.

Như thế từ giả thiết $f(n_1)=f(n_2)$, ta đi đến $n_1=n_2$, vậy nếu hàm f thoả mãn yêu cầu đề bài, thì trước hết nó là một đơn ánh.

Thay trong điều kiện đã cho $m=f(1)$, khi đó với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$f\left(f(n)+f(1)\right)=n+f\left(f(1)+2004\right). \quad (2)$$

Áp dụng điều kiện với $n=1$; $m=2004$, thì

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}\big|_2,$$

tức là $n = a_0 + 2a_1 + \dots + 2^{k-1}a_{k-1} + 2^k a_k$. Khi đó :

$$F(n) = a_k f_{k+1} + a_{k-1} f_k + \dots + a_1 f_2 + a_0 f_1$$

là một hàm số F: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ và thoả mãn 3 điều kiện đã cho. Thật vậy ta chỉ cần kiểm tra điều kiện (c) (hai điều kiện (a), (b) được tiến hành tương tự). Ta có

$$2n = 0 + 2a_0 + 2^2 a_1 + \dots + 2^k a_{k-1} + 2^{k+1} a_k,$$

$$F(2n) = a_k f_{k+2} + a_{k-1} f_{k+1} + \dots + a_0 f_2 + 0.f_1. \quad (2)$$

Do $2n+1 = 1 + 2a_0 + 2^2 a_1 + \dots + 2^k a_{k-1} + 2^{k+1} a_k$, nên

$$F(2n+1) = a_k f_{k+2} + a_{k-1} f_{k+1} + \dots + a_0 f_2 + 1.f_1. \quad (3)$$

Từ (2) và (3), suy ra $F(2n+1) = F(2n) + 1$. Vậy tính chất (c), thoả mãn với hàm $F(n)$.

Tóm lại, hàm $F(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ là một trong các hàm thoả mãn 3 điều kiện đề bài.

5 MỘT SỐ BÀI TOÁN KHẢO SÁT NGHIỆM HOẶC TÍNH CHẤT HÀM SỐ DỰA VÀO PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 114.

Dĩ nhiên hàm số $f(x) - g(x)$ cũng liên tục trên (a, b).

Từ điều kiện (1) ta có hai trường hợp :

Trường hợp 1 : $f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x), \forall x \in (a, b)$.

Vì $\forall x \in (a, b)$, thì $f(x), g(x)$ cũng $\in (a, b)$, nên ta lại có

$$f(g(x)) > g(g(x)) = f(f(x)) > g(f(x)), \ \forall x \in (a, b),$$

điều này có nghĩa phương trình $f(g(x)) = g(f(x))$ vô nghiệm.

Trường hợp 2 : Nếu $f(x) - g(x) < 0$, bằng lí luận hoàn toàn tương tự, ta cũng có kết luận trên.

Bài 115.

Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x = 0$ và $x = 3$. Mặt khác, phương trình $f(x) = \alpha$, $0 \le \alpha \le 4$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;4]$. Gọi a_k và b_k lần lượt là số nghiệm của phương trình :

$$f^k(x) = 0 \text{ và } f^k(x) = 3.$$

Do $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ hoặc $x = 3)$ nên $a_k = a_{k-1} + b_{k-1}$.

Từ đó $a_k = a_1 + b_1 + \dots + b_{k-1}$.

Mặt khác, theo nhận xét trên thì $b_k = 3b_{k-1}$. Do $b_1 = 3$ nên $b_k = 3^k$. Từ đó : $b_1 + \dots + b_{k-1} = \dfrac{3^k - 3}{2}$.

Suy ra $a_k = \dfrac{3^k + 1}{2}$.

Với $k = 7$ ta có $a_k = 1094$, tức là phương trình

$f^7(x) = 0$ có 1094 nghiệm.

Bài 116.

Đặt $q(x) = g(x) - x$, với $x \in [0, 1]$. Khi đó ta có $q(x)$ là hàm liên tục và $q(0) = g(0) \ge 0$; $q(1) = g(1) - 1 \le 0$. Suy ra tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $q(x_0) = 0$, hay $g(x_0) = x_0$. Bây giờ, ta có hai khả năng :

(a) Hoặc $f(x_0) = x_0$, khi đó, $f(x_0) = g(x_0) = x_0$, như vậy phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm $x_0 \in [0, 1]$.

$$f(x)=\frac{1}{2}[(f(x)+f(\alpha x))+(f(x)+f(\beta x))-$$
$$-(f(\beta x)-f(\alpha\beta x))-(f(\alpha x)+f(\alpha\beta x))].$$

Áp dụng (1) suy ra $f(x)$ liên tục.

Bài 119.

* Xét hàm số $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2000}\right) - f(x)$

Hàm số này xác định và liên tục trên $\left[0, \frac{1999}{2000}\right]$.

* Ta có :

$$\begin{cases} g(0) = f\left(\frac{1}{2000}\right) - f(0) \\ g\left(\frac{1}{2000}\right) = f\left(\frac{2}{2000}\right) - f\left(\frac{1}{2000}\right) \\ g\left(\frac{2}{2000}\right) = f\left(\frac{3}{2000}\right) - f\left(\frac{2}{2000}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g\left(\frac{1999}{2000}\right) = f(1) - f\left(\frac{1999}{2000}\right). \end{cases}$$

* Suy ra :

$$g(0) + g\left(\frac{1}{2000}\right) + \dots + g\left(\frac{1999}{2000}\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

* Từ đó suy ra tồn tại i, j sao cho với

i, j ∈ {0, 1, ..., 1999} ta có :

$$g\left(\frac{i}{n}\right) \le 0 \text{ và } g\left(\frac{j}{n}\right) \ge 0.$$

* Nếu $g\left(\frac{i}{n}\right) = 0$ hoặc $g\left(\frac{j}{n}\right) = 0$ thì ta có điều phải chứng minh.

* Nếu $g\left(\frac{i}{n}\right) < 0$ và $g\left(\frac{j}{n}\right) > 0$ thì do g liên tục nên tồn tại $x_o \in \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ sao cho $g(x_o) = 0$ hay phương trình

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{2000}\right) \text{ có nghiệm.}$$

Tóm lại, phương trình $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2000}\right)$ luôn có nghiệm $x \in [0, 1]$.

Bài 120.

Giả sử có (1), đặt $y = u + v + uv$, theo (1) ta có :

$f[x(u + v + uv) + x + (u + v + uv)]$

$= f[x(u + v + uv)] + f(x) + f(u + v + uv)$

$= f[x(u + v + uv)] + f(x) + f(u) + f(v) + f(uv).$ (3)

Mặt khác :

$f[x(u + v + uv) + x + (u + v + uv)]$

$= f[u(x + v + xv) + u + (x + v + xv)]$

$= f[u(x + v + xv)] + f(u) + f(x) + f(v) + f(xv).$ (4)

Từ (3) và (4) ta được :

$f[x(u + v + uv)] + f(uv) = f[u(x + v + xv)] + f(xv).$ (5)

Cho x = 1 ở (5) ta có :

$f(u + v + uv) + f(uv) = f(u + 2uv) + f(v).$

Lại áp dụng (1) ta suy ra :

$f(u) + f(v) + 2f(uv) = f(u + 2uv) + f(v)$, từ đó :

$f(u) + 2f(uv) = f(u + 2uv).$ (6)

Cho u = 0 ở (6) ta được :

$3f(0) = f(0)$ hay $f(0) = 0,$ (7)

và cho v = –1 ta có :

(theo định nghĩa của số c) và do giả thiết quy nạp :

$$f_{k-1}(g(s)-g_k(s)) = f_{k-1}(g(s)) - g_{k-1}(g(s)) \ge (k-1)c. \quad (7)$$

Cộng từng vế (6) và (7), đi đến

$$f_k(s) - g_k(s) \ge kc. \quad (8)$$

Từ (8) suy ra (5) cũng đúng với $n = k$. Vậy (5) đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ Do f và g là các ánh xạ nhận giá trị trong $[a, b]$, nên hiển nhiên $\forall n = 1, 2, \ldots$ ta có

$$\begin{cases} f_n(s) \le b \\ g_n(s) \ge a. \end{cases}$$

Vì vậy với mọi $s \in [a, b]$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ ta có

$$f_n(s) - g_n(s) \le b - a. \quad (9)$$

Từ (5) và (9) suy ra với mọi $n = 1, 2, \ldots,$ thì $b - a \ge nc$. Do $c > 0$, nên từ đây, khi cho $n \to +\infty$, ta đi đến $b - a = +\infty$. Điều này vô lí. Mâu thuẫn này cho ta điều phải chứng minh.

Bài 122.

Thay vào phương trình hàm ban đầu đối với hàm số $f(x)$ các giá trị $x = y = 0$, ta nhận được :

$$f(0)(f(0)-1) = 0,$$

nghĩa là $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1$.

Nhưng nếu $f(0) = 0$ thì từ phương trình :

$$f(0)f(x) = f(x) \ (x \in R)$$

ta đi đến đồng nhất thức $f(x) = 0$, trái với điều kiện của bài toán. Vậy $f(0) = 1$.

Tiếp đến, ta chứng minh rằng hàm số $f(x)$ khả vi trên toàn bộ trục số. Thật vậy, đối với mọi $x \in R$, ta có :

$$f(x+y) \equiv f(x)f(y) \ (y \in R),$$

từ đó

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)}{y} = f(x) \lim_{y\to 0} \frac{f(y)-f(0)}{y},$$

nghĩa là giới hạn ở vế trái của đồng nhất thức cuối cùng tồn tại và bằng :

$$f'(x) = f(x).f'(0).$$

Giả sử $f(0) = a$, khi đó $f'(x) = af(a)$.

Hàm số $f(x)$ khả vi tuỳ ý lần. Thật vậy :

$$f''(x) = af'(x) = a^2 f(x),$$

$$f'''(x) = a^2 f'(x) = a^3 f(x), \ldots$$

Như vậy, với bất kì $n \in N$ ta có :

$$f^{(n)}(x) = a_n f(x).$$

Bài 123.

+ Cố định $x \in R^+$; xét dãy (u_n) như sau :

$$u_o = x \ ; \ u_1 = f(x) \ldots\ldots u_{n+1} = f(u_n).$$

+ Từ điều kiện bài toán, với $x = u_n$, ta có :

$$u_{n+2} + au_{n+1} = b(a+b)u_n.$$

+ Ta có phương trình đặc trưng của dãy :

$$y^2 + ay - b(a+b) = 0,$$

phương trình này có 2 nghiệm là : $y_1 = b$; $y_2 = -(a+b)$. Do đó

$$u_n = c_1 b^n + c_2(-1)^n(a+b)^n = (a+b)^n \left[c_1 \left(\frac{b}{a+b} \right)^n + c_2(-1)^n \right].$$

Vì $c_1 \left(\frac{b}{a+b} \right)^n \to 0$ khi $n \to \infty$, do đó nếu $c_2 > 0$ thì $u_n < 0$ với n lẻ đủ lớn. Nếu $c_2 < 0$ thì $u_n < 0$ với n chẵn đủ

Bài 126.

Đặt $a = 1/6$, $b = 1/7$ thì $a + b = 13 / 42$. Thay x lần lượt bởi $x + a$, $x + 2a$, ..., $x + 5a$ rồi lấy tổng tất cả các phương trình này thì nhận được :

$$f(x + 1 + b) + f(x) = f(x + 1) + f(x + b).$$

Bây giờ, thay x lần lượt bởi $x + b$, $x + 2b$,..., $x + 6b$ và lấy tổng thì được : $f(x + 2) + f(x) = 2f(x + 1)$, hay

$$f(x + 2) - f(x + 1) = f(x + 1) - f(x).$$

Nếu ta đặt $f(x + 1) - f(x) = c$ thì dễ dàng có được bằng quy nạp theo n : $f(x + n) - f(x + n - 1) = c$. Từ đó suy ra :

$$f(x + n) - f(x) = nc,$$

điều đó chứng tỏ rằng nếu $c \neq 0$ thì $f(x + n)$ không giới nội, trái với điều kiện $|f(x)| \leq 1$ với mọi x. Vì thế $c = 0$ và

$$f(x + 1) = f(x),$$

chứng tỏ tính tuần hoàn của hàm f(x).

Chú ý : *Bạn đọc hãy chứng minh kết quả tổng quát hơn như sau :* Nếu $f : R \to R$ là hàm số giới nội và a, b là các số thực khác 0 sao cho a/b hữu tỉ và

$$f(x + a + b) + f(x) = f(x + a) + f(x + b),\ \forall x \in R,$$

thì f là hàm số tuần hoàn.

Bài 127.

Từ giả thiết ta có $|f(-x)| = f(|-x|) = f(|x|) = |f(x)|$, hay

$$(f(-x))^2 = (f(x))^2 \neq 0,\ \forall x \in R.$$

Theo bổ đề sau đây (xem bên dưới), ta suy ra $f(x)$ là hàm chẵn hoặc hàm lẻ. Giả sử $f(x)$ là hàm lẻ, ta có

$f(-0) = -f(0)$ hay $2f(0) = 0$, hay $f(0) = 0 \Rightarrow |f(0)| = 0$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(|x|) = |f(x)| > 0,\ \forall x \in R$. Như vậy $f(x)$ không thể là hàm lẻ, tức là $f(x)$ phải là hàm

số chẵn, điều phải chứng minh.

Bổ đề :

Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên (a, b) sao cho $(f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Khi đó ta có:

$f(x) = g(x),\ \forall x \in (a, b)$ hoặc $f(x) = -g(x),\ \forall x \in (a, b)$.

Chứng minh bổ đề. Từ giả thiết, ứng với mỗi một $x_0 \in (a, b)$, ta có $(f(x_0) - g(x_0))(f(x_0) + g(x_0)) = 0$, hoặc là ta có $f(x_0) = g(x_0)$, hoặc là ta có $f(x_0) = -g(x_0)$.

Trường hợp 1 : $f(x_0) = g(x_0)$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$f(x) = g(x), \forall x \in (a, b).$$

Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại $x_1 \in (a, b) : f(x_1) \neq g(x_1)$. Khi đó ta phải có $f(x_1) = -g(x_1)$. Như vậy

$$f(x_0)f(x_1) = -g(x_0)g(x_1) \neq 0. \quad (*)$$

Có hai khả năng sau :

(a) $f(x_0)f(x_1) < 0$. Lúc đó do tính liên tục của $f(x)$ suy ra tồn tại x_2 giữa x_0 và x_1 sao cho $f(x_2) = 0$. Điều này mâu thuẫn với $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

(b) $f(x_0)f(x_1) > 0$. Khi đó từ (*) ta có $g(x_0)g(x_1) < 0$. Lại do tính liên tục của $g(x)$, suy ra tồn tại x_3 giữa x_0, x_1 sao cho $g(x_3) = 0$. Điều này cũng mâu thuẫn với điều kiện $g(x) \neq 0\ \ \forall x \in (a, b)$.

Tóm lại, ta có $f(x) = g(x), \forall x \in (a, b)$.

Trường hợp 2 : $f(x_0) = -g(x_0)$, lập luận hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $f(x) = -g(x), \forall x \in (a, b)$.

trình $f'(x) = f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

Bài 130.

Ta có, với mọi x :

$$p(x, 0).p(x, 0) = p(x^2, 0). \qquad (*)$$

p(x, 0) là đa thức một biến x. Giả sử đa thức này có dạng

$$a_n x^n + ... + a_0$$

với a_n khác 0. Khi đó, ta phải có $a_n^2 = a_n$, suy ra $a_n = 1$. Giả sử trong các hệ số, còn có những hệ số khác 0 khác. Gọi a_m là hệ số khác 0 với chỉ số m lớn nhất. Lúc đó, vế trái của (*) có số hạng khác 0 chứa x^{m+n} nhưng vế phải thì không. Điều này mâu thuẫn.

Do đó, ta có $p(x, 0) = x^n$ với n nguyên dương, hoặc p(x, 0) = 0 với mọi x.

* Nếu p(x, 0) = 0 với mọi x thì p(u, v) = p(1, 0).p(u, v) = 0, do đó p là đa thức 0.

* Giả sử $p(x, 0) = x^n$ với n nguyên dương. Khi đó,

$$p(xu, xv) = p(x, 0).p(u, v) = x^n p(u, v).$$

Suy ra p(x, y) là đa thức thuần nhất bậc n. Nói cách khác, các hạng tử của nó có dạng $ax^h y^k$, với h và k là các số nguyên không âm có tổng bằng n. Bây giờ, đặt

$$g(x, y) = p\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right),$$

ta có p(x, y) = g(x + y, x − y) và g(x, y).g(u, v) = g(xu, yv). Dễ thấy g cũng là đa thức thuần nhất bậc n, do đó, có thể giả sử

$$g(x, y) = c_0 y^n + c_1 x y^{n-1} + c_2 x^2 y^{n-2} + ... + c_n y^n.$$

Khi đó, so sánh các hệ số của g(x, y)g(u, v) và g(xu, yv) thì các

hạng tử chứa x và u có số mũ khác nhau, nên hai vế bằng nhau chỉ khi các hệ số đều bằng 0, ngoại trừ một hệ số c_i khác 0. Như thế, $g(x, y) = cx^h y^{n-h}$ với h nguyên dương. Lúc đó, $c^2 = c$, suy ra c = 1. Do đó $g(x, y) = x^h y^k$ với h, k là số nguyên dương. Suy ra $p(x, y) = (x + y)^h (x - y)^k$.

Vậy $p(x, y) = (x + y)^h (x - y)^k$, hoặc p(x, y) = 0, đây chính là những đa thức thoả mãn đề bài.

Bài 131.

Điều kiện (1) thường được gọi là tính thuần nhất bậc n của P(x, y). Xét trường hợp n = 1, 2, 3, ta dễ dàng tìm thấy các đa thức tương ứng thoả điều kiện đề bài là:

$$x - 2y,\ (x+y)(x-2y),\ (x+y)^2(x-2y).$$

Ta cũng dễ dàng kiểm tra được rằng với mọi n, đa thức

$$(x+y)^n(x-2y)$$

thoả điều kiện đề bài. Bây giờ, từ điều kiện (2), cho x = y = z ta được P(2x, x) = 0, nên đa thức P(x, y) thoả điều kiện đề bài luôn nhận $(x - 2y)$ làm một nhân tử.

Lấy $x = y = 1$, $z = -2$, điều kiện (2) cho ta

$$P(1,-1)(2^n - 2) = 0,$$

do đó, (x + y) là một nhân tử của đa thức khi n > 1.

Tất cả những điều trên gợi ý rằng nghiệm tổng quát của bài toán là $(x+y)^n(x-2y)$. Ta sẽ chứng minh điều này.

Từ (2), cho $y = 1 - x$, $z = 0$, ta được:

$$P(x, 1-x) = -1 - P(1-x, x),$$

đặc biệt, $P(0, 1) = -2$. Bây giờ, cho $z = 1 - x - y$, ta được:

$$P(1-x, x) + P(1-y, y) + P(x+y, 1-x-y) = 0,$$

đa thức bậc 0 thoả mãn điều kiện đề bài. Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ bậc $n > 0$ thoả mãn điều kiện đề bài. Với mọi x, ta có : $g(x) = f(x) - f''(x) > 0$. Do $\deg g(x) = \deg g(x) = n$ nên suy ra n phải là số chẵn. Ta lại có $h(x) = f'(x) - f''(x) > 0$ với mọi x. Mặt khác, $\deg h(x) = \deg f'(x) = n - 1$ nên suy ra $n - 1$ phải là số chẵn (tức là n lẻ). Điều này mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại đa thức như đòi hỏi.

Bài 134.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo số bậc của f(x).

Trước hết, xét trường hợp *tầm thường*: nếu bậc của f bé hơn hẳn bậc của g, thì bậc của f(x) – f(y) bé hơn hẳn bậc của g(x) – g(y), nhưng g(x) – g(y) chia hết f(x) – f(y), từ đó f(x) = f(y). Suy ra f là hàm hằng và đa thức h phải tìm hiển nhiên tồn tại.

Giả định rằng, bậc của f không bé hơn bậc của g. Khi đó f(x) = q(x)g(x) + r(x), hơn nữa bậc của r(x) bé hơn bậc của q(x), ta có:

$$q(x)g(x) - q(y)g(y) + r(x) - r(x) = f(x) - f(y)$$
$$= a(x, y)(g(x) - g(y).$$

Như vậy,

$$r(x) - r(y) = v(x, y)g(x) + w(x, y)g(y), \text{ trong đó}$$
$$v(x, y) = a(x, y) - g(x) \text{ và } w(x, y) = g(y) - a(x, y).$$

Khi đó v(x, y) = b(x, y) g(y) + c(x, y), trong đó bậc của c(x, y) theo y bé hơn bậc của g(y). Đặt d(x, y) = w(x, y) + b(x, y)g(y), khi đó

$$r(x) - r(y) = c(x, y)g(x) + d(x, y)g(y)$$

và g(y) chia hết r(x) – r(y) – c(x, y)g(x). Vì bậc theo y của đa thức g(y) lớn hơn bậc của r(x) – r(y) – c(x, y)g(x) nên ta có

$$r(x) - r(y) - c(x, y)\, g(x) = 0$$

hay r(x) – r(y) = c(x, y)g(x), do đó g(x) chia hết r(x) – r(y).

Vì bậc của g(x) lớn hơn bậc r(x) – r(y), nên r(x) = r(y) và r là hàm hằng. Chẳng hạn, cho $r(x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f(x) - f(y) = q(x)g(x) - q(y)g(y)$$
$$= q(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(q(x) - q(y))$$
$$= a(x, y)(g(x) - g(y)).$$

Vì thế g(y)(q(x) – q(y)) = (a(x, y) – q(x))(g(x) – g(y)), g(y) chia hết (a(x, y) – q(x))(g(x) – g(y)), và g(y) chia hết (a(x, y) – q(x))g(x), g(y) chia hết a(x, y) – q(x), chẳng hạn

$$a(x, y) - q(x) = q(y)p(x, y).$$

Khi đó q(x) – q(y) = p(x, y)(g(x) – g(y)), trong đó bậc của q(x) bé hơn bậc của f(x). Theo nguyên lí quy nạp, tồn tại đa thức k(x) có tính chất q(x) = k(g(x)).

Ta có thể xác định $h(x) = xk(x) + \alpha$ và khi đó

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) = k(g(x))g(x) + \alpha = h(g(x)).$$

Bài 135.

Câu trả lời là *có*. Thật vậy, gọi g(x) là đa thức hệ số nguyên với bậc 1997 tuỳ ý, ta sẽ chứng minh đa thức

$$f(x) = x(x-1)g(x)+1$$

thoả mãn đề bài. Để chứng minh, chỉ cần chứng tỏ rằng nếu n là số nguyên bất kì và p là số nguyên tố chia hết f(n) thì với mọi số nguyên dương k > 1, ta có $p \nmid f^k(n)$. Cụ thể, ta chứng minh rằng với mọi k > 1, ta có $f^k(n) \equiv 1 \pmod p$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo k. Ta biết rằng với mọi đa thức hệ số nguyên h, nếu $a \equiv b \pmod c$ thì

$$h(a) \equiv h(b) \pmod c.$$

ta có $P(x)+P(-x) = 0$ với mọi x. Đặc biệt, $P(0) = 0$, suy ra

$$P(-1) = P(0^2-1) = P(0^2)-1 = -1,$$

$$\text{và } P(1) = -P(-1) = 1.$$

Đặt $a_0 = 1$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}+1}$ khi $n \geq 1$; để ý rằng $a_n > 1$ với mọi $n \geq 1$. Ta khẳng định $P(a_n) = a_n$ với mọi n. Thật vậy, điều này đúng khi n = 0, giả sử nó đúng cho n, ta có

$$P(a_{n+1})^2 = P(a_{n+1}^2 - 1) + 1 = P(a_n) + 1 = a_n + 1,$$

suy ra $P(a_{n+1}) = \pm a_{n+1}$. Nhưng nếu $P(a_{n+1}) = -a_{n+1}$ thì

$$P(a_{n+2})^2 = P(a_{n+1}) + 1 = 1 - a_{n+1} < 0,$$

là điều mâu thuẫn. Vậy $P(a_{n+1}) = a_{n+1}$ và khẳng định trên được chứng minh.

Nếu $-1 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ thì dễ thấy $x \leq \sqrt{1+x} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét này cho phép suy ra dãy a_i là dãy tăng. Như vậy, có vô hạn các giá trị x, đó là các a_i, để cho P(x) = x. Do P(x) là một đa thức nên suy ra P(x) = x với mọi x, điều phải chứng minh.

Bài 139.

Trong $f(x) = \sqrt{f(x^2+1) - 33} + 32$, cho $x = 2005$, ta có

$$f(2005^2+1) = (f(2005)-32)^2 = (2005^2+1)+32.$$

Đặt $x_1 = 2005^2 + 1$, suy ra $f(x_1) = x_1 + 32$. Đặt $x_2 = x_1^2 + 1$, khi đó từ giả thiết ta lại có

$$f(x_1^2+1) = (f(x_1)-32)^2 + 33 = (x_1^2+1) + 32,$$

suy ra $f(x_2) = x_2 + 32$. Mặt khác, dễ thấy

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots.$$

với $x_n = x_{n-1}^2 + 1$, và bằng quy nạp, dễ dàng chứng tỏ được đa thức $g(t) = f(t) - (t+32)$ có vô số nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Vì đa thức bậc $n \geq 1$ không thể có quá n nghiệm nên điều này chỉ xảy ra khi

$$g(t) \equiv 0 \Rightarrow f(t) = t + 32 \Rightarrow f(x) = x + 32.$$

Thử lại, thấy $f(x) = x + 32$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

7 MỘT SỐ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐỆ QUY

Bài 140.

Ta có $f_1(n) = n$, $f_2(n) = \frac{1}{1-n}$;

$$f_3(n) = \frac{n-1}{n} ; f_4(n) = n.$$

Dễ dàng chứng minh được rằng $f_{3k+1}(n) = n$, với $k \in N$. Mặt khác 1999 = 666.3 + 1, nên $f_{1999}(1999) = 1999$.

Bài 141.

(Hướng dẫn cho cả hai câu a và b).

Trong đồng nhất thức ban đầu, ta thay n = m = 0 thì nhận được $(f(0))^2 = 2f(0)$. Nhưng $f(0) \neq 0$, nên $f(0) = 2$. Vả lại, khi thay m = 1 thì được $f(n)f(1) = f(n+1) + f(n-1)$, $n \in Z$.

$$f_2(x) = f(f(x)) = (2\cos 2\alpha)^2 - 2$$
$$= 2(2\cos^2 2\alpha - 1) = 2\cos 2^2\alpha.$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng có : $f_n(x) = 2\cos 2^n\alpha$. Từ đó,

$$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2^n\alpha \Leftrightarrow 2^n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2^{n+1}} + k\frac{\pi}{2^n}, k \in Z.$$

Do $\alpha \in [0,\pi]$ nên $0 \le \frac{\pi}{2^{n+1}} + k\frac{\pi}{2^n} \le \pi.$

Vậy k nhận các giá trị 0, 1, ..., $2^n - 1$. Tóm lại, phương trình $f_n(x) = 0$ có 2^n nghiệm phân biệt.

Bài 145.

Đặt $x = 2\cos t$, ta thu hẹp việc xét nghiệm của phương trình trên đoạn $-2 \le x \le 2$. Khi đó, bằng quy nạp ta chứng minh được $P_n(x) = 2\cos 2^n t$, và phương trình $P_n(x) = x$ trở thành $\cos 2^n t = \cos t$.

Từ đó ta được 2^n nghiệm:

$$t = \frac{2k\pi}{2^n - 1},\ t = \frac{2k\pi}{2^n + 1},\ k = 1,2,\ldots,n.$$

Suy ra rằng phương trình $P_n(x) = x$ có tất cả 2^n nghiệm thực phân biệt nhau.

Bài 146.

Giả sử có số nguyên tố p chia hết f(n). Lúc đó, f(n) phải là một luỹ thừa của p, bởi vì nếu $f(n) = p^r m$ với $m > 1$, không phải một luỹ thừa của p, thì do tính bé nhất của f(n), cả p^r và m đều chia hết n nên suy ra f(n) cũng thế, mâu

thuẫn. Nếu f(n) không phải một luỹ thừa của 2, thì f(f(n)) = 2, do đó ta có g(n) = 2. Nếu f(n) là một luỹ thừa của 2, thì hoặc là f(n) = 2, trường hợp này ta có g(n) = 1; hoặc là f(f(n)) = 3, trường hợp này ta có g(n) = 3.

Rõ ràng f(n) = 2 nếu và chỉ nếu n là số lẻ. Sẽ không có biểu thức tường minh thích hợp cho n để cho f(n) là một luỹ thừa của 2 và bé nhất là 2^2. Ví dụ, f(n) = 4 nếu và chỉ nếu n là bội của 6 nhưng không phải của 4, nói cách khác $n \equiv 6$ mod 12. Tương tự, f(n) = 8 nếu và chỉ nếu n là bội của 3.4.5.7 nhưng không phải của 8, f(n) = 16 nếu và chỉ nếu n là bội của 3.5.7.11.13.8 nhưng không phải của 16, v.v... .

Bài 147.

Đặt $p_0(x) = x$ và $q_0(x) = 1$. Với mọi số nguyên dương n, ta đặt $p_n(x) = (p_{n-1}(x))^2 + (q_{n-1}(x))^2$, và

$$q_n(x) = 2p_{n-1}(x)q_{n-1}(x).$$

Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh rằng

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)}.$$

Thật vậy, với n = 0, ta có $f^{(0)}(x) = x = \frac{x}{1} = \frac{p_0(x)}{q_0(x)}$.

Giả sử kết quả trên đúng với $n \ge 0$, ta có

$$f^{(n+1)}(x) = f(f^{(n)}(x)) =$$

$$= \frac{\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)^2 + 1}{2\frac{p_n(x)}{q_n(x)}} = \frac{(p_n(x))^2 + (q_n(x))^2}{2p_n(x)q_n(x)} = \frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)}.$$

Tiếp theo, cũng bằng quy nạp theo n ta sẽ chứng minh

Rõ ràng nếu k là số nguyên sao cho $k < 4900$ thì
$$S(k) \le 3 + 9.3 = 30.$$
(Chú ý rằng số 3999 là số < 4900 nhưng có $S(3999)$ là lớn nhất). Vì lẽ đó, do $f_3(2^{1990}) = \{S(f_2(2^{1990}))\}^2$, nên ta có
$$f_3(2^{1990}) \le 30^2 = 900. \quad (5)$$
Từ (2) và (5), và nếu gọi s là tổng các chữ số của $f_2(2^{1990})$, thì $s \equiv 7 \pmod 9$, và $s \le 30$.

Vì vậy $s \in \{7, 16, 25\}$, nên
$$f_3(2^{1990}) \in \{49, 256, 625\}. \quad (6)$$
Chú ý rằng $4 + 9 = 2 + 5 + 6 = 6 + 2 + 5 = 13$, nên từ (6) có
$$f_4(2^{1990}) = 13^2 = 169.$$
Từ hệ thức này suy ra
$$f_5(2^{1990}) = (1 + 6 + 9)^2 = 256,$$
$$f_6(2^{1990}) = (2 + 5 + 6)^2 = 169.$$
Như vậy, ta thiết lập được công thức sau với $n \ge 4$:

$f_n(2^{1990}) =$ 169 nếu n là số chẵn, và

$f_n(2^{1990}) = 256$ nếu n là số lẻ.

8 MỘT SỐ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN TẬP SỐ THỰC

Bài 149.

Giả sử $y \le x$, ta có y/x thuộc X.

Lúc đó, từ (3) ta có:

$$f(x, y) = x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right) = yx^{k-1} \text{ (từ (1))}.$$
Tương tự, $f(y, x) = x^k f\left(\dfrac{y}{x}, 1\right) = yx^{k-1}$.

Bây giờ, lấy $x \le y \le z$, nhưng $yz^{k-1} < x$, ta có :
$$f((f(x, y), z) = f(xy^{k-1}, z) = xy^{k-1}z^{k-1}$$
(vì $x \le z$ và $y \le 1$ nên hiển nhiên $xy^{k-1} \le z$). Ngoài ra ta có
$$f(x, f(y, z)) = f(x, yz^{k-1}).$$
Do vậy, nếu $x \le yz^{k-1}$ thì $f(x, f(y, z)) = xy^{k-1}z^h$, trong đó $h = (k-1)^2$. Nhưng nếu z khác 1, thì ta phải có $k - 1 = 0$ hay 1, suy ra k = 1 hoặc 2.

Mặt khác, nếu $x > yz^{k-1}$ thì
$$f(x, f(y, z)) = x^{k-1}yz^{k-1},$$
do đó $x^{k-2} = y^{k-2}$. Nếu x và y khác nhau thì k = 2. Trong trường hợp này k khác 1, vì nếu k = 1 thì ta không thể có $x > yz^{k-1}$, do $z^{k-1} = 1$ và ta đã giả sử $x \le y$.

Tóm lại, k không nhận giá trị nào khác ngoài 1 và 2.

* Nếu k = 2, ta có f(x, y) = xy. Dễ thấy lúc này (3) không được thoả mãn :
$$f((f(x, y), z) = f(xy, z) = xyz = f(x, yz) = f(x, f(y, z)).$$
* Nếu k = 1, ta có f(x, y) = min(x, y). Dễ thấy (3) được thoả mãn - cả hai vế đều là min(x, y, z).

Tóm lại, câu trả lời cho bài toán là :

f(x, y) = xy hay f(x, y) = min(x, y).

Bài 150.

Gọi k là cận trên nhỏ nhất của $|f(x)|$.

tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) > 0$. Theo trường hợp 1 ta có $f(0) \le 0$. Hàm $f(x)$ liên tục trên R, đơn điệu khi $x > 0$ mà lại tồn tại $x_0 > 0$ để cho $f(x_0) > 0$, nên $f(x)$ phải là đơn điệu tăng khi $x > 0$. Từ $x_1 > x_0$, ta có $f(x_1) > f(x_0) > 0$.

Từ đó theo tính chất của hàm f suy ra

$$-x_1^2 = f(f(x_1)) > f(f(x_0)) = -x_0^2 \Rightarrow x_1^2 < x_0^2 \Rightarrow x_1 < x_0.$$

Đó là điều vô lí. Vậy giả thiết phản chứng là sai, tức là

$$f(x) \le 0 \quad \forall x > 0.$$

Tóm lại ta có $f(x) \le 0, \ \forall x > R$.

Bài 154.

Ta có $f(x) = f(1.x) = f(1) + f(x)$ nên $f(1) = 0$.

Với $x_o > 0$ tuỳ ý, giả sử $x_n > 0$ và $x_n \to x_o$ thì

$$\frac{x_n}{x_o} \to 1.$$

Do đó $\lim\limits_{x_n \to x_o} f\left(\frac{x_n}{x_o}\right) = 0$. Vậy:

$$\lim_{x_n \to x_o} f(x_n) = \lim_{x_n \to x_o} f\left(x_o.\frac{x_n}{x_o}\right)$$

$$= f(x_o) + \lim_{x_n \to x_o} f\left(\frac{x_n}{x_o}\right) = f(x_o).$$

Từ giả thiết (1) suy ra: $f(x^n) = n f(x), \forall n \in N$.

Do $f(1) = 0$ nên $f(x^{-n}) = -n f(x)$, $\forall n \in N$. Suy ra nếu r là số hữu tỉ thì $f(x^r) = r f(x)$, $\forall x \in R^+$.

Xét $x \in R^+$ thì $x = e^{\ln x}$. Giả sử $\{r_n\}$ là dãy các số hữu tỉ mà $r_n \to \ln x$. Khi đó: $e^{rn} \to e^{\ln x} = x$. Vậy :

$$\lim_{n \to \infty} f(e^{rn}) = f(x).$$

Mặt khác, $f(e^{rn}) = A\,rn \to A \ln x$, trong đó $f(e) = A$. Suy ra

$$f(x) = A \ln x, \forall x \in R^+.$$

Vì $f(x) \ne 0$ nên $A \ne 0$. Đặt $a = e^A$ thì $a > 0$ và $a \ne 0$, đồng thời $f(x) = \log_a x, \forall x \in R^+$.

Bài 155.

Với $\forall x \in R^+$ ta có $f(x) = f(\sqrt{x}.\sqrt{x}) = f^2(\sqrt{x}) \ge 0$.

Nếu có $x_o \in R^+$ sao cho $f(x_o) = 0$ thì:

$$f(x) = f\left(x_o.\frac{x}{x_o}\right) = f(x_o) f\left(\frac{x}{x_o}\right) = 0, \quad \forall x \in R^+.$$

Điều này mâu thuẫn với 2). Vậy $f(x) > 0, \forall x \in R^+$.

Đặt $g(x) = \ln f(x)$. Khi đó, $\forall x \in R^+, y \in R^+$ ta có:

$$g(xy) = \ln f(xy) = \ln f(x)f(y) = g(x) + g(y),$$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \ln f(x) = \ln 1 = 0.$$

Như vậy, ta có: $g(x) = \log_a x \ (a > 0, a \ne 1)$. Từ đó,

$$\ln f(x) = \log_a x = (\log_a e) \ln x.$$

Đặt $\alpha = \log_a e$ là hằng số thì: $f(x) = x^\alpha$.

Bài 156.

Đặt $y = -f(x)$, thay vào phương trình ta có

$$f(x - f(x)) = 0.$$

Giả sử x_0 là số thoả mãn $x_0 - f(x_0) = k$, như thế, ta có $f(k) = 0$. Vì f là hàm tăng thực sự nên nó phải là đơn ánh, do đó $f(x - f(x)) = 0$ kéo theo $x - f(x) = k$.

$$= vf\left(1+\frac{uv(f(v)-f(u))}{v-u}\right).$$

Điều này mâu thuẫn vì $u \neq v$.

Từ đó, $u < v$ suy ra $f(u) \geq f(v)$.

Bổ đề 2.

$f(1) = 1$.

Chứng minh.

Giả sử $f(1) \neq 1$.

Thay $x = 1$ vào phương trình hàm ta có

$$f(f(1) + y) = f(1 + y),$$

do đó $f(u + |f(1) - 1|) = f(u)$ với mọi $u > 1$. Lúc đó, f là hàm tuần hoàn trên khoảng $(1,\infty)$, với chu kì $|f(1) - 1|$. Từ tính đơn điệu (Bổ đề 1) và tính tuần hoàn, suy ra f là hàm hằng trên $(1,\infty)$. Tuy nhiên, khi đó, với mọi x, $y > 1$, vế trái của phương trình hàm đã cho là $f(f(x) + y)$ trở thành hằng số, còn vế phải là $xf(1 + xy)$ thì không thể bằng hằng số, mâu thuẫn. Vậy $f(1) = 1$.

Bổ đề 3. $f(x)=\frac{1}{x}$.

Chứng minh.

Trước tiên, giả sử $x > 1$, thay $y=1-\frac{1}{x}$ vào phương trình hàm:

$$f\left(f(x)-\frac{1}{x}+1\right)=xf(x). \qquad (*)$$

Nếu $f(x)>\frac{1}{x}$ thì $f(x)-\frac{1}{x}+1>1$ nên do Bổ đề 1 và Bổ đề 2 ta có :

$$f\left(f(x)-\frac{1}{x}+1\right) \leq 1,$$

điều này mâu thuẫn với vế phải của (*) là $xf(x) > 1$. Tương tự, trường hợp $f(x)<\frac{1}{x}$ cũng dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy $f(x)=\frac{1}{x}$ trong trường hợp $x > 1$.

Tiếp đến, cho $x > 0$ tuỳ ý và $y = 1$. Khi đó,

$$f(f(x)+1)=\frac{1}{f(x)+1}=xf(1+x)=\frac{x}{1+x},$$

$$f(x)=\frac{1+x}{x}-1=\frac{1}{x}.$$

Bổ đề 4.

Hàm $f(x)=\frac{1}{x}$ là một nghiệm của bài toán.

Chứng minh.

$$f(f(x)+y)=f\left(\frac{1}{x}+y\right)=f\left(\frac{1+xy}{x}\right)=\frac{x}{1+xy}=xf(1+xy).$$

Bài 161.

Trả lời: Hàm số cần tìm là $f(x) = [x]$. Thật vậy :

Theo (4) và (1) ta có:

$$f(x + 1) \geq f(x) + f(1) = f(x) + 1.$$

Mà $f(x) \geq f(x + 1) + f(-1) = f(x + 1) - 1$ theo (4) và (2).

Suy ra

$$f(x + 1) = f(x) + 1.$$

Đặc biệt, ta có, $1 = f(1) = f(0+1) = f(0) + 1$, nên $f(0) = 0$. Từ đó, theo (3), ta được $f(x) \leq 0$ với $0 < x < 1$.

Mặt khác, theo (5), ta có :

Như vậy, $f(x)$ là hàm hằng trên khoảng $[0, +\infty)$, và do nó là hàm chẵn nên nó là hàm hằng với mọi số thực x.

Đảo lại, dễ thấy mọi hàm hằng đều thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Bài 164.

Với $x = -1$ ta có $f(0) = y[f(-1) + 1]$, $\forall y \in R$.

Do đó: $f(0) = 0$ và $f(-1) = -1$.

Với $x = 0$ thì $f(f(y)) = y$, $\forall y \in R$.

Với $x = -2$ và $y = -1$ ta có: $f(1) = -[f(-2) + 1]$.

Mặt khác, với $y = -1$ thì

$$f(-x-1) = -f(x) - 1, \ \forall x \in R.$$

Do đó $f(-2) = -f(1) - 1$ và $f(x+1) = f(1)[f(x) + 1]$.

Từ đó: $f(1)[f(-2) + 1] = f(-1) = -1$.

Suy ra: $[f(1)]^2 = 1$ hay, $f(1) = 1$.

Vậy $f(x+1) = f(x) + 1$, $\forall x \in R$. Ta có:

$$f(xy) = f(xf(f(y))) = f(y)(f(x-1) + 1) = f(x)f(y), \quad (*)$$

do đó với $x \geq 0$ thì $f(x) = \left[f(\sqrt{x})\right]^2 \geq 0$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Với $y \neq 0$ thì

$$f(x+y) = f\left(\left(\frac{x}{y} + 1\right)y\right) = f(y)\left[f\left(\frac{x}{y}\right) + 1\right] = f(x) + f(y). \quad (**)$$

Do $f(0) = 0$ nên (*) và (**) đúng với mọi x, y.

Từ (*) suy ra $f(-y) = -f(y)$, $\forall y \in R$ nên ta chỉ xét trên R^+. Từ (*) và (**) suy ra $f(kx) = kf(x), k \in N$ và do đó

$$f(k) = k \text{ nên } f(r) = r, \ r \in Q^+.$$

Từ đó suy ra $f(x) = x$.

Bài 165.

Bằng quy nạp theo n ta sẽ chứng minh rằng

$$f\left(\frac{m}{3^n}\right) = 0$$

với mọi số nguyên $n \geq 0$ và với mọi m thoả mãn $0 \leq m \leq 3^n$. Các điều kiện ở đề bài chứng tỏ điều này đúng với $n = 0$. Giả sử điều này đúng với $n = k - 1 \geq 0$, ta chứng minh nó đúng với $n = k$.

Nếu $m \equiv 3 \pmod 3$ thì theo giả thiết quy nạp ta có

$$f\left(\frac{m}{3^k}\right) = f\left(\frac{m/3}{3^{k-1}}\right) = 0.$$

Nếu $m \equiv 1 \pmod 3$ thì $1 \leq m \leq 3^k - 2$ và

$$3f\left(\frac{m}{3^k}\right) = 2f\left(\frac{(m-1)/3}{3^{k-1}}\right) + f\left(\frac{(m+2)/3}{3^{k-1}}\right) = 0 + 0 = 0.$$

Cuối cùng, nếu $m \equiv 2 \pmod 3$ thì $2 \leq m \leq 3^k - 1$ và

$$3f\left(\frac{m}{3^k}\right) = 2f\left(\frac{(m+1)/3}{3^{k-1}}\right) + f\left(\frac{(m-2)/3}{3^{k-1}}\right) = 0 + 0 = 0.$$

Vậy $f\left(\frac{m}{3^n}\right) = 0$ với mọi số nguyên $n \geq 0$ và với mọi m thoả mãn $0 \leq m \leq 3^n$.

Với mọi $x \in [0, 1]$, ta có thể lập nên một dãy số có dạng $\frac{m}{3^k}$ có giới hạn x. Vì hàm $f(x)$ liên tục nên suy ra

$$f(x) = 0 \text{ với mọi } x \in [0, 1],$$

ta có điều phải chứng minh.

Bài 166.

Hiển nhiên, $f(x) = bx$ là nghiệm của phương trình

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)=f(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}).$$

Khi đó, đặt $x_1=x_2=\ldots=x_n=\sqrt{\frac{k}{n}}$ thì:

$$nf\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)=f(\sqrt{k})=kf(1)=k.$$

Do đó: $f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)=\frac{k}{n}$; trong đó $k,n\in N^*$.

Với $x\in Q^+$ thì $x=\frac{p}{q}$, $p,q\in N^*$, ta có:

$$f(x)=f\left(\sqrt{\frac{p^2}{q^2}}\right)=\frac{p^2}{q^2}=x^2.$$

Với $x\in R^+$ thì $x=\lim\limits_{n\to\infty} r_n$, $r_n\in Q^+$.

Do f là hàm liên tục nên:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} r_n^2=x^2.$$

Vậy $f(x)=x^2, \forall x\in R$.

Bài 169.

Đặt $c_i=f_i(1)$. Khi đó, với mọi số nguyên x, ta có

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(1+mx)=\prod_{i=1}^{n}[c_i+mf_i(x)]=a(1+mx)^n.$$

(*) Trước tiên, giả sử $a\neq 0$, trong trường hợp này, $c_i\neq 0$ với mọi i. Lúc đó, ta có đẳng thức của đa thức theo biến T là

$$\prod_{i=1}^{n}[c_i+f_i(x)T]=a(1+xT)^n,$$

vì vậy, do tính duy nhất trong việc phân tích một đa thức thành nhân tử, suy ra $c_i+f_i(x)T=b_i(1+xT)$ với số thực b_i nào đó. Cân bằng hệ số, ta được $b_i=c_i$ và $f_i(x)=b_ix=c_ix$ với mọi x.

(**) Bây giờ, giả sử a = 0, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại i để f_i là hàm đồng nhất 0. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng với mọi i, tồn tại a_i sao cho $f(a_i)\neq 0$. Đặt

$$x_m=a_1+ma_2+\ldots+m^{n-1}a_n$$

với mọi số nguyên m. Khi đó,

$$0=\prod_{i=1}^{n} f_i(x_m)=\prod_{i=1}^{n}[f_i(a_1)+f_i(a_2)m+\ldots+f_i(a_n)m^{n-1}].$$

Suy ra rằng với i nào đó, đa thức

$$f_i(a_1)+f_i(a_2)m+\ldots+f_i(a_n)m^{n-1}$$

đồng nhất 0, điều này mâu thuẫn, do $f_i(a_i)\neq 0$.

Vậy tồn tại i để f_i là hàm đồng nhất 0. Suy ra điều phải chứng minh với b = 0.

Bài 170.

Nếu đặt $x+y=k$ và $x^2+y^2=h$ thì $xy=\frac{1}{2}(k^2-h)$, do đó x, y là các nghiệm của đa thức $z^2-kz+\frac{1}{2}(k^2-h)=0$. Đa thức này có hai nghiệm thực khi và chỉ khi ba điều kiện sau được thoả:

(1) $k>0$, (2) $k^2\geq 2(k^2-h)\Leftrightarrow h\geq\frac{1}{2}k^2$,

Bài 173.

Rõ ràng $f(x) = 1$ thoả mãn bài ra.

Giả sử tồn tại $a > 0$ sao cho $f(a) \neq 1$. Khi đó, từ

$$[f(a)]^{f(xy)} = f(a^{xy}) = [f(a^x)]^{f(y)} = [f(a)]^{f(x)f(y)}$$

ta suy ra

$$f(xy) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in R^+. \qquad (1)$$

Từ đẳng thức :

$$[f(a)]^{f(x+y)} = f(a^{x+y}) = f(a^x)f(a^y)$$
$$= [f(a)]^{f(x)}[f(a)]^{f(y)} = [f(a)]^{f(x)+f(y)}$$

ta suy ra

$$f(x+y) = f(x)+f(y),\ \forall x, y \in R^+. \qquad (2)$$

Từ (1) ta có $f(1) = f(1.1) = [f(1)]^2 \Rightarrow f(1) = 1$.

Từ (1) và (2) suy ra:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}, \qquad (3)$$

với m, n là các số nguyên dương. Giả sử tồn tại $x > 0$ sao cho $f(x) \neq x$. Khi đó $f(x) < x$ hoặc $f(x) > x$.

Nếu $f(x) < x$ ta chọn $y = \dfrac{m}{n}$ sao cho $f(x) < y < x$.

Từ (2) và (3) ta nhận được:

$$f(x) = f(y+(x-y)) = f(y) + f(x-y) > f(y) = y.$$

Điều này trái với giả thiết $f(x) < y$.

Tương tự như thế khi xét trường hợp $f(x) > x$.

Vậy $f(x) = x,\ \forall x \in R^+$.

Bài 174.

Trước hết ta tìm các hàm số f và g bằng cách giả sử

rằng g nhận giá trị 0 tại một điểm nào đó, và rồi chứng minh rằng thực sự g có nhận giá trị này.

Gọi α là số sao cho $g(\alpha) = 0$. Đặt $y = \alpha$ trong phương trình đã cho; điều này cho ta $f(x) = xf(\alpha) - \alpha f(x) + g(x)$, nên :

$$g(x) = (\alpha + 1)f(x) - f(\alpha)x. \qquad (1)$$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành :

$$f(x + g(y)) = (\alpha + 1 - y)f(x) + (f(y) - f(\alpha))x. \qquad (2)$$

Bây giờ, đặt $y = \alpha + 1$ trong (2). Ta được $f(x + n) = mx$, trong đó $n = g(\alpha + 1)$, $m = f(\alpha + 1) - f(\alpha)$. Do đó $f(x)$ là một hàm số tuyến tính. Từ (1) ta suy ra $g(x)$ cũng là một hàm số tuyến tính.

Đặt $f(x) = tx + r$, $g(x) = px + q$. Thay các biểu thức này vào phương trình đã cho và so sánh với các hệ số của hai vế thì nhận được

$$t = p + r,\ tq + r = q,\ tp = -r.$$

Suy ra rằng $p \neq -1$, và ta có thể biểu thị t, r, q như sau

$$t = \frac{p}{p+1};\quad r = -\frac{p^2}{p+1};\quad q = -p^2.$$

Như thế ta được :

$$f(x) = \frac{p}{p+1}x - \frac{p^2}{p+1},\ g(x) = px - p^2;\quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Bây giờ, ta chứng minh rằng $g(\alpha) = 0$ với α nào đó.

Nếu $f(0) = 0$, thì bằng cách đặt $y = 0$ trong phương trình đã cho ta được $f(x + g(0)) = g(x)$ với mọi x, cho nên

$$g(-g(0)) = f(0) = 0,$$

như đòi hỏi. Từ đây ta giả sử rằng $f(0) = b \neq 0$. Chọn $x = 0$ và kí hiệu $g(0)$ là a, ta được

$$f(g(y)) = a - by. \qquad (3)$$

$$f(x^{k+1}) \equiv f(x^k x) \equiv x^k f(x) + x f(x^k) \equiv$$
$$x^k f(x) + x k x^{k-1} f(x) \equiv (k+1) x^k f(x).$$

Theo nguyên lí quy nạp toán học, đồng nhất thức trên đúng với mọi $k \in N$.

(2) Giả sử $k \in Q$, $k > 0$, nghĩa là $k = \frac{p}{q}$, ở đây $p, q \in N$.

Theo chứng minh ở phần (1), ta có hai đồng nhất thức:

$$f(x^p) \equiv p x^{p-1} f(x),$$
$$f((x^{p/q})^q) \equiv q (x^{p/q})^{q-1} f(x^{p/q}).$$

Cân bằng vế phải của các đồng nhất thức này ta được:

$$f(x^{\frac{p}{q}}) \equiv \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} f(x)$$

nghĩa là đồng nhất thức đúng với mọi số hữu tỉ $k > 0$.

(3) Giả sử $k \in R, k > 0$. Khi đó ta chọn dãy số hữu tỉ dương $k_1, k_2 \ldots$ để sao cho

$$\lim_{x \to \infty} k_n = k.$$

Vì hàm số $f(x)$ liên tục, nên đối với mọi giá trị $x > 1$ ta có:

$$f(x^k) = \lim_{n \to \infty} f(x^{k_n}) = \lim_{n \to \infty} k_n x^{kn-1} f(x) = k x^{k-1} f(x).$$

Từ đồng nhất thức được chứng minh, ta dễ dàng tìm được dạng tường minh của hàm số $f(x)$.

Thật vậy, đặt $t = \ln x$ nghĩa là $x = e^t$, ta nhận được:

$$f(x) = f(e^t) = t e^{t-1} f(e) = (\ln x).\frac{x}{e} f(e).$$

Mặt khác, với mọi $c \in R$ hàm số $f(x) = c x \ln x$ thoả mãn điều kiện bài toán.

Bài 178.

Cho $x = y = 0$ trong đồng nhất thức ban đầu ta nhận được $f(0) = 2f(0)$, nghĩa là $f(0) = 0$.

Với bất kì $x \in R$, từ đồng nhất thức :

$$f(x+y) - f(x) \equiv f(y) + 2xy \ (y \in R),$$

ta có $f'(x) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{f(y) + 2xy}{y}$

$$= 2x + \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = 2x + f'(0).$$

Bởi vậy hàm số cần tìm nhất thiết phải thoả mãn điều kiện :

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y) dy = x^2 + f'(0) x.$$

Để ý rằng, với bất kì giá trị $x \in R$, hàm số :

$$f(x) = x^2 + ax$$

thoả mãn đồng nhất thức trong bài toán.

Bài 179.

Ta có $f^2(y) = yf(1)$, và do $f(1) \neq 0$ nên f là song ánh. Từ đó, tồn tại y để $f(y) = 1$. Kết hợp điều này với (i) khi cho $x = 1$ ta được

$$f(1.1) = f(1) = yf(1),$$

và từ $f(1) > 0$, ta có $y = 1$, suy ra $f(1) = 1$. Cho $y = x$ trong (i) ta có $f(xf(x)) = xf(x)$ với mọi $x > 0$.

Suy ra $xf(x)$ là *điểm bất động* của f.

Bây giờ, nếu cả x và y là các điểm bất động của f thì cũng từ (i) ta được $f(xy) = yx$, do đó xy cũng là điểm bất động. Như vậy, tập các điểm bất động là *đóng* với phép nhân.

xảy ra. Vậy không thể tồn tại y_0 nào đó để $f(y_0) > \frac{2}{2-y_0}$.

Tóm lại, nếu có một hàm f thoả mãn các điều kiện của đề bài thì f(x) = 0 với mọi x ≥ 2 và với mọi x < 2 ta có: $f(x) = \frac{2}{2-x}$.

Đảo lại, một hàm f được xác định như trên sẽ thoả mãn các điều kiện ở đề bài. Thật vậy, dễ thấy f(2) = 0 và f(x) ≠ 0 với $0 \le x < 2$. Ta có

$$f(xf(y)) = f\left(\frac{2x}{2-y}\right).$$

Nếu $\frac{2x}{2-y} \ge 2$ thì f(xf(y)) = 0. Nhưng điều này cho ta x + y ≥ 2, do đó f(x + y) = 0 và từ đó suy ra

$$f(xf(y))f(y) = f(x+y)$$

như đề bài đòi hỏi. Nếu $\frac{2x}{2-y} < 2$ thì ta cũng có

$$f(xf(y))f(y) = \frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}}\frac{2}{2-y} = \frac{2}{2-x-y} = f(x+y).$$

Tóm lại, hàm duy nhất thoả mãn điều kiện bài toán là

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \ge 2 \\ \frac{2}{2-x} & \text{khi } 0 \le x < 2. \end{cases}$$

Bài 182.

Cho x = y = 1 thì f(f(1)) = f(1).

Cho y = f(1) thì f(x.f(f(1))) = f(1).f(x) hay

$$f(x.f(1)) = f(x).$$

Suy ra f(1) = 1.

Cho x = 1 thì f(f(y)) = y.

Nếu f(y) = 1 thì f(f(y)) = 1 hay y = 1.

Suy ra f(y) > 1 với mọi y > 1.

Cho x > y ≥ 1 thì

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}.y\right) = f\left(\frac{x}{y}.f(f(y))\right) = f(y).f\left(\frac{x}{y}\right) > f(y),$$

suy ra f đồng biến trên [1; +∞).

Ta sẽ chứng minh f(x) = x với mọi x thuộc [1; +∞). Thật vậy, giả sử có x_0 thuộc [1; +∞) sao cho $f(x_0)$ khác x_0. Khi đó, ta xét các trường hợp:

- Nếu $f(x_0) > x_0$ thì $f(f(x_0)) > f(x_0)$, suy ra $x_0 > f(x_0)$. Điều này vô lí.
- Nếu $f(x_0) < x_0$ thì $f(f(x_0)) < f(x_0)$, suy ra $x_0 < f(x_0)$. Điều này cũng vô lí.

Vậy f(x) = x với mọi x thuộc [1; +∞).

Thử lại, ta thấy với f(x) vừa tìm thoả đề bài.

Bài 183.

Trả lời : có 3 hàm số thoả mãn đề bài là :

(1) f(x) = 0 với mọi x;

(2) $f(x) = \frac{1}{2}$ với mọi x;

(3) $f(x) = x^2$.

Chứng minh :

Cho x = y = 0, u = v, ta có 4 f (0) f (u) = 2 f (0). Như thế, hoặc

$$f(u) = \frac{1}{2} \text{ với mọi u; hoặc } f(0) = 0.$$

+ Do điều kiện f liên tục trên R nên :

$$f(x)=\begin{cases} f_i(x) & \text{khi } x\in(-\infty,-1)\\ f_j(x) & \text{khi } x\in[-1,0]\\ f_k(x) & \text{khi } x\in(0,1)\\ f_l(x) & \text{khi } x\in[1,+\infty),\end{cases}$$

với: i, j, k, l được chọn tuỳ ý trong {1, 2, 3}.

+ Vậy có tất cả 3 × 3 × 3 × 3 = 81 hàm số thoả phương trình hàm và được xác định như trên.

Bài 185.

Trước hết, với mọi số thực $x \neq 0$ ta có

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=f\left(1+\frac{1}{x}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)+1=\frac{f(x)}{x^2}+1. \qquad (1)$$

Mặt khác, với mọi $x \neq 0$ và -1 thì :

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.f\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\left(f\left(-\frac{1}{x+1}\right)+1\right)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\left(1-f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\left(1+\frac{-f(x+1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\frac{-f(x)-1+(x+1)^2}{(x+1)^2}.$$

Vậy :

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{-f(x)-1+x^2+2x+1}{x^2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), với mọi x khác 0 và -1 ta có:

$$\frac{f(x)}{x^2}+1=\frac{-f(x)+x^2+2x}{x^2}.$$

Vậy với mọi x khác 0 và -1 ta có:

$$f(x)+x^2=-f(x)+x^2+2x.$$

Suy ra $f(x) = x$ với mọi x khác 0 và -1.

Khi $x = 0$, theo tính chất (I) ta có $f(0) = 0$.

Mặt khác, $f(-1) = -f(1) = -1$.

Vậy $f(x) = x$ với mọi x thực.

Đảo lại khi $f(x) = x$ với mọi $x \in R$ ta dễ dàng chứng minh 3 điều kiện của bài toán đều được thoả mãn.

Vậy hàm số phải tìm là $f(x) = x$ với mọi $x \in R$.

Bài 186.

Cố định $x \in \mathbf{R}^+$, xét dãy (u_n) xác định như sau :

$$u_0 = x\ ;\ u_1 = f(x)\ ;\ ....\ ;\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Theo giả thiết đã cho ta có: $u_{n+2} + u_{n+1} = 1999.2000.u_n$.

Xét phương trình đặc trưng: $y^2 + y = 1999.2000$, phương trình này có hai nghiệm :

$$y_1 = 1999 \text{ và } y_2 = -2000.$$

Suy ra:

$$u_n = C_1.1999^n + C_2.(-2000)^n.$$

Ta phân biệt hai khả năng :

- Nếu $C_2 < 0$ thì $u_n < 0$ với n là số chẵn đủ lớn vì

$$\lim_{k\to+\infty} u_{2k} = -\infty.$$

$$f(t^2+f^2(1)) = 1+t+f^2(t) = 1+t+t^4.$$

Từ đó ta được t = 0, hay $f(0)=0$.

Đến đây ta suy ra $f(f(x))=x$ và $f(x^2)=f^2(x)$. Gọi y là số thực bất kì, đặt $z=f(y)$, suy ra $y=f(z)$, và

$$f(x^2+y)=z+f^2(x)=f(y)+f^2(x).$$

Cho $x>0$ tuỳ ý, chọn z sao cho $x=z^2$, khi đó:

$$f(x+y)=f(z^2+y)=f(y)+f^2(z)=f(x)+f(y).$$

Đặt $y=-x$ ta nhận được $0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$. Suy ra $f(-x)=-f(x)$, điều này kéo theo, với mọi x, y :

$$f(x-y)=f(x)-f(y).$$

Bây giờ, lấy x bất kì, đặt $y=f(x)$.

Nếu $y>x$, đặt $z=y-x$ thì

$$f(z)=f(y-x)=f(y)-f(x)=x-y=-z.$$

Nếu $y<x$, đặt $z=x-y$ thì

$$f(z)=f(x-y)=f(x)-f(y)=y-x=-z.$$

Như vậy là, cả hai trường hợp trên cho ta : nếu $z>0$ thì $f(z)=-z<0$. Bây giờ ta chọn w sao cho $w^2=z$ thì

$$f(z)=f(w^2)=f^2(w)<0,$$

điều này mâu thuẫn. Vậy ta phải có $f(x)=x$.

Bài 190.

Đặt c = f(0) và gọi A = f(R). Nếu $a\in A$, đặt a = f(y) và x = a, ta có $f(a-a)=f(a)+a^2+f(a)-1$, suy ra :

$$f(a)=\frac{1+c}{2}-\frac{a^2}{2}. \qquad (*)$$

Tiếp đến, ta chứng minh $A-A=R$, ở đây, ta kí hiệu

$$A-A=\{x\mid x\in R, \exists a,b\in A : x=a-b\}.$$

Trước hết, ta để ý c khác 0, vì nếu thế thì đặt y = 0, ta có :

$$f(x-c)=f(c)+xc+f(x)-1, \qquad (**)$$

suy ra f(0) = f(c) = 1, mâu thuẫn ! Từ (**) ta cũng có :

$$f(x-c)-f(x)=xc+(f(c)-1),$$

mà x chạy tự do trên R nên $xc+(f(c)-1)$ cũng nhận giá trị bất kì trên R.

Như vậy, mọi x thuộc R, ta có thể tìm được a, b thuộc A sao cho $x=a-b$, suy ra :

$$f(x)=f(a-b)=f(b)+ab+f(a)-1.$$

Do đó, dùng (*) ta đi đến :

$$f(x)=c-\frac{b^2}{2}+ab-\frac{a^2}{2}=c-\frac{x^2}{2}, \forall x\in R.$$

Đặc biệt, điều này đúng cho mọi x thuộc A.

So sánh với (*) ta suy ra c = 1.

Do vậy, mọi x thuộc R ta có : $f(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$.

Sau cùng, dễ dàng kiểm tra được rằng hàm f xác định như trên thoả mãn các giả thiết của bài toán, do vậy, f là nghiệm duy nhất của bài toán.

Bài 191.

Điều kiện (ii) cho ta : phương trình điểm bất động

$$f(x)=x$$

có nhiều nhất là 3 nghiệm, một nghiệm (nếu có) nằm trong $(-1,0)$, một nghiệm bằng 0 và một nghiệm nằm trong $(0,\infty)$. Giả sử $u\in(-1,0)$ là một điểm bất động của f. Trong phương trình hàm (i), cho $x=y=u$, ta được

Bài 194.

Lấy $x = y > 0$. Lúc đó :

$$[f(x)]^2 \le 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) \ge \frac{[f(x)]^2}{2x^2}.$$

Đặt $f(x) = k$, lặp lại vài lần ta được:

$$f\left(\frac{x}{4}\right) \ge \frac{k^4}{2x^6},\ f\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{2k^8}{x^{14}},\ f\left(\frac{x}{16}\right) = \frac{128k^{16}}{x^{30}}.$$

Với n đủ lớn, $x/2^n$ thuộc [0, 1], điều này gợi ý rằng đây là dãy trong đoạn [0, 1] mà ảnh của dãy này qua f không bị chặn. Ta sẽ chứng minh rằng nếu $k > x^2$ thì

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) \ge 2^N x^2,$$

với $N = 2^n - 2n - 1$. Dễ thấy điều này đúng khi $n = 1, 2, 3, 4$.

Giả sử khẳng định đó đúng với n. Khi đó:

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \ge \frac{2^{2n-1}}{x^2}\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^2 \ge 2^{N'} x^2,$$

trong đó :

$N' = 2N + 2n - 1 = 2^{n+1} - 4n - 2 + 2n - 1 = 2^{n+1} - 2(n+1) - 1$,

ta có điều phải chứng minh.

Bài 195.

(a) Xét tính chất đã cho của g :

$$g[ty + (1-t)z] \le tg(y) + (1-t)g(z) \dots . \qquad (*)$$

Thay $y = n+1$ và $z = n$ vào (*). Khi đó ta có:

$$g(n+t) \le tg(n+1) + (1-t)g(n)$$

$$\Leftrightarrow g(n+t) - g(n) \le t[g(n+1) - g(n)].$$

Thay $y = n-1$, $z = n+t$ và thay t bởi $\frac{t}{1+t}$ ở (*), để ý rằng

$$0 \le \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} \le 1,$$

ta có

$$g(n) = g\left(\frac{t}{1+t}(n+1) + \frac{1}{1+t}(n+t)\right)$$

$$\le \left(\frac{t}{1+t}\right)g(n-1) + \left(\frac{1}{1+t}\right)g(n+t)$$

$$\Leftrightarrow g(n+t) - g(n) \le t[g(n+1) - g(n)].$$

(b) Từ bất đẳng thức ở câu (a) ta được:

$$t\left[\ln f(n) - \ln f(n-1)\right] \le \ln f(n+t) - \ln f(n)$$

$$\le t\left[\ln f(n+1) - \ln f(n)\right],$$

suy ra

$$(n-1)^t = \left[\frac{f(n)}{f(n-1)}\right]^t \le \frac{f(n+t)}{f(n)} \le \left[\frac{f(n+1)}{f(n)}\right]^t = n^t \ \dots . \ (**)$$

Để ý $f(2) = f(1+1) = 1f(1) = 1$, thay $n = 2$ và $t = \frac{1}{2}$ vào (**) ta có $1 \le f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) \le \sqrt{2}$.

Nhân các vế cho $\frac{4}{3}$ ta được $\frac{4}{3} \le f\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

Bài 196.

Với $f : X \to X$, $f^2 = f \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x)$ với mọi $x \in X$, do đó

$$f^2 = f \Leftrightarrow f(y) = y \text{ với mọi } y \in E_f,$$

ở đây, E_f dùng để chỉ miền giá trị của f.

Số tất cả tập con Y của X sao cho $|Y| = k$ bằng C_n^k, trong đó $|Y|$ là kí hiệu số các phần tử của Y.

Bây giờ, để giải bài toán, giả sử ngược lại rằng các điểm thuộc Ω không cùng nằm trên một đường tròn. Lúc đó, theo trên, tồn tại một đường tròn qua X và chỉ chứa hai điểm A, B của Ω.

Đặt $f(A) = i$, từ giả thiết suy ra $f(B) = p - i$. Gọi a là số tất cả các đường tròn đi qua X, A và qua ít nhất một điểm khác của Ω (kí hiệu các đường tròn đó là $(k_1), (k_2), ..., (k_a)$) ; gọi b là số tất cả các đường tròn đi qua X, B và qua ít nhất một điểm khác của Ω. Gọi S là tổng của các $f(P)$ khi P chạy khắp tập Ω. Từ giả thiết, ta được :

$$\sum_{t=1}^{a}\left(\sum_{P\in\Omega\cap(k_t)} f(P)\right) \equiv 0 \pmod p.$$

Suy ra $S + (a-1)i \equiv 0 \pmod p$. Tương tự:

$$S + (b-1)(p-i) \equiv 0 \pmod p.$$

Vì vậy, $a + b - 2 \equiv 0 \pmod p$.

Ngoài ra, $a + b \le 2n - 4 < p$, nên ta có $a + b = 2$, do đó $a = b = 1$, điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng các điểm thuộc Ω không cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 199.

Với bất kì hai điểm A, B, gọi k là số các đường tròn phân biệt đi qua A, B và qua một điểm khác của M. Khi đó $k \ge 2$. Lấy tổng của (*) cho tất cả các đường tròn này ta được

$$0 = \sum_{P\in M} f(P) + (k-1)(f(A)+f(B)).$$

Từ đó, nếu $\sum_{P\in M} f(P) \neq 0$, nó phải trái dấu với $(f(A)+f(B))$ với bất kì hai điểm A, B. Tuy nhiên, tổng của những $(f(A)+f(B))$ khi A, B chạy khắp M là bằng

$$(n-1)\sum_{P\in M} f(P),$$

nên ta có điều mâu thuẫn.

Vậy $\sum_{P\in M} f(P) = 0$, suy ra $f(A) = -f(B)$ với mọi A, B $\in$ M. Mặt khác, $n \ge 3$ nên ta phải có $f(P) = 0$ với mọi $P \in M$.

Bài 200.

Ta cho số $n \ge 2$ thay đổi và tìm số các hàm thoả mãn đề bài phụ thuộc theo n. Giả sử hàm

$$f:\{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

thoả mãn đề bài, khi đó, $f(n) \neq 3$, vì nếu $f(n) = 3$ thì $f(n-1) \le 0$ hoặc $f(n-1) \ge 6$, điều này mâu thuẫn. Bây giờ, ta kí hiệu a_n, b_n, d_n, e_n lần lượt là số tất cả các hàm

$$f:\{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

thoả mãn đề bài và f(n) nhận tương ứng một trong các giá trị 1, 2, 4, 5. Ta cần tìm $a_n + b_n + d_n + e_n$ khi $n \ge 2$.

Ta có $a_2 = e_2$, $b_2 = d_2$, bằng quy nạp, suy ra $a_n = e_n$ và $b_n = d_n$ với mọi $n \ge 2$. Từ đó, với các số n như thế, ta có

$$a_{n+2} = e_{n+1} + d_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + e_n = a_{n+1} + a_n.$$

Như thế, dãy $\{a_n\}_{n\ge2}$ thoả mãn công thức đệ quy của dãy Fibonacci $\{F_n\}_{n\ge0}$, mà ở đó, các chỉ số của dãy Fibonacci được chọn sao cho $F_1 = 0$ và $F_1 = 1$. Vì

$$a_2 = 2 = F_2,\ a_3 = e_2 + d_2 = 3 = F_3$$

nên $a_n = F_n$ với mọi n. Vì vậy,

$$a_n + b_n + d_n + e_n = 2(a_n + b_n) = 2e_{n+1} = 2a_{n+1} = 2F_{n+1}$$

với mọi $n \ge 2$, suy ra rằng số cần tìm là $2F_{n+1}$.