Năm 1801 nhà toán học kiệt xuất F. Gauss cho ra đời cuốn "Nghiên cứu toán học", trong đó có cách giải các phương trình bất định bậc 1 cả về lí luận và cách tính toán, do vậy người châu Âu gọi đó là "định lí Gauss".

Năm 1876 Madesan người Đức đã chỉ ra rằng, "định lí Gauss" như cách giải của người Trung Hoa trong "bài toán Hàn Tín điểm quân" nên các học giả châu Âu gọi định lí này là "định lí dư Trung Hoa", còn trong sách toán Trung Quốc ngày nay lại gọi là "định lí Tôn Tử".

Phương trình bất định bậc 1 hai ẩn

$$xy = ax + by + c \tag{4-12}$$

đã được người Hindu giải và sau đó L. Euler cũng lại tìm ra cách giải.

5. CÓ MẤY CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

Lịch sử phương trình bậc 2 bắt nguồn từ nền văn minh Babilon cổ đại (khoảng 1800 năm trước Công nguyên). Lúc đó họ đã biết cách giải tất cả các phương trình bậc 2 nhưng không diễn đạt trong tập hợp số thực.

Vào khoảng năm 1500 trước Công nguyên, trong một tác phẩm của người Ai Cập về các bài toán cụ thể đã có những ví dụ về giải phương trình bậc 2.

Trường phái Pythagores (thế kỉ VI trước Công nguyên) đã giải phương trình bậc 2 bằng hình học và về sau người ta gọi là phương pháp Pythagores.

Ở thế kỉ III trước Công nguyên, người Hi Lạp cổ đại đã biến việc giải phương trình bậc 2 thành cơ sở cho toàn bộ hình học của họ và để có thể làm việc trong tập hợp số thực, họ đã thay thế các tính toán của người Babilon bằng các phép dựng hình bằng thước thẳng và compa. Tuy vậy họ chỉ tính toán tập hợp số hữu tỉ dương, cho nên có nhiều phương trình bậc 2 họ không giải được. Phải chờ đến thế kỉ XVI, khi xuất hiện số phức thì mới giải được tất cả các phương trình bậc 2.

Ở Trung Hoa cổ đại, cách giải phương trình bậc 2 cũng được trình bày trong bộ sách "Sách toán chín chương", trong cuốn "Trương Khâu Kiện toán kinh" và trong cuốn "Sổ thư cửu chương".

Người Hindu thừa nhận một phương trình bậc 2 có lời giải thực thì có hai nghiệm hình thức. Họ thống nhất phép giải đại số các phương trình bậc 2 bằng phương pháp bổ sung bình phương quen thuộc, do vậy ngày nay phương pháp này thường được gọi là phương pháp Hindu.

Như vậy ở thời Cổ Đại người Babilon, người Ai Cập, người Hi Lạp, người Trung Hoa, ... đã biết cách giải phương trình bậc 2 nhưng công thức nghiệm thì mãi đến năm 825 nhà toán học Al- Khowarizmi mới lập được. Ông đã giải phương trình bậc 2 bằng đại số và hình học. Ông viết :

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (5-1)$$

thành

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \qquad (5-2)$$

Từ (5–2) ông đã tìm được nghiệm

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - p}. \qquad (5-3)$$

Về sau ông lại giải theo cách khác. Ông đặt

$$z = \left(x + \frac{p}{2}\right). \qquad (5-4)$$

Thay (5–4) vào (5–1) được :

$$z^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = 0 \qquad (5-5)$$

Việc giải (5–5) trở thành đơn giản.

Trong chương trình đại số lớp 9 đã có công thức tính nghiệm của phương trình bậc 2 dạng chính tắc (đầy đủ hay hoàn chỉnh) :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (5-6)$$

bằng cách đặt $\Delta = b^2 - 4ac.$ (5-7)

Nếu $\Delta < 0$ thì (5-6) vô nghiệm .

Nếu $\Delta = 0$ thì (5-6) có nghiệm kép :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}. \qquad (5-8)$$

Nếu $\Delta > 0$ thì (5-6) có hai nghiệm phân biệt :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} ; \\ x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} . \end{aligned}\right\} \qquad (5-9)$$

Francois Viète (1540 - 13.12.1603) người Pháp đã đưa ra hệ thức của hai nghiệm này :

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} = -p ; \\ x_1x_2 &= \frac{c}{a} = q . \end{aligned}\right\} \qquad (5-10)$$

F. Viète

Hệ thức (5-10) về sau được mang tên ông (hệ thức Viète) và được đưa vào chương trình đại số lớp 9.

Ngoài ra còn các cách giải phương trình bậc 2 bằng hình học sau đây :

- Cách của Sir John Leslie (1766 - 1832) người Anh trong cuốn "Các cơ sở của hình học".

- Cách của Thomas Carlyde (1795 - 1881) người Anh, học trò của S.J. Leslie.

– Cách của Karl George Christian von Staudt (1798 – 1867) người Đức.

. . . . . .

Phương trình vô định bậc 2 hai ẩn

$$y^2 = ax^2 + 1, \quad (5-11)$$

trong đó a là số nguyên dương không chính phương, đã được Brahmagupta và Bhàskara (1114 – 1185) người Ấn Độ giải. Người ta thường gọi (5–11) là phương trình Pell (J.Pell). Lí thuyết đầy đủ về phương trình (5–11) được Joseph – Louis Lagrange (25.1.1736 – 10.4.1813) người Pháp hoàn tất vào 1766 – 1769.

J–L.Lagrange

6. CUỘC THÁCH ĐỐ CHẤN ĐỘNG GIỚI TOÁN HỌC

Như chúng ta đã biết, việc tìm lời giải cho phương trình bậc 3 là khá phức tạp và công thức của nghiệm là khá cồng kềnh.

Trong một bản Babilon(*) tìm thấy có các giá trị của $n^3 + n^2$ với $n = 1$ đến $n = 30$ và như vậy chúng ta cũng tìm được nghiệm của 30 phương trình bậc 3 đặc biệt. Nhà toán học O.Neugebauer (sinh 1899) tin rằng người Babilon hoàn toàn có thể quy một phương trình bậc 3 tổng quát về dạng "chuẩn" $x^3 + x^2 = c$.

Ở Trung Hoa, bộ sách "Chức cổ toán kinh" của Vương Hiếu Chương viết vào đầu đời Đường (thế kỉ VII) có nêu cách giải

(*) Xem mục 12.