

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. a) Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là chân đường cao hạ từ A . Biết rằng $AB = 7cm, AC = 9cm$. Tính BH, CH, AH .
b) Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Biết $BH = 4cm, CH = 9cm$. Tính AH, AB, AC .
2. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Biết $BC = a, AH = h$. Tính độ dài cạnh bên theo a, h .
3. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , kẻ HM vuông góc với AB tại M . Chứng minh rằng $BM = \frac{AB^3}{BC^2}$.
4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết tỉ số hai cạnh góc vuông là $\frac{4}{5}$, độ dài cạnh góc vuông nhỏ bằng $6cm$. Tính độ dài cạnh huyền, độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông lên cạnh huyền.
5. Tam giác ABC có $AB = 48cm, AC = 14cm, BC = 50cm$. Tính độ dài đường phân giác của góc C .
6. Tam giác ABC có cạnh $AB = 26cm, AC = 25cm$, đường cao $AH = 24cm$. Tính độ dài cạnh BC .
7. Hình thang $ABCD$ có $AB = 15cm, CD = 20cm$. Cạnh bên $AD = 12cm$ và vuông góc với hai đáy. Tính độ dài cạnh BC .
8. Tam giác ABC cân tại A có cạnh bên bằng $15cm$, cạnh đáy bằng $18cm$. Tính độ dài các đường cao.

9. Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = c, CB = b$. Cho biết diện tích tam giác là $S = \frac{2}{5}bc$. Tính cạnh BC theo b, c .
10. Tính diện tích của hình thang có độ dài các đáy là $a, b (a > b)$ các góc kề với đáy lớn lần lượt là 30° và 45° .
11. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Kẻ đường cao CH . Chứng minh rằng $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AH$.
12. Cho tam giác ABC nhọn có AH là đường cao. D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC . Chứng minh rằng:
 - a) $AD \cdot AB = AE \cdot AC$
 - b) $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$
13. Cho tam giác nhọn ABC với BD, CE là hai đường cao. Các điểm N, M trên các đường thẳng BD, CE sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng tam giác AMN cân.
14. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. Tia Ax tạo với AB một góc \widehat{BAx} một góc bằng 15° và cắt cạnh BC tại M , cắt đường thẳng CD tại N .
 Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{3AB^2}$
15. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , đường trung tuyến BM . Gọi D là hình chiếu của C trên BM , H là hình chiếu của D trên AC . Chứng minh rằng $AH = 3HD$.
16. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh AB, BC, CA là ba số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH , đường trung tuyến AM . Chứng minh rằng $HM = 2$.

17. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông nếu các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD.CE = 2BI.CI$
18. Chứng minh rằng trong một tam giác:
 - a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia trừ đi hai lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.
 - b) Bình phương của cạnh đối diện với góc tù bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia cộng với hai lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.
19. Qua điểm D trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC ta kẻ các đường vuông góc DH và DK lần lượt xuống các cạnh AB và AC . Chứng minh hệ thức: $DB.DC = HA.HC + KA.KC$
20. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Kẻ HE, HF vuông góc với AB, AC . Chứng minh rằng:
 - a) $\frac{EB}{FC} = \frac{AB^3}{AC^3}$
 - b) $BC.BE.CF = AH^3$
21. Tam giác ABC vuông tại A có đường trung tuyến CM . Ta kẻ đường cao MH của tam giác MBC và đặt trên tia AB đoạn $AD = BH$. Chứng minh rằng tam giác CDM cân.
22. Tam giác ABC cân tại A , gọi I là giao điểm của các đường phân giác. Biết rằng $IA = 2\sqrt{5}cm, IB = 3cm$. Tính độ dài AB .

23. Tam giác ABC có $BC = 40cm$, đường phân giác AD dài $45cm$, đường cao AH dài $36cm$. Tính các độ dài BD, DC .
24. Không dùng bảng số và máy tính, tính : $\sin 15^\circ$.
25. Chứng minh các công thức sau:
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
 - $1 + \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha$
26. Tam giác ABC có $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ và độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp. Tính độ dài các cạnh của tam giác.
27. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:
- $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \widehat{BAC}$ nếu $\widehat{BAC} \leq 90^\circ$.
 - $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin(180^\circ - \widehat{BAC})$ nếu $\widehat{BAC} > 90^\circ$.
28. Với mọi góc nhọn α , chứng minh:
- $tg\alpha = \frac{1}{cot\alpha}$
 - $\frac{tg\alpha}{cot\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$
 - $\sin^2 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$
29. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3\sqrt{3}cm$, $AC = 2\sqrt{5}$. Tính BC , tính các góc B, C .
30. Tứ giác $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau ở O và không vuông góc với nhau. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác AOB và COD . Gọi G, I lần lượt là trọng tâm của các tam giác BOC, AOD .
- Gọi E là trọng tâm của tam giác AOB , F là giao điểm của AH và DK . Chứng minh rằng các tam giác

IEG và HFK đồng dạng.

b) Chứng minh rằng $IG \perp HK$

31. Cho tam giác có ba góc nhọn. Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$

32. Cho tam giác ABC nhọn, có $BC = a, AC = b, AB = c$.
Chứng minh rằng: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$

33. Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng: $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

Từ đó suy ra: $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

34. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BM và CN vuông góc nhau. Chứng minh rằng $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$

35. Cho góc nhọn α . Tìm giá trị lớn nhất của: $\frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha}$.

ĐỊNH NGHĨA VÀ SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Tính bán kính đường tròn đi qua 3 đỉnh của tam giác cân có cạnh đáy bằng đường cao tương ứng h .
2. Hình chữ nhật $ABCD$ có các đỉnh thuộc đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng tổng bình phương các khoảng cách từ một điểm $M \in (O)$ đến các đường thẳng chứa cạnh của hình chữ nhật không phụ thuộc vào vị trí của M và tính tổng đó theo R .
3. Cho hình thang cân $ABCD$ (đáy nhỏ AB), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng:
 - a) Độ dài đường cao và độ dài đường trung bình của hình thang là bằng nhau.
 - b) M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.
4. Cho đường tròn (O) có đường kính AC cố định. BD là dây cung vuông góc với AC .
 - a) Viết công thức tính diện tích tứ giác $ABCD$ theo hai đường chéo AC, BD .
 - b) Tìm vị trí của dây BD lúc $ABCD$ có diện tích lớn nhất, chứng tỏ lúc ấy $ABCD$ là hình vuông.
5. Cho đường tròn (O) có đường kính $BC = 5cm$ và dây cung $BA = 3cm$.
 - a) Chứng tỏ $\triangle ABC$ vuông tại A , tính độ dài AC và đường cao AH của $\triangle ABC$.
 - b) Gọi D là đỉnh của $\triangle BCD$ có $CD = 3cm, BD = 4cm$. Chứng tỏ D nằm trên đường tròn (O) .

6. Cho tam giác ABC vuông tại A .
 - a) Xác định tâm O của đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C .
 - b) Vẽ đường cao AH và đường kính AD . Chứng tỏ hai tam giác CAH, DAB đồng dạng, suy ra $AB.AC = AH.AD$.
7. Cho tam giác ABC ($\hat{A} \neq 90^\circ$), đường tròn có đường kính BC cắt hai đường thẳng AB, AC lần lượt tại D, E . Hai đường thẳng CD, BE cắt nhau tại H . Chứng tỏ H là trực tâm của $\triangle ABC$ và suy ra AH vuông góc với BC .
8. Cho đường tròn (O) có đường kính BC cố định và điểm $A \in (O)$. Trên tia đối của tia AB lấy đoạn $AD = AC$, trên tia đối của tia AC lấy đoạn $AE = AB$.
 - a) Chứng tỏ $\triangle ABC$ và $\triangle AED$ bằng nhau.
 - b) Đường thẳng qua đường cao AH của $\triangle ABC$ cắt DE tại M . Chứng tỏ M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE .
 - c) Chứng minh $AO \perp DE$
9. Cho hai điểm A và B cố định. Một đường thẳng d đi qua A . Gọi P là điểm đối xứng của B qua d .
 - a) Tìm quỹ tích các điểm P khi d quay xung quanh điểm A .
 - b) Xác định vị trí của d để BP có độ dài lớn nhất. Xác định vị trí của d để BP có độ dài bé nhất.
10. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$); $BC = CD = \frac{1}{2}AD = a$.
 - a) Chứng minh A, B, C, D nằm trên một đường tròn. Hãy xác định tâm O và bán kính của đường tròn này.
 - b) Chứng minh $AC \perp OB$.

11. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác; N, P, Q lần lượt là trung điểm của AH, AB, AC . Chứng minh $ONPQ$ là hình bình hành.
12. Cho tam giác ABC , các góc đều nhọn. Vẽ đường tròn tâm S đường kính AB , vẽ đường tròn tâm O đường kính AC . Đường thẳng OS cắt đường tròn (S) tại D, E , cắt đường tròn (O) tại H, K (các điểm xếp theo thứ tự D, H, E, K)
 - a) Chứng minh BD, BE là những đường phân giác của góc \widehat{ABC} , CK, CH là những đường phân giác của góc \widehat{ACB} .
 - b) Chứng minh rằng $BDAE, AHCK$ là những hình chữ nhật.
13. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ bán kính OC vuông góc với AB tại O . Lấy điểm M trên cung AC . Hạ $MH \perp OA$. Trên bán kính OM lấy điểm P sao cho $OP = MH$.
 - a) Khi M chạy trên cung AC thì điểm P chạy trên đường nào?
 - b) Tìm những điểm P chạy trên bán kính PM sao cho OP bằng khoảng cách từ M đến AB khi M chạy khắp (O)
14. Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định. Lấy điểm C tùy ý trên đường tròn. Trên tia AC , lấy điểm M sao cho $AM = BC$. Điểm M chạy trên đường nào khi C chạy trên đường tròn (O) .

TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG

1. Trong đường tròn $(O; R)$ cho dây cung AB di động nhưng có độ dài không đổi $AB = l$. Gọi I là trung điểm của AB .
 - a) Chứng minh $OI \perp AB$
 - b) Tính độ dài OI theo R, l và suy ra I di động trên một đường tròn cố định
2. Cho tam giác ABC cân nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$ có độ dài cạnh $AB = AC = R$.
 - a) Chứng minh rằng tia AO là phân giác của góc \widehat{BAC}
 - b) Chứng tỏ $BC > AB$, suy ra thứ tự khoảng cách từ tâm O đến các cạnh của tam giác ABC .
 - c) Tính theo R độ dài cạnh BC , chiều cao hạ từ A và diện tích của $\triangle ABC$
3. Trong đường tròn $(O; R)$ cho dây cung di động AB có độ dài không đổi $l = R\sqrt{3}$. Chứng minh rằng các trung điểm I của AB thuộc một đường tròn cố định tâm O bán kính $r = \frac{R}{2}$.
4. Cho đường tròn (O) có đường kính BC vuông góc với dây cung AD tại H .
 - a) Chứng minh hai tam giác BAD, CAD cân và tứ giác $BACD$ có các góc đối diện bù nhau.
 - b) Chứng tỏ $HB \cdot HC = HA^2 = HD^2$.
5. Trong đường tròn $(O; R)$ có hai bán kính OA, OB vuông góc nhau, M là trung điểm của AB .
 - a) Chứng minh $OM \perp AB$.
 - b) Tính độ dài AB, OM theo R .

- c) Cho A, B di động nhưng vẫn có $OA \perp OB$. Chứng minh các điểm M thuộc về một đường tròn cố định.
6. Trên đường tròn $(O; R)$ có ba điểm A, B, C sao cho tam giác ABC cân tại A .
- Cho trước A hãy vẽ B, C .
 - Chứng tỏ AO là tia phân giác của góc BAC và đường thẳng AO là trung trực của BC .
 - Cho biết $R = 5\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$ và gọi A' là điểm đối xứng của A qua O . Tính độ dài các đoạn thẳng BA', BC .
7. Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh a , chiều cao AH .
- Hãy vẽ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
 - Chứng tỏ $\triangle OHB$ là nửa tam giác đều. Tính OH, h, a theo bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
 - Dựa vào vị trí của H trên đường kính AD mà suy ra một các vẽ tam giác đều có 3 đỉnh nằm trên một đường tròn cho trước.
8. Gọi I là trung điểm của dây cung không qua tâm AB của đường tròn $(O; R)$
- Chứng minh $OI \perp AB$
 - Qua I vẽ dây cung EF , chứng tỏ $EF \geq AB$. Tìm độ dài lớn nhất và nhỏ nhất của các dây cung quay quanh I
 - Cho $R = 5\text{cm}$, $OI = 4\text{cm}$, tính độ dài dây cung ngắn nhất qua I .
9. Cho điểm A cố định trong đường tròn $(O; R)$ và MN là dây cung quay quanh A .
- Chứng minh rằng trung điểm I của các dây cung MN

- thuộc về đường tròn cố định có đường kính OA
- b) Tia OI cắt đường tròn tại C . Chứng tỏ tứ giác $OACB$ là hình thoi, tính diện tích của $OACB$ theo R .
10. Trong một đường tròn tâm O , cho hai dây AB và CD song song với nhau. Biết $AB = 30cm, CD = 40cm$; khoảng cách giữa AB và CD là $35cm$. Tính bán kính của đường tròn.
 11. Cho đường tròn tâm A bán kính AB . Dây EF kéo dài cắt đường thẳng AB tại C (E nằm giữa F và C). Hạ $AD \perp CF$. Cho $AB = 10cm; AD = 8cm; CF = 21cm$. Tính CE và CA .
 12. Cho tam giác vuông cân ABC ($AB = AC$) đường cao AH . Trên đoạn thẳng HC lấy điểm K rồi dựng hình chữ nhật $AHKO$. Lấy O làm tâm, vẽ đường tròn bán kính OK , đường tròn này cắt cạnh AB tại D , cắt cạnh AC tại E . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với đường thẳng AB . Chứng minh:
 - a) Tam giác AEF cân
 - b) $OD \perp OE$
 - c) D, A, E, O cùng nằm trên một đường tròn.
 13. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Dựng ra phía ngoài tam giác các hình chữ nhật $ACDE$ và $BCFG$ có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng OC đi qua trung điểm N của DF .
 14. Cho đường tròn (O) cố định và dây cung AB không qua tâm cố định của (O). C là điểm di động trên cung AB . M là trung điểm BC . Từ M vẽ đường thẳng vuông góc với AC tại H . a) Chứng minh rằng MH luôn đi qua một

điểm cố định. b) Tìm đường di chuyển của M khi C di chuyển trên cung nhỏ AB .

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn $(O; R)$ gặp nhau tại C . Đường vuông góc với OA kẻ từ O gặp BC tại D ; đường vuông góc với AC kẻ từ C gặp OB tại E .
 - a) Chứng minh rằng các tam giác DOC và EOC là các tam giác cân.
 - b) Suy ra DE là đường trung trực của đoạn OC .
 - c) Tính khoảng cách OC theo R để tam giác EOC đều. Lúc đó chứng tỏ D là trọng tâm của tam giác EOC .
2. Cho đường tròn (O) có đường kính AB và hai tiếp tuyến (a) , (b) tại A và B . Một tiếp tuyến khác tại M cắt (a) , (b) lần lượt tại C và D .
 - a) Chứng minh rằng: $CD = AC + BD$
 - b) Chứng tỏ tam giác COD vuông và đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB .
 - c) Với vị trí nào của điểm M thì tổng $AC + BD$ nhỏ nhất.
 - d) Chứng minh hệ thức: $AB^2 = 4.AC.BD$
3. Qua điểm P ở bên trong đường tròn (O) ta kẻ hai dây AB và CD vuông góc và bằng nhau. Mỗi dây bị điểm P chia thành hai đoạn thẳng dài $3cm$ và $21cm$. Tính khoảng cách từ O đến mỗi dây và bán kính đường tròn.
4. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai tiếp tuyến MA, MB của đường tròn. Kẻ AD (D nằm giữa O và M) sao cho $\widehat{MAD} = 45^\circ$.
 - a) Chứng minh $DO.BM = AO.DM$

- b) Chứng minh BD là đường phân giác của \widehat{OBM}
- c) Từ M kẻ đường thẳng song song với OB , đường thẳng này cắt OA tại N . Chứng minh $NO = NM$.
5. Cho đường tròn $(O; R)$, hai tiếp tuyến MA, MB của đường tròn, AB cắt OM tại H .
- a) Chứng minh $AM.BM = MH.MO$
- b) Đường thẳng OA cắt MB tại N . Chứng minh $\frac{OA}{ON} = \frac{MB}{MN}$
- c) Từ O kẻ OK song song với AM (K Thuộc MB). Chứng minh $OK = MK$.
6. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn và tia Oz vuông góc với AB (các tia Ax, By, Cz cùng phía với nửa đường tròn đối với AB). Gọi E là điểm bất kì của nửa đường tròn. Qua E vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt tia Ax, By, Oz theo thứ tự tại C, D, M . Chứng minh rằng khi điểm E thay đổi vị trí trên nửa đường tròn thì:
- a) Tích $AC.BD$ không đổi.
- b) Tứ giác $ACDB$ có diện tích nhỏ nhất khi nó là hình chữ nhật. Tính diện tích nhỏ nhất đó.
7. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm I của AD .
- a) Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I; IA)$.
- b) Cho $AD = 2a$. Tính tích của AB và CD theo a .
- c) Gọi H là tiếp điểm của BC với đường tròn (I) nói trên. K là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng KH song song với DC .

8. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH, BH = 20cm, HC = 45cm$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH . Kẻ tiếp tuyến BM, CN với đường tròn (M và N là các tiếp điểm, khác điểm H).
 - a) Tính diện tích tứ giác $BMNC$.
 - b) Gọi K là giao điểm của CN và HA . Tính các độ dài AK, KN .
 - c) Gọi I là giao điểm của AM và CB . Tính các độ dài IM, IB
9. Trên một đường thẳng d cho hai điểm A, B . Các tia Ax, By nằm trong nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d và cùng vuông góc với d . Trên Ax lấy một điểm C và trên By lấy một điểm D thỏa mãn hệ thức: $AB^2 = 4.AC.BD$. Vẽ các đường tròn tâm C và D theo thứ tự tiếp xúc với d tại các điểm A và B . Chứng minh rằng hai đường tròn này tiếp xúc với nhau.
10. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB . Trên tiếp tuyến Ax của (O) ta lấy điểm C và trên tiếp tuyến By của (O) ta lấy điểm D sao cho $AC + BD = CD$. Chứng minh rằng CD tiếp xúc (O) .
11. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp $(I; r)$ tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đặt $BC = a, CA = b, AB = c, p$ là nửa chu vi tam giác. Chứng minh rằng:
 - a) Diện tích của tam giác ABC là $S = pr$
 - b) $AE = AF = p - a; BD = BF = p - b; CD = CE = p - c$
12. Cho đường tròn (O) có đường kính AB . Tiếp tuyến tại điểm M thuộc (O) cắt hai tiếp tuyến tại A và B của

- (O) lần lượt tại B và C . Vẽ đường tròn (I) có đường kính CD . Chứng minh rằng AB tiếp xúc với (I) tại O .
13. Trên tiếp tuyến tại A thuộc ($O; R$) lấy đoạn $IA = R\sqrt{3}$
- Tính độ dài OI theo R và số đo các góc của tam giác AOI
 - Kéo dài đường cao AH của tam giác AOI cắt (O) tại B , chứng tỏ $IA = IB$ và IB cũng là tiếp tuyến của (O)
 - Chứng tỏ tam giác AIB đều.
14. Cho góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Một đường tròn tâm I bán kính $R = 5\text{cm}$ tiếp xúc với Ox tại A , tiếp xúc với Oy tại B . Từ điểm M thuộc cung nhỏ AB vẽ tiếp tuyến thứ ba, nó cắt Ox tại E , Oy tại F .
- Tính chu vi tam giác OEF , chứng minh rằng chu vi đó không đổi khi M thay đổi trên cung nhỏ AB .
 - Chứng minh rằng \widehat{EOF} có số đo không đổi khi M chạy trên cung nhỏ AB .
15. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Đường tròn tâm I , đường kính BH cắt AB tại E , đường tròn tâm J đường kính CH cắt AC tại F . Chứng minh rằng:
- AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (J) tại H
 - EF là tiếp tuyến của (I) tại E , tiếp tuyến của (J) tại F .
16. Cho tam giác ABC cân tại A . Đường cao AH và BK cắt nhau tại I . Chứng minh:
- Đường tròn đường kính AI đi qua K .
 - KH là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI .
17. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy điểm

D trên bán kính OB . Gọi H là trung điểm của AD . Đường vuông góc tại H với AB cắt nửa đường tròn tại C . Đường tròn tâm I đường kính BD cắt tiếp tuyến CB tại E .

- Tứ giác $AECD$ là hình gì?
- Chứng minh tam giác HCE cân tại H .
- Chứng minh HE là tiếp tuyến của đường tròn tâm I .

18. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Từ A và B vẽ hai tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Lấy M là một điểm tùy ý trên nửa đường tròn, vẽ tiếp tuyến qua M , nó cắt Ax tại C , cắt By tại D . Gọi A' là giao điểm BM với Ax , B' là giao điểm AM với By . Chứng minh:

- $\triangle A'AB$ và $\triangle ABB'$ đồng dạng, suy ra $AA'.BB' = AB^2$.
- $CA = CA', DB = DB'$
- Ba đường thẳng $B'A', DC, AB$ đồng qui.

19. Ba đường tròn nằm trong tam giác ABC có cùng bán kính a , cùng đi qua một điểm sao cho cứ hai đường tròn lấy theo đôi một thì cùng tiếp xúc với một cạnh của tam giác ABC . Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ theo R và a .

20. Cho đường tròn bán kính r nội tiếp $\triangle ABC$, tiếp xúc với cạnh BC tại D , với AC tại E , với AB tại F . Vẽ đường kính DD' . Cho $\widehat{BD'C} = 90^\circ, BC = a, CA = b, AB = c$. Tính độ dài AE, AF theo a .

21. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC ($AB > AC$) tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q . Gọi R, S lần

lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA và T là giao điểm của PQ và RS . Chứng minh rằng T nằm trên đường phân giác của góc B .

22. ** Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Trên hai cạnh AC, BC lấy D, E sao cho $AB = AD = AE$. Xác định vị trí tương đối giữa DE và đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
23. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Trên đoạn AB lấy 1 điểm C . Dựng đường tròn tâm I đường kính BC . Đường trung trực của AC cắt (O) tại D , DB cắt (I) tại N . Chứng minh rằng:
 - a) $OD = MI$ (M là trung điểm của AC)
 - b) $IN = OM$
 - c) $\triangle OMD = \triangle INM$, suy ra MN là tiếp tuyến của (I) .
24. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn. Cắt tuyến thay đổi qua A cắt (O) tại hai điểm B, C . Tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại D . Chứng minh rằng D nằm trên một đường thẳng cố định.
25. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. C là một điểm di động trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại C cắt AB tại D . Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với tia phân giác trong góc \widehat{OCD} , đường thẳng này cắt CD tại M . Chứng minh rằng M thuộc một đường cố định khi C di chuyển trên nửa đường tròn.
26. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Điểm M thay đổi trên cạnh BC . Gọi D là tâm đường tròn qua M tiếp xúc với AB tại B ; E là tâm đường tròn qua M tiếp xúc với AC tại C .
 - a) Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.
 - b) Chứng

minh rằng trung điểm N của DE thuộc một đường cố định khi M di chuyển trên cạnh BC .

27. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Kẻ các tiếp tuyến Ax và By . Tiếp tuyến tại một điểm M bất kì trên nửa đường tròn cắt Ax tại C và cắt By tại D . Gọi N là giao điểm của AD và BC . P là giao điểm của OC và AN , Q là giao điểm của OP và BM . Chứng minh rằng:
- $MN \parallel AC$
 - $PQ \parallel AB$
 - Ba điểm P, N, Q thẳng hàng.
28. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến PA và PB với A, B là các tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ A đến đường kính BC . Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH .

ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP, ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

1. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$ và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, AC lần lượt tại D, E, F . Chứng minh rằng:
 - a) $AB + AC - BC = 2AD$
 - b) $S_{ABC} = \frac{1}{2}pr$ (P là nửa chu vi của tam giác ABC)
 - c) $h_a + h_b + h_c = 9r$
2. Cho tam giác ABC với $AC > BC$. Đường trung tuyến CD tiếp xúc với các đường tròn nội tiếp các tam giác ACD và BCD tại E và F . Chứng minh hệ thức: $AC - BC = 2EF$.
3. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại D , biết rằng: $AC \cdot BC = 2 \cdot AD \cdot DB$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại C .
4. Tam giác ABC có chu vi 80cm và ngoại tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến của đường tròn (O) song song với BC cắt AB theo thứ tự tại M, N .
 - a) Cho biết $MN = 9,6cm$. Tính độ dài BC .
 - b) Cho biết $AC - AB = 6cm$. Tính độ dài các cạnh AB, AC, BC để MN có độ dài lớn nhất.
5. Cho một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10cm, diện tích bằng $24cm^2$. Tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác.
6. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi $(O; r), (O_1, r_1), (O_2, r_2)$ theo thứ tự là các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH . Chứng minh

rằng:

a) Chứng minh rằng: $r + r_1 + r_2 = AH$

b) Chứng minh rằng: $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

7. * Tính các góc của một tam giác vuông biết rằng tỉ số giữa bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp bằng $\sqrt{3} + 1$.
8. Đường tròn $(O; r)$ nội tiếp tam giác ABC . Các tiếp tuyến với đường tròn (O) song song với các cạnh của tam giác ABC cắt từ tam giác ABC thành 3 tam giác nhỏ. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính của đường tròn nội tiếp các tam giác nhỏ đó. Chứng minh rằng $r = r_1 + r_2 + r_3$.
9. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 9cm, AC = 12cm$. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG .
10. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O) . Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm trên các cạnh BC, AB, AC . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến EF . Chứng minh rằng $\widehat{BHE} = \widehat{CHF}$.
11. Trên đường thẳng d lấy hai điểm A, B trong cùng một nửa mặt phẳng là đường thẳng d ta dựng hai tia Ax, By cùng vuông góc với d và trên Ax lấy một điểm C , trên tia By lấy một điểm D . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để CD tiếp xúc với đường tròn đường kính AB là: a) $AB^2 = 4.AC.BD$
b) $CD = AC + BD$.
12. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy . Kẻ $AD \perp xy$ và $BC \perp xy$.

- a) Chứng minh rằng $MC = MD$.
- b) Chứng minh tổng $AD + BC$ có giá trị không phụ thuộc và vị trí điểm M trên nửa đường tròn đường kính AB .
- c) Chứng minh đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB .
- d) Xác định vị trí điểm M để tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất.
13. *Cho nửa đường tròn đường kính AB . Một điểm C thay đổi trên nửa đường tròn. Hạ $CH \perp AB$ (H thuộc AB). Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AHC, BHC . BO_2 cắt AO_1, CO_1 tại I và K . CI cắt đường tròn tại D . Chứng minh rằng:
- a) I là trực tâm của tam giác CO_1O_2 .
- b) $\triangle IKC = \triangle O_1KO_2$, suy ra $CI = O_1O_2$.
- c) $DA = DB = DI$
- d) Khi $OA = CB$ thì O_1O_2 đạt giá trị lớn nhất.
14. **Cho tam giác đều ABC (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. $M \in$ cạnh $AB, N \in$ cạnh AC . Đặt $AB = a$. Chứng minh rằng MN tiếp xúc với đường tròn (I) khi và chỉ khi:
- a) $AM + AN + MN = a$
- b) $\frac{AM}{BM} + \frac{AN}{NC} = 1$
15. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn ($O; R$). Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng: $r = \sqrt{S_{ABC} + R^2} - R$
16. Cho tam giác ABC và đường tròn ($I; r$) nội tiếp tam giác. Các tiếp tuyến với (I) song song với các cạnh của tam giác và tạo với các cạnh này 3 tam giác nhỏ. Gọi

r_1, r_2, r_3 là các bán kính đường tròn nội tiếp của các tam giác này.

Chúng minh rằng $r = r_1 + r_2 + r_3$

17. Cho tam giác ABC cân tại A có bán kính đường tròn nội tiếp là r . Gọi r_a, r_b, r_c là lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp của góc A, B và C .

a) Tính các cạnh của tam giác theo r, r_a

b) Chứng minh $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$. Từ đó suy ra r_b, r_c theo r, r_a .

18. *Cho tam giác ABC có $BC = a, AB = c, AC = b$. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. Đường vuông góc với CI tại I cắt AC tại M , AB tại N . Chứng minh rằng:

a) $AM \cdot AN = IM^2 = IN^2$

b) $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ac} + \frac{IC^2}{ab} = 1$

19. *Tính các góc của một tam giác vuông biết tỉ số giữa bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác bằng $\sqrt{3} + 1$

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Cho đường tròn (O) đường kính $BC = 2R$, H là điểm nằm giữa B và C . Gọi $(O_1), (O_2)$ là hai đường tròn có đường kính lần lượt là HB, HC .
 - a) Chứng tỏ các đường tròn $(O), (O_1), (O_2)$ đôi một tiếp xúc nhau.
 - b) Từ một điểm I bất kì trên đường tiếp tuyến chung tại H của (O_1) và (O_2) , vẽ các tiếp tuyến IE, IF đến $(O_1), (O_2)$. Chứng tỏ đường tròn ngoại tiếp tam giác EHF có tâm là I .
2. Cho hai đường tròn $(O; R), (O'; r)$ với $R = 12, r = 5, d = OO' = 13$
 - a) Chứng tỏ hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm A và B .
 - b) Chứng tỏ $\triangle AOO'$ vuông, suy ra các tiếp tuyến vẽ từ tâm đường tròn này đến đường tròn kia là các đường nào?
 - c) Tính độ dài AB
3. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$, I là điểm đi động trên (O) . Gọi C là điểm đối xứng của B qua AI .
 - a) Chứng tỏ $\triangle AIB$ vuông và $\triangle ABC$ cân.
 - b) Chứng tỏ C thuộc đường tròn tiếp xúc với (O) tại B .
4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B . Vẽ đường kính AC của (O) và đường kính AD của (O') .
 - a) Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng.
 - b) Qua A vẽ cát tuyến cắt (O) tại M , cắt (O') tại N . Tìm vị trí của cát tuyến để độ dài MN lớn nhất.

5. Cho điểm A nằm giữa hai điểm O, O' cố định:
 - a) Chứng tỏ hai đường tròn $(O; OA = R)$ và $(O'; O'A = R')$ tiếp xúc ngoài nhau.
 - b) Gọi a là tiếp tuyến chung tại A và a cắt tiếp tuyến chung ngoài BC tại D ; E là điểm đối xứng của A qua D . Chứng tỏ $BD = DC$ và $ABEC$ là hình chữ nhật.
 - c) Chứng minh rằng $AE = 2\sqrt{RR'}$
6. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH .
 - a) Chứng tỏ ba đường tròn đường kính BC, BH, HC tiếp xúc đôi một.
 - b) AB cắt đường tròn đường kính BH tại D ; AC cắt đường tròn đường kính CH tại E . Chứng minh $DE = AH$.
 - c) Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của cả hai đường tròn đường kính BH, CH .
7. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ có bán kính $R = 3cm, R' = 2cm, OO' = 7cm$. Gọi AA' là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn. Từ O' kẻ $O'H \perp OA$.
 - a) Chứng tỏ $AA'O'H$ là hình chữ nhật và $O'H$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính $r = 1cm$.
 - b) Suy ra cách vẽ tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (O') .
 - c) Tương tự gọi BB' là tiếp tuyến chung trong của (O) và (O') . Từ O' kẻ $O'K \perp OB$. Chứng tỏ $O'K$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm O , bán kính $r' = 5cm$. Suy ra cách vẽ tiếp tuyến chung trong của (O) và (O')
8. Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > AD$). Lấy A làm tâm vẽ đường tròn bán kính AD , nó cắt AB tại E . Lấy B làm tâm vẽ đường tròn bán kính BE , nó cắt đường thẳng DE tại F .

- a) Chứng minh hai đường tròn $(A; AD)$ và $(B; BE)$ tiếp xúc nhau.
- b) Chứng minh F, B, C thẳng hàng.
9. Cho đường tròn tâm O và điểm A cố định thuộc đường tròn. Đường thẳng d ở ngoài đường tròn. Hãy dựng đường tròn tâm I tiếp xúc với đường thẳng d , đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O) tại A .
10. Cho hai đường tròn tâm O, O' bán kính lần lượt là $3R, R$ tiếp xúc ngoài nhau tại A . Đường thẳng d_1 qua A cắt (O) tại B , cắt (O') tại B' . Đường thẳng d_2 vuông góc với d_1 tại A cắt (O) tại C và (O') tại C' .
- a) Chứng minh rằng BC', CB' và OO' đồng qui tại một điểm M cố định.
- b) Chứng minh các tiếp tuyến chung ngoài PP' và TT' cắt nhau tại M .
- c) Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC . Tìm quỹ tích điểm I khi d_1 và d_2 thay đổi vị trí (vẫn qua A và vuông góc với nhau)
11. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A . Góc vuông xAy quay xung quanh A , Ax cắt (O) tại B , Ay cắt (O') tại C .
- a) Chứng minh $OB // O'C$
- b) Gọi C' là điểm đối xứng của C qua O' . Chứng minh B, A, C' thẳng hàng.
- c) Qua O vẽ $d \perp AB$, nó cắt BC tại M . Tìm quỹ tích điểm M khi các dây AB, AC thay đổi vị trí nhưng vẫn vuông góc với nhau.
12. Cho tam giác nhọn ABC , phân giác CD . Lấy D làm tâm vẽ nửa đường tròn bán kính R tiếp xúc với AC tại

- E , tiếp xúc với CB tại F . Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với nửa đường tròn (D) tại K và tiếp xúc với hai cạnh AB, BC của tam giác ABC . Chứng minh C, O, D thẳng hàng.
13. *Cho 3 đường tròn ngoài nhau và có tâm cùng nằm trên một đường thẳng. Đường tròn thứ tư tiếp xúc với cả ba đường tròn đã cho. Chứng minh rằng bán kính đường tròn thứ tư sẽ lớn hơn bán kính của ít nhất một trong ba đường tròn đã cho.
 14. *Cho đường tròn $(O; r)$ nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D . Vẽ đường kính DE ; AE cắt BC tại M . Chứng minh rằng $BD = CM$.
 15. Cho tam giác nhọn ABC có AD, BE, CF là ba đường cao cắt nhau tại H . M, N lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng EF . Chứng minh rằng:
 - a) Tam giác $AEF \sim \triangle ABC$
 - b) H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .
 - c) A, B, C là tâm của các đường tròn bàng tiếp của tam giác DEF .
 - d) $DE + DF = MN$
 16. Hai đường tròn (O) và (O') có cùng bán kính R , cắt nhau tại A và B , trong đó $\widehat{OAO'} = 90^\circ$. Vẽ cát tuyến chung MAN , M thuộc (O) , N thuộc (O') . Tính $AM^2 + AN^2$ theo R .
 17. Cho ba đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 có cùng bán kính và cùng đi qua một điểm I . Gọi các giao điểm khác của hai trong ba đường tròn đó là A, B, C . Chứng minh rằng:
 - a) $\triangle ABC = \triangle O_1O_2O_3$
 - b) I là trực tâm của tam giác ABC .

LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY CUNG

1. Cho tam giác nhọn ABC . Đường tròn tâm I , đường kính AB , và đường tròn tâm K đường kính AC cắt nhau tại H .
 - a) Chứng minh điểm H nằm trên cạnh BC .
 - b) Một cát tuyến d đi qua A cắt đường tròn (I) tại E , cắt đường tròn (K) tại F (A nằm giữa E và F). Hãy nêu các đặc điểm của tứ giác $BCEF$
 - c) D ở vị trí nào thì A là trung điểm của EF .
2. Cho hai đường tròn đồng tâm (O, r) và (O, R) . Tìm quỹ tích những điểm M sao cho từ đó ta vẽ các tiếp tuyến MP với (O, R) và MQ với (O, r) và $MP \perp MQ$
3. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Trên nửa đường tròn đường kính AB lấy điểm C, D không trùng A, B . Từ C kẻ CH vuông góc AB , nó cắt tiếp đường tròn tại E . Từ A kẻ AK vuông góc với DC , nó cắt tiếp đường tròn tại F . Chứng minh $DE = BF$
4. Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CA$.
 - a) Chứng minh điểm I , tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE , nằm trên phân giác của góc \widehat{BAC}
 - b) Điểm I là điểm đặc biệt gì đối với tam giác ABC .
5. Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường tròn tâm I đường kính AB và đường tròn tâm K đường kính AC cắt nhau tại H . Một đường thẳng d đi qua A , thuộc miền ngoài tam giác cắt đường tròn (I) tại E , cắt đường tròn

(K) tại F .

- a) Tìm quỹ tích trung điểm M của EF khi d thay đổi vị trí.
- b) Xác định vị trí của d để $BCEF$ có chu vi lớn nhất.

GÓC NỘI TIẾP

1. Cho đường tròn $(O; R)$, các dây AB, CD, EF có độ dài như sau: $AB = R, CD = R\sqrt{2}, EF = R\sqrt{3}$. Tính số đo các cung nhỏ AB, CD, EF .
2. Cho tam giác đều ABC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính BC . D là điểm trên nửa đường tròn sao cho số đo cung nhỏ CD bằng 60° . Gọi M là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng $BM = 2CM$.
3. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có $AB = 8cm, AC = 15cm$, đường cao $AH = 5cm$ (điểm H nằm trên cạnh BC). Tính bán kính của đường tròn.
4. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2cm$, dây CD song song với AB (C thuộc cung AD). Tính độ dài các cạnh của hình thang $ABDC$ biết chi vi hình thang bằng $5cm$.
5. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 12cm$. Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) ở M và cắt tiếp tuyến của đường tròn tại B ở N . Gọi I là trung điểm của MN . Tính độ dài AN biết rằng $AI = 13cm$.
6. Cho tam giác nhọn ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$ và nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R .
Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
7. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm, I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác.

- a) Chứng minh rằng AI là tia phân giác của góc OAH .
 b) Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$, chứng minh $IO = IH$
8. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . Gọi M là một điểm bất kì thuộc cung nhỏ BC .
 a) Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.
 b) Gọi D là giao điểm của MA và BC . Chứng minh rằng $\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = 1$.
 c) Tính tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo R .
9. Cho điểm A nằm bên trong đường tròn đường kính BC (A không thuộc BC). Kẻ các dây BE và CF qua A . Các đường thẳng BF và CE cắt nhau tại D .
 a) A là điểm đặc biệt gì của tam giác BCD ; D là điểm đặc biệt gì của tam giác ABC ?
 b) Chứng minh rằng khi đường kính BC quay xung quanh tâm của đường tròn thì AD luôn vuông góc với BC .
10. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH ; AD là đường kính; M là điểm chính giữa cung BC không chứa A . Chứng minh:
 a) $\widehat{BAH} = \widehat{CAD}$; $\widehat{BAD} = \widehat{CAH}$
 b) Tia AM là phân giác của góc \widehat{HAD}
11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là điểm chính giữa cung AC không chứa B . Ta kẻ dây DE song song với cạnh AB , cắt BC tại I . Chứng tỏ các tam giác ICE và IBD cân.
12. Hai dây AB và CD của một đường tròn ($O; R$) cắt nhau ở M . Chứng minh rằng $MA.MB = MC.MD = R^2 - OM^2$

13. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, gọi $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC , H là tiếp điểm của AB với đường tròn (I) , D là giao điểm của AI với đường tròn (O) , DK là đường kính của đường tròn (O) . Gọi d là độ dài của OI . Chứng minh rằng:
 - a) Tam giác AIH và tam giác KCD đồng dạng.
 - b) $DI = DB = DC$.
 - c) $IA \cdot ID = R^2 - d^2$.
 - d) $d^2 = R^2 - 2Rr$ (Định lí Euler).
14. Cho tam giác ABC vắn tại A nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Ta kẻ dây AM cắt BC tại N .
 - a) Chứng minh rằng tam giác ABN đồng dạng với tam giác AMB
 - b) Chứng minh rằng tích $AM \cdot AN$ không phụ thuộc vào vị trí của M và tính tích đó theo R và đường cao h của tam giác ABC kẻ từ A .
15. Tứ giác $ABCD$ có 4 đỉnh nằm trên một đường tròn $(O; R)$ (A, C cố định), hai đỉnh còn lại di chuyển trên hai cung tròn nhận A và C là hai đầu mút.
 - a) Chứng tỏ các tia phân giác của các góc B và D đi qua hai điểm cố định E, F .
 - b) Chứng minh rằng đường thẳng EF là trung trực của dây AC .
 - c) Với vị trí nào của hai đỉnh B, D thì tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất của diện tích đó khi số đo cung ABC bằng 120° .
16. Tam giác ABC vuông tại A , có AN là trung tuyến. Ta vẽ đường tròn tâm O thuộc cạnh AC và tiếp xúc với BC ở D . Từ B ta kẻ tiếp tuyến BT (khác BC) có T là tiếp điểm. Tiếp tuyến này cắt AN ở M .
 - a) Chứng minh rằng 5 điểm A, B, D, O, T cùng thuộc

một đường tròn.

b) So sánh MA và MT

17. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D là điểm chính giữa cung BC không chứa A . Ta kẻ qua D các đường song song với AB và AC , chúng cắt AC ở M và AB ở N .

a) Chứng minh AD vuông góc với MN .

b) Tam giác ABC phải thỏa mãn điều kiện gì để tứ giác $AMDN$ là hình vuông.

18. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Dây CD vuông góc với AB tại H . Lấy điểm M tùy ý trên đường tròn. Hai đường thẳng CM và AB cắt nhau tại F . Hai đường thẳng DM và AB cắt nhau tại E .

a) Chứng minh hai tam giác EMB và EAD đồng dạng.

b) Chứng minh $\frac{EB}{EA} = \frac{FB}{FA}$

19. Hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau tại M và N . Trên đường tròn (O) lấy ba điểm A, B, C . Các đường thẳng MA, MB, MC cắt đường tròn (O') tại A', B', C'

a) Tính tỉ số $\frac{NA}{NA'}$ theo các bán kính r, r' của các đường tròn $(O), (O')$.

b) Chứng minh rằng $\triangle NAB \sim \triangle NA'B', \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

20. Cho đường tròn tâm O và điểm P ở ngoài (O) . Vẽ đường tròn $(P; PO)$. Hai đường tròn (O) và (P) cắt nhau tại A và B . Đường thẳng OP cắt đường tròn (P) tại điểm thứ hai C

a) Chứng minh CA là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b) Lấy điểm D thuộc cung BA của đường tròn (P) (

Cung chứa điểm C). Chứng minh rằng DO là tia phân giác của góc \widehat{ADB} .

c) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng OD với đường tròn (O). Chứng minh rằng AI là tia phân giác của góc \widehat{BAD}

21. Cho đường tròn đường kính AB . Lấy điểm M trên đường tròn (khác A, B) sao cho $MA < MB$. Lấy MA làm cạnh vẽ hình vuông $MADE$ (E thuộc đoạn MB). Gọi F là giao điểm của DE và AB .

a) Chứng minh $\triangle ADF \sim \triangle BMA$

b) Lấy C làm điểm chính giữa cung AB (không chứa M). Chứng minh $CE = CE = CA$.

c) Trên đoạn thẳng MC lấy điểm I sao cho $CI = CA$. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMB .

22.

GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ MỘT DÂY CUNG

1. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng đi qua B cắt (O) tại M và (O') tại N (M, N khác B). Các tiếp tuyến tại M và N của hai đường tròn cắt nhau tại P .
 - a) Tính \widehat{MPM} cho biết $\widehat{MAN} = \alpha$.
 - b) Chứng tỏ rằng tam giác MNP vuông tại P khi và chỉ khi $\widehat{OAO'} = 90^\circ$
2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một đường thẳng song song với tiếp tuyến tại C cắt cạnh AC tại D và cạnh BC tại E . Chứng tỏ hai tam giác ABC và DEC đồng dạng và $CA.CD = CB.CE$
3. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và CH là đường cao. M, N là hình chiếu của đỉnh C lần lượt trên các tiếp tuyến ở A và B của đường tròn.
 - a) Chứng tỏ $\triangle ACH \sim \triangle BCN, \triangle BCH \sim \triangle ACM$.
 - b) So sánh $CM + CN$ và $2CH$
 - c) Tam giác ABC phải thỏa điều kiện gì để $CM + CN = 2CH$?
4. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn $(O; R)$ ta kẻ một tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm) và một cát tuyến cắt đường tròn tại B và C .
Chứng minh hệ thức: $MA^2 = MB.MC = OM^2 - R^2$
5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Qua đỉnh B ta kẻ một đường thẳng song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn, đường này cắt AC tại M .
 - a) Chứng minh hệ thức $AB^2 = AC.AM$.

- b) Chứng tỏ rằng đường thẳng AB là tiếp tuyến của đường tròn đi qua B, C và M .
6. Cho hai đường tròn cắt nhau tại A và B . M là điểm thuộc đường thẳng AB và ở ngoài đường tròn đã cho. Từ M ta kẻ các tiếp tuyến MC, MD đến một đường tròn và các tiếp tuyến ME, MF đến đường tròn còn lại. Chứng tỏ bốn điểm C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.
7. Cho tam giác ABC . Vẽ đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B . Kẻ dây BD song song với AC . Gọi I là giao điểm của CD với đường tròn. Chứng minh rằng $\widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}$.
8. *Tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O đường kính 5cm . Tiếp tuyến với đường tròn tại C cắt tia phân giác của góc B tại K . Tính độ dài BK , biết rằng BK cắt AC tại D và $BD = 4\text{cm}$.
9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A cắt BC ở I .
- a) Chứng minh rằng $\frac{IB}{IC} = \frac{AB^2}{AC^2}$
- b) Tính IA, IC biết rằng $AB = 20\text{cm}, AC = 28\text{cm}, BC = 24\text{cm}$.
10. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt tại A và B . Kẻ tiếp tuyến chung CC' ($C \in (O), C' \in (O')$), kẻ đường kính COD . Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm của OO' với $C'D, CC'$. Chứng minh rằng:
- a) $\widehat{EAF} = 90^\circ$ (A, C, C' nằm cùng phía đối với OO')
- b) FA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CAC' .

GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG HAY BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

1. Cho hai đường kính AB và CD vuông góc của đường tròn (O) và M là điểm thuộc bán kính OA . Kẻ dây DE qua M . Tiếp tuyến tại E cắt AB tại F .
 - a) Chứng minh tam giác FME cân.
 - b) Chứng minh $FM = FA.FB$.
 - c) FD cắt đường tròn (O) tại N . Chứng minh FM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MCE .

2. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Ta lấy điểm E trên cung nhỏ AB và gọi M là giao điểm của tia AE với BC .
 - a) So sánh \widehat{ECA} và \widehat{EMB}
 - b) Chứng minh AB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MEB và AC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MCE .

3. Tam giác ABC có các phân giác đồng qui tại I ; các tia AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A', B', C' . Chứng minh:
 - a) $A'I = A'B$
 - b) Lục giác $AB'CA'BC'$ có $AB' = B'C, CA' = A'B, BC' = C'A$
 - c) A', B', C' lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB .

CUNG CHỨA GÓC

1. Đường tròn (O) có đường kính AB cố định. C là điểm di động trên đường tròn đó (C khác A, B). Tìm quỹ tích giao điểm ba phân giác của tam giác ABC .
2. Tam giác vuông ABC có các cạnh huyền BC cố định, đỉnh A thay đổi. Ta dựng bên ngoài tam giác đó hình vuông $ABMN$. Tìm quỹ tích điểm N .
3. Cho nửa đường tròn đường kính AB và dây cung MN có độ dài bằng bán kính (M thuộc cung AN). Các tia AM và BN cắt nhau tại I , các dây AN và BM cắt nhau tại K .
 - a) Tính $\widehat{MIN}, \widehat{AKB}$
 - b) Khi dây MN thay đổi vị trí thì các điểm I, K chạy trên đường nào.
 - c) Cho biết I là điểm đặc biệt gì của tam giác AKB ; K là điểm đặc biệt gì của tam giác ABI .
 - d) AB và IK cắt nhau tại H . Chứng tỏ $HA.HB = HI.HK$
 - e) Với vị trí nào của dây MN thì tam giác IAB có diện tích lớn nhất? Tính giá trị lớn nhất đó cho biết $AB = 2R$.
4. Tam giác ABC vuông tại A , nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có cạnh $AB = R$. DE là đường kính vuông góc với BC (A và D cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC). AD, AC, AB lần lượt cắt OB, BE, EC tại M, N và P .
 - a) Tính các góc $\widehat{AMO}, \widehat{CNE}, \widehat{BPC}$
 - b) Chứng tỏ M và N cùng thuộc một cung chứa góc có hai đầu mút A và B .
 - c) Xác định tâm đường tròn đi qua A, B, M, N .

5. Cho điểm M di chuyển trên cung AB của đường tròn (O) . Trên tia đối của tia MB ta đặt đoạn $MC = MA$.
 - a) Tìm quỹ tích của điểm C .
 - b) Xác định tâm đường tròn đi qua A, B và C .
 - c) Với vị trí nào của M thì tam giác MAB có chu vi lớn nhất.
6. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R , có đường cao $AH = h$. Chứng minh rằng $AB.AC = 2Rh$.
7. Cho nửa đường tròn đường kính AB tâm O . Ta dựng nửa đường tròn đường kính AO (Hai nửa đường tròn này cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Từ một điểm C thuộc đoạn thẳng OA ta kẻ đường vuông góc với OA cắt nửa đường tròn nhỏ tại D và nửa đường tròn lớn tại E .
 - a) Chứng minh rằng tỉ số $\frac{AD}{AE}$ không phụ thuộc vào vị trí của C trên đoạn OA . Tính tỉ số đó.
 - b) Chứng tỏ rằng tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng AE thì có cạnh bên bằng AD .
8. Trong tam giác cân ABC có $AB = AC = 5cm, BC = 6cm$. Tính bán kính đường tròn nội tiếp.
9. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp một tam giác cân biết rằng cạnh đáy và đường cao tương ứng đều có độ dài $8cm$.

BÀI TẬP VỀ TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Hình bình hành $ABCD$ có góc tù \widehat{B} , gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Đặt DE vuông góc AC , DF vuông góc AB , DG vuông góc BC . Chứng minh rằng tứ giác $OEGF$ nội tiếp đường tròn.
2. Cho tam giác ABC vuông tại A có I là trung điểm của BC , D là điểm bất kì trên đoạn thẳng BC . Gọi E, F là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD . Chứng minh rằng 5 điểm A, E, D, I, F cùng thuộc một đường tròn.
3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AI . Gọi E là trung điểm của AB , K là trung điểm của OI .
 - a) Chứng minh rằng $\triangle EKB$ cân.
 - b) Chứng minh rằng tứ giác $AEKC$ nội tiếp đường tròn.
4. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với AB, AC, BC lần lượt tại M, D, N . Lấy điểm E thuộc miền trong của tam giác ABC sao cho đường tròn nội tiếp tam giác EBC cũng tiếp xúc với BC tại D và tiếp xúc với EB, EC tại P, Q . Chứng minh rằng $MNPQ$ nội tiếp đường tròn.
5. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và $AB = CD$. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng BC tại Q . Gọi R là giao điểm của đường thẳng AB và CD .
 - a) Chứng minh rằng $AQRC$ nội tiếp.
 - b) Chứng minh $AD \parallel QR$
6. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc AB, AC tại M, N . MN cắt IB tại D . Chứng minh rằng

$INDC$ là tứ giác nội tiếp.

7. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thang $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Lấy M, N là điểm thuộc OA , N là điểm thuộc OD sao cho $\widehat{BMD} = \widehat{AMC}$. Chứng minh rằng $BMNC$ là tứ giác nội tiếp.
8. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, ACH
 - a) Chứng minh rằng $AI \perp JK$
 - b) Chứng minh rằng $BJKC$ là tứ giác nội tiếp.
9. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh BC , N là trung điểm cạnh CD . AM cắt BN tại E , DM tại P và AN tại F . Chứng minh rằng tứ giác $AEFP$ nội tiếp.
10. Cho (O) và (O_1) cắt nhau tại M, N . Tiếp tuyến tại M của (O) cắt (O_1) tại B . Tiếp tuyến tại M của (O_1) cắt (O) tại A . Gọi P là điểm đối xứng của M qua N . Chứng minh rằng tứ giác $MAPB$ nội tiếp.
11. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi D, E là hai tiếp điểm của (I) với AB, AC . Các tia phân giác trong của góc các góc \widehat{B}, \widehat{C} gặp DE tại M và N . Chứng minh rằng B, M, N, C cùng nằm trên một đường tròn.
12. Cho điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) . Một đường thẳng (d) ở ngoài (O) và vuông góc với OM . CM, BM cắt d tại D và E . Chứng minh rằng B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.
13. Hai dây AB và CD của một đường tròn cắt nhau tại I . Gọi M là trung điểm của IC và N đối xứng với I qua

- D. Chứng minh rằng $AMBN$ nội tiếp một đường tròn.*
14. Hình vuông $ABCD$ lấy $M \in AD$ và $N \in CD$ sao cho $\widehat{MBN} = 45^\circ$. BM và BN cắt AC theo thứ tự tại E và F . Chứng minh rằng $MEFN$ nội tiếp đường tròn.
15. Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC, AB . Vẽ ba đường tròn bằng nhau có tâm là A, B, C . Đường tròn (A) cắt $B'C'$ tại D, D' . Đường tròn (B) cắt $A'C'$ tại E, E' . Đường tròn (C) cắt $A'B'$ tại F, F' . Chứng minh rằng 6 điểm D, D', E, E', F, F' cùng nằm trên đường tròn tâm H .
16. Cho tam giác ABC có đường phân giác trong là AD . Trong miền trong các góc BAD, CAD lần lượt vẽ hai tia AM và AN sao cho $\widehat{MAD} = \widehat{NAD}$ ($M \in BD, N \in CD$). Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AC ; N_1, N_2 lần lượt là hình chiếu của N lên AB, AC . Chứng minh rằng:
- M_1, M_2, N_1, N_2 cùng thuộc một đường tròn.
 - $\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$
17. Cho hình vuông $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh BC . AM cắt DC tại E , DM cắt BE tại K . Chứng minh rằng 5 điểm A, B, K, C, D cùng thuộc một đường tròn.
18. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B . Qua điểm I nằm trên AB vẽ cát tuyến IMN đến (O) và cát tuyến IPQ đến (O') . Chứng minh rằng $MNPQ$ là tứ giác nội tiếp.
19. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Đường thẳng d vuông góc với AB tại H (H ở ngoài (O)). Từ A kẻ tia

- Ax cắt (O) tại C và d tại D . Từ A vẽ tia Ay cắt (O) tại E và d tại F . Chứng minh rằng 4 điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.
20. Cho tam giác ABC cân tại A . Từ một điểm M tùy ý trên dây BC kẻ các đường song song với các cạnh bên cắt AB tại P và cắt AC tại Q . D là điểm đối xứng của M qua PQ . Chứng minh rằng $ADBC$ nội tiếp đường tròn.
21. Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối diện AD và BC cắt nhau tại E , AB và CD cắt nhau tại F . Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $EA.ED + FA.FB = EF^2$.
22. Cho tam giác ABC cân tại A có đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E và F thuộc cạnh AC sao cho $BE = CF$, EF cắt BC tại I . Đường vuông góc với EF vẽ từ I cắt AH tại D . Chứng minh rằng tứ giác $AEDF$ nội tiếp.
23. Cho tứ giác $ABCD$ (có góc A tù) nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ tia $Ax \perp AD$ cắt BC tại E , EO cắt CD tại F . Gọi A' là điểm đối xứng của A qua EF . a) Chứng minh rằng 4 điểm E, F, A', C cùng thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh rằng $AF \perp AB$.
24. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường phân giác của góc \widehat{BAD} cắt BC và CD tại M và N . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CNM . Chứng minh rằng B, I, C, D cùng nằm trên một đường tròn.
25. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi O, I, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội

- tiếp và trực tâm của tam giác. Chứng minh rằng 5 điểm B, C, O, I, H cùng nằm trên một đường tròn,
26. Cho tam giác ABC nhọn có 3 đường cao AD, BE, CF . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng M, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.
27. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Gọi I, K là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ACH, \triangle ABH$. Tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này cắt AB và AC tại M, N và cắt đường cao AH tại P .
- a) Chứng minh $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.
- b) Chứng minh rằng 5 điểm A, M, N, I, K cùng thuộc một đường tròn có tâm là P và có bán kính bằng bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
28. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy E sao cho $BE = \frac{1}{3}BC$. Trên tia đối của CD lấy điểm F sao cho $CF = \frac{1}{2}BC$. Gọi M là giao điểm của AE và BF . Chứng minh rằng 5 điểm A, B, C, D, M cùng thuộc một đường tròn.
29. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Ax, By là tiếp tuyến của (O) tại A và B . Điểm C nằm giữa A và O , $M \in (O)$. Qua M kẻ đường thẳng d vuông góc với CM , d cắt Ax tại D và By tại E . MB cắt CE tại I và MA cắt CD tại K .
- a) Chứng minh rằng $MICK$ nội tiếp trong một đường tròn.
- b) Chứng minh $IK \parallel AB$
- c) Xác định vị trí của M để $DE = 2AB$.
30. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B .

Một cát tuyến qua A cắt (O) tại C và cắt (O') tại D . Đường kính vẽ từ D của (O') và đường kính vẽ từ C của (O) cắt nhau tại E . Chứng minh rằng 4 điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

31. Cho điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC . Gọi O và O' là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM, \triangle ACM$. Hai bán kính BO, CO' kéo dài cắt nhau tại K . Chứng minh rằng $AKOO'$ là tứ giác nội tiếp.
32. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của D trên AB, BC, AC . Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi M, N, P thẳng hàng.
33. Cho tam giác ABC vuông tại A có phân giác AD và trung tuyến AM . Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADM$ cắt AB tại E và AC tại F . Gọi I, H, K lần lượt là trung điểm của EF, EC và FB .
 - a) Chứng minh $BE = CF$.
 - b) Chứng minh tứ giác $IHKM$ nội tiếp.
34. Cho hình bình hành $ABCD$ ($\widehat{A} > 90^\circ$). Trên tia BA kéo dài lấy điểm I sao cho $DI = DA$. Trên tia đối của tia DA kéo dài lấy điểm K sao cho $BK = BA$. Chứng minh rằng 5 điểm I, K, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.
35. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi $AC \cdot BD + AD \cdot BC = AC \cdot DB$
36. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOM cắt (O) tại D và cắt tia CB tại E . AD cắt EO tại I . Chứng minh rằng tứ giác $BIOC$ là tứ giác nội tiếp.

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC

1. Cho đường tròn $(O; R)$, BC là dây cung cố định $BC < 2R$. A là điểm di động trên cung lớn BC . Xác định vị trí của A để: a) Diện tích tam giác ABC lớn nhất.
b) Chu vi tam giác ABC lớn nhất.
2. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . M là điểm chuyển động trên cạnh BC . Vẽ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$ ($D \in AB, E \in AC$). Xác định vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.
3. Cho điểm A cố định ở bên trong đường tròn $(O; R)$ (A khác O), MN là dây cung quanh xung quanh A . Xác định vị trí của dây cung MN để độ dài MN là dài nhất? Ngắn nhất?
4. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Một cát tuyến thay đổi đi qua A cắt đường tròn thứ nhất tại C và cắt đường tròn thứ hai tại D sao cho A nằm trên đoạn thẳng CD . Tìm vị trí của cát tuyến CD sao cho chu vi tam giác BCD nhận giá trị lớn nhất.
5. Cho (O) và đường thẳng d (Không cắt (O)). Tìm M trên (O) sao cho khoảng cách từ M đến d là:
a) Nhỏ nhất.
b) Lớn nhất.
6. Cho tam giác nhọn ABC , M là điểm nằm trong tam giác. Xác định vị trí của M để $MA \cdot BC + MB \cdot CA$ đạt giá trị nhỏ nhất.

7. Cho tam giác đều ABC , các điểm M và N lần lượt di động trên các cạnh BC và AC sao cho $BM = CN$. Xác định vị trí của M, N để độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất.
8. Cho tam giác đều ABC , M là điểm thuộc cạnh BC . Kẻ $MD \perp AB, ME \perp AC$. Xác định vị trí của M để diện tích tam giác MDE lớn nhất.
9. Cho đoạn thẳng $AB = a$, M là điểm di động trên đoạn AB . Kẻ tia $Mx \perp AB$ tại M , trên tia Mx lần lượt lấy các điểm C, D sao cho $MA = MC, MB = MD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC và BD . Xác định vị trí của M để diện tích tam giác MDE lớn nhất.
10. Cho tam giác ABC vuông tại A , H di chuyển trên cạnh BC . Gọi E, F là điểm đối xứng của H qua AB, AC . Xác định vị trí của H để diện tích tam giác EHF là lớn nhất.
11. Cho tam giác ABC . Qua điểm M thuộc cạnh AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB, BC , chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.
12. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a, AD = b$. O là trung điểm của AB . Một góc vuông quanh xung quanh O cắt cạnh AD ở M và cạnh BC ở N . Định vị trí của M, N để diện tích tam giác OMN nhỏ nhất.
13. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, từ điểm I thuộc miền trong của tam giác vẽ các đoạn IH, IK, IL lần lượt vuông góc với các cạnh BC, AC, AB . Tìm vị trí của I để tổng $AL^2 + BH^2 + CK^2$ có giá trị nhỏ nhất.

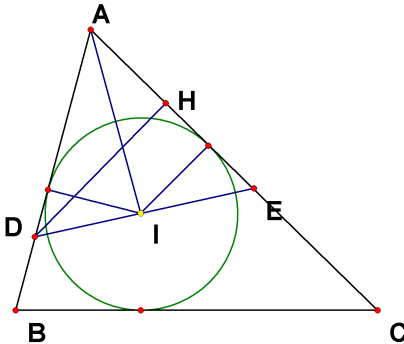
14. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là a . Trên hai cạnh AB, AD lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho chu vi tam giác AMN bằng $2a$. Tìm vị trí của M, N để diện tích tam giác AMN lớn nhất.
15. Cho điểm A di động trên cung lớn BC cố định của đường tròn $(O; R)$. Xác định vị trí của A sao cho diện tích hình giới hạn bởi cung nhỏ BC , dây AB và AC là lớn nhất.
16. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$. M là điểm trên cạnh BC . Gọi D, E là hình chiếu của M trên các cạnh AB, AC . Tìm vị trí của M sao cho DE có độ dài nhỏ nhất.
17. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH . Ta vẽ hai đường thẳng bất kì vuông góc nhau tại H , đường thẳng thứ nhất cắt AB tại D , đường thẳng thứ hai cắt AC tại E . Nối DE . Xác định vị trí của HD và HE để độ dài DE nhỏ nhất.
18. Cho BC là dây cố định của $(O; R)$. A là điểm chuyển động trên cung lớn BC . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác BHC đạt giá trị nhỏ nhất.
19. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$, M là điểm di động trên đoạn thẳng AB . Kẻ $MC \perp AB$ tại M (C thuộc nửa đường tròn). Gọi D, E là hình chiếu của M trên CA, CB . Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AM và BM . Xác định vị trí của M để diện tích tứ giác $DEPQ$ là lớn nhất.
20. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . D là điểm trên cung BC không chứa A của (O) , kẻ $DH \perp BC, DI \perp CA$

và $DK \perp AB$. Xác định vị trí của D để tổng $\frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK} + \frac{BC}{DH}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

21. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . M là điểm chuyển động trên cung nhỏ AC . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC . Tìm vị trí của M để HK có độ dài lớn nhất.
22. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , M là điểm chuyển động trên đường tròn. Vẽ $MH \perp AB$. Tìm vị trí của M trên (O) sao cho diện tích tam giác OMH là lớn nhất.
23. Cho đường tròn $(O; r)$ nội tiếp trong tam giác ABC . Đường thẳng d qua O cắt 2 cạnh AB, AC tại D và E . Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích tam giác ADE là lớn nhất.
24. Cho nửa đường tròn (O) , đường kính $AB = 2R$. Gọi M là điểm di động trên nửa đường tròn. Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại H . Từ A, B vẽ hai tiếp tuyến AC, BD với (M) . Xác định vị trí của M để $AC \cdot BD$ đạt giá trị lớn nhất.
25. Cho hai điểm A, B cố định và điểm M di động sao cho tam giác MAB là tam giác có 3 góc nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB và K là chân đường cao kẻ từ M của tam giác đó. Tìm giá trị lớn nhất của tích $KH \cdot KM$.
26. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. M là điểm thay đổi trên một nửa đường tròn. I là tâm nội tiếp của tam giác MAB , MI cắt (O) tại C .

- a) Chứng minh rằng tam giác CIA cân.
 b) Tìm vị trí M để bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MAB là lớn nhất.
27. Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) . Tìm điểm M trên (I) sao cho tổng khoảng cách từ M đến 3 cạnh của tam giác là nhỏ nhất? Lớn nhất?
28. **Cho đường tròn cố định tâm (O) , bán kính bằng 1. Tam giác ABC thay đổi và luôn ngoại tiếp (O) . Một đường thẳng thay đổi qua tâm O cắt AB, AC lần lượt tại D, E . Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác ADE .

Giải



29. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$ và M là một điểm thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại C, D . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM và BDM .

Giải

30. *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. M là điểm thay đổi trên nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của M trên AB . Tìm vị trí của M để tổng $AH + MH$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

31. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi (J) là đường tròn bàng tiếp góc A , (J) tiếp xúc với AB, AC, BC lần lượt tại D, E, F .

Chứng minh rằng $S_{IBC} > \frac{1}{4}S_{DEF}$

32. a) Cho đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $IA + IB + IC \geq 6r$

b) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi P, Q, N theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB . Chứng minh rằng $OP + OQ + ON \geq 3R$

33. Gọi h_a, h_b, h_c là các đường cao ứng với các cạnh a, b, c của tam giác, r là bán kính của đường tròn nội tiếp. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $h_a + h_b + h_c \geq 9r$

b) $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq 27r^2$

34. Cho đường tròn (O) , A là 1 điểm nằm ngoài đường tròn. Vẽ 2 tiếp tuyến AB, AC . M là 1 điểm thay đổi trên cung nhỏ BC . Gọi I, H, K là hình chiếu trên M trên BC, AC, AB . Tìm M để $MI.MH.MK$ đạt giá trị lớn nhất.

35. Cho đường tròn (O) và dây AB . Tìm điểm C thuộc cung nhỏ AB sao cho $\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

1. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc $\widehat{A} = 60^\circ$. Phân giác trong của góc B cắt cạnh CD tại E . Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác BCE , bán kính r tiếp xúc với BE tại M , tiếp xúc với AB tại S và với DE tại T .
 - a) So sánh R và r .
 - b) Tính OI theo r .
2. Đường tròn tâm O , đường thẳng d cố định đi qua O . Lấy điểm I tùy ý ở ngoài đường tròn (O) , vẽ đường tròn tâm I bán kính IO . Vẽ tiếp tuyến chung PQ của hai đường tròn (P thuộc (O) , Q thuộc (I)). Chứng minh rằng Q chạy trên một đường cố định khi I chạy trên d ở ngoài đường tròn (O)
3. Tam giác ABC có chu vi 80cm và ngoại tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến của đường tròn (O) song song với BC cắt AB theo thứ tự tại M, N .
 - a) Cho biết $MN = 9,6cm$. Tính độ dài BC .
 - b) Cho biết $AC - AB = 6cm$. Tính độ dài các cạnh AB, AC, BC để MN có độ dài lớn nhất.
4. Cho một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10cm, diện tích bằng $24cm^2$. Tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác.
5. Cho nửa đường tròn tâm O_1 đường kính AB . Lấy C tùy ý trên nửa đường tròn. Hãy tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết $AB = 2R, S_{ABC} = S$
6. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm các đường tròn nội tiếp tam giác ABC, AHB, AHC và bán kính lần lượt là R, r_1, r_2 . Chứng minh rằng:

- a) $R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$
 b) $R + r_1 + r_2 = AH$

7. Cho đường tròn tâm O bán kính R và hai bán kính OA, OB vuông góc nhau. Lấy A làm tâm vẽ đường tròn bán kính R nó cắt cung AB tại C . Đường tròn tâm I tiếp xúc với cung OC của (A) tại D , tiếp xúc với cung AB tại E , và tiếp xúc với OB tại F . Tính bán kính x của đường tròn tâm I theo R .
8. Cho hai đường tròn tâm O_1, O_2 bán kính R_1, R_2 tiếp xúc ngoài nhau tại C . Một tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với (O_1) tại B . Đường tròn tâm I tiếp xúc với cung AC tại D , tiếp xúc với cung BC tại E , tiếp xúc với đoạn thẳng AB tại F . Tính bán kính x của đường tròn tâm I theo R_1, R_2 .
9. Cho 3 đường tròn $(O_1, a), (O_2, b), (O_3, c)$ từng đôi một tiếp xúc nhau. Qua tiếp điểm A của (O_1) và (O_2) vẽ tiếp tuyến At , nó cắt đường tròn (O_3) tại M, N . Tính độ dài MN theo a, b, c .
10. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cùng bán kính R cắt nhau tại M, N và $O_1O_2 = R$. Hình vuông $ABCD$ có A, D nằm trên cung nhỏ MN của (O_1) và B, C nằm trên cung nhỏ MN của (O_2) . Tính cạnh hình vuông theo R .
11. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $AB = 2a$, ở miền ngoài hình vuông vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB tâm E và nửa đường tròn đường kính BC tâm F . Từ các trung điểm M, N của các nửa đường tròn $(E), (F)$ vẽ các tiếp tuyến Mx, Ny chúng cắt nhau tại P . Hãy tính

- bán kính đường tròn tiếp xúc với các nửa đường tròn $(E), (F)$ và các tiếp tuyến Mx, Ny .
12. Cho nửa đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với AC tại D , tiếp xúc với CB tại E , tâm O nằm trên cạnh AB . Biết $AB = c, AC = b, BC = a$. Hãy tính bán kính r của đường tròn (O) theo a, b, c
 13. Cho hai đường tròn $(O_1, R), (O_2, r)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A ($R > r$). Tiếp tuyến chung trong At cắt tiếp tuyến chung ngoài BC tại D . Tính độ lớn của góc \widehat{ADC} theo R, r .
 14. Cho đường tròn tâm O bán kính R . Qua điểm P ở miền trong đường tròn vẽ hai dây APB và CPD vuông góc với nhau. Biết $OP = a, \widehat{OPC} = \alpha (\alpha < 90^\circ)$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$ theo R, a, r .
 15. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Phân giác \widehat{BAC} cắt BC tại E và (O) tại D . OD cắt BC tại K . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại M . Biết $BE = a, CE = b$. Tính AM theo a, b
 16. Cho tam giác đều cạnh $AB = 4$. Trên cạnh AB lấy M sao cho $AM = 1$. Từ M vẽ tiếp tuyến với đường tròn nội tiếp tam giác ABC cắt AC tại N . Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác AMN .

CÁC BÀI TOÁN KINH ĐIỂN

1. (Bài toán con bướm). Cho đường tròn (O) và dây cung AB . Gọi I là trung điểm của AB . MN, PQ là hai dây cung qua I của đường tròn (M và P là hai điểm nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB). MQ, NP cắt AB theo thứ tự tại H và K . Chứng minh rằng $IH = IK$.

2. Cho tam giác nhọn ABC , $CB > CA$. Gọi O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác, CF là đường cao xuất phát từ C . Đường thẳng qua F vuông góc với OF cắt AC tại P . Chứng minh rằng $\widehat{FHP} = \widehat{CAB}$

3. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại I và một đường thẳng Δ cắt AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q . Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn MN khi và chỉ khi nó là trung điểm của đoạn PQ .

4. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H . Gọi O là trung điểm của BC . Đường thẳng Δ đi qua H cắt AB, AC tại M, N . Chứng minh rằng $HM = HN$ khi và chỉ khi $OM = ON$.

5. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Gọi E là giao của hai đường chéo AC và BD . Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng nối tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE, CDE cùng thuộc đường thẳng BD .

6. (Định lí P-tô-lê-mê)
 - a) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Khi đó

$AC.BD = AB.CD + AD.BC$ b) Cho tứ giác $ABCD$.
 Khi đó: $AC.BD \leq AB.CD + AD.BC$

7. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$ và ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ O tới các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng: $x + y + z = R + r$
8. Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC của đường tròn để $AB + 2AC$ đạt giá trị lớn nhất.
9. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B (O_1, O_2 nằm về hai phía của AB). Một cát tuyến Δ qua A cắt $(O_1), (O_2)$ lần lượt tại các điểm C, D khác A (A thuộc đoạn CD). Tiếp tuyến tại C của (O_1) cắt tiếp tuyến tại D của (O_2) ở M . Tìm vị trí của Δ sao cho $\frac{MC}{R_1} + \frac{MD}{R_2}$ đạt giá trị lớn nhất.
10. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và $AC = 2AB$. Các đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, C cắt nhau tại P . Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung BAC .
11. (Đường thẳng Simson) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Điểm M thuộc đường tròn (O) . Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, AC, AB . Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.
 Đường thẳng trên được gọi là đường thẳng Simson ứng với điểm M của tam giác ABC .
12. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M thuộc cung nhỏ BC , hạ MB' vuông góc với AC, MC'

- vuông góc với AB . Tìm vị trí của M để $B'C'$ lớn nhất.
13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . M là điểm thay đổi trên đường tròn. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của M qua BC, AC, AB . Chứng minh rằng:
- A', B', C' thẳng hàng.
 - Đường thẳng đi qua A', B', C' luôn đi qua một điểm cố định.
14. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Điểm M thuộc cung BC (cung không chứa A), M không trùng với B và C . Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của M trên BC, AC, AB . Chứng minh rằng:
- $\frac{BC}{MA'} = \frac{CA}{MB'} + \frac{AB}{MC'}$
 - Đường thẳng $B'C'$ đi qua trung điểm của đoạn nối giữa trục tâm H của tam giác ABC với M .
15. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi d_A là đường thẳng Simson của tam giác BCD ứng với điểm A . Các đường thẳng d_B, d_C, d_D được định nghĩa một cách tương tự. Chứng minh rằng bốn đường thẳng này đồng quy.
16. Cho đường tròn (O) và đường thẳng Δ không cắt nó. Điểm M thay đổi trên Δ , kẻ các tiếp tuyến MT, MH với (O) . Gọi A là hình chiếu vuông góc của O lên Δ và E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MT, MH . Chứng minh rằng:
- Đường thẳng TH đi qua một điểm cố định.
 - Đường thẳng EF đi qua một điểm cố định.

ÔN TẬP HÌNH HỌC PHẪNG

1. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , $\widehat{A} = 45^\circ$, các đường cao BE, CF .
 - a) Chứng minh rằng 5 điểm B, E, O, F, C cùng thuộc một đường tròn.
 - b) Tứ giác $BFOE$ là hình gì?
2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B , trong đó điểm O thuộc đường tròn (O') . Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O') ở C và cắt đường tròn (O) ở D . Chứng minh rằng tam giác CBD là tam giác cân.
3. Cho điểm C nằm giữa hai điểm A và B . Gọi (O) là đường tròn đi qua A và B . Từ C vẽ đường vuông góc với OA , nó cắt đường tròn (O) tại D và E . Chứng minh rằng các độ dài AD, AE không đổi.
4. Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Chứng minh rằng $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$.
5. Tam giác ABC có \widehat{B} và \widehat{C} là các góc nhọn, đường cao AH và trung tuyến AM không trùng nhau. Tính \widehat{BAC} biết rằng $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$
6. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Gọi (O) là đường tròn tiếp xúc với AB tại B , tiếp xúc với AC tại C . Gọi DE là một dây cung của đường tròn (O) đi qua H . Chứng minh rằng:
 - a) $ADOE$ là tứ giác nội tiếp.
 - b) $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$

7. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AC lấy điểm M , trên tia đối của tia BA lấy điểm N sao cho $BN = CM$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua một điểm cố định khác A .
8. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi O', O, I theo thứ tự là tâm các đường tròn nội tiếp tam giác ABH, ACH, ABC . Chứng minh rằng:
 - a) $AI \perp OO'$
 - b) $IO' \cdot IB = IO \cdot IC$
 - c) Nếu tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC cố định thì đường vuông góc kẻ từ A đến OO' đi qua một điểm cố định.
9. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O ($AB > AC$). Đường cao AD của tam giác cắt đường tròn tại K . Gọi F là điểm đối xứng của A qua O . Hạ $OM \perp BC$ và kéo dài OM cắt đường tròn tại E . Đường cao CK cắt đường cao AD tại H . Chứng minh rằng:
 - a) $BEKC$ là hình thang cân và $FK = 2MD$
 - b) AE là phân giác của góc FAK
 - c) H và K đối xứng nhau qua BC .
 - d) H và F đối xứng nhau qua M . Suy ra $AH = 2MO$
10. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Gọi M là trung điểm BC . Trung trực Mx của BC cắt AC tại D .
 - a) Chứng minh: A, D, M, B cùng nằm trên một đường tròn.
 - b) Chứng minh: $BC^2 = 2 \cdot CA \cdot CD$
 - c) Gọi E là điểm đối xứng của D qua A , gọi N là giao điểm của MA và BE . Chứng minh: $BN = AC$
11. Cho hai đường tròn tâm O và O' tiếp xúc ngoài nhau tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài CD . Tiếp tuyến chung

- tại A cắt CD tại B . Chứng minh rằng:
- Đường tròn qua A, C, D tiếp xúc với OO' tại A .
 - Đường tròn qua O, B, O' tiếp xúc CD tại B .
12. Cho đường tròn tâm O đường kính AC và đường tròn tâm O' đường kính CB tiếp xúc nhau tại B . Giả sử $AC > BC$. Lấy M là trung điểm của AB . Đường thẳng qua M vuông góc với AB cắt (O) tại D và E . Gọi I là giao điểm của CD với (O') (I khác C). Chứng minh rằng:
- B, I, E thẳng hàng.
 - MI là tiếp tuyến tại I của đường tròn (O')
13. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, AB, AC lần lượt tại D, E, F . Đường tròn tâm K bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC tiếp xúc với BC tại L , với AB kéo dài tại M , với AC tại N .
- Chứng minh trung điểm P của BC cũng là trung điểm của LD
 - Gọi Q là trung điểm của AD . Chứng minh P, I, Q thẳng hàng.
14. *Cho tam giác nhọn ABC . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .
- Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .
 - Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , p là nửa chu vi tam giác DEF .
- (a) Chứng minh $OA \perp EF$
- (b) Tính diện tích tam giác ABC theo p và R

15. Cho tam giác nhọn ABC . Đường tròn tâm O qua A cắt cạnh AB tại K , cắt cạnh BC tại N (O ở miền trong $\triangle ABC$). Đường tròn tâm O_1 qua A, B, C và đường tròn tâm O_2 qua B, K, N cắt nhau tại B và M .
 - a) Chứng minh BO_1OO_2 là hình bình hành.
 - b) Gọi I là giao điểm của O_1O_2 và BO . Chứng minh rằng I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMO .
16. Tam giác ABC có các góc nhỏ hơn 120° . Lấy các cạnh của tam giác ABC làm cạnh, dựng ra phía ngoài tam giác các tam giác đều ABD, ACE, BCF .
 - a) Chứng minh rằng ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác ấy cùng đi qua một điểm K .
 - b) Gọi M, N, P là tâm các đường tròn nói trên. Tam giác MNP là tam giác gì?
 - c) Chứng minh $AF = BE = CD = KA + KB + KC$
17. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD$), điểm M thuộc đáy CD . Gọi (O) là đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AD tại D . Gọi (O') là đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AC tại C . Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại E (khác M). Chứng minh rằng:
 - a) Năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.
 - b) Ba điểm E, M, B cùng thuộc một đường tròn.
18. Cho đường tròn (O) , dây cung AB . Điểm M di chuyển trên cung lớn AB . Vẽ hai đường tròn (O_1) qua M và tiếp xúc với AB tại A , (O_2) qua M và tiếp xúc AB tại B . Gọi N là giao điểm của (O_1) và (O_2) , MN cắt (O) tại P .
 - a) Tứ giác $ANBP$ là hình gì? b) Xác định vị trí của M để tứ giác $ANBP$ có diện tích lớn nhất? Chu vi lớn nhất?

19. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh 1. Điểm M là một điểm thay đổi thuộc đường chéo BD . (I) là đường tròn tâm M tiếp xúc với AD, CD . (K) là đường tròn qua M và tiếp xúc với AB, BC .
- Chứng minh rằng tổng chu vi của hai đường tròn không đổi.
 - Tìm vị trí của M để tổng diện tích của hai đường tròn là nhỏ nhất.
20. Cho (O) , dây AB . M là một điểm chuyển động trên cung lớn AB . H là hình chiếu của M trên AB . Gọi E, F là hình chiếu của H trên MA, MB .
- Chứng minh rằng đường thẳng d qua M và vuông góc với EF luôn qua một điểm cố định.
 - d cắt AB tại D . Chứng minh rằng: $\frac{MA^2}{MB^2} = \frac{AH}{BH} \cdot \frac{AD}{BD}$
21. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). H là trung điểm của BC . I là hình chiếu của H trên AC . Đường tròn đường kính AB cắt BI tại D . Chứng minh AD đi qua tâm HI .
22. Cho tam giác ABC cân tại A . D và E là hai điểm thay đổi trên cạnh AB, AC sao cho $DE = DB + CE$. Phân giác \widehat{DBE} cắt BC tại lấy F thuộc đoạn DE sao cho $DF = BD$.
- Chứng minh $IFEC$ là tứ giác nội tiếp.
 - $DI \perp EI$
 - DI đi qua một điểm cố định.
23. Cho đường tròn (K) , A là một điểm nằm ngoài (K) . Dựng hai tiếp tuyến AB, AC với (K) . Một đường thay đổi luôn tiếp xúc với (K) tại F (F thuộc cung nhỏ BC) cắt AB, AC tại D, E . KD, KE cắt BC tại I, J .

- a) Chứng minh $IDEJ$ là tứ giác nội tiếp.
 b) $\frac{IJ}{DE}$ không đổi.
24. Cho BC là dây cung cố định của (O) . A là điểm trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ nhọn. Các đường cao BD, CE của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H . Vẽ đường tròn $(H; HA)$ cắt AB, AC lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng:
 a) $OA \perp DE$
 b) Đường thẳng qua A vuông góc với MN đi qua điểm cố định.
 c) Đường thẳng qua H vuông góc với MN đi qua một điểm cố định.
25. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . C là một điểm thuộc đoạn AB . Qua C vẽ CD vuông góc AB ($D \in (O)$). Đường tròn (I) tiếp xúc CD, AB và (O) tại K, E, F .
 a) Chứng minh F, K, B thẳng hàng.
 b) Chứng minh $BE = DB$.
26. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn (I) bất kì đi qua B, C và cắt cạnh AB, AC tại M, N . Đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại D . Chứng minh rằng:
 a) $OA \perp MN$
 b) $AKIO$ là hình bình hành.
 c) $\widehat{IDA} = 90^\circ$
27. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . A là một điểm thay đổi trên nửa đường tròn. AH là đường cao của tam giác ABC . Phân giác góc \widehat{BAC} cắt (O) tại K .
 a) Đặt $AH = x$. Tính diện tích tam giác AHK theo R, x .

b) Chứng minh $AH^2 + HK^2$ không phụ thuộc vào vị trí điểm A .

c) Cho $\frac{AH}{HK} = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Tính \widehat{B} .

