

ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN DỰ TUYỂN TOÁN

NĂM HỌC 2010-2011

(Thời gian làm bài 180 phút)

Bài 1. Giải hệ phương trình sau đây trên tập các số thực

$$\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ x^2 - y^2 = \sqrt[3]{3}. \end{cases}$$

Bài 2. Một dãy số thực $\{x_k\}$ được xác định bởi $x_0 = 1$ và $x_n = \sqrt[n]{n + x_{n-1}^n}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn và giới hạn của nó không vượt quá 3.

Bài 3. Xét biểu thức $f(n) = 1 + n + n^2 + \dots + n^{2010}$. Hãy tìm số nguyên $m > 1$ bé nhất để sao cho tồn tại n nguyên dương mà $m \mid f(n)$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng AO cắt (O) tại điểm thứ hai D . Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B, C trên AD . Hai đường thẳng BK và CH theo thứ tự lại cắt (O) tại E, F . Chứng minh AD, BC, EF đồng quy.

Bài 5. Cho n là số nguyên dương, $n > 5$. Tập $X = \{1; 2; 3; \dots; n\}$ gọi là có tính chất T nếu có thể chia X thành hai tập con rời nhau A, B khác rỗng sao cho ba phân tử bất kì thuộc cùng một tập thì tích của chúng khác phần tử còn lại. Chẳng hạn, khi $n = 6$ thì X có tính chất T và $A = \{1; 2; 3\}, B = \{4; 5; 6\}$.

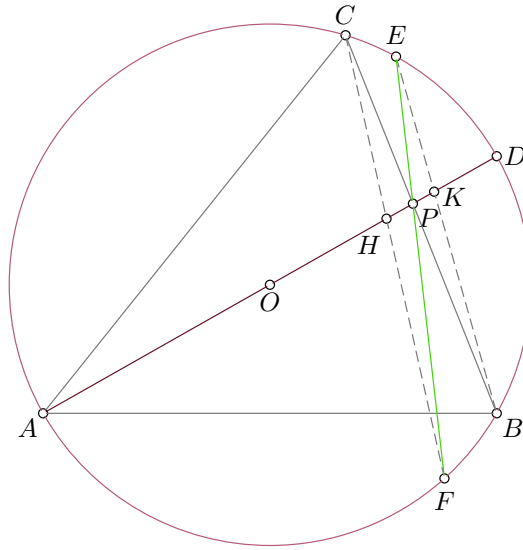
- (a) Chứng minh rằng với mọi $7 \leq n \leq 41$, tập X có tính chất T ?
- (b) Chứng minh rằng với mọi $42 \leq n \leq 47$, tập X vẫn có tính chất T ?
- (c) Hãy xác định n lớn nhất sao cho tập X có tính chất T ?

LỜI GIẢI

1. Đáp số của bài toán là $x = \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{2}$ và $y = \frac{\sqrt[3]{3} - 1}{2}$.

2.

3. Ta thấy rằng $f(1)$ chia hết cho 2011, ta sẽ chứng minh rằng với mọi p nguyên tố $p < 2011$ đều không thỏa mãn. Thực vậy nếu $p \mid f(n)$ thì $p \mid n^{2011} - 1$ do đó $p \mid n - 1$ hoặc $p \equiv 1 \pmod{2011}$. Tuy nhiên, cả hai đều dẫn tới $p \geq 2011$, mâu thuẫn.



4.

5. a) Với $7 \leq n \leq 41$, tập X có tính chất T và

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}, \quad B = \{6; 7; \dots; n\}.$$

b) Với $42 \leq n \leq 47$, ta có

$$A = \{2; 3; 4; 5; 7\}, \quad B = \{6; 8; 9; 10; \dots; 47\}.$$

c) Xét $n \geq 48$. Giả sử được $2 \in A$. Ta xét các trường hợp

Trường hợp 1. Các phần tử 3; 4 thuộc A . Khi đó: 6; 8; 12 $\in B$. Nếu $n \geq 96$ thì 48; 72; 96 $\in A$. Suy ra 2; 48; 96 $\in A$, vô lý. Do đó $n \leq 95$.

Trường hợp 2. Các phần tử 3; 4 thuộc B . Khi đó: $12 \in A$ và $6 \in B$. Do $4; 6 \in B$ nên $24 \in A$. Suy ra $2; 12; 24 \in A$, vô lý.

Trường hợp 3. Các phần tử $3 \in A, 4 \in B$. Khi đó: $6 \in B, 24 \in A, 48 \in A$. Suy ra $2; 24; 48 \in A$, vô lý.

Trường hợp 4. Các phần tử $3 \in B, 4 \in A$. Khi đó, $8 \in B, 24 \in A, 6 \in B, 48 \in B$. Suy ra $6; 8; 48 \in B$, vô lý.

Từ các trường hợp trên ta suy ra $n \leq 96$. Bây giờ ta chỉ rằng với $n = 95$ thì X có tính chất T .
 Thật vậy, khi đó

$$A = \{6; 8; 9; 10; \dots; 47\}, \quad B = X \setminus A.$$