HƯỚNG DẪN HỌC SINH LÀM DỰ ÁN VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CHUYÊN ĐẠI HỌC KHOA HOC TỰ NHIÊN

PGS.TS. Nguyễn Vũ Lương
Th.S. Hoàng Ngọc Minh
TS. Phạm Văn Quốc

Mở đầu: Hiện nay một số trường ở các thành phố lớn như Hà Nội, thành phố Hồ Chí Minh, thành phố Huế ... đang có xu hướng hội nhập quốc tế và dạy các môn học bằng tiếng Anh. Rất nhiều phụ huynh rất thích mô hình dạy học này vì đỡ tốn kém nhiều so với việc đầu tư cho con đi du học. Nhưng hiệu quả của mô hình giảng dạy này thế nào là một câu hỏi cần đặt ra và không thể chờ đợi vài năm nữa. Nhiều gia đình tập trung cho con em mình học tiếng Anh, sao nhãng việc học ở trường. Sử dụng tiếng mẹ đẻ mà học còn kém huống chi sử dụng một ngôn ngữ khác. Chỉ cần điều này khiến chúng ta nghi ngờ trình độ của các học sinh đi du học nói chung. Tuy nhiên đào tạo học sinh giỏi tiếng Anh có khả năng đọc sách tiếng Anh, có khả năng viết các báo cáo và trình bày các kết quả của mình bằng tiếng Anh vẫn là nhiệm vụ cấp bách, quan trọng hàng đầu của ngành giáo dục. Vậy bằng cách nào giỏi tiếng Anh mà vẫn gìn giữ được truyền thống đào tạo học sinh giỏi là câu hỏi cần được trả lời. Thông qua việc hướng dẫn học sinh làm dự án trong chu trình dạy học tiếp cận chuẩn quốc tế đã thực hiện bước đầu thành công ở Khối chuyên Toán – Tin Đại học Khoa học Tự Nhiên. Trong bài này nhóm tác giả trình bày cách hướng dẫn học sinh làm dự án gồm các bước sau: Bước 1: Giao các đề tài nghiên cứu cho các nhóm học sinh (5 – 7 học sinh) và nhiệm vụ của dự án, tài liệu tham khảo.
Bước 2:
Học sinh thực hiện dự án theo nhóm (mỗi dự án có nội dung như một chương học).
Bước 3:
Các nhóm học sinh trình bày dự án và đánh giá kết quả của các nhóm khác.
Bước 4:
Tổng kết dự án Sau đây là một số nội dung cụ thể.

§1. DỰ ÁN THỰC TIỄN

Giả sử một khu đô thị mới có mạng lưới giao thông là một lưới ô vuông $m \times n$ (m cột, n hàng). Ta cần di chuyển từ địa điểm $A(a, b)$ tới $B(c, d)$ $(0 \leqslant a, c \leqslant m, 0 \leqslant b, d \leqslant n)$. Hỏi có bao nhiêu con đường ngắn nhất để đi từ A đến B.

Để đơn giản trước hết ta xét trường hợp $a \leqslant c, b \leqslant d$. Khi đó con đường ngắn nhất để đi từ A đến B là đi sang phải $c - a$ lần và đi lên trên $d - b$ lần (mỗi lần đi một đoạn bằng độ dài cạnh của ô vuông nhỏ). Mỗi lần đi ngang ta gán số 0 và mỗi lần đi lên ta gán số 1.

Như vậy mỗi đường đi tương ứng 1-1 với một bộ số, trong đó có đúng $c - a$ số 0 và $d - b$ số 1. Để có một bộ số như vậy ta chỉ cần chọn ra $c - a$ vị trí trong $c - a + d - b$ vị trí để đặt số 0 và còn lại đặt số 1. Vậy số đường đi ngắn nhất từ A đến B là

$$C_{c-a+d-b}^{c-a}.$$

Đối với các trường hợp còn lại ta cũng làm tương tự với chú ý rằng:

- Nếu $a \leqslant c$ thì ta đi sang phải $c - a$ lần.

- Nếu $a \geqslant c$ thì ta đi sang trái $a - c$ lần.
- Nếu $b \leqslant d$ thì ta đi lên trên $d - b$ lần.
- Nếu $b \geqslant d$ thì ta đi xuống dưới $b - d$ lần.

Như vậy số con đường ngắn nhất để đi từ A đến B trong trường hợp tổng quát là

$$C^{|c-a|}_{|c-a|+|b-d|}.$$

§2. DỰ ÁN TÍCH HỢP

Trong phần này ta sẽ áp dụng tổ hợp để xây dựng số e.

Xét dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Trước hết ta chứng minh (u_n) là dãy bị chặn trên, cụ thể là $u_n < 3,\ \forall n$.

Thật vậy, theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)\ldots(n-1)n}{n^k} \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 3 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Suy ra $u_n < 3,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tiếp theo ta chứng minh (u_n) là dãy tăng, tức là ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \forall n = 3, 4, \ldots \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\ \Leftrightarrow &\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)}\right]^n > \frac{n+1}{n+2} \\ \Leftrightarrow &\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n > \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Ta có (với $n \geqslant 3$)

$$\begin{aligned}
VT &= 1 - \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{2}.\frac{1}{(n+1)^4} + \sum_{k=3}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{1}{(n+1)^{2k}} \\
&= \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{2(n+1)^3} + \sum_{k=3}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{1}{(n+1)^{2k}} \\
&= \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{n}{2(n+1)^3} + \sum_{k=3}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{1}{(n+1)^{2k}} \\
&> \frac{n+1}{n+2} + \frac{n}{2(n+1)^3} - \sum_{k=3}^{n} C_n^k \frac{1}{(n+1)^{2k}}.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} C_n^k \frac{1}{(n+1)^{2k}} &= \sum_{k=3}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}.\frac{1}{(n+1)^{2k}} \\
&= \sum_{k=3}^{n} \frac{(n-k+1)\dots n}{k!(n+1)^{2k}} \\
&< \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(n+1)^k} < \frac{1}{(n+1)^3}.\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Với $n \geqslant 3$ thì $n^2 \geqslant 3n > 2(n+1)$ nên

$$\frac{1}{n(n+1)^2} < \frac{n}{2(n+1)^3}.$$

Suy ra

$$VT > \frac{n+1}{n+2} + \frac{n}{2(n+1)^3} - \frac{1}{n(n+1)^2} > \frac{n+1}{n+2}.$$

Như vậy ta đã chứng minh được (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi 3. Do đó tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Ta kí hiệu đó là số e, tức là

$$\lim_{n\to\infty} u_n = e.$$

§3. DỰ ÁN GIÁO DỤC

Một số kĩ năng giải bài toán đếm

Trong mục này chúng ta trình bày những kĩ năng giải bài toán đếm. Những kĩ năng tuy đơn giản nhưng thực sự cần thiết và không thể thiếu được khi tìm lời giải. Thật khó đánh giá kĩ năng nào là quan trọng nên chúng ta tạm sắp xếp theo trình tự đơn giản được sử dụng nhiều đến phức tạp.

1. Phương pháp liệt kê

Chia tập hữu hạn cần đếm thành những tập con rời nhau dễ đếm hơn.

Ví dụ 1. *Xét tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, tìm số các số gồm 3 chữ số phân biệt của A, chia hết cho 3.*

Giải. Ta có $\{0, 3, 6\}$ là số chia hết cho 3, $\{1, 4, 7\}$ chia cho 3 dư 1, $\{2, 5, 8\}$ chia cho 3 dư 2.

Tổng các chữ số chia hết cho 3 gồm các trường hợp:

+) Trường hợp 1. (3 số chia hết cho 3)

$$d_1 = 3! - 2! = 4 \text{ (trừ trường hợp số 0 đứng đầu).}$$

+) Trường hợp 2. (3 số chia 3 dư 1)

$$d_2 = 3! = 6.$$

+) Trường hợp 3. (3 số chia 3 dư 2)

$$d_3 = 3! = 6.$$

+) Trường hợp 4. (1số dư 0, 1 số dư 1, 1 số dư 2)

Có 2 cách chọn 1 số chia 3 dư 0 khác 0, 3 cách chọn 1 số chia 3 dư 1, 3 cách chọn 1 số chia 3 dư 2. Vậy số cách chọn là 2.3.3 (quy tắc nhân).

$$d_4 = 2.3.3.3! = 108.$$

1 số chia hết cho 3 là 0, 3 cách chọn 1 số chia 3 dư 1, 3 cách chọn 1 số chia 3 dư 2. Số cách chọn là 3.3.

$$d_5 = 3.3.(3! - 2!) = 36.$$

Đáp số: $d = 4 + 6 + 6 + 108 + 36 = 160$.

Ví dụ 2. *Kí hiệu A là tập tất cả các số giữa 1 và 700 chia hết cho 3, B là tập các số giữa 1 và 300 chia hết cho 7. Tìm số các cặp có thứ tự (a, b) sao cho $a \in A, b \in B, a \neq b, a + b$ là số chẵn.*

Giải. Ta có A có 233 phần tử $(3, 6, 9, \ldots, 699)$ trong đó có 117 số lẻ, 116 số chẵn.

B có 42 phần tử $(7, 14, 21, dots, 294)$ trong đó có 21 số lẻ, 21 số chẵn.

$A \cap B$ có 14 phần tử $(3.7, 3.7.2, \ldots, 3.7.14)$.

Số cặp cần tìm bằng

$$\begin{aligned}
d &= \big|(a, b), a \in A, b \in B, a + b \text{ chẵn}\big| - \big|(a, b), a \in A, b \in B, a = b\big| \\
\Rightarrow d &= \big|(a, b), a \in A, b \in B, a \text{ chẵn}, b \text{ chẵn}\big| + \big|(a, b), a \in A, b \in B, a \text{ lẻ}, b \text{ lẻ}\big| \\
&\quad - \big|(a, b), a \in A, b \in B, a = b\big| \\
&= 116.21 + 117.21 - 14 = 4879.
\end{aligned}$$

2. Đếm các phần tử của phần bù

Khi số các phân tử của phần bù dễ đếm chúng ta xác định số phần tử của tập cần đếm A qua số phần tử của phần bù.

$$|A| = |X| - |X \setminus A| \text{ (A là tập con của X).}$$

Ví dụ 3. *Xét tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, tìm số các số gồm 4 chữ số của A sao cho trong 4 chữ số có ít nhất hai chữ số giống nhau.*

Giải. - Có 5 cách chọn chữ số thứ nhất, 6 cách chọn chữ số thứ hai, 6 cách chọn chữ số thứ ba, 6 cách chọn chữ số thứ tư.

Suy ra số các số gồm 4 chữ số của A là $d_1 = 5.6^3$.

- Ta tìm số các số gồm 4 chữ số phân biệt của A.

Có $C_6^4.4!$ bộ 4 số phân biệt của A. Ta phải trừ đi số bộ 4 số có số 0 đứng đầu bằng $C_5^3.3!$. Vậy số các số gồm 4 chữ số phân biệt của A bằng $d_2 = C_6^4.4! - C_5^3.3!$.

- Số các số thỏa mãn đề bài bằng $d = d_1 - d_2 = 5.6^3 - C_6^4.4! + C_5^3.3!$

Ví dụ 4. *Xét đa giác đều 10 đỉnh, hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 cạnh là 3 đường chéo đa giác.*

Giải. Ta có C_{10}^3 tam giác có 3 đỉnh là đỉnh đa giác. Những tam giác này chia làm 3 loại.

Loại 1: Những tam giác chỉ có 1 cạnh là đường chéo và 2 cạnh là 2 cạnh liên tiếp của đa giác. Ta có $d_1 = 10$.

Loại 2: Tam giác có 2 cạnh là đường chéo. Ta có 10 cạnh. Hai đầu mút của mỗi cạnh được nối với 6 đỉnh không kề liền tạo thành 6 tam giác. Số tam giác có 2 cạnh là đường chéo bằng $d_2 = 10.6 = 60$.

Loại 3: (Tam giác có 3 cạnh là đường chéo) chính là loại tam giác cần đếm theo yêu cầu của đề bài. Ta có

$$d_3 = C_{10}^3 - (d_1 + d_2) = \frac{10.9.8}{3!} - (60 + 10) = 50.$$

3. Sử dụng các công thức tổ hợp

Những công thức và các đẳng thức tổ hợp là công cụ rất hiệu quả giúp chúng ta tìm ra lời giải của bài toán.

Ví dụ 5. *Xét một lưới ô vuông $(n \times n)$ trên hệ trục tọa độ. Xuất phát từ điểm $(0, 0)$ ta đi trên các cạnh ô vuông sang phải và lên trên đến điểm (n, n). Hỏi có bao nhiêu đường đi từ $(0, 0)$ đến điểm (n, n).*

Giải. Để đi từ $(0, 0)$ đến điểm (n, n) ta cần đi ngang sang phải n lần và đi lên n lần (mỗi lần đi một đoạn bằng 1 là độ dài cạnh của ô vuông). Mỗi lần đi ngang ta gán số 0 và đi lên ta gán số 1. Như vậy mỗi đường đi tương ứng $1 - 1$ với một bộ $2n$ số trong đó có đúng n số 0 và n số 1. Để có một bộ số như vậy ta chỉ cần chọn ra n vị trí trong $2n$ vị trí để đặt số 0 và còn lại để đặt số 1. Số cách chọn ra n vị trí trong $2n$ vị trí bằng C_{2n}^n.

Đáp số: C_{2n}^n.

Ví dụ 6. *Giả sử X là tập n phần tử, tìm số cặp không thứ tự $[A, B]$ với A, B là những tập con của X thỏa mãn $A \neq B, A \cup B = X$ ($[A, B]$ và $[B, A]$ là trùng nhau và được đếm là 1 cặp).*

Giải. Giả sử A có r phần tử ($0 \leqslant r \leqslant n$), khi đó có C_n^r cách chọn các tập A. Ứng với tập A thì tập B phải chứa $n-r$ phần tử còn lại của X và một số phần tử của A.

Khi đó $B = (X \setminus A) \cup C$ (C là tập con của A). Như vậy số cách chọn B bằng số cách chọn tập con C của tập A gồm r phần tử bằng

$$C_r^0 + C_r^1 + C_r^2 + \cdots + C_r^r = 2^r.$$

Theo quy tắc nhân thì số cách chọn cặp $[A, B]$ ứng với mỗi r bằng $C_n^r.2^r$. Suy ra số cặp phần tử phải tìm (A có thể bằng B) bằng $d_1 = \sum\limits_{r=0}^{n} 2^r.C_n^r = (1+2)^n = 3^n$. Trong số cách chọn này chỉ có duy nhất một trường hợp $A = B = X$. Suy ra số cặp thỏa mãn yêu cầu của bài toán là

$$d = 3^n - 1.$$

4. Sử dụng công thức truy hồi

Ví dụ 7. *Trên mặt phẳng có n đường thẳng sao cho không có hai đường thẳng song song, không có ba đường thẳng nào đồng quy. Hỏi các đường thẳng chia mặt phẳng thành mấy phần.*

Giải. Kí hiệu $S(n)$ là số phần mặt phẳng được chia bởi n đường thẳng. Đường thẳng thứ $n+1$ theo giả thiết sẽ cắt tất cả n đường thẳng trước tại đúng n điểm và đường thẳng này bị chia thành $n+1$ đoạn bởi n điểm chia đó. Mỗi đoạn biến 1 miền cũ thành 2 miền mới, nên số miền tăng lên là $n+1$. Suy ra $S(n+1) = S(n) + n + 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} S(n) &= n + S(n-1) = n + (n-1) + S(n-2) = \cdots \\ &= n + (n-1) + \cdots + 2 + S(1) \\ &= 1 + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

5. Xây dựng phần tử đếm

Để có kết quả chính xác khi đếm chúng ta cần mô tả phần tử đếm sau đó mới sắp xếp nhờ hoán vị. Như vậy giải bài toán đếm gồm 2 bước chính:

1. Mô tả (xây dựng) phần tử đếm.

2. Hoán vị.

Ví dụ 8. *Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, có bao nhiêu số gồm 6 chữ số trong đó có 3 số a, 2 số b, 1 số c với $a, b, c \in A, a \neq b \neq c$.*

Giải. - Có C_5^3 cách lấy 3 phần tử phân biệt của A.

- Có 3 cách chỉ định số nào xuất hiện 3 lần, có 2 cách chỉ định một trong 2 số còn lại xuất hiện 2 lần.

Suy ra có $C_5^3.3.2$ cách chọn ra số xuất hiện 3 lần là số nào, số xuất hiện 2 lần là số nào và số xuất hiện 1 lần là số nào (ví dụ như $(3,3,3,2,2,4)$).

Hoán vị các bộ số nhận được ta thu được đáp số của bài toán

$$d = C_5^3.3.2.\frac{6!}{3!.2!}.$$

Ví dụ 9. *Cho tập $A = \{0,1,2,3,4,5\}$, có bao nhiêu số gồm 5 chữ số của A mà mỗi số có đúng 3 chữ số giống nhau.*

Giải. - Trước hết ta tìm số bộ 5 chữ số thỏa mãn yêu cầu của bài toán sau đó trừ đi các bộ có số 0 đứng đầu.

Có C_5^3 cách chọn 3 vị trí trong 5 vị trí để đặt 3 chữ số giống nhau. Có 6 cách chọn 1 trong 6 số của A để đặt vào 3 vị trí được chọn (gọi số xuất hiện 3 lần là $a \in A$). Có 5 cách chọn $b \in A, b \neq a$, 5 cách chọn $c \in A, c \neq a$.

Vậy số bộ 5 chữ số thỏa mãn yêu cầu của bài toán là

$$d_1 = C_5^3.6.5.5.$$

- Xét trường hợp có số 0 đứng đầu, ta xét 4 số còn lại.

Trường hợp 1: (3 số giống nhau khác 0). Có C_4^3 cách chọn 3 vị trí để đặt 3 số giống nhau, có 5 cách chọn 3 số giống nhau $a \in A$ là số nào để đặt vào 3 vị trí đã chọn, có 5 cách chọn $b \in A, b \neq a$ để đặt vào vị trí còn lại. Vậy số bộ 5 số trong trường hợp này bằng $d_2 = C_4^3.5.5$.

Trường hợp 2: (3 số giống nhau là 3 số 0). Có C_4^2 cách chọn 2 vị trí để đặt thêm 2 số 0, có 5 cách chọn $b \in A, b \neq 0$, 5 cách chọn $c \in A, c \neq 0$ để đặt vào 2 vị trí còn lại. Vậy số bộ 5 số trong trường hợp này bằng

$$d_3 = C_4^2.5.5.$$

Đáp số: $d = d_1 - (d_2 + d_3) = C_5^3.6.5.5 - C_4^3.5.5 - C_4^2.5.5 = 25.(60-4-6) = 25.50.$

6. Phương pháp đánh số

Khi chọn các vị trí để sắp xếp các phần tử theo yêu cầu của bài toán đặt ra phức tạp chúng ta nên đánh số các vị trí và thay thế mỗi cách chon vị trí bằng việc chọn một bộ số tương ứng có tính chất tương ứng với các yêu cầu của bài toán. Việc tìm các bộ số với tính chất cho trước là rất đơn giản.

Ví dụ 10. *Một tổ học sinh có 7 nam, 4 nữ, hỏi có bao nhiêu cách xếp tổ thành một hàng ngang sao cho 2 em nữ không đứng cạnh nhau.*

Giải. Ta đánh số các vị trí từ 1 đến 11, khi đó việc chọn 4 vị trí không liền kề nhau để xếp các em nữ tương ứng với việc chọn 4 số a, b, c, d thỏa mãn tính chất sau:

$$4 \leqslant a+3 < b+2 < c+1 < d \leqslant 11.$$

Để có bộ 4 số (a, b, c, d) thỏa mãn yêu cầu của bài toán ta chỉ cần chọn 4 số phân biệt $a+3, b+2, c+1, d$ trong 8 số từ 4 đến 11. Số cách chọn bằng C_8^4.

Suy ra có C_8^4 cách chọn 4 vị trí không kề nhau để xếp các em nữ. Có 4! cách xếp 4 nữ, 7! cách xếp 7 nam.

Vậy số cách xếp bằng $d = C_8^4.4!.7!$.

Ví dụ 11. *Xét đa giác đều n đỉnh $(n \geqslant 12)$, hỏi có bao nhiêu tứ giác có 4 cạnh là 4 đường chéo đa giác.*

Giải. Ta đánh số các đỉnh là $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tương ứng với các chỉ số.

Ta đếm các tứ giác thỏa mãn yêu cầu của bài toán có đỉnh A_1. Các đỉnh A_2, A_n sẽ không được chọn vì A_1A_2, A_1A_n là cạnh đa giác. Ta cần chọn thêm 3 đỉnh tương ứng với bộ 3 số (a, b, c) thỏa mãn tính chất

$$5 \leqslant a+2 < b+1 < c \leqslant n-1 \text{ (vì giữa 2 đỉnh phải có ít nhất 1 đỉnh).}$$

Vậy số cách chọn 3 đỉnh bằng số cách chọn 3 số phân biệt trong $n-5$ số từ 5 đến $n-1$. Suy ra số các tứ giác đỉnh A_1 thỏa mãn yêu cầu của bài toán bằng C_{n-5}^3.

Vì có n đỉnh và mỗi tứ giác được đếm lặp lại 4 lần theo 4 đỉnh nên số tứ giác cần tìm bằng

$$d = \frac{n.C_{n-5}^3}{4}.$$

7. Phương pháp xây dựng phép tương ứng $1-1$

Xét hai tập hữu hạn phần tử A và B, khi đó tồn tại một song ánh (phép tương ứng $1-1$) $\varphi : A \longrightarrow B$ khi và chỉ $|A| = |B|$. Như vậy nếu tồn tại song ánh $\varphi : A \longrightarrow B$ ta có thể thay thế việc đếm các phần tử của tập A bằng việc đếm các phần tử của B.

Ví dụ 12. *Tìm số bộ 3 số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn đẳng thức*

$$x + y + z = 100 \tag{1}$$

Giải. Mỗi bộ số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn (1) tương ứng $1-1$ với bộ

$$(\underbrace{11...1}_{x \text{ số}}\ 0\ \underbrace{11...1}_{y \text{ số}}\ 0\ \underbrace{11...1}_{z \text{ số}}).$$

Để có 1 bộ số như trên ta cần chọn 2 vị trí không kề nhau trong 102 vị trí để đặt 2 số 0, còn lại đặt số 1. Hai vị trí cần tìm tương ứng với 2 số a, b thỏa mãn

$$3 \leqslant a+1 < b \leqslant 101 \text{ vì 2 số 0 không thể đứng đầu và đứng cuối.}$$

Như vậy số bộ thỏa mãn yêu cầu của bài toán số cách chọn 2 số phân biệt trong 99 số từ 3 đến 101.

Đáp số $d = C_{99}^2$.

Ví dụ 13. *Xác định số cách chọn bộ 5 số từ tập 18 số nguyên dương đầu tiên sao cho bất kì một cặp 2 số trong 5 số được chọn có hiệu số giữa số lớn và số bé lớn hơn hoặc bằng 2.*

Giải. Kí hiệu A là tập hợp các bộ 5 số $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kí hiệu B là tập hợp các bộ 5 số phân biệt của 14 số nguyên dương đầu tiên. Ta xây dựng ánh xạ $\varphi : A \longrightarrow B$ theo quy ước sau

$$\varphi(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, a_4 - 3, a_5 - 4)$$

trong đó $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.

$$\begin{aligned} \text{Vì }\ & a_2 - a_1 \geqslant 2 \rightarrow a_2 - 1 \geqslant a_1 + 1 > a_1, \\ & a_3 - a_2 \geqslant 2 \rightarrow a_3 - 2 \geqslant a_2 > a_2 - 1, \\ & a_4 - a_3 \geqslant 2 \rightarrow a_4 - 3 \geqslant a_3 - 1 > a_3 - 2, \\ & a_5 - a_4 \geqslant 2 \rightarrow a_5 - 4 \geqslant a_4 - 2 > a_4 - 3, \\ & a_1 \geqslant 1, a_5 - 4 \leqslant 18 - 4 = 14, \\ \Rightarrow & (a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, a_4 - 3, a_5 - 4) \in B. \end{aligned}$$

Như vậy với mỗi phần tử của A được ứng với duy nhất một phần tử của B qua ánh xạ φ.

Tương tự với $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in B$ luôn tồn tại duy nhất $(b_1, b_2 + 1, b_3 + 2, b_4 + 3, b_5 + 4) \in A$ để

$$\varphi(b_1, b_2 + 1, b_3 + 2, b_4 + 3, b_5 + 4) = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5).$$

Suy ra φ là phép tương ứng $1 - 1$ giữa A và B. Vậy số phần tử của A bằng số phần tử của B bằng C_{14}^5.

Đáp số: $d = C_{14}^5$.

8. Sử dụng nguyên lí bao gồm và loại trừ

Khi chúng ta biểu diễn tập cần đếm $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ mà các tập A_i có giao khác tập trống $(A_i \cap A_j \neq \emptyset)$ thì khi đó chúng ta không thể sử dụng quy tắc cộng mà chúng ta cần xây dựng một quy tắc đếm mới như sau:

- Xét 2 tập hữu hạn A, B mà $A \cap B \neq \emptyset$, nếu ta lấy số phần tử của A cộng với số phần tử của B thì các phần tử thuộc $A \cap B$ sẽ được đếm 2 lần. Suy ra

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

- Xét 3 tập hữu hạn $A, B, C, A \cap B \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset, C \cap A \neq \emptyset, A \cap B \cap C \neq \emptyset$, khi đó các phần tử của $A \cap B, B \cap C, C \cap A$ được đếm 2 lần, các phần tử của $A \cap B \cap C$ được đếm 3 lần. Suy ra

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Mở rộng kết quả ta thu được kết quả cơ bản sau gọi là nguyên lí bao gồm và loại trừ.

Định lí 1. *Giả sử $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$ là những tập hữu hạn cho trước. Khi đó*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum (-1)^{r+1} \left|M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap M_{j_3} \cap \cdots \cap M_{j_s}\right| \tag{2}$$

trong đó tổng được lấy theo tổng tất cả các bộ khác trống $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ của tập chỉ số $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng mọi phần tử bất kì của $\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right|$ được đếm 1 lần theo công thức (2). Giả sử m là một phần tử bất kì, $m \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i$. Kí hiệu $M_{k_1}, M_{k_2}, \ldots, M_{k_s}$ là các tập chứa m.

Có C_s^1 tập chứa m (m được đếm 1 lần).

Có C_s^2 tập giao của 2 tập chứa m (m được đếm 2 lần).

...

Có C_s^s tập giao của s tập chứa m (m được đếm s lần).

Theo công thức (2) số lần được đếm của m bằng

$$d = C_s^1 - C_s^2 + C_s^3 - \cdots + (-1)^{s+1} C_s^s.$$

Ta có $(1+x)^s = \sum_{k=0}^{s} C_s^k x^k$.

Chọn $x = -1$ ta thu được

$$0 = C_s^0 - C_s^1 + C_s^2 - \cdots + (-1)^s C_s^s$$

Suy ra

$$C_s^1 - C_s^2 + C_s^3 - \cdots + (-1)^{s+1} C_s^s = C_s^0 = 1 = d.$$

□

Thực chất phương pháp chứng minh chính là kĩ năng giúp chúng ta giải một số dạng bài toán đếm khá phức tạp sau đây.

Ví dụ 14. *Có bao nhiêu cách sắp xếp từ bộ chữ cái MAYMAN sao cho mỗi cách sắp xếp 2 chữ cái giống nhau không được đứng cạnh nhau.*

Giải. Kí hiệu M_1 là số cách sắp xếp mà 2 chữ M đứng cạnh nhau, M_2 là số cách sắp xếp mà 2 chữ A đứng cạnh nhau, d_0 là tất cả các cách sắp xếp.

Khi đó số các cách sắp xếp phải tìm bằng

$$d = d_0 - |M_1 \cup M_2| = d_0 - |M_1| - |M_2| + |M_1 \cap M_2|.$$

Ta có $d_0 = \dfrac{6!}{2!2!} = 36.5 = 180$.

Hai chữ A đứng cạnh nhau coi là một chữ ta có bộ MAYMN có $\dfrac{5!}{2!} = 5.4.3 = 60 = M_2$, tương tự $M_1 = 60$.

$M_1 \cap M_2$ ta coi 2 chữ M, 2 chữ A đứng cạnh nhau như một chữ ta có $|M_1 \cap M_2| = 4!$ (Hoán vị của MAYN).

Suy ra $D = 180 - 120 + 24 = 84$.

Ví dụ 15. *Chứng minh rằng bản báo cáo thành tích cuối năm của một lớp sau đây là sai. "Lớp có 45 học sinh, trong đó có 30 em nam. Lớp có 30 em đạt loại giỏi và trong số này có 16 nam. Lớp có 28 em chơi thể thao và trong số này có 18 nam và 17 em đạt loại giỏi. Lớp có 15 nam đạt loại giỏi và chơi thể thao."*

Giải. Kí hiệu $R = 45$ số học sinh của lớp.
A - số học sinh nam.
B - số học sinh giỏi.
C - số học sinh chơi thể thao.
Khi đó

$$\begin{aligned}
n &= |R| - |A \cup B \cup C| \\
&= |R| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) - |A \cap B \cap C| \\
&= 45 - (30 + 30 + 28) + (16 + 18 + 17) - 15 = -7 \ \text{(Mâu thuẫn).}
\end{aligned}$$

Ví dụ 16. *Có bao nhiêu số nguyên dương là bội của* 3 *hoặc* 4 *và không chia hết cho* 5.

Giải. Có $\left[\dfrac{2001}{3}\right] = 667$ số là bội của 3.
Có $\left[\dfrac{2001}{4}\right] = 500$ số là bội của 4.
Nhưng có $\left[\dfrac{2001}{3.4}\right] = 166$ số là bội của 3.4.
Vậy số các bội của 3 hoặc 4 bằng

$$667 + 500 - 166 = 1001.$$

Có $\left[\dfrac{2001}{15}\right] = 133$ số là bội của 3 và 5.
Có $\left[\dfrac{2001}{20}\right] = 100$ số là bội của 4 và 5.
Có $\left[\dfrac{2001}{60}\right] = 33$ số là bội của $3, 4$ và 5.
Kí hiệu A là tập các bội của 3 chia hết cho 5, B là tập các bội của 4 chia hết cho 5. Khi đó

$$\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
&= 133 + 100 - 33 = 200.
\end{aligned}$$

Số các số bội của 3 hoặc 4 không chia hết cho 5 bằng

$$d = 1001 - 200 = 801.$$

9. Nguyên lí phân phối các phần tử vào hộp

Định lí 2. *Giả sử có N đối tượng khác nhau và k hộp khác nhau $T_1, T_2, \dots, T_k$. Ta xếp n_1 đối tượng vào hộp T_1, n_2 đối tượng vào hộp T_2, $\dots$, n_k đối tượng vào hộp T_k , với $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$. Giả sử thứ tự giữa các đối tượng trong từng hộp là không quan tâm, khi đó số tất cả các cách phân phối các phần tử vào hộp bằng*

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Chứng minh. Mỗi cách xếp vào hộp được mô tả như sau: (tương ứng 1-1)

Xếp N phần tử thành một hàng ngang.

Xếp n_1 đối tượng đầu vào hộp T_1.

Xếp n_2 đối tượng tiếp theo vào hộp T_2.

...

Xếp n_k đối tượng cuối cùng vào hộp T_k.

Vì không quan tâm đến thứ tự của các phần tử trong từng hộp nên hoán vị của n_1 phần tử đầu, n_2 phần tử tiếp theo, $\dots$, n_k phần tử cuối cùng trong dãy hàng ngang không tạo nên cách phân bố mới. Như vậy số cách phân bố các đối tượng vào hộp bằng số cách hoán vị có lặp của N phần tử gồm $n_1, n_2, \dots, n_k$ phần tử giống nhau $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$. Ta có

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

□

Định lí 3. *Xếp N đối tượng vào k hộp theo quy tắc sau:*

Xếp vào j_1 hộp mỗi hộp m_1 phần tử (đối tượng), xếp vào j_2 hộp mỗi hộp m_2 đối tượng, $\dots$, xếp vào j_α hộp mỗi hộp m_α đối tượng. Trong đó $j_1 + j_2 + \dots + j_\alpha = k, m_1j_1 + m_2j_2 + \dots + m_\alpha j_\alpha = N$. Không quan tâm đến thứ tự của các phần tử trong từng hộp thì số cách phân phối N đối tượng vào k hộp bằng

$$P(m_1, m_2, \dots, n_\alpha, j_1, j_2, \dots, j_\alpha) = \frac{N!}{(m_1!)^{j_1}.(m_2!)^{j_2}\dots(m_\alpha!)^{j_\alpha}} j_1!j_2!\dots j_\alpha!.$$

Chứng minh. Ta mô tả một cách xếp các đối tượng vào hộp thỏa mãn yêu cầu của bài toán như sau:

Xếp N phần tử thành một hàng ngang và xếp vào hộp như sau:

Vì thay đổi số thứ tự các đối tượng trong từng hộp hoặc thay đổi vị trí của j_k hộp có số phần tử bằng nhau không tạo ra phân phối mới nên số phân phối trong từng trường hợp này bằng

$$P(m_1, m_2, \dots, n_\alpha, j_1, j_2, \dots, j_\alpha) = \frac{N!}{(m_1!)^{j_1}.(m_2!)^{j_2}\dots(m_\alpha!)^{j_\alpha}} j_1!j_2!\dots j_\alpha!.$$

- Xét trường hợp $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_k = n$. Khi đó $N = kn$ đối tượng được xếp vào k hộp khác nhau $T_1, T_2, \dots, T_k$ bằng

$$P_1(n, k) = \frac{(kn)!}{(n!)^k}.$$

- Xét trường hợp $n_1 = n_2 = n_3 = \cdots = n_k = n$ được phân phối vào k hộp mà thứ tự giữa k hộp là không quan tâm bằng

$$P_2(n,k) = \frac{(kn)!}{k!(n!)^k}.$$

□

Sau đây chúng ta xét một số trường hợp cụ thể ứng dụng các kết quả này.

Ví dụ 17. *Có 10 cặp vợ chồng đi du lịch, các cặp vợ chồng đi trên 5 con thuyền nhỏ, mỗi thuyền chở được 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho mỗi thuyền có đúng 2 nam và 2 nữ.*

Giải. Đầu tiên ta xếp 10 nam vào 5 thuyền mỗi thuyền 2 nam. Có 10! cách xếp 10 nam thành một hàng ngang. Hai nam đầu ta xếp vào 1 trong 5 thuyền, hai nam xếp sau ta xếp vào 1 trong 4 thuyền còn lại, ..., hai nam cuối cùng ta xếp vào thuyền thứ 5. Vì thay đổi thứ tự 2 nam trong một thuyền không thu được cách xếp mới. Vì thay đổi thứ tự giữa các thuyền cũng không thu được cách xếp mới. Suy ra số cách xếp 10 nam vào 5 thuyền bằng $P_1 = \frac{10!}{5!.(2!)^5}$.

Sau khi xếp vào mỗi thuyền 2 nam thì mỗi thuyền được đánh số T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 vì tương ứng với 2 nam cụ thể đã xếp.

Khi đó có $\frac{10!}{(2!)^5}$ cách xếp 10 nữ vào 5 thuyền T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 nêu trên. Theo quy tắc nhân thì số cách sắp xếp bằng

$$d = \frac{10!}{5!.(2!)^5}.\frac{10!}{(2!)^5} = \frac{(10!)^2}{5!.(2!)^{10}}.$$

* Chú ý: Khi giải các bài toán mà số phần tử của mỗi hộp bằng nhau chúng ta phải phân biệt 2 trường hợp:

- Trường hợp 1: Các hộp có đánh số $T_1, T_2, \ldots, T_k$ thì mỗi hoán vị của $kn = N$ phần tử.

  Khi thay đổi vị trí của các phần tử của n phần tử trong các bộ $T_1, T_2, \ldots, T_k$ ta thu được các hoán vị mới nhưng vẫn cùng một cách xếp vào hộp như trên. Suy ra số cách xếp là $\frac{(kn)!}{(n!)^k}$.

- Trường hợp 2: k hộp phân biệt ta không đánh số hay đặt tên trước nên thay đổi vị trí giữa các bộ n phần tử ta thu được hoán vị mới nhưng vẫn cùng một cách xếp nên suy ra số cách xếp là $\frac{(kn)!}{k!(n!)^k}$.

Ví dụ 18. *Có 6 cặp vợ chồng đi du lịch trên 3 con thuyền nhỏ, mỗi thuyền 4 người. Có bao nhiêu cách xếp mà cặp vợ chồng (X, Y) được ngồi với nhau trên cùng một thuyền.*

Giải. Xét một thuyền có cặp vợ chồng (X, Y), ta cho 5 cách chọn 1 nam và 5 cách chọn 1 nữ từ 5 cặp còn lại vào thuyền này. Còn 2 thuyền còn lại và 4 nam, 4 nữ nên tương tự như ví dụ 17 ta có $\frac{(4!)^2}{2.(2!)^4}$.

Suy ra số cách sắp xếp bằng $d = 5^2.\frac{(4!)^2}{2.(2!)^4}$.

Ví dụ 19. *Từ* 24 *chữ cái khác nhau, có bao nhiêu cách xây dựng* 6 *từ mỗi từ gồm* 4 *chữ cái phân biệt.*

Giải. Xếp 24 chữ cái thành một hàng ngang, 4 chữ đầu ta được từ đầu, 4 chữ tiếp theo ta được từ thứ hai, ..., 4 chữ cuối cùng ta được từ thứ sáu. Thay đổi thứ tự giữa các nhóm 4 chữ ta vẫn thu được 6 từ như cũ nhưng lại là hoán vị mới. Vậy số cách xây dựng bằng

$$d = \frac{24!}{6!}.$$

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

Bài số 1. *Cho số* $a = 111224444$*, hỏi khi thay đổi các vị trí các chữ số của a chúng ta nhận được bao nhiêu số mà hai số* 2 *không đứng cạnh nhau.*

Hướng dẫn. Có $d_1 = \frac{7!}{3!.4!}$ cách xếp 3 số 1, 4 số 4 thành một hàng ngang. Ứng với mỗi cách sắp xếp có 6 vị trí xen kẽ và hai vị trí đầu cuối. Để nhận được một cách thay đổi vị trí thỏa mãn yêu cầu của bài toán chúng ta chỉ cần chọn 2 vị trí trong 8 vị trí xen kẽ hoặc đầu cuối để đặt vào số 2.

Suy ra số các số nhận được bằng

$$d = \frac{7!}{3!.4!}.C_8^2.$$

Bài số 2. *Xét từ TOANTIN, hỏi có bao nhiêu cách đảo chữ mà các nguyên âm không đứng cạnh nhau ?*

Hướng dẫn. Có $\frac{4!}{2!.2!}$ cách xếp các phụ âm TNTN thành một hàng ngang. Để có một cách đảo chữ thỏa mãn yêu cầu bài toán chúng ta cần chọn 3 vị trí trong 5 vị trí (3 vị trí xen kẽ, 1 vị trí đầu, 1 vị trí cuối) để xếp 3 nguyên âm khác nhau A, O, I. Có 3! cách xếp 3 nguyên âm. Theo quy tắc nhân thì số cách đảo chữ bằng

$$d = \frac{4!}{2!.2!}.C_5^3.3! = 6.4.6 = 144.$$

Bài số 3. *Có bao nhiêu cách xếp* 4 *học sinh nam,* 7 *học sinh nữ vào* 11 *ghế xung quanh một bàn tròn sao cho không có hai học sinh nam ngồi cạnh nhau.*

Hướng dẫn. Ta lấy một ghế bất kì đánh số là A_1 và đánh số các ghế tiếp theo là $A_2, A_3, \ldots, A_{11}$.

- Trường hợp A_1 là nam: Khi đó A_2 phải xếp nữ, A_{11} phải xếp nữ và ta đưa về bài toán :"Có bao nhiêu cách xếp 3 nam, 5 nữ thành một hàng ngang sao cho 2 em nam không ngồi cạnh nhau".

Có 5! cách xếp 5 nữ, có C_6^3 cách lấy 3 vị trí trong 6 vị trí gồm 4 xen kẽ, 1 đầu, 1 cuối. Có 3! cách xếp 3 em nam vào 3 vị trí.

Số cách xếp trường hợp này bằng $d_1 = 5!.C_6^3.3!$.

- Trường hợp A_1 là nữ ta đưa về bài toán: "Có bao nhiêu cách xếp 4 nam, 6 nữ thành một hàng ngang sao cho 2 em nam không ngồi cạnh nhau".

Tương tự như trường hợp trên ta có số cách sắp xếp bằng $d_2 = 6!.C_4^3.3!$.

Đáp số: $d = 5!.3!.C_6^3 + 6!.3!C_7^3$.

Bài số 4. *Có bao nhiêu cách phát* 5 *viên bi đen,* 7 *viên bi đỏ cho* 3 *học sinh.*

Hướng dẫn. - Ta phát 5 viên bi đen cho 3 học sinh. Gọi c_1 là số viên bi đen phát cho học sinh thứ 1, c_2 là số viên bi phát cho học sinh thứ 2, c_3 là số viên bi phát cho học sinh thứ 3. Ta có

$$c_1 + c_2 + c_3 = 5 \ \ (c_i \geqslant 0).$$

Mỗi cách phát tương ứng 1-1 với bộ 3 số (c_1, c_2, c_3) thỏa mãn tính chất trên.

Ta tương ứng bộ (c_1, c_2, c_3) với bộ

$$(\underbrace{11\ldots1}_{c_1 \text{ số}}, 0, \underbrace{11\ldots1}_{c_2 \text{ số}}, 0, \underbrace{11\ldots1}_{c_3 \text{ số}}).$$

Nếu $c_i = 0$ ta không viết số nào.

Bộ các số $0, 1$ trên gồm

$$p = c_1 + 1 + c_2 + 1 + c_3 = c_1 + c_2 + c_3 + 2 = 7 \text{ số}.$$

Để có 1 bộ số như vậy ta cần chọn 2 vị trí trong 7 vị trí để đặt số 0. Suy ra số cách phát là C_7^2.

- Tương tự số cách phát 7 viên bi đỏ cho 3 học sinh bằng C_9^2.

Theo quy tắc nhân thì số cách phát bằng $d = C_7^2.C_9^2$.

Bài số 5. *Xét đa giác đều* $2n$ *đỉnh* $(n \geqslant 2)$*, hỏi có bao nhiêu tam giác vuông có* 3 *đỉnh là đỉnh đa giác.*

Hướng dẫn. - Đa giác đều $2n$ đỉnh có n đường chéo.

- Với mỗi đường chéo ta cần chọn một trong $2n - 2$ đỉnh còn lại để tạo thành tam giác vuông. Suy ra số tam giác vuông là $d = 2n(n - 1)$.

Bài số 6. *Xét đa giác đều n đỉnh* $A_1A_2A_3\ldots A_n$.

1. *Hỏi có bao nhiêu đường gấp khúc đi qua tất cả các đỉnh mỗi đỉnh một lần.*

2. *Hỏi có bao nhiêu đường gấp khúc đi qua tất cả các đỉnh mỗi đỉnh một lần sao cho các đường đều có một đoạn là* $\overline{A_1A_3}$ *và một đoạn là* $\overline{A_{n-1}A_n}$.

3. Hỏi có bao nhiêu đường gấp khúc đi qua tất cả các đỉnh mỗi đỉnh một lần sao cho đỉnh A_1 đứng trước đỉnh A_n.

Hướng dẫn. 1. Mỗi đường gấp khúc tương ứng 1-1 với một hoán vị của các đỉnh. Suy ra số đường gấp khúc bằng $d_1 = n!$.

2. Ta coi đoạn $\overline{A_1A_3}$ và $\overline{A_{n-1}A_n}$ là 2 đỉnh mới, suy ra số đường gấp khúc đi qua các đỉnh, mỗi đỉnh một lần có 2 đoạn $\overline{A_1A_3}, \overline{A_{n-1}A_n}$ bằng $d_2 = (n-2)!$.

3. Số đường gấp khúc mà A_1 đứng trước A_n bằng số đường gấp khúc mà A_1 đứng sau A_n. Suy ra số đường gấp khúc có đỉnh A_1 đứng trước A_n bằng $d_3 = \dfrac{1}{2}n!$.

Bài số 7. *Trong sân có 3 con gà, 4 con vịt, 2 con ngỗng, có bao nhiêu cách chọn ra một nhóm có ít nhất 1 con gà, 1 con vịt, 1 con ngỗng.*

Hướng dẫn. Để có 1 nhóm thỏa mãn yêu cầu của bài toán ta chọn 1 tập con gà khác trống, sau đó chọn 1 tập con vịt khác trống, chọn 1 tập con ngỗng khác trống.

Số tập con gà khác trống bằng $C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 - 1 = 7$.

Số tập con vịt khác trống bằng $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 - 1 = 15$.

Số tập con ngỗng khác trống bằng $C_2^1 + C_2^2 = 2^2 - 1 = 3$.

Suy ra số cách chọn một nhóm có ít nhất 1 gà, 1 vịt, 1 ngỗng bằng $d = 7.15.3 = 315$.

Bài số 8. *Một tổ gồm 7 nam, 4 nữ, có bao nhiêu cách lập đội bóng chuyền 6 em, trong đó có ít nhất hai em nữ.*

Hướng dẫn. Số đội bóng chuyền có 2 nữ: $d_1 = C_4^2.C_7^4$.

Số đội bóng chuyền có 3 nữ: $d_2 = C_4^3.C_7^3$.

Số đội bóng chuyền có 4 nữ: $d_3 = C_4^4.C_7^2$.

Suy ra số cách lập đội bóng chuyền bằng

$$\begin{aligned} n &= 6.\frac{7.6.5}{3!} + 4.\frac{7.6.5}{3!} + 1.\frac{7.6}{2!} \\ &= 7.6.5 + 4.7.5 + 7.3 = 7.(30 + 20 + 3) \\ &= 7.53 = 371. \end{aligned}$$

Bài số 9. *Một vũ hội có 12 nam, 15 nữ, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 4 cặp, mỗi cặp gồm một nam, một nữ.*

Hướng dẫn. Có C_{12}^4 cách chọn ra 4 em nam.

Có C_{15}^4 cách chọn ra 4 em nữ.

4 em nữ có một cách sắp xếp đội với 4 em nam tương ứng với một hoán vị của 4 em nữ. Suy ra số cách sắp xếp 4 cặp bằng

$$d = C_{12}^4.C_{15}^4.4! = 16216200.$$

Bài số 10. *Năm người nói chuyện ở cùng một hội nghị có tên là A, B, C, D, E. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp thứ tự phát biểu để người B phát biểu sau A.*

Hướng dẫn. Tổng số các trình tự phát biểu bằng 5!.

Số cách xếp A phát biểu trước B và A phát biểu sau B là bằng nhau. Suy ra số thứ tự phát biểu mà B phát biểu sau A bằng $d = \dfrac{5!}{2}$.

Bài số 11. *Tìm số các ước số của $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các số nguyên tố phân biệt $\alpha_i \in \mathbb{N}$.*

Hướng dẫn. Một ước số của n có dạng $a = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_k^{c_k}$ trong đó $0 \leqslant c_i \leqslant \alpha_i$.

Để có một ước số ta có:

$(1 + \alpha_1)$ cách chọn thừa số đầu tiên

$$p_1^0, p_1^1, p_1^2, \dots, p_1^{\alpha_1}$$

$(1 + \alpha_2)$ cách chọn thừa số thứ 2

...

$(1 + \alpha_k)$ cách chọn thừa số thứ k.

Suy ra số ước của n bằng $r(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.

Bài số 12. *Tìm số các cặp số nguyên không âm (x, y) thỏa mãn $(x + y) = n \;\; x \leqslant y$.*

Hướng dẫn. - Nếu n chẵn ta có các nghiệm thỏa mãn bài toán là $(0, n), (1, n - 1), \dots \left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{n}{2}\right)$. Suy ra số nghiệm số bằng $\dfrac{n}{2} + 1$.

- Nếu n lẻ ta có các nghiệm thỏa mãn bài toán là $(0, n), (1, n-1), \dots, \left(\dfrac{n-1}{2}, \dfrac{n+1}{2}\right)$. Suy ra số nghiệm số bằng $\dfrac{n-1}{2} + 1 = \dfrac{n+1}{2}$.

Suy ra số bộ số bằng $r = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$.

Bài số 13. *Có bao nhiêu cách biểu diễn một số nguyên $n > 1$ dưới dạng $n = x.y, x, y \in \mathbb{N}, y$ chia hết cho x.*

Hướng dẫn. Biểu diễn n, x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán dưới dạng tích của các số nguyên tố ta có

$$n = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}, x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

với $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các số nguyên tố phân biệt, $\gamma_i \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{N}_0, \beta_i \in \mathbb{N}_0$ và $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i, \alpha_i \leqslant \beta_i$.

Áp dụng quy tắc nhân và kết quả của bài 12 ta thu được số cách biểu diễn bằng

$$d = \left(\left[\frac{\gamma_1}{2}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{\gamma_2}{2}\right] + 1\right) \dots \left(\left[\frac{\gamma_k}{2}\right] + 1\right) = \prod_{i=1}^{k} \left(\left[\frac{\gamma_i}{2}\right] + 1\right).$$

Bài số 14. *Một viện nghiên cứu có 67 nhà khoa học, trong đó có 47 người sử dụng tốt tiếng Anh, 35 người sử dụng tốt tiếng Đức, 20 người sử dụng tốt tiếng Pháp. Hơn nữa có 23 người sử dụng tốt hai thứ tiếng Anh - Đức, 12 người sử dụng tốt hai thứ tiếng Anh - Pháp, 11 người sử dụng tốt hai thứ tiếng Đức - Pháp và có 5 người sử dụng tốt cả 3 thứ tiếng. Tìm số nhà khoa học không sử dụng được bất kỳ ngoại ngữ nào.*

Giải. Gọi E là tập hợp các nhà khoa học sử dụng tốt tiếng Anh, G là tập hợp các nhà khoa học sử dụng tốt tiếng Đức, F là tập hợp các nhà khoa học sử dụng tốt tiếng Pháp.

Số các nhà khoa học biết ít nhất một thứ tiếng bằng

$$\begin{aligned}|E \cup G \cup F| &= |E| + |G| + |F| - |E \cap G| - |E \cap F| - |G \cap F| + |E \cap G \cap F| \\ &= 47 + 35 + 20 - 23 - 12 - 11 + 5 = 61.\end{aligned}$$

Số nhà khoa học không sử dụng được bất kỳ ngoại ngữ nào bằng

$$67 - 61 = 6.$$

Bài số 15. *Có bao nhiêu cách đảo chữ của từ MATHEMATICAL sao cho không có bất kì hai nguyên âm đứng cạnh nhau.*

Hướng dẫn. Ta xét hoán vị của các phụ âm MTHMTCL. Khi đó có $d_1 = \dfrac{7!}{2!.2!}$ cách xếp (hoán vị). Ứng với mỗi hoán vị ta có 8 vị trí đầu, cuối và xen kẽ giữa 2 phụ âm. Để có một cách đảo chữ thỏa mãn yêu cầu của bài toán ta cần chọn ra 5 vị trí để đặt các nguyên âm AEAIA. Có C_8^5 cách chọn.

Số cách sắp xếp A, E, A, I, A vào 5 vị trí đã chọn bằng $d_2 = \dfrac{5!}{3!}$.

Đáp số: Số cách đảo chữ thỏa mãn yêu cầu của bài toán bằng $d = \dfrac{7!}{2!.2!}.C_8^5.\dfrac{5!}{3!}$.

Bài số 16. *Bên trong mỗi cạnh của một hình vuông chúng ta lấy n điểm phân biệt. Tìm số tam giác có ba đỉnh là các điểm trên.*

Hướng dẫn. Có C_{4n}^3 bộ 3 điểm chọn ra từ $4n$ điểm. Chúng ta phải trừ ra các bộ 3 điểm thẳng hàng bằng $4.C_n^3$.

Số tam giác phải tìm bằng $d = C_{4n}^3 - 4.C_n^3 = 2n^2(5n - 3)$.

Bài số 17. *Có bao nhiêu cách chọn 3 đỉnh của n giác đều $A_1A_2 \ldots A_n$ $(n \geqslant 4)$ sao cho 3 đỉnh này lập thành một tam giác tù.*

Hướng dẫn. Kí hiệu $P(n)$ số tam giác tù, $P(1)$ là số tam giác tù $A_1A_iA_j$ $(1 < i < j \leqslant n)$ (Các tam giác có đỉnh A_1 theo thứ tự đánh số). Hiển nhiên ta có $P(n) = nP_1(n)$.

Tam giác $A_1A_iA_j$ là tù $\leftrightarrow j \leqslant \dfrac{n+1}{2}$.

Khi đó $P_1(n)$ là số các cặp 2 số (i,j) (tập con) của tập $\left\{2,3,\ldots,\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right\}$.

Ta thu được

$$P(n) = nP_1(n) = n.C^2_{[\frac{n+1}{2}]-1} = \frac{n}{2}\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right)$$
$$= n\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right].$$

Bài số 18. *Giả sử không có 3 đường chéo nào của đa giác lồi n đỉnh đồng quy. Tìm số tam giác có đỉnh là đỉnh đa giác hoặc giao của các đường chéo (cạnh nằm trên cạnh đa giác hoặc đường chéo).*

Hướng dẫn. Kí hiệu S_i $(i = 0,1,2,3)$ là tập hợp các tam giác có i đỉnh là đỉnh đa giác. Khi đó ta có $|S_3| = C^3_n$. Ta tính $|S_2|$, mỗi tam giác như vậy được cấu tạo như sau: Mỗi lần lấy 4 đỉnh như trên ta được 4 tam giác phụ thuộc (tương ứng 1-1) với 4 đỉnh này. Suy ra $|S_2| = 4.C^4_n$.

Ta tính $|S_1|$, mỗi tam giác như vậy được cấu tạo từ 5 đỉnh và mỗi bộ 5 đỉnh tạo được 5 tam giác thuộc S_1. Suy ra $|S_1| = 5.C^5_n$.

Ta tính $|S_0|$, mỗi tam giác như vậy được cấu tạo từ 6 đỉnh. Suy ra $|S_0| = C^6_n$.

Đáp số: $d = C^3_n + 4C^4_n + 5C^5_n + C^6_n$.

Trong những bài toán đếm các số được cấu tạo từ một tập số mà các chữ số có thể giống nhau chúng ta nên liệt kê theo vị trí của các chữ số sẽ nhận được cách giải ngắn gọn và đơn giản.

Bài số 19. *Cho tập các số* $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$*, hỏi có bao nhiêu số gồm 5 chữ số của A (các chữ số có thể giống nhau) sao cho mỗi số gồm 3 chữ số chẵn và hai chữ số lẻ.*

Hướng dẫn. •Xét trường hợp số đầu tiên (chữ số ở vị trí thứ 1) là số lẻ.

- Có 3 cách đặt 1 số lẻ vào vị trí thứ 1.
- Có 4 cách chọn 1 vị trí trong 4 vị trí còn lại để đặt 1 số lẻ.
- Có 3 cách chọn 1 số lẻ đặt vào vị trí vừa chọn.
- Có 4^3 cách đặt 3 số chẵn vào 3 vị trí còn lại.

Theo quy tắc nhân thì số các số thỏa mãn yêu cầu của bài toán trong trường hợp này là $d_1 = 3.4.3.4^3 = 3^2.4^4$.

•Xét trường hợp số đầu tiên là số chẵn.

- Có 3 cách đặt 1 số chẵn khác 0 vào vị trí đầu tiên.
- Có $C^2_4 = 6$ cách chọn 2 vị trí trong 4 vị trí còn lại để đặt 2 số chẵn.
- Có 4^2 cách xếp 2 số chẵn vào 2 vị trí vừa chọn.
- Có 3^2 cách xếp 2 số lẻ vào 2 vị trí còn lại.

Theo quy tắc nhân thì số các số thỏa mãn yêu cầu của bài toán trong trường hợp này là $d_2 = 3.C^2_4.4^2.3^2 = 3^4.4^2.2$.

Đáp số: $d = d_1 + d_2 = 3^2.4^4 + 3^4.4^2.2$.

Bài số 20. *Cho số nguyên dương $a = 1122333444$. Thay đổi vị trí các chữ số của a nhận được bao nhiêu số chẵn mà trong mỗi số hai số 2 không đứng cạnh nhau.*

Hướng dẫn. Ta có $\dfrac{8!}{2!.3!.3!}$ hoán vị của các số 11333444.

Đối với mỗi hoán vị ta có 9 vị trí xen kẽ và đầu, cuối mà khi điền 2 số 2 vào 2 trong 9 vị trí này thì 2 số 2 không đứng cạnh nhau. Có C_9^2 cách chọn 2 vị trí trong 9 vị trí và đặt vào đó 2 số 2.

Vậy số các số thu được từ việc thay đổi vị trí các chữ số của số a mà hai số 2 không đứng cạnh nhau bằng $d_1 = \dfrac{8!}{2!.3!.3!}.C_9^2$.

Ta tìm số các số nhân được từ sự thay đổi vị trí mà số 1 đứng cuối cùng và hai số 2 không đứng cạnh nhau. Trước hết ta đặt số 1 vào vị trí cuối cùng.

- Có $\dfrac{7!}{3!.3!}$ hoán vị của các số 1333444.

- Có C_8^2 cách chọn 2 vị trí trong 6 vị trí xen kẽ và 2 vị trí đầu, cuối của mỗi hoán vị trên để đặt 2 số 2.

- Vậy số các số trong trường hợp này bằng $d_2 = \dfrac{7!}{3!.3!}.C_8^2$.

Xét trường hợp số 3 đứng cuối cùng.

- Có $\dfrac{7!}{2!.2!.3!}$ hoán vị của các số 1133444.

- Có C_8^2 cách chọn 2 vị trí trong 8 vị trí xen kẽ và đầu cuối và đặt 2 số 2.

- Vậy số các số trong trường hợp này bằng $d_3 = \dfrac{7!}{2!.2!.3!}.C_8^2$.

Đáp số: $d = d_1 - d_2 - d_3 = \dfrac{8!}{72}.C_9^2 - \left(\dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{24}\right).7!.C_8^2$.

VI. Kiểm tra đánh giá

ĐỀ KIỂM TRA CƠ BẢN (90 phút)

Bài 1. Cho $a = 1133322444$, hỏi thay đổi vị trí các chữ số của a nhận được bao nhiêu số mà 2 chữ số 1, 2 chữ số 2 không đứng cạnh nhau.

Bài 2. Cho $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, hỏi có bao nhiêu số gồm 3 số a, 2 số b trong đó $a \neq b, a \in A, b \in A$.

Bài 3. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, hỏi có bao nhiêu số gồm 4 chữ số sao cho mỗi số có ít nhất hai chữ số giống nhau.

Bài 4. Tìm số (x, y, z) nguyên không âm thỏa mãn $x + y + z = 100$.

Đa giác đều n đỉnh $(n \geqslant 6)$, hỏi có bao nhiêu tam giác mà 3 cạnh là 3 đường chéo.

ĐÁP ÁN

Bài 1. Xét $a_1 = 333444$ có $\dfrac{6!}{3!.3!}$ cách xếp 3 chữ số 3, 4 chữ số 4 thành một hàng ngang.

Ứng với mỗi cách xếp như vậy có 5 vị trí xen kẽ và 2 vị trí đầu cuối. Ta cần chọn ra 2 vị trí để đặt số 1. Sau khi đặt số 1 ta có 7 vị trí xen kẽ và 2 vị trí đầu cuối. Ta cần chọn ra 2 vị trí trong số 9 vị trí này để đặt số 2. Như vậy có tất cả $\dfrac{6!}{3!.3!}.C_7^2.C_9^2$ số thỏa mãn đề bài.

Bài 2.

- Trường hợp 1: không có số 0:

Có 5 cách lấy a (cho xuất hiện 3 lần), 4 cách lấy $b \neq a$ (cho xuất hiện 2 lần).

Suy ra có $d_1 = 20.\dfrac{5!}{3!.2!} = 200$ số.

- Trường hợp 2: có 2 số 0.

Có 5 cách lấy $a \neq 0$ (xuất hiện 2 lần), chữ số đầu tiên phải là a.

Suy ra có $d_2 = 5.\dfrac{4!}{2!.2!} = 30$ số.

- Trường hợp 3: có 3 số 0.

Có 5 cách lấy $b \neq 0$ (xuất hiện 2 lần), chữ số đầu tiên phải là b.

Suy ra có $d_3 = 5.\dfrac{4!}{3!} = 20$ số.

Bài 3.

Có C_6^4 cách lấy ra 4 số phân biệt, với mỗi số như vậy có 4! hoán vị. Suy ra có $C_6^4.4!$ số gồm 4 chữ số phân biệt. Mặt khác có tất cả 6^4 số gồm 4 chữ số.

Đáp số: $d = 6^4 - C_6^4.4!$ số thỏa mãn đề bài.

Bài 4.

Mỗi bộ số nguyên không âm (x, y, z) thỏa mãn yêu cầu bài toán tương ứng 1-1 với bộ

$$(\underbrace{11\ldots1}_{x \text{ số } 1}, 0, \underbrace{11\ldots1}_{y \text{ số } 1}, 0, \underbrace{11\ldots1}_{z \text{ số } 1}).$$

Để có một bộ số như vậy ta cần chọn 2 vị trí trong 102 vị trí để đặt 2 số 0, các vị trí còn lại đặt số 1.

Đáp số: $d = C_{102}^2$

Bài 5.

Gọi đa giác đó là $A_1A_2\ldots A_n$. Ta đếm các tam giác thỏa mãn yêu cầu có một đỉnh là A_1. Các đỉnh A_2, A_n không được chọn vì A_1A_2, A_1A_n là các cạnh của đa giác. Ta cần chọn thêm 2 đỉnh có chỉ số là a, b thỏa mãn

$$4 \leqslant b + 1 < a \leqslant n - 1 \text{ (vì giữa hai đỉnh phải có ít nhất một đỉnh).}$$

Vậy số cách chọn 2 đỉnh còn lại bằng số cách chọn 2 số phân biệt trong $n - 4$ số từ 4 đến $n - 1$. Suy ra số các tam giác thỏa mãn là C_{n-4}^2.

Vì có n đỉnh và mỗi tam giác được đếm 3 lần theo 3 đỉnh nên số tam giác cần tìm là

$$d = \frac{n.C_{n-4}^2}{3}.$$

Đánh giá. Tiến hành kiểm tra một lớp gồm 32 học sinh. Kết quả cụ thể như sau:

Số học sinh đạt 10 điểm là: 2 học sinh, chiếm $6,25\%$.

Số học sinh đạt 9 điểm là: 3 học sinh, chiếm $9,4\%$.

Số học sinh đạt 8 điểm là: 7 học sinh, chiếm $21,9\%$.

Số học sinh đạt $\leqslant 7$ điểm là: 20 học sinh, chiếm $62,5\%$.

Đề kiểm tra trên gồm 5 bài toán, mỗi bài được giải theo một phương pháp khác. Cụ thể như sau: bài 1 (phương pháp xây dựng), bài 2 (phương pháp liệt kê), bài 3 (phương pháp phần bù), bài 4 (phương pháp song ánh), bài 5 (phương pháp đánh số).

Học sinh cần nắm vững từng phương pháp và phải biết vận dụng phương pháp nào cho từng bài toán cụ thể.