

# Tuyển Tập Olympic Sinh Viên

Cộng đồng *mathvn.org*

## Phần 1. Giải tích

### 1.1 Dãy số, đạo hàm, chuỗi, tích phân.

1. Cho  $M = \left\{ f \in C[0, \pi] \mid \int_0^\pi f(x) \sin x dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 1 \right\}$ .

Tìm  $\min_{f \in M} \int_0^\pi f^2(x) dx$ .

2. Tồn tại hay không hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $(1, +\infty)$  sao cho

$$\int_x^{x^2} f(t) dt = 1, \forall x \in (1, +\infty)?$$

3. Cho phương trình vi phân  $y' = xy + f(x)$  trong đó  $f: R \rightarrow R$  là một hàm liên tục bị chặn. Tìm điều kiện cần và đủ đối với hàm  $f(x)$  sao cho nghiệm của phương trình đã cho hội tụ đến 0 ( $y(x) \rightarrow 0$ ) khi  $x \rightarrow \pm\infty$ .

4. Cho  $f(x)$  là hàm liên tục không âm trên  $[0, +\infty)$  đồng thời  $\int_0^T f(x) dx \leq T$

với mọi  $T \geq 0$ . Chứng minh hàm  $\frac{f(x)}{1+x^2}$  có giới hạn hữu hạn trên  $[0, +\infty)$ .

5. Cho hàm  $f(x)$  khả vi vô hạn trên  $R^2$ . Xét  $U$  là một chu tuyến mở nào đó sao cho

$$\iint_U \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^3} dx dy < \infty \text{ và } \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^3} = 0 \text{ khi } x = y.$$

Chứng minh  $f(x)$  là hàm hằng trên  $U$ .

6. Dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi  $x_1$  là số tùy ý thuộc khoảng  $(0,1)$ ,  
 $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$  khi  $n=1,2,3,\dots$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ .

7. Cho  $f \in C^1[0,1]$ . Chứng minh

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)| dx$$

8. Chứng minh

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} = \frac{1}{2}$$

9. Tìm tất cả các hàm  $f: R_+ \rightarrow R_+$  thỏa mãn phương trình hàm sau

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y) \quad \forall x, y \in R_+$$

10. Cho  $f \in C[0,1]$  và  $\forall x, y \in [0,1]$  thỏa mãn bất đẳng thức  
 $xf(y) + yf(x) \leq 1$ .

Chứng minh rằng  $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$ .

11. Chứng minh dãy số  $a_n = \left( \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  hội tụ đến một giá trị hữu hạn.

12. Xác định số nghiệm thực của phương trình sau

$$(x^2 + 1)e^x = 2.$$

13. Cho  $f: R \rightarrow R$  là hàm khả vi liên tục thỏa mãn

$$f(0) = 1, f'(0) < 0, 0 \leq f(x) < 1 \quad \forall x \in (0,1]$$

$$\text{CMR: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \int_0^1 (f(x))^n dx \right) = -\frac{1}{f'(0)}$$

14. Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2009} \sqrt[2]{2009} \sqrt[3]{2009} \sqrt[4]{2009} \dots \sqrt[n(n+1)]{2009} \right)$$

15. Tồn tại hay không hàm số  $f(x) \neq 0$  liên tục trên  $[-1, 1]$  sao cho

$$\int_1^x f(t) dt = \int_x^{x^2} f(t) dt, \forall x \in [-1, 1]?$$

16. Cho hàm  $f(x)$  dương, liên tục và đơn điệu giảm trên đoạn  $[a, b]$ . Chứng minh rằng

$$\int_a^b x f^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2$$

17. Cho  $f(x)$  là hàm khả vi hai lần và giả sử  $f'(x)$  đơn điệu và tồn tại  $\lambda$  sao cho với mọi  $x$  ta có  $f'(x) \geq \lambda$ . Chứng minh với bất kì hai số thực  $a, b$  bất đẳng thức sau đúng

$$\left| \int_a^b \sin(f(x)) dx \right| \leq \frac{4}{\lambda}$$

18. Chứng minh với mọi hàm  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0, 1]$ , khả vi trên  $(0, 1)$  thoả mãn

$$f(0) \leq 2, f(1) \geq 1. \text{ Chứng minh } f'(x) \leq 2f(x) + 2x - 5 \quad \forall x \in (0, 1).$$

19. Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + e^{n/k})^{-1}$

20. Tìm nghiệm của bài toán Cauchy sau

$$2y'' + (y')^2 = y^2, y(0) = y'(0) = 1$$

21. Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{n^2 + ni + 1994}$

22. Cho  $f(x)$  là hàm khả tích trên đoạn  $[0, 2]$  thoả mãn  $\int_0^2 f^2(x) dx \leq 6$ .

Chứng minh  $\int_0^2 xf(x)dx \leq 4$ .

23. Dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi với mỗi  $\theta \in [0,1]$  thì

$$x_1 = 0, x_{n+1} = x_n + 0.5(\theta - x_n^2)(n \geq 1).$$

Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  tồn tại và tìm giới hạn đó.

24. Tồn tại hay không hàm số  $f(x)$  không âm xác định trên tập  $x \geq 0$  và thoả mãn phương trình sau

$$f(x + f(y)) = 1 - \frac{1}{(x+1)(y+1)}, x, y \geq 0?$$

25. Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{3} - 1)^n$

26. Hàm  $f(x)$  có đạo hàm với mọi  $x \geq 1$  và thoả mãn điều kiện

$$f(1) = 1, |f(x)| \leq x^{-1} \quad x \geq 1$$

Chứng minh tồn tại một điểm  $a$  sao cho  $f'(a) = -a^{-2}$ .

27. Tính  $\int_1^{5/4} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$ .

28. Cho dãy số  $\{a_n\}$  thoả mãn

i)  $\forall n \quad a_n > 0$

ii)  $\forall m, n \quad a_{m+n} \leq a_m + a_n$

Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$  tồn tại.

29. Tính  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{-1/x^2}$ .

30. Tính  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^x - 1}{(2x)^x - 1}$

31. Dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi công thức truy hồi sau

$$x_1 = a, x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \quad (n \geq 1)$$

Tìm 5 giá trị khác nhau của  $a$  để dãy đã cho có giới hạn.

32. Dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi công thức truy hồi sau

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n^{-1}} \quad (n \geq 1)$$

Chứng minh dãy đã cho có giới hạn và tìm nó.

33. Cho  $x_0 = a, x_1 = b, x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_{n-1} + \frac{1}{n}x_{n-2} \quad n = 2, 3, \dots$

Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

34. Cho dãy  $\{a_n\}$  sao cho dãy  $\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right\}$  hội tụ. Chứng minh rằng với mọi

$\varepsilon > 0$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}}$  hội tụ.

35. Chứng minh với bất kì nghiệm  $y(x)$  nào của phương trình vi phân

$y'' + \sin y = 0$  thì  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}$  tồn tại.

36. Cho  $x_n = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}} \quad (n \text{ lần})$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} 6^n (2 - x_n)$ .

37. Giả sử với  $\alpha \in (0, 1)$  thì chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^\alpha}$  hội tụ và  $x_k \geq x_{k+1} \geq 0$  với mọi  $k$ .

Chứng minh chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{1/(1-\alpha)}$  cũng hội tụ.

38. Có thể hay không biểu diễn số  $\pi$  dưới dạng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{k_n} - \sqrt{m_n})$$

Trong đó  $\{k_n\}, \{m_n\}$  là các dãy số tự nhiên?

39. Chứng minh  $\int_0^{\pi/2} \cos ax (\cos x)^{a-2} dx = 0 \quad a > 1$

40. Giả sử  $C(\alpha)$  là hệ số của  $x^{1994}$  trong khai triển Maclaurin của hàm  $(1+x)^\alpha$

Tính  $\int_0^1 C(-y-1) \left( \frac{1}{y+1} + \dots + \frac{1}{y+1994} \right) dy$

41. Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_n^k} \right)^n$

42. Cho  $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$  là hệ các hàm liên tục trực chuẩn trên đoạn  $[0,1]$ . Chứng minh có ít nhất một hàm trong hệ trên thỏa mãn bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^n \left( \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \varphi_i(x) dx \right) \leq \frac{1}{n}.$$

43. Tồn tại hay không một hàm  $f: R \rightarrow R$  khả vi liên tục thỏa mãn

$$|f(x)| < 2, \quad f(x)f'(x) \geq \sin x \quad \forall x \in R?$$

44. Cho  $f \in C^{n+1}(R)$  và

$$\ln \left( \frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a, \quad a < b$$

Chứng minh tồn tại  $c \in (a, b)$  sao cho  $f^{(n+1)}(c) = f(c)$ .

45. Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  nếu  $a_1 = a > 0, a_2 = a^2, a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-1} \quad n \geq 3$ .

46. Tính  $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x} dx$

47. Dãy  $\{x_n\}$  được cho bởi công thức truy hồi sau

$$x_0 = 1, x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2002}$$

Chứng minh  $x_{2002} < \frac{1}{2}$ .

48. Cho hàm  $f(x)$  liên tục và tuần hoàn với chu kỳ  $T$ .  $\int_0^T f(x) dx = 0$ . Chứng

minh ta tìm được một số  $a$  sao cho với mọi  $b$  thì bất đẳng thức sau đúng

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

49. Chứng minh  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n!}} < 1.1$

50. Dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi  $x_1 = 1, x_{n+1} = \arctg x_n$  ( $n \geq 1$ ).

Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  hội tụ hay không?

51. Tính  $\int_{-1}^1 x^{2007} \ln(1+e^x) dx$ .

52. Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!e - [n!e])$ , trong đó  $[a]$  — phần nguyên của  $a$ .

53. Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  có hội tụ hay không trong đó  $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\arctg \sqrt{x}}{x+1} dx$ .

54. Cho hàm  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  liên tục thỏa mãn  $f(x+y) \leq f(x)f(y)$  với mọi  $x, y \geq 0$ . Chứng minh bất đẳng thức sau đúng

$$\int_0^x f(t) dt \geq x\sqrt{f(2x)}. \text{ với mọi } x \geq 0$$

55. Cho dãy số thực  $\{a_n\}$  được xác định bởi công thức truy hồi sau

$$a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2 - 3a_n + 4 \quad \forall n \geq 1$$

a) Chứng minh dãy  $\{a_n\}$  tăng và bị chặn.

b) Chứng minh dãy  $b_n = \frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + \dots + \frac{1}{a_n - 1}, \quad \forall n \geq 1$ , cũng hội tụ và tìm giới hạn đó.

56. Cho hàm  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục và thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x) dx = 1$ .

Chứng minh  $\int_0^1 f^2(x) dx \geq 4$ .

57. Cho  $F$ -tập hợp các hàm  $f$  liên tục trên đoạn  $[0, 1]$ ,  $f: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  và số tự nhiên  $n$ . Xác định giá trị nhỏ nhất của hằng số  $c$  sao cho

$$\int_0^1 f(\sqrt[n]{x}) dx \leq c \int_0^1 f(x) dx \text{ với mọi hàm } f \in F.$$

58. Cho hàm  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi ba lần. Chứng minh tồn tại  $a \in (-1, 1)$  sao cho

$$f'''(a) = 3(f(1) - f(-1) - 2f'(0)).$$

59. Tính  $\int_0^{2\alpha} \sqrt{a \cos t - b \sin t} dt$ , nếu  $a > 0, b > 0, \alpha = \arctg(b/a)$ .

60. Chứng minh với  $n$  đủ lớn bất đẳng thức sau đúng

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{(2n+1)^3}} \right\} > \frac{1}{2}$$

Trong đó  $\{a\}$ -phần lẻ của  $a$ .

61. Dãy  $\{a_n\}$  cho bởi công thức truy hồi  $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}$ .



Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2^k}$ .

62. Tồn tại hay không dãy các hàm liên tục  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sao cho đối với mỗi số vô tỉ  $x$  tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  và đối với các  $x$  hữu tỉ thì

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$ ;

ii) dãy  $f_n(x)$  bị chặn và phân kì.

63. Dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi  $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n}$  với mọi  $n \geq 1$ .

Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$

64. Tìm giới hạn dãy số  $\{x_n\}$  với  $x_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k+1}{k^2+k} \sin \frac{1}{k^2+k}$ .

65. Cho  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  -hàm khả vi ba lần. Biết rằng

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'''(x) = 0.$$

Chứng minh rằng  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x)$  tồn tại và bằng 0.

66. Hàm  $f : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$  là hàm giảm không ngặt. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 x f^2(x) dx \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 x f(x) dx \int_0^1 f^2(x) dx.$$

67. Tính  $\lim \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + \dots}}}}}$

68. Giả sử tích  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + ta_n), a_n \in \mathbb{R}$  hội tụ với ít nhất hai giá trị thực khác 0 của

$t$ . Chứng minh các chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  hội tụ.

69. Chứng minh phương trình đối với hàm  $u(x)$  có dạng

$u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 u(y)u(y-x)dy$  không có nghiệm thực trên đoạn  $[0,1]$  khi

$$\lambda > \frac{1}{2}.$$

70. Hàm  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0,a]$  và với mọi  $x \in [0,a]$  thoả mãn đẳng thức

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x y^2(t)dt. \text{ Chứng minh } a < 5.$$

71. Dãy số  $\{a_n\}$  cho bởi công thức truy hồi sau

$$a_0 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{2} - \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{(-1)^n a_0}{n+1} \quad (n \geq 1)$$

Tính  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ( $|x| < 1$ ).

72. Tìm tất cả các hàm  $f(x)$  thoả mãn

$$f(x) + f'(\pi - x) = 1, \quad \forall x \in R$$

73. Tính  $\int_0^{2006} x(x-1)(x-2)\dots(x-2006)dx$ .

74. Dãy  $\{c_n\}$  xác định dưới dạng truy hồi sau

$$c_1 = 0, c_{n+1} = \sqrt{(1+c_n)/2} \quad (n \geq 1)$$

Chứng minh  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n \sqrt{1-c_n^2})$  tồn tại và tính nó.

75. Cho  $f(x), g(x), h(x)$  là các hàm liên tục trên đoạn  $[a,b]$  và khả vi trên khoảng  $(a,b)$ . Chứng minh tồn tại  $\xi \in (a,b)$  sao cho

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi) \\ g(a) & g(b) & g'(\xi) \\ h(a) & h(b) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

76. Cho  $p, q, r, s$  là các số tự nhiên. Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{(k+p)(k+q)}{(k+r)(k+s)}$ .

77. Tìm  $x$  để  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{x^2 + \dots + \sqrt{x^n}}}} = 2$ .

78. Chứng minh rằng

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 3x \cos 4x \dots \cos 2005x \, dx > 0$$

79. Chứng minh dãy số thực  $\{x_n, n \geq 1\}$  hội tụ khi và chỉ khi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} |x_n - x_m| = 0?$$

80. Cho  $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$  và  $a_1 < a_2 < a_3 < b_1 < b_2 < b_3$ . Có thể tìm được hay không ba số  $c_1 \leq c_2 \leq c_3$  ( $c_i \in [a_i, b_i]$ ) sao cho

$$f'(c_i) = \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}, \quad i = 1, 2, 3?$$

81. Tính  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+4}{n(3n+1)(3n+2)}$

82. Tính  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left( 1 - \max_{1 \leq n \leq N} \{ \sqrt{n} \} \right)$ ,  $\{x\}$ -phần lẻ của  $x$ .

83. Chứng minh bất đẳng thức  $\sqrt{2^3 3^4 4^5 \dots n^n} < 2, n \geq 2$ .

84. Tính tổng chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3^n} + (x^{3^n})^2}{1 - x^{3^{n+1}}}$  với  $x \neq 1$ .

85. a) Chứng minh bất đẳng thức

$$1 + \frac{u}{n} - \frac{(n-1)u^2}{2n^2} \leq \sqrt[n]{1+u} \leq 1 + \frac{u}{n}$$

với mọi  $u \in [0,1], n \in N$ ,

b) Tính

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} e^n \int_0^1 |x \ln x|^n dx$$

c) Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^3]{n^3} e^n \left( \int_0^1 \sqrt[n]{1 + |x \ln x|^n} dx - 1 \right)$

86. Cho  $a > 0, |b| \leq a$  và

$$F(a, b) = \left\{ f \in C^1[0,1], f(0) = 0, f(1) = b, \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| = a \right\}$$

Tính  $\sup_{f \in F(a,b)} \int_0^1 f(x) dx, \inf_{f \in F(a,b)} \int_0^1 f(x) dx$

87. a) Cho  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k}$  chứng minh hàm  $S_{n+1}(x) + S_n(x)$  đơn điệu trên đoạn  $[0, \pi]$ .

b) Chứng minh  $S_n(x) \geq -1$  với mọi  $x \in [0, \pi]$  và  $n \in N$ .

c) Tính  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \min_{x \in [0, \pi]} S_n(x) \right\}$

88. Cho dãy  $a_n, n = 1, 2, \dots$  và  $a_n \geq 0$ . Dãy  $b_n$  được xác định bởi

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} + a_n}, n = 1, 2, 3, \dots \text{ và } b_0 > 0$$

a) Chứng minh dãy  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  hội tụ khi và chỉ khi dãy  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  hội tụ.

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  đúng hay sai?

89. Tính  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \int_0^1 \left( \sin \frac{\pi}{2} t \right)^x dt$

90. Dãy  $\{a_n\}$  được xác định dưới dạng truy hồi  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ .

Tính  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 1}$ .

91. Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left( \pi \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{6n+5} \right)}{\sin \left( \pi \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{6n+1} \right)}$ .

92. Cho hàm  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  là hàm liên tục. Chứng minh dãy  $\{x_n\}$  được xác định bởi  $x_0 \in [0, 1], x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$  hội tụ khi và chỉ khi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

93. Với  $0 < q < 1$  tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=0}^{2n-1} q^{k-1} \sin \frac{k\pi}{n}$ .

94. Cho  $m, n$  là các số tự nhiên và  $x \in [0, 1]$  chứng minh rằng

$$(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1.$$

95. Cho hàm  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm liên tục. Dãy hàm  $\{f_n\}, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi  $f_0(x) = f(x), f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt, n = 0, 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng nếu  $f_n(1) = 0$  với mọi  $n$  thì  $f(x) \equiv 0$ .

96. Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1} dx$ .

97. Cho  $A_n = \pi \frac{(\sqrt{13}-1)}{6\sqrt{13}} \left( \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)^n$

Các dãy  $\{\sin A_n\}_1^\infty, \{tg A_n\}_1^\infty$  có hội tụ hay không?

98. Cho  $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < \dots$  là dãy số thoả  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = c > 0$ . Tính

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{c_n}}{2-x^{c_n}}.$$

99. Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \int_0^1 \sqrt[n]{1+x^n} dx - 1 \right)$ .

100. Chứng minh tồn tại một hằng số  $C > 0$  thoả mãn bất đẳng thức

$$\int_0^1 \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2 dx \leq C \int_0^1 f^2(x) dx$$

với mọi hàm  $f : [0,1] \rightarrow R$  liên tục.

101. Cho hàm  $f : (0, +\infty) \rightarrow R$  là hàm khả vi hai lần và thoả mãn

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f''(x) - f'(x)) = b \neq 0$ . Chứng minh tồn tại  $x_0$  sao cho

$f(x) \neq 0, \forall x \in (x_0, +\infty)$ .

