Chương 1.

PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ VÀ ĐẠO HÀM

1.1. Các phương pháp cơ bản

1.1.1. Định lí – Ví dụ

Bất đẳng thức tam giác

Định lí 1.1.1. Với các điểm A, B, C bất kì trong không gian, ta có

$$AB \le AC + CB.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi điểm C trên đường thẳng AB.

Ví dụ 1. (Áo – Ba lan 1983)

Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$$

Chứng minh. Ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{2a}{(b+c)+(b+c)}+\frac{2b}{(c+a)+(c+a)}+\frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$

$$<\frac{2a}{a+(b+c)}+\frac{2b}{b+(c+a)}+\frac{2c}{c+(a+b)}$$

$$=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Vậy $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$

Ví dụ 2. (Pháp 1983)

a) Chứng minh rằng với mọi 3 điểm O, A_1, A_2 trong không gian, ta có

$$\left|\overrightarrow{OA_1}\right|+\left|\overrightarrow{OA_2}\right|\le\left|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right|+\left|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right|.$$

b) Chứng minh rằng với mọi 5 điểm O, A_1, A_2, A_3, A_4 trong không gian, ta có

$$\sum_{i=1}^{4}\left|\overrightarrow{OA_i}\right|\le\sum_{1\le i<j\le 4}\left|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right|.$$

Chứng minh. a) Ta có

$$\left|\overrightarrow{OA_1}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right|+\left|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right|\right).$$

Tương tự

$$\left|\overrightarrow{OA_2}\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right|\right)+\left(\left|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right|\right).$$

Suy ra

$$\left|\overrightarrow{OA_1}\right|+\left|\overrightarrow{OA_2}\right| \le \left|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right|+\left|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right|.$$

Chú ý. Kết quả của chứng minh trên cho thấy : trong một hình bình hành tổng độ dài 2 cạnh liên tiếp không vượt quá tổng độ dài các đường chéo.

b) Theo a)

$$\sum_{i=1}^{4}\left|\overrightarrow{OA_i}\right| \le \left|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right|+\left|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right|+\left|\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}\right|+\left|\overrightarrow{OA_3}-\overrightarrow{OA_4}\right|.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right|+\left|\overrightarrow{OA_3}-\overrightarrow{OA_4}\right| &\le \left|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}-\overrightarrow{OA_4}\right| \\ &\quad +\left|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}\right| \\ &\le \left|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}\right|+\left|\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}\right| \\ &\quad +\left|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_4}\right|+\left|\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}\right|\end{aligned}$$

Suy ra
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\left|\overrightarrow{OA_i}\right| &\le \left|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right|+\left|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}\right|+\left|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_4}\right| \\ &\quad +\left|\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}\right|+\left|\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}\right|+\left|\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}\right|.\end{aligned}$$

Vậy

$$\sum_{i=1}^{4}\left|\overrightarrow{OA_i}\right| \le \sum_{1\le i<j\le 4}\left|\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right|.$$

Phương pháp biến đổi thành một bình phương

Định lí 1.1.2. (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số thực. Lúc đó

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các vectơ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ cùng phương.

Chứng minh. Ta đặt $A = \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)$ và

$$B = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)^2.$$

Lúc đó

$$A - B = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j b_i b_j$$

$$= \sum_{1 \le i < j \le n} \left(a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2 a_i a_j b_i b_j\right)$$

$$= \sum_{1 \le i < j \le n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_i b_j = a_j b_i$ với mọi $i \neq j$.

Ví dụ 3. (ESTONIA 1997)

Chứng minh rằng với mọi số thực x, y ta có

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}.$$

Chứng minh. Ta có

$$0 \le \left(x - \sqrt{y^2 + 1}\right)^2 + \left(y - \sqrt{x^2 + 1}\right)^2.$$

Khai triển và rút gọn ta có bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = \sqrt{y^2 + 1} \\ y = \sqrt{x^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2.$$

Hệ phương trình này vô nghiệm. Vậy dấu bằng không xảy ra.

Ví dụ 4. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Trước hết ta có

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \ge 0 \Leftrightarrow a + b \ge 2\sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$. Áp dụng ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca} = 8abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Mặt khác

$$a \geq \sqrt{a^2 - (b-c)^2} = \sqrt{a+b-c}.\sqrt{a-b+c}.$$

Tương tự

$$b \geq \sqrt{b^2 - (c-a)^2} = \sqrt{b+c-a}.\sqrt{b-c+a},$$

$$c \geq \sqrt{c^2 - (a-b)^2} = \sqrt{c+a-b}.\sqrt{c-a+b}.$$

Nhân các bất đẳng thức trên đây vế theo vế, ta có

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Từ đó ta có bất đẳng thức phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 5. (Áo 1993) Cho số nguyên $n > 1$ và n số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Đặt $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Chứng minh

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{S}{S-a_i} \geq \frac{n^2}{n-1}$,

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{S-a_i}{a_i} \geq n(n-1)$,

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$.

Chứng minh. a) Theo bất đẳng thức Cauchy-Schawrz ta có

$$\left(\frac{S}{S-a_1} + \frac{S}{S-a_2} + \cdots + \frac{S}{S-a_n}\right)\left(\frac{S-a_1}{S} + \frac{S-a_2}{S} + \cdots + \frac{S-a_n}{S}\right)$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{S}{S-a_1}}.\sqrt{\frac{S-a_1}{S}} + \sqrt{\frac{S}{S-a_2}}.\sqrt{\frac{S-a_2}{S}} + \cdots + \sqrt{\frac{S}{S-a_n}}\sqrt{\frac{S-a_n}{S}}\right)^2 = n^2.$$

Mặt khác

$$\frac{S-a_1}{S} + \frac{S-a_2}{S} + \cdots + \frac{S-a_n}{S} = 1 - \frac{a_1}{S} + 1 - \frac{a_2}{S} + \cdots + 1 - \frac{a_n}{S} = n-1.$$

Suy ra

$$\frac{S}{S-a_1}+\frac{S}{S-a_2}+\cdots+\frac{S}{S-a_n}\geq\frac{n^2}{n-1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{S-a_1}{S}=\cdots=\frac{S-a_n}{S}\Leftrightarrow a_1=\cdots=a_n=\frac{S}{n}.$$

b) Ta có

$$\frac{S-a_1}{a_1}+\frac{S-a_2}{a_2}+\cdots+\frac{S-a_n}{a_n}=-n+\frac{S}{a_1}+\frac{S}{a_2}+\cdots+\frac{S}{a_n}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\left(\frac{S}{a_1}+\frac{S}{a_2}+\cdots+\frac{S}{a_n}\right)\left(\frac{a_1}{S}+\frac{a_2}{S}+\cdots+\frac{a_n}{S}\right)\geq n^2$$

trong đó $\left(\frac{a_1}{S}+\frac{a_2}{S}+\cdots+\frac{a_n}{S}\right)=1$. Vậy

$$\frac{S-a_1}{a_1}+\frac{S-a_2}{a_2}+\cdots+\frac{S-a_n}{a_n}=-n+\frac{S}{a_1}+\frac{S}{a_2}+\cdots+\frac{S}{a_n}\geq -n+n^2=n(n-1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=\cdots=a_n=\frac{S}{n}$.

c) Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$(1+1+\cdots+1)\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\geq\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)^2=S^2.$$

Suy ra

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq\frac{S^2}{n}.$$

Mặt khác, ta có theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\left(a_1\left(S-a_1\right)+\cdots+a_n\left(S-a_n\right)\right)\left(\frac{a_1}{S-a_1}+\cdots+\frac{a_n}{S-a_n}\right)\geq\left(a_1+\cdots+a_n\right)^2=S^2,$$

suy ra

$$\frac{a_1}{S-a_1}+\cdots+\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{S^2}{S^2-\frac{S^2}{n}}=\frac{n}{n-1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = \cdots = a_n = \frac{S}{n}$.

1.1.2 Bài tập

Bài toán 1. Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ thì

$$-\frac{1}{2} \le xy + yz + zx \le 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned} 1 - xy - yz - zx &= \frac{1}{2}(2 - 2xy - 2yz - 2zx) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right) \ge 0. \end{aligned}$$

Suy ra $xy + yz + zx \le 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Để chứng minh bất đẳng thứ hai ta viết

$$xy + yz + zx \ge -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2xy + 2yz + 2zx + 1 \ge 0.$$

Thật vậy

$$2xy + 2yz + 2zx + 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = (x + y + z)^2 \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x + y + z = 0$.

Bài toán 2. Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $0 < x \le y \le z$. Chứng minh

$$y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{y}(x + z) \le \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)(x + z).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn. Đặt hiệu số

$$A = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)(x + z) - y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{y}(x + z).$$

Sau đó chứng minh

$$A = \frac{(x+z)(y-x)(z-y)}{xyz} \geq 0.$$

Bài toán 3. (POLAND 1962) Chứng minh rằng với các số thực dương bất kì a, b, c ta có bất đẳng thức

$$a+b+c \leq \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Trước hết ta có

$$(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2 \geq 0$$

kéo theo

$$a^4-2a^2bc+b^2c^2+b^4-2b^2ca+c^2a^2+c^4-2c^2ab+a^2b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq 2a^2bc+2b^2ca+2c^2ab. \qquad (1)$$

Mặt khác

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2 \geq 0. \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) rồi rút gọn ta có

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c).$$

Cuối cùng chia bất đẳng thức vừa tìm cho $abc > 0$, ta có bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 4. (USA 2001) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn. Ta viết

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} = \frac{a^2-ab+b^2}{b}+\frac{b^2-bc+c^2}{c}+\frac{c^2-ca+a^2}{a}.$$

Ngoài ra sử dụng kết quả

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab,$$

$$b^2 - bc + c^2 \geq bc;$$

$$c^2 - ca + a^2 \geq ca.$$

Bài toán 5. (SINGAPORE 2000) Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn $a^2 + b^2 = \left(c^2 + d^2\right)^3$. Chứng minh

$$\frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} \geq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Gọi $E = \left\{(a, b, c, d) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^4 / a^2 + b^2 = \left(c^2 + d^2\right)^3\right\}$,

và hàm số $f : E \mapsto \mathbb{R}$ cho bởi $f\left((a, b, c, d)\right) = \dfrac{c^3}{a} + \dfrac{d^3}{b} - 1$. Rõ ràng với mọi số thực $\lambda > 0$ ta có

$$\begin{cases} (a, b, c, d) \in E \\ f\left((a, b, c, d)\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\lambda^3 a, \lambda^3 b, \lambda c, \lambda d\right) \in E \\ f\left(\left(\lambda^3 a, \lambda^3 b, \lambda c, \lambda d\right)\right) \geq 0 \end{cases}$$

Vì kết quả trên ta có thể giả sử $(a, b, c, d) \in E$ thoả mãn $a^2 + b^2 = 1$ mà không làm mất tính chất tổng quát của bài toán. Khi đó $c^2 + d^2 = 1$. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\left(\frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b}\right)(ac + bd) \geq \left(c^2 + d^2\right)^2 = 1.$$

Ngoài ra

$$(ac + bd) \leq \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{b^2 + d^2}{2} = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) = 1;$$

Từ đó

$$\frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} \geq \frac{1}{ac + bd} \geq 1.$$

Độc giả tự tìm điều kiện để đẳng thức xảy ra.

Bài toán 6. (ẤN ĐỘ 2001) Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $xyz \geq xy + yz + zx$. Chứng minh

$$xyz \geq 3(x + y + z).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 7. (IMO 1993) Cho các số thực dương a, b, c bất kì. Chứng minh

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Gọi vế trái của bất đẳng thức là A. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$(a+b+c+d)^2 =$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b+2c+3d}}.\sqrt{a(b+2c+3d)} + \sqrt{\frac{b}{c+2d+3a}}.\sqrt{b(c+2d+3a)}\right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{c}{d+2a+3b}}.\sqrt{c(d+2a+3b)} + \sqrt{\frac{d}{a+2b+3c}}.\sqrt{d(a+2b+3c)}\right)^2$$

$$\leq 4A(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \Leftrightarrow A \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Vậy để chứng minh $A \geq \frac{2}{3}$, ta chứng minh

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)} \geq \frac{2}{3}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$3(a+b+c+d)^2 \geq 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Bài toán 8. (IMO 1992) Cho các số thực x, y, $z > 1$ thoả mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$.

Chứng minh

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}.\sqrt{\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}}.$$

Mặt khác

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1.$$

Từ đó ta có bất đẳng thức phải chứng minh.

1.2. Phương pháp so sánh các giá trị trung bình

1.2.1. Định lí – Ví dụ

Định lí 1.2.1. (Bất đẳng thức TBC-TBN) Cho các số thực không âm

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Ta có bất đẳng thức nổi tiếng được gọi là bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân viết tắt là BẤT ĐẲNG THỨC TBC-TBN hay còn gọi là bất đẳng thức Cauchy (cần phân biệt với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz) :

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Chứng minh. Có nhiều cách chứng minh bất đẳng thức TBC-TBN. Độc giả tự tìm một cách chứng minh định lí này.

Ví dụ 6. (MOSKVA 2000) Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $xyz=1$. Chứng minh

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z \geq 2(xy+yz+zx).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Vì tính đối xứng của bất đẳng thức nên có thể giả sử $x \leq y \leq z$. Ta đặt $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+x+y+z-2(xy+yz+zx)$. Ta có

$$f(x, y, z) - f\left(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}\right)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2(xy + yz + zx)$$

$$-x^2 - yz - yz - x - 2\sqrt{yz} + 2\left(2x\sqrt{yz} + yz\right)$$

$$= y^2 + z^2 + y + z - 2(yz + xy + zx) - 2\sqrt{yz} + 4x\sqrt{yz}$$

$$= (y - z)^2 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 - 2x\left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2\left(\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2 + 1 - 2x\right)$$

$$= \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2\left(y + z - 2x + 1 + 2\sqrt{yz}\right).$$

Ta có $x \le y \le z$ nên $y + z - 2x \ge 0$. Vậy $f(x, y, z) - f\left(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}\right) \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = z$.

Đặt $a = x$ và $b = \sqrt{yz}$. Lúc đó $a > 0, b > 0$ và $ab^2 = 1$. Từ đó

$$f(a, b, b) = a^2 + a + 2b - 4ab$$

$$= \frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^2} + 2b - \frac{4}{b}$$

$$= \frac{1}{b^4}\left(2b^5 - 4b^3 + b^2 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{b^4}(b - 1)^2\left(2b^3 + 4b^2 + 2b + 1\right) \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = 1$. Theo bất đẳng thức trên đây ta có

$$f(x, y, z) \ge f\left(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}\right) = f(a, b, b) \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $y = z$, $b = 1$ và $xyz = 1$, nghĩa là $x = y = z = 1$.

Ví dụ 7. (LIÊN XÔ (cũ) 1962) Cho các số thực dương a, b, c, d sao cho $abcd = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \ge 10.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Theo bất đẳng thức TBC-TBN cho 10 số thực dương

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geq 10\sqrt[10]{a^5b^5c^5d^5}$$
$$=10\sqrt{abcd}=10.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

Ví dụ 8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Nhân hai vế của bất đẳng thức phải chứng minh cho số dương $1+abc$ sau đó cộng mỗi vế cho 3 ta có bất đẳng thức tương đương

$$\left(\frac{1+abc}{a(1+b)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{b(1+c)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{c(1+a)}+1\right) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+a+ab+abc}{a(1+b)}+\frac{1+b+bc+abc}{b(1+c)}+\frac{1+c+ca+abc}{c(1+a)} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+a)+ab(1+c)}{a(1+b)}+\frac{(1+b)+bc(1+a)}{b(1+c)}+\frac{(1+c)+ca(1+b)}{c(1+a)} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(1+a)}{a(1+b)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\right)+\left(\frac{(1+b)}{b(1+c)}+\frac{b(1+c)}{1+b}\right)+\left(\frac{(1+c)}{c(1+a)}+\frac{c(1+a)}{1+c}\right) \geq 6.$$

Theo bất đẳng thức TBC-TBN ta có

$$\frac{(1+a)}{a(1+b)}+\frac{a(1+b)}{1+a} \geq 2\sqrt{\frac{(1+a)}{a(1+b)}.\frac{a(1+b)}{1+a}}=2,$$

$$\frac{(1+b)}{b(1+c)}+\frac{b(1+c)}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{(1+b)}{b(1+c)}.\frac{b(1+c)}{1+b}}=2,$$

$$\frac{(1+c)}{c(1+a)}+\frac{c(1+a)}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{(1+c)}{c(1+a)}.\frac{c(1+a)}{1+c}}=2.$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta có bất đẳng thức phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{(1+a)}{a(1+b)}=\frac{a(1+b)}{1+a}=1$$

$$\frac{(1+b)}{b(1+c)}=\frac{b(1+c)}{1+b}=1$$

$$\frac{(1+c)}{c(1+a)}=\frac{c(1+a)}{1+c}=1.$$

Các đẳng thức này tương đương với

$$a=b=c=1.$$

Ví dụ 9. (ROUMANIA 1998) Cho a, b, x, y, z là các số thực dương.

Chứng minh

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq\frac{3}{a+b}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Với chú ý

$$(a+b)(xy+yz+zx)=x(ay+bz)+y(az+bx)+z(ax+by).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\left(x(ay+bz)+y(az+bx)+z(ax+by)\right)\left(\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\right)$$

$$\geq(x+y+z)^2.$$

Suy ra

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}. \qquad (1.1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay+bz=az+bx=ax+by$. Mặt khác ta có

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx.$$

Theo bất đẳng thức TBC-TBN ta có

$$x^2+y^2\geq 2xy,$$

$$y^2+z^2\geq 2yz,$$

$$z^2+x^2\geq 2zx.$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên đây rồi chia 2 vế của kết quả cho 2 ta có

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. Cuối cùng ta có

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx).$$

Thế bất đẳng thức này vào bất đẳng thức (1.1), ta có bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ và $ay+bz=az+bx=ax+by$, nghĩa là $x=y=z$.

Sau đây ta chứng minh lại một bài toán IMO năm 1993 bằng một phương pháp khác.

Ví dụ 10. (IMO 1993) Cho các số thực dương a, b, c, d bất kì. Chứng minh

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Chúng ta đã chứng minh bài toán này dựa theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz (xem bài toán 7). Sau đây là một cách chứng minh khác dựa vào bất đẳng thức TBC-TBN. Đặt

$$A=b+2c+3d>0,$$

$$B=c+2d+3a>0,$$

$$C=d+2a+3b>0,$$

$$D=a+2b+3c>0.$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta suy ra $a+b+c+d=\dfrac{A+B+C+D}{6}$.

Suy ra

$$a=\frac{1}{24}(-5A+7B+C+D),$$

$$b=\frac{1}{24}(-5B+7C+D+A),$$

$$c=\frac{1}{24}(-5C+7D+A+B),$$

$$d=\frac{1}{24}(-5D+7A+B+C).$$

Lúc đó vế trái của bất đẳng thức là

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}+\frac{d}{D}=-\frac{20}{24}+\frac{1}{24}\left(\frac{7B}{A}+\frac{C}{A}+\frac{D}{A}+\cdots+\frac{7A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN cho 36 số dương, ta có

$$\underbrace{\frac{B}{A}+\cdots+\frac{B}{A}}_{7\text{ số}}+\frac{C}{A}+\frac{D}{A}+\underbrace{\frac{C}{B}+\cdots+\frac{C}{B}}_{7\text{ số}}+\frac{D}{B}+\frac{A}{B}+\underbrace{\frac{D}{C}+\cdots+\frac{D}{C}}_{7\text{ số}}+\frac{A}{C}+\frac{B}{C}+$$

$$+\underbrace{\frac{A}{D}+\cdots+\frac{A}{D}}_{7\text{ số}}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}\ge 36\sqrt[36]{\frac{A^9B^9C^9D^9}{A^9B^9C^9D^9}}=36.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=D$. Vậy

$$\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}+\frac{d}{D}\ge-\frac{20}{24}+\frac{36}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$. Đó là điều phải chứng minh.

1.2.2. Bài tập

Bài toán 9. (Áo 2000) Cho hai số thực a và b trong đó $a\neq 0$. Chứng minh

$$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\ge\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Ta có

$$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}=\left(b+\frac{1}{2a}\right)^2+a^2+\frac{3}{4a^2}$$

$$\ge a^2+\frac{3}{4a^2}\ \text{(đẳng thức khi và chỉ khi } b=-\frac{1}{2a}\text{)}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}\ \text{(theo bất đẳng thức TBC-TBN)}$$

Vậy $a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\ge\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^4=\frac{3}{4}$ và $b=-\frac{1}{2a}$.

Bài toán 10. (LIÊN XÔ 1969) Cho số nguyên $n \geq 3$ và $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{n}{2}.$$

Bài toán 11. (TRUNG QUỐC 1990) Cho các số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả mãn $a_1a_2\ldots a_n = 1$. Chứng minh

$$(2+a_1)(2+a_2)\ldots(2+a_n) \geq 3^n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Với mọi chỉ số $i = 1, 2, \ldots, n$, theo bất đẳng thức TBC-TBN ta có $2+a_i = 1+1+a_i \geq 3\sqrt[3]{1.1.a_i} = 3\sqrt[3]{a_i}$, đẳng thức khi $a_i = 1$.

Suy ra bất đẳng thức

$$(2+a_1)(2+a_2)\ldots(2+a_n) \geq 3^n\sqrt[3]{a_1a_2\ldots a_n} = 3^n.$$

Bất đẳng thức là đẳng thức khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

Bài toán 12. (BMO 2005) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Bài toán 13. Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $x+y+z=1$. Chứng minh

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Đặt $P = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)$. Lúc đó

$$P = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xyz}.$$

Theo bất đẳng thức TBC-TBN

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3q \text{ với } q=\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}},$$

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geq 3q^2,$$

$$\frac{1}{xyz}=q^3.$$

Vậy

$$P\geq 1+3q+3q^2+q^3=(1+q)^3.$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức TBC-TBN

$$x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}\Leftrightarrow q=\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\geq\frac{3}{x+y+z}=3.$$

Suy ra

$$P\geq(1+3)^3=64.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài toán 14. (ROUMANIA 1997) Cho số nguyên $n\geq 2$ và các số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho $x_1x_2\ldots x_n=1$. Chứng minh

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}^{n}\frac{x_i^9+x_j^9}{x_i^6+x_i^3x_j^3+x_j^6}\geq\frac{n(n-1)}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 15. (BALTIC WAY 2005) Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc=1$. Chứng minh

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Với mọi số thực dương x ta có bất đẳng thức TBC-TBN $1+x^2\geq 2x$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$. Vậy

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}$$

$$=\frac{1}{2+\frac{1}{a}}+\frac{1}{2+\frac{1}{b}}+\frac{1}{2+\frac{1}{c}}=R.$$

$R\le 1$ tương đương với

$$\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)+\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)+\left(2+\frac{1}{c}\right)\left(2+\frac{1}{a}\right)\le\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\le\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{abc}\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 3.$$

Bất đẳng thức sau cùng chính là bất đẳng thức TBC-TBN cho 3 số dương

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}=3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 16. (ESTONIA 2003) Cho a, b và c là các số thực dương không lớn hơn 2. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{abc}{a+b+c}\le\frac{4}{3}.$$

Bài toán 17. Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\ge 1.$$

Khi nào bất đẳng thức là đẳng thức ?

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN vào mỗi mẫu số, ta nhận được

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\ge\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{1+b^2+c^2}+\frac{1}{1+c^2+a^2}.$$

Ta có kết quả sau đây bằng cách áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN : với mọi số thực dương x, y, z

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz},$$

$$xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}.$$

Nhân hai bất đẳng thức trên đây vế theo vế ta có

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 9xyz.$$

Suy ra

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Bất đẳng thức này trở thành đẳng thức khi $x=y=z$.

Áp dụng kết quả vừa chứng minh, ta có

$$\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{1+b^2+c^2}+\frac{1}{1+c^2+a^2} \geq$$

$$\geq \frac{9}{(1+a^2+b^2)+(1+b^2+c^2)+(1+c^2+a^2)}$$

$$=\frac{9}{3+2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{9}{3+2.3}=1.$$

Bất đẳng thức là đẳng thức khi và chỉ khi $1+a^2+b^2=1+b^2+c^2=1+c^2+a^2$ $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài toán 18. (ESTONIA 2003)

Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b và c

$$\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 2\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Bài toán 19. (IMO shortlist 1993) Cho a, b, c, d là các số không âm sao cho $a+b+c+d=1$. Chứng minh

$$abc+bcd+cda+dab \leq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd.$$

Khi nào bất đẳng thức là đẳng thức ?

Lời giải. Đặt

$$f(a,b,c,d)=abc+bcd+cda+dab-\frac{176}{27}abcd$$

$$=bc(a+d)+ad\left(b+c-\frac{176}{27}bc\right).$$

Ta để ý thấy $f(a, b, c, d)$ là hàm số đối xứng. Ta xét các trường hợp sau :

Trường hợp 1. Nếu $b+c-\dfrac{176}{27}bc \le 0$. Ta có

$$f(a, b, c, d) \le bc(a+d) \le \left(\frac{b+c+a+d}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Đó là bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $b=c=a=d=\dfrac{1}{4}$.

Trường hợp 2. Nếu $b+c-\dfrac{176}{27}bc > 0$. Theo bất đẳng thức TBC-TBN

$$f(a, b, c, d) \le bc(a+d) + \left(\frac{a+d}{2}\right)^2\left(b+c-\frac{176}{27}bc\right) = f\left(\frac{a+d}{2}, b, c, \frac{a+d}{2}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=d$. Vì tính đối xứng của $f(a, b, c, d)$ nên ta có thể lặp đi lặp lại quá trình như trên :

$$f(a, b, c, d) \le f\left(\frac{a+d}{2}, b, c, \frac{a+d}{2}\right) = f\left(b, \frac{a+d}{2}, \frac{a+d}{2}, c\right)$$

$$\le f\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = f\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$$

$$\le f\left(\frac{a+b+c+d}{4}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{a+b+c+d}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$= f\left(\frac{b+c}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{a+d}{2}\right) \le f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27}.$$

Đó là bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$.

Bài toán 20. (BULGARIA 1997) Cho a, b, c là các số dương sao cho $abc=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \le \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

1.3. Phương pháp hàm số lồi – hàm số lõm

1.3.1. Định nghĩa – Định lí – Ví dụ

Định nghĩa 1.3.1. Một hàm số f xác định trên một khoảng (đoạn, nửa khoảng) I được gọi là một hàm số lồi (theo thứ tự hàm số lõm) nếu và chỉ nếu tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ

$$\{(x, y)/x \in I, y \geq f(x)\}$$

là một tập hợp lồi (theo thứ tự lõm).

Ta cũng có định nghĩa tương đương.

Hàm số f là hàm số lồi trên khoảng (đoạn hay nửa khoảng) I nếu với mọi $a, b \in I$ và với mọi số thực $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda f(a)+(1-\lambda) f(b) \geq f(\lambda a+(1-\lambda) b), \text{ đẳng thức khi } a=b.$$

Khi f là hàm số liên tục trên I ta có định nghĩa

$$f \text{ là hàm số lồi trên } I \text{ khi và chỉ khi } \frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right), \forall x, y \in I,$$

đẳng thức khi $x=y$.

Hàm số f là hàm số lõm trên khoảng (đoạn hay nửa khoảng) I nếu với mọi $a, b \in I$ và với mọi số thực $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda f(a)+(1-\lambda) f(b) \leq f(\lambda a+(1-\lambda) b), \text{ đẳng thức khi } a=b.$$

Khi f là hàm số liên tục trên I ta có định nghĩa

$$f \text{ lõm trên } I \text{ khi và chỉ khi } \frac{f(x)+f(y)}{2} \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \forall x, y \in I,$$

đẳng thức khi $x=y$.

Sau đây ta có vài kết quả liên quan đến hàm số lồi trên một khoảng (các tính chất này cũng đúng với các hàm số lõm sau khi thay các kí hiệu $\geq$ bởi $\leq$ tương ứng).

Định lí 1.3.1. Nếu f là hàm số lồi trên khoảng I thì các tính chất sau đây là đúng

1. Với mọi $a, b, c, d \in I$ sao cho $a \leq b < c \leq d$ thì

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(d)-f(b)}{d-b}.$$

Nghĩa là độ dốc của các cát tuyến giao nhau xuyên qua đồ thị của hàm f tăng dần.

2. Nếu f có đạo hàm trên I thì hàm đạo hàm f' là hàm số tăng trên I.

Định lí 1.3.2. (Bất đẳng thức Jensen) Cho f là một hàm số xác định và có tính lồi trên một khoảng I và n số thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Lúc đó với mọi số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thuộc I ta có bất đẳng thức

$$\frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \ge f\left(\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\right).$$

Đẳng thức khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Định lí 1.3.3. Nếu f có đạo hàm đến cấp hai trên khoảng I thì

f lồi trên I khi và chỉ khi $f''(x) \ge 0$ với mọi $x \in I$.

Chú ý 2. Có một số tài liệu trong nước định nghĩa hàm số lồi theo định nghĩa của hàm số lõm trên đây và ngược lại. Định nghĩa này khác với định nghĩa trong các tài liệu ngoại văn. Theo tác giả, để hoà nhập với thế giới chúng ta nên thay đổi định nghĩa như trên đây.

Ta có thể chứng minh bất đẳng thức TBC-TBN bằng cách sử dụng bất đẳng thức Jensen.

Ví dụ 11. (Bất đẳng thức TBC-TBN) Chứng minh bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$ với mọi số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Chứng minh. Nếu một trong các số thực $a_i = 0$ thì vế phải của bất đẳng thức bằng không trong khi vế trái không âm. Vậy trong trường hợp này bất đẳng thức đã được chứng minh. Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Ta xét hàm số $f(x) = \ln x$ trên khoảng $I = (0, +\infty)$. Ta có đạo hàm cấp một $f'(x) = \frac{1}{x}$ và đạo hàm cấp hai $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ trên I. Vậy hàm $f(x)$ là hàm số lõm trên I. Vậy theo bất đẳng thức Jensen

$$\ln\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \geq \frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right).$$

Vì hàm số $f(x)=\ln x$ là hàm số tăng trên I suy ra bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Chú ý. Ta cũng có thể chứng minh bất đẳng thức suy rộng giữa trung bình cộng và trung bình nhân như sau :

Cho n số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và n số thực $t_1, t_2, \ldots, t_n \in (0, 1)$ thoả mãn $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$. Ta có bất đẳng thức TBC-TBN suy rộng :

$$t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n \geq a_1^{t_1}a_2^{t_2}\ldots a_n^{t_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các a_i bằng nhau.

Ví dụ 12. (Bất đẳng thức giữa các trung bình luỹ thừa) Cho $n \geq 1$ số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ta định nghĩa các trung bình "luỹ thừa" là các biểu thức

$$S_r=\left(\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \text{ với mọi số thực } r \neq 0.$$

Dễ dàng thấy

$$S_1=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

là trung bình cộng và

$$S_{-1}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

là trung bình điều hoà của các số $a_i, i=1, 2, \ldots, n$. Mặt khác ta quy ước S_0 là trung bình nhân của các số đó. Với các định nghĩa trên đây, ta có bất đẳng thức giữa các trung bình luỹ thừa của các số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

Cho hai số thực $r<t$, ta có $S_r \leq S_t$ và đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Chứng minh. Trong các trường hợp $0<r<t$ hay $r<0<t$, để chứng minh bất đẳng thức ta áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm số $f(x)=x^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha>0$ xác định trên $(0, +\infty)$. Trong trường hợp $r<t<0$, ta đặt $b_i=\frac{1}{a_i}$, $i=1, 2, \ldots, n$. Sau đó đưa về trường hợp $0<-t<-r$.

Hệ quả 1.3.1. (Bất đẳng thức giữa các trung bình căn bậc hai, trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hoà)

Với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, ta có

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}.$$

Ví dụ 13. Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Khi nào có đẳng thức ?

Chứng minh. Xét hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$. Ta có đạo hàm cấp hai $f''(x) = 2 > 0$. Vậy $f(x) = x^2$ lồi trên $\mathbb{R}$. Theo bất đẳng thức Jensen

$$\frac{1}{3}\left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2\right] \geq \left(\frac{a+b+c}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right)^2$$

$$\geq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^2 \text{ (theo bđt TBC-TBN)}$$

$$\geq \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{a+b+c}\right)^2 \text{ (theo bđt TBC-TBN)}$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 3\right)^2 = \frac{100}{9}$$

Từ đó ta có bất đẳng thức

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Đẳng thức khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 14. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh

$$\frac{(a+2b+3c)^2}{a^2+2b^2+3c^2} \leq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Ta có hàm số $f(x)=x^2$ là hàm số lồi trên khoảng $(0,+\infty)$ nên áp dụng bất đẳng thức Jensen

$$\left(\frac{a+2b+3c}{6}\right)^2 \leq \frac{a^2+2b^2+3c^2}{6}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. Từ đó suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Ví dụ 15. Tìm số thực bé nhất M sao cho với mọi $a, b>0$

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} \leq M\sqrt[3]{a+b}.$$

Chứng minh. Hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x}$ là hàm số lõm trên $[0,+\infty)$. Vậy theo bất đẳng thức Jensen

$$\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b$. Bất đẳng thức này có thể viết

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} \leq \frac{2}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{a+b}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b$. Vậy $M=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4}$.

Ví dụ 16. Cho $n \geq 1$ số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Khi nào có đẳng thức ?

Chứng minh. Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ lồi trên khoảng $(-\infty\,;1)$ nên theo bất đẳng thức Jensen với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, ta có

$$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+\cdots+x_nf(x_n) \geq f(x_1.x_1+\cdots+x_n.x_n),$$

nghĩa là

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\frac{1}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n}x_1^2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$. Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$(1.x_1+1.x_2+\cdots+1.x_n)^2\leq(1+1+\cdots+1)\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$. Bất đẳng thức này có thể viết lại

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geq\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2=\frac{1}{n}.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$.

Ví dụ 17. (Áo 2000) Cho $a,b>0$ và số nguyên $n\in\mathbb{Z}$. Chứng minh

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2^{n+1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Ta xét các trường hợp :

+ Khi $n\geq 0$ hàm số $f(x)=x^n$ là hàm số lồi trên $(0,+\infty)$. Vậy theo bất đẳng thức Jensen

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2\left(\frac{1+\frac{a}{b}+1+\frac{b}{a}}{2}\right)^n=2\left(1+\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\right)^n.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\Leftrightarrow a=b$ hoặc $n=0$ hoặc $n=1$.

Theo bất đẳng thức TBC-TBN ta có $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

Vậy $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2\times 2^n=2^{n+1}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ hoặc $n=0$.

+ Khi $n \le -1$: Ta đặt $p = -n \ge 1$. Khi đó

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \ge 2^{n+1} \Leftrightarrow \frac{b^p}{(a+b)^p} + \frac{a^p}{(a+b)^p} \ge \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^p + a^p}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^p.$$

Bất đẳng thức cuối suy ngay từ bất đẳng thức Jensen ứng với hàm số $f(x) = x^p$ lồi trên khoảng $(0, +\infty)$ với $p \ge 1$ và $p \in \mathbb{Z}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hay $p = 1$ tức là xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hay $n = -1$. Đến đây bài toán đã hoàn toàn được chứng minh.

Ví dụ 18. (IMO 2001) Chứng minh rằng với mọi số thực $\lambda \ge 8$ và $a, b, c > 0$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}} \ge \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}.$$

Khi nào có đẳng thức ?

Chứng minh. Vì bài toán đẳng cấp đối với các biến a, b, c nên ta có thể chia tất cả các biến số cho số dương $S = a+b+c$ để có biến số mới có tổng bằng 1. Vì vậy không làm mất tính tổng quát của bài toán ta có thể giả sử $a+b+c=1$. Hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ lồi trên khoảng $(0, +\infty)$ nên theo bất đẳng thức Jensen

$$af\left(a^2+\lambda bc\right) + bf\left(b^2+\lambda ca\right) + cf\left(c^2+\lambda ab\right) \ge f\Big(a\left(a^2+\lambda bc\right)$$
$$+b\left(b^2+\lambda ca\right) + c\left(c^2+\lambda ab\right)\Big),$$

nghĩa là

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}$$
$$\ge \frac{1}{\sqrt{a\left(a^2+\lambda bc\right)+b\left(b^2+\lambda ca\right)+c\left(c^2+\lambda ab\right)}}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a\left(a^2+\lambda bc\right)+b\left(b^2+\lambda ca\right)+c\left(c^2+\lambda ab\right) \le \frac{1+\lambda}{9},$$

nghĩa là

$$a^3+b^3+c^3+3\lambda abc \le \frac{1+\lambda}{9}.$$

Ta có thể kiểm chứng dễ dàng đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3\left(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+bc^2+b^2c+2abc\right).$$

Vậy

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3+3\lambda abc\\
&=(a+b+c)^3-3\left(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+bc^2+b^2c+2abc\right)+3\lambda abc.\\
&=(a+b+c)^3-3\left(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+bc^2+b^2c\right)+3(\lambda-2)abc\\
&\le 1-3.6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}+3(\lambda-2)abc \text{ (bất đẳng thức TBC-TBN)},\\
&\le 1+3(\lambda-8)abc \le 1+3(\lambda-8)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{ (bđt TBC-TBN và } \lambda\ge 8),\\
&\le 1+\frac{\lambda-8}{9}=\frac{1+\lambda}{9}.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

1.3.2. Bài tập

Bài toán 21. Cho $a, b, c>0$ thoả mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{10}+\left(b+\frac{1}{b}\right)^{10}+\left(c+\frac{1}{c}\right)^{10}.$$

Lời giải. Trước hết ta có $0<a, b, c<1$. Bây giờ xét hàm số $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ trên khoảng $I=(0, 1)$. Hàm số này có $f'(x)=10\left(x+\frac{1}{x}\right)^9\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$, suy ra đạo hàm cấp hai

$$f''(x)=90\left(x+\frac{1}{x}\right)^8\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2+10\left(x+\frac{1}{x}\right)^9\left(\frac{2}{x^3}\right)$$

dương trên I. Vậy $f(x)$ là hàm số lồi trên I và theo bất đẳng thức Jensen

$$\frac{10^{10}}{3^9} = 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \le f(a)+f(b)+f(c)$$

$$= \left(a+\frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b+\frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c+\frac{1}{c}\right)^{10}.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $\frac{10^{10}}{3^9}$ đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài toán 22. Cho $a, b \ge 0$ và $p, q > 1$ sao cho $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Chứng minh

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \ge ab.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Ta có bài toán quen thuộc phải chứng minh bằng bất đẳng thức Jensen sau đây.

Bài toán 23. (IMO 1995) Cho a, b, c là các số dương sao cho $abc=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}.$$

Xác định khi nào bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Chứng minh. Thực hiện phép thế $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$ và $z=\frac{1}{c}$ thì điều kiện $abc=1$ tương đương với $xyz=1$ và bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ trên khoảng $(0, +\infty)$. Ta có $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$ với mọi $x \in (0, +\infty)$, suy ra f là hàm số lồi trên $(0, +\infty)$. Vậy theo bất đẳng thức Jensen

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=xf\left(\frac{y+z}{x}\right)+yf\left(\frac{z+x}{y}\right)+zf\left(\frac{x+y}{z}\right)$$

$$\geq (x+y+z)f\left(\frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{x+y+z}\right)=\frac{x+y+z}{2}.$$

Cuối cùng bất đẳng thức TBC-TBN cho ta

$$\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}.$$

Suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ tức là khi $a=b=c=1$.

Bài toán 24. (BA LAN 1995) Cho số nguyên $n\geq 1$. Xác định giá trị nhỏ nhất của tổng

$$S=x_1+\frac{x_2^2}{2}+\cdots+\frac{x_n^n}{n},$$

với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho $\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}=n.$

Bài toán 25. Cho số nguyên $n\geq 1$ và n số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. Chứng minh

$$\left(x_1^3+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2^3+\frac{1}{x_2}\right)^2+\cdots+\left(x_n^3+\frac{1}{x_n}\right)^2\geq n\left(\frac{1}{n^3}+n\right)^2,$$

và đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$.

Lời giải. Vì hàm số $y=x^2$ lồi trên khoảng $(0\,;+\infty)$ nên theo bất đẳng thức Jensen

$$\left(x_1^3+\frac{1}{x_1}\right)^2+\cdots+\left(x_n^3+\frac{1}{x_n}\right)^2\geq n\left(\frac{x_1^3+\frac{1}{x_1}+\cdots+x_n^3+\frac{1}{x_n}}{n}\right)^2$$

$$=n\left(\frac{x_1^3+\cdots+x_n^3}{n}+\frac{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\right)^2.$$

Sau đó với các hàm số lồi $y=x^3$ và $y=\dfrac{1}{x}$ trên $(0,+\infty)$, các bất đẳng thức Jensen cho ta

$$\frac{x_1^3+\cdots+x_n^3}{n}\ge\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^3=\frac{1}{n^3}.$$

và
$$\frac{\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}{n}\ge\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=n.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên, ta suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$

Bài toán 26. Cho số nguyên dương $n>1$ và n số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. Chứng minh

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\ge\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Khi nào có đẳng thức ?

Bài toán 27. Cho 3 số $x, y, z>0$, chứng minh

$$x^5+y^5+z^5\le x^5\sqrt{\frac{x^2}{yz}}+y^5\sqrt{\frac{y^2}{zx}}+z^5\sqrt{\frac{z^2}{xy}}.$$

Khi nào xảy ra đẳng thức ?

Lời giải. Đặt $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{y}$, $c=\sqrt{z}$. Bất đẳng thức phải chứng minh trở thành

$$a^{10}+b^{10}+c^{10}\le\frac{a^{13}+b^{13}+c^{13}}{abc}.$$

Theo bất đẳng thức giữa các trung bình luỹ thừa. Nhắc lại

$$a^{13}+b^{13}+c^{13}=3S_{13}^{13}=3S_{13}^{10}S_{13}^{3}\ge3S_{10}^{10}S_0^3=\left(a^{10}+b^{10}+c^{10}\right)abc.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài toán 28. (IRAN 1998) Cho các số thực dương x_1, x_2, x_3, x_4 thoả mãn $x_1x_2x_3x_4 = 1$. Chứng minh

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geq \max\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 29. (Bất đẳng thức Hölder) Cho hai số thực $p, q > 1$ thoả mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ta có

$$|a_1b_1| + |a_2b_2| + \cdots + |a_nb_n| \leq \left(a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Chú ý. Khi $p = q = 2$, bất đẳng thức trên đây là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Chứng minh. Đặt

$$A = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p,$$

$$B = b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q.$$

Nếu A hay B bằng 0, thì mọi số $a_i = 0$ hay mọi số $b_j = 0$. Lúc đó hai vế của bất đẳng thức đều bằng không. Bây giờ ta xét trường hợp $A \neq 0$ và $B \neq 0$. Đặt $t_1 = \frac{1}{p}$ và $t_2 = \frac{1}{q}$, thì $0 < t_1, t_2 < 1$ và $t_1 + t_2 = 1$. Đặt $x_i = \frac{a_i^p}{A}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$ và $y_i = \frac{b_i^q}{B}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Ta có $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$. Vì hàm số $f(x) = e^x$ là hàm số lồi trên $\mathbb{R}$ (vì $f''(x) = e^x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$). Vậy theo bất đẳng thức Jensen với $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$x_i^{\frac{1}{p}} y_i^{\frac{1}{q}} = f\left(t_1 \ln x_i + t_2 \ln y_i\right) \leq t_1 f\left(\ln x_i\right) + t_2 f\left(\ln y_i\right) = \frac{x_i}{p} + \frac{y_i}{q}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên khi $i = 1, 2, \ldots, n$ ta có

$$\frac{|a_1||b_1|}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}}+\cdots+\frac{|a_1||b_1|}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}}=$$

$$=x_1^{\frac{1}{p}}y_1^{\frac{1}{q}}+\cdots+x_n^{\frac{1}{p}}y_n^{\frac{1}{q}}\le\frac{x_1+\cdots+x_n}{p}+\frac{y_1+\cdots+y_n}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Đó là bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức khi và chỉ khi $x_1=y_1,\ldots,x_n=y_n$.

Bài toán 30. Cho $a, b, c, d>0$ thoả mãn $c^2+d^2=(a^2+b^2)^3$, chứng minh

$$\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\ge 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 31. (USAMO 1980) Cho các số thực $a, b, c\in[0, 1]$. Chứng minh

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le 1.$$

Khi nào có đẳng thức ?

Chứng minh. Trước hết ta có nhận xét, khi một hàm số có đạo hàm đến bậc hai và lồi trên một đoạn $[\alpha, \beta]$ thì hàm số đó sẽ đạt giá trị lớn nhất tại α hay β. Ta đặt

$$f(a, b, c)=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c).$$

Bây giờ cho một trong các biến (ví dụ a) thay đổi còn các biến còn lại (b, c) cố định thì đạo hàm cấp hai theo biến đó, ví dụ a là

$$f_a''(a, b, c)=\frac{2b}{(c+a+1)^3}+\frac{2c}{(a+b+1)^3}\ge 0.$$

Vậy f lồi theo biến a trên đoạn $[0, 1]$ và đạt giá trị lớn nhất $f(0)=f(1)=1$ khi $a=0$, *hay* $a=1$. Tương tự đối với biến khác. Vậy hàm số f đạt giá trị lớn nhất $f(0)=f(1)=1$ khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hay $a=b=c=0$. Đó là điều ta phải chứng minh.

Bài toán 32. (USAMO 1977) Cho a, b, c, d, e và p, q là các số thực dương sao cho $0 < a, b, c, d, e < p \leq q$, chứng minh

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \leq 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

Hãy xác định khi nào bất đẳng thức là đẳng thức.

Chú ý 5. Bất đẳng thức này có tên là bất đẳng thức Kantorovich và là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Schweitzer được chứng minh tương tự như bài toán trên đây. Bạn đọc tự tìm hàm số lồi thích hợp.

1.4. Phương pháp thế

1.4.1. Định lí – Ví dụ

Có nhiều bất đẳng thức không thể chứng minh trực tiếp mà phải thay đổi biến số. Với các biến mới, bất đẳng thức trở nên dễ dàng hơn trong việc chứng minh. Sau đây là một số định lí, ví dụ và bài tập.

Định lí 1.4.1. (Nesbitt, 1903) Với mọi số thực dương a, b, c, ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Sau đây ta có nhiều cách chứng minh định lí này.

Chứng minh 1. Sau khi thực hiện phép thế $x = b+c$, $y = c+a$, $z = a+b$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{y+z-x}{2x} \geq \frac{3}{2} \ hay \ \sum_{\text{cyclic}} \frac{y+z}{x} \geq 6.$$

Bất đẳng thức này suy từ bất đẳng thức giữa trung bình cộng, trung bình nhân :

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{y+z}{x} = \frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}$$

$$\geq 6\left(\frac{y}{x}.\frac{z}{x}.\frac{z}{y}.\frac{x}{y}.\frac{x}{z}.\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{6}} = 6.$$

Chú ý 6. Ở đây ta có đưa vào một kí hiệu mới sau này sẽ được sử dụng rất nhiều :

$$\sum_{\text{cyclic}} x = x + y + z$$

nếu chúng ta cần cộng ba số x, y, z có vai trò giống nhau mà x được "cử" làm đại diện.

Chứng minh 2. Ta thực hiện phép thế

$$x = \frac{a}{b+c},\ y = \frac{b}{c+a},\ z = \frac{c}{a+b}.$$

Suy ra với hàm số $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ ta có

$$\sum_{\text{cyclic}} f(x) = \sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{a+b+c} = 1$$

Vì hàm số f lõm trên khoảng $(0, \infty)$, bất đẳng thức Jensen cho ta

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sum_{\text{cyclic}} f(x) \le f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

Vì f là hàm số đơn điệu tăng, bất đẳng thức này kéo theo

$$\frac{1}{2} \le \frac{x+y+z}{3} \text{ hay } \sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b+c} = x + y + z \ge \frac{3}{2}.$$

Chứng minh 3. Giống như cách chứng minh trên đây, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$T \ge \frac{1}{2}, \text{ trong đó } T = \frac{x+y+z}{3} \text{ và } \sum_{\text{cyclic}} \frac{x}{1+x} = 1.$$

Ta chỉ cần kiểm chứng điều kiện

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{x}{1+x} = 1 \Leftrightarrow 1 = 2xyz + xy + yz + zx.$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\begin{aligned} 1 = 2xyz + xy + yz + zx \le 2T^3 + 3T^2 &\Rightarrow 2T^3 + 3T^2 - 1 \ge 0 \\ &\Rightarrow (2T-1)(T+1)^2 \ge 0 \\ &\Rightarrow T \ge \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 19. (IMO 2001/2) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

Lời giải. Để tránh các căn số bậc hai, chúng ta thực hiện phép thế sau đây $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}$, $z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$. Rõ ràng, $x, y, z\in(0, 1)$. Ta phải chứng minh $x+y+z\geq 1$. Ta chú ý rằng

$$\frac{a^2}{8bc}=\frac{x^2}{1-x^2},\ \frac{b^2}{8ac}=\frac{y^2}{1-y^2},\ \frac{c^2}{8ab}=\frac{z^2}{1-z^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{512}=\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\left(\frac{y^2}{1-y^2}\right)\left(\frac{z^2}{1-z^2}\right).$$

Vậy, ta cần phải chứng minh bằng phản chứng $x+y+z\geq 1$, trong đó $0<x, y, z<1$ và $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)=512(xyz)^2$. Giả sử $x+y+z<1$. Lúc đó theo bất đẳng thức TBC-TBN

$$\begin{aligned}&(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)\\&>\left((x+y+z)^2-x^2\right)\left((x+y+z)^2-y^2\right)\left((x+y+z)^2-z^2\right)\\&=(x+x+y+z)(y+z)(x+y+y+z)(z+x)(x+y+z+z)(x+y)\\&\geq 4\left(x^2yz\right)^{\frac14}.2(yz)^{\frac12}.4\left(y^2zx\right)^{\frac14}.2(zx)^{\frac12}.4\left(z^2xy\right)^{\frac14}.2(xy)^{\frac12}\\&=512(xyz)^2.\end{aligned}$$

Mâu thuẫn ! Vậy $x+y+z\geq 1$.

Ví dụ 20. (IMO 1995/2) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Lời giải. Dùng phép thế $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$, ta có $xyz=1$. Lúc đó bất đẳng thức phải chứng minh có dạng

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left[(y+z)+(z+x)+(x+y)\right]\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)\geq(x+y+z)^2$$

Vậy, theo bất đẳng thức TBC-TBN

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3(xyz)^{\frac{1}{3}}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 21. (Korea 1998) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a+b+c=abc$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leq\frac{3}{2}.$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$. Ta thấy $a+b+c=abc$ tương đương với $1=xy+yz+zx$. Bất đẳng thức đã cho trở thành bất đẳng thức

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\leq\frac{3}{2}$$

hay
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+xy+yz+zx}}\leq\frac{3}{2}$$

hay
$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leq\frac{3}{2}.$$

Theo bất đẳng thức TBC-TBN, ta có

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}=\frac{x\sqrt{(x+y)(x+z)}}{(x+y)(x+z)}\leq\frac{1}{2}\frac{x\left[(x+y)+(x+z)\right]}{(x+y)(x+z)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{x}{x+y}\right).$$

Bằng cách tương tự, ta nhận được

$$\frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+z} + \frac{y}{y+x}\right)$$

và

$$\frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x} + \frac{z}{z+y}\right).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên, ta có kết quả phải chứng minh.

Ví dụ 22. (APMO 1996) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Đặt $x = a+b-c$, $y = b+c-a$, $z = c+a-b$. Lúc đó $a = \frac{x+z}{2}$, $b = \frac{x+y}{2}$, $c = \frac{y+z}{2}$. Trước hết ta chú ý rằng $2(x+y) \ge x+y+2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$, đẳng thức khi $x = y$.

Áp dụng bất đẳng thức này, ta có các bất đẳng thức sau

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{2}\sqrt{x+y} = 2\sqrt{b}$$

$$\sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} = \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{2}\sqrt{y+z} = 2\sqrt{c}$$

$$\sqrt{c+a-b} + \sqrt{a+b-c} = \sqrt{z} + \sqrt{x} \le \sqrt{2}\sqrt{z+x} = 2\sqrt{a}$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế, ta có bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ tức là khi và chỉ khi $a = b = c$.

1.4.2. Bài tập

Bài toán 33. Cho các số thực $a, b, c \in [0\,;\,2]$ thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 5$$

Lời giải. Đặt $x = a - 1$, $y = b - 1$, $z = c - 1$. Lúc đó điều kiện của bài toán là $x, y, z \in [-1, 1]$ và $x + y + z = 0$. Trước hết ta có đẳng thức sau

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \\ &= 3 + 2(x+y+z) + x^2 + y^2 + z^2 \\ &= 3 + x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Vậy bài toán có thể viết cách khác

Cho $x, y, z \in [-1, 1]$ thoả mãn $x + y + z = 0$. Chứng minh

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$$

Không làm mất tính chất tổng quát ta có thể giả sử $-1 \leq x \leq y \leq z \leq 1$. Để chứng minh bài toán ta phân nhiều trường hợp khác nhau :

Trường hợp 1. $-1 \leq x \leq y \leq z \leq 0$ thì

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq |x| + |y| + |z| = |x + y + z| = 0.$$

Trường hợp này xảy ra khi $x = y = z = 0$

Trường hợp 2. $-1 \leq x \leq y \leq 0 < z \leq 1$ thì

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq |x| + |y| + |z| = |x + y| + z = -x - y + z = 2z \leq 2.$$

Trường hợp 3. $-1 \leq x \leq 0 < y \leq z \leq 1$ thì

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq |x| + |y| + |z| = -x + y + z = -2x \leq 2.$$

Trường hợp 4. $-1 < 0 < x \leq y \leq z \leq 1$

Trường hợp này không xảy ra vì $x + y + z > 0$ mâu thuẫn với $x + y + z = 0$.

Vậy trong tất cả các trường hợp ta luôn luôn có bất đẳng thức phải chứng minh.

Bài toán 34. (INDIA 2001) Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xyz \geq xy + yz + zx$. Chứng minh

$$xyz \geq 3(x + y + z).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn. Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$. Lúc đó điều kiện của bài toán là $a + b + c \le 1$ và bất đẳng thức phải chứng minh là $ab + bc + ca \le \frac{1}{3}$. Để có bất đẳng thức cuối cùng này ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Bài toán 35. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Đặt $a = x + y, b = y + z, c = z + x$. Lúc đó $a, b, c > 0$. Ta có

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} = \frac{(a-b)c}{b} + \frac{(b-c)a}{c} + \frac{(c-a)b}{a}$$

$$= \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} + \frac{bc}{a} - a - b - c.$$

Ta có các bất đẳng thức TBC-TBN

$$\frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} \ge 2\sqrt{\frac{acba}{bc}} = 2a,$$

$$\frac{ba}{c} + \frac{bc}{a} \ge 2\sqrt{\frac{babc}{ca}} = 2b,$$

$$\frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \ge 2\sqrt{\frac{acbc}{ab}} = 2c.$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế rồi chia kết quả cho 2, ta có bất đẳng thức $\frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} + \frac{bc}{a} - a - b - c \ge 0$. Đó là bất đẳng thức phải chứng minh.

Bài toán 36. Cho a, b và c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn. Đặt $x = b + c,\ y = c + a,\ z = a + b$ và $p = a + b + c$. Lúc đó x, y, z là các số thực dương. Ta chứng minh bất đẳng thức

$$(x + y + z)\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}\right) \geq p^2.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Đôi khi chúng ta chứng minh bất đẳng thức bằng cách đổi các biến số bởi các hàm số lượng giác. Sau đây là một vài bài toán được giải theo phương pháp này.

Bài toán 37. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$\frac{a}{a + bc} + \frac{b}{b + ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c + ab} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{1 + \frac{bc}{a}} + \frac{1}{1 + \frac{ca}{b}} + \frac{\sqrt{\frac{ab}{c}}}{1 + \frac{ab}{c}} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{bc}{a}},\ y = \sqrt{\frac{ca}{b}},\ z = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. Lúc đó ta phải chứng minh

$$\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} + \frac{z}{1 + z^2} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

trong đó $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$. Dễ dàng chứng minh rằng tồn tại các góc $A, B, C \in (0, \pi)$ với

$$x = \tan\frac{A}{2},\ y = \tan\frac{B}{2},\ z = \tan\frac{C}{2},\ \text{và } A + B + C = \pi.$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{1 + \left(\tan\frac{A}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\tan\frac{B}{2}\right)^2} + \frac{\tan\frac{C}{2}}{1 + \left(\tan\frac{C}{2}\right)^2} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

hay $$1+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C)\le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

hay $$\cos A+\cos B+\sin C\le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Chú ý rằng $\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

Vì $\left|\frac{A-B}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$, suy ra

$$\cos A+\cos B\le 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\pi-C}{2}\right).$$

Vậy chỉ cần chứng minh

$$2\cos\left(\frac{\pi-C}{2}\right)+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin C+2\sin\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

trong đó $C\in(0,\pi)$. Đặt $f(t)=\sin t+2\sin\frac{t}{2}$ xác định trên khoảng $(0,\pi)$. Hàm số này có đạo hàm $f'(t)=\cos t+\cos\frac{t}{2}$. Ta có

$$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pi-\frac{t}{2}\Leftrightarrow t=\frac{2\pi}{3}.$$

Giá trị của đạo hàm cấp hai tại điểm tới hạn này là

$$f''\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)<0.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trong khoảng $(0,\pi)$ là

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=3.\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $f(t)=\sin t+2\sin\frac{t}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Đó chính là bất đẳng thức phải chứng minh.

Bài toán 38. Cho các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn $-1 \le x_1, x_2, \ldots, x_n \le 1$ và $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = 0$. Chứng minh

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le \frac{n}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn. Đặt $x_i = \sin(\alpha_i)$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Ta có điều kiện

$$0 = \sin^3(\alpha_1) + \sin^3(\alpha_2) + \cdots + \sin^3(\alpha_n)$$

$$= \frac{1}{4}\left(3\sin(\alpha_1) - \sin(3\alpha_1) + 3\sin(\alpha_2) - \sin(3\alpha_2) + \cdots + 3\sin(\alpha_n) - \sin(3\alpha_n)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2) + \cdots + \sin(\alpha_n) = \frac{\sin(3\alpha_1) + \sin(3\alpha_2) + \cdots + \sin(3\alpha_n)}{3}$$

Bài toán 39. (Iran 1998) Chứng minh rằng, với mọi $x, y, z > 1$ sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2,$

$$\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Lời giải. Trước hết ta đặt $a = \sqrt{x-1}, b = \sqrt{y-1}, c = \sqrt{z-1}$. Lúc đó, điều kiện trở thành

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} = 2 \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2b^2c^2 = 1$$

và bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 3} \ge a + b + c \Leftrightarrow ab + bc + ca \le \frac{3}{2}.$$

Đặt $p = bc, q = ca, r = ab$. Công việc của chúng ta là chứng minh $p + q + r \le \frac{3}{2}$ trong đó $p^2 + q^2 + r^2 + 2pqr = 1$. Ta thực hiện phép thế lượng giác như sau. Tồn tại các góc $A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $A + B + C = \pi$ thoả mãn

$$p = \cos A,\ q = \cos B,\ r = \cos C$$

Cuối cùng ta đi đến một bất đẳng thức lượng giác rất quen thuộc $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$. Bất đẳng thức này suy từ bất đẳng thức Jensen.

Bài toán 40. (VIETNAM 1998) Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương sao cho

$$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+\cdots+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}.$$

Chứng minh

$$\frac{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}{n-1}\ge 1998.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 41. (USA 2001) Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh $0\le ab+bc+ca-abc\le 2$.

Lời giải. Lưu ý rằng nếu $a>1, b>1, c>1$ thì $a^2+b^2+c^2+abc>4$ trái giả thiết. Vậy tồn tại ít nhất một trong 3 số a, b, c không lớn hơn 1. Giả sử $a\le 1$, thì $ab+bc+ca-abc\ge(1-a)bc\ge 0$. Bây giờ chúng ta chứng minh bất đẳng thức thứ hai $ab+bc+ca-abc\le 2$. Đặt $a=2p, b=2q, c=2r$, ta có điều kiện $p^2+q^2+r^2+2pqr=1$. Vậy tồn tại một tam giác có 3 góc nhọn là A, B, C sao cho

$$a=2\cos A,\ b=2\cos B,\ c=2\cos C$$

Lúc đó ta cần phải chứng minh

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A-2\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{2}.$$

Vì tam giác là nhọn nên ta có thể giả sử $A\ge\frac{\pi}{3}$ hay $1-2\cos A\ge 0$. Lưu ý rằng

$$\begin{aligned}&\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A-2\cos A\cos B\cos C\\&\qquad=\cos A(\cos B+\cos C)+\cos B\cos C(1-2\cos A).\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$\cos B + \cos C \le \frac{3}{2} - \cos A.$$

Mặt khác $2\cos B\cos C = \cos(B-C) + \cos(B+C) \le 1 - \cos A$. Điều này kéo theo

$$\cos A(\cos B + \cos C) + \cos B\cos C(1 - 2\cos A)$$

$$\le \left(\frac{3}{2} - \cos A\right)\cos A + \left(\frac{1-\cos A}{2}\right)(1 - 2\cos A).$$

Cuối cùng, ta có

$$\left(\frac{3}{2} - \cos A\right)\cos A + \left(\frac{1-\cos A}{2}\right)(1 - 2\cos A) = \frac{1}{2}.$$

Suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Bài toán 42. Cho $x, y, z \in (0, 1)$ sao cho $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 43. (APMO 2004/2005) Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có bất đẳng thức

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 9(ab+bc+ca). \qquad (1.2)$$

Chứng minh. Chọn $A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $a = \sqrt{2}\tan A$, $b = \sqrt{2}\tan B$, $c = \sqrt{2}\tan C$. Sử dụng công thức quen thuộc $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ta biến đổi bất đẳng thức (1.2) thành bất đẳng thức tương đương

$$\frac{9}{4}\cos A\cos B\cos C(\cos A\sin B\sin C$$

$$+\cos B\sin C\sin A + \cos C\sin A\sin B) \le 1 \qquad (1.3)$$

Ta có thể dễ dàng kiểm chứng đẳng thức lượng giác sau đây :

$$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$$
$$-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B.$$

Từ đó bất đẳng thức (1.3) tương đương với

$$\frac{9}{4}\cos A\cos B\cos C\left(\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)\right)\le 1. \quad (1.4)$$

Đặt $\theta=\frac{A+B+C}{3}$. Áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN và bất đẳng thức Jensen ta có

$$\cos A\cos B\cos C\le\left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\le\cos^3\theta.$$

Để chứng minh (1.4) ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{9}{4}\cos^3\theta\left(\cos^3\theta-\cos(3\theta)\right)\le 1. \quad (1.5)$$

Sử dụng đẳng thức $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ ta có bất đẳng thức (1.5) tương đương với

$$\frac{27}{4}\cos^4\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\le 1. \quad (1.6)$$

Cuối cùng bất đẳng thức (1.6) suy ra bởi bất đẳng thức TBC-TBN :

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{2}.\frac{\cos^2\theta}{2}\left(1-\cos^2\theta\right)\right)^{\frac{1}{3}}\le\frac{1}{3}\left(\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}+1-\cos^2\theta\right)=\frac{1}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\tan A=\tan B=\tan C=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài toán 44. Cho x, y là các số thực thoả mãn $x^2+y^2=1$. Chứng minh

$$\left|16\left(x^5+y^5\right)-20\left(x^3+y^3\right)+5(x+y)\right|\le\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 45. (Latvia 2002) Cho a, b, c, d là các số thực dương sao cho

$$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1.$$

Chứng minh rằng $abcd \geq 3$.

Lời giải. Ta có thể viết $a^2 = \tan A$, $b^2 = \tan B$, $c^2 = \tan C$, $d^2 = \tan D$, trong đó $A, B, C, D \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Lúc đó đẳng thức đại số đã cho trở thành đẳng thức lượng giác

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 D = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức TBC – TBN, ta có

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 D \geq 3(\cos B \cos C \cos D)^{\frac{2}{3}}.$$

Tương tự

$$\sin^2 B \geq 3(\cos C \cos D \cos A)^{\frac{2}{3}},$$

$$\sin^2 C \geq 3(\cos D \cos A \cos B)^{\frac{2}{3}},$$

$$\sin^2 D \geq 3(\cos A \cos B \cos C)^{\frac{2}{3}}.$$

Nhân bốn bất đẳng thức trên đây ta có

$$\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \sin^2 D \geq 81 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C \cos^2 D$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C \tan^2 D \geq 81$$

$$\Leftrightarrow a^4 b^4 c^4 d^4 \geq 81$$

$$\Leftrightarrow abcd \geq 3$$

Đó là kết quả phải chứng minh !

Bài toán 46. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có

$$\frac{\sqrt{b+c}}{a} + \frac{\sqrt{c+a}}{b} + \frac{\sqrt{a+b}}{c} \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 47. Cho a, b, c là các số thực dương thoả điều kiện $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 1$. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Chứng minh. Vì $a, b, c > 0$ ta tìm được $0<\alpha, \beta, \gamma<\frac{\pi}{2}$ sao cho $a=\tan\alpha$, $b=\tan\beta$, $c=\tan\gamma$. Áp dụng công thức lượng giác $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ nhiều lần, ta có $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=0$ hay $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Mặt khác ta lại có $\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\sin^2 x$, với chú ý rằng các góc α, β and γ đều nhọn, nên ta có thể biến đổi bất đẳng thức phải chứng minh về dạng

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ và hàm số $y=\sin x$ là hàm lõm trên đoạn $[0\,;\pi]$, ta có theo bất đẳng thức Jensen

$$\frac{1}{3}\sin\alpha+\frac{1}{3}\sin\beta+\frac{1}{3}\sin\gamma\le\sin\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bất đẳng thức này kéo theo bất đẳng thức phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, hay $a=b=c=\sqrt{3}$.

Bài toán 48. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a}{2b^2+2c^2-a^2}+\frac{b}{2c^2+2a^2-b^2}+\frac{c}{2a^2+2b^2-c^2}.$$

1.5. Phương pháp hàm số đơn điệu

1.5.1. Định lí – Ví dụ

Định lí 1.5.1. (Định lí về hàm số đơn điệu) Cho $f:(a\,;b)\to\mathbb{R}$ là một hàm số có đạo hàm trên khoảng $(a\,;b)$. Nếu $f'(x)\ge 0$ (theo thứ tự $f'(x)\le 0$) với mọi $x\in(a\,;b)$, thì f là hàm số đơn điệu tăng (theo thứ tự đơn điệu giảm) trên $(a\,;b)$. Nếu $f'(x)>0$ (theo thứ tự $f'(x)<0$) với mọi $x\in(a\,;b)$, thì f là hàm số đồng biến nghiêm cách (theo thứ tự nghịch biến nghiêm cách) trên khoảng $(a\,;b)$.

Chứng minh. Trước hết ta xét trường hợp khi $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Cho $a < x_1 < x_2 < b$. Ta cần chứng minh $f(x_1) < f(x_2)$. Áp dụng định lí trung bình tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Vì $f'(c) > 0$ nên suy ra $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Trong trường hợp $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, ta có thể áp dụng định lí trung bình tương tự như trên để có kết quả tương ứng. Trong các trường hợp đơn điệu giảm và nghịch biến nghiêm cách ta cũng chứng minh tương tự.

***Ví dụ 23.* (Ireland 2000)** Cho $x, y \geq 0$ *với* $x + y = 2$. Chứng minh rằng

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2$$

Chứng minh. Sau khi thêm vào vế phải thừa số nhân $1 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^6$, bất đẳng thức được viết thành

$$2\left(\frac{x+y}{2}\right)^6 \geq x^2y^2(x^2 + y^2) \text{ hay } (x+y)^6 \geq 32x^2y^2(x^2 + y^2).$$

Trong trường hợp $xy = 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Xét trường hợp $xy \neq 0$. Đặt $k = xy$. Ta có điều kiện $x + y = 2 \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{k}$, suy ra $0 \leq k \leq 1$. Vậy chúng ta có thể chứng minh bất đẳng thức khi $k = 1$ nghĩa là $xy = 1$. Lúc đó bất đẳng thức trở thành

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 \geq 32\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \text{ hay } p^3 \geq 32(p-2).$$

trong đó $p = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $F(p) = p^3 - 32(p-2)$ trên $[4, \infty]$. Vì $F'(p) = 3p^2 - 32 \geq 0$, khi $p \geq \sqrt{\frac{32}{3}}$, nên F là (đơn điệu) tăng trên $[4, \infty]$. Vậy $F(p) \geq F(4) = 0$ với mọi $p \geq 4$.

Suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

1.5.2. Bài tập

Bài toán 49. (IMO 1984/1) Cho x, y, z là các số thực không âm sao cho $x+y+z=1$. Chứng minh

$$0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Cho $f(x, y, z)=xy+yz+zx-2xyz$. Ta giả sử $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$. Vì $x+y+z=1$, ta có $x \leq \frac{1}{3}$. Suy ra $f(x, y, z)=(1-3x)yz+xyz+zx+xy \geq 0$.

Ta có

$$f(x, y, z)=x(y+z)+yz(1-2x) \leq x(1-x)+\left(\frac{1-x}{2}\right)^2(1-2x)$$
$$=\frac{-2x^3+x^2+1}{4}.$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x)=\frac{1}{4}\left(-2x^3+x^2+1\right)$ trên đoạn $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. Vì $F'(x)=\frac{3}{2}x\left(\frac{1}{3}-x\right) \geq 0$ trên $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, ta kết luận $F(x) \leq F\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$ với mọi $x \in\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Bài toán 50. (USA 1980) Cho a, b, c là ba số tuỳ ý thuộc đoạn $[0, 1]$. Chứng minh

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Sau đây là một cách chứng minh khác của một bài toán IMO quen thuộc đã được chứng minh bằng các phương pháp thế (xem ví dụ 19) :

Bài toán 51. (IMO 1968/2) Với mọi số thực $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ trong đó $x_1, x_2>0$ và $x_1y_1>z_1^2$, $x_2y_2>z_2^2$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \le \frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

1.6. Phương pháp thiết lập thêm "nút chặn"

1.6.1. Ví dụ

Sau đây chúng tôi đưa ra thêm hai cách chứng minh khác của bất đẳng thức Nesbitt như là một minh hoạ cho phương pháp sắp được trình bày. Trước hết chúng ta có một vài kí hiệu mới là $\sum\limits_{\text{cyclic}}$ và $\sum\limits_{\text{sym}}$. Gọi $P(x, y, z)$ là một hàm có 3 biến số x, y, z. Ta định nghĩa :

$$\sum_{\text{cyclic}} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y),$$

$$\sum_{\text{sym}} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(x, z, y) + P(y, x, z) + P(y, z, x)$$
$$+P(z, x, y) + P(z, y, x).$$

Ví dụ $\sum\limits_{\text{cyclic}} x^3y = x^3y + y^3z + z^3x$, $\sum\limits_{\text{sym}} x^3 = 2(x^3+y^3+z^3)$

$$\sum_{\text{sym}} x^2y = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y,\quad \sum_{\text{sym}} xyz = 6xyz.$$

Ví dụ 24. (Nesbitt) Với mọi số thực dương a, b, c, ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Từ $\left(\dfrac{a}{b+c}-\dfrac{1}{2}\right)^2 \ge 0$, ta suy ra

$$\frac{a}{b+c} \ge \frac{1}{4}\cdot\frac{\dfrac{8a}{b+c}-1}{\dfrac{a}{b+c}+1} = \frac{8a-b-c}{4(a+b+c)}.$$

Từ đó $$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b+c} \geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{8a-b-c}{4(a+b+c)} = \frac{3}{2}.$$

Một số bất đẳng thức có tính chất tuần hoàn có thể được chứng minh nhờ đặt thêm các *"nút chặn"*. Giả sử ta muốn chứng minh

$$\sum_{\text{cyclic}} F(x, y, z) \geq C.$$

Nếu một hàm số G có tính chất

(1) $F(x, y, z) \geq G(x, y, z)$ với mọi $x, y, z > 0$, và

(2) $\sum_{\text{cyclic}} G(x, y, z) = C$ với mọi $x, y, z > 0$,

thì $$\sum_{\text{cyclic}} F(x, y, z) \geq \sum_{\text{cyclic}} G(x, y, z) = C.$$

Ví dụ, nếu một hàm số F thoả mãn

$$F(x, y, z) \geq \frac{x}{x+y+z}$$

với mọi $x, y, z > 0$, thì khi lấy tổng tuần hoàn, ta có

$$\sum_{\text{cyclic}} F(x, y, z) \geq 1.$$

Khác với cách chứng minh bất đẳng thức Nesbitt trên đây, ta có thể chọn các "nút chặn" nhỏ hơn.

Sau đây chúng ta lại có thêm một cách chứng minh thứ hai của một bài toán quen thuộc (Xem Ví dụ 20).

Ví dụ 25. (IMO 2001/2) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Chứng minh. Đặt $x = a^{\frac{4}{3}}$, $y = b^{\frac{4}{3}}$, $z = c^{\frac{4}{3}}$. Ta tìm các *"nút chặn"* của $(x+y+z)^2$ trong đó $x, y, z > 0$. Có các *"nút chặn"* nhỏ hơn như $3(xy+yz+zx)$ và $9(xyz)^{\frac{2}{3}}$. Ta có

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xy + yz + yz + zx + zx.$$

Áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN :

$$y^2 + z^2 + xy + xy + yz + yz + zx + zx \geq 8x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{4}} z^{\frac{3}{4}}.$$

Suy ra $$(x+y+z)^2 \geq x^2 + 8x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{4}} z^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{3}{2}} + 8y^{\frac{3}{4}} z^{\frac{3}{4}}\right),$$

nghĩa là $$x+y+z \geq \sqrt{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{3}{2}} + 8y^{\frac{3}{4}} z^{\frac{3}{4}}\right)}.$$

Suy ra $$\sum_{\text{cyclic}} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x^{\frac{3}{2}} + 8y^{\frac{3}{4}} z^{\frac{3}{4}}}} \geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{x}{x+y+z} = 1.$$

Sau khi thế $x = a^{\frac{4}{3}}$, $y = b^{\frac{4}{3}}$, và $z = c^{\frac{4}{3}}$, bất đẳng thức phải chứng minh được viết lại

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1.$$

Ví dụ 26. (URSS 1990) Chứng minh rằng với mọi số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả mãn $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, ta có

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$$

Chứng minh. Trước hết ta đưa thêm các *"nút chặn"* mới. Ta chứng minh

$$\frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3b-c}{4}$$

với mọi số thực dương b, c. Thật vậy bất đẳng thức này tương đương với

$$4b^2 \geq (b+c)(3b-c) \Leftrightarrow b^2 - 2bc + c^2 = (b-c)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = c$. Áp dụng

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} \geq \frac{3a_1 - a_2}{4}$$

$$\frac{a_2^2}{a_2+a_3} \geq \frac{3a_2-a_3}{4}$$

$$\dots$$

$$\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n} \geq \frac{3a_{n-1}-a_n}{4}$$

$$\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{3a_n-a_1}{4}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta có

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}=\frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\cdots=a_n=\dfrac{1}{n}$.

1.6.2. Bài tập

Bài toán 52. (IMO 2005/3) Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz \geq 1$. Chứng minh

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0.$$

Lời giải. Ta có bất đẳng thức tương đương

$$\left(\frac{x^2-x^5}{x^5+y^2+z^2}+1\right)+\left(\frac{y^2-y^5}{y^5+z^2+x^2}+1\right)+\left(\frac{z^2-z^5}{z^5+x^2+y^2}+1\right) \leq 3$$

hay
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \leq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và kết quả $xyz \geq 1$, ta có

$$\left(x^5+y^2+z^2\right)\left(yz+y^2+z^2\right) \geq \left(x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}}+y^2+z^2\right)^2 \geq \left(x^2+y^2+z^2\right)^2,$$

hay
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Lấy tổng tuần hoàn bất đẳng thức trên đây và chú ý $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, ta có

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \leq 2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} \leq 3.$$

Bài toán 53. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 54. Cho n số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^4}{(a_1+a_2)(a_1^2+a_2^2)}+\frac{a_2^4}{(a_2+a_3)(a_2^2+a_3^2)}+\cdots+\frac{a_n^4}{(a_n+a_1)(a_n^2+a_1^2)}$$
$$\geq \frac{1}{4}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Đặt vế trái của bất đẳng thức là P và đặt

$$Q=\frac{a_2^4}{(a_1+a_2)(a_1^2+a_2^2)}+\frac{a_3^4}{(a_2+a_3)(a_2^2+a_3^2)}+\cdots+\frac{a_1^4}{(a_n+a_1)(a_n^2+a_1^2)}.$$

Ta có

$$P-Q=a_1-a_2+a_2-a_3+\cdots+a_{n-1}-a_n+a_n-a_1=0.$$

Vậy $P=Q$. Suy ra $P=\frac{1}{2}(P+Q)$. Vậy bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$\frac{a_1^4+a_2^4}{(a_1+a_2)(a_1^2+a_2^2)}+\frac{a_2^4+a_3^4}{(a_2+a_3)(a_2^2+a_3^2)}+\cdots+\frac{a_n^4+a_1^4}{(a_n+a_1)(a_n^2+a_1^2)}$$
$$\geq \frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

Ta tạo một *"nút chặn"* mới bằng cách chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x^4+y^4}{(x+y)(x^2+y^2)} \geq \frac{1}{4}(x+y) \text{ với mọi số thực dương x, y.}$$

Bằng tính toán đơn giản bất đẳng thức này tương đương với

$$4\left(x^4+y^4\right)\geq (x+y)^2\left(x^2+y^2\right). \qquad (*)$$

Ta có $$2\left(x^2+y^2\right)\geq (x+y)^2$$

và $$2\left(x^4+y^4\right)\geq \left(x^2+y^2\right)^2$$

Nhân hai bất đẳng thức trên vế theo vế rồi rút gọn ta suy ra được bất đẳng thức (*) cần chứng minh.

Áp dụng kết quả vừa chứng minh ta có

$$\frac{a_1^4+a_2^4}{(a_1+a_2)\left(a_1^2+a_2^2\right)}\geq \frac{1}{4}(a_1+a_2),$$

$$\frac{a_2^4+a_3^4}{(a_2+a_3)\left(a_2^2+a_3^2\right)}\geq \frac{1}{4}(a_2+a_3),$$

$$\ldots$$

$$\frac{a_n^4+a_1^4}{(a_n+a_1)\left(a_n^2+a_1^2\right)}\geq \frac{1}{4}(a_n+a_1).$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế rồi rút gọn, ta có bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Bài toán 55. (USAMO Summer Program 2002) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 3.$$

Hướng dẫn. Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 3\left(\frac{a}{a+b+c}\right).$$

Bài toán 56. (APMO 2005)

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc=8$. Chứng minh

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\geq\frac{4}{3}$$

Lời giải. Ta chứng minh "nút chặn" đầu tiên

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\geq\frac{2}{2+x^2} \text{ với mọi số thực x.} \qquad (1)$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(2+x^2)^2\geq 4(1+x^3)\Leftrightarrow x^2(x-2)^2\geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=2$. Thay x lần lượt bởi a, b, c ta có

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(a+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}$$

$$\geq\frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)}+\frac{4b^2}{(2+b^2)(2+c^2)}+\frac{4c^2}{(2+c^2)(2+a^2)}. \qquad (2)$$

Tiếp tục với vế sau của (2) ta có

$$\frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)}+\frac{4b^2}{(2+b^2)(2+c^2)}+\frac{4c^2}{(2+c^2)(2+a^2)}$$

$$=4\times\frac{a^2(2+c^2)+b^2(2+a^2)+c^2(2+b^2)}{(2+a^2)(2+b^2)(2+c^2)}$$

$$=4\times\frac{S(a, b, c)}{72+2S(a, b, c)}=\frac{2S(a, b, c)}{36+S(a, b, c)}=\frac{2}{1+\frac{36}{S(a, b, c)}},$$

trong đó $S(a, b, c)=2(a^2+b^2+c^2)+(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$. Theo bất đẳng thức TBC-TBN ta có

$$a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}=12,$$

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq 3\sqrt[3]{(abc)^4}=48.$$

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=2$. Cộng các bất đẳng thức trên đây, ta có

$$S(a, b, c) = 2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq 72. \qquad (4)$$

Vậy
$$\frac{2}{1 + \frac{36}{S(a, b, c)}} \geq \frac{2}{1 + \frac{36}{72}} = \frac{4}{3}.$$

Vậy
$$\frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)} + \frac{4b^2}{(2+b^2)(2+c^2)} + \frac{4c^2}{(2+c^2)(2+a^2)} \geq \frac{4}{3}.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Bài toán 57. (USAMO 1996) Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh

$$\frac{ab}{a^5 + ab + b^5} + \frac{bc}{b^5 + bc + c^5} + \frac{ca}{c^5 + ca + a^5} \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn. Ta chứng minh

$$\frac{ab}{a^5 + ab + b^5} \leq \frac{c}{a + b + c}.$$

Chương 2.

PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC

2.1. Phép thế

2.1.1. Định lí – Ví dụ

Có rất nhiều bất đẳng thức được chứng minh bằng các phép thế. Trước hết ta chứng minh bài toán được chứng minh lần đầu bởi Euler (1765).

Ví dụ 27. (Bất đẳng thức Euler) Gọi R và r lần lượt là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC. Lúc đó ta có $R \geq 2r$ và đẳng thức xảy ra khi ΔABC là tam giác đều.

Chứng minh. Đặt $BC = a,\ CA = b,\ AC = b,\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$ và S là diện tích ΔABC. Nhắc lại các công thức : $S = pr = \dfrac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Vậy bất đẳng thức $R \geq 2r$ tương đương với $\dfrac{abc}{4S} \geq 2\dfrac{S}{p}$ hay $abc \geq 8\dfrac{S^2}{p}$ hay $abc \geq 8p(p-a)(p-b)(p-c)$. Và bài toán đưa về chứng minh ví dụ sau đây.

Ví dụ 28. Gọi a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Lúc đó ta có bất đẳng thức :

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \quad (2.1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Chứng minh. Chúng ta sử dụng phép thế sau đây.

Đặt $x,\ y$ và z là các số thực sao cho : $a = y+z,\ b = x+z,\ c = x+y$. Lúc đó bất đẳng thức phải chứng minh là

$$(x+y)(y+x)(z+x) \geq 8xyz \text{ với mọi } x, y, z > 0 \quad (2.2)$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(x+y)(y+x)(z+x) - 8xyz = x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geq 0$$

Từ đây ta suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Ví dụ 29. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \tag{2.3}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Vì bất đẳng thức có tính đối xứng với các biến số nên không làm mất tính tổng quát của bài toán ta giả sử $x \geq y \geq z$. Lúc đó $x+y>z$ và $z+x>y$. Nếu $y+z>x$ thì x, y, z là 3 cạnh của một tam giác, và kết quả đã chứng minh ở ví dụ 29. Nếu $y+z \leq x$ thì

$$xyz > 0 \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$

Rõ ràng trường hợp đẳng thức chỉ xảy ra khi $x=y=z$.

Ví dụ 30. Cho $x, y, z \geq 0$, chứng minh bất đẳng thức sau đây là đúng :

$$xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \tag{2.4}$$

Chứng minh. Vì $x, y, z > 0$ nên tồn tại các dãy số thực dương $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y,\ \lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Với mỗi số tự nhiên n, áp dụng ví dụ 29 ta có bất đẳng thức :

$$x_n y_n z_n \geq (y_n+z_n-x_n)(z_n+x_n-y_n)(x_n+y_n-z_n)$$

Lấy giới hạn cả 2 vế ta có điều phải chứng minh. Dĩ nhiên đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

2.1.2. Bài tập

Bài toán 58. (IMO 2000/2) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1. \tag{2.5}$$

Lời giải. Vì $abc=1$ nên ta đặt

$$a=\frac{x}{y},\ b=\frac{y}{z},\ c=\frac{z}{x} \text{ với } x,\ y,\ z>0.$$

Ta viết bất đẳng thức đã cho theo $x,\ y,\ z$:

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\leq 1$$

$$\Leftrightarrow xyz\geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).$$

Đây chính là bất đẳng thức đã chứng minh ở ví dụ 31.

Bài toán 59. Cho ABC là một tam giác vuông. Chứng minh rằng

$$R\geq \left(1+\sqrt{2}\right)r \tag{2.6}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Phép thế thường được áp dụng cho các bất đẳng thức liên quan đến các cạnh của một tam giác. Sau khi thực hiện xong phép thế ta bỏ đi điều kiện chúng là các cạnh của một tam giác.

Bài toán 60. (IMO 1983/6) Cho $a,\ b,\ c$ là các cạnh của một tam giác. *Chứng minh*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0. \tag{2.7}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Sau khi đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ với $x,\ y,\ z>0$, bất đẳng thức trở thành

$$x^3z+y^3x+z^3y\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

hay

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z,$$

bất đẳng thức này suy từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$(x+y+z)\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)\geq (x+y+z)^2.$$

Bài toán 61. Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$$

2.2. Bất đẳng thức Weitzenböck

2.2.1. Ví dụ

Trong mục này ta đề cập đến bất đẳng thức Weitzenböck và các bất đẳng thức liên quan.

Ví dụ 31. (IMO 1961/2- Bất đẳng thức Weitzenböck) Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có diện tích S. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

Chứng minh. Đặt $a=y+z, b=z+x, c=x+y$ với $x, y, z>0$. Lúc đó do áp dụng các bất đẳng thức :

$$(p+q)^2 \geq 4pq \text{ và } (p+q+r)^2 \geq 3(pq+qr+rp),$$

bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\left((y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\right)^2 \geq 48(x+y+z)xyz.$$

Thật vậy ta có

$$\left((y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\right)^2 \geq (4yz+4zx+4xy)^2$$

$$\geq 16(yz+zx+xy)^2 \geq 16.3(yz.zx+zx.xy+xy.yz)$$

$$=48(x^2yz+y^2zx+z^2xy)=48(x+y+z)xyz,$$

đó là bất đẳng thức phải chứng minh.

2.2.2. Bài tập

Bài toán 62. (Bất đẳng thức Hadwiger – Finsler) Chứng minh rằng với mọi tam giác có độ dài các cạnh a, b, c và diện tích S

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2) \geq 4\sqrt{3}S. \qquad (2.8)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh 1. Sau khi thay $a=y+z, b=z+x, c=x+y$, trong đó $x, y, z>0$, bất đẳng thức phải chứng minh trở thành bất đẳng thức

$$xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)},$$

Cuối cùng áp dụng hằng đẳng thức, ta tìm được dạng tương đương của bất đẳng thức phải chứng minh

$$(xy+yz+zx)^2 - 3xyz(x+y+z) = \frac{(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2}{2} \geq 0.$$

Đó là một bất đẳng thức luôn luôn đúng.

Chứng minh 2. Chúng ta chứng minh bất đẳng thức nhờ tính chất lồi của hàm số $y=\tan x$. Trước hết ta có công thức lượng giác quen thuộc :

$$\frac{2ab+2bc+2ca-(a^2+b^2+c^2)}{4S} = \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}.$$

Vì hàm số $\tan x$ lồi trên khoảng $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$, bất đẳng thức Jensen chứng tỏ

$$\frac{2ab+2bc+2ca-(a^2+b^2+c^2)}{4S} \geq 3\tan\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Bài toán 63. (Bất đẳng thức Darij Grinberg) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh các bất đẳng thức :

$$a^3+b^3+c^3+3abc-2b^2a-2c^2b-2a^2c \geq 0$$

$$3a^2b+3b^2c+3c^2a-3abc-2b^2a-2c^2b-2a^2c \geq 0$$

Bài toán 64. (Bất đẳng thức Neuberg-Pedoe) Cho a_1, b_1, c_1 là độ dài 3 cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích S_1 và a_2, b_2, c_2 là độ dài 3 cạnh của tam giác $A_2B_2C_2$ có diện tích S_2. Chứng minh

$$a_1^2\left(b_2^2+c_2^2-a_2^2\right)+b_1^2\left(c_2^2+a_2^2-b_2^2\right)+c_1^2\left(a_2^2+b_2^2-c_2^2\right) \geq 16S_1S_2$$

Chú ý. Đây là mở rộng của bất đẳng thức Weitzenböck. G. Chang đã chứng minh bất đẳng thức này bằng số phức. Sau đây là 3 cách chứng minh bất đẳng thức bằng đại số.

Lời giải 1.

Bổ đề 1.

$$a_1^2\left(b_2^2+c_2^2-a_2^2\right)+b_1^2\left(c_2^2+a_2^2-b_2^2\right)+c_1^2\left(a_2^2+b_2^2-c_2^2\right)>0. \tag{2.9}$$

Chứng minh bổ đề. Bất đẳng thức (2.9) tương đương với

$$\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)>2\left(a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+c_1^2c_2^2\right). \tag{2.10}$$

Theo công thức Hê-rôn với $i=1,\ 2$ ta có

$$16S_i^2=\left(a_i^2+b_i^2+c_i^2\right)^2-2\left(a_i^4+b_i^4+c_i^4\right)>0$$

$$\Rightarrow a_i^2+b_i^2+c_i^2>\sqrt{2\left(a_i^4+b_i^4+c_i^4\right)}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)>\sqrt{2\left(a_1^4+b_1^4+c_1^4\right)2\left(a_2^4+b_2^4+c_2^4\right)}$$

$$>2\left(a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+c_1^2c_2^2\right).$$

Đó chính là bất đẳng thức (2.10) phải chứng minh.

Theo bổ đề (2.9) ta có

$$L=a_1^2\left(b_2^2+c_2^2-a_2^2\right)+b_1^2\left(c_2^2+a_2^2-b_2^2\right)+c_1^2\left(a_2^2+b_2^2-c_2^2\right)>0.$$

Vậy bất đẳng thức Neuberg-Pedoe tương đương với

$$L^2-\left(16S_1^2\right)\left(16S_2^2\right)\geq 0. \tag{2.11}$$

Đặt $U=b_1^2c_2^2-b_2^2c_1^2$; $V=c_1^2a_2^2-c_2^2a_1^2$; $W=a_1^2b_2^2-a_2^2b_1^2$ thì bất đẳng thức (2.11) tương đương với

$$L^2-\left(16S_1^2\right)\left(16S_2^2\right)=-4(UV+VW+WU)\geq 0.$$

Mặt khác ta có

$$a_1^2U+b_1^2V+c_1^2W=0,\ \text{hay}\ W=-\frac{a_1^2}{c_1^2}U-\frac{b_1^2}{c_1^2}V,$$

suy ra $$UV+VW+WU=-\frac{a_1^2}{c_1^2}\left(U-\frac{c_1^2-a_1^2-b_1^2}{2a_1^2}V\right)^2-\frac{4a_1^2b_1^2-\left(c_1^2-a_1^2-b_1^2\right)^2}{4a_1^2c_1^2}V^2$$

Vậy $\quad UV+VW+WU=-\dfrac{a_1^2}{c_1^2}\left(U-\dfrac{c_1^2-a_1^2-b_1^2}{2a_1^2}V\right)^2-\dfrac{16S_1^2}{4a_1^2c_1^2}V^2\le 0.$

Lời giải 2.

Bổ đề 2. (Bất đẳng thức Aczél) Cho $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ là các số thực thoả mãn :

$$a_1^2\ge a_2^2+\cdots+a_n^2 \text{ và } b_1^2\ge b_2^2+\cdots+b_n^2.$$

Bất đẳng thức sau đây là đúng :

$$a_1b_1-(a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\ge\sqrt{\left(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2\right)\left(b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2\right)}. \quad (2.12)$$

Chứng minh bổ đề. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$a_1b_1\ge\sqrt{\left(a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_2^2+\cdots+b_n^2\right)}\ge a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

Lúc đó bất đẳng thức (2.12) tương đương với bất đẳng thức

$$\left(a_1b_1-(a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\right)^2\ge\left(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2\right)\left(b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2\right). \quad (2.13)$$

Vì trường hợp $a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2=0$ là tầm thường nên chỉ cần xét trường hợp $a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2>0$. Sử dụng tam thức bậc hai $P(x)$ sau đây

$$P(x)=(a_1x-b_1)^2-\sum_{i=2}^{n}(a_ix-b_i)^2 \quad (2.14)$$

$$=\left(a_1^2-\sum_{i=2}^{n}a_i^2\right)x^2+2\left(a_1b_1-\sum_{i=2}^{n}a_ib_i\right)x+\left(b_1^2-\sum_{i=2}^{n}b_i^2\right) \quad (2.15)$$

Thay $x=\dfrac{b_1}{a_1}$ vào (2.14) ta có $P\left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)=-\sum_{i=2}^{n}\left(a_i\dfrac{b_1}{a_1}-b_i\right)^2\le 0$, và vì hệ số của x^2 trong $P(x)$ là $a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2>0$ suy ra biệt số δ của $P(x)$ không âm. Vậy

$$\left(2\left(a_1b_1-\sum_{i=2}^{n}a_ib_i\right)\right)^2-4\left(a_1^2-\sum_{i=2}^{n}a_i^2\right)\left(b_1^2-\sum_{i=2}^{n}b_i^2\right)\ge 0.$$

Đó chính là bất đẳng thức (2.13).

Ta trở lại cách chứng minh thứ hai của bất đẳng thức Neuberg-Pedoe. Trước hết viết lại bất đẳng thức này theo $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-2\left(a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+c_1^2c_2^2\right)$$

$$\geq \sqrt{\left(\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)^2-2\left(a_1^4+b_1^4+c_1^4\right)\right)\left(\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)^2-2\left(a_2^4+b_2^4+c_2^4\right)\right)}$$

Ta dùng phép thế

$$x_1=a_1^2+b_1^2+c_1^2;\ x_2=\sqrt{2}a_1^2,\ x_3=\sqrt{2}b_1^2,\ x_4=\sqrt{2}c_1^2,$$

$$y_1=a_2^2+b_2^2+c_2^2,\ y_2=\sqrt{2}a_2^2,\ y_3=\sqrt{2}b_2^2,\ y_4=\sqrt{2}c_2^2,$$

Tương tự bổ đề 2 ta có

$$x_1^2>x_2^2+x_3^2+x_4^2 \text{ và } y_1^2>y_2^2+y_3^2+y_4^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Aczél ta có bất đẳng thức

$$x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4\geq\sqrt{\left(x_1^2-\left(x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)\right)\left(y_1^2-\left(y_2^2+y_3^2+y_4^2\right)\right)}.$$

Đó là bất đẳng thức phải chứng minh.

Sau đây là một cách chứng minh khác đơn giản hơn.

Lời giải 3. Giả sử 2 tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ có các đỉnh trong mặt phẳng có hệ trục toạ độ trực chuẩn là $A_1(0, p_1)$; $B_1(p_2, 0)$; $C_1(p_3, 0)$ và $A_2(0, q_1)$; $B_2(q_2, 0)$; $C_2(q_3, 0)$. Suy từ bất đẳng thức $x^2+y^2\geq 2\|xy\|$ ta có

$$a_1^2\left(b_2^2+c_2^2-a_2^2\right)+b_1^2\left(c_2^2+a_2^2-b_2^2\right)+c_1^2\left(a_2^2+b_2^2-c_2^2\right)$$

$$=\left(p_3-p_2\right)^2\left(2q_1^2+2q_1q_2\right)\left(p_1^2+p_3^2\right)\left(2q_2^2-2q_2q_3\right)+\left(p_1^2+p_2^2\right)\left(2q_3^2-2q_3q_2\right)$$

$$=2\left(p_3-p_2\right)^2q_1^2+2\left(q_3-q_2\right)^2p_1^2+2\left(p_3q_2-q_3p_2\right)^2$$

$$\geq 2\left(\left(p_3-p_2\right)^2q_1\right)^2+2\left(\left(q_3-q_2\right)^2p_1\right)^2$$

$$\geq 4\left|\left(p_3-p_2\right)q_1\right|\left|\left(q_3-q_2\right)p_1\right|=16S_1S_2$$

Bài toán 65. (Bất đẳng thức Tsinsifas) Cho p, q, r là các số thực dương và a, b, c là độ dài các cạnh của ΔABC có diện tích S. Chứng minh :

$$\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{q+p}c^2\geq 2\sqrt{3}S \tag{2.16}$$

Hướng dẫn. Theo bất đẳng thức Hadwiger-Finsler (2.8), để chứng minh (2.16) ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{q+p}c^2\geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

hay
$$\frac{p+q+r}{q+r}a^2+\frac{p+q+r}{r+p}b^2+\frac{p+q+r}{q+p}c^2\geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

hay
$$\left((q+r)+(r+p)+(p+q)\right)\left(\frac{1}{q+r}a^2+\frac{1}{r+p}b^2+\frac{1}{p+q}c^2\right)\geq (a+b+c)^2.$$

Bất đẳng thức cuối cùng này chính là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

2.3. Bất đẳng thức Erdös-Mordell

Chúng ta sẽ đề cập đến bất đẳng thức Erdös-Mordell và các bất đẳng thức liên quan.

2.3.1. Ví dụ

Ví dụ 32. (Bất đẳng thức Erdös-Mordell) Nếu từ một điểm P bên trong tam giác ABC hạ các đoạn thẳng PH_1, PH_2, PH_3 vuông góc với các cạnh của tam giác thì

$$PA+PB+PC\geq 2\left(PH_1+PH_2+PH_3\right) \tag{2.17}$$

Chú ý 1. Bất đẳng thức (2.17) được Paul Erdös đưa ra năm 1935 và được Mordell chứng minh trong cùng năm đó. Sau này nhiều người đưa ra các cách chứng minh khác. Sau đây chúng ta chứng minh bài toán theo cách của Mordell.

Lời giải. **([MB], Mordell)** Đặt $d_1=PA, d_2=PB, d_3=PC$ và $h_1=PH_1$, $h_2=PH_2$, $h_3=PH_3$. Áp dụng định lí cosin ta có

$$H_2H_3^2=h_2^2+h_3^2-2h_2h_3\cos(\pi-A)=h_2^2+h_3^2-2h_2h_3\cos(B+C).$$

Suy ra $\quad H_2H_3^2 = (h_2 \sin C + h_3 \sin B)^2 + (h_2 \cos C - h_3 \cos B)^2$

do đó
$$\overline{H_2H_3} \geq h_2 \sin C + h_3 \sin B.$$

Vì $\overline{H_2H_3} = d_1 \sin A$, ta có

$$d_1 \geq \left(\frac{\sin C}{\sin A}\right) h_2 + \left(\frac{\sin B}{\sin A}\right) h_3.$$

Lí luận tương tự như trên, ta có

$$d_2 \geq \left(\frac{\sin A}{\sin B}\right) h_3 + \left(\frac{\sin C}{\sin B}\right) h_1 \text{ và } d_3 \geq \left(\frac{\sin B}{\sin C}\right) h_1 + \left(\frac{\sin A}{\sin C}\right) h_2.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq \left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\right) h_1 + \left(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C}\right) h_2 + \left(\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A}\right) h_3.$$

Cuối cùng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân cho ta $d_1 + d_2 + d_3 \geq 2h_1 + 2h_2 + 2h_3$.

2.3.2. Bài tập

Bài toán 66. (Bất đẳng thức Barrow) Cho P là một điểm bên trong tam giác ABC và gọi U, V, W là các giao điểm của phân giác các góc BPC, CPA, APB lần lượt với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$$PA + PB + PC \geq 2(PU + PV + PW).$$

Chứng minh. Trước hết chúng ta cần một bất đẳng thức lượng giác

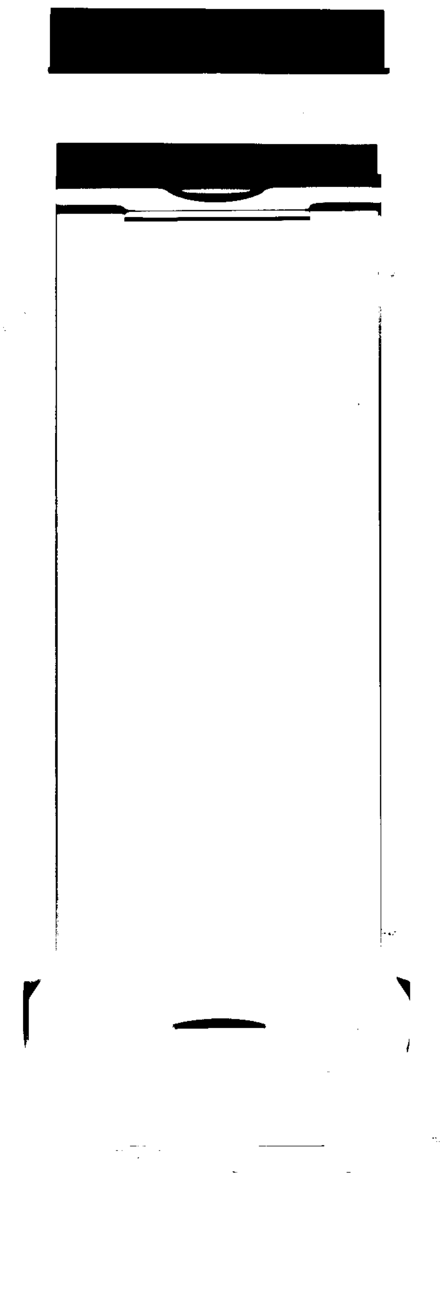
Bổ đề 3. Cho $x, y, z, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ là các số thực với $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. Lúc đó,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(yz \cos\theta_1 + zx \cos\theta_2 + xy \cos\theta_3). \tag{2.18}$$

Chứng minh bổ đề. Sử dụng $\theta_3 = \pi - (\theta_1 + \theta_2)$, ta có thể chứng minh dễ dàng đẳng thức sau đây

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(yz \cos\theta_1 + zx \cos\theta_2 + xy \cos\theta_3)$$

$$= (z - (x \cos\theta_2 + y \cos\theta_1))^2 + (x \sin\theta_2 - y \sin\theta_1)^2 \geq 0.$$



Trở lại chứng minh bất đẳng thức Barrow. Cho $d_1 = PA$, $d_2 = PB$, $d_3 = PC$, $l_1 = PU$, $l_2 = PV$, $l_3 = PW$, $2\theta_1 = \widehat{BPC}$, $2\theta_2 = \widehat{CPA}$, và $2\theta_3 = \widehat{APB}$. Ta cần phải chứng minh $d_1 + d_2 + d_3 \geq 2(l_1 + l_2 + l_3)$. Điều này dễ dàng suy ra từ các đẳng thức

$$l_1 = \frac{2d_2d_3}{d_2 + d_3}\cos\theta_1,\ l_2 = \frac{2d_3d_1}{d_3 + d_1}\cos\theta_2,\ \text{và}\ l_3 = \frac{2d_1d_2}{d_1 + d_2}\cos\theta_3.$$

Theo bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân và bổ đề trên đây, điều này có nghĩa là

$$l_1 + l_2 + l_3 \leq \sqrt{d_2d_3}\cos\theta_1 + \sqrt{d_3d_1}\cos\theta_2 + \sqrt{d_1d_2}\cos\theta_3 \leq \frac{1}{2}(d_1 + d_2 + d_3).$$

Bài toán 67. (IMO 1996/5) Cho $ABCDEF$ là một lục giác lồi sao cho AB song song với DE, BC song song với EF và CD song song với FA. Gọi R_A, R_C, R_E là các bán kính các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác lần lượt là FAB, BCD, DEF. Gọi P là chu vi của hình lục giác. Chứng minh rằng

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}.$$

Bài toán 68. Cho p, q và r là các số thực dương. Gọi θ_1, θ_2 và θ_3 là các số thực thoả mãn $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. Lúc đó, ta có bất đẳng thức sau đây.

$$p\cos\theta_1 + q\cos\theta_2 + r\cos\theta_3 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{qr}{p} + \frac{rp}{q} + \frac{pq}{r}\right).$$

Hướng dẫn. Đặt $(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{qr}{p}}, \sqrt{\frac{rp}{q}}, \sqrt{\frac{pq}{r}}\right)$ và áp dụng công thức 2.18 trên đây.

Bài toán 69. (Nikolai Nikolov) Đường tròn nội tiếp (k) của tam giác ABC tiếp xúc với ba cạnh BC, CA và AB tại A_1, B_1, C_1. Với một điểm bất kì K trên (k), gọi d là tổng khoảng cách từ K đến các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng $KA + KB + KC > 2d$.

Bài toán 70. Cho $x_1, \ldots, x_4$ là các số thực dương. Gọi $\theta_1, \ldots, \theta_4$ là các số thực sao cho $\theta_1 + \cdots + \theta_4 = \pi$. Lúc đó,

$$x_1 \cos\theta_1 + x_2 \cos\theta_2 + x_3 \cos\theta_3 + x_4 \cos\theta_4$$

$$\leq \sqrt{\frac{(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)}{x_1x_2x_3x_4}}.$$

Hướng dẫn. Đặt $p = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2x_1x_2} + \dfrac{x_3^2 + x_4^2}{2x_3x_4}$, $q = \dfrac{x_1x_2 + x_3x_4}{2}$ và $\lambda = \sqrt{\dfrac{p}{q}}$.

Từ nhận xét rằng $\theta_1 + \theta_2 + (\theta_3 + \theta_4) = \pi$ và $\theta_3 + \theta_4 + (\theta_1 + \theta_2) = \pi$, ta có thể suy từ bất đẳng thức 2.18, các bất đẳng thức sau đây

$$x_1 \cos\theta_1 + x_2 \cos\theta_2 + \lambda \cos(\theta_3 + \theta_4) \leq p / \lambda = \sqrt{pq},$$

và
$$x_3 \cos\theta_3 + x_4 \cos\theta_4 + \lambda \cos(\theta_1 + \theta_2) \leq q.\lambda = \sqrt{pq}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên đây vế theo vế với nhận xét

$$\cos(\theta_3 + \theta_4) + \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0,$$

ta có
$$x_1 \cos\theta_1 + x_2 \cos\theta_2 + x_3 \cos\theta_3 + x_4 \cos\theta_4 \leq 2\sqrt{pq}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)}{x_1x_2x_3x_4}}.$$

Bài toán 71. Gọi α, β, γ là các góc của tam giác đối diện với các cạnh có các độ dài lần lượt là a, b và c. Chứng minh bất đẳng thức

$$a \cdot \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) + b \cdot \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right) + c \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 2 \cdot \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right).$$

2.4. Bất đẳng thức Ptôlêmê

2.4.1. Định lí – Ví dụ

Định lí 2.4.1. (Bất đẳng thức Ptôlêmê) Cho tứ giác lồi $ABCD$, ta có bất đẳng thức sau đây

$$AC.BD \leq AB.CD + BC.AD.$$

Đẳng thức xảy ra khi tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Chứng minh. Từ D ta vẽ tia DO và từ C vẽ tia CO sao cho $\widehat{OCD} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{ODC} = \widehat{BAC}$ (O là giao điểm của chúng)[1]. Ta có $\Delta ODC \backsim \Delta BAC$. Suy ra $\dfrac{OD}{AB} = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{OC}{BC}$. Từ đó

$$\begin{cases} AC.OD = AB.CD \\ \dfrac{OC}{DC} = \dfrac{BC}{AC} \end{cases} \qquad (1)$$

Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{OCB}$ và (1) suy ra $\Delta OBC \backsim \Delta DAC$ suy ra

$$\frac{OB}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC.OB = AD.BC.$$

Vậy

$$AC.OD + AC.OB = AB.CD + AD.BC \Rightarrow AC(OB + OD) = AB.CD + AD.BC.$$

Do $OB + OD \geq BD$. Vậy $AC.BD \leq AB.CD + AD.BC$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $OB + OD = BD$ tức là O, B, D thẳng hàng nghĩa là khi $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Điều này xảy ra khi $ABCD$ là tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn.

Ví dụ 33. (New Zealand 1998) Cho M, A_1, A_2, $\ldots$, A_n $(n \geq 3)$ là n điểm phân biệt trong mặt phẳng sao cho

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}A_n = A_nA_1.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{MA_1 \cdot MA_2} + \frac{1}{MA_2 \cdot MA_3} + \cdots + \frac{1}{MA_{n-1} \cdot MA_n} \geq \frac{1}{MA_1 \cdot MA_n},$$

và xác định mọi trường hợp bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Ptôlêmê cho tứ giác $MA_1.A_kA_{k+1}$ ta có

$$MA_1.A_kA_{k+1} + A_1A_k.MA_{k+1} \geq A_1A_{k+1}.MA_k,$$

---

[1] Độc giả tự vẽ hình vẽ

(trường hợp $k=1$ cho ta một đẳng thức). Chia hai vế của bất đẳng thức này cho $MA_1.MA_k.MA_{k+1}$ ta có

$$\frac{A_kA_{k+1}}{MA_k\cdot MA_{k+1}}\geq\frac{A_1A_{k+1}}{MA_1\cdot MA_{k+1}}-\frac{A_1A_k}{MA_1\cdot MA_k}.$$

Cộng tất cả các bất đẳng thức đánh số bởi $k=1, 2, \ldots, n-1$ vế theo vế ta nhận được

$$\frac{A_1A_2}{MA_1\cdot MA_2}+\frac{A_2A_3}{MA_2\cdot MA_3}+\cdots+\frac{A_{n-1}A_n}{MA_{n-1}\cdot MA_n}\geq$$

$$\frac{A_1A_n}{MA_1\cdot MA_n}-\frac{A_1A_1}{MA_1\cdot MA_1}=\frac{A_1A_n}{MA_1\cdot MA_n}.$$

Từ giả thiết $A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_nA_1$ ta có bất đẳng thức phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi mỗi bất đẳng thức con nghĩa là các bất đẳng thức ứng với $k=1, 2, \ldots, n-1$ là đẳng thức. Điều này xảy ra khi các điểm A_1, A_k, A_{k+1}, M cùng nằm trên một đường tròn theo tự đó. Trong trường hợp này $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một n- giác đều và M ở trên cung nhỏ $\overset{\frown}{A_1A_n}$.

2.4.2. Bài tập

Bài toán 72. (OLYMPIC 30/4, VIETNAM 2000) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Giả sử các trung tuyến kẻ từ S của các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với các cạnh đáy AB, BC, CA các góc bằng nhau. Chứng minh diện tích một mặt bên của hình chóp nhỏ hơn tổng diện tích các mặt bên còn lại.

Chứng minh. Gọi α là góc tạo bởi các trung tuyến SM, SK, SL với các cạnh đáy AB, BC, CA. Vì vai trò của các mặt bên như nhau nên ta chỉ cần chứng minh

$$dt(\Delta SAB)<dt(\Delta SBC)+dt(\Delta SCA).$$

Bất đẳng thức này tương đương với các bất đẳng thức sau đây

$$SM.AB\sin\alpha<SK.BC\sin\alpha+SL.CA\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow SM.AB<SK.BC+SL.CA$$

$$\Leftrightarrow SM.KL<SK.LM+SL.KM$$

Bài toán giải xong nếu chúng ta chứng minh bất đẳng thức được gọi là *bất đẳng thức Ptôlêmê của hình học không gian* $SM.KL < SK.LM + SL.KM$ với một tứ diện $SMKL$ bất kì.

Thật vậy trong mặt phẳng (KLM) ta lấy điểm N sao cho :

+ M và N ở hai phía của đường thẳng KL,

+ $KL = SK$ và $LN = SL$.

Từ giả thiết trên ta có hai tam giác SKL và NKL bằng nhau. Suy ra $SP = PN$. Gọi P là giao điểm của KL và MN, bất đẳng thức Ptôlêmê trong tứ giác $MKNL$:

$$KL.MN \le LM.KN + LN.KM$$

Mặt khác, $KL.SM \le KL(SP + MP) = KL.PN + KL.PM = KL.MN$.

Vậy $KL.SM \le KL.MN \le LM.KN + LN.KM = LM.SK + SL.KM$. Ngoài ra dấu của đẳng thức không xảy ra. Từ đây suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Bài toán 73. (China 1998) Cho P là một điểm bên trong tam giác ABC. Chứng minh bất đẳng thức

$$DA.DB.AB + DB.DC.BC + DC.DA.CA \ge AB.BC.CA.$$

Chú ý. Ngoài cách sử dụng bất đẳng thức Ptôlêmê ta có thể giải bài toán này bằng cách sử dụng số phức (Xem mục Phương pháp số phức).

2.5. Phương pháp vectơ

Trong hình học đôi khi chúng ta sử dụng vectơ để chứng minh các bất đẳng thức. Sau đây là một vài ví dụ.

2.5.1. Ví dụ

Ví dụ 34. (TIỆP KHẮC 1983) Cho tam giác ABC và một điểm O bất kì trên cạnh AB của tam giác không trùng với đỉnh của nó. Chứng minh bất đẳng thức sau đây :

$$OC.AB < OA.BC + OB.AC$$

Chứng minh. Vì $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OB} = (1-x)\overrightarrow{AB}$ trong đó $x \in (0\,;1)$ nên ta có

$$OC = \left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{CA} + x\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)\right| = \left|(1-x)\overrightarrow{CA} + x\overrightarrow{CB}\right|$$

$$< (1-x)\left|\overrightarrow{CA}\right| + x\left|\overrightarrow{CB}\right|$$

Dấu đẳng thức không xảy ra vì các vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ không cùng phương. Suy ra

$$OC.AB < CA(1-x).AB + CBx.AB = CA.OB + CB.AO$$

Ví dụ 35. Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$. Chứng minh rằng với một điểm M bất kì trong mặt phẳng chứa đường tròn thì :

$$BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_n \geq n$$

Chứng minh. Vì đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ đều có tâm là O nên $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} = \vec{O}$. Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} MA_i = \sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{OA_i}\right|$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}\right).\overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}^2 - \overrightarrow{OM}.\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} = n - \overrightarrow{OM}.\vec{0} = n \text{ (đpcm).}$$

2.5.2. Bài tập

Bài toán 74. Cho tam giác ABC. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây :

a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$,

b) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\dfrac{3}{2}$ nếu các góc A, B, C đều nhọn.

Lời giải. a) Trên các cạnh của tam giác ta vẽ các vectơ đơn vị như sau : vectơ $\overrightarrow{e_1}$ trên tia AB, vectơ $\overrightarrow{e_2}$ trên tia BC, vectơ $\overrightarrow{e_3}$ trên tia CA. Đặt $\vec{s} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ thì $\vec{s}^2 = \left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\right)^2 \geq 0$. Khai triển bất đẳng thức trên đây ta có

$$1+1+1+2\left(\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_3}.\overrightarrow{e_1}\right)\geq 0.$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2}=-\cos B\ ;\ \overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_3}=-\cos C\ ;\ \overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_3}=-\cos A$$

suy ra bất đẳng thức

$$3-2(\cos A+\cos B+\cos C)\geq 0$$

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và H là trực tâm của tam giác ABC. Ta có đẳng thức vectơ $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=R^2\cos 2C$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=R^2\cos 2A$, $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}=R^2\cos 2B$ nên

$$\overrightarrow{OH}^2=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OA}^2+2\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3R^2+2R^2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geq -\frac{3}{2}\ \text{(đpcm)}.$$

Bài toán 75. Cho tam giác ABC. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh bất đẳng thức

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2\leq\frac{27}{4}R^2$$

Bài toán 76. Cho $ABCDE$ là một ngũ giác lồi nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 1 đơn vị. Cho biết độ dài các cạnh $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DE=d$, $AE=2$. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd<4.$$

Lời giải. Ta có

$$4=AE^2=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}\right)^2=AC^2+CE^2+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CE}.$$

Vì $AE=2$ là đường kính đường tròn nên $\widehat{ACE}=90^0$, do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CE}=0$.

Vì vậy

$$4 = AC^2 + CE^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}\right)^2$$
$$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DE}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$abc < 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} \text{ và } bcd < 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DE}.$$

Vì $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 2ab\cos\left(180^0 - \widehat{ABC}\right) = 2ab\cos\widehat{AEC} = ab.CE$ và $c < CE$ nên $abc < 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$. Bất đẳng thức thứ hai được chứng minh tương tự.

Bài toán 77. Cho tứ giác $ABCD$ có độ dài các cạnh a_1, a_2, a_3, a_4 và độ dài các đường chéo m, n. Chứng minh

a) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > \frac{1}{3}a_4^2$.

b) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq m^2 + n^2$.

Bài toán 78. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$. Đặt $AB + BC = a$. Chứng minh diện tích S của ngũ giác lồi ABCDE thoả mãn bất đẳng thức

$$S \leq \frac{5+\sqrt{5}}{16}a^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Gọi A' là giao điểm của AD và CE. Vì $ABCDE$ là ngũ giác lồi nên điểm A' ở trên đoạn AD và trên CE. Vì $AB // CE$ và $BC // AD$ nên $ABCA'$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA'}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA'}$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Vì $\overrightarrow{A'D}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và $\overrightarrow{A'E}$, $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng nên tồn tại các số thực dương k, k' sao cho $\overrightarrow{A'D} = k\vec{b}$ và $\overrightarrow{A'E} = k'\vec{a}$. Ta có

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{A'D} - \overrightarrow{A'E} = k\vec{b} - k'\vec{a} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{a} \qquad (2)$$

Vì $\overrightarrow{ED} // \overrightarrow{AC}$ nên $k\vec{b} - k'\vec{a} // \vec{b} - \vec{a}$ suy ra $k = k'$, nghĩa là :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'E} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A'E} = \vec{b} + k\vec{a} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'D} = \vec{b} + \vec{a} + k\vec{b}$$

$$= (k+1)\vec{b} + \vec{a} \quad (4)$$

Do $\overrightarrow{AE} \,//\, \overrightarrow{BD}$ suy ra

$$\frac{k+1}{1} = \frac{1}{k} \Leftrightarrow k(k+1) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (loại } k = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} < 0\text{)}.$$

Từ đó $\quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D} = \vec{b} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{b}.$

Vậy $\quad \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Vì $dt(ABC) = dt(CDE) = dt(CDB) = dt(AA'C)$ nên diện tích của ngũ giác

$$S = dt(ABCDE) = dt(ABC) + dt(ACA') + dt(CDE) + dt(AEA')$$

$$= 3dt(ABC) + dt(AA'E).$$

Mặt khác

$$\frac{dt(AA'E)}{dt(ABC)} = \frac{dt(AA'E)}{dt(ABE)} = \frac{dt(AA'E)}{dt(ADE)} = \frac{AA'}{AD} = \frac{BC}{AD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Suy ra $\ S = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} dt(ABC) = \dfrac{5+\sqrt{5}}{4} AB.BC.\sin B$

$$\le \frac{5+\sqrt{5}}{4}\left(\frac{AB+BC}{2}\right)^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{16}a^2.$$

Như vậy bất đẳng thức trên đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $AB = BC = \dfrac{a}{2}$.

Bài toán 79. Bên trong một n-giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$ lấy điểm O sao cho $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$. Gọi $d = OA_1 + OA_2 + \cdots + OA_n$ và P là chu vi của đa giác. Chứng minh $\dfrac{4}{n}d \ge P$ khi n chẵn và $P \ge \dfrac{4nd}{n-1}$ khi n lẻ.

2.6. Phương pháp số phức

Trong phần này, chúng ta đề cập đến vài áp dụng số phức để chứng minh bất đẳng thức hình học. Ta đã biết mọi số phức đều tương ứng với một điểm duy nhất trong mặt phẳng phức. Vì vậy ta có thể dùng kí hiệu toán học của tập hợp các số phức $\mathbb{C}$, cũng như của mặt phẳng phức là $\mathbb{C}$. Công cụ chính của áp dụng này là bất đẳng thức cơ bản sau đây.

2.6.1. Định lí – Ví dụ

Định lí 2.6.1. Cho $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, lúc đó $|z_1| + \cdots + |z_n| \geq |z_1 + \cdots + z_n|$.

Chứng minh. Sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp trên n dựa trên bất đẳng thức tam giác.

Sau đây ta chứng minh lại bất đẳng thức Ptôlêmê bằng số phức.

Ví dụ 36. (Bất đẳng thức Ptôlêmê) Với mọi điểm A, B, C, D trong mặt phẳng, ta có :

$$AB.CD + BC.DA \geq AC.BD.$$

Chứng minh. Giả sử rằng a, b, c và 0 là các số phức tương ứng với các điểm A, B, C, D. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$|a-b| \cdot |c| + |b-c| \cdot |a| \geq |a-c| \cdot |b|.$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác cho $(a-b)c + (b-c)a = (a-c)b$, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 37. (BALKAN 1996) Gọi O và G là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác ABC. Gọi R và r là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác. Chứng minh $OG \leq \sqrt{R(R-2r)}$.

Lời giải. Giả sử tâm O là điểm gốc của mặt phẳng phức. Gọi z_1, z_2, z_3 lần lượt là các số phức tương ứng với các điểm A, B, C. Lúc đó ta có $\left|\overrightarrow{OG}\right|^2 = \left|\dfrac{(z_1 + z_2 + z_3)}{3}\right|^2$. Sử dụng phép tính đơn giản ta viết

$$OG^2 = \frac{1}{9}\left(3|z_1|^2 + 3|z_2|^2 + 3|z_3|^2 - |z_1 - z_2|^2 - |z_2 - z_3|^2 - |z_3 - z_1|^2\right).$$

$$|x-y\omega|+|z\omega^2-x|\geq 4\left|\frac{-zx}{z+x}\omega+\frac{xy}{x+y}\omega^2\right|.$$

Vì $|\omega|=1$ và $\omega^3=1$, ta có $|z\omega^2-x|=|\omega(z\omega^2-x)|=|z-x\omega|$. Vậy ta phải chứng minh

$$|x-y\omega|+|z-x\omega|\geq\left|\frac{4zx}{z+x}-\frac{4xy}{x+y}\omega\right|.$$

Muốn vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $|(x-y\omega)+(z-x\omega)|\geq\left|\frac{4zx}{z+x}-\frac{4xy}{x+y}\omega\right|$ hay $|p-q\omega|\geq|r-s\omega|$, trong đó $p=z+x,\ q=y+x,\ r=\frac{4zx}{z+x}$ và $S=\frac{4xy}{x+y}$. Rõ ràng $p\geq r>0$ và $q\geq s>0$. Suy ra

$$\begin{aligned}|p-q\omega|^2-|r-s\omega|^2&=(p-q\omega)\overline{(p-q\omega)}-(r-s\omega)\overline{(r-s\omega)}\\&=(p^2-r^2)+(pq-rs)+(q^2-S^2)\geq 0.\end{aligned}$$

Đó là điều phải chứng minh. Cuối cùng bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi và chỉ khi ΔABC là một tam giác đều.

Bài toán 81. Cho P là một điểm bất kì trong mặt phẳng chứa tam giác ABC, có trọng tâm G. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$PA^3BC+PB^3CA+PC^3AB\geq 3PGBCCAAB.$$

Bài toán 82. (China, 1998) Cho P là một điểm bất kì bên trong tam giác nhọn ABC với độ dài các cạnh là $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$. Đặt $PA=x$, $PB=y,\ PC=z$. Chứng minh rằng

$$ayz+bzx+cxy\geq abc, \tag{2.19}$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Lời giải. Giả sử D là điểm gốc của mặt phẳng phức và gọi toạ độ phức của các điểm A, B, C lần lượt là u, v, ω. Ta viết lại bất đẳng thức 2.19 dưới dạng số phức

$$|uv(u-v)|+|v\omega(v-\omega)|+|\omega u(\omega-u)|\geq|(u-v)(v-\omega)(\omega-u)|. \tag{2.20}$$

Ta kiểm chứng dễ dàng đẳng thức

$$uv(u-v)+v\omega(v-\omega)+\omega u(\omega-u)=-(u-v)(v-\omega)(\omega-u), \qquad (2.21)$$

từ đó 2.21 kéo theo 2.20 rồi 2.19. Việc còn lại ta xác định khi nào thì đẳng thức xảy ra. Đặt

$$z_1=\frac{uv}{(u-\omega)(v-\omega)}\,;\, z_2=\frac{v\omega}{(v-u)(\omega-u)}\,;\, z_3=\frac{\omega u}{(\omega-v)(u-v)}.$$

Với cách đặt trên đây ta viết 2.20 và 2.21 thành các bất đẳng thức và đẳng thức như sau

$$|z_1|+|z_2|+|z_3|\geq 1$$

$$z_1+z_2+z_3=1.$$

Vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi z_1, z_2, z_3 là các số thực dương. Giả sử z_1, z_2, z_3 là các số thực dương. Vì

$$-\frac{z_1z_2}{z_3}=\left(\frac{v}{\omega-u}\right)^2, -\frac{z_2z_3}{z_1}=\left(\frac{\omega}{u-v}\right)^2, -\frac{z_3z_1}{z_2}=\left(\frac{u}{v-\omega}\right)^2.$$

Từ số phức $\dfrac{u}{v-\omega}$ có bình phương là một số thực âm nên là các số thuần ảo ; vậy góc tạo bởi các vectơ biểu diễn u là $\overrightarrow{AD}$ và vectơ biểu diễn $v-\omega$ là $\overrightarrow{BC}$ là góc có số đo 90^0, suy ra $AD\perp BC$. Tương tự $\dfrac{v}{\omega-u}$ là số thuần ảo, suy ra $BD\perp AC$. Vậy D là trực tâm của tam giác ABC.

Đảo lại nếu D là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Điểm D ở bên trong tam giác và $AD\perp BC$ nên góc tạo bởi các vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ có số đo là -90^0, suy ra tồn tại số thực dương r_1 sao cho $\dfrac{u}{v-\omega}=-r_1i$. Tương tự tồn tại số thực dương r_2, r_3 sao cho $\dfrac{v}{\omega-u}=-r_2i$; $\dfrac{\omega}{u-v}=-r_3i$. Vậy z_1, z_2, z_3 là các số thực dương. Từ các kết quả trên ta kết luận đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi D là trực tâm của tam giác ABC.

Bài toán 83. (PUTNAM 1998) Cho A, B, C là các điểm phân biệt có toạ độ nguyên trong mặt phẳng có hệ trục toạ độ Đề-các. Chứng minh rằng nếu

$$(|AB|+|BC|)^2 < 8.[ABC]+1$$

thì A, B, C là 3 đỉnh của một hình vuông. Ở đây $|XY|$ là độ dài của đoạn thẳng XY và $[ABC]$ là diện tích của tam giác ABC.

2.7. Phương pháp lượng giác

2.7.1. Ví dụ

Để chứng minh các bất đẳng thức lượng giác ta có thể sử dụng các phép biến đổi lượng giác, các công thức lượng trong tam giác, tứ giác... Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 38. (BALTIC 1994) Gọi α, β và γ lần lượt là các góc đối diện các cạnh có độ dài a, b, c của một tam giác. Chứng minh

$$a\cdot\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+b\cdot\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+c\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\geq 2\cdot\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right).$$

Chứng minh. Rõ ràng, bất đẳng thức $a>b$ kéo theo $\alpha>\beta$ và tương tự $a<b$ kéo theo $\alpha<\beta$, vậy $(a-b)(\alpha-\beta)\geq 0$ và $a\alpha+b\beta\geq a\beta+b\alpha$. Chia bất đẳng thức cuối cùng này cho số dương $\alpha\beta$ ta có

$$\frac{a}{\beta}+\frac{b}{\alpha}\geq\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}. \tag{2.22}$$

Tương tự
$$\frac{a}{\gamma}+\frac{c}{\alpha}\geq\frac{a}{\alpha}+\frac{c}{\gamma} \tag{2.23}$$

và
$$\frac{b}{\gamma}+\frac{c}{\beta}\geq\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}. \tag{2.24}$$

Để kết thúc phần chứng minh ta cộng ba bất đẳng thức (2.22), (2,23) và (2.24).

Ví dụ 39. Chứng minh rằng trong mọi tam giác nhọn ABC, ta có $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$.

Chứng minh. Vì hàm số $\cos x$ lõm trong khoảng $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$, vậy kết quả trên chính là bất đẳng thức Jensen.

Chú ý rằng hàm số $\cos x$ không lõm trên khoảng $(0\ ;\ \pi)$. Thật ra hàm số đó lồi trong khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right)$. Tuy vậy ta biết kết quả $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$ vẫn đúng cho mọi tam giác.

Ví dụ 40. Trong mọi tam giác ABC, ta có $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn. Đặt $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$. Sử dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có thể viết bất đẳng thức trên đây theo độ dài các cạnh của tam giác là a, b, c :

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq \frac{3}{2}.$$

Bỏ mẫu số ta có các bất đẳng thức tương đương

$$3abc \geq a\left(b^2 + c^2 - a^2\right) + b\left(c^2 + a^2 - b^2\right) + c\left(a^2 + b^2 - c^2\right),$$

$$\Leftrightarrow abc \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c).$$

Đây chính là bất đẳng thức đã chứng minh trong ví dụ 29.

Chú ý. Trong chương 1, ta đã chứng minh *bất đẳng thức hình học* $R \geq 2r$ tương đương với *bất đẳng thức đại số* $abc \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$. Chúng ta cũng biết trong chứng minh định lí trên đây bất đẳng thức đại số này tương đương với *bất đẳng thức lượng giác* $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$. Đến đây một vấn đề khác được đặt ra :

Trong một tam giác ABC bất kì, có tồn tại hay không một liên hệ tự nhiên giữa $\cos A + \cos B + \cos C$ và $\dfrac{R}{r}$, trong đó R và r là các bán kính của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC ?

Sau đây ta có một số kết quả quen thuộc – các học sinh có thể tìm trong các sách giáo khoa phổ thông nâng cao.

Kết quả 1. Gọi R và r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Lúc đó, ta có $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$.

Hướng dẫn. Sử dụng đẳng thức

$$a\left(b^2+c^2-a^2\right)+b\left(c^2+a^2-b^2\right)+c\left(a^2+b^2-c^2\right)$$
$$=2abc+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

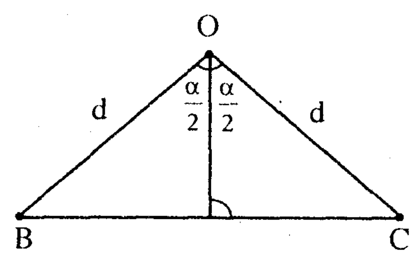
Chứng minh chi tiết để dành cho các bạn học sinh.

Kết quả 2. a) Cho p, q, r là các số thực dương sao cho $p^2+q^2+r^2+2pqr=1$. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác nhọn ABC sao cho $p=\cos A$, $q=\cos B$, $r=\cos C$.

b) Cho $p, q, r \geq 0$ với $p^2+q^2+r^2+2pqr=1$. Chứng minh rằng tồn tại $A, B, C \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $p=\cos A$, $q=\cos B$, $r=\cos C$, và $A+B+C=\pi$.

Ví dụ 41. Có ba tia xuất phát từ một điểm O bất kì trong không gian, tạo với nhau các góc α, β, γ trong đó $0^0<\alpha\leq\beta\leq\gamma\leq180^0$. Chứng minh rằng

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}>\sin\frac{\gamma}{2}.$$



Hình 2.7.1

Hướng dẫn. Chọn các điểm A, B, và C lần lượt trên ba tia, sao cho $|OA|=|OB|=|OC|=d$ và $\widehat{BOC}=\alpha$, $\widehat{COA}=\beta$, $\widehat{AOB}=\gamma$. Các điểm này phải khác nhau và không cùng nằm trên một đường thẳng. Trong tam giác cân BOC có góc ở đỉnh α và cạnh bên d (xem Hình 2.7.1), ta có $|BC|=2d\sin\frac{\alpha}{2}$. Tương tự với các tam giác COA và AOB, $|CA|=2d\sin\frac{\beta}{2}$ và $|AB|=d\sin\frac{\gamma}{2}$. Vì

$$|BC|+|CA|>|AB|,$$

ta có

$$2d\sin\frac{\alpha}{2}+2d\sin\frac{\beta}{2}>2d\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Ví dụ 42. (PUTNAM 2003) Cho số thực x bất kì. Chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\left|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right|\le 2\sqrt{2}-1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Ta viết

$$f(x)=\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x$$

$$=\sin x+\cos x+\frac{1}{\sin x\cos x}+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x},$$

và $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(\pi/4-x)$; điều này cho phép chúng ta thay thế $y=\pi/4-x$. Với biến số mới này,

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\cos 2y,$$

và với $c=\sqrt{2}\cos y$, ta có

$$f(y)=(1+c)\left(1+\frac{2}{c^2-1}\right)-1$$

$$=c+\frac{2}{c-1}.$$

Cuối cùng ta chứng minh $\left|c+\dfrac{2}{c-1}\right|\ge 1+2\sqrt{2}$. Với $c>1$, ta có

$$1+(c-1)+\frac{2}{c-1}\ge -1+2\sqrt{2}$$

bằng cách áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng – trung bình nhân (Bất đẳng thức Cauchy) cho 2 số hạng sau cùng, và đẳng thức xảy ra khi $c-1=\sqrt{2}$ (loại). Với $c<1$, tương tự như trên, ta có :

$$-1+1-c+\frac{2}{1-c} \geq -1+2\sqrt{2},$$

đẳng thức xảy ra khi $1-c=\sqrt{2}$. So sánh các kết quả nhận được ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 43. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có các cạnh bên đôi một vuông góc nhau. Gọi α, β, γ là các góc giữa đường cao xuất phát từ đỉnh S và các cạnh bên của hình chóp. Chứng minh

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\gamma}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta} \leq \frac{3}{4}.$$

Hướng dẫn. Áp dụng định lí Pythagore trong các tam giác vuông, ta có $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, suy ra $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$. Đặt $a=\sin^2\alpha+\sin^2\beta$, $b=\sin^2\beta+\sin^2\gamma$, $c=\sin^2\gamma+\sin^2\alpha$, lúc đó $a+b+c=4$. Mặt khác $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(2-\sin^2\beta-\sin^2\gamma\right)=\sin^2\beta+\sin^2\gamma-1=b-1$. Tương tự $\cos^2\beta=c-1$ và $\cos^2\gamma=a-1$. Khi đó bất đẳng thức phải chứng minh có dạng

$$\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}+\frac{a-1}{a} \leq 4 \Leftrightarrow 3-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{4}.$$

Do $a+b+c=4$ nên bất đẳng thức sau cùng này tương đương với

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Cuối cùng để chứng minh bất đẳng thức này ta chỉ cần nhân hai bất đẳng thức Cauchy (bất đẳng thức TBC-TBN) cho 3 số dương

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ tức là khi $\alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow SA=SB=SC$.

2.7.2. Bài tập

Bài toán 84. (BALTIC 1991) Cho A, B, C là các góc của một tam giác nhọn. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sin A + \sin B > \cos A + \cos B + \cos C.$$

Lời giải. Trong một tam giác nhọn ta có $A + B > \frac{\pi}{2}$, vậy

$$\sin A > \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B$$

và $\sin B > \cos A$. Từ các bất đẳng thức này ta có

$$(1 - \sin A)(1 - \sin B) < (1 - \cos A)(1 - \cos B)$$

và
$$\sin A + \sin B > \cos A + \cos B - \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B > \cos A + \cos B - \cos(A + B)$$

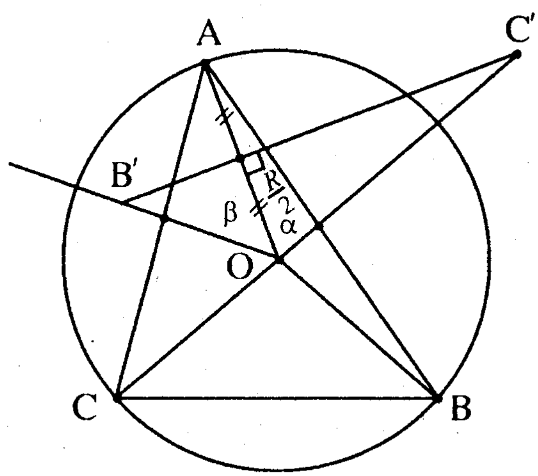
$$= \cos A + \cos B + \cos C.$$

Suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Bài toán 85. (BALTIC 2005) Cho α, β và γ là 3 góc thoả mãn $0^0 \le \alpha, \beta, \gamma < 90^0$ và $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1$. Chứng minh rằng

$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma \ge \frac{3}{8}.$$

Bài toán 86. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác nhọn ABC và gọi A', B' và C' lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCO, CAO và ABO. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC không vượt quá diện tích tam giác $A'B'C'$.



Hình 2.72

Lời giải. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và gọi α, β và γ lần lượt là các góc của tam giác trên. Lúc đó $\widehat{BOC}=2\alpha$, $\widehat{COA}=2\beta$, $\widehat{AOB}=2\gamma$. Vậy

$$S_{ABC}=S_{BOC}+S_{COA}+S_{AOB}=\frac{R^2}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma).$$

Vì tam giác BOC là tam giác cân, đường trung trực OA' của cạnh BC cũng là phân giác nên $\widehat{BOA'}=\widehat{COA'}=\alpha$. Tương tự, $\widehat{COB'}=\widehat{AOB'}=\beta$ và $\widehat{AOC'}=\widehat{BOC'}=\gamma$. Xét tam giác $B'OC'$. Đường cao kẻ xuống cạnh $B'C'$ có độ dài $\frac{R}{2}$, vậy $|B'C'|=\frac{R}{2}(\tan\beta+\tan\gamma)$ và diện tích của tam giác này là $S_{B'OC'}=\frac{R^2}{8}(\tan\beta+\tan\gamma)$. Cũng vậy, $S_{C'OA'}=\frac{R^2}{8}(\tan\gamma+\tan\alpha)$ và $S_{A'OB'}=\frac{R^2}{8}(\tan\alpha+\tan\beta)$. Suy ra,

$$S_{A'B'C'}=S_{B'OC'}+S_{C'OA'}+S_{A'OC'}=\frac{R^2}{4}(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma).$$

Hàm số $f(x)=\tan x-2\sin 2x$ lồi trong khoảng $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, thật vậy đạo hàm cấp hai của nó

$$f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}+8\sin 2x\geq 0 \text{ với mọi } x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right].$$

Bất đẳng thức Jensen cho ta

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)=3\left(\tan\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{2\pi}{3}\right)=0$$

Vậy $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geq 2\sin 2\alpha+2\sin 2\beta+2\sin 2\gamma$. Cuối cùng từ các bất đẳng thức trên ta suy ra $S_{A'B'C'}\geq S_{ABC}$.

Bài toán 87. (Bulgaria 1999) Một tức giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn mà tâm O của nó ở bên trong tứ giác. Gọi $MNPQ$ là tứ giác có các đỉnh là hình chiếu của giao điểm các đường chéo AC và BD lên các cạnh của tứ giác $ABCD$. Chứng minh diện tích của tứ giác $ABCD$ không nhỏ hơn diện tích của tứ giác $MNPQ$.

Bài toán 88. (USAMO 1998) Cho $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các số thực thuộc khoảng $\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho

$$\tan\left(a_0-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(a_1-\frac{\pi}{4}\right)+\cdots+\tan\left(a_n-\frac{\pi}{4}\right)\ge n-1.$$

Chứng minh

$$\tan(a_0)\tan(a_1)\ldots\tan(a_n)\ge n^{n+1}$$

Lời giải. Đặt $y_i=\tan\left(a_i-\frac{\pi}{4}\right)$ với $i=0, 1, 2, \ldots, n$. Ta có

$$\tan(a_i)=\tan\left(\left(a_i-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{y_i+1}{1-y_i}.$$

Vậy ta có thể viết bài toán dưới dạng khác.

Cho các số thực $y_0, y_1, \ldots, y_n\in(-1\,;\,1)$ thoả mãn $y_0+\cdots+y_n\ge n-1$.

Chứng minh $\prod\limits_{i=0}^{n}\frac{1+y_i}{1-y_i}\ge n^{n+1}$

Điều kiện của bài toán cho ta kết quả : với $i\in\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ta có

$$1+y_i\ge\sum_{i\ne j}(1-y_j).$$

Sau đó áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN cho n số dương

$$\frac{1+y_i}{n}\ge\frac{1}{n}\sum_{i\ne j}\left(1-y_j\ge\prod_{j\ne i}(1-y_i)^{\frac{1}{n}}\right).$$

Nhân tất cả bất đẳng thức vừa nhận được khi cho i chạy từ 0 đến n, ta thu được kết quả

$$\prod_{i=0}^{n}\frac{1+y_i}{n}\ge\prod_{i=0}^{n}\prod_{j\ne i}(1-y_i)^{\frac{1}{n}}=\prod_{i=0}^{n}(1-y_i).$$

Từ bất đẳng thức ta suy ra $\prod_{i=0}^{n}\frac{1+y_i}{1-y_i}\geq n^{n+1}$.

Đó là điều ta phải chứng minh.

Bài toán 89. Cho $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực sao cho

$$\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n\geq n.\sin\alpha.$$

Chứng minh

$$\sin(x_1-\alpha)+\sin(x_2-\alpha)+\cdots+\sin(x_n-\alpha)\geq 0.$$

Chương 3.

CÁC PHƯƠNG PHÁP HIỆN ĐẠI

3.1. Phương pháp hoán vị

3.1.1. Định lí – Ví dụ

Bất đẳng thức giữa các biểu thức sinh ra do sắp xếp lại thứ tự (hoán vị) gọi tắt là ***bất đẳng thức giữa các hoán vị.*** Đó là một bất đẳng thức mạnh và có nhiều ứng dụng.

Định nghĩa 3.1.1. Cho $2n$ số thực $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ và $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$.

Ta gọi tổng

$$A = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

là tổng thứ tự của các tích số a_ib_i, với $i = 1, 2, \ldots, n$ và tổng

$$B = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

là tổng ngược của các số đó.

Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là một hoán vị của các số thực $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$, ta gọi tổng

$$X = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

là "tổng xáo trộn" của các số đã cho, lúc đó ta có định lí

Định lí 3.1.1. (Bất đẳng thức giữa các hoán vị)

$$A \ge X \ge B.$$

Trong trường hợp nếu $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, thì bất đẳng thức trên đây là đẳng thức nếu $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $A \ge X$ bằng quy nạp theo n. Thật rõ ràng khi $n = 1$. Giả sử bất đẳng thức đúng khi $n = k \ge 1$. Ta xét $n = k+1$. Đặt $x_i = b_{k+1}$ và $x_{k+1} = b_j$. Ta có $\left(a_{k+1} - a_i\right)\left(b_{k+1} - b_j\right) \ge 0$. Suy ra

$$a_ib_j + a_{k+1}b_{k+1} \ge a_ib_{k+1} + a_{k+1}b_j.$$

Như vậy trong tổng X ta có thể hoán vị các số x_i với x_{k+1} để có tổng lớn hơn. Sau khi hoán vị ta áp dụng giả thiết quy nạp cho k số hạng đầu và kết luận

$A \geq X$. Bất đẳng thức $X \geq B$ suy từ $A \geq X$ bằng cách sử dụng $-b_n \leq -b_{n-1} \leq \ldots \leq -b_1$ thay cho $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

Ví dụ 44. (Bất đẳng thức Chebysev) Cho $2n$ số thực $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Chứng minh

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$
$$\geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}{n} \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

Chứng minh. Ta có n bất đẳng thức giữa các hoán vị

$$A = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq B,$$

$$A \geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \geq B,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A \geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1} \geq B.$$

Cộng tất cả các bất đẳng thức trên đây vế theo vế sau đó chia các vế cho n ta có bất đẳng thức Chebysev phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Ví dụ 45. (USAMO 1974) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Vì tính chất đối xứng, ta có thể giả sử mà không làm mất tính chất tổng quát của bài toán $a \leq b \leq c$. Lúc đó $\ln a \leq \ln b \leq \ln c$.

Theo bất đẳng thức Chebysev, ta có

$$a\ln a + b\ln b + c\ln c \geq \frac{(a+b+c)(\ln a + \ln b + \ln c)}{3}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\ln\left(a^a b^b c^c\right) \geq \ln\left((abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\right).$$

Suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 46. (IMO 1978) Cho $c_1, c_2, \ldots, c_n$ là n số nguyên dương phân biệt. Chứng minh

$$c_1 + \frac{c_2}{4} + \cdots + \frac{c_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Chứng minh. Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các phần tử c_i được sắp xếp lại theo thứ tự tăng dần. Vì các a_i là các số nguyên dương phân biệt nên $a_i \geq i$. Vì $1 > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n^2}$, nên theo bất đẳng thức giữa các hoán vị,

$$c_1 + \frac{c_2}{4} + \cdots + \frac{c_n}{n^2} \geq a_1 + \frac{a_2}{4} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Ví dụ 47. (IMO 1995) Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Chứng minh. Đặt $x = bc = \frac{1}{a}$, $y = ca = \frac{1}{b}$, $z = ab = \frac{1}{c}$. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Do tính đối xứng ta có thể giả sử $x \leq y \leq z$ mà không mất tính chất tổng quát của bài toán. Lúc đó ta có $x^2 \leq y^2 \leq z^2$ và $\frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{x+y}$. Theo bất đẳng thức giữa các hoán vị

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x^2}{y+x} + \frac{y^2}{z+y} + \frac{z^2}{x+z}$$

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x^2}{x+z} + \frac{y^2}{y+x} + \frac{z^2}{z+y}.$$

Suy ra

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{y^2+z^2}{y+z} + \frac{z^2+x^2}{z+x}\right). \tag{3.1}$$

Mặt khác bất đẳng thức giữa trung bình căn bậc hai và trung bình cộng

$$\sqrt{\frac{r^2+s^2}{2}} \geq \frac{r+s}{2} \Leftrightarrow r^2+s^2 \geq \frac{(r+s)^2}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $r=s$. Áp dụng bất đẳng thức này vào 3.1 ta có

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} \geq 3\frac{\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c=1$.

3.1.2. Bài tập

Bài toán 90. Xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

$$f(x)=\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x} \text{ trên } \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right].$$

Lời giải. Cho $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$, các dãy số $\left(\sin^3 x, \cos^3 x\right)$ và $\left(\frac{1}{\cos x}, \frac{1}{\sin x}\right)$ đơn điệu cùng chiều tức là cùng tăng hay cùng giảm.

Vậy theo bất đẳng thức giữa các hoán vị

$$f(x) \geq \sin^3 x \cdot \frac{1}{\sin x}+\cos^3 x \cdot \frac{1}{\cos x}=\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Mặt khác ta có $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 1, đạt được khi $x=\frac{\pi}{4}$.

Bài toán 91. Cho 3 số thực không âm a, b, c. Chứng minh

$$a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a \geq 3abc.$$

Bài toán 92. (IMO 1990) Cho 4 số thực không âm a, b, c, d thoả mãn $ab+bc+cd+da=1$. Chứng minh

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Đặt

$$S=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$$

và $x=b+c+d$, $y=c+d+a$, $z=d+a+b$ và $t=a+b+c$. Vì vai trò của các biến như nhau nên ta có thể giả sử $a\ge b\ge c\ge d$. Lúc đó $a^n\ge b^n\ge c^n\ge d^n$ và $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{z}\ge\frac{1}{t}$. Lúc đó bất đẳng thức giữa các hoán vị cho ta

$$a^2+b^2+c^2+d^2\ge ab+bc+cd+da=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d$. Bất đẳng thức Chebysev cho ta

$$S\ge\frac{1}{4}\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right).$$

Cũng vẫn bất đẳng thức Chebysev cho ta

$$a^3+b^3+c^3+d^3\ge\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(a+b+c+d\right).$$

Mặt khác $a^2+b^2+c^2+d^2\ge 1$ và $3\left(a+b+c+d\right)=\left(x+y+z\right)$. Vậy

$$S\ge\frac{1}{48}\left(x+y+z+t\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right).$$

Cuối cùng áp dụng hai lần bất đẳng thức TBC-TBN cho 4 số không âm ta có

$$S\ge\frac{1}{48},4\sqrt[4]{xyzt}.4\sqrt[4]{\frac{1}{xyzt}}=\frac{16}{48}=\frac{1}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=1$.

Bài toán 93. (IMO 1975) Cho $2n$ số thực $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n$ và $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n$. Cho một hoán vị $\left(z_1,z_2,\ldots,z_n\right)$ là một hoán vị của $\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2+\ldots+\left(x_n-y_n\right)^2\le\left(x_1-z_1\right)^2+\left(x_2-z_2\right)^2+\ldots+\left(x_n-z_n\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 94. (IMO 1978) Cho dãy số $\left(x_k\right)_{k\in N^+}$ là một dãy số tự nhiên đôi một khác nhau. Chứng minh với $n\ge 1$ ta có bất đẳng thức

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Vì $1>\frac{1}{2}>\ldots>\frac{1}{n}$ nên theo bất đẳng thức giữa các hoán vị ta có tổng $a_1+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{n^2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Mặt khác các a_i phân biệt nhau từng đôi một nên $a_i\geq i$. Suy ra

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{n^2}\geq 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=1,\ a_2=2,\ \ldots,\ a_n=n$.

Bài toán 95. (TRUNG QUỐC 1985) Cho n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Chứng minh

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\geq a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Bài toán 96. (IMO 1998) Cho $x, y, z>0$ sao cho $xyz=1$. Chứng minh

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}.$$

Lời giải. Sau đây là một cách chứng minh bài toán dựa vào bất đẳng thức Chebysev. Vì vai trò của x, y, z như nhau ta có thể giả sử $x\leq y\leq z$ mà không mất tính tổng quát của bài toán

$$\frac{1}{(1+y)(1+z)}\leq\frac{1}{(1+z)(1+x)}\leq\frac{1}{(1+x)(1+y)}.$$

Theo bất đẳng thức Chebysev

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}$$

$$\geq\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\left(\frac{1}{(1+y)(1+z)}+\frac{1}{(1+z)(1+x)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)}\right)$$

$$= \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \cdot \frac{3 + x + y + z}{(1+x)(1+y)(1+z)}. \qquad (*)$$

Đặt trung bình cộng của các số x, y, z là $a = \frac{x+y+z}{3}$. Theo bất đẳng thức giữa trung bình căn bậc hai và trung bình cộng

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq a$$

và
$$3a = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3,$$

và
$$(1+x)(1+y)(1+z) \leq \left(\frac{3 + x + y + z}{3}\right)^3 = (1+a)^3.$$

Thay các bất đẳng thức trên vào (*) ta có

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq a^3 \cdot \frac{6}{(1+a)^3}.$$

Việc còn lại là chứng minh bất đẳng thức $\frac{6a^3}{(1+a)^3} \geq \frac{3}{4}$. Theo bất đẳng thức TBC-TBN

$$a \geq \sqrt[3]{xyz} = 1 \text{ và } \frac{6a^3}{(1+a)^3} = 6\left(1 - \frac{1}{1+a}\right)^3$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$f(a) = 6\left(1 - \frac{1}{1+a}\right)^3 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow f(a) \geq f(1).$$

Điều này suy từ tính chất đồng biến của hàm số

$$f(x) = 6\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^3$$

trên khoảng $(1, +\infty)$.

Bài toán 97. Cho a, b, $c > 0$ và số nguyên dương n. Chứng minh

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

3.2. Phương pháp biến đổi về dạng thuần nhất

3.2.1. Ví dụ

Có rất nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức với các ràng buộc, ví dụ như $ab=1$, $xyz=1$, $x+y+z=1, \ldots$ Việc chứng minh các bất đẳng thức không thuần nhất nhưng đối xứng có các ràng buộc như thế trở thành dễ dàng sau khi biến đổi chúng thành các dạng thuần nhất. Sau đó áp dụng các bất đẳng thức mạnh như bất đẳng thức Schur và bất đẳng thức Muirhead. Sau đây là một ví dụ đơn giản.

Ví dụ 48. (HUNGARY 1996) Cho a và b là các số thực dương sao cho $a+b=1$. Chứng minh

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\geq\frac{1}{3}.$$

Chứng minh. Sử dụng điều kiện $a+b=1$, ta đưa bất đẳng thức phải chứng minh về dạng thuần nhất, nghĩa là,

$$\frac{1}{3}\leq\frac{a^2}{(a+b)(a+(a+b))}+\frac{b^2}{(a+b)(b+(a+b))} \text{ hay } a^2b+ab^2\leq a^3+b^3,$$

bất đẳng thức này suy từ $(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=(a-b)^2(a+b)\geq 0.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Bất đẳng thức $a^2b+ab^2\leq a^3+b^3$ trên đây có thể tổng quát như sau :

Ví dụ 49. Cho a_1, a_2, b_1, b_2 là các số thực dương sao cho $a_1+a_2=b_1+b_2$ và $\max(a_1, a_2)\geq\max(b_1, b_2)$. Cho x và y là các số thực không âm. Lúc đó, ta có

$$x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}\geq x^{b_1}y^{b_2}+x^{b_2}y^{b_1}. \tag{3.2}$$

Chứng minh. Không làm mất tính tổng quát ta có thể giả sử, $a_1\geq a_2$, $b_1\geq b_2$, $a_1\geq b_1$. Nếu x hay y bằng không, thì bất đẳng thức đã được chứng minh. Vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp cả x lẫn y đều khác không. Từ kết quả $a_1+a_2=b_1+b_2$ ta suy ra $a_1-a_2=(b_1-a_2)+(b_2-a_2)$. Ta dễ dàng kiểm chứng rằng

$$x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}-x^{b_1}y^{b_2}-x^{b_2}y^{b_1}$$

$$= x^{a_2} y^{a_2} \left(x^{a_1 - a_2} + y^{a_1 - a_2} - x^{b_1 - a_2} y^{b_2 - a_2} - x^{b_2 - a_2} y^{b_1 - a_2} \right)$$

$$= x^{a_2} y^{a_2} \left(x^{b_1 - a_2} - y^{b_1 - a_2} \right) \left(x^{b_2 - a_2} - y^{b_2 - a_2} \right)$$

$$= \frac{1}{x^{a_2} y^{a_2}} \left(x^{b_1} - y^{b_1} \right) \left(x^{b_2} - y^{b_2} \right) \geq 0.$$

Chú ý. Độc giả tìm xem khi nào bất đẳng thức 3.2 trở thành đẳng thức ?

3.2.2. Bài tập

Bài toán 98. (IRAN 1998) Chứng minh rằng với mọi số thực $x, y, z > 1$ sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{x + y + z} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1}.$$

Lời giải. Sau khi thực hiện các phép thế đại số $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \geq \sqrt{\frac{1 - a}{a}} + \sqrt{\frac{1 - b}{b}} + \sqrt{\frac{1 - c}{c}},$$

trong đó $a, b, c \in (0 ; 1)$ và $a + b + c = 2$. Sử dụng điều kiện $a + b + c = 2$, ta đưa đến bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \geq \sqrt{\frac{\frac{a + b + c}{2} - a}{a}} + \sqrt{\frac{\frac{a + b + c}{2} - b}{b}} + \sqrt{\frac{\frac{a + b + c}{2} - c}{b}}$$

hay $$\sqrt{(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \geq \sqrt{\frac{b + c - a}{a}} + \sqrt{\frac{c + a - b}{b}} + \sqrt{\frac{a + b - c}{c}},$$

bất đẳng thức này suy từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\sqrt{[(b + c - a) + (c + a - b) + (a + b - c)]\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{b + c - a}{a}} + \sqrt{\frac{c + a - b}{b}} + \sqrt{\frac{a + b - c}{c}}.$$

Bài toán 99. (VIỆT NAM 1996) Cho a, b, c, d là bốn số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + bcd = 16.$$

Chứng minh

$$a + b + c + d \geq \frac{2}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

và xác định khi nào đẳng thức xảy ra ?

3.3. Bất đẳng thức Schur

3.3.1. Định lí – Ví dụ

Trong rất nhiều trường hợp, để chứng minh một bất đẳng thức chúng ta không thể tìm được một phương pháp đơn giản. Vì vậy phải cần đến các công cụ đủ mạnh trong chứng minh. Sau đây là một bất đẳng thức đơn giản nhưng các ứng dụng của nó thì rất *"mạnh"*.

Định lí 3.3.1. (Schur) Cho x, y, z là các số thực không âm. Với mọi $r > 0$, ta có

$$\sum_{\text{cyclic}} x^r (x - y)(x - z) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay hai trong 3 số x, y, z bằng nhau còn số thứ ba bằng không.

Chứng minh. Vì bất đẳng thức có tính chất đối xứng theo ba biến số, nên ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$ mà không làm mất tính chất tổng quát của bài toán. Lúc đó

$$(x - y)\left[x^r (x - z) - y^r (y - z)\right] + z^r (x - z)(y - z) \geq 0,$$

và mỗi hạng tử của vế trái là không âm. Trong trường hợp $x \geq y \geq z$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ và $z = 0$.

Chú ý 1. Độc giả tự chứng minh kết quả sau đây là sai :

Với mọi $a, b, c, d \geq 0$ và $r > 0$, ta có

$$a^r (a - b)(a - c)(a - d) + b^r (b - c)(b - d)(b - a) + c^r (c - a)(c - c)(a - d) +$$
$$+ d^r (d - a)(d - b)(d - c) \geq 0.$$

Chú ý 2. Trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Schur khi $r = 1$ sau đây có nhiều ứng dụng :

$$\sum_{\text{cyclic}} x(x-y)(x-z)\ge 0 \Leftrightarrow 3xyz+\sum_{\text{cyclic}} x^3 \ge \sum_{\text{sym}} x^2y$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} xyz+\sum_{\text{sym}} x^3 \ge 2\sum_{\text{sym}} x^2y \Leftrightarrow xyz \ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$$

$$\Leftrightarrow 4(x+y+z)(xy+yz+zx)\le (x+y+z)^3+9xyz.$$

Ví dụ 50. Cho x, y, z là các số thực không âm. Lúc đó, ta có

$$3xyz+x^3+y^3+z^3 \ge 2\left((xy)^{\frac{3}{2}}+(yz)^{\frac{3}{2}}+(zx)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức Schur và bất đẳng thức TBC-TBN, ta có

$$3xyz+\sum_{\text{cyclic}} x^3 \ge \sum_{\text{cyclic}} x^2y+xy^2 \ge \sum_{\text{cyclic}} 2(xy)^{\frac{3}{2}}.$$

Ví dụ 51. (IMO 1984/1) Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn $x+y+z=1$. Chứng minh $0\le xy+yz+zx-2xyz\le \frac{7}{27}$.

Lời giải. Sử dụng điều kiện $x+y+z=1$, ta có thể biến đổi bất đẳng thức về dạng tương đương.

$$0\le (xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz \le \frac{7}{27}(x+y+z)^3.$$

Bất đẳng thức bên trái là hiển nhiên vì nó tương đương với

$$0\le xyz+\sum_{\text{sym}} x^2y.$$

Bất đẳng thức bên phải được suy từ

$$7\sum_{\text{cyclic}} x^3+15xyz-6\sum_{\text{sym}} x^2y \ge 0.$$

Ta có

$$7\sum_{\text{cyclic}} x^3+15xyz-6\sum_{\text{sym}} x^2y=\left(2\sum_{\text{cyclic}} x^3-\sum_{\text{sym}} x^2y\right)$$

$$+5\left(3xyz+\sum_{\text{cyclic}} x^3-\sum_{\text{sym}} x^2y\right).$$

Vậy $$2\sum_{\text{cyclic}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2y \text{ và } 3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2y.$$

Ta chú ý

$$2\sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y = \sum_{\text{cyclic}} \left(x^3 + y^3\right) - \sum_{\text{cyclic}} \left(x^2y + xy^2\right)$$

$$= \sum_{\text{cyclic}} \left(x^3 + y^3 - x^2y - xy^2\right) \geq 0.$$

Bất đẳng thức thứ hai được viết lại

$$\sum_{\text{cyclic}} x(x-y)(x-z) \geq 0,$$

đây chính là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Schur $(r=1)$.

Ví dụ 52. (APMO 5/2004) Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c,

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geq 9(ab+bc+ca).$$

Lời giải. Sau khi khai triển, bất đẳng thức trở thành

$$8 + (abc)^2 + 2\sum_{\text{cyclic}} a^2b^2 + 4\sum_{\text{cyclic}} a^2 \geq 9\sum_{\text{cyclic}} ab.$$

Từ bất đẳng thức $(ab-1)^2 + (bc-1)^2 + (ca-1)^2 \geq 0,$ ta nhận được

$$6 + 2\sum_{\text{cyclic}} a^2b^2 \geq 4\sum_{\text{cyclic}} ab.$$

Vậy, chỉ cần chứng minh

$$2 + (abc)^2 + 4\sum_{\text{cyclic}} a^2 \geq 5\sum_{\text{cyclic}} ab.$$

Vì $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 3(ab+bc+ca)$, nên việc còn lại là chứng tỏ

$$2 + (abc)^2 + \sum_{\text{cyclic}} a^2 \geq 2\sum_{\text{cyclic}} ab \Leftrightarrow 2 + (abc)^2 \geq 2\sum_{\text{cyclic}} \left(ab - \frac{1}{2}a^2\right).$$

Thật vậy, áp dụng hai lần bất đẳng thức TBC-TBN cho 3 số thực dương, ta có :

$$2 + (abc)^2 = 1 + 1 + (abc)^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 9\frac{abc}{3\sqrt[3]{abc}}$$

$$\geq 9\frac{abc}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2$$

$$= 2\sum_{cyclic}\left(ab-\frac{1}{2}a^2\right).$$

Bất đẳng thức cuối cùng chính là bất đẳng thức Schur trong trường hợp $r=1$.

Ví dụ 53. Cho $t \in (0\,;\,3]$. Với mọi $a, b, c \geq 0$, chứng minh :

$$(3-t)+t(abc)^{\frac{2}{t}} + \sum_{\text{cyclic}} a^2 \geq 2\sum_{\text{cyclic}} ab.$$

Đặc biệt là các bất đẳng thức không thuần nhất

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(abc)^4 + a^2+b^2+c^2 \geq 2(ab+bc+ca),$$

$$2+(abc)^2+a^2+b^2+c^2 \geq 2(ab+bc+ca),$$

$$1+2abc+a^2+b^2+c^2 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Lời giải. Đặt $x=a^{\frac{2}{3}}$, $y=b^{\frac{2}{3}}$, $z=c^{\frac{2}{3}}$, bất đẳng thức trở thành

$$3-t+t(xyz)^{\frac{3}{t}} + \sum_{\text{cyclic}} x^3 \geq 2\sum_{\text{cyclic}} (xy)^{\frac{3}{2}}.$$

Vậy theo ví dụ 50, ta chỉ cần chứng minh

$$3-t+t(xyz)^{\frac{3}{t}} \geq 3xyz,$$

nhưng đây lại là kết quả của bất đẳng thức TBC-TBN :

$$\frac{3-t}{3}\cdot 1+\frac{t}{3}(xyz)^{\frac{3}{t}} \geq \left(\frac{3-t}{3}+\frac{t}{3}\right)\left(1^{\frac{3-t}{3}}\left((xyz)^{\frac{3}{t}}\right)^{\frac{t}{3}}\right)^{\frac{3-t}{3}+\frac{t}{3}} = xyz.$$

Độc giả có thể chứng minh rằng khi $a=b=c=1$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Ví dụ 54. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}} \geq \sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Đặt $a=y+z$, $b=z+x$ và $c=x+y$. Chú ý rằng a, b, c đều dương. Ta có

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{\sqrt{2b^2}} = \sum_{\text{cyclic}} \frac{y+z}{\sqrt{4x^2+4xy+4xz+y^2+z^2-2yz}}.$$

Ta xét hàm số lồi trên khoảng $(0\,;+\infty)$ là $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Không làm mất tính tổng quát ta giả sử $x+y+z=1$. Ta có

$$\sum_{\text{cyclic}} (y+z)\left(4x^2+4xy+4xz+y^2+z^2-2yz\right) \geq \left((y+z)+(z+x)+(x+y)\right)\times$$

$$\times f\left(\frac{\sum_{\text{cyclic}}(y+z)\left(4x^2+4xy+4xz+y^2+z^2-2yz\right)}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sum_{\text{cyclic}} 4x^2(y+z)+\left(4xy^2+4xyz\right)+\left(4xyz+4xz^2\right)+y^3+z^3-y^2z-yz^2}}.$$

Chú ý rằng

$$\sum_{\text{cyclic}} 4x^2(y+z)+\left(4xy^2+4xyz\right)+\left(4xyz+4xz^2\right)+y^3+z^3-y^2z-yz^2$$

$$=\sum_{\text{cyclic}} 2x^3+7x^2(y+z)+8xyz.$$

Vậy $8(x+y+z)^3 \geq 3\sum_{\text{cyclic}} 2x^3+7x^2(y+z)+8xyz$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} 4x^3+24x^2y+8xyz \geq \sum_{\text{sym}} 3x^3+21x^2y+12xyz$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+2y^3+2z^3+3\left(x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\right) \geq 24xyz.$$

Bất đẳng thức cuối cùng này suy từ bất đẳng thức TBC-TBN. Độc giả tự xác định khi nào đẳng thức xảy ra.

Ví dụ 55. Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a+b+c+abc=4$. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Theo bất đẳng thức Cachy-Schwarz

$$\left(\sum_{\text{cyclic}} a\sqrt{b+c}\right)\left(\sum_{\text{cyclic}}\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)\geq(a+b+c)^2.$$

Nhưng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz một lần nữa

$$\sqrt{(a+b+c)(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b))}\geq\sum_{\text{sym}} a\sqrt{b+c}.$$

Vậy $$\sum_{\text{cyclic}} a\sqrt{b+c}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+c)\cdot\sqrt{\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}}.$$

Như thế ta chỉ cần chứng minh $a+b+c\geq ab+bc+ca$. Bất đẳng thức Schur trong trường hợp $r=1$ cho ta

$$\frac{9abc}{a+b+c}\geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức $a+b+c\geq ab+bc+ca$ bằng phản chứng.

Giả sử $ab+bc+ca>a+b+c$ Ta có

$$\frac{9abc}{a+b+c}\geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2$$

$$>4(a+b+c)-(a+b+c)^2=(a+b+c)(4-(a+b+c))=abc(a+b+c).$$

Suy ra $a+b+c<3$. Do bất đẳng thức TBC-TBN ta có $a+b+c\geq 3\sqrt{abc}$ suy ra $abc<1$ đưa tới $4=a+b+c+abc<3+1$. Vô lí ! Đến đây ta có bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

3.3.2. Bài tập

Bài toán 100. (IMO 2000/2) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc=1$. Chứng minh

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1.$$

Lời giải. Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức thuần nhất sau đây[1] :

$$\left(a-(abc)^{1/3}+\frac{(abc)^{2/3}}{b}\right)\left(b-(abc)^{1/3}+\frac{(abc)^{2/3}}{c}\right)$$

$$\left(c-(abc)^{1/3}+\frac{(abc)^{2/3}}{a}\right)\le abc.$$

Sau khi thế $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$ với $x, y, z>0$, bất đẳng thức được viết lại như sau

$$\left(x^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{y^3}\right)\left(y^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{z^3}\right)\left(z^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{x^3}\right)\le x^3y^3z^3,$$

điều này kéo theo

$$\left(x^2y-y^2z+z^2x\right)\left(y^2z-z^2x+x^2y\right)\left(z^2x+x^2y+y^2z\right)\le x^3y^3z^3$$

hay
$$3x^3y^3z^3+\sum_{\text{cyclic}}x^6y^3\ge\sum_{\text{cyclic}}x^4y^4z+\sum_{\text{cyclic}}x^5y^2z^2$$

hay
$$3\left(x^2y\right)\left(y^2z\right)\left(z^2x\right)+\sum_{\text{cyclic}}\left(x^2y\right)^3\ge\sum_{\text{sym}}\left(x^2y\right)^2\left(y^2z\right)$$

đây là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Schur.

Bài toán 101. Chứng minh rằng trong một tam giác nhọn bất kì ABC, ta có :

$$\cot^3 A+\cot^3 B+\cot^3 C+6\cot A\cot B\cot C\ge\cot A+\cot B+\cot C.$$

Sau đây là một bất đẳng thức khác có điều kiện ràng buộc $abc=1$.

Bài toán 102. (Tournament of Towns 1997) Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\le 1.$$

Lời giải. Ta viết lại bất đẳng thức phải chứng minh như sau :

---

[1] Có thể xem ví dụ 51

$$\frac{1}{a+b+(abc)^{1/3}}+\frac{1}{b+c+(abc)^{1/3}}+\frac{1}{c+a+(abc)^{1/3}}\le\frac{1}{(abc)^{1/3}}.$$

Ta thực hiện phép thế $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$ với $x, y, z>0$. Thì bất đẳng thức trở thành,

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\le\frac{1}{xyz}$$

điều này tương đương với

$$xyz\sum_{\text{cyclic}}\left(x^3+y^3+xyz\right)\left(y^3+z^3+xyz\right)$$

$$\le\left(x^3+y^3+xyz\right)\left(y^3+z^3+xyz\right)\left(z^3+x^3+xyz\right)$$

hay $\sum_{\text{sym}}x^6y^3\ge\sum_{\text{sym}}x^5y^2z^2$!

Áp dụng bất đẳng thức (3.2) ta có

$$\sum_{\text{sym}}x^6y^3=\sum_{\text{cyclic}}x^6y^3+y^6x^3\ge\sum_{\text{cyclic}}x^5y^4+y^5x^4$$

$$=\sum_{\text{cyclic}}x^5\left(y^4+z^4\right)\ge\sum_{\text{cyclic}}x^5\left(y^2z^2+y^5z^2\right)$$

$$=\sum_{\text{sym}}x^5y^2z^2.$$

Bài toán 103. (KOREA 1998) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh

$$IA^2+IB^2+IC^2\ge\frac{BC^2+CA^2+AB^2}{3}.$$

Bài toán 104. (Kì thi chọn đội tuyển USA 2000) Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c bất đẳng thức sau đây là đúng

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\le\max\left\{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2,\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2,\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right\}$$

và xác định khi nào bất đẳng thức đó là đẳng thức ?

Lời giải. Vì $a, b, c>0$ nên ta đặt $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$, $z=\sqrt{c}$. Bất đẳng thức TBC-TBN cho ta

$$3\left(\sqrt[3]{xyz}\right)^2 = \frac{3xyz}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 9\frac{xyz}{x+y+z}.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Schur trong trường hợp $r = 1$ ta có

$$9\frac{xyz}{x+y+z} \geq 4(xy+yz+zx)-(x+y+z)^2 = 2(xy+yz+zx)-\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Sau khi thay $a = x^2$, $b = y^2$ và $z = c^2$ vào bất đẳng thức vừa chứng minh ta có

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc} \leq 2\left(a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca}\right)$$

$$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2$$

$$\leq 3\max\left\{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2, \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2, \left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right\}.$$

Chia 2 vế của bất đẳng thức này ta có điều phải chứng minh. Độc giả hãy xác định khi nào có đẳng thức.

Bài toán 105. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b > a^3+b^3+c^3+2abc.$$

Bài toán 106. (Kì thi chọn đội tuyển USA 2003) Cho a, b, c là các số thực thuộc khoảng $\left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh

$$\frac{\sin a\sin(a-b)\sin(a-c)}{\sin(b+c)}+\frac{\sin b\sin(b-c)\sin(b-a)}{\sin(c+a)}+$$

$$+\frac{\sin c\sin(c-a)\sin(c-b)}{\sin(a+b)} \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Trước hết ta có đẳng thức lượng giác

$$\sin(u+v)\sin(u-v) = \frac{\cos 2v-\cos 2u}{2} - \sin^2 u - \sin^2 v.$$

Đặt $x = \sin^2 a$, $y = \sin^2 b$, $z = \sin^2 c$. Lúc đó bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\frac{\sqrt{x}(x-y)(x-z)+\sqrt{y}(y-z)(y-x)+\sqrt{z}(z-x)(z-y)}{\sin(b+c)\sin(c+a)\sin(a+b)} \geq 0.$$

Vì $\sin(b+c)\sin(c+a)\sin(a+b)>0$ nên bất đẳng thức này chính là bất đẳng thức Schur trong trường hợp $r=\frac{1}{2}$.

Bài toán 107. (Bất đẳng thức Surányi) Chứng minh rằng với mọi $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, ta có :

$$(n-1)\left(x_1^n+\ldots+x_n^n\right)+nx_1\ldots x_n \geq \left(x_1+\ldots+x_n\right)\left(x_1^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1}\right).$$

Bài toán 108. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm thì

$$a^3+b^3+c^3 \geq ab\sqrt{2a^2+2b^2}+bc\sqrt{2b^2+2c^2}+ca\sqrt{2c^2+2a^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Trước hết ta có nhận xét đây là một bất đẳng thức *mạnh* hơn bất đẳng thức Schur với $r=1$. Để chứng minh bất đẳng thức này ta phải khử các dấu căn thức bằng một bổ đề. Ta có $\sqrt{2x^2+2y^2} \geq x+y \geq \frac{2xy}{x+y}$. Ngoài ra :

Bổ đề. Với mọi số thực x, y không âm sao cho $x+y>0$, ta có

$$\frac{3x^2+2xy+3y^2}{2(x+y)} \geq \sqrt{2x^2+2y^2}.$$

Chứng minh bổ đề. Ta có

$$\left(3x^2+2xy+3y^2\right)^2-4(x+y)^2\left(2x^2+2y^2\right)$$

$$=9x^4+12x^3y+22x^2y^2+12xy^3+9y^4-\left(8x^4+16x^3y+16x^2y^2+16xy^3+8y^4\right)$$

$$=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4=(x-y)^4 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y$.

Ta trở lại chứng minh bài toán. Nhờ bổ đề trên đây, chúng ta chứng minh

$$\sum_{\text{cyclic}} a(a-b)(a-c)=\sum_{\text{cyclic}}\left(a^3+abc-ab(a+b)\right)$$

$$\geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{\left(3a^2+2ab+3b^2\right)ab}{2(a+b)} - ab(a+b)$$

$$= \sum_{\text{cyclic}} \frac{3a^3b+2a^2b^2+3ab^3-2a^3b-4a^2c^2-2ab^3}{2(a+b)}$$

$$= \sum_{\text{cyclic}} \frac{ab(a-b)^2}{2(a+b)}.$$

Nhưng ta lại có

$$\sum_{\text{cyclic}} (b+c-a)(b-c)^2 = 2\sum_{\text{cyclic}} a(a-b)(a-c),$$

nên chỉ cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyclic}} \left(b+c-a-\frac{bc}{b+c}\right)(b-c)^2 \geq 0.$$

Vì tính đối xứng nên ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$ mà không làm mất tính tổng quát của bài toán. Lúc đó

$$\left(a+b-c-\frac{ab}{a+b}\right)(a-b)^2 \geq 0.$$

$$\left(c+a-b-\frac{ac}{a+c}\right)\left((a-c)^2-(b-c)^2\right) \geq 0.$$

$$\sum_{\text{cyclic}} \left(b+c-a-\frac{bc}{b+c}\right)(b-c)^2 + \sum_{\text{cyclic}} \left(c+a-b-\frac{ac}{a+c}\right)(b-c)^2 \geq 0.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên đây vế theo vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 109. (Iran 1996) Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 110. **(Bất đẳng thức Vascile Cartoaje)** Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh

$$\frac{1}{4a^2-ab+4b^2}+\frac{1}{4b^2-bc+4c^2}+\frac{1}{4c^2-ca+4a^2}\geq\frac{9}{7\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Sau khi quy đồng mẫu và rút gọn ta đưa bất đẳng thức phải chứng minh về dạng tương đương.

$$\sum_{\text{sym}} a^6-2a^5b+a^4bc\geq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{\text{sym}} a^5b-4a^4b^2+3a^3b^3\geq 0, \tag{2}$$

$$\sum_{\text{sym}} a^4b^2-a^4bc-a^3b^3+2a^3b^2c-a^2b^2c^2\geq 0, \tag{3}$$

$$\sum_{\text{sym}} a^4bc-2a^3b^2c+a^2b^2c^2\geq 0. \tag{4}$$

Trong đó (1) áp dụng với $r=4$ và (4) áp dụng với $r=1$ (sau khi nhân cho abc). Bất đẳng thức (2) là kết quả của $\sum_{\text{sym}} ab(a-b)^4\geq 0$, và (3) là bất đẳng thức tầm thường $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\geq 0$. Kết quả có được sau khi trừ 56 lần (1) với 84 lần (2), 208 lần (3), $\frac{399}{2}$ lần (4), rồi áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN sau đó chia cho $a^2b^2c^2$. Độc giả tự tìm các điều kiện để đẳng thức xảy ra.

Bài toán 111. **(Việt Nam, 2006 bảng B)** Tìm số thực k lớn nhất sao cho với mọi số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc=1$, ta luôn luôn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3k\geq(k+1)(a+b+c). \tag{3.3}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn. Giả sử tồn tại số thực k thoả mãn đề bài. Chọn

$$a=b=\frac{1}{n+1},\ c=(n+1)^2\ (n\in\mathbb{N}).$$

Từ (3.3) suy ra

$$k \le . \frac{n^2+2n+1+\dfrac{1}{(n+1)^4}-\dfrac{2}{n+1}}{n^2+2n+\dfrac{2}{n+1}-1}.$$

Vì

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1+\dfrac{1}{(n+1)^4}-\dfrac{2}{n+1}}{n^2+2n+\dfrac{2}{n+1}-1}=1,$$

suy ra $k \le 1$. Với $k=1$ bất đẳng thức (3.3) trở thành bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \ge 2(a+b+c).$$

Để chứng minh bất đẳng thức này ta áp dụng bất đẳng thức Schur sau khi đặt

$$x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b},\ z=\frac{1}{c}.$$

3.4. Bất đẳng thức Muirhead

3.4.1. Định lí – Ví dụ

Bất đẳng thức Muirhead là một dạng tổng quát rất quan trọng của bất đẳng thức, TBC-TBN. Đó là một công cụ mạnh trong việc giải một số bài toán về bất đẳng thức. Trước hết chúng ta có một định nghĩa tổng quát về *trung bình* giữa các số thực ngoài các trung bình cộng, trung bình nhân thông dụng.

Định nghĩa 3.4.1. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương và $p=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ là một bộ n số thực bất kì. Ta gọi "trung bình kiểu p" là số thực

$$[p]=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}^{p_1} x_{\sigma(2)}^{p_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{p_n},$$

trong đó S_n là tập hợp các hoán vị của $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ví dụ :

$$[(1, 0, \ldots, 0)]=\frac{(n-1)!(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{n!}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

là trung bình cộng của các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và

$$\left[\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{n! x_1^{\frac{1}{n}} x_2^{\frac{1}{n}} \ldots x_n^{\frac{1}{n}}}{n!} = x_1^{\frac{1}{n}} x_2^{\frac{1}{n}} \ldots x_n^{\frac{1}{n}}$$

là trung bình nhân của các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ta cũng đưa thêm định nghĩa về một quan hệ thứ tự giữa các bộ số thực.

Định nghĩa 3.4.2. Cho 2 bộ số thực bất kì $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ và $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Ta bảo $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ là chặn trên $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, kí hiệu

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \succ q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

nếu chúng thoả mãn các điều kiện sau

1. $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$ *và* $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n$.

2. $p_1 \geq q_1,\ p_1 + p_2 \geq q_1 + q_2, \ldots, p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} \geq q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1}$.

3. $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$.

Định lí 3.4.1. (Bất đẳng thức Muirhead) Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương và p, q là các bộ n số thực sao cho $p \succ q$ thì ta có bất đẳng thức $[p] \geq [q]$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $p \neq q$ và $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Ví dụ $(1, 0, \ldots, 0) \succ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ nên TBC không lớn hơn TBN và bất đẳng thức TBC-TBN là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Muirhead.

Đặc biệt trong trường hợp $n = 3$ bất đẳng thức Muirhead được diễn tả như sau :

Cho $a = (a_1, a_2, a_3)$ và $b = (b_1, b_2, b_3)$ là các bộ số thực sao cho $a \succ b$.

Nghĩa là

$$\begin{cases} a_1 & \geq a_2 \geq a_3 \geq 0 \\ b_1 & \geq b_2 \geq b_3 \geq 0 \\ a_1 & \geq b_1 \\ a_1 + a_2 & \geq b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 & = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

Cho x, y, z là các số thực dương. Lúc đó, ta có

$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} \geq \sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.$$

Chứng minh trong trường hợp $n = 3$.

Trường hợp 1. $b_1 \geq a_2$: Từ $a_1 \geq a_1 + a_2 - b_1$ và $a_1 \geq b_1$ ta suy ra $a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1)$ sao cho $\max(a_1, a_2) = a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1)$. Ngoài ra từ $a_1 + a_2 - b_1 \geq b_1 + a_3 - b_1 = a_3$ và $a_1 + a_2 - b_1 \geq b_2 \geq b_3$, ta có $\max(a_1 + a_2 - b_1, a_3) \geq \max(b_2, b_3)$. Áp dụng bất đẳng thức (3.2) hai lần ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{sym}} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} &= \sum_{\text{cyclic}} z^{a_3}\left(x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1}\right) \\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} z^{a_3}\left(x^{a_1+a_2-b_1}y^{b_1} + x^{b_1}y^{a_1+a_2-b_1}\right) \\
&= \sum_{\text{cyclic}} x^{b_1}\left(y^{a_1+a_2-b_1}z^{a_3} + y^{a_3}z^{a_1+a_2-b_1}\right) \\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} x^{b_1}\left(y^{b_2}z^{b_3} + y^{b_3}z^{b_2}\right) \\
&= \sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.
\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $b_1 \leq a_2$: Từ $3b_1 \geq b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + a_2 + a_3$ ta suy ra $b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$ và $a_1 \geq a_2 \geq b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$. Vậy, ta có $\max(a_2, a_3) \geq \max(b_1, a_2 + a_3 - b_1)$ và $\max(a_1, a_2 + a_3 - b_1) \geq \max(b_2, b_3)$.

Áp dụng bất đẳng thức (3.2) ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{sym}} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} &= \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1}\left(y^{a_2}z^{a_3} + y^{a_3}z^{a_2}\right) \\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1}\left(y^{b_1}z^{a_2+a_3-b_1} + y^{a_2+a_3-b_1}z^{b_1}\right) \\
&= \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1}\left(x^{a_1}z^{a_2+a_3-b_1} + x^{a_2+a_3-b_1}z^{a_1}\right)
\end{aligned}$$

$$\geq \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1}\left(x^{b_2}z^{b_3}+x^{b_3}z^{b_2}\right)$$

$$=\sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.$$

Chú ý. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. Tuy nhiên, nếu ta cho $x=0$ hay $y=0$ hay $z=0$, thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức trong trường hợp $a_1, a_2, a_3>0$ và $b_1, b_2, b_3>0$ khi và chỉ khi $x=y=z$ hay $x=y, z=0$ hay $y=z, x=0$ hay $z=x, y=0$.

Ví dụ 56. (IMO 1995) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2(abc)^{4/3}}.$$

Thực hiện phép thế $a=x^3, b=y^3, c=z^3$ với $x, y, z>0$. Lúc đó, bất đẳng thức trở thành $\sum_{\text{cyclic}}\frac{1}{x^9\left(y^3+z^3\right)}\geq\frac{3}{2x^4y^4z^4}$. Quy đồng mẫu số và bỏ mẫu số, ta có bất đẳng thức phải chứng minh

$$\sum_{\text{sym}} x^{12}y^{12}+2\sum_{\text{sym}} x^{12}y^9z^3+\sum_{\text{sym}} x^9y^9z^6\geq 3\sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5+6x^8y^8z^8$$

hay $\left(\sum_{\text{sym}} x^{12}y^{12}-\sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5\right)$

$$+2\left(\sum_{\text{sym}} x^{12}y^9z^3-\sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5\right)+\left(\sum_{\text{sym}} x^9y^9z^6-\sum_{\text{sym}} x^8y^8z^8\right)\geq 0.$$

Vì $(12, 12, 0)\succ(11, 8, 5), (12, 9, 3)\succ(11, 8, 5), (9, 9, 6)\succ(8, 8, 8)$ nên theo đẳng thức Muirhead mỗi hạng tử trong bất đẳng thức cuối cùng là không âm và từ đó ta có bất đẳng thức phải chứng minh.

Ví dụ 57. (IRAN 1996) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$4\sum_{\text{sym}}x^5y+2\sum_{\text{cyclic}}x^4yz+6x^2y^2z^2-\sum_{\text{sym}}x^4y^2-6\sum_{\text{cyclic}}x^3y^3-2\sum_{\text{sym}}x^3y^2z\geq 0.$$

Ta viết lại nó như sau

$$\left(\sum_{\text{sym}}x^5y-\sum_{\text{sym}}x^4y^2\right)+3\left(\sum_{\text{sym}}x^5y-\sum_{\text{sym}}x^3y^3\right)$$
$$+2xyz\left(3xyz+\sum_{\text{cyclic}}x^3-\sum_{\text{sym}}x^2y\right)\geq 0.$$

Vì $(5,1)\succ(4,2)$, $(5,1)\succ(3,3)$ và $(3,0)\succ(2,1)$ vậy theo bất đẳng thức Muirhead và bất đẳng thức Schur, vế trái của bất đẳng thức trên đây là tổng của ba hạng tử không âm. Đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ 58. Cho x, y, z là các số thực không âm sao cho $xy+yz+zx=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq\frac{5}{2}.$$

Chứng minh. Sử dụng $xy+yz+zx=1$, ta thuần nhất bất đẳng thức phải chứng minh thành dạng :

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)^2\geq\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

hay $$4\sum_{\text{sym}}x^5y+\sum_{\text{sym}}x^4yz+14\sum_{\text{sym}}x^3y^2z+38x^2y^2z^2\geq\sum_{\text{sym}}x^4y^2+3\sum_{\text{sym}}x^3y^3$$

hay $$\left(\sum_{\text{sym}}x^5y-\sum_{\text{sym}}x^4y^2\right)+3\left(\sum_{\text{sym}}x^5y-\sum_{\text{sym}}x^3y^3\right)$$
$$+xyz\left(\sum_{\text{sym}}x^3+14\sum_{\text{sym}}x^2y+38xyz\right)\geq 0.$$

Do các bộ số $(5,1)\succ(4,2)$, $(5,1)\succ(3,3)$ nên theo bất đẳng thức Muirhead ta có kết quả. Trong bất đẳng thức trên đây, nếu không có điều kiện $xy+yz+zx=1$, thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y, z=0$ *hay* $y=z, x=0$

hay $z = x,\ y = 0$. Vì $xy + yz + zx = 1$, nên đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x, y, z) = (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$.

3.4.2. Bài tập

Bài toán 112. Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Khai triển và rút gọn ta có bất đẳng thức tương đương

$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \geq 6abc.$$

Vì $(2, 1, 0) \succ (1, 1, 1)$ vậy theo bất đẳng thức Muirhead $[(2, 1, 0)] \geq [(1, 1, 1)]$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài toán 113. Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn $abcd = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài toán 114. (IMO 1990) Cho các số thực dương sao cho $xyz = 1$. Chứng minh

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Sau đây là một cách chứng minh bài toán này dựa vào bất đẳng thức Muirhead.

Lời giải. Sau khi quy đồng mẫu số và khử mẫu ta có bất đẳng thức tương đương

$$4\left(x^4 + y^4 + z^4 + x^3 + y^3 + z^3\right) \geq 3\left(1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz\right).$$

Với các kí hiệu đã đưa ra bất đẳng thức tương đương với

$$4\left[(4,0,0)\right]+4\left[(3,0,0)\right]\geq\left[(0,0,0)\right]+3\left[(1,0,0)\right]$$
$$+3\left[(1,1,0)\right]+\left[(1,1,1)\right].$$

Với điều kiện $xyz=1$ ta áp dụng bất đẳng thức Muirhead nhiều lần như sau

$$\left[(4,0,0)\right]\geq\left[\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)\right]=\left[(0,0,0)\right],$$

$$3\left[(4,0,0)\right]\geq 3\left[(2,1,1)\right]=3\left[(1,0,0)\right],$$

$$3\left[(3,0,0)\right]\geq 3\left[\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)\right]=3\left[(1,1,0)\right]$$

và
$$\left[(3,0,0)\right]\geq\left[(1,1,1)\right].$$

Cộng các bất đẳng thức vừa nhận được ta có bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Chú ý 1. Trong bài toán trên đây ta có thể "nới" bớt điều kiện ràng buộc thành điều kiện rộng rãi hơn $xyz\geq 1$. Lúc đó ta có bất đẳng thức

$$\left[(p_1,p_2,p_3)\right]\geq\left[(p_1-r,p_2-r,p_3-r)\right]$$

trong đó $r\geq 0$ bất kì.

Chú ý 2. Theo bất đẳng thức TBC-TBN ta có kết quả sau đây. Cho các bộ n số thực p và q, ta có

$$\frac{[p]+[q]}{2}\geq\left[\frac{p+q}{2}\right].$$

Bài toán 115. Cho $a,b,c,d>0$. Chứng minh

$$\frac{3}{2}\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq ad\sqrt{bc}+bd\sqrt{ac}+cd\sqrt{ab}+bc\sqrt{ad}+ab\sqrt{cd}+ac\sqrt{bd}.$$

Hướng dẫn. Trước hết ta viết bất đẳng thức dưới dạng $\sum_{\text{sym}}a^3\geq\sum_{\text{sym}}ab\sqrt{cd}$, với chú ý rằng a^3 xuất hiện 6 lần bằng cách đổi vai trò từ a sang b, ... ; $ab\sqrt{cd}$ xuất hiện 4 lần sau khi đổi vai trò của c, d. Cuối cùng bất đẳng thức tương đương với

$$6\left[(3,0,0,0)\right] \geq 4\left[\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right].$$

Đó là kết quả của bất đẳng thức Muirhead với 2 bộ số $(3,0,0,0) \succ \left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Bài toán 116. (USAMO 1997) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Sau đây là một cách chứng bài toán nhờ sử dụng bất đẳng thức Muirhead.

Lời giải. Sau khi quy đồng và bỏ mẫu số rồi nhân cho 2 ta có các bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{\text{sym}} \left(a^3+b^3+abc\right)\left(b^3+c^3+abc\right)abc$$

$$\leq 2\left(a^3+b^3+abc\right)\left(b^3+c^3+abc\right)\left(c^3+a^3+abc\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} \left(a^7bc + 3a^4b^4c + 4a^5b^2c^2 + a^3b^3c^3\right)$$

$$\leq \sum_{\text{sym}} \left(a^3b^3c^3 + 2a^6b^3 + 3a^4b^4c + a^7bc + 2a^5b^2c^2\right.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} \left(2a^6b^3 - 2a^5b^2c^2\right) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng này là kết quả của bất đẳng thức Muirhead ứng với 2 bộ số $(6,3,0) \succ (5,2,2)$.

Bài toán 117. (IMO-shorlist, 1990) Cho các số thực a, b, c. Chứng minh

$$\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(c^2+ca+a^2\right) \geq (ab+bc+ca)^2.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Hướng dẫn. Sau khi khai triển hai vế rồi rút gọn ta đưa bất đẳng thức phải chứng minh về dạng

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)-(ab+bc+ca)^2$$
$$=\sum\left(\frac{1}{2}a^4bc+a^4b^2-\frac{1}{2}a^2b^2c^2-a^3b^2c\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Muirhead ứng với hai bộ số $(4,2,0)\succ(2,2,2)$ và $(4,1,1)\succ(3,2,1)$. Từ đó ta có bất đẳng thức phải chứng minh.

3.5. Phương pháp chuẩn hoá

Trong các mục trước, chúng ta biến đổi một bất đẳng thức không thuần nhất thành thuần nhất. Tuy nhiên các bất đẳng thức sau khi đã thuần nhất lại có thể được chuẩn hoá bằng nhiều cách.

3.5.1. Ví dụ

Ví dụ 59. (IMO 2001/2) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

Hướng dẫn. Ta thực hiện phép thế $x=\frac{a}{a+b+c}$, $y=\frac{b}{a+b+c}$, $z=\frac{c}{a+b+c}$.[1]

Bài toán trở thành bài toán chứng minh

$$xf(x^2+8yz)+yf(y^2+8zx)+zf(z^2+8xy)\geq 1,$$

trong đó $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$. Vì hàm số f là hàm số lồi trên $\mathbb{R}^+$ và $x+y+z=1$, nên áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$xf(x^2+8yz)+yf(y^2+8zx)+zf(z^2+8xy)$$

[1] Chia bất đẳng thức cho $a+b+c$ ta được bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyclic}\frac{\frac{a}{a+b+c}}{\sqrt{\frac{a^2}{(a+b+c)^2}+\frac{8bc}{(a+b+c)^2}}}\geq 1.$$

$$\geq f\left(x\left(x^2+8yz\right)+y\left(y^2+8zx\right)+z\left(z^2+8xy\right)\right).$$

Chú ý rằng $f(1)=1$. Mặt khác hàm số f nghịch biến nghiêm cách trên $\mathbb{R}^+$, nên chỉ cần chứng minh

$$1\geq x\left(x^2+8yz\right)+y\left(y^2+8zx\right)+z\left(z^2+8xy\right).$$

Sử dụng điều kiện $x+y+z=1$, ta thuần nhất bất đẳng thức thành bất đẳng thức

$$(x+y+z)^3\geq x\left(x^2+8yz\right)+y\left(y^2+8zx\right)+z\left(z^2+8xy\right).$$

Cuối cùng, bất đẳng thức này suy ngay từ

$$(x+y+z)^3-x\left(x^2+8yz\right)-y\left(y^2+8zx\right)-z\left(z^2+8xy\right)$$

$$=3\left[x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\right]\geq 0.$$

Trong cách giải ví dụ trên đây chúng ta đã chuẩn hoá một bài toán không có điều kiện ràng buộc trở thành bài toán có điều kiện, đó là $x+y+z=1$. Sau đây là một cách chuẩn hoá khác với $xyz=1$.

Hướng dẫn. Ta thực hiện phép thế $x=\frac{bc}{a^2}$, $y=\frac{ca}{b^2}$, $z=\frac{ab}{c^2}$. Lúc đó, ta có $xyz=1$ và bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}\geq 1$$

bất đẳng thức này tương đương với

$$\sum_{\text{cyclic}}\sqrt{(1+8x)(1+8y)}\geq\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}.$$

Bình phương hai vế ta có bất đẳng thức tương đương

$$8(x+y+z)+2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\sum_{\text{cyclic}}\sqrt{1+8x}\geq 510.$$

Biết rằng, $xyz=1$. Bất đẳng thức TBC-TBN cho ta $x+y+z\geq 3$ và

$$(1+8x)(1+8y)(1+8z)\geq 9x^{\frac{8}{9}}.9y^{\frac{8}{9}}.9z^{\frac{8}{9}}=729$$

và $$\sum_{\text{cyclic}} \sqrt{1+8x} \geq \sum_{\text{cyclic}} \sqrt{9x^{\frac{8}{9}}} \geq 9(xyz)^{\frac{4}{27}} = 9.$$

Từ bất đẳng thức trên đây ta có

$$8(x+y+z)+2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}$$

$$\sum_{\text{cyclic}} \sqrt{1+8x} \geq 8\times 3+2\times\sqrt{729}\times 9=510.$$

Ví dụ 60. (IMO 1983/6) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Chứng minh. Sau khi thay thế $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ cho $x, y, z>0$, bất đẳng thức trở thành

$$x^3z+y^3x+z^3y\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2 \text{ hoặc } \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z.$$

Bất đẳng thức này là thuần nhất, vì vậy ta đưa về trường hợp có điều kiện ràng buộc $x+y+z=1$. Lúc đó, bất đẳng thức phải chứng minh là

$$yf\left(\frac{x}{y}\right)+zf\left(\frac{y}{z}\right)+xf\left(\frac{z}{x}\right)\geq 1,$$

trong đó $f(x)=t^2$. Vì f là hàm số lồi trên $\mathbb{R}$, ta áp dụng bất đẳng thức Jensen để được

$$yf\left(\frac{x}{y}\right)+zf\left(\frac{y}{z}\right)+xf\left(\frac{z}{x}\right)\geq f\left(y\cdot\frac{x}{y}+z\cdot\frac{y}{z}+x\cdot\frac{z}{x}\right)=f(1)=1.$$

3.5.2. Bài tập

Bài toán 118. (KMO Winter Program Test 2001) Chứng minh rằng với mọi $a, b, c>0$,

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)}\geq abc$$
$$+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}$$

Lời giải. Chia bất đẳng thức cho abc, ta có bất đẳng thức tương đương

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)} \geq abc+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}.$$

Sau khi thế $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$, ta nhận được điều kiện ràng buộc $xyz=1$. Lúc đó bất đẳng thức phải chứng minh trở thành

$$\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)} \geq 1+\sqrt[3]{\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)}.$$

Từ ràng buộc $xyz=1$, ta có hai đẳng thức

$$\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)=\left(\frac{x+z}{z}\right)\left(\frac{y+x}{x}\right)\left(\frac{z+y}{y}\right)=(z+x)(x+y)(y+z),$$

$$\begin{aligned}(x+y+z)(xy+yz+zx) &= (x+y)(y+z)(z+x)+xyz \\ &= (x+y)(y+z)(z+x)+1.\end{aligned}$$

Đặt $p=\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$, bất đẳng thức tương đương với $\sqrt{p^3+1} \geq 1+p$.

Áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN, ta có

$$p \geq \sqrt[3]{2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}}=2.$$

Suy ra $(p^3+1)-(1+p)^2=p(p+1)(p-2) \geq 0$.

Bài toán 119. (Putnam 03A2) Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số thực không âm. Chứng minh

$$(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}+(b_1b_2\ldots b_n)^{1/n} \leq \left[(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)\right]^{1/n}.$$

Bài toán 120. (IMO 2/1999) Cho n là một số nguyên với $n \geq 2$.

(a) Xác định hằng số nhỏ nhất C sao cho bất đẳng thức

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2\right) \leq C\left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i\right)^4$$

đúng với mọi số thực $x_1, \ldots, x_n \geq 0$.

(b) Với hằng số C này, hãy tìm xem khi nào đẳng thức xảy ra.

Lời giải. **(Marcin E. Kuczma)** Với $x_1 = \ldots = x_n = 0$, bất đẳng thức đúng với mọi $C \geq 0$. Vậy, ta xét trường hợp $x_1 + \ldots + x_n > 0$. Vì bất đẳng thức là thuần nhất, nên ta có thể chuẩn hoá thành $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Ta kí hiệu

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right).$$

Từ giả thiết $x_1 + \ldots + x_n = 1$, ta có

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^3 x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j^3 = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 \sum_{j \neq i} x_i = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 (1 - x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(x_i^2 - x_i^3\right).$$

Ta kết luận $C = \frac{1}{8}$. Vậy chỉ cần chứng minh

$$F(x_1, \ldots, x_n) \leq \frac{1}{8} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right).$$

Đến đây ta phải chứng minh một bổ đề

Bổ đề. $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$ kéo theo $x^2 - x^3 \leq y^2 - y^3$.

Chứng minh bổ đề. Vì $x + y \leq 1$, ta có $x + y \geq (x+y)^2 \geq x^2 + xy + y^2$. Vì $y - x \geq 0$, suy ra $y^2 - x^2 \geq y^3 - x^3$ hay $y^2 - y^3 \geq x^2 - x^3$, đó là bổ đề phải chứng minh.

Ta xét các trường hợp

Trường hợp 1. $\frac{1}{2} \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \left(x_i^2 - x_i^3\right) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8}.$$

Trường hợp 2. $x_1 \geq \frac{1}{2} \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$. Đặt $x_1 = x$ và $y = 1 - x = x_2 + \ldots + x_n$. Vì $y \geq x_2, \ldots, x_n$, do đó

$$F(x_1, \ldots, x_n) = x^3 y + \sum_{i=2}^{n} x_i \left(x_i^2 - x_i^3\right)$$

$$\leq x^3 y + \sum_{i=2}^{n} x_i \left(y^2 - y^3\right) = x^3 y + y\left(y^2 - y^3\right).$$

Vì $x^3 y + y\left(y^2 - y^3\right) = x^3 y + y^3(1-y) = xy\left(x^2 + y^2\right)$, nên chỉ cần chứng minh

$$xy\left(x^2 + y^2\right) \leq \frac{1}{8}.$$

Sử dụng $x + y = 1$, ta chuẩn hoá bất đẳng thức trên đây như sau.

$$xy\left(x^2 + y^2\right) \leq \frac{1}{8}(x+y)^4.$$

Từ đó ta có kết quả $(x+y)^4 - 8xy\left(x^2 + y^2\right) = (x-y)^4 \geq 0$.

Bài toán 121. (IMO-shorlist 1991) Cho n là một số nguyên cho trước với $n \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của tổng

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \left(x_i + x_j\right),$$

trong đó $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ *và* $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

3.6. Phương pháp sử dụng đường thẳng tiếp tuyến

Đây là một phương pháp đơn giản để chứng minh bất đẳng thức liên quan tới các hàm số có đạo hàm.

3.6.1. Ví dụ

Ví dụ 61. Cho a, b, c, d là các số thực dương sao cho $a + b + c + d = 1$. Chứng minh

$$6\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right) \geq \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) + \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. Từ giả thiết ta suy ra $a, b, c, d \in (0\,;1)$. Đặt $f(x) = 6x^3 - x^2$. Lúc đó bất đẳng thức trở thành

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{1}{8}.$$

Ta biết bất đẳng thức đã cho trở thành đẳng thức khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. Vì vậy ta tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{4}$ và tung độ $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{32}$. Phương trình của tiếp tuyến đó là

$$y = f'\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(x - \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(18 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) \times$$

$$\times \left(x - \frac{1}{4}\right) + 6\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5x - 1}{8}.$$

Vậy đồ thị hàm số có tiếp tuyến tại điểm $M\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{32}\right)$ là $y = \frac{5x-1}{8}$. Bằng cách vẽ đồ thị hàm số ta nhận thấy tiếp tuyến tại M ở dưới đồ thị hàm số. Vậy ta có $f(x) \geq \frac{5x-1}{8} \Leftrightarrow 6x^3 - x^2 \geq \frac{5x-1}{8}$. Bất đẳng thức này tương đương với

$$48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0.$$

Điều này hiển nhiên vì

$$48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 = (4x - 1)^2 (3x + 1) \geq 0$$

với mọi $x \in (0\,;1)$. Cuối cùng ta có

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{5a + 5b + 5c + 5d - 4}{8} = \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 62. (USAMO 2003) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Chứng minh. Bằng cách sử dụng phép thế $a'=a(a+b+c)$, $b'=b(a+b+c)$, $c'=c(a+b+c)$ ta có thể giả sử $0<a\le b\le c<1$ và $a+b+c=1$ mà không làm mất tính tổng quát của bài toán. Ngoài ra ta đặt hàm số

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2}=\frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1} \text{ với } 0<x<1.$$

Lúc đó bất đẳng thức phải chứng minh có dạng

$$f(a)+f(b)+f(c)\le 8.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ và $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3}$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm $M\left(\frac{1}{3},\frac{16}{3}\right)$ là

$$y=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{16}{3},$$

hay

$$y=\frac{12x+4}{3}.$$

Bằng trực quan hình học ta thấy đồ thị hàm số ở dưới tiếp tuyến. Vậy

$$f(x)\le\frac{12x+4}{3} \text{ với mọi } x\in(0,1).$$

Ta có thể kiểm chứng bất đẳng thức này như sau

$$\frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1}\le\frac{12x+4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 36x^3-15x^2-2x+1\ge 0\Leftrightarrow (3x-1)^2(4x+1)\ge 0 \text{ với mọi } x\in(0,1).$$

Bất đẳng thức cuối cùng này là hiển nhiên. Vậy

$$f(a) \le \frac{12a+4}{3},$$

$$f(b) \le \frac{12b+4}{3},$$

$$f(c) \le \frac{12c+4}{3}.$$

Suy ra $f(a)+f(b)+f(c) \le \dfrac{12(a+b+c)+12}{3} = 8.$

Đó chính là bất đẳng thức phải chứng minh.

3.6.2. Bài tập

Bài toán 122. (JAPAN 1997) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} \ge \frac{3}{5}.$$

Bất đẳng thức khi nào trở thành đẳng thức ?

Chứng minh.

Giống như trong ví dụ trên đây ta có thể giả sử $0 < a, b, c < 1$ và $a+b+c=1$. Lúc đó hạng tử đầu tiên của vế trái có thể viết là

$$\frac{(1-2a)^2}{(1-a)^2+a^2} = 1 - \frac{2}{1+(1-2a)^2}.$$

Đặt $x = 1-2a,\ y = 1-2b,\ z = 1-2c$ thì $x+y+z=1$ và $-1 < x, y, z < 1$. Lúc đó bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \le \frac{27}{10}.$$

Trước hết ta có nhận xét khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ thì đẳng thức xảy ra. Ta đặt hàm số

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \text{ với } -1 < t < 1.$$

Lúc đó bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$f(x)+f(y)+f(z)\le\frac{27}{10}.$$

Mặt khác phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ với $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{10}$ là

$$y=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{10}=-\frac{2\times\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}}\left(t-\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{10}=\frac{-27t+54}{50}.$$

Bằng trực quan hình học (đồ thị của hàm số) ta nhận thấy đồ thị ở phía dưới tiếp tuyến. Vì vậy ta chỉ cần kiểm tra bất đẳng thức $f(t)\le\frac{-27t+54}{50}$.

Đó chính là bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+t^2}\le\frac{-27t+54}{50}\Leftrightarrow(3t-1)^2(4-3t)\ge 0 \text{ với mọi } t\in(-1,1).$$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên. Vậy ta có

$$f(x)\le\frac{-27x+54}{50},$$

$$f(y)\le\frac{-27y+54}{50},$$

$$f(z)\le\frac{-27z+54}{50}.$$

Cuối cùng ta có

$$f(x)+f(y)+f(z)\le\frac{-27(x+y+z)+162}{50}=\frac{27}{10}.$$

Đó là bất đẳng thức phải chứng minh. Hiển nhiên đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ tức là khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài toán 123. **(Thi chọn đội tuyển IMO của Trung Quốc, 1999)** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$a_1^4+\cdots+a_n^4-a_1^5\cdots-a_1^5,$$

trong đó $a_1,\ldots,a_n$ là các số không âm thoả mãn

$$a_1+\cdots+a_n=1.$$

3.7. Phương pháp sử dụng tính chất của đoạn thẳng

3.7.1. Định lí – Ví dụ

Định lí 3.7.1. Cho hàm số bậc nhất $f(x)=ax+b$. Nếu tồn tại hai số thực $\alpha<\beta$ sao cho $f(\alpha)\geq 0$ và $f(\beta)\geq 0$ thì $f(x)\geq 0$ với mọi $x\leq(\alpha\,;\,\beta)$.

Chứng minh. Vì $f(x)$ là hàm số bậc nhất nên đồ thị của $f(x)$ là một đường thẳng. Từ tính chất của đoạn thẳng : "nếu hai đầu mút của đoạn thẳng là hai điểm $(\alpha,\, f(\alpha))$ và $(\beta,\, f(\beta))$ ở phía trên trục hoành Ox thì đoạn thẳng đó hoàn toàn ở trên trục đó" suy ra $f(x)\geq 0\ \forall x\in(\alpha,\,\beta)$.

Ví dụ 63. Cho x, y và z là các số thực không âm sao cho $x+y+z=3$.

Chứng minh

$$x^2+y^2+z^2+xyz\geq 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chứng minh. **(Phạm Văn Thuận và Triệu Văn Hưng – Mathemat – ical reflections 4 (2006))** Ta viết bất đẳng thức phải minh dưới dạng

$$(y+z)^2-2yz+x^2+xyz\geq 4$$

hay
$$(3-x)^2-2yz+x^2+xyz\geq 4.$$

Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức

$$(x-2)yz+2x^2-6x+5\geq 4.$$

Đặt $yz=t$ và vế trái của bất đẳng thức trên là hàm số

$$f(t)=(x-2)t+2x^2-6x+5,$$

thì $f(t)$ là hàm bậc nhất theo t. Theo bất đẳng thức TBC-TBN ta có

$$t = yz \le \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(3-x)^2}{4}.$$

Ta đặt $t_0 = \dfrac{(3-x)^2}{4}$ thì $0 \le t \le t_0$. Vậy theo định lí trên đây để chứng minh bất đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh $f(0) \ge 0$ và $f(t_0) \ge 0$. Điều này được suy ra dễ dàng từ

$$f(0) = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0,$$

và

$$f(t_0) = \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2) \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

3.7.2. Bài tập

Bài toán 124. **((Mihai Piticari, Dan Popescu, Old and New Inequalities))** Cho a, b và c là các số thực dương sao cho $a+b+c=1$.

Chứng minh

$$5\left(a^2+b^2+c^2\right) \le 6\left(a^3+b^3+c^3\right)+1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Sử dụng đẳng thức $(b+c)^3 - 3bc(b+c) = b^3 + c^3$ ta đưa bất đẳng thức phải chứng minh về dạng

$$5\left(a^2+(b+c)^2-2bc\right) \le \left(a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)\right)+1.$$

Sau khi rút gọn ta có bất đẳng thức mới tương đương với bất đẳng thức phải chứng minh

$$f(t) = (9a-4)t + (2a-1)^2 \ge 0.$$

Ta phải tìm tập xác định của hàm số bậc nhất $f(t)$. Ta có $t \ge 0$ ngoài ra theo bất đẳng thức TBC-TBN

$$t = bc \le \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{(1-a)^2}{4}.$$

Vậy $0 \le t \le t_0$ trong đó $t_0 = \frac{(1-a)^2}{4}$. Theo định lí 3.7.1 để chứng minh bất đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh $f(0) \ge 0$ và $f(t_0) \ge 0$. Điều này dễ dàng vì $f(0) = (2a-1)^2 \ge 0$ và $f(t_0 = \frac{1}{4}a(3a-1)^2 \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài toán 125. **(BMO 1979)** Cho x, y và z là các số thực dương sao cho $x + y + z = 1$. Chứng minh

$$7(xy + yz + zx) \le 2 + 9xyz.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] K. S. Kedlaya, $A < B$, http://www.unl.edu/amc/a-activities/a4-for-students/s-index.html

[2] Ilan Vardi, Solutions to the year 2000 International Mathematical Olympiad

http://www/lix.polytechnique.fr/Labo/Ilan.Vardi/publications.html

[3] Ji Chen, Problem 1663, Crux Mathematicorum 18(1992), 188-189.

[4] J. M. Habeb, M. Hajja, A Note on Trigonometric Identities, Expositiones Mathematicae 21(2003), 285-290.

[5] Kin Y. Li, Majorization Inequality, Mathematical Excalibur, (5) 5 (2000), 2-4.

[6] Kin Y. Li, Using Tangent Lines to Prove Inequalities, Mathematical Excalibur, (10) 5 (2005),1.

[7] Kin Y. Li, Schur's Inequality, Mathematical Excalibur, (10) 5 (2005), 2-4.

[8] Kin Y. Li, Muirhead's Inequality, Mathematical Excalibur, (11) 1 (2006), 2-4.

[9] Kee-Wai Liu, Problem 2186, Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, 23 (1997), 71-72.

[10] Hojoo Lee, Inequalities through Problems

http://myhome.naver.com/hijoolee/orange.html

[11] Hojjo Lee, Topics in Inequalities - Theorems and techniques.

[12] L. Carlitz, An Inequality Involving the Area of Two Triangles, Amer. Math. Monthly 78 (1971), 772.

[13] L. Carlitz, Some Inequalities for Two Triangles, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 910.

[14] M. Cipu, Problem 2172, Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, 23 (1997), 439-440.

[15] Marcin E. Kuczma, Problem 1940, Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, 23 (1997), 170-171.

[16] Marcin E. Kuczma, Problem 1703, Crux Mathematicorum 18 (1992), 313-314.

[17] T. J. Mildorf, Olympiad Inequalities

http://web.mit.edu/tmildorf/www

[18] A note on convexity, Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, 23 (1997), 482-483.

[19] T. Andreescu, V. Cirtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, Old and New Inequalities.

[20] Phan Huy Khải, 10.000 bài toán sơ cấp – Bất đẳng thức, NXB Hà Nội (1198).

[21] Phạm Văn Thuận và Triệu Văn Hưng, Mathematical reflections 4 (2006).

[22] K. Wu, Andy Liu, The Rearrangement Inequality.

[23] T.J. Mildorf, Olympiad Inequalities

http://web.mit.edu/tmildorf/www/

[24] Tạp chí Toán học tuổi trẻ, Việt Nam.

MỤC LỤC