KHAI THÁC KHÁI NIỆM ĐỒ THỊ HÀM SỐ LỒI, LÕM ĐỂ ĐÁNH GIÁ BẤT ĐẲNG THỨC

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Ứng dụng hàm lồi để đánh giá bất đẳng thức (BĐT) đã được khai thác nhiều và đại diện cho ứng dụng đó là BĐT Jensen. Khái niệm hàm lồi trong chương trình SGK cũ và mới (bài đọc thêm) được định nghĩa dựa vào vị trí nằm trên, nằm dưới của tiếp tuyến với đồ thị hàm số. Trong định nghĩa đó, đã cho ta một tính chất hình học của tiếp tuyến. Đó là: ta có thể đánh giá $f(x)$ thông qua một biểu thức bậc nhất của x. Vận dụng tính chất này, ta có thể tìm được lời giải đơn giản cho một số bài toán chứng minh BĐT. Hơn nữa thông qua đó để chúng ta thấy được việc dạy cho HS ***Bản chất của các khái niệm Toán học*** rất quan trọng trong phát triển tư duy cho học sinh. Đó là lí do mà tôi chọn đề tài "***Khai thác khái niệm đồ thị hàm số lồi, lõm để đánh giá BĐT***"

II. THỰC TRẠNG TRƯỚC KHI THỰC HIỆN CÁC GIẢI PHÁP CỦA ĐỀ TÀI:

1. Thuận lợi:

- Với sự đổi mới phương pháp dạy học trung học phổ thông lấy học sinh làm trung tâm và tạo sự hứng thú trong học tập. Học sinh chủ động chiếm lĩnh tri thức. Do đó, việc dạy cho học sinh nắm được bản chất của một khái niệm Toán học hết sức quan trọng

2. Khó khăn:

- Khi dạy khái niệm Toán học giáo viên chưa chú trọng nhiều vào việc dạy cho học sinh nắm được bản chất của khái niệm mà chủ yếu tập trung vào việc khảo sát các đối tướng có thuộc về khái niệm đó hay không?. Do đó học sinh cũng ít quan tâm đến bản chất cảu khái niệm đã học nên một phần nào đó hạn chế việc phát triển tư duy cũng như sự hứng thú trong học tập.

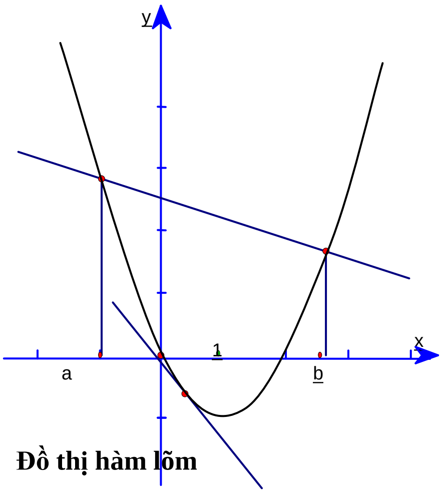
III. NỘI DUNG ĐỀ TÀI

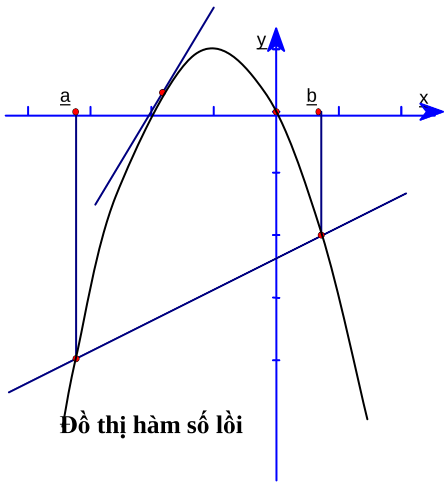
1. Cơ sở lí thuyết.

a. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục $[a;b]$ và có đồ thị là (C). Khi đó ta có hai điểm $A(a;f(a))$, $B(b;f(b))$ nằm trên đồ thị (C).

i) Đồ thị (C) gọi là lồi trên $(a;b)$ nếu tiếp tuyến tại mọi điểm nằm trên cung AB luôn nằm phía trên đồ thị (C).

ii) Đồ thị (C) gọi là lõm trên $(a;b)$ nếu tiếp tuyến tại mọi điểm nằm trên cung AB luôn nằm phía dưới đồ thị (C).





b. Dấu hiệu đồ thị lồi

Định lí 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\left(a;b\right)$

* Nếu $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \left(a;b\right)$ thì đồ thị hàm số lõm trên $(a;b)$

* Nếu $f''(x) < 0 \quad \forall x \in \left(a;b\right)$ thì đồ thị hàm số lồi trên $\left(a;b\right)$

c. Ứng dụng

Từ hình ảnh trực quan của định nghĩa cho ta một *phương pháp* giải các bài toán BĐT và cực trị sau :

Định lí 2: ***(Bất đẳng thức tiếp tuyến)***

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trên $[a;b]$.

i) Nếu $f''(x) \ge 0\ \forall x \in [a;b]$ thì $f(x) \ge f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \forall x_0 \in [a;b]$

ii) Nếu $f''(x) \le 0\ \forall x \in [a;b]$ thì $f(x) \le f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \forall x_0 \in [a;b]$

Đẳng thức trong hai Bất đẳng thức trên xảy ra $\Leftrightarrow x = x_0$.

Ta có thể chứng minh định lí trên như sau

i) Xét hàm số $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$, $x \in [a;b]$

Ta có : $g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \Rightarrow g''(x) = f''(x) \ge 0\ \ \forall x \in [a;b]$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ và $g'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi x qua x_0 nên ta có :

$g(x) \ge g(x_0) = 0\ \ \forall x \in [a;b]$.

ii) Chứng minh tương tự.

Định lí 3: ***(Bất đẳng thức cát tuyến)***

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trên $[a;b]$.

i) Nếu $f''(x) \ge 0\ \forall x \in [a;b]$ thì $f(x) \ge \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a) + f(a) \quad \forall x_0 \in [a;b]$

ii) Nếu $f''(x) \le 0\ \forall x \in [a;b]$ thì $f(x) \le \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a) + f(a) \quad \forall x_0 \in [a;b]$.

Đẳng thức trong các BĐT trên có khi và chỉ khi $x = a$ hoặc $x = b$.

2. Nội dung, biện pháp thực hiện giải pháp của đề tài:

Ví dụ 1: Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} \le \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Giải: Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ với $x \in (0;1)$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} \Rightarrow f''(x) = -\dfrac{3x}{\sqrt{(x^2 + 1)^5}} < 0\ \ \forall x \in (0;1)$

Nên ta có: $f(a) \le f'(\frac{1}{3})(a - \frac{1}{3}) + f(\frac{1}{3})$

$$f(b) \le f'(\frac{1}{3})(b-\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{3})$$

$$f(c) \le f'(\frac{1}{3})(c-\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{3})$$

Suy ra : $f(a)+f(b)+f(c) \le f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(a+b+c-1\right)+3f(\frac{1}{3}) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2 : Cho các số thực dương a,b,c thỏa : $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b}} \ge 1.$$

Giải :

Xét hàm số : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+8a}}$, $0<a\le\sqrt{3}$. Ta có :

$$f'(x) = -\frac{4}{\sqrt{(1+8x)^3}} \Rightarrow f''(x)=\frac{48}{\sqrt{(1+8x)^5}}>0 \quad \forall x\in(-\frac{1}{8};\sqrt{3}]$$

Nên ta có : $f(a)\ge f'(1)(a-1)+f(1)$

$$f(b)\ge f'(1)(b-1)+f(1)$$

$$f(c)\ge f'(1)(c-1)+f(1)$$

$\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\ge f'(1)(a+b+c-3)+3f(1)$ (*)

Mặt khác : $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)=9$

$\Rightarrow -3\le a+b+c\le 3 \Rightarrow a+b+c-3\le 0$ và $f'(1)=-\frac{4}{27}<0$ nên từ (*)

Ta suy ra : $f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f(1)=1$.

Nhận xét : Dấu hiệu giúp chúng ta nhận ra phương pháp trên là BĐT cần chứng minh có dạng

$f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)\ge k$ hoặc $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)\le k$, trong đó a_i $(i=1,..,n)$ là các số thực cho trước. Trong một số trường hợp BĐT chưa có dạng trên, ta phải thực hiện một số phép biến đổi mới đưa về dạng trên.Chúng ta cần chú ý một số dấu hiệu sau.

- Nếu BĐT có dạng $f(a_1).f(a_2)...f(a_n) \ge k$ thì ta lấy loganepe hai vế
- Nếu BĐT cần chứng minh đồng bậc thì ta có thể chuẩn hóa. Tùy thuộc vào từng bài toán mà ta lựa chọn cách chuẩn hóa phù hợp.

Ví dụ 3 : Cho các số thực dương a,b,c thỏa : $a+b+c=3$. Tìm GTLN của biểu thức :

$$P=\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)^b\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)^c\left(c+\sqrt{1+c^2}\right)^a.$$

Giải :

Ta có : $\ln P = b\ln(a+\sqrt{1+a^2})+c\ln\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)+a\ln\left(c+\sqrt{1+c^2}\right)$

Xét hàm số : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\quad 0<x<1$. Ta có :

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f''(x)=\frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}<0 \quad \forall x\in(0;1)$$

Suy ra : $f(a)\le f'(1)\left(a-1\right)+f(1)=f'(1)a+f(1)-f'(1)$

$\Rightarrow bf(a)\le f'(1)ab+\left[f(1)-f'(1)\right]b$

$cf(b)\le f'(1)cb+\left[f(1)-f'(1)\right]c$

$af(c)\le f'(1)ac+\left[f(1)-f'(1)\right]a$.

$\Rightarrow \ln P\le f'(1)\left(ab+bc+ca-(a+b+c)\right)+f(1)(a+b+c)\le 3\ln(1+\sqrt{2})$

(Do $ab+bc+ca\le 3=a+b+c$)

Nên $\Rightarrow \ln P\le 3\ln(1+\sqrt{2})\Rightarrow P\le(1+\sqrt{2})^3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$. Vậy GTLN của $P=(1+\sqrt{2})^3$.

Ví dụ 4 : Cho $x,y>0$ thỏa $x+y+z=1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=x^{-y}+y^{-z}+z^{-x}.$$

Giải : Áp dụng BĐT Cô si, ta có : $P \ge \frac{3}{\sqrt[3]{x^y.y^z.z^x}}$

Đặt $A = x^y.y^z.z^x \Rightarrow \ln A = y\ln x + z\ln y + x\ln z$. Vì hàm số $f(t) = \ln t$ có

$f''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$

$\Rightarrow \ln x \le f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f(\frac{1}{3}) = 3x - 1 - \ln 3$

$\Rightarrow \ln A \le y(3x - 1 - \ln 3) + z(3y - 1 - \ln 3) + x(3z - 1 - \ln 3)$

$= 3(xy + yz + zx) - 1 - 3\ln 3 \le (x + y + z)^2 - 1 - 3\ln 3 = -3\ln 3$

$\Rightarrow A \le \frac{1}{3} \Rightarrow P \ge 3\sqrt[3]{3}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Vậy GTNN của $P = 3\sqrt[3]{3}$.

Ví dụ 5 : Cho $a, b, c \ge \frac{1}{2}$ thỏa $a + b + c = 2$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = a^a + b^b + c^c.$$

Giải :

Xét hàm số $f(t) = t^t, \quad \frac{1}{2} \le t \le 1$. Ta có : $\ln f(t) = t\ln t$ lấy đạo hàm hai vế ta được

$f'(t) = (1 + \ln t)f(t) \Rightarrow \ln f'(t) = \ln f(t) + \ln\left(\ln t + 1\right)$

$\Rightarrow \frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{1}{t(\ln t + 1)} = 1 + \ln t + \frac{1}{t(\ln t + 1)}$

$\Rightarrow f''(t) = (1 + \ln t)f(t)\left[1 + \ln t + \frac{1}{t(1 + \ln t)}\right] > 0 \quad \forall t \in [\frac{1}{2}; 1]$

Vì $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ nên áp dụng BĐT tiếp tuyến, ta có :

$f(a) \ge f'(\frac{2}{3})(a - \frac{2}{3}) + f(\frac{2}{3})$

$f(b) \ge f'(\frac{2}{3})(b - \frac{2}{3}) + f(\frac{2}{3})$

$f(c) \geq f'(\frac{2}{3})(c-\frac{2}{3})+f(\frac{2}{3})$

Cộng ba BĐT trên ta có : $f(a)+f(b)+f(c) \geq f'(\frac{2}{3})\left(a+b+c-2\right)+3f(\frac{2}{3})=3\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

Vậy GTNN của $P=3\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ đạt được $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{2}{3}$.

Ví dụ 6 : Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

(Trích đề thi Albania 2002)

Lời giải. Vì BĐT đã cho thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh Bđt đúng với mọi số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$, khi đó bđt cần chứng minh trở thành:

$f(a)+f(b)+f(c) \geq 1$ trong đó:

$f(x)=\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.\frac{1}{x}-x$ với $0<x<1$. Dễ thấy hàm số f có $f''(x)>0\ \forall x \in (0;1)$

Nên theo BĐT tiếp tuyến ta có :

$$f(a)+f(b)+f(c) \geq f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(a+b+c-\sqrt{3})+3f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Do $\begin{cases} f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<0 \\ a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow f(a)+f(b)+f(c) \geq 3f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1.$

Ví dụ 7: Cho n số thực $x_1,x_2,...,x_n$ thuộc khoảng $(0;\frac{\pi}{2})$ thỏa :

$\tan x_1+\tan x_2+...+\tan x_n \leq n$. Chứng minh : $\sin x_1.\sin x_2...\sin x_n \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}}$.

Giải :

Đặt $a_i=\tan x_i \quad (i=1,2,...,n) \Rightarrow a_i>0 \quad i=1,2,...,n$ và $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n$

Ta cần chứng minh : $\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{1+a_i^2}} \le \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ (1).

Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x>0$ có $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \Rightarrow f''(x)<0\ \forall x>0$.

$\Rightarrow f(x)\le f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{1}{\sqrt{2^3}}(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+1)$.

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{1+a_i^2}}=\prod_{i=1}^{n}f(a_i)\le\frac{1}{\sqrt{8^n}}\prod_{i=1}^{n}(a_i+1)\le\frac{1}{\sqrt{8^n}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+1)}{n}\right)^n\le\frac{2^n}{\sqrt{8^n}}=\frac{1}{\sqrt{2^n}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n=1 \Leftrightarrow \tan x_1=\tan x_2=...=\tan x_n=1$

$\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n=\frac{\pi}{4}$.

Nhận xét : Qua các ví dụ trên, ta có được kết quả tổng quát sau

Định lí 4 : Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\left[a;b\right]$ và n số $a_1,a_2,...,a_n$ nằm trong đoạn $\left[a;b\right]$ thỏa mãn : $\sum_{i=1}^{n}a_i=k,\ na\le k\le nb$.

- Nếu $f''(x)>0\ \ \forall x\in\left[a;b\right]$ thì ta có : $\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\ge nf(\frac{k}{n})$
- Nếu $f''(x)<0\ \forall x\in\left[a;b\right]$ thì ta có : $\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\le\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC có một góc không nhỏ hơn $\frac{2\pi}{3}$. Chứng minh rằng :

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge 4-\sqrt{3}.$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $A \ge \frac{2\pi}{3} > B \ge C \Rightarrow C \le \frac{\pi}{6}$.

Hàm số $f(x) = \tan x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ có $f''(x) > 0 \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$. Áp dụng BĐT tiếp tuyến, ta có

$$f(\frac{A}{2}) \ge f'(\frac{\pi}{3})(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{3}) + f(\frac{\pi}{3})$$

$$f(\frac{B}{2}) \ge f'(\frac{\pi}{12})(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{12}) + f(\frac{\pi}{12})$$

$$f(\frac{C}{2}) \ge f'(\frac{\pi}{12})(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{12}) + f(\frac{\pi}{12}).$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \ge \left[f'(\frac{\pi}{3}) - f'(\frac{\pi}{12})\right]\left(\frac{A}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) + f'(\frac{\pi}{12})\left(\frac{A+B+C}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Do $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0; \frac{A}{2} - \frac{\pi}{3} \ge 0$ và $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$ nên ta có :

$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \ge f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4 - \sqrt{3}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = \frac{2\pi}{3}; B = C = \frac{\pi}{6}$ và các hoán vị.

Ví dụ 9. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa $\max\{a,b,c\} \ge \frac{3}{4}$ và $a+b+c=1$. Tìm GTNN của biểu thức : $P = \sqrt[3]{1+3a^2} + \sqrt[3]{1+3b^2} + \sqrt[3]{1+3c^2}$.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = \max\{a,b,c\} \Rightarrow a \ge \frac{3}{4}, c \le \frac{1}{8}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1+3x^2}$, $x \in (0;1)$ có $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{(1+3x^2)^2}}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{2-2x^2}{\sqrt[3]{(1+3x^2)^5}} > 0 \ \ \forall x \in (0;1)$. Áp dụng BĐT tiếp tuyến, ta có :

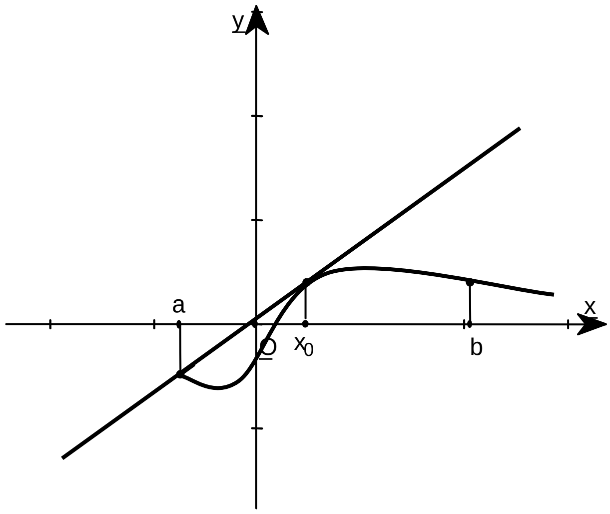
$f(a) \ge f'(\frac{3}{4})(a-\frac{3}{4})+f(\frac{3}{4})$; $f(b) \ge f'(\frac{1}{8})(b-\frac{1}{8})+f(\frac{1}{8})$; $f(c) \ge f'(\frac{1}{8})(c-\frac{1}{8})+f(\frac{1}{8})$

$$\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c) \ge \left[f'(\frac{3}{4})-f'(\frac{1}{8})\right](x-\frac{3}{4})+f(\frac{3}{4})+2f(\frac{1}{8}) \ge f(\frac{3}{4})+2f(\frac{1}{8})=\frac{\sqrt[3]{172}+2\sqrt[3]{67}}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=\frac{3}{4};b=c=\frac{1}{8}$ và các hoán vị.

Vậy $\min P=\frac{\sqrt[3]{172}+2\sqrt[3]{67}}{4}$.

Nhận xét : Trong một số trường hợp đồ thị hàm số $y=f(x)$ có khoảng lồi, lõm trên $\left[a;b\right]$ nhưng ta vẫn có được đánh giá : $f(x) \ge f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\quad ,x_0 \in (a;b)$. Chẳng hạn các bạn xem đồ thị minh họa dưới đây.



Ví dụ 10: Cho $a,b,c \in \mathbb{R}$ và $a+b+c=6$. Chứng minh rằng :

$$a^4+b^4+c^4 \ge 2(a^3+b^3+c^3).$$

Lời giải:

BĐT đã cho $\Leftrightarrow (a^4-2a^3)+(b^4-2b^3)+(c^4-2c^3) \ge 0 \Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c) \ge 0$

Trong đó $f(x)=x^4-2x^3$. Ta thấy $f''(x)=12x^2-12x$ nên đồ thị hàm số f có khoảng lồi và khoảng lõm do đó ta không thể áp dụng BĐT tiếp tuyến được. Tuy nhiên ta vẫn có thể đánh giá được $f(x)$ qua tiếp tuyến của nó tại điểm có hoành độ $x=2$ (vì đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=2$)

Ta có tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $y=f(x)$ điểm có hoành độ $x=2$ là: $y=8x-16$.

$f(x)-(8x-16)=x^4-2x^3-8x+16=(x-2)^2(x^2-2x+4)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\geq 8(a+b+c)-48=0$ (đpcm).

Chú ý. Vì $y=8x-16$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=x^4-2x^3$ tại điểm có hoành độ $x=2$ nên ta có sự phân tích: $f\left(x\right)-\left(8x-16\right)=\left(x-2\right)^k g\left(x\right)$ với $k\geq 2$ và $g(2)\neq 0$.

Ví dụ 11: Cho $a,b,c\geq -\frac{3}{4}$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{9}{10}$$. ***(Vô địch Toán Ba Lan 1996)***

Lời giải.

Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ và Bđt đã cho có dạng:

$f(a)+f(b)+f(c)\leq\frac{9}{10}$ trong đó $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ với $x\in[-\frac{3}{4};\frac{5}{2}]$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=\frac{1}{3}$ là : $y=\frac{36x+3}{50}$.

Ta có: $\frac{36x+3}{50}-f(x)=\frac{36x+3}{50}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(x^2+1)}\geq 0\ \forall x\in[-\frac{3}{4};\frac{5}{2}]$

Vậy : $\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{36(a+b+c)+9}{50}=\frac{9}{10}$ đpcm.

Ví dụ 12 : Cho các số thực $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh :

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\geq\frac{9}{10}.$$

Lời giải. Ta có :

$bc \le (\frac{b+c}{2})^2 = (\frac{1-a}{2})^2;\ ca \le (\frac{a+c}{2})^2 = (\frac{1-b}{2})^2;\ ab \le (\frac{b+a}{2})^2 = (\frac{1-c}{2})^2$ nên

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab} \ge \frac{4a}{a^2-2a+5}+\frac{4b}{b^2-2b+5}+\frac{4c}{c^2-2c+5} = f(a)+f(b)+f(c).$$

(***Nhận xét :*** Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=\frac{4x}{x^2-2x+5}$ tại điểm có hoành độ $x=\frac{1}{3}$ là : $y=\frac{99x-3}{100}$)

Mặt khác: $\frac{4x}{x^2-2x+5}-\frac{99x-3}{100}=\frac{(3x-1)^2(15-11x)}{100(x^2-2x+5)} \ge 0\ \forall x \in (0;1)$

$\Rightarrow \frac{4a}{a^2-2a+5}+\frac{4b}{b^2-2b+5}+\frac{4c}{c^2-2c+5} \ge \frac{99(a+b+c)-9}{100}=\frac{9}{10}$ đpcm.

Ví dụ 13. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c} \ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

Lời giải. Không làm mất tính tổng quát ta giả sử $a+b+c=1$, khi đó Bđt đã cho trở thành $\frac{5a-1}{a-a^2}+\frac{5a-1}{b-b^2}+\frac{5c-1}{c-c^2} \le 9$.

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác và $a+b+c=1$ suy ra $a,b,c \in (0;\frac{1}{2})$.

Ta có : $\frac{5a-1}{a-a^2}-(18a-3)=\frac{(3a-1)^2(2a-1)}{a-a^2} \le 0\quad \forall a \in (0;\frac{1}{2})$

$\Rightarrow\ \frac{5a-1}{a-a^2} \le 18a-3\quad \forall a \in (0;\frac{1}{2})$.

Ta cũng có hai Bđt tương tự. Cộng các Bđt này lại với nhau ta có:

$\frac{5a-1}{a-a^2}+\frac{5a-1}{b-b^2}+\frac{5c-1}{c-c^2} \le 18(a+b+c)-9=9$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 14. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}.$$

(Olympic Toán Nhật Bản 1997)

Lời giải . Vì Bđt cần chứng minh là thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh Bđt đúng với mọi số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Khi đó Bđt đã cho trở thành:

$$\frac{(1-2a)^2}{(1-a)^2+a^2}+\frac{(1-2b)^2}{(1-b)^2+b^2}+\frac{(1-2c)^2}{(1-c)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4a^2-4a+1}{2a^2-2a+1}+\frac{4b^2-4b+1}{2b^2-2b+1}+\frac{4c^2-4c+1}{2c^2-2c+1}\ge\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2a^2-2a+1}+\frac{1}{2b^2-2b+1}+\frac{1}{2c^2-2c+1}\le\frac{27}{5}$$

$$\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{27}{5}.$$

Trong đó $f(x)=\frac{1}{2x^2-2x+1}$ với $x\in(0;1)$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=\frac{1}{3}$ là : $y=\frac{54x+27}{25}$

Ta có: $\frac{54x+27}{25}-f(x)=\frac{2(54x^3-27x^2+1)}{25(2x^2-2x+1)}=\frac{2(3x-1)^2(6x+1)}{25(2x^2-2x+1)}\ge 0\ \forall x\in(0;1)$

$$\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{54(a+b+c)+81}{25}=\frac{27}{5}\quad \text{đpcm.}$$

Trong các ví dụ trên ta chỉ xét các BĐT đối xứng ba biến và đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau. Phần tiếp theo ta sẽ đi xét một số BĐT không đối xứng hoặc BĐT đối xứng nhưng đẳng thức xảy ra khi có ít nhất hai biến không bằng nhau.

Ví dụ 15: Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\ge 1$$ (***Trung Quốc 2005***).

Lời giải: Giả sử $a\ge b\ge c$.

Xét hàm số $f(x)=10x^3-9x^4,\ x\in(0;1)$ có $f'(x)=30x^2-45x^4 \Rightarrow f''(x)=60x-180x^3$

$\Rightarrow f''(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0=\sqrt{\frac{1}{3}}$ đồng thời $f''(x)>0\quad \forall x\in(0;x_0)$ và $f''(x)<0\quad \forall x\in(x_0;1)$.

- Nếu $a<x_0$. Áp dụng BĐT tiếp tuyến ,ta có:

$$f(a)\ge f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(b)\ge f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(c)\ge f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\ge f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(a+b+c-1\right)+3f\left(\frac{1}{3}\right)=1.$$

- Nếu $a>x_0$. Áp dụng BĐT tiếp tuyến và cát tuyến ta có:

$$f(a)\ge \frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}\left(a-1\right)+f\left(1\right)>f(1)=1.$$

$$f(b)\ge f'\left(0\right)\left(b-0\right)+f\left(0\right)=0$$

$$f(c)\ge f'\left(0\right)\left(c-0\right)+f\left(0\right)=0$$

$$\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)>1.$$

Ví dụ 16: Cho ΔABC nhọn. Tìm GTLN của biểu thức: $F=\sin A.\sin^2 B.\sin^2 C$.

Lời giải:

Ta có : $\ln F=\ln\sin A+2\ln\sin B+3\ln\sin C$

Xét hàm số $f(x)=\ln\sin x,\ x\in(0;\frac{\pi}{2})\Rightarrow f'(x)=\cot x\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}\quad \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Áp dụng BĐT tiếp tuyến với ΔMNP nhọn, ta có :

$f(A) \le f'(M)\left(A - M\right) + f(M) = \left(A - M\right)\cot M + \ln \sin M$

$f(B) \le f'(N)\left(B - N\right) + f(N) = \left(B - N\right)\cot N + \ln \sin N$

$f(C) \le f'(P)\left(C - P\right) + f(P) = \left(C - P\right)\cot P + \ln \sin P$

$\Rightarrow \tan M.f(A) + \tan N.f(B) + \tan P.f(C) \ge \tan M \ln \sin M + \tan N.\ln \sin N + \tan P.\ln \sin P$

Chọn ba góc M, N, P sao cho :

$\frac{\tan M}{1} = \frac{\tan N}{2} = \frac{\tan P}{3} = k \Rightarrow \tan M = k; \tan N = 2k; \tan P = 3k$

Mặt khác : $\tan M + \tan N + \tan P = \tan M.\tan N.\tan P$

$\Rightarrow 6k = 6k^3 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \sin M = \frac{\tan M}{\sqrt{1 + \tan^2 M}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sin N = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin P = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow f(A) + f(B) + f(C) \le \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\ln\frac{2}{\sqrt{5}} + 3\ln\frac{3}{\sqrt{10}} = \ln\frac{27}{25\sqrt{5}}$

$\Rightarrow F \le \frac{27}{25\sqrt{5}}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = M; B = N; C = P$.

Vậy GTLN của $F = \frac{27}{25\sqrt{5}}$.

Nhận xét : Từ cách giải trên, ta có được cách giải cho bài toán tổng quát sau :

Cho ΔABC nhọn. Tìm GTLN của $E = \sin^m A.\sin^n B.\sin^p C$, với m, n, p là những số thực dương. (Xem ở phần bài tập)

Ví dụ 17 : Cho tam giác ABC nhọn. Tìm GTNN của biểu thức :

$$F = \tan A + 2\tan B + 3\tan C.$$

Lời giải : (Dựa theo lời giải của 2M**)**

Xét hàm số $f(x) = \tan x, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, có $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

$\Rightarrow f''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) > 0, \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Áp dụng BĐT tiếp tuyến với ΔMNP nhọn, ta có :

$$f(A) \ge f'(M)(A-M) + f(M) = \frac{1}{\cos^2 M}(A-M) + \tan M$$

$$\Rightarrow \cos^2 M.f(A) \ge \frac{1}{2}\sin 2M + A - M$$

Tương tự : $\cos^2 N.f(B) \ge \frac{1}{2}\sin 2N + B - N;\ \ \cos^2 P.f(C) \ge \frac{1}{2}\sin 2P + C - P$

$$\Rightarrow \cos^2 M.f(A) + \cos^2 N.f(B) + \cos^2 P.f(C) \ge \frac{\sin 2M + \sin 2N + \sin 2P}{2}.$$

Ta chọn các góc M, N, P sao cho : $\cos M = k > 0;\ \ \cos N = \sqrt{2}k;\ \ \cos P = \sqrt{3}k$

Vì M, N, P là ba góc của tam giác nên ta có đẳng thức :

$$\cos^2 M + \cos^2 N + \cos^2 P + 2\cos M.\cos N.\cos P = 1$$

$\Rightarrow (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})k + 2\sqrt{6}k^3 = 1 \Rightarrow k$ là nghiệm dương của phương trình :

$$2\sqrt{6}x^3 + (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})x - 1 = 0 \quad (1).$$

$$\Rightarrow \sin 2M = 2\sqrt{1-\cos^2 M}.\cos M = 2k\sqrt{1-k^2}\ ;$$

$$\sin 2N = 2k\sqrt{2(1-2k^2)}; \sin 2P = 2k\sqrt{3(1-3k^2)}$$

$$\Rightarrow F \ge \frac{\sin 2M + \sin 2N + \sin 2P}{2k^2} = \frac{\sqrt{1-k^2} + \sqrt{2(1-2k^2)} + \sqrt{3(1-3k^2)}}{k}.$$

Vậy GTNN của $F = \dfrac{\sqrt{1-k^2} + \sqrt{2(1-2k^2)} + \sqrt{3(1-3k^2)}}{k}$ đạt được khi

$A = M; B = N; C = P$

Với M, N, P là ba góc của tam giác nhọn được xác định bởi :

$\cos M = k > 0;\ \ \cos N = \sqrt{2}k;\ \ \cos P = \sqrt{3}k$, trong đó k là nghiệm dương duy nhất của PT (1).

Nhận xét : Tương tự cách làm trên, ta cũng tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = m.\tan A + n.\tan B + p.\tan C$, trong đó m, n, p là các số thực dương và A, B, C là ba góc của tam giác nhọn (Xem ở phần bài tập).

Ví dụ 18: Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z = 1$. Tìm GTNN của :

$$P = x^3 + \sqrt{1 + y^2} + \sqrt[4]{1 + z^4}.$$

Lời giải:

Ta có các hàm số $f(t) = t^3;\ g(t) = \sqrt{1 + t^2};\ h(t) = \sqrt[4]{1 + t^4}$, $t \in (0;1)$ là những hàm số có đạo hàm cấp hai dương trên khoảng $(0;1)$. Nên với $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = 1$ áp dụng BĐT tiếp tuyến, ta có:

$f(x) \ge f'(a)(x - a) + f(a)$; $h(y) \ge h'(b)(y - b) + h(b)$; $g(z) \ge g'(c)(z - c) + g(c)$

Ta chọn a, b, c sao cho $f'(a) = g'(b) = h'(c) = k \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 = k \\ \dfrac{b}{\sqrt{1 + b^2}} = k \\ \dfrac{c^3}{\sqrt[4]{(1 + c^4)^3}} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{k}{3}} \\ b = \dfrac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \\ c = \dfrac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{1 - k\sqrt[3]{k}}} \end{cases}$ **(1)**

Do $a + b + c = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{k}{3}} + \dfrac{k}{\sqrt{1 - k^2}} + \dfrac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{1 - k\sqrt[3]{k}}} = 1$ **(2)**.

Dễ thấy phương trình **(2)** luôn có nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

$$\Rightarrow P = f(x) + g(y) + h(z) \ge f(a) + h(b) + g(c) = \frac{k\sqrt{3k}}{9} + \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1 - k\sqrt[3]{k}}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = a; y = b; z = c$.

Vậy $\min P = \dfrac{k\sqrt{3k}}{9} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - k^2}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{1 - k\sqrt[3]{k}}}$ với k là nghiệm nằm trong $(0;1)$ của **(2)**.

Ví dụ 19. (BĐT Jensen). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $(a;b)$ và n số thực dương $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ có tổng bằng 1.

a) Nếu $f''(x) > 0\ \forall x \in (a;b)$ thì ta có: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \ge f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$

với $\forall x_i \in (a;b)$ $i=\overline{1,n}$. Đẳng thức có khi $x_1 = x_2 = .. = x_n$.

b) Nếu $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a;b)$ thì ta có: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \le f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$

với $\forall x_i \in (a;b)$ $i=\overline{1,n}$. Đẳng thức có khi $x_1 = x_2 = .. = x_n$.

Lời giải.

a) Đặt $y = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n \Rightarrow y \in (a;b)$.

Vì $f''(x) > 0$ nên áp dụng BĐT tiếp tuyến, ta có:

$$f(a_i) \ge f'(y)\left(a_i - y\right) + f(y) \quad \forall i = 1,2,..,n$$

$$\Rightarrow \alpha_i f(a_i) \ge f'(y)\left(\alpha_i a_i - \alpha_i y\right) + \alpha_i f(y) \quad \forall i = 1,2,..,n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i) \ge f'(y)\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i a_i - \alpha_i y) + f(y)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\right).$$

b) Chứng minh tương tự.

Ví dụ 20. (2M) Cho hai bộ số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ và $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn:

$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Chứng minh rằng: $\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \ge \prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i}$.

Lời giải.

BĐT cần chứng minh $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i \ge \sum_{i=1}^{n} a_i \ln a_i$.

Hàm số $f(x) = \ln x$ là hàm lồi, nên áp dụng BĐT tiếp tuyến ta có:

$$f(x_i) \le f'(a_i)(x_i - a_i) + f(a_i) = \frac{1}{a_i}(x_i - a_i) + f(a_i)$$

$$\Rightarrow a_i f(x_i) \le x_i - a_i + a_i f(a_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(a_i)$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i \ln a_i$ đpcm.

Chú ý: Điều thú vị là BĐT Cô si lại là một hệ quả của bài toán trên. Thật vậy:

Cho $a_1 = a_2 = ... = a_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$. Khi đó BĐT đã cho trở thành:

$\prod_{i=1}^{n} x_i \le \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^n$ (do $a_1 = a_2 = ... = a_n$)

$\Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ đây chính là BĐT Cô Si cho n số.

Bài tập áp dụng

1. Cho $a,b,c > 0.$ Chứng minh: $\dfrac{b+c}{a^2} + \dfrac{c+a}{b^2} + \dfrac{a+b}{c^2} \ge \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

2. Cho $a,b,c > 0$ thỏa $a+b+c \ge 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{b^2+c+a} + \frac{1}{c^2+a+b} \le 1$$

3. Cho $x,y,z \le 1$ thỏa $x+y+z = 1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2} + \dfrac{1}{1+z^2} \le \dfrac{27}{10}$

4. Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ và $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Chứng minh

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right)...\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \ge \left(n-1\right)^n.$$

5. Cho $a,b,c,d \in (0; \dfrac{\pi}{2})$ và $a+b+c+d = \pi$. Chứng minh

$$\frac{\sqrt{2}\sin a - 1}{\cos a} + \frac{\sqrt{2}\sin b - 1}{\cos b} + \frac{\sqrt{2}\sin c - 1}{\cos c} + \frac{\sqrt{2}\sin d - 1}{\cos d} \ge 0.$$

6. Cho n số thực dương thoả mãn: $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$. Cmr:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+...+\frac{x_n}{1+x_n^2} \le \frac{1}{1+x_1}+...+\frac{1}{1+x_n}$$ (***New Zealand 1998***).

7. Cho tam giác ABC. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4})\cot\frac{A}{4}+\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{4})\cot\frac{B}{4}+\tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4})\cot\frac{C}{4}.$$

8. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3} \le \frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}} < 2.$$

9. Cho tam giác ABC nhọn và $m,n,k>0$. Tìm:

1) Giá trị lớn nhất của $F=\sin^m A.\sin^n B\sin^k C$.

2) Giá trị nhỏ nhất của $F=m\tan A+n\tan B+k\tan C$

10. Cho n số thực không âm $a_1,a_2,...,a_n$ có tổng bằng 1. Chứng minh: $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \le \frac{1}{n}$

(BĐT Cauchy).

11. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$$ (***Mỹ - 2003***).

12. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \ge 4(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}).$$

13. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \ge \frac{9}{4(a+b+c)}$.

14. Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh :

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-(a+b+c) \ge 2\sqrt{3}.$$

15. Cho $x,y,z>0$. Chứng minh: $\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} \le \frac{3+\sqrt{3}}{9}$.***(Hồng Kông 1997)***

IV. KẾT QUẢ

- Học sinh hứng thú và chú ý hơn khi học các khái niệm Toán học.

- Học sinh giải quyết được một lớp bài toán khó về BĐT.

V. BÀI HỌC KINH NGHIỆM

- Khi dạy học các khái niệm Toán học cần chú ý đến bản chất của khái niệm đó và khai thác bản chất của khái niệm.

- Trong quá trình dạy học, chúng ta có thể gợi mở một số hướng phát triển từ một khái niệm Toán học cho học sinh tìm tòi và nghiên cứu.

VI. KẾT LUẬN.

Việc khái thác khái niệm đồ thị lồi lõm của đồ thị hàm số cho chúng ta:

- Một phương pháp chứng minh BĐT và giải một số dạng toán cực trị khá hiệu quả và đơn giản.

- Dựa vào hai BĐT tiếp tuyến và cát tuyến kết hợp với phương pháp cân bằng hệ số, chúng ta có thể sáng tạo ra nhiều bài toán BĐT hay và khó.

NGƯỜI THỰC HIỆN

Nguyễn Tất Thu