

## 2. THẾ GIỚI CỦA CÁC KÍ HIỆU PHÉP TÍNH TOÁN HỌC

Ngày nay, từ lớp Một, học sinh đã biết một số kí hiệu phép tính toán học như cộng (+), trừ (-), bằng nhau (=), .... Nhưng nhân loại đã phải mất hàng nghìn năm mới có được các kí hiệu đơn giản mà cần thiết đó.

Trước khi có các kí hiệu phép tính, người ta đã phải dùng lời, dùng chữ để diễn tả quan hệ số lượng và hình dạng. Ví dụ, để diễn tả  $(a + b) - c$  người ta phải viết : "a cộng với b, rồi lấy kết quả trừ đi c". Đây là cách mà người Hi Lạp còn dùng mãi về sau.

Người Ai Cập vào những năm 1700 trước Công nguyên dùng cách đánh dấu bằng hai cẳng chân nằm cùng chiều để chỉ phép cộng và hai cẳng chân nằm ngược chiều để chỉ phép trừ.

Người Hi Lạp cổ đại và người Ấn Độ cổ đại đều coi việc viết hai số liền nhau là phép cộng, ví dụ  $3\frac{1}{4}$  có nghĩa là 3 cộng  $\frac{1}{4}$  và viết hai số xa nhau là phép trừ, ví dụ  $6\frac{1}{5}$  có nghĩa là 6 trừ  $\frac{1}{5}$ .

Người Hindu thì phép cộng được thể hiện bằng cách ghép, còn phép trừ thể hiện bằng việc đặt một chấm lên số bị trừ.

Nhà toán học Lý Thiện Lan người Trung Hoa đã dùng kí hiệu "⊥" và "T" để chỉ phép cộng và phép trừ.

L.Pasoli (cuối thế kỉ XV) người Italia, đã dùng kí hiệu chữ Latinh p từ chữ plus (nghĩa là cộng) hoặc p thay cho phép cộng, ví dụ 5 p 3, nghĩa là 5 cộng 3 và chữ m, từ chữ minus (nghĩa là trừ) hoặc m thay cho phép trừ, ví dụ 7 m 5, nghĩa là 7 trừ 5.

Cuối thời Trung Cổ, thương nghiệp ở châu Âu khá phát đạt, một số nhà buôn thường vạch dấu "+" và dấu "-" lên thùng hàng để đánh dấu "trọng lượng hơi thừa" và "trọng lượng hơi thiếu".



*L. de Vinci*

Thời Phục Hưng (thế kỉ XV - thế kỉ XVI), Leonardo de Vinci (Lêônadôđa Vinxi) (15.4.1452 - 2.5.1519) người Italia, bậc thầy của nghệ thuật, nhất là hội họa, nhưng rất mê toán, đã dùng kí hiệu "+" và "-" trong một số tác phẩm của mình.

Năm 1489, Johnn Widman (sinh năm 1460 ở Bohemia) người Đức, đã dùng dấu "+" và dấu "-" để chỉ "phần dư" và "phần khuyết".

Cũng năm 1489, trong một cuốn sách số học của J. W. d' Eges người Đức, xuất hiện dấu "+" và dấu "-" để chỉ phép cộng và phép trừ. Sau đó đến

năm 1514, nhà toán học Van der Hoecke người Hà Lan, năm 1524 Christoffel Rudolff (khoảng 1500 - 1545) và năm 1544 Michael Stifel (1486 - 1567) người Đức, đã dùng lại dấu "+" và dấu "-" thay cho phép cộng và phép trừ.

Về sau, nhờ đóng góp tích cực của nhà toán học Francois Viète (1540 - 13.12.1603) người Pháp thì dấu "+" và dấu "-" mới được phổ cập và đến năm 1630 mới được mọi người công nhận. Do vậy ông được coi là ông tổ của kí hiệu toán học.

Hiện nay các ấn phẩm của nhiều nước đều dùng dấu "+" và dấu "-" để chỉ phép cộng và phép trừ.

Cần chú ý là, người châu Âu lục địa đã từ lâu lại dùng dấu "+" để chỉ phép trừ.

Đối với phép nhân, người Hindu đã dùng cách viết bha (âm tiết đầu của từ bhavita là tích) sau các nhân tử. Năm 1631 William Oughtred (1574 - 1660) người Anh, đã dùng dấu "x" trong tác phẩm của mình và người ta đã dùng nó cho đến ngày nay.

Dấu "." thay cho phép nhân đã được Thomas Harriot (1560 - 1621) dùng nhưng sau đó người ta ít dùng, chỉ đến khi (năm 1684) Gottfried Wilhelm Leibniz (1.7.1646 - 4.11.1716) người Đức chấp nhận nó thì người ta mới dùng nhiều. Hiện nay dấu "." vẫn được dùng cho phép nhân trong sách giáo khoa của một số nước.

Dấu "∩" được G. W. Leibniz dùng cho phép nhân và ngày nay dấu này được dùng để chỉ phép giao trong lý thuyết tập hợp.



G.W. Leibniz

Đối với phép chia, người Hindu thể hiện bằng cách viết số chia dưới số bị chia. Nhà toán học Mohammed Ibn Mûsâ Al - Khowarizmi (khoảng 780 - khoảng 850) người Uđôbêkixtan, đã dùng " $\frac{3}{4}$ " hoặc " $\frac{3}{4}$ " để chỉ 3 chia cho 4.

Đến năm 1630, John Pell (1610 - 1685) người Anh đã dùng dấu " $\div$ " và sau đó năm 1659 Johann Heinrich Rahn (1622 - 1676) người Thụy Sĩ, năm 1684 G. W. Leibniz cũng dùng dấu " $\div$ " để chỉ phép chia.

Trong các ấn phẩm của Nga và Đức thì dấu " $\div$ " rất ít thấy để chỉ phép chia, mà lại dùng dấu ":" (so sánh).

Đối với phép khai căn, trước khi có dấu " $\sqrt{\quad}$ " thì người ta dùng R.q thay cho " $\sqrt{\quad}$ ", R.c thay cho " $\sqrt[3]{\quad}$ ".

Người Hindu thể hiện phép khai căn bằng cách viết ka (âm tiết đầu của từ karana là vô tỉ) trước đại lượng lấy căn.

Đến năm 1525, trong cuốn "Die Coss", Ch. Rudolff đã đưa ra dấu " $\sqrt{\quad}$ ". Sở dĩ được ông kí hiệu như vậy vì có lẽ nó giống chữ r trong từ radical là dấu căn.

Tất nhiên là còn nhiều kí hiệu phép tính toán học nữa, như tích phân, vi phân, ...

Sau đây là một ví dụ về các kí hiệu phép tính toán học lấy trong cuốn sách công bố năm 1572 của nhà toán học Raffaello Bombelli (1530 - 1572) :

R.c. L R.q 4352 p 16 ] m.R.c L R. q. 4352m16 ]

Diễn đạt theo kí hiệu ngày nay là :

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352} + 16} - \sqrt[3]{\sqrt{4352} - 16}.$$

### 3. CÁC KÍ HIỆU TOÁN HỌC KHÁC

Ở mục 2 chúng ta đã nói về các kí hiệu phép tính toán học, ở mục này ta nói về các kí hiệu toán học khác.

Người nguyên thủy chỉ mới có khái niệm "có" và "không" (không có). Đây là khái niệm cổ nhất về số. Sau đó họ biết thêm hai số 1 và 2, từ 3 trở lên là nhiều. Như vậy họ đã biết khái niệm "ít" và "nhiều".

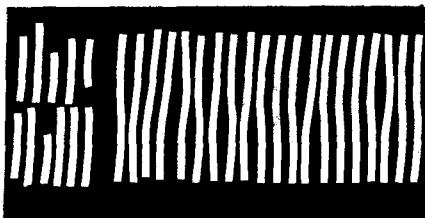
Do sản xuất phát triển, con người có nhu cầu trao đổi nên nảy sinh việc đếm số. Người ta dùng các ngón tay, ngón chân, hòn cuội, rồi khắc lên gỗ cột nhà, thân cây, ... hoặc kết nút trên dây, ... để đếm. Các cách đếm thô sơ này hiện vẫn còn tồn tại, nhất là đối với các dân tộc ít người ở nước ta và các nước.

Đến thời kì Công xã nguyên thủy, con người biết dùng văn tự để ghi lại các số, đó là buổi đầu của số học.

Ở Tây An (Trung Quốc) người ta đã đào được đồ gốm và bằng gốm có ghi 8 hình tròn xếp thành hình một tam giác đều, dùng 100 hình vuông để xếp thành một hình vuông.

Ở Trung Hoa, công cụ tính toán sớm nhất là "thẻ tính". Ban đầu các "thẻ tính" được làm bằng cành cây thẳng, về sau là các thanh gỗ (hoặc tre, xương thú, đá hoặc sắt) nhỏ, thường dài khoảng 13 - 14 cm, bố 271 thanh thành một nắm, có thể

cho vào ống, túi hoặc buộc vào lưng. Các thanh nhỏ được gọi là "thẻ tính toán" hay "thẻ toán". Người ta đã khai quật được nhiều loại "thẻ tính". Ví dụ, khi khai quật ngôi mộ cổ thời Tây Hán (thế kỉ II - thế kỉ I trước Công nguyên) tại huyện Thiên Dương tỉnh Thiểm Tây tháng 8-1971 người ta thấy một loại "thẻ tính"



Hình 3-1

có thanh đường kính khoảng 0,3cm, dài 20cm, có hai màu (hình 3-1) được đặt bên hông xác chết.

"Thẻ tính" được dùng để ghi số, ghi phép tính, tiến hành các phép tính về số, kể cả việc giải các phương trình bậc cao. "Thẻ tính" trên thực tế là một loại thuật toán, nó là công cụ tính toán rất hữu hiệu, đã thúc đẩy cho số học của Trung Hoa phát triển từ thời Cổ Đại đến đời Nguyên (thế kỉ XIV), trước khi xuất hiện bàn tính. Vào thời Xuân Thu, việc dùng "thẻ tính" làm dụng cụ tính toán là phổ biến.

Tác dụng của "thẻ tính" trước hết là để ghi số. Có hai kiểu biểu diễn số : kiểu ngang và kiểu dọc (bảng 3 - 1). Trong thực tế người ta thường dùng hàng đơn vị theo kiểu dọc, sau đó xen kẽ, số 0 được để cách (bỏ trống).

Ví dụ : |||≡≡≡≡≡≡ | là 330721.

Bảng 3 -1

Hai kiểu biểu diễn số

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kiểu ngang	—	==	≡≡	≡≡≡	≡≡≡≡	⊥	⊥	⊥	⊥
Kiểu dọc						⊥	⊥	⊥	⊥

Thời Xuân Thu ở Trung Hoa đã có khái niệm số âm, nên người ta dùng thẻ màu đen để chỉ số âm, màu đỏ để chỉ số dương, hoặc thanh có thiết diện chữ nhật là số âm, thiết diện



Zu Chong Zhi

tam giác là số dương, hay đặt xiên thế toán để chỉ số âm (nếu thế cùng màu).

Khi tính toán người ta dùng các bảng gỗ ghi các số và gọi là bảng xếp số, giống như bàn tính sau này.

Phương pháp tính bằng thế được đề cập trong bộ sách "Tồn Tử toán kinh" gồm 3 quyển, viết vào thế kỉ III. Khi dùng "thế tính", nếu người quen dùng thì có thể tính được với tốc độ rất nhanh, đến mức người khác không theo dõi kịp. Nhà toán học vĩ đại Zu Chong Zhi (Tổ Xung Chi) (429 - 500) thời Nam Bắc triều đã dùng phương

pháp "thế tính" (hình 3-2) đã tính được số  $\pi$  nằm giữa số 3,1415926 và số 3,1415927. Điều này có đề cập đến trong cuốn "Tang thuật" (Xuyết thuật) do ông biên soạn. Kết quả này hoàn toàn phù hợp với kết quả tính toán của các nhà toán học phương Tây, nhưng sớm hơn đến 1000 năm !



Hình 3-2

Trong các kí hiệu toán học thì dấu bằng nhau "=" là quan trọng hơn cả. Người Babilon và người Ai Cập đã dùng nhiều loại kí hiệu để biểu thị sự bằng nhau, nhưng được công nhận sớm nhất là cách của Diophantus : esti và isas, viết tắt là is và i. Thời Trung Cổ kí hiệu để biểu thị sự bằng nhau rất hỗn loạn. Kí hiệu "=" hiện nay đang sử dụng, được dùng lần đầu tiên trong cuốn "Cái kích thích trí thông minh" (The Whetstone of Witte) của Robert Recorde (khoảng 1510 - 1558) công bố năm 1557.

Trong cuốn sách đó, tác giả giải thích rằng, ông đã dùng hai đoạn thẳng song song bằng nhau làm kí hiệu cho một đẳng thức là vì "không có hai vật nào có thể bằng nhau hơn thế".

Nhưng mãi đến thế kỉ XVIII kí hiệu này mới được dùng phổ biến (với hai vạch rất dài).

Dùng chữ để biểu đạt số là một sáng tạo quan trọng, nó càng làm cho lí luận đại số học trở nên sâu sắc hơn. Muốn có được điều này loài người đã phải mất hàng nghìn năm. Công lao này thuộc về nhà toán học F. Viète và ông được xem là người cha của cách dùng chữ thay số trong đại số.

Trong cuốn "In artem" nổi tiếng nhất của F. Viète, ông đã phát triển nhiều kí hiệu đại số. Ông đã dùng nguyên âm để biểu thị các đại lượng chưa biết và các phụ âm để biểu thị các đại lượng đã biết. Còn hiện nay chúng ta lại dùng các chữ cái phía cuối (x, y, z, ...) cho những đại lượng chưa biết và các chữ cái phía đầu (a, b, c, ...) cho những đại lượng đã biết. Đây là công lao của nhà triết học René Descartes (31.3.1596 - 11.1.1650) người Pháp đưa ra năm 1637.

Như các bạn đã biết,  $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \varepsilon, \dots$  là những chữ cái đầu tiên trong vần tự Hi Lạp cổ đại. Trên đầu các chữ cái đó người ta cho thêm một nét ngang để biểu thị một số. Chữ số này tương đương với thứ tự trong bảng chữ cái Hi Lạp. Như  $\bar{\alpha}$  có thể thay cho 1,  $\bar{\beta}$  thay cho 2,  $\bar{\gamma}$  thay cho 3,  $\bar{\delta}$  thay cho 4,  $\bar{\varepsilon}$  thay cho 5, ...

Thời Hi Lạp cổ đại, vào thế kỉ III, đại số học đã phát triển mạnh, tuy vậy cũng chưa có được một hệ thống kí hiệu đại số hoàn chỉnh. Diophantus (246 - 330) đã sử dụng kí hiệu khá phức tạp để biểu thị số chưa biết :

$$\begin{aligned}\zeta &\rightarrow x \\ D^y &\rightarrow x^2 \\ K^y &\rightarrow x^3 \\ \Delta^y \Delta &\rightarrow x^4 \\ \Delta K^y &\rightarrow x^5 \\ K^y K &\rightarrow x^6 \\ &\dots\end{aligned}$$

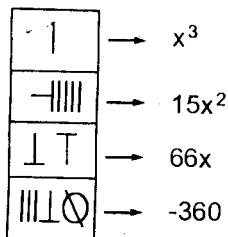
và ông đã dùng "p" để chỉ sự phân cách, M để chỉ là trước số hạng tự do. Ví dụ :

$$K^y K \bar{\alpha} \Delta K^y \bar{\alpha} \uparrow \Delta^y \Delta \bar{\varepsilon} \zeta \bar{\gamma} \overset{\circ}{M} \bar{\beta},$$

biểu thị biểu thức đại số sau đây :

$$x^6 + x^5 - 5x^4 - 3x - 2.$$

Do chưa có một hệ thống kí hiệu toán học đầy đủ mà các nhà toán học thời Cổ Đại ở châu Âu và các nước Arập đã cảm thấy lúng túng đối với một phương trình đơn giản như  $ax + b = 0$ .



Hình 3-3

Để diễn đạt một phương trình, trong bộ sách "Sách toán chín chương" của Trần Sanh, xuất hiện vào thế kỉ II (thời Đông Hán), người ta gọi số hạng có chứa ẩn số là "nguyên", số hạng tự do (không chứa ẩn số) là "thái". Ví dụ ở hình 3-3 là cách biểu thị phương trình bậc 3 một ẩn :

$$x^3 + 15x^2 + 66x - 360 = 0.$$

Đối với phương trình phức tạp thì vẫn dùng kí hiệu như ở trên nhưng có thay đổi chút ít. Hình 3-4 biểu thị phương trình bậc 1 bốn ẩn.

$$x - 2y + 2z + 3w - 5 = 0.$$

	Nguyên	
Nguyên	Thái	Nguyên
	Nguyên	

	w		
		3	
y	-2	-5	2 z
		1	
	x		

Hình 3-4

Hình 3-5 còn phức tạp hơn, biểu thị phương trình bậc 3 hai ẩn :

$$2y^3 - 8y^2 - xy^2 + 28y + 6xy - x^2 - 2x + \text{thái} = 0.$$

Hình 3-6 biểu thị hệ phương trình bậc 1 ba ẩn :

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 26 ; \\ 2x + 3y + z &= 24 ; \\ 3x + 2y + z &= 39. \end{aligned} \right\}$$



y	2	-8	28	Thái
	0	-1	6	-2
	0	0	0	-1

x

Hình 3-5

1	2	3	(x)
2	3	2	(y)
3	1	1	(z)
26	24	39	

Hình 3-6

Sau đây là niên giám một số kí hiệu toán học :

- Dấu lớn hơn ">", nhỏ hơn "<", khác nhau " $\neq$ ", gần bằng " $\approx$ " do Th.Harriot đưa ra năm 1631.

Cần chú ý là sự khác nhau thì F.Viète lại dùng kí hiệu "=".

- Vuông góc " $\perp$ " được P.Erigon đưa ra năm 1634.

- Số mũ (lũy thừa) thì F. Viète viết là A quadratum, A

cubum, còn các tác giả khác về sau thì viết gọn hơn : Aq, Ac, tức là  $A^2$ ,  $A^3$ ; kí hiệu  $a^2$ ,  $a^3$ , ...  $a^n$  được R. Descartes đưa ra năm 1637 và năm 1656 John Wallis (23.11. 1616 - 28.10.1703) người Anh đưa ra các ý tưởng về các số mũ âm.

- Dấu ngoặc kép " " do người thợ in Guillaume người Pháp đưa ra năm 1670.

- Dấu song song "/" được G. Oughtred đưa ra năm 1677.

- Dấu đồng dạng " $\sim$ " được G.W. Leibniz đưa ra.



J.Wallis

- Hàm số  $f(x)$  được Johann Bernouilli (27.7.1667 - 1.1. 1748) người Thụy Sĩ đưa ra năm 1718, viện sĩ Léonard Euler (Ôle) (15.4.1707 - 18.9.1783) người Pháp gốc Thụy Sĩ (nhưng làm việc ở Nga từ năm 1727) đưa ra năm 1734.