Phần 1:

CỰC TRỊ TRONG ĐẠI SỐ:

Một số dạng toán thường gặp:

▼ ***Dạng 1***: *đưa về dạng bình phương*

I. *Phương pháp giải:*

Đưa về dạng

$A^2 \geq 0$, hoặc $A^2 + c \geq c$ (vớI c là hằng số) dấu bằng xảy ra khi A=0

II. *Một số bài tập ví dụ:*

Ví dụ 1:

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)$

Lời giải:

$$P = \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right) = -x + \sqrt{x} = -\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ và $x = \frac{1}{4}$

Do đó giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4}$ đạt khi $x = \frac{1}{4}$

Ví dụ 2:

Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 5}$ có giá trị lớn nhất

Lời giải:

Ta có:

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 = \left(x-\sqrt{2}\right)^2 + 3 \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 5} \leq \frac{1}{3}$$

Do đó, khi $x = \sqrt{2}$ thì bíêu thức $\frac{1}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 5}$ có giá trị lớn nhất là $\frac{1}{3}$

V í d ụ 3:

VớI x,y không âm; tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x - 2\sqrt{xy} + 3y - 2\sqrt{x} + 2004,5$$

Lời giải:

Đặt $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$ vớI $a, b \geq 0$ ta có:

$P = a^2 - 2ab + 3b^2 - 2a + 2004,5$
$= a^2 - 2(b+1)a + 3b^2 + 2004,5$
$= a^2 - 2(b+1)a + (b+1)^2 + 2b^2 - 2b + 2003,5$
$= (a-b-1)^2 + 2\left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + 2003,5 - \frac{1}{2}$
$= (a-b-1)^2 + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + 2003 \geq 2003$

Vì $(a-b-1)^2 \geq 0$ và $\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \; \forall a, b$

$$P = 2003 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là 2003 khi $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ và $\sqrt{y} = \frac{1}{2}$ hay $x = \frac{9}{4}$ và $y = \frac{1}{4}$

III. ***Bài tập tự giải:***

1) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2 - 5x^2 - y^2 - 4xy + 2x$
2) Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x,y) = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 45$
3) Cho hai số x,y thoả mãn đẳng thức: $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4$

Xác định x,y để tích xy đạt giá trị nhỏ nhất
4) Cho a là số cố định, còn x, y là những số biến thiên. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: A = $(x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$

Hướng dẫn giảI và đáp số:
1)Max P = 3 khi (x,y) = (1, -2)
2) $f(x,y) = (x-y-6)^2 + 5y^2 + 9 \geq 9$
3) Thêm $4xy + 4x^2$ vào 2 vế
Kết quả: xy đạt GTNN là $-\frac{1}{2}$ khi $x = \pm\frac{1}{2}$ $y = \pm 1$
4) $A \geq 0$ khi a $\neq$ -4, $A = \frac{9}{5}$ khi a = -4

▼ ***Dạng 2:*** *sử dụng miền giá trị của hàm số*

I. *Phương pháp giải:*

Cho y = f(x) xác định trên D

$y_0 \in f(D) \Leftrightarrow$ phương trình $y_0 = f(x)$ có nghiệm $\Leftrightarrow a \le y_0 \le b$

Khi đó min y = a, max y = b

II. *Một số bài tập ví dụ:*

Ví dụ 1:

Tìm Max và Min của: $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

Lời giải:

Tập xác định D = R $\Rightarrow$ y_0 là một giá trị của hàm số

$\Leftrightarrow$ phương trình $y_0 = \dfrac{x}{x^2+1}$ có 1 nghiệm $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 y_0 + y_0 = x$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 y_0 - x + y_0 = 0$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow 1 - 4y^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow y^2 \le 4$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le y \le \dfrac{1}{2}$

Vậy Min y = $-\dfrac{1}{2}$, Max y = $\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 2:

Xác đinh các tham số a, b sao cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng –1

Lời giải:

Tập xác định D = R

y_0 là một giá trị của hàm số $\Leftrightarrow$ phương trình $y_0 = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ phương trình $y_0 x^2 - ax + y_0 - b = 0$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ (1)

- Nếu $y_0 = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow$ ax = -b có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ a \ne 0 \end{array}\right.$$

- Nếu $y_0 \ne 0$ thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 4(y_0 - b)y_0 \ge 0$

$$\Leftrightarrow -4{y_0}^2 + 4by_0 + a^2 \geq 0$$

Theo đề y_0 đạt giá trị lớn nhất là 4, giá trị nhỏ nhất là –1 nên phương trình $-4{y_0}^2 + 4by_0 + a^2$ phảI có nghiệm là –1 và 4 (do -1.4 = -4 < 0)

Theo định lý Viet ta có : $\begin{cases} \dfrac{-a^2}{4} = -4 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = 3 \end{cases}$

Vậy vớI a = 4, b = 3 hoặc a = -4, b = 3 thì min y = -1, max y = 4

***<u>Ví dụ 3</u>*:**

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số : $y = \left[\dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}\right]^{\frac{3}{4}}$

<u>*Lời giải*</u>: Hàm số đã cho xác định khi $x\left(x-a\right) \geq 0$

Đặt $z = \left[\dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}\right]$ (1) thì $y = \sqrt[4]{z^3}$, $z \geq 0$

z_0 là một giá trị của hàm số (1) $\Leftrightarrow$ phương trình $z_0 = \dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}$ có nghiệm hay phương trình $(12 - z_0)x^2 - 12\text{ax} - 36z_0 = 0$ có nghiệm (2)

- z_0 =12 : (2) $\Leftrightarrow$ ax = -36 có nghiệm khi $a \neq 0$
- $z_0 \neq 12$: (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 36a^2 + 36z_0(12 - z_0) \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + 12z_0 - {z_0}^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow {z_0}^2 - 12z_0 - a^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - \sqrt{a^2+36} \leq z_0 \leq 6 + \sqrt{a^2+36}$$

Vì $z_0 \geq 0$ nên $0 \leq z_0 \leq 6 + \sqrt{a^2+36}$

Vậy max $z = 6 + \sqrt{a^2+36}$; max $y = \sqrt[4]{(6+\sqrt{a^2+36})^3}$

III. <u>Bài tập tự giải:</u>

1) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức: $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$
2) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức: $y = \dfrac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}$
3) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x}}$, x > 0

<u>*Hướng dẫn giảI và đáp số:*</u>

1) Max $y=3+2\sqrt{2}$, Min $y=3-2\sqrt{2}$

2) Đk: $-3\le x\le 1$

Đặt $\sqrt{x+3}=2.\dfrac{2t}{1+t^2}$; $\sqrt{1+x}=2.\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ vớI t = tg$\dfrac{\varphi}{2}\in[0;1]$

Ta có $y=-\dfrac{7t^2+12t+9}{-5t^2+16+7}$

Max y $y=\dfrac{9}{7}$ khi x = -3; min $y=\dfrac{7}{9}$ khi x = 1

3)Tìm nghiệm của hệ $\begin{cases} y_0=x+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x}} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\le y_0 & (1) \\ 2y_0x^2-y_0{}^2x+1=0 \end{cases}$

(2)

Điều kiện để (2) có nghiệm là $y_0\ge 2$

Áp dụng Vi-et ta chứng minh được $x_1<x_2<y_0$

Vậy min f(x) = 2 vớI x >0

▼ ***<u>Dang 3</u>****: Sử dụng một số bất đẳng thức quen thuộc*

► **<u>Bất đẳng thức Cauchy</u>**

I. *<u>Kiến thức cần nắm:</u>*

- Cho hai số a, b $\ge$ 0, ta coù:

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$$

Dấu " =" xảy ra khi $\Leftrightarrow$ a = b

- Cho n số $a_1, a_2, \dots, a_n \ge 0$, ta có:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

II. *<u>Một số bài tập ví dụ:</u>*

◦ ***<u>Biện pháp 1:</u>*** *Áp dụng bất đẳng thức trực tiếp.*

<u>Ví dụ 1:</u>

Cho x > 0 ; y > 0 thoả mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

<u>Lời giải:</u>

Vì x > 0 ; y > 0 nên $\frac{1}{x} > 0$; $\frac{1}{y} > 0$; $\sqrt{x} > 0; \sqrt{y} > 0$, theo bđt Cauchy có:

$$\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

=> $\frac{1}{\sqrt{xy}} \le \frac{1}{4}$ => $\sqrt{xy} \ge 4$

Vận dụng bđt Cauchy với hai số dương $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$ ta được

A = $\sqrt{x} + \sqrt{y} \ \ge \ 2\sqrt{\sqrt{x}.\sqrt{y}} \ge 2\sqrt{4}$ = 4 (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y = 4)

Vậy min A = 4 (khi và chỉ khi x = y = 4).

<u>Nhận xét</u>: không phải lúc nào ta cũng có thể dùng trực tiếp bđt Cauchy đối với các số trong đề bài. Dưới đây ta sẽ nghiên cứu một số biện pháp biến đổi một biểu thức để có thể vận dụng bđt Cauchy rồi tìm cực trị của nó.

<u>Biện pháp 1</u> : Để tìm cực trị của một biểu thức ta tìm cực trị của bình phương biểu thức đó.

<u>Ví dụ 2</u>:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : A = $\sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x}.$

<u>Lời giải:</u>

ĐKXĐ : $\frac{5}{3} \le x \le \frac{7}{3}$.

A^2 = (3x – 5) + (7- 3x) + $2\sqrt{(3x-5).(7-3x)}$

$A^2 \le$ 2 + (3x – 5 + 7 – 3x) = 4 (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ 3x – 5 = 7 – 3x $\Leftrightarrow$ x = 2).

Vậy max A^2 = 4 => max A = 2 (khi và chỉ khi x = 2).

<u>Nhận xét</u>: *Biểu thức A được cho dưới dạng tổng của hai căn thức. Hai biểu thức lấy căn có tổng không đổi (bằng 2). Vì vậy, nếu ta bình phương biểu thức A thì sẽ xuất hiện hạng tử là hai lần tích của căn thức. Đến đây có thể vận dụng bất đẳng thức Cauchy.*

◦ ***<u>Biện pháp 2</u>***: *Nhân và chia biểu thức với cùng một số khác 0.*

<u>Ví dụ 3</u>:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A = $\frac{\sqrt{x-9}}{5x}$

<u>Lời giải:</u>

ĐKXĐ : x $\ge$ 9

$$A = \frac{\sqrt{x-9}}{5x} = \frac{\sqrt{\frac{x-9}{3}.3}}{5x} \le \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x-9}{3}+3\right)}{5x} = \frac{\frac{x-9+9}{3}}{10x} = \frac{1}{30}$$

(dấu " =" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x-9}{3} = 3 \Leftrightarrow x = 18$).

Vậy max A = $\frac{1}{30}$ (khi và chỉ khi x = 18).

<u>Nhận xét</u>: *Trong cách giải trên, x – 9 được biểu diễn thành $\frac{x-9}{3}.3$ và khi vân dụng bđt Cauchy, tích $\frac{x-9}{3}.3$ được làm trội trở thành tổng $\frac{x-9}{3}+3 = \frac{1}{3}x$ có dạng kx có thể rút gọn cho x ở mẫu, kết quả là một hằng số. Con số 3 tìm được bằng cách lấy căn bậc hai của 9, số 9có trong bài.*

<u>Biện pháp 3</u>: Biến đổi biểu thức đã cho thành tổng của các biểu thức sao cho tích của chúng là một hằng số.

1. *Tách một hạng tử thành tổng của nhiều hạng tử bằng nhau.*

***<u>Ví dụ 4</u>* :**

Cho x > 0, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : A = $\frac{3x^4+16}{x^3}$.

<u>Lời giải:</u>

A = 3x + $\frac{16}{x^3} = x+x+x+\frac{16}{x^3} \ge 4.\sqrt[4]{x.x.x.\frac{16}{x^3}}$

A ≥ 4.2 = 8 (dấu " =" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{16}{x^3} \Leftrightarrow x = 2$

Vậy min A = 8 (khi và chỉ khi x = 2).

<u>Nhận xét</u>: *Hai số dương 3x và $\frac{16}{3x}$ có tích không phải là một hằng số.Muốn khử được x^3 thì phải có x^3 = x.x.x do đó ta phải biểu diễn 3x = x + x + x rồi dùng bđt Cauchy với 4 số dương.*

2. *Tách một hạng tử chứa biến thành tổng của một hằng số với một hạng tử chứa biến sao cho hạng tử này là nghịch đảo của hạng tử khác có trong biểu thức đã cho (có thể sai khác một hằng số).*

<u>Ví dụ 5:</u>

Cho 0 < x < 2, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $\frac{9x}{2-x}+\frac{2}{x}$.

Lời giải:

A = $\dfrac{9x}{2-x}+\dfrac{2-x}{x}+1$

$A \geq 2.\sqrt{\dfrac{9x}{2-x}.\dfrac{2-x}{x}}+1=2\sqrt{9}+1=7$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{9x}{2-x}=\dfrac{2-x}{x} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$).

Vậy min A = 7 (khi và chỉ khi $x=\dfrac{1}{2}$).

◦ ***Biện pháp 4:*** *Thêm một hạng tử vào biểu thức đã cho.*

Ví dụ 6:

Cho ba số dương x, y, z thoả mãn điều kiện x + y + z = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

P = $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$.

Lời giải:

Áp dụng bđt Cauchy đối với hai số dương $\dfrac{x^2}{y+z}$ và $\dfrac{y+z}{4}$ ta được:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4} \geq 2.\sqrt{\frac{x^2}{y+z}.\frac{y+z}{4}}=2.\frac{x}{2}=x$$

Tương tự:

$$\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4} \geq y$$

$$\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4} \geq z$$

Vậy $\left(\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}\right)+\dfrac{x+y+z}{2} \geq x+y+z$

P $\geq (x+y+z)-\dfrac{x+y+z}{2}=1$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{2}{3}$).

III. Bài tập tự giải:

1) Cho x + y = 15, tìm gía trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức:
   B = $\sqrt{x-4}+\sqrt{y-3}$
2) Cho x, y, z ≥ 0 thoả mãn điều kiện x + y + z = a.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A = xy + yz + xz.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B = $x^2+y^2+z^2$.

3) Cho x, y, z là các số dương thoả mãn điều kiện x + y + z ≥ 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}$.

4) Cho a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$.

5) Cho x, y thoả mãn điều kiện x + y = 1 và x > 0. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức B = x^2y^3.

6) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$ với x, y, z là các số dương và:

a) $x+y+z=1$ b) $x^2+y^2+z^2=1$

7) Tìm giá trị lớn nhất của $A=\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}$ với a, b, c là các số dương và abc = 1.

8)Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của

$A=x+y+z+xy+yz+zx$ biết rằng $x^2+y^2+z^2=3$.

9) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=3^x+3^y$ với x + y = 4.

10) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=x^4-4x+1$

<u>Hướng dẫn giải và đáp số</u>:

1.

ĐKXĐ : x ≥ 4, y ≥ 3

B ≥ $\sqrt{8}$ ⇒ min B = $\sqrt{8}$ (khi và chỉ khi x = 4, y = 11 hoặc x = 12, y = 3). max B^2 = 16 nên max B = 4 (khi và chỉ khi x = 8, y = 7).

2

.a. xy + yz + xz ≤ $x^2+y^2+z^2$ (áp dụng bđt Cauchy cho 2 số, rồi cộng lại theo vế).

Suy ra: 3(xy + yz + xz) ≤ $(x + y + z)^2$

Hay 3A ≤ a^2

b. B = $x^2+y^2+z^2 = (x + y + z)^2 - 2(x + y + z)$

B = a^2 – 2A

B min ⇔ A max.

3.

$$P^2=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{2x\sqrt{y}}{\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{z}}{\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

Áp dụng bđt Cauchy cho 4 số dương:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}}+\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}}+z\ge 4\sqrt[4]{\frac{x^2.x^2.y.z}{yz}}=4x.$$

Còn lại: tương tự

Cộng vế với vế lại, ta được P^2 ≥ 4(x + y + z) – (x + y + z) = 3(x + y + z)

$P^2 \geq 3.12 = 36$
Min P = 6.(khi và chỉ khi x = y = z = 4).
4.
a + b + c = 1 $\Rightarrow$ 1 – a = b + c > 0. Tương tự 1 – b > 0, 1 – c > 0.
Có: 1 + a = 1 + (1 – b – c) = (1 – b) + (1 – c) $\geq 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$
Suy ra (1 + a)(1 + b)(1 + c) $\geq 8\sqrt{(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2}$
A $\geq$ 8
Vậy min A = 8.
5. Nếu y $\leq$ 0 thì B $\leq$ 0.
Nếu y > 0 thì

$$1 = x + y = \frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3} \geq 5\sqrt[5]{\frac{x^2y^3}{108}} \Rightarrow x^2y^3 \leq \frac{108}{3125}$$

hay B $\leq \frac{108}{3125}$

Suy ra max B = $\frac{108}{3125}$.
6.
Theo bất đẳng thức Cô-si

$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x} \geq 2.\sqrt{\frac{xy}{z}.\frac{yz}{x}} = 2y$ tương tự $\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geq 2z$; $\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z} \geq 2x$

Suy ra 2A ≥ 2(x+y+z) = 2 ; min A = 1 với $x = y = z = \frac{1}{3}$

b) Ta có $A^2 = \frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2$

Hãy chứng tỏ $A^2 \geq 3$.

Min A = $\sqrt{3}$ với x = y = z = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.
Dễ chứng minh $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$ với a > 0, b > 0. Do đó:

$$a^3+b^3+1 \geq ab(a+b)+abc = ab(a+b+c).$$

$$A \leq \frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = 1$$

$\max A = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

8.
◦ Tìm giá trị lớn nhất:
Áp dụng bất đẳng thức $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$,ta được $(x+y+z)^2 \leq 9$ nên

$$x + y + z \leq 3 \qquad (1)$$

Ta có bất đẳng thức $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$ mà $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ nên

$$xy + yz + zx \leq 3 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \leq 6$. Ta có $\max A = 6 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

- Tìm giá trị nhỏ nhất : Đặt x + y + z = m thì

$$m^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(xy + yz + zx\right) = 3 + 2\left(xy + yz + zx\right)$$

Do đó $xy + yz + xz = \dfrac{m^2 - 3}{2}$. Ta có $A = m + \dfrac{m^2 - 3}{2}$ nên

$$2A = m^2 + 2m - 3 = \left(m + 1\right)^2 - 4 \geq -4.$$

$$\Rightarrow A \geq -2.$$

$\min A = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$, chẳng hạn x = -1, y = -1, z = 1.

9.

$$A = 3^x + 3^y \geq 2\sqrt{3^x 3^y} = 2\sqrt{3^{x+y}} = 2\sqrt{3^4}$$

10.

Ta có $x \leq |x|$ (xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $x \geq 0$) nên $-4x \geq -4|x|$. Do đó $A \geq x^4 - 4|x| + 1$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi với bốn số không âm

$$x^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4\sqrt[4]{x^4} = 4|x| \Rightarrow x^4 - 4|x| + 1 \geq -2.$$

$\min A = -2 \Leftrightarrow x^4 = 1$ và $x \geq 0 \Leftrightarrow x = 1$.

► <u>Bất đẳng thức Bunhiacopski:</u>

I. <u>*Kiến thức cần nắm:*</u>

- Cho a, b, c, d tuỳ ý, ta có

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

Dấu bằng xảy ra khi: ad = bc.

- Cho $a_1, \dots, a_n$ và $b_1, \dots, b_n$ tuỳ ý, ta có:

$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2$

Dấu bằng xảy ra khi: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dots = \dfrac{a_n}{b_n}$

II. <u>Một số bài tập ví dụ:</u>

Ví dụ 1:

Tìm giá trị lớn nhất của : P = $3\sqrt{x - 1} + 4\sqrt{5 - x}$

<u>*Lời giải:*</u>

ĐKXĐ: $1 \leq x \leq 5$

Áp dụng bđt Bunhiacopski có:

$P^2 \leq (3^2 + 4^2)(x - 1 + 5 - x) = 100$

Suy ra max P = 10 khi $\dfrac{\sqrt{x-1}}{3} = \dfrac{\sqrt{5-x}}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{61}{25}$.

<u>Ví dụ 2:</u>

Cho a, b, c > 0. Tìm min P = $\dfrac{5a}{b+c} + \dfrac{4b}{c+a} + \dfrac{3c}{a+b}$.

<u>Lời giải:</u>

P =

$$\frac{5a}{b+c} + 5 + \frac{4b}{a+c} + 4 + \frac{3c}{a+b} + 3 - (5+4+3) = (a+b+c)\left(\frac{5}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{3}{a+b}\right) - (5+4+3)$$

$$= \frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{5}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{3}{a+b}\right) - (5+4+3)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + \sqrt{4} + \sqrt{3}\right)^2 - (5+4+3)$$ (theo bđt Bunhiacopski).

Vaäy min P = $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5} + \sqrt{4} + \sqrt{3}\right)^2 - (5+4+3)$ khi và chỉ khi $\dfrac{b+c}{\sqrt{5}} = \dfrac{a+c}{\sqrt{4}} = \dfrac{a+b}{\sqrt{3}}$.

<u>Tổng quát:</u>

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}x^2 + \frac{b}{a+c}y^2 + \frac{c}{a+b}z^2 \geq (xy + yz + xz) - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

(cộng vào vế trái ($x^2 + y^2 + z^2$) rồi trừ đi ($x^2 + y^2 + z^2$), sau đó áp dụng bđt Bunhicopski).

<u>Ví dụ 3</u>:

Cho a, b, c > 0. Tìm min P = $\dfrac{a+3c}{a+b} + \dfrac{c+3b}{b+c} + \dfrac{4b}{c+a}$

<u>Lời giải:</u>

$$P = \left(\frac{a+3c}{a+b} + 2\right) + \left(\frac{c+3a}{b+c} + 2\right) + \left(\frac{4b}{c+a} + 6\right) - 10$$

$$P = \left(\frac{3a+2b+3c}{a+b}\right) + \left(\frac{2b+3c+3a}{b+c}\right) + \left(\frac{4b+6c+6a}{c+a}\right) - 10$$

$$P = (3a+2b+3c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{2}{c+a}\right) - 10$$

$$P = [(a+b)+(b+c)+2(a+c)]\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{2}{c+a}\right) - 10 \geq \left(1 + 1 + \sqrt{2}.\sqrt{2}\right)^2 - 10 = 6$$

Vậy min P = 6 khi và chỉ khi $(a + b)^2 = (b + c)^2 = (c + a)^2$ hay a = b = c.

<u>Cơ sở:</u>

Chọn α, β, γ sao cho:

$a+3c+\alpha(a+b)=c+3a+\beta(b+c)=4b+\gamma(c+a)=m(3a+2b+3c)$.

Từ đó suy ra $\alpha=\beta=2, \gamma=6, m=2$.

III. ***Bài tập tự giải:***

1. Cho a, b, c > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) P = $\dfrac{3b+9c}{a+b}+\dfrac{8a+4b}{b+c}+\dfrac{a+5b}{c+a}$.

b) Q = $\dfrac{b+3c}{a+b}+\dfrac{4a+2b}{b+c}+\dfrac{a+5b}{c+a}$.

c) R = $\dfrac{a+3c}{a+2b+c}+\dfrac{4b}{a+b+2c}-\dfrac{8c}{a+b+3c}$.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A=x^2+y^2$

biết rằng $x^2\left(x^2+2y^2-3\right)+\left(y^2-2\right)^2=1$.

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$A=\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}$ với a, b, c là các số dương và a + b + c =6.

4. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{1}{x}$ với 0 < x < 2.

5. Cho a, b, c > 0 và abc = 1

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\dfrac{1}{a^3\left(b+c\right)}+\dfrac{1}{b^3\left(a+c\right)}+\dfrac{1}{c^3\left(a+b\right)}$

Hướng dẫn giả và đáp số:

1. Câu a và câu b làm tương tự ví dụ 3

Câu c không thể làm như ví dụ 3 được, ta làm như sau:

Đặt a + 2b + c = x

a + b + 2c = y

a + b + 3c = z

từ đó suy ra c = z – y; b = x + y – 2y; a = 5y – x – 3z.

khi đó R = $\dfrac{2y-x}{x}+\dfrac{4x+4z-8y}{y}+\dfrac{8z-8y}{z}=\dfrac{2y}{x}-1+\dfrac{4x}{y}+\dfrac{4z}{y}-8-8+\dfrac{8y}{z}$.

Rồi áp dụng bđt ta tìm được min R.

2.

Từ giả thiết suy ra

$$\left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)+3=-x^2\le 0.$$

Do đó $A^2-4A+3\le 0 \Leftrightarrow \left(A-1\right)\left(A-3\right)\le 0 \Leftrightarrow 1\le A\le 3.$

$\min A=1 \Leftrightarrow x=0, y=\pm 1.$

$\max A=3 \Leftrightarrow x=0, y=\pm\sqrt{3}.$

3.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacópki cho 3 cặp số

Ta có

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a+c}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{a+c}\right)^2+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right]$$

$$\ge\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}\sqrt{a+c}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\right)\left[2(a+b+c)\right]\ge(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}.$$

Suy ra min A = 3.

4.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski

$$\left(a^2+b^2\right)\left(m^2+n^2\right)\ge(am+bn)^2$$

Ta có:

$$2A=\left[\left(\sqrt{\frac{2}{2-x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{2-x}\right)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2\right]\ge\left(\sqrt{\frac{2}{2-x}(2-x)}+\sqrt{\frac{1}{x}x}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2A\ge\left(\sqrt{2}+1\right)^2=3+2\sqrt{2}.$$

$$\min 2A=3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{\overline{\dfrac{2}{2-x}}}{2-x}=\frac{\overline{\dfrac{1}{x}}}{x}\Leftrightarrow\frac{2}{(2-x)^2}=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow 2x^2=x^2-4x+4$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4=8\Leftrightarrow(x+2)^2=8\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}-2\quad\text{(chú ý x > 0).}$$

Vậy $\min A=\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}-2$.

5.

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$

thì $\begin{cases}x,y,z>0\\xyz=1\end{cases}$

Khi đó $A=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, biến đổi tương đương ta được:

$$A\ge\frac{(x+y+z)^2}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}=\frac{x+y+z}{2}$$

Mặt khác theo BDT côsi ta có: $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$

Vậy

$$\min A = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} \\ x = y = z \\ xyz = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c.$

► **Bất đẳng thức Bernoulli**

I. Kiến thức cần nắm

$x^{\alpha} \geq 1 - \alpha + \alpha x$ (1)

$(\alpha \geq 1, x > 0)$

Dấu " =" xảy ra khi x =1

II. Một số bài tập ví dụ:

Ví dụ 1:

Cho x, y > 0 sao cho x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất :

a. $P = x^2 + y^2$

b. $Q = x^5 + y^5$

Lời giải:

a.

Áp dụng bđt Bernoulli ta có:

$(2x)^2 \geq 1 - 2 + 2(2x)$

$(2y)^2 \geq 1 - 2 + 2(2y)$

Cộng vế theo vế:

$4P \geq -2 + 4(x + y) = 2$

$P \geq \frac{1}{2}$.

Vậy min P = $\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi x = y = $\frac{1}{2}$.

b.

Áp dụng bđt Bernoulli ta có:

$(2x)^5 \geq 1 - 5 + 5(2x)$

$(2y)^5 \geq 1 - 5 + 5(2y)$

Cộng vế theo vế ta có:

$32Q \geq -8 + 10(x + y) = 2$

$Q \geq \frac{1}{16}$

Vậy min Q = $\frac{1}{16}$. Khi và chỉ x = y = $\frac{1}{2}$.

Tổng quát:

$S = x^m + y^m$, $m \geq 1$ với $x + y = 1$.

*. *Theo (1), với mọi* $\alpha \ge \beta > 0$*, ta có:*

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}} \ge 1 - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}x \qquad (1')$$

Đặt $t = x^{\frac{1}{\beta}} \Leftrightarrow t^{\beta} = x$

(1') $\Leftrightarrow$

$$\boxed{t^{\alpha} \ge 1 - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}t^{\beta} \qquad (2)}$$

Dấu "=" xảy ra khi t = 1.

<u>Ví dụ 2</u>:

Cho x, y > 0, sao cho $x^3 + y^3 = 1$. Tìm min P = $x^{\frac{10}{3}} + y^{\frac{10}{3}}$.

<u>*Lời giải:*</u>

Theo (2), ta có:

$$\left(\sqrt[3]{2}x\right)^{\frac{10}{3}} \ge 1 - \frac{10}{9} + \frac{10}{9}\left(\sqrt[3]{2}x\right)^{3}$$

$$\left(\sqrt[3]{2}y\right)^{\frac{10}{3}} \ge 1 - \frac{10}{9} + \frac{10}{9}\left(\sqrt[3]{2}y\right)^{3}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{10}{3}} P \ge -\frac{2}{9} + \frac{10}{9}.2(x^3 + y^3) = 2$$

Vậy P $\ge \frac{1}{\sqrt[9]{2}}$

Hay min P = $\frac{1}{\sqrt[9]{2}}$ khi và chỉ khi x = y = $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

*. Từ (2) thay t bởi $\frac{t}{t_0}$, ta được:

$$\boxed{t^{\alpha} \ge \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)t_0^{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}.t_0^{\alpha-\beta}.t^{\beta} \qquad (3)}$$

Dấu "=" xảy ra khi t = t_0 với t_0 là điểm đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>Bài toán</u>:

Cho $a.x^{\beta} + b.y^{\beta} = 1.(\alpha \ge \beta; a,b,c,d > 0)$

Tìm min P = $c.x^{\alpha} + d.y^{\alpha}$

Đặt $\begin{matrix} \sqrt[\alpha]{c}x = X \\ \sqrt[\alpha]{d}y = Y \end{matrix}$

Bài toán trở thành : Cho $m.x^{\beta} + n.y^{\beta}$ = p (m,n > 0)

Tìm min A = $x^{\alpha} + y^{\alpha}$

<u>*Lời giải*</u>:

Theo bđt (3), ta có:

$$x^{\alpha} \geq \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)x_0^{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}x_0^{\alpha-\beta}.x^{\beta}$$

$$y^{\alpha} \geq \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)y_0^{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}y_0^{\alpha-\beta}.y^{\beta}$$

Cộng lại : A $\geq \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(x_0^{\alpha} + y_0^{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{\beta}\left(x_0^{\alpha-\beta}.x^{\beta} + y_0^{\alpha-\beta}.y^{\beta}\right)$.

Chọn (x_0 , y_0) thoả mãn:

$m.x^{\beta} + n.y^{\beta}$ = p

$\frac{x_0^{\alpha-\beta}}{m} = \frac{y_0^{\alpha-\beta}}{n}$.

Khi đó: A $\geq \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(x_0^{\alpha} + y_0^{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{\beta}.\frac{x_0^{\alpha-\beta}}{m}$.p.

Vậy min A = $\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(x_0^{\alpha} + y_0^{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{\beta}.\frac{x_0^{\alpha-\beta}}{m}$.p khi và chỉ khi x = x_0, y = y_0.

▼ <u>***Dạng 4***</u>**:** *Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác và phương pháp tọa độ, vectơ.*

I. <u>*Phương pháp giải:*</u>

Với 3 điểm A, B, C, bất kì trong mặt phẳng ta có: $AB + BC \geq AC$ (đẳng thức khi B nằm giữa A và C).

- Với hai véc tơ bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta có:
  $\left|\vec{a} \pm \vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$. Đẳng thức khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng (1)
- Nếu $\vec{a} = (a_1, a_2)$ và $\vec{b} = (b_1 + b_2)$
  $(1) \Leftrightarrow \sqrt{(a_1 \pm b_1)^2 + (a_2 \pm b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}} + \sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2}}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \end{cases} \left(k \in R\right)$

Dạng toán tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$y = \sqrt{f^2\left(x\right) + a^2} + \sqrt{g^2\left(x\right) + b^2}$ với $\begin{cases} a, b \neq 0 \\ f\left(x\right) \pm g\left(x\right) = k\left(k \in R\right) \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác: giả sử $f\left(x\right) - g\left(x\right) = k$.

Trong mặt phẳng Oxy xét điểm: $M\left(f\left(x\right), |a|\right) \Rightarrow OM = \sqrt{f^2\left(x\right) + a^2}$ và $N(g(x), -|b|) \Rightarrow ON = \sqrt{g(x)^2 + b^2}$.

Ta có: $MN = \sqrt{|f(x) - g(x)|^2 + (|a| + |b|)^2} = \sqrt{k^2 + \left(|a| + |b|\right)^2}$.

Vì $\quad OM + ON \geq MN \Leftrightarrow y \geq \sqrt{k^2 + (|a| + |b|)^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi M, N, O thẳng hàng $\Leftrightarrow |a|.f(x) + |b|.g(x) = 0$.

Vậy Min $y = \sqrt{k^2 + (|a| + |b|)^2}$.

II. *Một số bài tập ví dụ:*

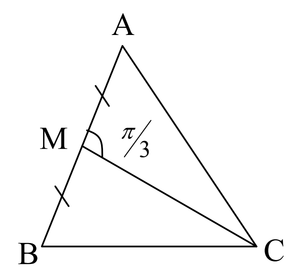
Ví dụ 1:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1}, \perp \forall a \in R.$

Lời giải:

Dễ thấy biểu thức không thay đổi khi thay a bởi $-a$, do đó chỉ cần giải với $a \geq 0$.

- Khi $a = 0$: $A = 2$.
- Khi $a > 0$: Xét ΔABC có: $\begin{cases} AM = MB = \dfrac{AB}{2} = 1 \\ CM = a \\ \widehat{AMC} = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$



Theo định lí hàm côsi:

$AC^2 = 1 + a^2 - 2.1.a.\cos\frac{\pi}{3} = a^2 + 1 - a.$

$\Rightarrow AC = \sqrt{a^2 - a + 1}.$

Tương tự $BC = \sqrt{a^2 + a + 1}$, $AB = 2.$

Khi đó: $AC + BC \geq AB \Rightarrow \sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - a + 1} \geq 2 \Leftrightarrow A \geq 2.$

Đẳng thức xảy xảy ra khi $a = 0$. Vậy $MinA = 2$ khi $a = 0.$

Ví dụ 2:

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $y = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2} + \sqrt{x^2 - 2qx + 2q^2}$.

Lời giải:

Ta có: $y = \sqrt{(x-p)^2 + p^2}\sqrt{(x-q)^2 + q^2}.$

Xét điểm $M(x-p,|p|); N(x-q,|q|).$

Ta có: $MN = \sqrt{(p-q)^2 + (|p|+|q|)^2}.$

Vì $OM + ON \geq MN \Leftrightarrow y \geq \sqrt{(p-q)^2 + (|p|+|q|)^2}.$

$\Rightarrow Min\ y = \sqrt{(p-q)^2 + (|p|+|q|)^2}.$

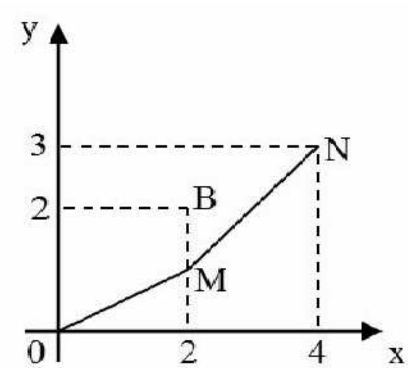
Khi M, N, O thẳng hàng $\Leftrightarrow |q|(x-p) + |q|(x-q) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{p|q| + q|p|}{|p|+|q|}.$

Ví dụ 3:

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $y = \sqrt{\cos^2 x - 2.\cos x + 5} + \sqrt{\cos^2 x + 4.\cos x + 8}.$

Lời giải:

Trong mặt phẳng Oxy, xét điểm $M(2;1-\cos x); N(4,3)$



Ta có: $\overrightarrow{MN} = (2, 2+\cos x)$ như vậy $y = OM + MN.$

Do $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$ nên $M \in [AB]$ với $A(2,0)$ và $B(2,2)$.

Ta có: $OM + MN \geq ON = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$

Đẳng thức xảy ra khi O, M, N thẳng hàng

$\Leftrightarrow 6 - 4.(1-\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Vậy $Min\ y = 5$ khi $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi.$

Ví dụ 4:

Cho 3 số thực a, b, c thoả mãn hệ sau $\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 & (1) \\ b^2 + 2b(a+c) = 6 & (2) \end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = b(c-a).$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có: $2a^2 + 2c^2 + b^2 + 2ab + 2bc = 8$

$$\Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + (\frac{b}{2} + c)^2 = 4$$

Do $(1) \Leftrightarrow (2c)^2 + (-2a)^2 = 4$

Xét $\vec{x}(a + \dfrac{b}{2}; \dfrac{b}{2} + c); \vec{y}(2c; -2a)$

Ta có: $\left|\vec{x}\right| = 2$, $\left|\vec{y}\right| = 2$, $\vec{x}.\vec{y} = b.(c-a)$.

Mà $\vec{x}.\vec{y} \le \left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|$ cùng hướng:

$$\Leftrightarrow \frac{a+\frac{b}{2}}{2c} = \frac{\frac{b}{2}+c}{-2c} \Leftrightarrow b.(a+c) = -2.(a^2+c^2) \Rightarrow \begin{cases} b.(a+c) = -2 \\ a^2+c^2 = 1 \\ b^2 = 10 \end{cases}$$

(do (1) và (2))

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = \sqrt{10} \\ a+c = -\dfrac{2}{\sqrt{10}} \\ a^2+c^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -\sqrt{10} \\ a+c = \dfrac{2}{\sqrt{10}} \\ a^2+c^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow (a,b,c) = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, \sqrt{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}); (\frac{3}{\sqrt{10}}, -\sqrt{10}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$$

$\Rightarrow Max\ M = b(c-a) = 4$ khi (a,b,c) như trên.

III. Bài tập tự giải:

1)Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{1+\sin^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 2\cos^2 x + 2}$$

2)Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$

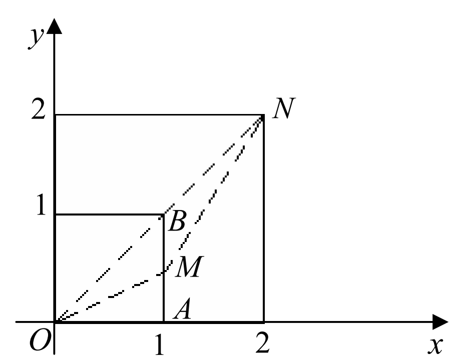
3)Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4}\right) - 2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 1$$

4)Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)x + 1} + \sqrt{2x^2 - \left(\sqrt{3}-1\right)x + 1}$$

Hướng dẫn giả và đáp số:



1.

Ta có: $y = \sqrt{1 + \left(1 - \cos^2 x\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 + \cos^2 x\right)^2}$

Xét điểm M(1, 1-cos^{2}x), N(2, 2) ta có: $\overrightarrow{MN} = \left(1, 1+\cos^2 x\right)$

Ta có: y = OM + MN

Với M thuộc đoạn [AB] với A(1, 0) và B(1, 1)

Ta có miny = ON = $\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi O, M, N thẳng hàng

$$2-2\left(1-\cos^2 x\right)=0 \qquad \Leftrightarrow \cos^2 x = 0$$

Và maxy = OA + AN = 1+ $\sqrt{1+2^2} = 1+\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi M trùng với A $\Leftrightarrow \cos^2 x = 1$

2.

Ta có:

$$y=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

Xét điểm $M\left(x-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $N\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Hai điểm M, N nằm hai bên Ox. Ta có: y = OM + ON $\geq$ MN

$$\min y = MN = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\min y = \sqrt{2\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi M, O, N thẳng hàng:

$$-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{3}+1\right)=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}-1$$

3.

$$y=\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}\right)-2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-1$$

chọn $u=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}$ $\qquad u\in\left[2;+\infty\right)$

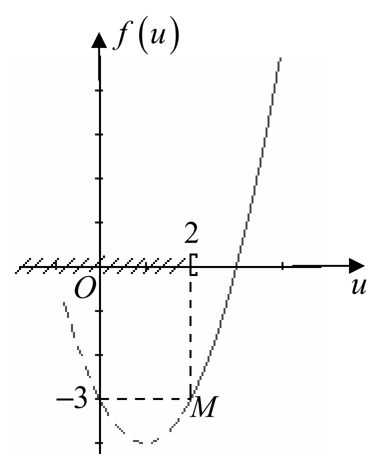
hàm số y(x) trở thành

f(u) = u^2 – 2u – 3

phác họa đồ thị hàm f(u) trong miền $\left[2;+\infty\right)$ ta thu được kết quả:

max f(u) không tồn tại

min f(u) = f(2) = -3



Vậy: max y(x) không tồn tại

min y(x) = -3 đạt được khi $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2}=1 \Rightarrow$ mọi điểm (x; y) thuộc 2 đường phân giác y = x và y = -x

(trừ gốc O(0; 0))

4.

Hàm số f(x) có thể viết lại dưới dạng:

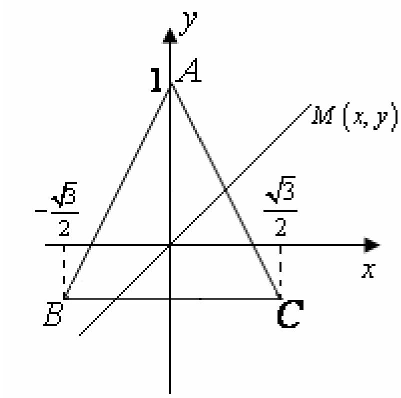
$$f(x)=\sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (1)$$

Xét trên mặt phẳng tọa độ các điểm

$$A(0,1), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right), C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Và điểm M(x,x) nằm trên đường phân giác thứ nhất.

Dễ thấy ABC là tam giác đều, với tâm là gốc tọa độ. Theo công thức tính khoảng cách giữa hai điểm trên mặt phẳng tọa độ, ta có vế phải của (1) chính là MA + MB + MC.



Bổ đề: Nếu ABC là tam giác đều, thì với mọi điểm M của mặt phẳng tam giác, ta luôn có MA + MB + MC $\geq$ OA + OB + OC, trong đó O là tâm tam giác đều.

Chứng minh:

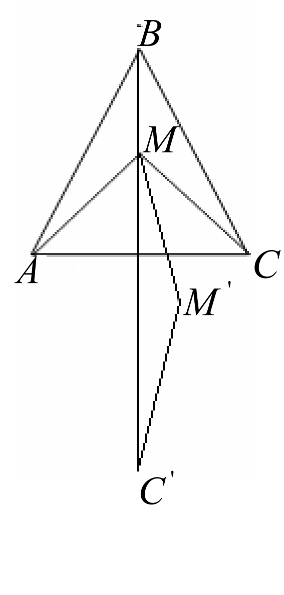
Nếu M là điểm trong tam giác. Xét phép quay R(A,60^0), khi đó

$M \to M'$

$B \to C$

$C \to C'$

$A \to A$



$\Rightarrow$ MC = M'C', MA = MM'

Vậy MA + MB + MC = MM' + MB + M'C' $\geq$ BC'

Mặt khác nếu gọi O là tâm tam giác đều ABC thì

OA + OB + OC = BC'

$\Rightarrow$ MA + MB + MC $\geq$ OA + OB + OC

Nếu M ở ngoài tam giác, chứng minh tương tự.

Theo bổ đề ta có

$f(x) \geq 3$ (do OA = OB = OC)

Vậy min f(x) = 3.

▼ ***Dang 5*** *:Phương pháp sử dụng đồ thị hàm số:*

I. ***Phương pháp giải:***

Phương pháp này thường dùng để tìm cực trị của các hàm số sau:

2. Các hàm số qui về tam thức bậc hai.
3. Các hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.
4. Các bài toán chuyển được thành toán hình học bằng cách dùng công thức độ dài đoạn thẳng: $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

   Đây là các bài toán mà trong đó $f(x)$ cho dưới dạng căn bậc hai mà làm dưới căn biểu diễn được thành độ dài một đoạn thẳng nào đó. Đây là ưu thế của phương pháp đồ thị.
5. Các hàm số $u(x,y)$ với x, y thoả mãn trước điều kiện.

II. ***Một số bài tập ví dụ:***

***Ví dụ 1*:**

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$a) y(x) = (\frac{1+x}{\sqrt{x}})^2 + 3.(\frac{1+x}{\sqrt{3}}) + 1.$

$b) y(x) = \frac{1}{15}.(2+\sin x).(b-\sin x).$

Lời giải:

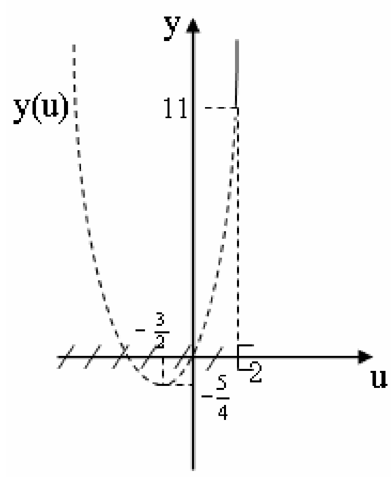
a)Đặt $u = \frac{1+x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2.$

Hàm $y(x)$ trở thành: $y(u) = u^2 + 3u + 1.$

Theo đồ thị hàm $y(u)$ trên $[2; +\infty).$

Ta được $\max y(u) =$ không có.

miny(u)=y(2)=11.



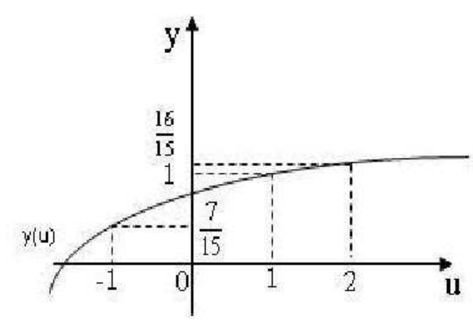
b)Đặt $u = \sin x \Rightarrow -1 \leq u \leq 1.$

Hàm $y(x)$ thành $y(u) = \frac{1}{15}.(2+u).(b-u).$

Dựa vào đồ thị ta có kết quả:

$\max y(u) = y(1) = 1$

$\min y(u) = y(-1) = \frac{7}{15}$



Ví dụ 2:

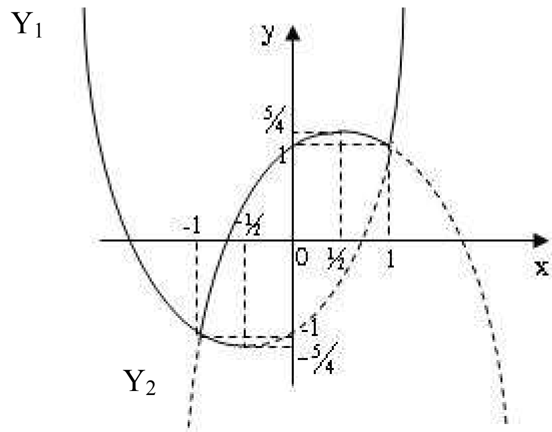
Tìm giá trị nhỏ nhất của: $y = x + \sqrt{(x^2-1)^2}$.

Lời giải:

Tao có $y = x + |x^2 - 1|$.

$$\Rightarrow y = \left[\begin{array}{ll} x + x^2 - 1 & \text{Khi } x^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1. \\ x \le -1. \end{array}\right. \\ x + 1 - x^2 & \text{Khi } x^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1. \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow y = \left[\begin{array}{ll} x^2 + x - 1 & \text{Khi } x \le -1 \text{ hoặc } x \ge 1. \\ -x^2 + x + 1 & \text{Khi } -1 \le x \le 1. \end{array}\right.$$



Gọi $y_1 = x^2 + x - 1$ và $y_2 = -x^2 + x + 1$

thì $y = \left[\begin{array}{ll} y_1 & \text{Khi } x \ge 1 \text{ hoặc } x \le -1. \\ y_2 & \text{Khi } -1 \le x \le 1. \end{array}\right.$

Vẽ đồ thị của y ta thấy $\min y = y(-1) = -1$.

Ví dụ 3:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $y = x + \sqrt{\left(x^2+6x+9\right)\left(x^2+2x+9\right)}$ trong $[-4; -\frac{5}{4}]$.

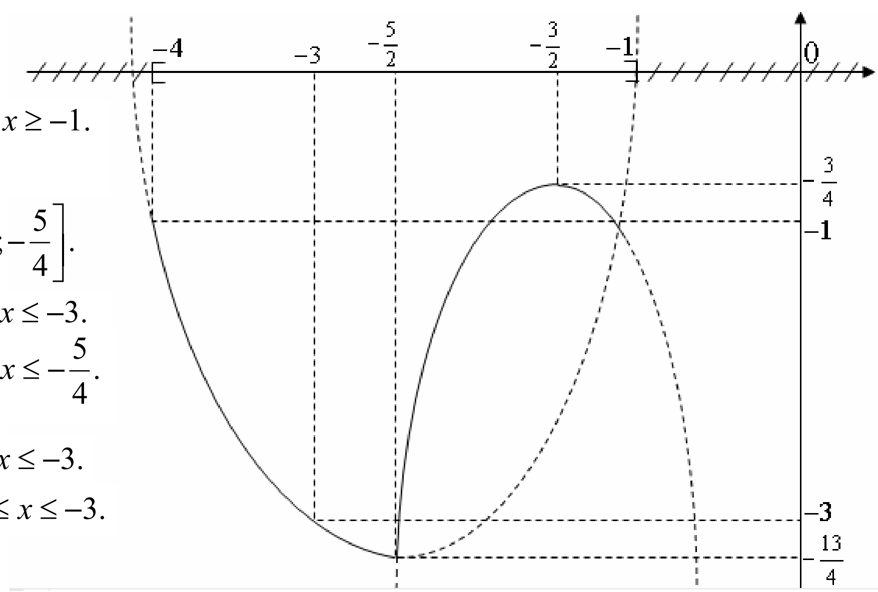
Lời giải:

Ta có: $y = x + |(x+3)(x+1).|$

Do $\left[\begin{array}{ll} (x+3).(x+1) & \text{Khi } x \le -3 \text{ hoặc } x \ge -1. \\ -(x+3).(x+1) & \text{Khi } -3 \le x \le -1. \end{array}\right.$

Ta chỉ xét những giá trị của $n \in \left[-4; -\frac{5}{4}\right]$.

Ta được $y = \left[\begin{array}{ll} x^2 + 5x + 3 & \text{Khi } -4 \le x \le -3. \\ -x^2 - 3x - 3 & \text{Khi } -3 \le x \le -\frac{5}{4}. \end{array}\right.$



Vẽ đồ thị $y_1 = x^2 + 5x + 3$ Khi $-4 \le x \le -3$.

$y_2 = -x^2 - 3x - 3$ Khi $-4 \le x \le -3$.

Dựa vào đồ thị:

$\max y = y_2(-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$.

$\min y = y_1(-3) = -3$.

III. Bài tập tương tự:

1.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y=|x-1|+|x-3|-|2x+2|$ với $-2\le x\le 4$.

2.Tìm giá trị nhỏ nhất của: $y=\sqrt{4x^2-12x+13}+\sqrt{4x^2-28x+53}$.

3.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $u=-2x+y+5$ biết x,y thoả: $36x^2+16y^2=9$.

Hương dẫn và đáp số:

1.

Với $-2\le x\le -1$ thì $y=(1-x)+(3-x)-(2x-2)=6$.

Với $-1\le x\le 1$ thì $y=-4x+2$.

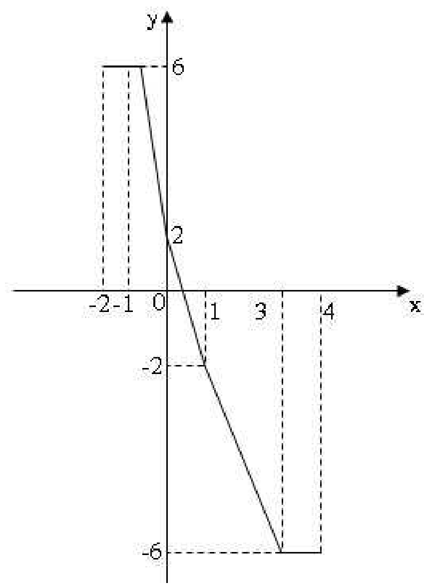
Với $1\le x\le 3$ thì $y=-2x$.

Với $3\le x\le 4$ thì $y=-6$.

Ta vẽ đồ thị của hàm số $y=|x-1|+|x-3|-|2x+2|$ với $-2\le x\le 4$.

Từ đồ thị $\max y=6\Leftrightarrow -2\le x\le -1$.

$\min y=-6\Leftrightarrow 3\le x\le 4$.



2.

Ta có: $y=\sqrt{(2x-3)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(2x-7)^2+(0-2)^2}$.

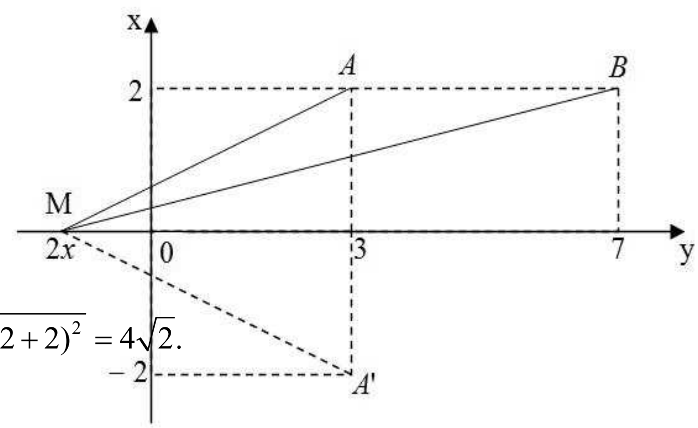
Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, xét

$M(2x,0)$, $A(3,2)$, $B(7,2)$

như vậy $y=MA+MB$.

A,B nằm cùng phía so với Ox nên lấy A' đối xứng A qua Ox.

$A'B$ cắt Ox tại H ta có: $A'(3,-2)$



$y=MA+MB=MA'+MB\ge A'B=\sqrt{(7-3)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi

$M\equiv H\Leftrightarrow 2x=5\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $\min y=4\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{5}{2}$.

3.

Từ điều kiện $36x^2+16y^2=9 \Leftrightarrow (6x)^2+(4x)^2=3^2.$

Đặt $\begin{cases}6x=X\\4y=Y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{6}X\\ y=\dfrac{1}{4}Y\end{cases}$

Ta có $X^2+Y^2=3^2.$ (1)

(1) là phương trình đường tròn $(\mathbb{C})$ trong hệ trục toạ độ Oxy có tâm O bán kính $R=3.$

Hàm $u=-2x+y+5 \Leftrightarrow u=-\dfrac{1}{3}X+\dfrac{1}{4}Y+5.$

$\Leftrightarrow Y=\dfrac{4}{3}X+4(u-5).$ ta gọi phương trình này là phương trình đường thẳng d đường thẳng luôn song song với đường thẳng $Y=\dfrac{4}{3}X$ và cắt Oy tại $P(0;4(u-5)).$

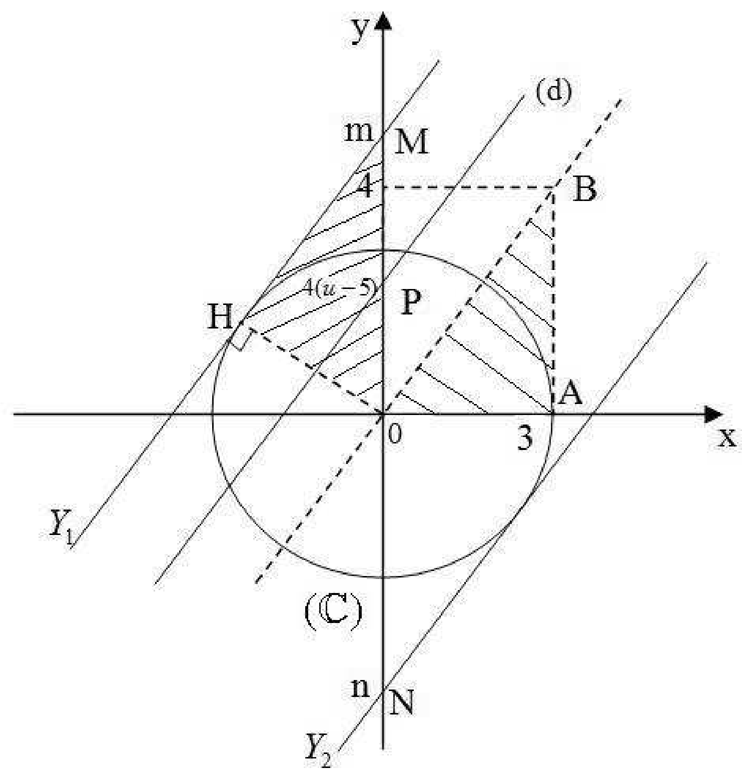
-Ta vẽ hai đường thẳng Y_1,Y_2 song song với đường thẳng $Y=\dfrac{4}{3}X$ và tiếp xúc $(\mathbb{C})$.

-Y_1,Y_2 cắt Oy lần lượt tại N và M khi đó $\max u$ là giá trị xác định khi $P\equiv N$ hay $m=4(naxu-5)$ trong đó $M(0;m).$

Min u xác định khi $P\equiv N$ tức là $n=4(\min u-5)$ trong đó $N(0;m)$ do M đối xứng N qua O nên $m=-u.$

-Kẻ $OH\perp Y_1$ lấy $OH\perp Y_1$ $A(3;0),B(3;4),\Delta OAB=\Delta OHM$ $\Rightarrow m=OM=OB=5.$

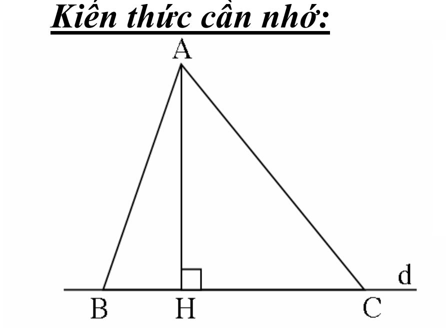
Khi đó $\begin{cases}5=4(\max u-5)\\-5=4(\min u-5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\max u=\dfrac{25}{4}.\\ \min u=\dfrac{15}{4}.\end{cases}$



Phần 2: CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

▼ ***<u>Dạng 1</u>:*** *Vận dụng quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc, quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu.*

I. ***<u>Kiến thức cần nhớ:</u>***



Ta có $AH \perp d$, $A \notin d$, $B \in d$, $C \in d$, $H \in d$.

a) $AB \geq AH$. Dấu "=" xảy ra khi $\Leftrightarrow B \equiv H$.

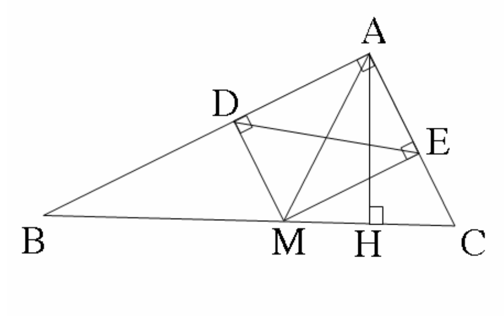
b) $AB \leq AC \Rightarrow BH \leq HC$.

II. ***<u>Một số bài tập ví dụ:</u>***

<u>Ví dụ 1:</u>

Cho tam giác $ABC(\widehat{A} = 90^o)$. M là điểm chuyển động trên cạnh BC . Vẽ $MD \perp AB, ME \perp AC (D \in AB, E \in AC)$. Xác định vị trí của điểm M để đoạn thẳng DE có độ dài nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>



Vẽ $AH \perp BC(H \in BC)$ H cố định và AH không đổi.

Tứ giác $AEMD$ có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{D} = 90^o$ nên $AEMD$ là hình chữ nhật.

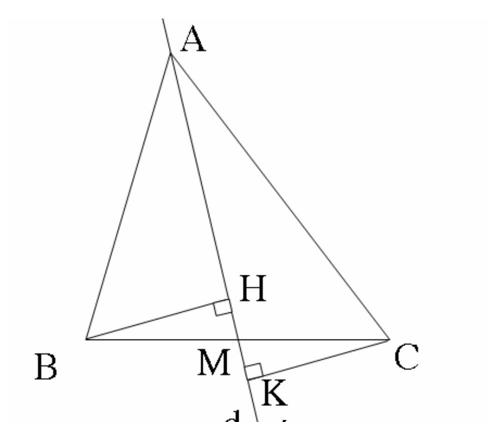
Suy ra $DE = AM$ mà $AM \geq AH$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$.

<u>Ví dụ 2:</u>

Cho tam giác ABC. Qua đỉnh A của tam giác hãy dựng đường thẳng d cắt cạnh BC sao cho tổng các khoảng cách từ B và từ C đến d có giá trị nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>



Gọi M là giao điểm của d và cạnh BC.

Vẽ $BH \perp d, CK \perp D(H;K \in d)$

$$S_{MAB} + S_{MAC} = S_{ABC}$$

$$\frac{BH.AM}{2} + \frac{CK.AM}{2} = S_{ABC}$$

$$BH + CK = \frac{2S_{ABC}}{AM}$$

$BH + CK$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{2S_{ABC}}{AM}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất

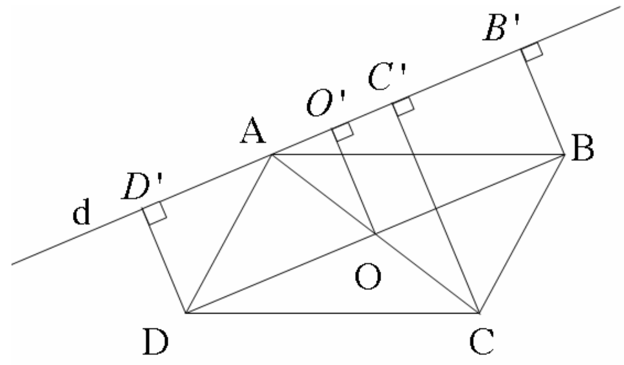
Giả sử $AB \leq AC$ thì trong hai đường xiên AM, AC đường xiên AC có hình chiếu không nhỏ hơn, do đó $AM \leq AC$ (hằng số)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv C$.

<u>Ví dụ 3:</u>

Cho hình bình hành $ABCD$.Qua A vẽ đường thẳng d không cắt hình bình hành. Gọi B',C',D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm B,C,D trên đường thẳng d.
Xác định vị trí của đường thẳng d để tổng $BB'+CC'+DD'$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải:

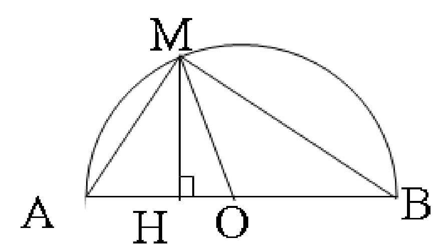


Gọi O là giao điểm của AC và BD.
O' là hình chiếu vuông góc của O trên d.
$DD' \perp d, BB' \perp d$
$\Rightarrow DD' \parallel BB'$
$\Rightarrow DD'BB'$ là hình thang.
Mà $OO' \perp d, DD' \perp d$
$\Rightarrow OO' \parallel DD'$ và O là trung điểm BD ($ABCD$ là hình bình hành).
Do đó OO' là đường trung bình của hình thang
$DD'B'B \Rightarrow OO' = \dfrac{BB'+DD'}{2} \Rightarrow BB'+DD' = 2.OO'$.
$OO' \perp d, CC' \perp d \Rightarrow OO' \parallel CC'$ và O là trung điểm AC .($ABCD$ là hình bình hành).
Do đó OO' là đường trung bình của $\triangle ACC'$
$\Rightarrow OO' = \dfrac{CC'}{2} \Rightarrow CC' = 2.OO'$
$A \in d$ và $OO' \perp d$ nên $OO' \le OA$
Do đó $BB'+CC'+DD' = 4.OO' \le 4.OA$ (không đổi)
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow O" \equiv A \Leftrightarrow d$ vuông góc AC tại A.

Ví dụ 4:

Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. M là điểm trên nửa đường tròn. Xác định vị trí M để:
a) Diện tích tam giác MAB lớn nhất.
b) Chu vi tam giác MAB lớn nhất.

Lời giải:



Vẽ $MH \perp AB, H \in AB$.
a) $S_{MAB} = \dfrac{MH.AB}{2}$
$= MH.R$
Ta có $MH \perp AB, O \in AB$.
Do đó $MH \le OM = R$
Nên $S_{MAB} \le R^2$ (không đổi)
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow M$ là trung điểm $\overset{\frown}{AB}$
b) $\widehat{AMB} = 90^o$ ($\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
$\triangle MAB$ vuông tại M có $MH \perp AB \Rightarrow MH.AB = MA.MB$
$\triangle MAB$ vuông tại M theo định lí Pitago có:
$MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2$.
$P_{MAB} = MA + MB + AB,\ AB$ không đổi
$(MA+MB)^2 = MA^2 + MB^2 + 2MA.MB$

Do đó P_{MAB} lớn nhất $\Leftrightarrow MA+MB$ lớn nhất

$\Leftrightarrow (MA+MB)^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow MA.MB$ lớn nhất

$\Leftrightarrow S_{MAB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow M$ là trung điểm $\overset{\frown}{AB}$ (câu a)

<u>Ví dụ 5:</u>

Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB=2R.$ Kẻ hai tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn (O) và tiếp xúc với (O) tại điểm M cắt Ax tại D cắt By tại E. Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn (O) sao cho:

a) $AD+BE$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) $OD.OE$ đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>

a) Vẽ $DH \perp By, H \in By.$

Tứ giác $ADHB$ có $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{H}=90^O$ nên $ADHB$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DH=AB=2R$

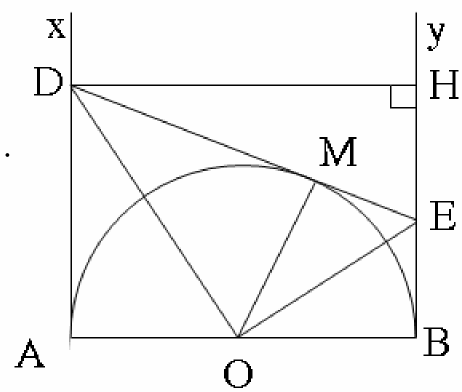
Ta có $AD=MD, BE=ME$ (tính chất hai tiếp tuyến của $(\bigcirc)$ cắt nhau tại một điểm).

Do đó $AD+BE=MD+ME=DE$ mà $DE \geq DH$ (vì $DH \perp By, E \in By$)

Do vậy $AD+BE \geq 2R$ (không đổi)

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow E \equiv H \Leftrightarrow DE \parallel AB$

$\Leftrightarrow OM \perp AB \Leftrightarrow M$ là trung điểm $\overset{\frown}{AB}$.



b) DA và DM là tiếp tuyến của $(\bigcirc) \Rightarrow OD$ là phân giác $\widehat{AOM}$.

Tương tự OE là phân giác $\widehat{MOB}$.

$\widehat{AOM}$ và $\widehat{MOB}$ kề bù.

Do đó $\widehat{EOD}=90^o$

$\triangle ODE$ vuông tại O, $OM \perp DE$ nên

$OD.OE=OM.DE$

$OD.OE=R.DE$

$OD.OE$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DE$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là trung điểm $\overset{\frown}{AB}$ (câu a).

▼ ***<u>Dang 2:</u>*** *Vận dụng các bất đẳng thức trong tam giác và quy tắc các điểm* :

I. <u>Kiến thức cần nắm:</u>

- Tam giác ABC có

a) $|AB-AC|<BC<AB+AC.$

b) $\widehat{ABC} \leq \widehat{ACB} \Leftrightarrow AC \leq AB.$

- Tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có

$AB=A'B', AC=A'C'$ thì: $BC \leq B'C' \Leftrightarrow \widehat{A} \leq \widehat{A'}.$

- Quy tắc ba điểm A,B,C.

a) $BC \leq AB+AC.$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow A \in [BC]$

b) $BC \geq |AB-AC|.$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow A,B,C$ thẳng hàng.

Quy tắc n điểm $A_1; A_2; ...; A_n$

Ta có $A_1A_n \le A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + ... + A_{n-1}A_n$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A_1; A_2; ...; A_{n-1}; A_n$ thẳng hàng và sắp xếp theo thứ tự đó.

II. ***Một số bài tập ví dụ:***

Ví dụ 1:

Cho hai điểm A và B nằm trong nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d, hai điểm M, N thuộc d và độ dài MN không đổi. Xác định vị trí hai điểm M, N để đường gấp khúc $AMNB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Dựng hình bình hành $BNMB'$ (hình bên) $\Rightarrow BB' = MN = a$ (không đổi); $NB = MB'$, B' cố định.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d.

Ta có $AM = A'M$, A' cố định.

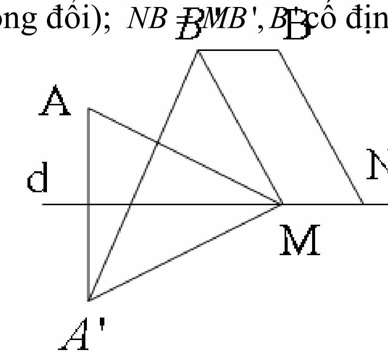
Xét ba điểm A', M, B' ta có $A'M + MB' \ge A'B'$

Do đó $AM + MN + NB = A'M + MN + MB'$

$= (A'M + MB') + MN$

$\ge A'B' = a$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [A'B']$.



Ví dụ 2:

Cho góc nhọn xOy. A là điểm nằm trong góc đó. Hãy tìm trên hai tia Ox và Oy lần lượt hai điểm B và C sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

Lời giải:

Gọi A_1 và A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua hai tia Ox và Oy.

A cố định, $\widehat{xOy}$ cố định nên A_1 và A_2 cố định.

Theo tính chất đối xứng trục ta có:

$AB = A_1B;\ AC = A_2C.$

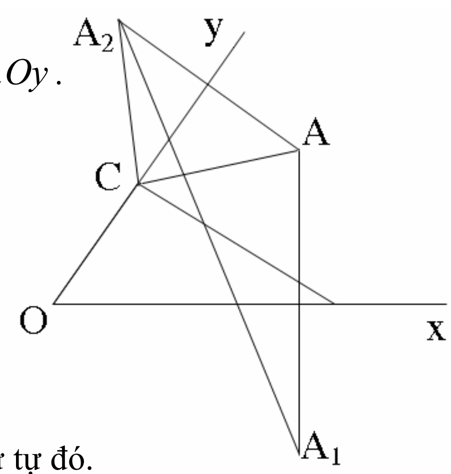
$P_{ABC} = AB + BC + AC$

$= A_1B + BC + A_2C$

Xét các điểm A_1, B, C, A_2 ta có $A_1B + BC + A_2C \ge A_1A_2$

Do đó $P_{ABC} \ge A_1A_2$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A_1, B, C, A_2$ thẳng hàng và sắp xếp theo thứ tự đó.



Ví dụ 3:

Cho hình vuông $ABCD$. M, N, P, Q là đỉnh của tứ giác $MNPQ$ lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA ($MNPQ$ gọi là tứ giác nội tiếp hình vuông). Tìm điều kiện tứ giác $MNPQ$ có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải:

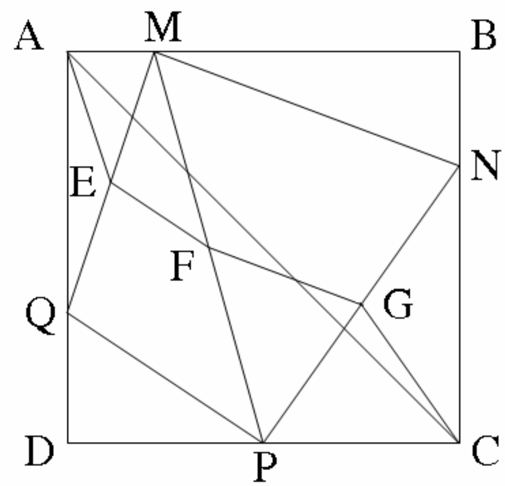
Gọi E, F, G lần lượt là trunh điểm của các đoạn thẳng $MQ, MP, NP.$

ΔAMQ vuông góc tại A có

AE là trung điểm nên $AE = \frac{1}{2}MQ \Rightarrow MQ = 2AE.$

Tương tự $NP = 2GC$

Mặt khác EF, FG lần lượt là đường trung bình của các tam giác ΔMPQ và ΔNPM



nên $EF = \frac{1}{2}PQ$ và $FG = \frac{1}{2}MN$

Suy ra $PQ = 2EF$ và $MN = 2FG$.

Do đó $P_{MNPQ} = MN + NP + PQ + QM$

$= 2FG + 2GC + 2EF + 2AE$

$= 2(AE + EF + FG + GC) \geq AC$ (không đổi)

(Xét các điểm A, E, F, G, C)

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow A, E, F, G, C$ thẳng hàng.

$\Leftrightarrow MN \parallel AC \parallel PQ$ và $MQ \parallel BD \parallel NP$.

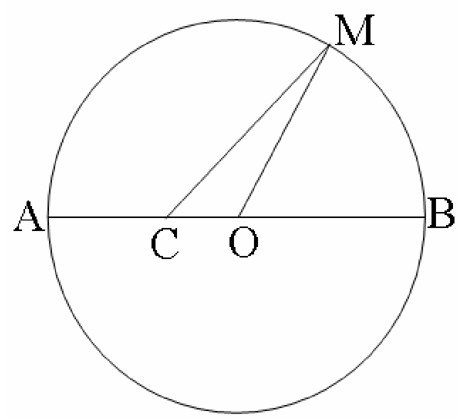
Khi đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Ví dụ 4:

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB cố định, C là một điểm cố định nằm giữa A và O. M di động trên đường tròn $(O; R)$. Tìm vị trí của M trên $(O; R)$ tương ứng lúc độ dài CM lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải:

Xét ba điểm C, O, M ta có $|OM - CO \leq CM \leq CO + OM|$



$OA = OM = OB = R$

Do đó $CA \leq CM \leq CB$

$CM \leq CB$ (không đổi)

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv B$

Vậy khi $M \equiv B$ thì đoạn thẳng CM có độ dài lớn nhất.

Mặt khác $CM \geq CA$ (không đổi)

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv A$

Vậy khi $M \equiv A$ thì đoạn thẳng CM có độ dài nhỏ nhất.

Ví dụ 5:

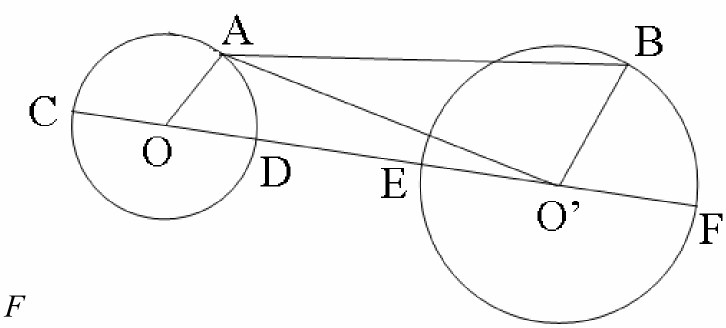
Cho hai đường tròn ngoài nhau $(O; R)$ và $(O'; R')$. A nằm trên đường tròn (O) , B nằm trên đường tròn (O'). Xác định vị trí các điểm A, B để đoạn thẳng AB có độ dài lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải:

(OO') cắt (O) tại C, D và cắt (O') tại E, F.

Xét ba điểm A, O', B , ta có

$|O'A - O'B \leq AB \leq O'A + O'B|$



Xét ba điểm O, A, O' , ta có

$|O'O - OA| \leq O'B \leq OA + OO'$

Mà $OA = OC = OD = R$ và

$O'B = O'E = O'F = R'$

Do đó $OO' - OD - O'E \leq AB \leq OC + OO' + O'F$

$\Rightarrow DE \leq AB \leq EF$

* $AB \leq EF$ (không đổi)

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv C,\ B \equiv F$

Vậy AB có độ dài lớn nhất khi $A \equiv C$ và $B \equiv F$

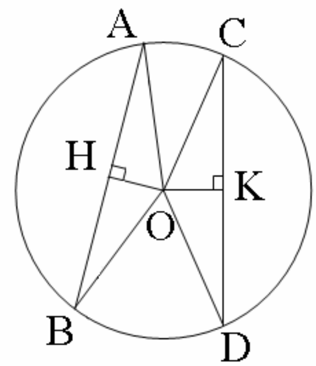
* $AB \geq DE$ (không đổi)

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv D$ và $B \equiv E$

Vậy AB có độ dài nhỏ nhất khi $A \equiv D$ và $B \equiv E$.

▼ ***Dang 3:*** *Vận dụng bất đẳng thức trong đường tròn.*

I. *Kiến thức cần nhớ:*



- Đường kính dây cung lớn nhất của đường tròn.
- Trong đường tròn (O): AB và CD là hai dây cung, H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc trên AB và CD.

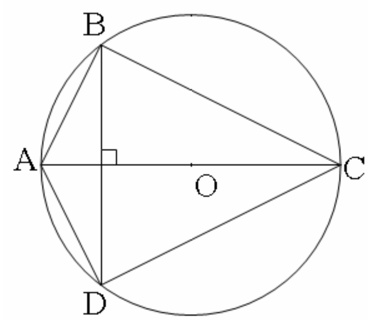
Ta có $OH \geq OK \Leftrightarrow AB \leq CD$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} \leq \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow \widehat{AOB} \leq \widehat{COD}$

Ví dụ 1:

Cho đường tròn $(O;R)$; AC là đường kính.BD là dây cung của $(O;R)$ và BD vuông góc với AC. Xác định vị trí của dây BD để diện tích tứ giác ABCD lớn nhất.

Lời giải



$AB \perp CD$ (gt)

Nên $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = R.BD$

Mà BD là dây cung của $(O;R)$

do đó $BD \leq 2R$

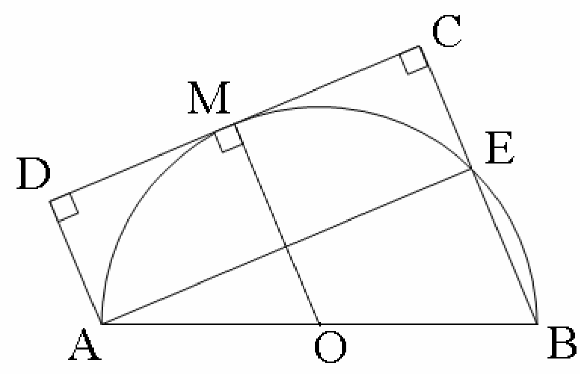
Vậy $S_{ABCD} \leq 2R^2$.

Dấu "$=$" xảy ra BD là đường kính của (O).

Ví dụ 2:

Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. M là điểm di động trên nửa đường tròn. Qua M vẽ tiếp tuyến với đường tròn, gọi D,C lần lượt là hình chiếu, của A; B trên tiếp tuyến ấy. Xác định vị trí của điểm M để diện tích của tứ giác ABCD có giá trị lớn nhất.

Lời giải



Ta có $AD \perp DC$ (gt)

$BC \perp DC$ (gt) $\Rightarrow AD \parallel BC$

$\Rightarrow ABCD$ là hình thang mà $\widehat{D} = 90^o$

nên ABCD là hình thang vuông.

$OM \perp DC$ nên $OM \parallel AD$ và O là trung điểm AB

Nên OM là đường trung bình của hình thang ABCD

$\Rightarrow OM = \dfrac{AD + BC}{2}$

Do đó $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2}.DC = OM.DC$

Vẽ $AE \perp BC$. Tứ giác ADCE là hình chữ nhật

$(\widehat{ADC} = \widehat{DCE} = \widehat{AEC} = 90^O) \Rightarrow DC = AE$

$\widehat{AEC} = 90^O \Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính AB.

$\Rightarrow AE$ là dây cung của đường tròn (O).

$\Rightarrow DC \le 2R$ (trong đường tròn đường kính là dây cung lớn nhất)

Do đó $S_{ABCD} \le R.2R = 2R^2$

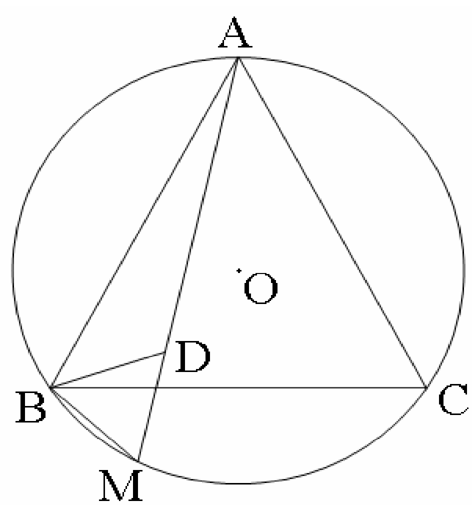
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AE$ là đường kính của (O)

$\Leftrightarrow OM \perp AB \Leftrightarrow M$ là trung điểm $\overset{\frown}{AB}$.

Ví dụ 3:

Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$. M là điểm di động trên trên (O). Xác định các vị trí của điểm M để tổng $MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Xét M thuộc cung BC.

Trên dây MA lấy điểm D sao cho

$MD = MB \Rightarrow \triangle MBD$ cân.

$\widehat{BMA} = \widehat{BCA} = 60^o$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Do dó $\triangle MBD$ đều.

$\Rightarrow BD = MB,\ \widehat{DBM} = 60^o$

$\widehat{ABD} = \widehat{ABC} - \widehat{DBC} = 60^o - \widehat{DBC}$

$\widehat{MBC} = \widehat{MBD} - \widehat{DBC} = 60^o - \widehat{DBC}$

Suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$.

Xét $\triangle MBC$ và $\triangle DBA$ có

$MB = BD$, $\widehat{MBC} = \widehat{ABD}$, $BC = AB$ ($\triangle ABC$ đều)

Do đó $\triangle MBC = \triangle DBA$ (c.g.c)

Suy ra $MC = DA$

Ta có $MA = MD + DA = MB + MC$

$\Rightarrow MA + MB + MC = 2.MA$.

MA là dây cung của $(O;R) \Rightarrow MA \le 2R$

(Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn)

Do đó $MA + MB + MC \le 4R$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA$ là đường kính của (O)

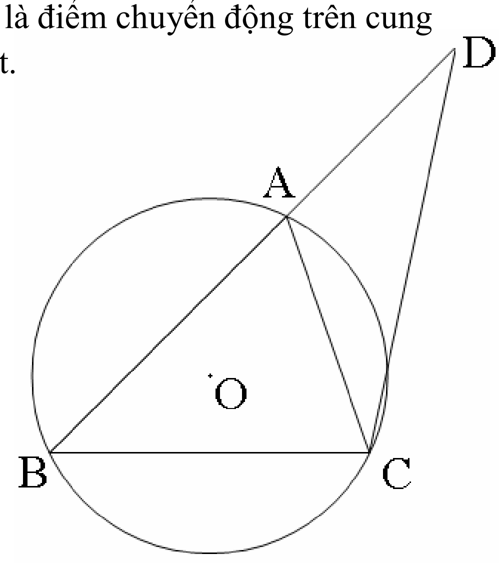
$\Leftrightarrow M$ là trung điểm cung BC.

Lập luận tương tự ta có ba vị trí để $MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhấ là trung điểm các cung BC; AC; AB.

Ví dụ 4:

Cho đường tròn $(O;R)$; BC là dây cung cố định ($BC \ne 2R$). A là điểm chuyển động trên cung lớn BC. Xác định vị trí của A để chu vi tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải



$P_{ABC} = AB + AC + BC$.

BC không đổi.

Trên tia đối tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$

$\triangle ADC$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{ADC}$

$\widehat{BAC}$ không đổi $\Rightarrow \widehat{ADC}$ không đổi.

$\widehat{BDC}$ không đổi, BC cố định

$\Rightarrow D$ thuộc cung chứa góc có số đo $\frac{1}{4}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ của (O)

dựng trên đoạn thẳng BC.

P_{ABC} lớn nhất $\Leftrightarrow (AB+AC)\max \Leftrightarrow (AB+CD)\max$

$\Leftrightarrow BD\max \Leftrightarrow$ BD là đường kính

của cung chứa góc nói trên.

Khi đó $\widehat{BDC}=90^o$.

Mà $\widehat{ABC}+\widehat{BDC}=\widehat{ACB}+\widehat{ACD}=90^o$

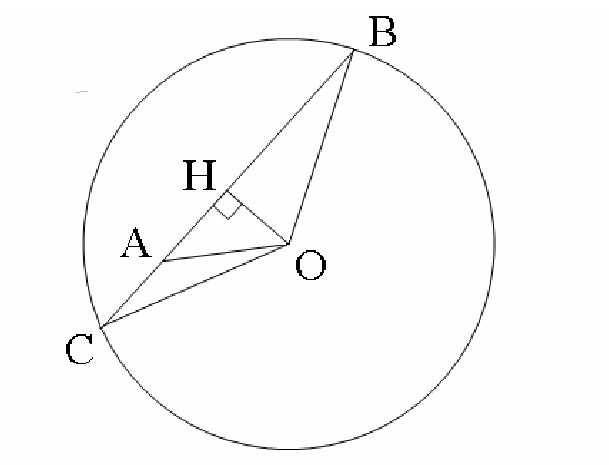
$\widehat{BDC}=\widehat{ACD}$ $(AC=AD)$

Do đó $\widehat{ABC}=\widehat{ACB} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC} \Leftrightarrow$ A là trung điểm cung lớn BC.

Ví dụ 5 :

Cho đường tròn $(O;R)$ .A điểm cố định trong đường tròn ($A \neq O$). Xác định vị trí của diểm B trên đường tròn (O) sao cho $\widehat{OBA}$ lớn nhất.

Lời giải



Vẽ dây BC của đường tròn (O) qua A.

$\triangle OBC$ cân $(OB=OC)$

$$\widehat{OBC}=\frac{180^o-\widehat{BOC}}{2}$$

vẽ $OH \perp BC$ $(H \in BC)$

$A \in BC$ nên $OH \leq OA$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv A \Leftrightarrow AB \perp OA$ tại A.

Ta có $\widehat{OBA}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{BOC}$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{BC}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ dây BC nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ OH lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv A \Leftrightarrow AB \perp OA$ tại A.

▼ ***Dạng 4:****Vận dụng bất đẳng thức đại số*

I. *Kiến thức cần nắm:*

- Bất đẳng thức côsi cho 2 số dương:

Cho 2 số dương a và b ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a=b .

- Bất đẳng thức Bunhiacopxki Sraxo (B.C.S):

Cho 4 số thực a,b,x,y ta có:

$$(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ax=by.

II. *Một số bài tập ví dụ:*

Ví dụ 1:

Cho đoạn thẳng AB=a. C là điểm trên đoạn thẳng AB. Vẽ các hình vuông ABCD và CBFG. Xác định vị trí diểm C để $S_{ACDE}+S_{CBFG}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

Đặt AC = x

Ta có $CB = a - x\,(0 \le x \le a)$

$S_{ACDE} = x^2, S_{CBFG} = (a-x)^2$

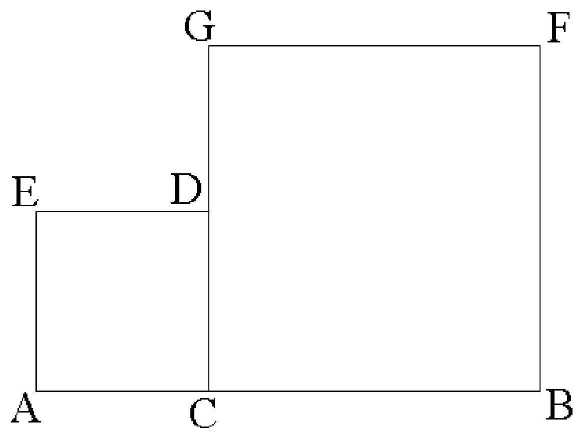
$S_{ACDE} + S_{CBFG} = x^2 + (a-x)^2$

$= x^2 + a^2 - 2ax + x^2$

$= 2(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}) + \frac{a^2}{2}$

$= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \ge \frac{a^2}{2}$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - \frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$



Ví dụ 2:

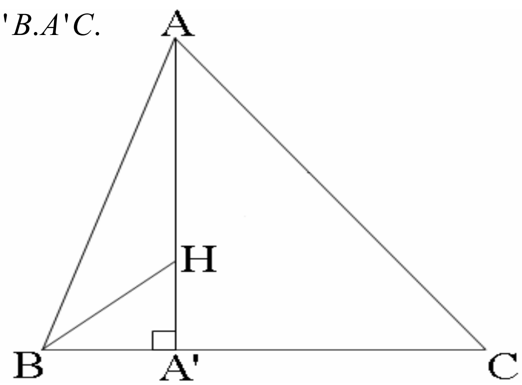
Cho đoạn thẳng BC cố định. A là điểm di động sao cho tam giac ABC nhọn. AA' là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC. Xác định vị trí điểm A để $AA'.HA'$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Xét $\triangle A'BH$ và $\triangle A'AC$ có $\widehat{BA'H} = \widehat{AA'C}\left(= 90^o\right), \widehat{A'BH} = \widehat{A'AC}$

(hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

Do đó $\triangle A'BH \sim \triangle A'AC \Rightarrow \frac{HA'}{A'C} = \frac{A'B}{AA'} \Rightarrow AA'.HA' = A'B.A'C.$



Ta có $A'B.A'C = A'B(BC - A'B) = A'B.BC - A'B^2$

$= \frac{BC^2}{4} - (\frac{BC}{2} - A'B.BC + A'B^2)$

$= \frac{BC^2}{4} - \left(\frac{BC}{2} - A'B\right)^2 \le \frac{BC^2}{4}.$

Vậy $\text{AA'.HA'} \le \frac{BC^2}{4}$.(không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{BC}{2} = A'B$

$\Leftrightarrow A'$ là trung điểm $BC \Leftrightarrow A$ thuộc trung trực BC.

Vậy $\triangle ABC$ nhọn nên A nằm ngoài đường tròn đường kính BC.

Ví dụ 3:

Trong các tứ giác nội tiếp hình chữ nhật cho trước. Tìm tứ giác có tổng bình phương các cạnh nhỏ nhất.

Lời giải:

$\triangle AMQ$ có $\widehat{A} = 90^o$ theo định lí Pitago ta có $QM^2 = AM^2 + AQ^2$

Tương tự $MN^2 = BM^2 + BN^2, NP^2 = CN^2 + CP^2, PQ^2 = DP^2 + DQ^2$

Do đó $MN^2 + NP^2 + PQ^2 = BM^2 + BN^2 + CN^2 + CP^2 + DP^2 + DQ^2$

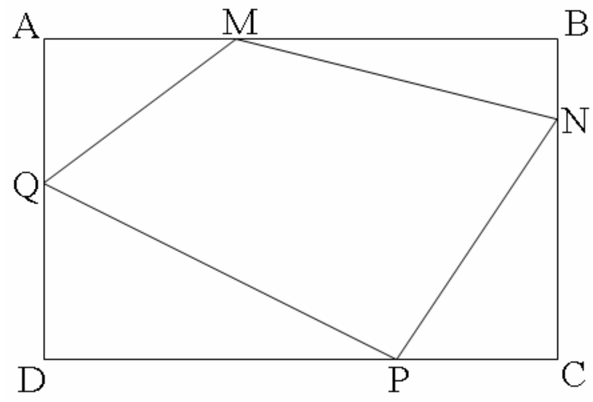
Ta có $AM^2 + BM^2 = \frac{(AM+BM)^2 + (AM-BM)^2}{2} \ge \frac{(AM+BM)^2}{2} = \frac{1}{2}AB^2$

Chứng minh tương tự ta có

$BN^2 + CN^2 \geq \frac{1}{2}BC^2$

$CP^2 + DP^2 \geq \frac{1}{2}CD^2$

$DQ^2 + AQ^2 \geq \frac{1}{2}AD^2$



Do đó $MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 \geq \frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2\right)$(không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} AM = BM \\ BN = CN \\ CP = DP \\ DQ = AQ \end{cases} \Leftrightarrow$ MNPQ là hình thoi.

<u>Ví dụ 4:</u>

Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. Qua A vẽ đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại hai điểm B;C.Xác định vi trí của d để tổng $AB + AC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>

Vẽ cát tuyến ADE qua O

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có $\widehat{A}$ (chung); $\widehat{AEB} = \widehat{ACD}$

(hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Do đó $\triangle ABE \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AE.AD$

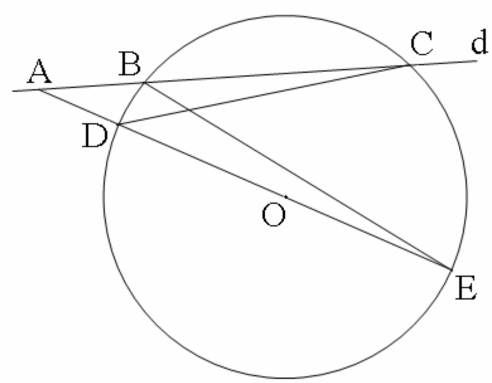
Mà $AE.AD = (OA + OE)(OA - OE) = OA^2 - OE^2 = OA^2 - R^2$

Ta có $AB + AC = (AB + AC - 2\sqrt{AB.AC})$

$= (\sqrt{AB} - \sqrt{AC})^2 + 2\sqrt{AB.AC} \geq 2\sqrt{AB.AC}$

$= 2\sqrt{OA^2 - R^2}$ (không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ d là tiếp tuyến của $(O;R)$.



<u>Ví dụ 5:</u>

Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. M là điểm chuyển động trên nửa đường tròn. Xác định vị trí điểm M để $MA + \sqrt{3}MB$ đạt giá trị lớn nhất.

<u>Lời giải</u>:

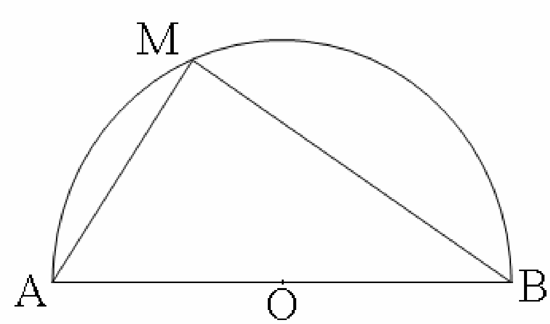
$\widehat{AMB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\triangle MAB$ có $\widehat{M} = 90^o$ nên theo định lí Pitago ta có

$MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2$

Áp dụng BĐT $|ax = by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

Ta có: $MA + \sqrt{3}MB = \left|MA + \sqrt{3}MB\right| \leq \sqrt{(1+3)\left(MA^2 + MB^2\right)}$



$= \sqrt{4.4R^2} = 4R.$

$MA = \sqrt{3}MB \le 4R$ (không đổi)

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{3}.MA = MB$

$\Leftrightarrow \triangle MAB$ là nửa tam giác đều

$\Leftrightarrow$ sđ $\overset{\frown}{MA} = 60^o$.

Phần 3:

CỰC TRỊ TRONG LƯỢNG GIÁC

▼ ***Dạng 1:*** *Sử dụng bất đẳng thức của hàm Sinx va Cosx.*

I. Phương pháp giải:

Thông thường để giải một bài cực trị ta sử dụng các bđt đã được chứng minh. Tương tự, ở lượng giác vẫn có những bđt riêng biệt.
Đối với hàm số đơn giản chỉ có sin và cos. Ta sử dụng:

$$\begin{cases} -1 \le Sinx \le 1 \\ -1 \le Cosx \le 1 \end{cases}$$

II. Một số bài tập ví dụ:

Ví dụ 1:

Tìm GTLN, GTNN của hàm số:

a) y = 1 - 2$|\sin 3x|$

b) y = 1 - $\sqrt{1-\sin x}$

Lời giải:

a) Vì $0 \le |\sin 3x| \le 1$ nên $1 \ge 1 - 2|\sin 3x| \ge 1 - 2 = -1$.

Dấu bằng xảy ra khi : $|\sin 3x| = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}$

Vậy GTLN của hàm số là 1 và GTNN của hàm số là -1tại x = $\dfrac{k\pi}{3}$

Vì -1$\le$ sinx$\le$1 nên 2 $\ge$1- sinx $\ge$0 $\Leftrightarrow \sqrt{2} \ge \sqrt{1-\sin x} \ge 0 \Leftrightarrow 1+\sqrt{2} \ge 1+\sqrt{1-\sin x} \ge 1$.

$1+\sqrt{1-\sin x} = 1 + \sqrt{2}$ khi sinx = -1 $\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$1+\sqrt{1-\sin x} = 1$ khi sinx = 1 $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

Vậy GTLN của hàm số là $1+\sqrt{2}$ tại x = x = $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ và GTNN của hàm số là 1 tại x = $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Vẫn có thể sử dụng một số kĩ năng cơ bản để tìm cực trị:

Ví dụ 2:

Tìm GTLN của $\sin^{12}x + \cos^{12}x$

Lời giải:

Cách 1:

Vì -1$\le$sinx$\le$1 và -1$\le$cosx$\Rightarrow$1 nên ta có : $\sin^{12}x \le \sin^2x$ và $\cos^{12}x \le \cos^2x$

$\Rightarrow \sin^{12}x + \cos^{12}x \le \sin^2x + \cos^2x = 1$

Cách 2:

Ta $\sin^{12}x + \cos^{12}x = 1 - 2\sin^6 x.\cos^6 x \le 1$.
Vậy GTLN cuả $\sin^{12}x + \cos^{12}x$ là 1.

<u>Ví dụ 3:</u>

Tìm GTLN, GTNN cuả: $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

(Bài tập cần qua bước biến đổi)

<u>Lời giải:</u>

Ta có $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\cos\frac{\pi}{3} = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Mà

$-1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le 1$ nên GTNN của $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ là -1 và GTLN là 1.

<u>Ví dụ 4:</u>

Tìm GTLN , GTNN của biểu thức : $\dfrac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}$ $\forall$a,b

<u>Lời giải:</u>

(Đối với bài tập này, ban đầu không phải là dạng lượng, ta phải đưa về lượng giác qua các phép biến đổi để tìm cực trị).

Đặt a= $\tan x$
b= $\tan y$

Ta có:

$$\left|\frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| = \left|\frac{(\tan x + \tan y)(1 - \tan x.\tan y)}{(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 y)}\right| = \left|\frac{\frac{\sin(x+y)}{\cos x.\cos y}.\frac{\cos(x+y)}{\cos x.\cos y}}{\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 y}}\right| =$$

$$\frac{1}{2}\left|\sin 2(x+y)\right| \le \frac{1}{2} \text{ (vì } \left|\sin 2(x+y)\right| \le 1) \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \le \frac{1}{2}$$

Vậy GTNN của biểu thức là $-\frac{1}{2}$ và GTLN là $\frac{1}{2}$.

▼ ***<u>Dạng 2</u>:*** *Hình thành bình phương đủ*

I. <u>Phương pháp giải:</u>

Dựa trên sự chuyển đổi qua lại giữa sin và cos, sử dụng các công thức lượng giác.

II. <u>Một số bài tập ví dụ:</u>

<u>Ví dụ 1:</u>

Tìm GTLN của biểu thức A= cosA.cosB.cosC

Lời giải : Ta có: cosA.cosB.cosC = $\frac{1}{2}\left[cos(A+B)+cos(A-B)\right]\cos C=$

$\frac{1}{2}\left[-\cos C+cos(A-B)\right]\cos C=-\frac{1}{2}\left[cos^2C-\cos C.cos(A-B)+\frac{1}{4}cos^2(A-B)\right]$

$+\frac{1}{8}\left[1-\sin^2(A-B)\right]=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left[\cos C-\frac{1}{2}cos^2(A-B)\right]^2-\frac{1}{8}\sin^2(A-B)\leq\frac{1}{8}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\cos C=\frac{1}{2}cos(A-B)\\ \sin(A-B)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos C=\frac{1}{2}\\ \widehat{A}=\widehat{B}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\ \widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=60^{o}$.

Vậy GTLN của biểu thức A là $\frac{1}{8}$ khi ΔABC đều

▼ ***Dang 3:*** *Sử dụng các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.*

I. Phương pháp giải:

Trong tam giác ABC nhọn:

$*\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

$*\cot A.\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

$*\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

a) tanA+ tanB+ tanC $\geq 3\sqrt{3}$

b) $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$

c) $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}$

d) $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$

► *Chứng minh*:

a) Áp dụng bđt Côsi cho 3 số dương:

$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}$

$\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A+\tan B+\tan C}$

$\Leftrightarrow (\tan A+\tan B+\tan C)^3\geq 27(\tan A+\tan B+\tan C)\Leftrightarrow(\tan A+\tan B+\tan C)^2\geq 27$

$\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$

(đpcm)

b) Áp dụng bất đẳng thức: $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ac)$ ta coù:

$$\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2 \ge 3\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3} \text{ (đpcm)}$$

c) Áp dụng bđt Côsi $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} \ge 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{B}{2} \le \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{B}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra khi Δ ABC đều.

<u>Cách 1</u>:

Xét $\cos A+\cos B+\cos C+cos60^\circ = 2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+$

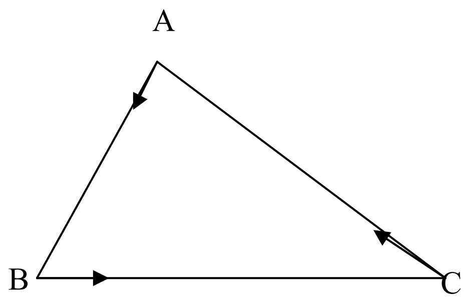
$2cos\left(\frac{C+60^\circ}{2}\right)cos\left(\frac{C-60^\circ}{2}\right) \le 2\left(cos\left(\frac{A+B}{2}\right)+cos\left(\frac{C+60^\circ}{2}\right)\right)=$

$= 4cos\frac{A+B+C+60^\circ}{4}.cos\frac{A+B-C-60^\circ}{4} \le 4cos60^\circ$

$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C+\frac{1}{2} \le 2 \Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}$ (đpcm)

<u>*Cách 2:*</u> (Ứng dụng tích vô hướng để chứng minh)

Lấy các vectơ $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ như hình vẽ và có độ dài là 1: $|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=|\vec{e_3}|=1$.



Hiển nhiên ta có:

$\left(\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}\right)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 3+2cos\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)+2cos\left(\vec{e_2},\vec{e_3}\right)+2cos\left(\vec{e_3},\vec{e_1}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2} \Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra khi $\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}=0 \Leftrightarrow \Delta ABC \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Có thể sử dụng các bđt thức trên hoặc khai thác thêm các bđt sau trong tam giác (phải chứng minh trước khi áp dụng):

$e)\tan^n A+\tan^n B+\tan^n C \ge 3\sqrt{3^n}$

$f)\sin A+\sin C+\sin B \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$g)\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}$

$h)cos^2A+cos^2B+cos^2C\geq\dfrac{3}{4}$

$i)\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{3}{2}$

$j)cos\dfrac{A}{2}+cos\dfrac{B}{2}+cos\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{3}{2}$

$k)\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}\geq\dfrac{3}{4}$

$m)\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C\geq9$ (Δ nhọn)

$n)\tan^2\dfrac{A}{2}+\tan^2\dfrac{B}{2}+\tan^2\dfrac{C}{2}\geq1$

$o)\sin A.\sin B.\sin C\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

$p)\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{1}{8}$

$q)\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

$l)\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{9}{4}$

II. Một số bài tập ví dụ:

Ví dụ 1:

Tìm GTNN của biểu thức:

A= $\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}\ \sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$

Lới giải:

Ta có A=$\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}+\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)+\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

(vì $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$)

$=1-\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\geq 1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là : $\frac{7}{8}$.

Ví dụ 2:

Tìm GTNN của biểu thức B= $\tan^6\frac{A}{2}+\tan^6\frac{B}{2}+\tan^6\frac{C}{2}$

Lời giải:

Không sử dụng gián tiếp các bđt thức cm trên, ta sử dụng các bđt toán học quen thuộc.

Ta có:

$\tan^6\frac{A}{2}+\tan^6\frac{B}{2}+\tan^6\frac{C}{2}\geq\tan^3\frac{A}{2}\tan^3\frac{B}{2}.\tan^3\frac{B}{2}\tan^3\frac{C}{2}.\tan^3\frac{C}{2}\tan^3\frac{A}{2}(1)$.

Nếu x = $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$, y = $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$, z = $\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$, thì x+y+z = 1.

Áp dụng BCS với hai dãy $\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}$ vaø $\sqrt{x^3},\sqrt{y^3},\sqrt{z^3}$ ta có:

$(x+y+z)(x^3+y^3+z^3)\geq(x^2+y^2+z^2)^2\geq\left[\frac{(x+y+z)^2}{3}\right]^2=$

$\frac{1}{9}\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3\geq\frac{1}{9}(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\tan^6\frac{A}{2}+\tan^6\frac{B}{2}+\tan^6\frac{C}{2}\geq\frac{1}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi x = y = z

$\Leftrightarrow$ A=B=C .

Vậy GTNN của B là $\frac{1}{9}$.

1. Tìm GTLN của biểu thức D=$\tan\frac{A}{4}.\tan\frac{B}{4}.\tan\frac{C}{4}$

2. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ a.Sinx + b.Siny = c \end{cases}$ Tìm GTLN của biểu thức

$E=\dfrac{\cos^2 x}{a}+\dfrac{\cos^2 y}{b}$.

▼ **<u>Dạng 4:</u>** *Biểu thức chứa các hàm số lượng giác.*

I. <u>Phương pháp giải</u>:

Giả sử các góc A, B, C thoả mãn hai điều kiện:

1) $f(A)+f(B)\geq 2f\left(\dfrac{A+B)}{2}\right)$ hoặc $f(A).f(B)\geq f^2\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

Đẳng thức xảy ra khi A=B;

2) $f(C)+f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\geq 2f\left(\dfrac{C+\dfrac{\pi}{3}}{2}\right)$ hoặc $f(C).f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\geq f^2\left(\dfrac{C+\dfrac{\pi}{3}}{2}\right)$

Đẳng thức xảy ra khi C=$\dfrac{\pi}{3}$.

Khi cộng hoặc nhân (1), (2) ta sẽ có bđt $f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ (3)

hoặc $f(A).f(B).f(C)\geq f^3\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

(4)

Đẳng thức xảy ra khi A=B=C. Tương tự ta cũng có bđt với chiều ngược lại

Xét các VD sau:

<u>Ví dụ 1:</u>

Trong tam giác ABC, tìm GTNN của biểu thức

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}$$

<u>Lời giải:</u>

Ta có:

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}\geq\frac{4}{2+\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}}$$ (áp dụng $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$)

$$\geq\frac{4}{2+\sqrt{2\left(\sin A+\sin B\right)}}=\frac{4}{2+2\sqrt{\sin\dfrac{A+B}{2}.cos\dfrac{A-B}{2}}}$$ (áp dụng BCS)

$$\geq\frac{2}{1+\sqrt{\sin\dfrac{A+B}{2}}}\Rightarrow\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}\geq\frac{2}{1+\sqrt{\sin\dfrac{A+B}{2}}}$$ (5) (có dạng (1))

Tương tự $\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{\sin\dfrac{C+60^\circ}{2}}}$ (6).Cộng (5) và (6) ta có:

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}$$

$$\ge 2\left(\frac{1}{1+\sqrt{\sin\dfrac{A+B}{2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin\dfrac{C+60^\circ}{2}}}\right)$$

$\ge\dfrac{4}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}$ (Cũng làm tương tự các bước (5), (6))

Suy ra $\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{\sin C}}\ge\dfrac{3}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$

Vậy GTNN của biểu thức là $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$. Dấu bằng xảy ra khi ΔABC đều.

Ví dụ 2:

Trong tam giác ABC, tìm GTNN của biểu thức

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)$$

Lời giải:

Ta có:

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)=1+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A.\sin B}$$

$$\ge 1+\frac{2}{\sqrt{\sin A.\sin B}}+\left(\frac{1}{\sqrt{\sin A.\sin B}}\right)^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin A.\sin B}}\right)^2=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{cos(A-B)-cos(A+B)}}\right)^2$$

$$\ge\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-cos(A+B)}}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\sin\dfrac{A+B}{2}}\right)^2\ge\left(1+\frac{1}{\sin\dfrac{C+60^\circ}{2}}\right)^2$$

(có dạng (1))

Tương tự $\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}\right)^2$ (8)

Nhân (7) và (8) ta được $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)$

$$\geq \left[\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}\right)\right]^2 \geq \left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)^4$$

Suy ra $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)^3 = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$

Vậy GTNN của biểu thức là $\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$ khi ΔABC đều.

▼ ***<u>Dạng 5</u>**: Sử dung đạo hàm*

I . <u>Kiến thức cần nắm:</u>

Để giải các dạng bài toán này cần sử dụng tới một số cong thức tính đạo hàm sau đây:

$$(Sinx)' = Cosx$$

$$(Sinu)' = (u)'.Sinx$$

$$(Cosx)' = -Sinx$$

$$(C\text{os}u)' = -(u)'.Sinx$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{Cos^2 x}$$

$$(\tan u)' = \frac{(u)'}{Cos^2 u}$$

II. *<u>Một số bài tập ví dụ:</u>*

<u>.Ví dụ 1:</u>

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = 3\cos 3x + 2\cos 2x + 9\cos x + 2$$

<u>Lời giải</u>:

Lời giải:

TXĐ: D=R

Ta có $y = f(x) = 3\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + 2\left(2\cos^2 x - 1\right) + 9\cos x + 2$

$$= 12\cos^3 x + 4\cos^2 x$$

Đặt t = $\cos x$, $-1 \le t \le 1$

Ta có $y = g(t) = 12t^3 + 4t^2$

$$y' = g'(t) = 36t^2 + 8t$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 36t^2 + 8t = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t(9t+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\dfrac{2}{9} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	-1		$-\frac{2}{9}$		0		1
$g'(t)$		+	0	-	0	+	
$g(t)$	-8	$\nearrow$	$\frac{10}{243}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	16

Căn cứ vào bảng biến thiên ta được:
max f(x) = max g(t) = 16
min f(x) = min g(t) = -8

<u>Ví dụ 2:</u>

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = \sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 5} + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 8}$$

<u>Lời giải:</u>

TXĐ: D=R

Đặt t = cos x, $-1 \le t \le 1$

Ta có $y = g(t) = \sqrt{t^2 - 2t + 5} + \sqrt{t^2 + 4t + 8}$

$D_{g(x)}$= [-1,1]

$$y' = g'(t) = \frac{t-1}{\sqrt{t^2 - 2t + 5}} + \frac{t+2}{\sqrt{t^2 + 4t + 8}}$$

$$= \frac{(t-1)\sqrt{t^2 + 4t + 8} + (t+2)\sqrt{t^2 - 2t + 5}}{\sqrt{(t^2 - 2t + 5)(t^2 + 4t + 8)}}$$

$y' = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)\sqrt{t^2+4t+8} + (t+2)\sqrt{t^2-2t+5} = 0$

$\Leftrightarrow (t+2)\sqrt{t^2-2t+5} = (1-t)\sqrt{t^2+4t+8} = 0$ (do $-1 \le t \le 1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t+2)^2\left(t^2-2t+5\right) = (1-t)^2\left(t^2+4t+8\right) \\ (t+2)(1-t) \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24t+12 = 0 \\ -2 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ -2 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

t	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	$2\sqrt{2}+\sqrt{5}$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$2+\sqrt{13}$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có

max f(x) = max g(x) = $2+\sqrt{13}$

min f(x) = min g(x) = 5

<u>Ví dụ 3:</u>

Cho $\cos 2x + \cos 2y = 1, \forall x, y \in R$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$A = \tan^2 x + \tan^2 y$$

<u>Lời giải:</u>

Ta có: $A = \tan^2 x + \tan^2 y = \left(\tan^2 x + 1\right) + \left(\tan^2 y + 1\right) - 2$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 y} - 2 = \frac{2}{1+\cos 2x} + \frac{2}{1+\cos 2y} - 2$$

$$= \frac{2\cos^2 2x - 2\cos 2x + 2}{-\cos^2 2x + \cos 2x + 2}$$

Đặt $t = \cos 2x$ với $-1 \le t \le 1$, ta có :

$$A = f(t) = \frac{2\left(t^2 - t + 1\right)}{-t^2 + t + 2}, -1 \le t \le 1$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{6\left(2t - 1\right)}{\left(-t^2 + t + 2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	1

Vậy $\min A = \frac{2}{3}$ khi $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$g(x)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow$ $\min g(x) = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

Do đó : $1 + \frac{1}{3} \le y \le 1 + \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \le y \le \frac{8}{5}$

Vậy $\max y = \frac{8}{5}$; $\min y = \frac{4}{3}$

► . ***<u>Một số bài tập dạng tương tự:</u>***

1.Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sin^2 x}$$

2.Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$y = \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2$$

3.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = f(x) = 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x$$

4.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

5.Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

6.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = (2\sin x + \cos x)(2\cos x - \sin x)$$

7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$$

8.Cho tam giác ABC tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \sqrt{3}\cos B + 3(\cos A + \cos C)$$

9.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2\tan^2 a.\tan^2 b + 2$$

10.Cho α, β, δ thoả mãn điều kiện :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta = 1$$

Tìm giá trị lớn nhất của:

$$y = \sqrt{1+\cos^2\alpha} + \sqrt{1+\cos^2\beta} + \sqrt{1+\cos^2\delta}$$

11.Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = (\cos x + \sin x)^3 + \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}$$

12.Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \cos^{10} x + \sin^{10} x$$

13. Cho ΔABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

M= cos2A + cos2B – cos2C

14. Tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$$

15. Tìm GTLN và GTNN của hàm số

$$y = \frac{\cos^2 x + \sin x\cos x}{\sin^2 x + 1} \qquad (1)$$

16. Định m để hàm số $y = 2\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + m\sin x\cos x\cos 2x$ (1)

có giá trị lớn nhất không lớn hơn 2

17. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$

18. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \frac{3\sin^2 x\left(1 - 4\sin^2 x\right)}{\cos^4 x} \qquad \text{với} \quad 0 < x < \frac{\pi}{6}$$

19. Cho ΔABC có 3 góc nhọn, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

P = tanA.tanB.tanC

20. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{1 + \tan A \tan B} + \sqrt{1 + \tan B \tan C} + \sqrt{1 + \tan C \tan A}$$

với A, B, C >0 và A + B + C = $\frac{\pi}{2}$

21. Trong mọi tam giác ABC,những tam giác nào làm cho biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất:

$$M = \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos A} + \sqrt[3]{\cos B} + \sqrt[3]{\cos C}}$$

__Hướng dẫn và đáp số:__

1. Ta có: $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski cho 4 số, ta có:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x} \le \sqrt{1^2 + 1^2}.\sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x}$$

$$\le \sqrt{2}\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{22}}{2}$$

Vậy max $y = \frac{\sqrt{22}}{2}$

Dấu “=” xảy ra khi : $1 + \frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{5}{4}\sin^2 x$

2. Ta có:

$$\left[\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\right]^2 \le \left(1^2 + 1^2\right)\left[\left(\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \ge \frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{\sin^2 2x}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(1+4^2\right)=\frac{25}{2}$$

Vậy min $y=\frac{25}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}\sin^2 x=\cos^2 x\\ \sin 2x=1\end{cases} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+\mathbb{k}\pi$

3.Ta có : $y=2\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x$

$$=1-\cos 2x+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{5}{2}\left(1+\cos 2x\right)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\left(\sin 2x\text{+cos2x}\right)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Ta có:

$$-1\leq\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 1\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{2}\leq\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(7-3\sqrt{2}\right)\leq\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{1}{2}\left(7+3\sqrt{2}\right)$$

Vậy max $y=\frac{1}{2}\left(7+3\sqrt{2}\right)$,min $y=\frac{1}{2}\left(7-3\sqrt{2}\right)$

4. Ta có: $y=4\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=2\left(1-2\cos x\right)+\sin 2x\text{+cos2x}$$

=2+sin 2x - cos2x

$$=2+\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Với $-1\leq\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 1\Leftrightarrow 2-\sqrt{2}\leq y\leq 2+\sqrt{2}$

Vậy max $y=2+\sqrt{2}$, min $y=2-\sqrt{2}$

5. Với $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos x>0$ và $\sin x>0$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$y=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\ge\frac{2}{\sqrt{\sin x\cos x}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}}\ge 2\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}\sin 2x=1\\ \dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{\sin 2x}\end{cases}\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

6.Ta có: $f(x)=(2\sin x+\cos x)(2\cos x-\sin x)$

$$=4\sin x\cos x-2\sin^2 x+2\cos^2 x-\sin x\cos x$$
$$=3\sin x\cos x+2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$
$$=\frac{3}{2}\sin 2x+2\cos 2x$$
$$=\frac{1}{2}(4\cos 2x+3\sin 2x)$$

$$=\frac{5}{2}\left(\frac{4}{5}\cos 2x+\frac{3}{5}\sin 2x\right)$$

Đặt $\cos\alpha=\frac{4}{5},\sin\alpha=\frac{3}{5}$ với $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

Ta có : $f(x)=\frac{5}{2}(\cos 2x\cos\alpha+\sin 2x\sin\alpha)=\frac{5}{2}\cos(2x-\alpha)$

Với $-1\le\cos(2x-\alpha)\le 1\Leftrightarrow -\frac{5}{2}\le\frac{5}{2}\cos(2x-\alpha)\le\frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}\le f(x)\le\frac{5}{2}$$

Vậy max $f(x)=\frac{5}{2}$; min $f(x)=-\frac{5}{2}$

7. Ta có: $y=\dfrac{3\cos^4 x+4\sin^2 x}{3\sin^4 x+2\cos^2 x}=\dfrac{3\left(1-\sin^2\right)^2+4\sin^2 x}{3\sin^4 x+2\left(1-\sin^2 x\right)}$

$$=\frac{3\sin^4 x-2\sin^2 x+3}{3\sin^4 x-2\sin^2 x+2}=1+\frac{1}{3\sin^4 x-2\sin^2 x+2}$$

Đặt $g(x)=3\sin^4 x-2\sin^2 x+2=3\left(\sin^2 x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}$

$g(x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin^2 x=1\ \Rightarrow\ \max g(x)=3\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}=3$

8. Ta có: $P=\sqrt{3}\cos B+6\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$

$$=\sqrt{3}\cos B+6\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\le\sqrt{3}\left(1-2\sin^2\frac{B}{2}\right)+6\sin\frac{B}{2}$$

$$\le-2\sqrt{3}\sin^2\frac{B}{2}+6\sin\frac{B}{2}+\sqrt{3}$$

$$\le-2\sqrt{3}\left(\sin\frac{B}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{5\sqrt{3}}{2}\le\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra : max $P=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ khi $\begin{cases}\cos\frac{A-C}{2}=1\\ \sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=C=30^\circ\\ B=120^\circ\end{cases}$

9. Ta có: $\cot^4 a+\cot^4 b=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2\cot^2 a.\cot^2 b$

$\Rightarrow P=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2\cot^2 a.\cot^2 b+2\tan^2 a.\tan^2 b+2$

$$=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2\left(\cot^2 a.\cot^2 b+\tan^2 a.\tan^2 b-2\cot a.\cot b.\tan a.\tan b\right)$$
$$+4\cot a.\cot b.\tan a.\tan b+2$$

$$=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2\left(\cot a.\cot b-\tan a.\tan b\right)^2+4+2\ge 6$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}\cot a-\cot b=0\\ \cot a.\cot b-\tan a.\tan b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ \cot a=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{\pi}{4}$$

Vậy min $P=6$

10. Áp dụng BĐT Bunhiacopski cho 6 số, ta có:

$$\sqrt{1+\cos^2\alpha}+\sqrt{1+\cos^2\beta}+\sqrt{1+\cos^2\delta}$$

$$\le\sqrt{1^2+1^2+1^2}.\sqrt{1+\cos^2\alpha+1+\cos^2\beta+1+\cos^2\delta}$$

$$\le\sqrt{3}.\sqrt{3+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\delta}$$

vì $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\delta=1$ nên ta có :

$$\sqrt{1+\cos^2\alpha}+\sqrt{1+\cos^2\beta}+\sqrt{1+\cos^2\delta}\le\sqrt{3}.\sqrt{4}=2\sqrt{3}$$

Vậy max $y=2\sqrt{3}$

Dấu “=” xảy ra khi: $\sqrt{1+\cos^2\alpha} = \sqrt{1+\cos^2\beta} = \sqrt{1+\cos^2\delta}$

$$\Leftrightarrow 1+\cos^2\alpha = 1+\cos^2\beta = 1+\cos^2\delta$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \cos^2\beta = \cos^2\delta = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \cos\beta = \cos\delta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

11. Ta có $\quad y = (\cos x + \sin x)^3 + \dfrac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$

$$= \left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^3 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{\sin^2 2x}$$

vì $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geq -1 \Rightarrow \cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geq -1$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geq -2\sqrt{2}$$

và $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow \dfrac{4}{\sin^2 2x} \geq 4$

suy ra $y = 2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \dfrac{4}{\sin^2 2x} \geq 4-2\sqrt{2}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin^2 2x = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

Vậy $\min y = 4-2\sqrt{2}$

12. Ta có: $y = \cos^{10} x + \sin^{10} x$

$$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5 + \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5$$

$$= \frac{1}{2^5}\left[(1+\cos 2x)^5 + (1-\cos 2x)^5\right]$$

$$= \frac{1}{2^5}\Big(1 + 5\cos 2x + 10\cos^2 2x + 10\cos^3 2x + 5\cos^4 2x + \cos^5 2x$$

$$+1 - 5\cos 2x + 10\cos^2 2x - 10\cos^3 2x + 5\cos^4 2x - \cos^5 2x\Big)$$

$$= \frac{1}{32}\left(2 + 20\cos^2 2x + 10\cos^4 2x\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(1 + 10\cos^2 2x + 5\cos^4 2x\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[5\left(\cos^2 2x + 1\right)^2 - 4\right]$$

Mặt khác $0 \le \cos^2 2x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 1 + \cos^2 2x \le 2$

$$\Leftrightarrow 1 \le \left(1 + \cos^2 2x\right)^2 \le 4$$

$$\Leftrightarrow 5 \le 5\left(1 + \cos^2 2x\right)^2 \le 20$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}(5 - 4) \le \frac{1}{16}\left[5\left(1 + \cos^2 2x\right)^2 - 4\right] \le \frac{1}{16}(20 - 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} \le y \le 1$$

Vậy max y =1, dấu "=" xảy ra khi x=0

min y = $\frac{1}{16}$, dấu "=" xảy ra khi x=$\frac{\pi}{4}$

13.

Ta có

M= cos2A + cos2B – cos2C

= 2cos(A+B)cos(A-B) + 1 – 2cos^{2}C

= -2cosC cos(A-B) + 1 – 2cos^{2}C

= -2[cos^{2}C + cos(A-B) cosC + $\frac{1}{4}$ cos^2(A-B)] + $\frac{1}{2}$ [cos^2(A-B)] +1

= -2[cosC + $\frac{1}{2}$ cos(A-B)]^2 + $\frac{1}{2}$ [1 - sin^2(A-B)] +1

= $\frac{3}{2}$ -2[cosC + $\frac{1}{2}$ cos(A-B)]^2 - $\frac{1}{2}$ sin^2(A-B)] $\le \frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos C + \frac{1}{2}\cos\left(A - B\right) = 0 \\ \sin\left(A - B\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos C + \dfrac{1}{2} = 0 \\ A - B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos C = -\dfrac{1}{2} \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = \dfrac{\pi}{6} \\ C = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Vậy max M = $\dfrac{3}{2}$ ứng với ΔABC có

A = B = $\dfrac{\pi}{6}$ và C = $\dfrac{2\pi}{3}$

14. Vì $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x \le \sqrt{2} < 2$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x - 2 < 0$$

hay $\sin x + \cos x - 2 \ne 0 \quad \forall x \in R$

Do đó $y = \dfrac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$ (1)

$$\Leftrightarrow y(\sin x + \cos x - 2) = 2 + \cos x$$

$$\Leftrightarrow y\sin x + (y - 1)\cos x = 2 + 2y \quad (2)$$

(1) có nghiệm đối với x $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm đối với x

$$\Leftrightarrow y^2 + (y-1)^2 \ge (2 + 2y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 2y + 1 \ge 4 + 8y + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 10y + 3 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5-\sqrt{19}}{2} \le y \le \frac{-5+\sqrt{19}}{2}$$

Vậy min y = $\dfrac{-5-\sqrt{19}}{2}$ và max y = $\dfrac{-5+\sqrt{19}}{2}$

15. Ta có :

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

Và $\sin x\cos x\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x$

Nên

$$(1) \Leftrightarrow y = 2\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right) + \frac{m}{4}\sin 4x$$

$$\Leftrightarrow 4y = 6 + 2\cos 4x + m\sin 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x + m\sin 4x = 4y - 6$$

PT trên có nghiệm đối với x

$$\Leftrightarrow 2^2 + m^2 \ge (4y-6)^2$$

$$\Leftrightarrow 16y^2 - 48y + 32 - m^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{m^2+4}}{4} \le y \le \frac{6+\sqrt{m^2+4}}{4}$$

Do đó $\max y = \frac{6+\sqrt{m^2+4}}{4}$

Ta có $\max y \le 2 \Leftrightarrow \frac{6+\sqrt{m^2+4}}{4} \le 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2+4} \le 2$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4 \le 4$$

$$\Leftrightarrow m = 0$$

16.

Ta có

$(1) \Leftrightarrow y\left(\sin^2 x + 1\right) = \cos^2 x + \sin x\cos x$ (do $\sin^2 x + 1 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow y\left(\frac{1-\cos 2x}{2} + 1\right) = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow y - y\cos 2x + 2y = 1 + \cos 2x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (1+y)\cos 2x + \sin 2x = 3y - 1 \quad (2)$$

(1) có nghiệm đối với x $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm đối với x

$$\Leftrightarrow (1+y)^2 + 1^2 \ge (3y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 2 \ge 9y^2 - 6y + 1$$

$$\Leftrightarrow 8y^2 - 8y - 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{6}}{4} \le \frac{2+\sqrt{6}}{4}$$

vậy $\max y = \frac{2+\sqrt{6}}{4}$ và $\min y = \frac{2-\sqrt{6}}{4}$

17. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$

Lời giải:

Ta có

$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$$

$$= 1\sqrt{\cos x} + 1\sqrt{\sin x} \le \sqrt{\left(1^2 + 1^2\right)\left(\cos x + \sin x\right)}$$ (BĐT Bunhiacopski)

$$\Rightarrow y \le \sqrt{2\left(\cos x + \sin x\right)}$$

mặt khác $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

suy ra $y \le \sqrt{2\sqrt{2}}$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos x} = \sqrt{\sin x} \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Vậy $\max y = \sqrt{2\sqrt{2}}$ khi $x = \frac{\pi}{4}$

Ta có $0 \le \cos x \le 1$ (ĐK để y xác định)

và $0 \le \sin x \le 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x \le \cos x \le \sqrt{\cos x} \\ \sin^2 x \le \sin x \le \sqrt{\sin x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = \cos^2 x + \sin^2 x \le \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = y$$

nên $y \ge 1$, dấu "=" xảy ra khi x = 0

Vậy min y = 1 khi x = 0

18. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \frac{3\sin^2 x\left(1 - 4\sin^2 x\right)}{\cos^4 x} \quad \text{với} \quad 0 < x < \frac{\pi}{6}$$

Lời giải:

Vì $0 < x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < \sin x < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 0 < \sin^2 x < \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 4\sin^2 x > 0$$

Áp dụng BĐT cô-si cho 2 số $3\sin^2 x$ và $1 - 4\sin^2 x$ ta được

$$\frac{3\sin^2 x + \left(1 - 4\sin^2 x\right)}{2} \geq \sqrt{3\sin^2 x\left(1 - 4\sin^2 x\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1 - \sin^2 x}{2}\right)^2 \geq 3\sin^2 x\left(1 - 4\sin^2 x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^4 x}{4} \geq 3\sin^2 x\left(1 - 4\sin^2 x\right)(1)$$

Chia 2 vế của (1) cho $\cos^4 x$ (vì $0 < x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos^4 x > 0$)

Ta được $y = \frac{3\sin^2 x\left(1 - 4\sin^2 x\right)}{\cos^4 x} \leq \frac{1}{4}$

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 3\sin^2 x = 1 - 4\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{7}$

ta tìm được $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ thì $\sin^2 x = \frac{1}{7}$

Vậy $\max y = \frac{1}{4}$

19.

Ta có $y = \sqrt{1 + 2\cos^2 x} + \sqrt{1 + 3\sin^2 x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3 + 6\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 + 6\sin^2 x}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có :

$$y \leq \sqrt{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(3 + 6\cos^2 x + 2 + 6\sin^2 x\right)}$$

$$\Rightarrow y \leq \sqrt{\frac{5}{6}\left(5 + 6\right)} = \sqrt{\frac{55}{6}}$$

Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}.\sqrt{3 + 6\cos^2 x} = \sqrt{2}.\sqrt{2 + 6\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 3.(3 + 6\cos^2 x) = 2.(2 + 6\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 9 + 18\cos^2 x = 4 + 12(1 - \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 30\cos^2 x = 7 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{7}{30}$$

Vậy $\max y = \sqrt{\frac{55}{6}}$

20.

Ta có A + B + C = π

$\Leftrightarrow A+B=\pi-C$

$\Rightarrow \tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\tan C$

$\Leftrightarrow \tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A.\tan B)$

$\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$ (1)

Vì ΔABC có 3 góc nhọn $\Rightarrow \tan A, \tan B, \tan C>0$

Áp dụng BĐT cô-si cho 3 số tgA, tgB, tgC

$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$ (2)

từ (1) và (2) ta được

$\tan A.\tan B.\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$

$\Leftrightarrow (\tan A.\tan B.\tan C)^3\geq 27\tan A.\tan B.\tan C$

$\Leftrightarrow (\tan A.\tan B.\tan C)^2\geq 27$

$\Leftrightarrow \tan A.\tan B.\tan C\geq 3\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi tanA = tanB = tanC

$\Leftrightarrow A=B=C$ hay ΔABC đều

21.

Vì A + B + C = $\dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow A+B=\dfrac{\pi}{2}-C$

$\Rightarrow \tan\left(A+B\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\cot C=\dfrac{1}{\tan C}$

$\Leftrightarrow \left(\tan A+\tan B\right)\tan C=1-\tan A\tan B$

$\Leftrightarrow \tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1$

Mặt khác áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta được

$M\leq\sqrt{\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(1+\tan A\tan B+1+\tan B\tan C+1+\tan C\tan A\right)}$

$=\sqrt{3\left(3+1\right)}=2\sqrt{3}$

dấu bằng xảy ra khi

tanA tanB = tanB tanC = tanC tanA

$\Leftrightarrow \tan A=\tan B=\tan C$

$\Leftrightarrow A=B=C=\dfrac{\pi}{6}$ (do A + B + C = $\dfrac{\pi}{2}$)

Ta có: $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\leq 2\cos\dfrac{C}{2}$ (1)

Áp dụng BĐT : $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, dấu "=" xảy ra khi $a=b$

Ta có:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}}{2}\right)^3 \leq \frac{\sin A+\sin B}{2} \leq \cos\frac{C}{2} \quad (\text{ theo}(1)\ )$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}}{2} \leq \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}} \qquad (2)$$

Tương tự:

$$\frac{\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}}{2} \leq \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} \qquad (3)$$

$$\frac{\sqrt[3]{\sin C}+\sqrt[3]{\sin A}}{2} \leq \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} \qquad (4)$$

Cộng (2),(3),(4) ta có:

$$\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C} \leq \sqrt[3]{\cos A}+\sqrt[3]{\cos B}+\sqrt[3]{\cos C}$$

$$\Leftrightarrow M=\frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos A}+\sqrt[3]{\cos B}+\sqrt[3]{\cos C}} \leq 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \sin A=\sin B=\sin C \\ \cos\frac{A-B}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}$

Vậy max $M=1 \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều

Phần 5 :

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1:

Cho a + b $\geq$ 1, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a^3 + b^3$ là

A) 1 B) 1/2 C) 1/4 D) 2

Bài 2:

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ là

A. $\dfrac{1}{3}$ B. 3 C. $\dfrac{3}{2}$ D.5

Bài 3:

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x^2-x+1}{2x^2+x+1}$:

A. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ B. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ C. $\dfrac{9+4\sqrt{2}}{7}$ D. $\dfrac{9-4\sqrt{2}}{7}$

Bài 4:

Cho a + b = 1, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a^4 + b^4$ là

A) 2 B) 1 C) 1/8 D) 1/4

Bài 5:

Cho a, b, c >0 thoả mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$, giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{a+b}{2a-b}+\dfrac{c+b}{2c-b}$ là

A.1 B.2 C.3 D.4

Bài 6:

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \left|\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-x+1}\right|$

Bài 7:

GTNN, GTLN của hàm số $y = \dfrac{2x^2+4x+5}{-x^2+1}$

A. Min y = 1, max y = 6
B. Min y = -6, max y = -1
C. Min y =2, max y = 5
D. Min y = -5, max y = -2

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4

Bài 8:

Cho a, b, c >0, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$ là

A) 1 B) 1/2 C) 3/2 D) 2

Bài 9:

Cho a, b, c, d >0. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a+b}{b+c+d}+\frac{b+c}{c+d+a}+\frac{c+d}{d+a+b}+\frac{d+a}{a+b+c} \text{ là}$$

A) 8/3 B)1/3 C) 2/3 D) 1

Bài 10:

Cho hàm số $y=\cos^6 x-\sin^5 x$. Giá trị lớn nhất của y là

A) -1 B) 0 C) 1/2 D) 1

Bài 11:

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ lần lượt là

A) max y = 1, min y = -1/3 B) max y = 2, min y = 1/2
C) max y = 1/2, min y = 1/3 D) max y = 3, min y = 1/3

Bài 12:

Giả sử x, y, z là những số dương thay đổi thỏa x + y + z = 1. Giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}+\dfrac{z}{z+1}$ là

A) 3/4 B) 1/3 C) 1 D) 2

Bài 13:

Cho các số dương x, y, z sao cho xyz = 1 và n là số nguyên dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1+y}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1+z}{2}\right)^n$ là

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Bài 14:

Cho $\sin x+\sin y+\sin z=0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sin^2 x+\sin^4 x+\sin^6 x \text{ là}$$

A) 0 B) 1/2 C) 1 D) 2

Bài 15:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y+\sin^2(x-y)}+\sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y+\sin^2(x-y)} \text{ là}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

Bài 16:

Giá trị lớn nhất của biểu thức $\left|\dfrac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}\right|$ là

A) 0 B) 1/2 C) 1 D) 2

Bài 17:

Cho x, y, z dương và x + y + z = 1. Giá trị lớn nhất của
S = xyz(x+y)(y+z)(z+x) là

A) 8/729 B) 1/729 C) 0 D) 1/2

Bài 18:

Cho x, y thay đổi sao cho $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$.

giá trị lớn nhất của biểu thức (3-x)(4-y)(2x+3y) là

A) 1 B) 6 C) 2 D) 0

<u>Bài 19</u>:

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$\sqrt{a^2+b^2-2a-12b+37}+\sqrt{a^2+b^2+6a-6b+18}$

A) 2 B) 5/2 C) 3 D) 5

<u>Bài 20:</u>

Cho $x^2 + y^2 = 1$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của P = x + y lần lượt là

A) max P = 1, min P = 0 B) max P = 0, min P = $-\sqrt{2}$

C) max P = $\sqrt{2}$, min P = 1 D) max P = $\sqrt{2}$, min P = $-\sqrt{2}$

<u>Bài 21:</u>

Cho $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$.Giá trị lớn nhất của P= $\left|x(u-v)+y(u+v)\right|$ là

A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) 0 D) $-\sqrt{2}$

<u>Bài 22:</u>

Cho ΔABC giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C}$ là

A) 0 B) 1/2 C) 2 D) 3

<u>Bài 23:</u>

Cho x, y, z là 3 góc nhọn thỏa x + y + z = 90^o. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=\sqrt{5+\tan x\tan y}+\sqrt{5+\tan y\tan z}+\sqrt{5+\tan z\tan x}$ là

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$

<u>Bài 24:</u>

Cho $\begin{cases} x,y>0 \\ x+y=1 \end{cases}$, giá trị nhỏ nhất của

$P=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$ là

A) 25/2 B) 1/2 C) 1 D) 2

<u>Hướng dẫn và đáp án :</u>

1. Từ giả thiết $a+b\ge 1$ biến đổi tương đương ta được

$a^3+b^3\ge 3b^2-3b+1$

mà $3b^2-3b+1=3\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\ge\dfrac{1}{4}$

2.B

3.D

4. Từ a + b = 1 suy ra $a^2 + 2ab + b^2 = 1$

mặt khác $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

từ đó ta có $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ bình phương hai vế, kết hợp với bdt

$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0$ ta được $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

5. Từ giả thiết ta có $b = \frac{2ac}{a+c}$ vậy :

$$\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} = \frac{a+3b}{2a} + \frac{c+3a}{2c} = \frac{2ac+3\left(a^2+c^2\right)}{2ac} \geq 4$$

6.C

7.A

8. Đặt P = $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Ta có 2(P + 3) = $\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{C+a}\right) \geq 9$

(Bunhiacopski cho 3 cặp số)

Suy ra P $\geq$ 3/2

9. A

10. D

11. A

12. Áp dụng bunhiacopski cho ba cặp số tìm được max = ¾

13. Ta có $\frac{1+a}{2} \geq \sqrt{a} \Rightarrow \left(\frac{1+a}{2}\right)^n \geq \sqrt{a^n}$

Áp dụng ta tìm được min = 3

14. D

15. C

16. B

17. Áp dụng côsi cho 3 số :

$1 = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

$2 = (x+y)+(y+z)+(z+x) \geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Nhân vế theo vế, biến đổi tìm được max = 8/729

18. Có thể viết lại biểu thức đã cho thành: $\frac{1}{6}(6-2x)(12-3y)(2x+3y)$

Áp dụng côsi cho ba số tìm được max = 36.

19. D

20. D

21. A

22. D

23. C

24. Áp dụng B.C.S cho 2 cặp số $(1, 1)$ và $\left(x+\frac{1}{x}, y+\frac{1}{y}\right)$

Sau đó biến đổi tương đương ta được $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2 \le \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{y}\right)^2$

vì $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{xy} \ge 4$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{xy}\right)^2 \ge 25$

vậy min = 25/2

__Phần 4__

DÙNG ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM GTLN – GTNN

__A/ LÝ THUYẾT__

1. Định nghĩa giá trị lớn nhất

Cho hàm số y = f(x) xác định trên miền D.

Hàm số f(x) đạt giá trị lớn nhất trên D

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le M \text{ (là một số cố định) } \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = M \end{cases}$$

Kí hiệu: GTLN của f(x) là: Maxf(x)

2. Định nghĩa giá trị nhỏ nhất

Cho hàm số y = f(x) xác định trên miền D.

Hàm số f(x) đạt giá trị nhỏ nhất trên D

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge N \text{ (là một số cố định) } \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = N \end{cases}$$

Kí hiệu: GTNN của f(x) là: Minf(x)

__B/ CÁC DẠNG TOÁN:__

__Dạng 1:__ TÌM MAX – MIN BẰNG CÁCH ĐẠO HÀM TRỰC TIẾP

__1. Phương pháp giải__

Bước 1: Tìm miền xác định D của hàm y = f(x) (nếu đề chưa cho)

Bước 2: Tính y' = f'(x); giải phương trình y' = 0 tìm nghiệm x $\in$ D

Bước 3: Lập bảng biến thiên

x	
f'(x)	
f(x)	

__2. Chú ý__

Nếu hàm y = f(x) đạt được Minf(x); Maxf(x) trì nhiều điểm thì chỉ cần chỉ ra một điểm $x_0 \in D$ là đủ.

__3. Bài tập__

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm:

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

Giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên:

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	0	↘	-2	↗	2	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxf(x) = 2 đạt được khi $x = \sqrt{2}$
- Minf(x) = -2 đạt được khi $x = -\sqrt{2}$

Bài 2: Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên:

x	-2		$-\sqrt{2}$		2
f'(x)		+	0	-	
f(x)	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxf(x) = $2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = \sqrt{2}$
- Minf(x) = $-2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = -2$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{1 - x^2} + 2\sqrt[3]{\left(1 - x^2\right)^2}$$

Giải

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{8x}{3}\sqrt[3]{1-x^2} = -x\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{8}{\sqrt[3]{1-x^2}}\right)}_{(>0)}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	3	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxy = 3 đạt được khi x = 0
- Miny = 0 đạt được khi x = 1 hoặc x = -1

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = x + 1 + \sqrt{-3x^2 + 6x + 9}$$

Giải

Điều kiện: $-3x^2 + 6x + 9 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$

Ta có: $y' = 1 + \dfrac{6-6x}{2\sqrt{-3x^2+6x+9}} = \dfrac{\sqrt{-3x^2+6x+9} + 3 - 3x}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-3x^2+6x+9} = 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 \ge 0 \\ -3x^2 + 6x + 9 = (3x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 12x^2 - 24x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên:

x	-1		2		3
y'		+	0	-	
y	0	↗	6	↘	4

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxy = 6 đạt được khi x = 2
- Miny = 0 đạt được khi x = -1

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 5\cos x - \cos 5x \text{ với } -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$$

Giải

Ta có: $y' = -5\sin x + \sin 5x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{k\pi}{3} \end{cases} \left(k \in Z\right)$$

Do $-\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}$ nên: $x = -\dfrac{\pi}{5}\,; x = 0\,; x = \dfrac{\pi}{6}$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$3\sqrt{2}$	↗	$3\sqrt{3}$	↘	4	↗	$3\sqrt{3}$	↘	$3\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxy = $3\sqrt{3}$ đạt được khi x = $\dfrac{\pi}{6}$
- Miny = 4 đạt được khi x = 0

Bài 6: Giả sử (x,y) là nghiệm của phương trình: $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = 6 - a^2 \end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biều thức: $F = xy + 2\left(x + y\right)$

Giải

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \left(x + y\right)^2 - 2xy = 6 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ xy = a^2 - 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow x,y$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - aX + a^2 - 3 = 0$$

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow -2 \le a \le 2$

lúc đó: $F = xy + 2\left(x + y\right) = a^2 - 3 + 2a$

$F' = 2a + 2; F' = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Bảng biến thiên:

a	-2		-1		2
F’		-	0	+	
F	-3	↘	-4	↗	5

Dựa vào bảng biến thiên, ta được: MinF = -4 đạt được khi a = -1

Bài 7: Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình:

$$12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0 \qquad (1)$$

Tìm m để biểu thức: $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Giải

Điều kiện để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 là: $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 12\left(m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}\right) = -3m^2 - \frac{144}{m^2} + 48 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{3} \leq m \leq -2 \\ 2 \leq m \leq 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Theo định lý Viet:

$$A = x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2\right)$$

$$= \left(x_1 + x_2\right)\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1 x_2\right]$$

$$= \frac{m}{2}\left[\frac{m^2}{4} - \frac{3}{12}\left(m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(m - \frac{3}{m}\right)$$

Xét hàm số: $f(m) = m - \dfrac{3}{m}$ với $\left[\begin{array}{l} -2\sqrt{3} \leq m \leq -2 \\ 2 \leq m \leq 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{m^2} > 0$$

Bảng biến thiên:

x	$-2\sqrt{3}$		-2		2		$2\sqrt{3}$
f’(x)							
f(x)	$\frac{-3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- MaxA = $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ đạt được khi x = $2\sqrt{3}$

- MinA = $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ đạt được khi x = $-2\sqrt{3}$

Bải 8: Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình:

$$x^2 + ax + \frac{1}{a^2} = 0 \quad (a \neq 0) \qquad (1)$$

Định a để $A = x_1^4 + x_2^4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là: $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow a^4 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |a| \geq \sqrt{2}$$

Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x1 \cdot x2 = \dfrac{1}{a^2} \end{cases}$

Ta có:

$$A = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2x_1^2 x_2^2$$

$$= \left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 x_2\right]^2 - 2x_1^2 x_2^2$$

$$= \left(a^2 - \frac{2}{a^2}\right)^2 - \frac{2}{a^4} = a^4 - 4 + \frac{2}{a^4}$$

$$A' = 4a^3 - \frac{8}{a^5} = 4 \cdot \frac{a^8 - 2}{a^5}$$

$$A' = 0 \Leftrightarrow a^8 - 2 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt[8]{2}$$

Bảng biến thiên:

a	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt[8]{2}$	$\sqrt[8]{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
A'						
A	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$	↗ $+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được:

minA $= \dfrac{1}{2}$ đạt được $\Leftrightarrow a = \pm\sqrt[8]{2}$

Bài 9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = |x^3 - 3x| \text{ với } -2 \leq x \leq 1$$

Giải

Ta có: Miny = 0 đạt được khi $x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$

$$y = |x^3 - 3x| = \begin{cases} x^3 - 3x \text{ nêu } x^3 - 3x \geq 0 \\ 3x - x^3 \text{ nêu } x^3 - 3x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^3 - 3x \text{ nêu } \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3} \leq x \leq 0 \\ x \geq \sqrt{3} \end{array} \right. \\ 3x - x^3 \text{ nêu } \left[\begin{array}{l} 0 \leq x < \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{array} \right. \end{cases}$$

Xét hàm $y_1 = x^3 - 3x$

$$y'_1 = 3x^2 - 3;\ y'_1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$y_2 = 3x^2 - x^3$$

$$y'_2 = 3 - 3x^2;\ y'_2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Bảng biến thiên:

x	-2		$-\sqrt{3}$		-1		0		1	$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'₁				+	0	-			0			+
y'₂		-			0			+	0		-	
y'		-		+	0	-		+	0		-	+
y	14	↘		↗	4	↘		↗	2			
			0				0					

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ Maxy = 14 đạt được khi x= -2

Bải 10: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = x^2\sqrt{2 - |x|}$$

Giải

Điều kiện: $2 - |x| \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Đặt $t = |x|$ với $0 \leq t \leq 2$

Hàm số đã cho trở thành: $y = t^2\sqrt{2 - t}$

$$y' = \frac{4t - 5t^2}{2\sqrt{2 - t}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{4}{5} \end{array} \right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{4}{5}$		2
y’		+	0	-	
y	0	↗	$\frac{16\sqrt{6}}{25\sqrt{5}}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxy = $\frac{16\sqrt{6}}{25\sqrt{5}}$ đạt được khi x = 0
- Miny = 0 đạt được khi x = $\frac{4}{5}$

Bài 11: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = x^4 - 6ax^2 + a^2 \text{ với } -2 \le x \le 1$$

Giải

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 12ax$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^3 - 3a\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3a = 0 \end{array}\right.$$

• Nếu $a \le 0$ ta có bảng biến thiên:

x	-2		0		1
f’(x)	0	-	0	+	
f(x)		↘	a^2	↗	

Từ bảng biến thiên, ta được:

- Min $f(x) = f(0) = a^2$ đạt được khi x = 0
- Min $f(x) = \max\left\{f(1), f(-2)\right\} = \max\left\{a^2 - 6a + 1,\ a^2 - 24a + 16\right\}$

  $= a^2 - 24a + 16$

• Nếu a>0 thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3a}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3a}$		0		$\sqrt{3a}$		$+\infty$
f’(x)		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

• Khi $x = \pm\sqrt{3a}$ thì hàm số đạt cực tiểu, do đó:

hàm số f(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x \in \left[-2, 1\right]$ là:

$$\max f(x) = \max\left\{f(-2), f(0), f(1)\right\}$$

$f(-2) = a^2 - 24a + 16$

$f(0) = a^2$

$f(1) = a^2 - 6a + 1$

Ta có: $f(-2) - f(0) = -24a + 16$

$f(0) - f(1) = 6a - 1$

$f(1) - f(-2) = 18a - 15$

Bảng xét dấu:

a	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
f(-1) - f(0)		+		+	0	-		-	
f(0) - f(1)		-	0	+		+		+	
f(1) - f(-2)		-		-		-	0	+	

+ Nếu $0 \le a \le \frac{1}{6}$ thì $\begin{cases} f(-2) > f(0) \\ f(-2) > f(1) \end{cases}$

$\Rightarrow \max\left\{f(-2), f(0), f(1)\right\} = f(-2)$

$\Rightarrow \max f(x) = f(-2) = a^2 - 24a + 16$

+ Nếu $\frac{1}{6} < a \le \frac{2}{3}$ thì $\begin{cases} f(-2) > f(0) \\ f(-2) > f(1) \end{cases}$

$\Rightarrow \max f(x) = f(-2) = a^2 - 24a + 16$

+ Nếu $\frac{2}{3} < a \le \frac{5}{6}$ thì $\begin{cases} f(0) > f(-2) \\ f(0) > f(1) \end{cases}$ $\Rightarrow \max f(x) = f(0) = a^2$

+ Nếu $a > \frac{5}{6}$ thì $\begin{cases} f(0) > f(-2) \\ f(0) > f(1) \end{cases}$ $\Rightarrow \max f(x) = f(0) = a^2$

Vậy: - Nếu $0 < a \le \frac{2}{3}$ thì $\max f(x) = f(-2) = a^2 - 24 + 16$

- Nếu $a > \frac{2}{3}$ thì $\max f(x) = f(0) = a^2$

• Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $\min f(x) = f\left(\pm\sqrt{3a}\right) = -8a^2$

Kết luận: + Nếu $a \le 0$ thì $\begin{cases} \min f(x) = a^2 \\ \max f(x) = a^2 - 24a + 16 \end{cases}$

+ Nếu $0 < a \le \frac{2}{3}$ thì $\begin{cases} \max f(x) = a^2 - 24a + 16 \\ \min f(x) = -8a^2 \end{cases}$

+ Nếu $a > \frac{2}{3}$ thì $\begin{cases} \max f(x) = a^2 \\ \min f(x) = -8a^2 \end{cases}$

Bài 12: Cho ΔABC có ba góc A > B > C. Tìm GTNN của hàm số:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{x - \sin A}{x - \sin C} \geq 0 \\ \dfrac{x - \sin B}{x - \sin C} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \sin A \\ x < \sin C \end{array}\right.$

$$f'(x) = \frac{\sin A - \sin B}{2\sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}}(x - \sin C)^2} + \frac{\sin B - \sin C}{2\sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}}(x - \sin C)^2} > 0$$

(Do A > B > C nên sinA > sinB > sinC)

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		sinC		sinA		$+\infty$
f'(x)							
f(x)	$\nearrow$	$+\infty$				$\nearrow$	$+\infty$

• Khi $x \to \pm\infty$ thì $f(x) \to \sqrt{\frac{\sin A}{\sin C}} + \sqrt{\frac{\sin B}{\sin C}} - 1 > \sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$

$\Rightarrow \min f(x) = f(\sin A) = \sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$ đạt được khi x = sinA

Bài 13: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin^n x + \cos^n x \text{ với } n \in N; N \geq 2 \text{ và } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

Giải

Xét hàm số: $f(x) = \sin^n x + \cos^n x$ với $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = n\sin^{n-1}\cos x - n\cos^{n-1}x\sin x$$

$$= n\sin x\cos x\left(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^{n-2}x = \cos^{n-2}x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Bảng biến thiên:

x	-2		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	1	↘		↗	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

$$\min y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{\frac{2-n}{2}} \text{ đạt được khi } x = \frac{\pi}{4}$$

Bài 14: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \frac{x^2}{4}$$

Giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + x\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + x\sqrt{1-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1-x^2\right) = 2 - 2\sqrt{1-x^2} \qquad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$; $0 \le t \le 1 \Rightarrow x^2 = 1 - t^2$

Phương trình (1) trở thành:

$$\left(1-t^2\right)t^2 = 2(1-t) \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
y'		+	0	-	
y	$\sqrt{2}+\frac{1}{4}$	↗	2	↘	$\sqrt{2}+\frac{1}{4}$

Từ bảng biến thiên, ta được:

$$\max y = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\min y = \sqrt{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy: giá trị lớn nhất của hàm số là 2 khi x = 0

giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\sqrt{2} + \frac{1}{4}$ khi $x = \pm 1$

Bài 15: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = x^x \text{ với } x > 0$$

Giải

$$y = x^x \Leftrightarrow \ln y = x\ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y’		-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt[e]{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min y = \frac{1}{\sqrt[e]{e}}$ khi $x = \frac{1}{e}$

Hàm số không đạt giá trị lớn nhất.

Bài 16: Cho điểm M(1,2). Đường thẳng d qua M cắt nửa trục dương Ox, Oy tại A và B. Xác định phương trình đường thẳng d sao cho diện tích tam giác OAB có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Giả sử phương trình đường thẳng d có dạng:

$$y = ax + b\ (a < 0)$$

Đường thẳng này qua M(1,2) $\Rightarrow 2 = a + b \Rightarrow b = 2 - a \Rightarrow b > 2$

Diện tích ΔOAB với A $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ và B(0,b)

$$S = \frac{1}{2}\left|-\frac{b}{a}\right|\cdot b = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{|a|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{b-2}$$

$$S' = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2 - 4b}{(b-2)^2};\ S' = 0 \Rightarrow b = 4$$

Bảng biến thiên:

b	2		4		$+\infty$
S’		-	0	+	
S	$+\infty$	$\searrow$	S_{min}	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra:

$S_{min} = 4$ đạt được $\Leftrightarrow b = 4 \Rightarrow a = -2$

Vậy phương trình đường thẳng d cần tìm là: $y = -2x + 4$

• ***Chú ý:***

Có thể làm theo phương trình đoạn chắn:

Phương trình đường thẳng d chắn trên hai trục Ox và Oy là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ với } A(a,0);\ B(0,b) \text{ và } \begin{cases} a>1 \\ b>2 \end{cases}$$

Đường thẳng d qua M: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1 \Rightarrow \frac{b}{2}=\frac{a}{a-1}$

Diện tích ΔOAB: $S=\frac{1}{2}ab=a\cdot\frac{a}{a-1}$

$$S'=\frac{a^2-2a}{(a-1)^2};S'=0\Rightarrow a=2$$

Bảng biến thiên:

a	1		2		$+\infty$
S'		-	0	+	
S	$+\infty$	$\searrow$	S_{min}	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra:

$S_{min}=4$ đạt được $\Leftrightarrow a=2\Rightarrow b=4$

Vậy đường thẳng d cần tìm là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$

Bài 17: Cho A(1,4). Viết phương trình đường thẳng D qua A và cắt Ox, Oy lần lượt tại M, N sao cho: $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ nhỏ nhất.

Giải

Phương trình đường thẳng D cắt Ox, Oy tại M, N có dạng:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ với } M(a,0);\ N(0,b) \text{ và } \begin{cases} a>1 \\ b>4 \end{cases}$$

Đường thẳng D qua A(1,4) nên:

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1\Rightarrow\frac{1}{a}=1-\frac{4}{b}$$

Ta có: $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\left(1-\frac{4}{b}\right)^2+\frac{1}{b^2}$

$$=\frac{17}{b^2}-\frac{8}{b}+1=\frac{b^2-8b+17}{b^2}$$

Xét hàm số: $f(b)=\frac{b^2-8b+17}{b^2}$

$$f'(b) = \frac{8b^2 - 34b}{b^4}\,; f'(b) = 0 \Rightarrow b = \frac{34}{8}$$

Bảng biến thiên:

x	4		$\frac{34}{8}$		$+\infty$
f'(b)		-	0	+	
f(b)	$\frac{1}{16}$	$\searrow$	$\frac{1}{17}$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên, ta được: $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow b = \frac{34}{8} = \frac{17}{4} \Rightarrow a = 17$$

Vậy phương trình đường thẳng D là:

$$\frac{x}{17} + \frac{8y}{24} = 1 \text{ hay } x + 4y - 17 = 0$$

Bài 18: Xác định a để giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$y = x^2 + (2a+1)x + a^2 - a - 1$ trên [-1,2] bằng 1.

Giải

Ta có: $y' = 2x + 2a + 1$

$$y' = 0 \Rightarrow x = -\frac{2a+1}{2}$$

Xét các trường hợp:

- Trường hợp 1:

Nếu $-\frac{2a+1}{2} < -1 \Leftrightarrow 2a + 1 > 2 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên của y:

x	$-\infty$		$-\frac{2a-1}{2}$		-1		2
y'		-	0	+		+	
y						$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta được:

$$\min y = y(-1) = a^2 - 3a - 1$$

$$\min y = 1 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 1 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \text{ (nhận)}$$

- Trường hợp 2:

Nếu $\quad -1 \le \dfrac{-2a-1}{2} < 2$

$\Leftrightarrow \quad -\dfrac{5}{2} < a < \dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên của y:

x	1		$-\dfrac{2a-1}{2}$		$+\infty$
y’		-	0	+	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra:

$$\min y = y\left(\frac{-2a-1}{2}\right) = -2a - \frac{5}{4}$$

$$\min y = 1 \Leftrightarrow -2a - \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{9}{8} \text{ (nhận)}$$

- Trường hợp 3:

$$\frac{-2a-1}{2} \ge 2 \Leftrightarrow a \le -\frac{5}{2}$$

Bảng biến thiên của y:

x	-1		2		$-\dfrac{2a-1}{2}$
y’		-			0
y		$\searrow$			

Từ bảng biến thiên ta được:

$$\min y = y(2) = a^2 + 3a + 5 = \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 1$$

Vậy giá trị của a cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{9}{8} \\ a = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Bài 19: Cho phương trình: $x^2 - (a+1)x + a^2 = 0$
Định a để tổng nghịch đảo hai nghiệm của phương trình trên là nhỏ nhất.

Giải

Phương trình: $x^2 - (a+1)x + a^2 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le a \le 1$$

Lúc đó: $A = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{a+1}{a^2}$

Xét hàm số: $f(a) = \dfrac{a+1}{a^2}$ với $-\dfrac{1}{3} \le a \le 1 \ (a \neq 0)$

$$f'(a) = \frac{a^2 - 2a(a+1)}{a^4} = \frac{-a-2}{a^3}$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Bảng biến thiên:

a	-2	$-\frac{1}{3}$		0		1
f'(x)	0		+	‖	-	
f(x)		6	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	2

Từ bảng biến thiên, ta được:

$\min f(a) = \min A = f(1) = 2$ đạt được khi a = 1

Vậy giá trị của a cần tìm là: a = 1

Dạng 2: ĐẶT ẨN PHỤ SAU ĐÓ DÙNG ĐẠO HÀM

1. **Nguyên nhân đặt ẩn phụ**
   Do hàm f(x) có đạo hàm f'(x) phức tạp nên ta đặt ẩn phụ để đưa về hàm đơn giản hơn.
2. **Các bước giải**
   Bước 1: Tìm miền xác định của hàm số là D_1
   Bước 2: Đặt ẩn phụ t = h(x) với h(x) là một biểu thức nào đó trong hàm số đã cho.
   Bước 3: Tìm miền giá trị của t là D_2
   Bước 4: + Đưa hàm f(x) về hàm g(t)
   + Lập bảng biến thiên của g(t) trên miền D_2
   Bước 5: Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ ming(t) ; maxg(t)
   $\Rightarrow$ minf(x) ; maxf(x)

3.Bài Tập:

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = x^6 + \left(1 - x^2\right)^3 \text{ trên } [-1;1]$$

Giải

Đặt $t = x^2$; do $-1 \le x \le 1$ nên $0 \le t \le 1$

Hàm số đã cho trở thành:

$$t = t^3 + (1-t)^3 \,;\, y' = 3t^2 - 3(1-t)^2$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow t^2 = \left(1 - t^2\right) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
y'		-	0	+	
y	1	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

$\max y = 1$ đạt được khi $t = 0 \Rightarrow x = 0$

$\min y = \frac{1}{4}$ đạt được khi $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{3 + 2x - x^2} + (x-1)^2 - 3$$

Giải

Điều kiện: $3 + 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Đặt $t = \sqrt{3 + 2x - x^2} = \sqrt{4 - (x-1)^2} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq t \leq 2$

Hàm số đã cho trở thành:

$\Leftrightarrow 1 + t - t^2$

$y' = 1 - 2t\,;\; y' = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{2}$		2
y’		+	0	-	
y	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

$\max y = \dfrac{5}{4}$ đạt được khi $t = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3 + 2x - x^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3 + 2x - x^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = 1 + \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$\min y = -1$ đạt được khi $t = 2 \Rightarrow x = 1$

Bài 3: Cho hàm số: $y = \dfrac{x^3 + x^2 + x}{\left(x^2+1\right)^2}$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Giải

Ta có: $y = \dfrac{\left(x^2+1\right)x + x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{x}{x^2+1} + \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2$

Đặt $t = \dfrac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow tx^2 - x + t = 1$

Phương trình này có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \left[\begin{array}{l} t \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ \begin{cases} t \neq 0 \\ t - 4t^2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$$

Hàm số đã cho trở thành: $y = t + t^2$

$$y' = 1 + 2t \geq 0 \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
y'		+	
y	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

$\max y = \frac{3}{4}$ đạt được khi $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$

$\min y = -\frac{1}{4}$ đạt được khi $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$

Bài 4: Cho hàm số: $y = \dfrac{2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 3}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 1}$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Giải

Điều kiện: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = t^2 - 2$

$$t' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
y'		+	0	-	
y	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow \sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

Hàm số đã cho trở thành:

$$y = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}\ ;\ y' = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0 \forall t \in \left[\sqrt{2}, 2\right] \quad (1)$$

$\Rightarrow$ hàm số (1) luôn tăng trên $\left[\sqrt{2}\,,2\right]$

Vậy: $\min y = y\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} - 1$ đạt được khi $t = \sqrt{2} \Rightarrow x = 1$

$\max y = y\,(2) = \dfrac{7}{3}$ đạt được khi $t = 2 \Rightarrow x = 0$

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x,y) = 3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \left(x \neq 0, y \neq 0\right)$$

Giải

Đặt $t = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Rightarrow |t| = \left|\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right| = \left|\dfrac{x}{y}\right| + \left|\dfrac{y}{x}\right|$

Theo bất đẳng thức Cosy thì $|t| \geq 2$

và $t^2 = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$

hàm số đã cho trở thành:

$$f(t) = 3\left(t^2 - 2\right) - 8t = 3t^2 - 8t - 6$$

$$f'(t) = 6t - 8$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2	$\frac{4}{3}$	2		$+\infty$
f'(t)		-		0		+	
f(t)	$+\infty$	$\searrow$	22		20	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được:

$$\min y = -10 \text{ khi } t = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \Rightarrow x = y$$

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 3}{\sin^2 x + 3\sin x + 4}$$

Giải

Đặt $t = \sin x;\ -1 \leq t \leq 1$

Xét hàm: $f(t) = \dfrac{t^2 + 2t + 3}{t^2 + 3t + 4}$ với $-1 \leq t \leq 1$

$$f'(t)=\frac{t^2+2t-1}{\left(t^2+3t+4\right)^2}$$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow t^2+2t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1-\sqrt{2}\\ t=-1+\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	0		$\sqrt{2}-1$		1
f'(t)		-	0	+	
f(t)	1	$\searrow$	$\frac{4}{\sqrt{2}+4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra

- $\min A=\min f(t)=\frac{4}{\sqrt{2}+4}$ khi $t=\sqrt{2}-1$

  $\Leftrightarrow \sin x=\sqrt{2}-1$

  $\Rightarrow x=\arcsin\left(\sqrt{2}-1\right)+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$
- $\max A=\max f(t)=1$ khi $t=-1$

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=2^{\sin^2 x}+2^{1+\cos^2 x}$$

Giải

Đặt $t=2^{\sin^2 x}; 0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le 2^{\sin^2 x}\le 2\Rightarrow 1\le t\le 2$

Xét hàm: $f(t)=1+\frac{4}{t}$

$$f'(t)=1-\frac{4}{t^2}=\frac{t^2-4}{t^2}\le 0\,\forall t\in\left[1,2\right]$$

Bảng biến thiên:

t	1		2
f'(t)		-	
f(t)	5	$\searrow$	4

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

- $\min y=\min f(x)=4$ đạt được khi $t=2\Leftrightarrow\sin^2 x=1$

  $\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

- $\max y = \max f(t) = 5$ đạt được khi $t = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 8: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của: $B = \dfrac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}$

Giải

Điều kiện: $-3 \le x \le 1$

Vì $\left(\sqrt{x+3}^2\right) + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 4$ nên ta đặt

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2\cdot\dfrac{2t}{1+t^2} \\ \sqrt{1-x} = 2\cdot\dfrac{1-t^2}{1} + t^2 \end{cases} \text{ với } 0 \le t \le 1$$

Khi đó: $B = \dfrac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7}$

$= \dfrac{-52t^2 - 8t - 60}{\left(-5t^2 + 16t + 7\right)^2} < 0 \forall t \in \left(0,1\right]$

Bảng biến thiên:

t	0		1
f'(t)		-	
f(t)	$\frac{9}{7}$	$\searrow$	$\frac{7}{9}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

- $\min B = \min f(t) = f(1) = \dfrac{7}{9}$ đạt được khi $t = 1 \Rightarrow x = 1$
- $\min B = \min f(t) = f(0) = \dfrac{9}{7}$ đạt được khi $t = 0 \Rightarrow x = -3$

Bài 9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $f(x,y) = \dfrac{x^4}{y^4} + \dfrac{y^4}{x^4} - 2\left(\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}\right) + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \left(x,y \ne 0\right)$

Giải

Đặt $t = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

Vì $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y}{x} = 1$ nên $\dfrac{x}{y}$ và $\dfrac{y}{x}$ cùng dấu

Như vậy: $t = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Rightarrow |t| = \left|\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right| = \left|\dfrac{x}{y}\right| + \left|\dfrac{y}{x}\right| \geq 2$

$$t^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} = \left(t^2 - 2\right)^2 = t^4 - 4t^2 + 2$$

Xét hàm số: $f(t) = t^4 - 4t^2 + 2 - 2\left(t^2 - 2\right) + 2$

$= t^4 - 6t^2 + t + 6$ với $|t| \geq 2$

$f'(t) = 4t^3 - 12t + 1$

$f''(t) = 12t^2 - 12$

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f''(t)		+				+	
f'(t)	$+\infty$	$\nearrow$ $\ominus$	-7		9	$\nearrow$ $\oplus$	$+\infty$
f(t)	$+\infty$	$\searrow$	-4		0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được:

$\min f(x,y) = \min f(t) = -4$ đạt được khi $t = -2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y$$

Hàm số không đạt giá trị lớn nhất.

Bài 10: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x + \frac{1}{\cos x} - 4$$

Giải

Đặt: $t = \cos x + \dfrac{1}{\cos x}$

Lại đặt: $u = \cos x; -1 \leq u \leq 1; u \neq 0$

Xét hàm: $t(u) = u + \dfrac{1}{u}$; $t'(u) = 1 - \dfrac{1}{u^2} \leq 0 \,\forall\, |u| \leq 1; u \neq 0$

Bảng biến thiên:

u	-1		0		1
t’		-	0	-	0
t	-2 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

Từ bảng biến thiên, suy ra: $|t| \ge 2$

với: $t = \cos x + \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} = t^2 - 2$

Hàm số đã cho trở thành:

$$y = t^2 + t - 6$$

$$y' = 2t + 1;\ y' = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	$-\dfrac{1}{2}$	2	$+\infty$
y’	-		0		+
y	$+\infty$ ↘	-4		0	↗ $+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được:

$\min y = -4$ đạt được $\Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow x = \pi + k2\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 11: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin^8 x + \cos^4 x$$

Giải

Ta có: $y = 2\sin^8 x + \cos^4 2x = \dfrac{2(1 - \cos 2x)^4}{16} + \cos^4 2x$

$$= \frac{1}{8}(1 - \cos 2x)^4 + \cos^4 2x$$

Đặt $t = \cos 2x;\ -1 \le t \le 1$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{1}{8}(1 - t)^4 + t^4$ với $-1 \le t \le 1$

$$f'(t) = -\frac{1}{2}(1 - t)^3 + 4t^3$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(1 - t)^3 + 4t^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8t^3 = (1 - t)^3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên:

t	-1		$\frac{1}{3}$		1
f’(t)		-	0	+	
f(t)	3	↘	$\frac{1}{27}$	↗	1

Từ bảng biến thiên, ta được:

+ $\max y = \max f(t) = 3$ đạt được khi $t = -1$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

+ $\min y = \min f(t) = \frac{1}{27}$ đạt được khi $t = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + m\pi$

Vậy: $\begin{cases} \max y = 3 \text{ khi } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \min y = \frac{1}{27} \text{ khi } x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + m\pi \end{cases} \quad \left(k, m \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 12: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 2\left(1 + \sin 2x \cdot \cos 4x\right) - \frac{1}{2}\left(\cos 4x - \cos 8x\right)$$

Giải

Ta có: $y = 2\left(1 + \sin 2x \cdot \cos 4x\right) - \frac{1}{2}\left(\cos 4x - \cos 8x\right)$

$= 2 + \sin 6x - \sin 2x + \sin 6x \cdot \sin 2x$

$= 2 + \left(3\sin 2x - 4\sin^3 2x\right) - \sin 2x + \sin 2x\left(3\sin 2x - 4\sin^3 2x\right)$

$= 2 + 2\sin 2x + 3\sin^2 2x - 4\sin^3 2x - 4\sin^4 2x$

Đặt $t = \sin 2x;\ -1 \le t \le 1$

Xét hàm số:

$f(t) = -4t^4 - 4t^3 + 3t^2 + 2t + 2$ với $-1 \le t \le 1$

$f'(t) = -16t^3 - 12t^2 + 6t + 2 = (t+1)\left(-16t^2 + 4t + 2\right)$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ -8t^2 + 2t + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	-1		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1
f'(t)		-	0	+	0	-	
f(t)	3	↘	$\frac{111}{64}$	↗	3	↘	-1

Từ bảng biến thiên, ta được:

+ $\max y = \max f(t) = 3$ đạt được khi $t = -1 \vee t = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + m\pi$$

+ $\min y = -1$ đạt được khi $t = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

Vậy: $\begin{cases} \max y = 3 \text{ khi } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + m\pi \\ \min y = -1 \text{ khi } x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$

Bài 13: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\cos^4 x + 2\cos^2}$$

Giải

$$y = \frac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\cos^4 x + 2\cos^2} = \frac{3\left(1 - \sin^2 x\right)^2 + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\left(1 - \sin^2 x\right)}$$

Đặt $\sin^2 x = t; 0 \le t \le 1$

Xét hàm số: $y = f(t) = \frac{3(1-t)^2 + 4t}{3t^2 + 2(1-t)} = \frac{3t^2 - 2t + 3}{3t^2 - 2t + 1} = 1 + \frac{2}{3t^2 - 2t + 1}$

Hàm $y = f(t)$ đạt min, max trên [0,1] khi hàm $g(x) = 3t^2 - 2t + 1$ đạt min, max trên [0,1]

Ta có: $g'(t) = 6t - 2; g'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

Bảng biến thiên:

t	-1		$\frac{1}{3}$		1
g'(t)		-	0	+	
g(t)	1	↘	$\frac{2}{3}$	↗	2

Từ bảng biến thiên, ta được:

+ $\min g(t)=2 \Rightarrow \min y=\min f(t)=2$ đạt được khi t = 1

$\Leftrightarrow \sin^2 x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+m\pi \ (m\in\mathbb{Z})$

+ $\max g(t)=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \max y=\max f(t)=1+3=4$ đạt được khi $t=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \cos 2x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{2}+n\pi \ (n\in\mathbb{Z})$

Vậy: $\begin{cases} \min y=2 \text{ khi } x=\dfrac{\pi}{2}+m\pi \\ \max y=4 \text{ khi } x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}+n\pi \end{cases}$

Bài 14: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\frac{\sin^6 x|\cos x|+\cos^6 x|\sin x|}{|\sin x|+|\cos x|}$$

Giải

Ta có: $|\sin x|+|\cos x|\geq \sin^2 x+\cos^2 x=1$

nên hàm số xác định $\forall x\in\mathbb{R}$

$$y=\frac{\sin^6 x|\cos x|+\cos^6 x|\sin x|}{|\sin x|+|\cos x|}=\frac{|\sin x\cos x|\left[|\sin^5 x|+|\cos^5 x|\right]}{|\sin x|+|\cos x|}$$

$$|\sin^5 x|+|\cos^5 x|=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left[|\sin^3 x|+|\cos^3 x|\right]-\cos^2 x|\sin^3 x|-|\cos^3 x|\sin^2 x$$

$$=\left[|\sin x|+|\cos x|\right]\left[1-|\sin x|+|\cos x|\right]-\cos^2 x\sin^2 x\left(|\sin x|+|\cos x|\right)$$

Do đó: $y=|\sin x\cos x|\left[1-|\sin x\cos x|-\cos^2 x\cdot\sin^2 x\right]$

$$=\frac{1}{2}|\sin 2x|\left[1-\frac{1}{2}|\sin 2x|-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right]$$

Đặt $t=|\sin 2x|$ với $0\leq t\leq 1$

Xét hàm $f(t)=\dfrac{1}{2}t\left(1-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}t^2\right)=-\dfrac{1}{8}t^3-\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t$

$f'(t)=-\dfrac{3}{8}t^2-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2}{3} \\ t=-2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{2}{3}$		1
f'(t)		+	0	-	
f(t)	0	$\nearrow$	$\frac{5}{9}$	$\searrow$	$-\frac{3}{8}$

Từ bảng biến thiên, ta được:

+ $\max y = \max f(t) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{9}$ đạt được khi $t = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow |\sin 2x| = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

+ $\min y = -\frac{3}{8}$ đạt được khi $t = 1$

$\Leftrightarrow |\sin 2x| = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 15: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = |1 + 2\sin 3x| + |1 + 2\cos 3x|$$

Giải

Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

Theo đề bài $y \geq 0$ nên y đạt min, max thì y^2 cũng đạt min, max.

Ta có: $y^2 = 6 + 4(\sin 3x + \cos 3x) + 2|(1 + 2\sin 3x)(1 + 2\cos 3x)|$

$\Rightarrow y^2 = 6 + 4(\sin 3x + \cos 3x) + 2|1 + 2(\sin 3x + \cos 3x) + 2\sin 6x|$

Đặt $t = \sin 3x + \cos 3x;\ -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin 6x = t^2 - 1$

Lúc đó $y^2 = f(t) = 6 + 4t + 2|1 + 2t + 2\left(t^2 - 1\right)|$

$= 6 + 4t + 2|t^2 + 2t - 1|$

Ta có: $2t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ t_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Cà hai nghiệm này đều $\in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

Do đó: $f(t) = 6 + 4t + 2|2t^2 + 2t - 1|$

$$= \begin{cases} 4t^2 + 8t + 4 & \text{nêu } -\sqrt{2} \leq t \leq \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \vee \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \leq t \leq \sqrt{2} \\ -4t^2 + 8 & \text{nêu } \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} < t < \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Đặt $f_1(t) = 4t^2 + 8t + 4$

$f_1(t) = 8t + 8;\ f'(t) = 0 \Rightarrow t = -1$

$f_2(t) = -4t^2 + 8$

$f_2(t) = -8t;\quad f'_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Bảng biến thiên:

a	$-\sqrt{2}$		$-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		-1		0		$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		$\sqrt{2}$
f'₁(t)		-			0			+		+	
f'₂(t)				+		+	0	-			
f'(t)		-		+	0	+	0	-		+	
f(t)		↘		↗		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta được:

Ta có: $f\left(-\sqrt{2}\right) = 12 - 8\sqrt{2}$

$f\left(\sqrt{2}\right) = 12 + 8\sqrt{2} = \left(2\sqrt{2} + 2\right)^2$

$f(0) = 8$

$f\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right) = 4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$

$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$

Từ đó, ta được:

$+ \min y^2 = \min f(t) = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \Rightarrow \min y = \sqrt{3} - 1$

$+ \max y^2 = \max f(t) = \left(2\sqrt{2} + 2\right)^2 \Rightarrow \max y = 2\sqrt{2} + 2$

Bài 16: Tùy theo m, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + m \sin x \cos x$$

Giải

Ta có: $y = \sin^6 x + \cos^6 x + m \sin x \cos x$

$= \left(\sin^2 x\right)^3 + \left(\cos^2 x\right)^3 + m \sin x \cos x$

$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x\right) + m \sin x \cos x$

$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{m}{2}\sin 2x$

Đặt $t = \sin 2x;\ -1 \le t \le 1$

Xét hàm số: $f(t) = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{m}{2}t + 1$ với $-1 \le t \le 1$

$$f'(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{m}{2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{m}{3}$$

Xét các trường hợp:

- *Trường hợp 1:*

  Nếu $\frac{m}{3} \le 1 \Leftrightarrow m \le -3$

  Bảng biến thiên của f(t):

t	$-\infty$	$\frac{m}{3}$	-1		1
f'(t)		0		-	
g(t)				$\searrow$	

  Từ bảng biến thiên, ta được:

  $$\max y = \max f(t) = f(-1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$$

  $$\min y = \min f(t) = f(1) = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$$

- *Trường hợp 2:*

  Nếu $-1 < \frac{m}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < m < 3$

  Bảng biến thiên của f(t):

t	-1		$\frac{m}{3}$		1
f'(t)		+	0	-	
f(t)		$\nearrow$		$\searrow$	

  Từ bảng biến thiên, ta được:

  $$\max y = \max f(t) = f\left(\frac{m}{3}\right) = 1 + \frac{m^2}{12}$$

  $$\min y = \min f(t) = \min\left\{f(-1), f(1)\right\} = \min\left\{\frac{1}{4} - \frac{m}{2}, \frac{1}{4} + \frac{m}{2}\right\}$$

  + Nếu $\frac{1}{4} - \frac{m}{2} \le \frac{1}{4} + \frac{m}{2} \Rightarrow 0 \le x < 3$ thì $\min y = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$

  + Nếu $-3 < m < 0$ thì $\min y = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$

- *Trường hợp 3:*

Nếu $\dfrac{m}{3} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 3$

Bảng biến thiên của f(t):

t	-1		1		$\dfrac{m}{3}$
f'(t)		+			0
f(t)		$\nearrow$			

Từ bảng biến thiên, ta được:

$$\max y = \max f(t) = f(1) = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$$

$$\min y = \min f(t) = f(-1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$$

Vậy: + $m \leq -3$ thì $\begin{cases} \max y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{m}{2} \\ \min y = \dfrac{1}{4} + \dfrac{m}{2} \end{cases}$

+ Nếu $-3 < m < 3$ thì $\max y = 1 + \dfrac{m^2}{12}$

- Nếu $-3 < m < 0$ thì $\min y = \dfrac{1}{4} + \dfrac{m}{2}$

- Nếu $0 \leq m < 3$ thì $\min y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{m}{2}$

+ Nếu $m \geq 3$ thì $\begin{cases} \max y = \dfrac{1}{4} + \dfrac{m}{2} \\ \min y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{m}{2} \end{cases}$

Dạng 3: DÙNG PHÉP THẾ RỒI ĐẠO HÀM

1. *Phương pháp:*

- Khi hàm đa thức chứa hai ẩn; ba ẩn thì ta tính ẩn này theo ẩn kia rồi thế vào hàm cần tìm Min; Max được hàm một ẩn.
- Sau đó dùng đạo hàm.

2.Bài Tập:

Bài 1: Cho hai số thực x; y thỏa mãn: $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^4+y^4$

Giải

Ta có: $y=2-x\Rightarrow A=x^4+(2-x)^4$

$$A'=4x^3-4(2-x)^3=0\Leftrightarrow x=1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
A'		-	0	+	
A	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, ta được:

$Min A=2$ đạt được khi $x=1\Rightarrow y=1$

Bài 2: Cho hai số dương x;y thỏa mãn: $x+2y=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=\sqrt{1+2x}+2\sqrt{2y-1}$

Giải

Theo đề: $x+2y=3\Rightarrow 2y=3-x\geq 1\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq 2$

$$\Rightarrow A=\sqrt{1+2x}+2\sqrt{2-x}$$

$$A'=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt{2-x}}$$

$$A'=0\Leftrightarrow\sqrt{2-x}=\sqrt{1+2x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		2
A’		+	0	-	
A	$\sqrt{10}$	$\nearrow$	$\sqrt{15}$	$\searrow$	$\sqrt{5}$

Theo bảng biến thiên, ta được:

$Max\,A = \sqrt{15}$ đạt được $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

Bài 3: Cho hai số x;y dương và $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 3^{1+x} + 9^{y}$

Giải

Ta có: $y = 1 - x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$

Khi đó $A = 3.3^{x} + 9^{1-x} = 3.3^{x} + \frac{9}{9^{x}}$

Đặt $t = 3^{x}$; với $0 < x < 1 \Rightarrow 1 < 3^{x} = t < 3$

$\Rightarrow A = 3t + \frac{9}{t^2}$; $A' = 3 - \frac{18}{t^3} = 3 \cdot \frac{t^3 - 6}{t^3}$

$A' = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{6}$

Bảng biến thiên:

x	1		$\sqrt[3]{6}$		3
A’		-	0	+	
A		$\searrow$	$\frac{27}{\sqrt[3]{36}}$	$\nearrow$	

Theo bảng biến thiên, ta được:

$Min\,A = \frac{27}{\sqrt[3]{36}}$ đạt được khi $t = \sqrt[3]{6} \Rightarrow 3^{x} = \sqrt[3]{6}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}\log_3 6 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{3}\log_3 6$

Bài 4: Cho hai số x;y thỏa mãn: $x^2 + xy + y^2 = 1$ (1)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 - xy + y^2$

Giải

Ta có: $A = x^2 - xy + y^2 = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$

Nếu $y = 0$ thì $x = \pm 1$ và $A = 1$

Nếu $y \neq 0$ thì $A = \dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} + 1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \dfrac{x}{y} + 1}$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$ ta được: $A = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$; $A' = \dfrac{2\left(t^2 - 1\right)}{\left(t^2 + t + 1\right)^2}$; $A' = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
A'		+	0	-	0	+	
A	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

Theo bảng biến thiên, ta được:

+ $Max\, A = 3$ đạt được khi $t = -1 \Leftrightarrow y = -x$ thế vào (1) được:

  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \mp 1$

+ $Min\, A = \dfrac{1}{3}$ đạt được khi $t = 1 \Leftrightarrow y = -x$ thế vào (1) được:

  $3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}} = y$

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$A = \frac{2xy + y^2}{2xy + 2x^2 + 1}$$

với x,y không đồng thời bằng và thỏa: $x^2 + y^2 = 1$

Giải

Theo giả thiết: $x^2 + y^2 = 1$ nên:

$$A = \frac{2xy + y^2}{2xy + 2x^2 + x^2 + y^2} = \frac{2xy + y^2}{2xy + 3x^2 + y^2} = \frac{2 \cdot \frac{x}{y} + 1}{2 \cdot \frac{x}{y} + 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{2t + 1}{3t^2 + 2t + 1}$

$$f'(t) = \frac{-6t^2 - 6t}{\left(3t^2 + 2t + 1\right)^2}$$

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow -6t^2-6t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'(t)		-	0	+	0	-	
f(t)	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Theo bảng biến thiên, ta được:

+ $\max A = \max f(t) = 1$ đạt được khi $t=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\pm 1$

+ $\min A = \min f(t) = -\frac{1}{2}$ đạt được khi $t=-1 \Rightarrow x=-y$

Kết hợp $x^2+y^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 6: Cho $x^2+y^2-xy=1$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $A=x^4+y^4-x^2y^2$

Giải

Ta có: $1=x^2+y^2-xy \geq 2xy-xy=xy \Rightarrow xy \leq 1$

$$1=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy \geq -3xy \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{3}$$

Từ đó, ta được: $-\frac{1}{3} \leq xy \leq 1$

Biến đổi: $A=x^4+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-3x^2y^2$

$$=(1+xy)^2-3x^2y^2=1+2xy-2x^2y^2$$

Đặt $t=xy$ thì $-\frac{1}{3} \leq t \leq 1$

Xét hàm số: $f(t)=-2t^2+2t+1$ với $-\frac{1}{3} \leq t \leq 1$

$$f'(t)=-4t+2; f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		1
f'(t)		+	0	-	
f(t)	$\frac{1}{9}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

Theo bảng biến thiên, ta được:

+ $\min A = \min f(t) = \frac{1}{9}$ đạt được $\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

+ $\max A = \max f(t) = \frac{3}{2}$ đạt được $\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}$

Từ giả thiết: $x^2 + y^2 - xy = 1$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = 1 + 3xy = \frac{5}{2} \Rightarrow x + y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$\Rightarrow$ Giải hệ $\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x + y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$

Ta được: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}} \\ y = -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}} \\ y = -\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

(Nhớ là ta chỉ cần đưa vài giá trị hoặc một giá trị của x,y để A max)

Bài 7: (Đề thi khối A – 2006)

Cho hai số $x, y \in \mathbb{R}$ và $x^2 - xy + y^2 = xy(x+y)$ (1)

Tìm giá trị lớn nhất của: $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$

Giải

Điều kiện $x \neq 0$ và $y \neq 0$

Đặt $y = tx$ ($t \in \mathbb{R}$ và $t \neq 0$)

(1) trở thành: $x^2 - tx^2 + t^2x^2 = tx^2(x + tx)$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(1 - t + t^2) = x^3(t + t^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t} \quad (t \neq -1)$$

Mặt khác: $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^3y^3}$

$$= \frac{(x+y)xy(x+y)}{x^3y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2$$

Thế $x = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t}$ vào A được:

$$A=\left[\frac{x+tx}{x^2+t}\right]^2=\frac{(1+t)^2}{t^2x^2}=\frac{(t+1)^2}{t^2\left(\frac{t^2-t+1}{t^2+t}\right)}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{(t+1)^2}{\left(t^2-t+1\right)^2}\Rightarrow\sqrt{A}=\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}=B\neq 1$$

• Đến đây ta tìm Min của B theo 2 cách:

Cách 1: dùng đạo hàm

Xét $B=\dfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1}$ với $t\neq 0; t\neq 1$ và $t\in\mathbb{R}$

$$B'=\frac{-3\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-t+1\right)^2};\ B'=0\Leftrightarrow t=-1 \vee t=1$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
B’		-	0	+	0	-	
B	1	↘	0	↗	4	↘	1

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow \max B=4\Rightarrow \max A=16$ đạt được khi t = 1

$$\Leftrightarrow y=x=\frac{1}{2}$$

Cách 2: Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình:

Ta có: $B=\dfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1}\Leftrightarrow (B-1)t^2-(B+2)t+B-1=0$

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\geq 0$ (vì $B\neq 1$)

$$\Leftrightarrow (B+2)^2-4(B-1)\geq 0\Leftrightarrow 3B^2-12B\leq 0\Leftrightarrow 0\leq B\leq 4$$

$\Rightarrow \max B=4\Rightarrow \max A=16$ đạt được khi $\Delta=0\Leftrightarrow t=1$

$$\Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$$

Dạng 4: DỒN VỀ MỘT BIẾN BẰNG CÁCH CHẶN TRÊN HOẶC CHẶN DƯỚI

1.Các cách chặn:

Cách 1: Dùng điều kiện ràng buộc của ẩn để chặn.

Cách 2: Dùng giá trị của một biểu thức.

Cách 3: Dùng bất đẳng thức phụ như bất đẳng thức Côsy; Bunhiakopxky

2.Bài Tập:

Bài 1: Cho hai số x;y dương thỏa mãn: $x^3+y^3\le 2$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $A=x^2+y^2$

Giải

Ta có: $x^3+y^3\le 2\Rightarrow y^3\le 2-x^3\Leftrightarrow y\le\sqrt[3]{2-x^3}$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2\le x^2+\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}=f(x)$$

Xét hàm số: $f(x)=x^2+\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}$ với $0<x<\sqrt[3]{2}$

$$f'(x)=2x-\frac{2x^2}{\sqrt[3]{2-x^3}}=2x\,\frac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)}-x}{\sqrt[3]{2-x^3}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt[3]{2-x^3}=x\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1\ (\text{vì } 0<x<\sqrt[3]{2})$$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$\sqrt[3]{2}$
f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗	2	↘	

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow f(x)\le 2\Rightarrow A\le f(x)\le 2$

$\Rightarrow \max A=2$ đạt được khi $x=1\Rightarrow y=1$

Bài 2: Cho 3 số $x,y,z\in\left[0,1\right]$ và $x+y+z=\frac{3}{2}$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của: $A=\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)$

Giải

- Tìm giá trị lớn nhất:

Ta có: $\frac{3}{2} = x + y + z \le \sqrt{3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{3}{4}$; vì $x, y, z \in \left[0, 1\right]$ nên

$\frac{3}{4} \le x^2 + y^2 + z^2 \le x + y + z = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \cos\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \le \cos\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad \max A = \cos\frac{3}{4}$ đạt được $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

- Tìm giá trị nhỏ nhất:

Không mất tính tổng quát, giả sử trong ba số thì:

$$z \ge y \ge x \Rightarrow \frac{1}{2} \le z \le 1$$

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = \left(x + y\right)^2 - 2xy + z^2 = \left(\frac{3}{2} - z\right)^2 + z^2 - 2xy$

$$\le \left(\frac{3}{2} - z\right)^2 + z^2 \text{ (do } -2xy \le 0\text{) } = 2z^2 - 3z + \frac{9}{4}$$

Xét hàm số: $f(z) = 2z^2 - 3z + \frac{9}{4}$ với $\frac{1}{2} \le z \le 1$

$$f'(z) = 4z - 3$$

$$f'(z) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Bảng biến thiên:

z	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1
f'(z)		-	0	+	
f(z)	$\frac{5}{4}$	↘		↗	$\frac{5}{4}$

Từ bảng biến thiên, suy ra: $f(z) \le \frac{5}{4}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < \frac{5}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \ge \cos\frac{5}{4}$

$\Rightarrow \min A = \frac{5}{4}$ đạt được khi $\begin{cases} z = 1 \\ xy = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} z = 1 \\ x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} z = \dfrac{1}{2} \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{1}{2} \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} z = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy: $\max A = \cos\dfrac{3}{4}$ khi $x = y = \dfrac{1}{2} = z$

$$\min A = \cos\frac{5}{4} \text{ khi} \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Bài 3: Cho x, y đều dương và thỏa mãn: $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x,y) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + y^2 + \dfrac{1}{y^2}$

Giải

Ta có: $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \dfrac{1}{x^2 y^2}\right)$

Theo bất đẳng thức Côsy thì:

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right) \geq 2xy\left(1 + \frac{1}{x^2 y}\right) = 2xy + \frac{2}{xy}$$

Từ giả thiết $x + y = 1$, theo bất đẳng thức Côsy thì:

$$1 \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 0 < xy \leq \frac{1}{4}$$

Đặt $t = xy;\ 0 < t \leq \dfrac{1}{4}$

Xét hàm số: $f(t) = 2t + \dfrac{2}{t};\ 0 < t \leq \dfrac{1}{4}$

$$f'(t) = 2 - \frac{2}{t^2} = 2\,\frac{t^2 - 1}{t^2} < 0\ \forall t \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{4}$
f'(t)		-	

f(t)	$+\infty$ ↘ f_{min}

Từ bảng biến thiên, ta được: $f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{2}$

$\Rightarrow f(x,y)$ nhỏ nhất $= \frac{17}{2}$ đạt được khi $t = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow xy = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

Vậy: $\min f(x,y) = \frac{17}{2}$ đạt tại $x = y = \frac{1}{2}$

Bài 4: Cho hai số x, y dương đều thỏa mãn:

$$x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2}$

Giải

Theo bất đẳng thức Buniacopxki, ta có:

$$x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(2-\left(x^2+y^2\right)\right)}$$

$$\Rightarrow \left(x^2+y^2\right)^2 \leq \left(x^2+y^2\right)\left(2-\left(x^2+y^2\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 2-\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow 0 < x^2+y^2 \leq 1$$

Biến đổi: $A = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \left(x^2+y^2\right)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right)$

Theo bất đẳng thức Cosy:

$$x^2y^2 \leq \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2y^2} \geq \frac{4}{\left(x^2y^2\right)^2}$$

Do đó: $A \geq \left(x^2+y^2\right)\left(1 + \frac{4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) = x^2 + y^2 + \frac{4}{x^2+y^2}$

Đặt $t = x^2 + y^2$ thì $0 < t \leq 1$

Xét hàm số: $f(t) = t + \frac{4}{t}$ với $0 < t \leq 1$

$$f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2}\ \forall t \in (0,1]$$

Bàng biến thiên:

t	0		1
f'(t)		-	
f(t)	$+\infty$	$\searrow$	f_{min}

Từ bảng biến thiên, ta được:

$$\min f(t) = f(1) = 5 \text{ đạt được khi } t = 1$$

$$\Rightarrow \min A = 1$$

Giá trị nhỏ nhất đạt được $\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

đồng thời $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy: $\min A = 5$ đạt tại $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 5: Cho hai số $x, y \in (0,\ 1)$ thỏa mãn: $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x,y) = x^x + y^y$

Giải

Xét hàm số: $f(t) = \ln t - t + 1$ với 0 < t

$$f'(t) = \frac{1}{t} - 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow f'(x) \le 0\ \forall t \in (0, +\infty)$

Do đó: $\forall x, y > 0$ thì $x \cdot f\left(\dfrac{1}{2x}\right) + y \cdot f\left(\dfrac{1}{2y}\right) \le 0$

$\Leftrightarrow x\left(\ln\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2x} + 1\right) + y\left(\ln\dfrac{1}{2y} - \dfrac{1}{2y} + 1\right) \le 0$ (vì x, y > 0)

$\Leftrightarrow x\ln\dfrac{1}{2x} + y\ln\dfrac{1}{2y} \le 0$ (sử dụng x + y =1)

$\Leftrightarrow -x\ln 2 - y\ln 2y \le 0 \Leftrightarrow -\ln 2^x \cdot 2^y - \ln x^x \cdot y^y \le 0$

$$\Leftrightarrow \ln x^x\cdot y^y \ge \ln x2^{-(x+y)} = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^x\cdot y^y \ge \frac{1}{2}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Côsy:

$$x^x + y^y \ge 2\sqrt{x^x\cdot y^y} \ge 2\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(x,y) \ge \sqrt{2} \Rightarrow \min f(x,y) = \sqrt{2}$$

đạt được $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x,y)$ là $\sqrt{2}$ đạt tại $x = y = \dfrac{1}{2}$

Bài 6: Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 4$, và $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = a + b\sqrt{2}\sin x + c\sin 2x$$

Giải

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$y = a + b\sqrt{2}\sin x + c\sin 2x \le \sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(1 + 2\sin^2 x + \sin^2 2x\right)}$$

$$= 2\sqrt{1 + 1 - \cos 2x + 1 - \cos^2 2x} = 2\sqrt{3 - \cos 2x - \cos^2 2x}$$

Đặt $t = \cos 2x;\ -1 < t < 1$

Xét hàm số: $f(t) = 3 - t - t^2;\ f'(t) = -1 - 2t;\ f'(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

t	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)	2	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	1

Theo bảng biến thiên, suy ra:

$$f(t) \le \frac{13}{4} \Rightarrow y^2 \le 4\cdot\frac{13}{4} = 13 \Rightarrow -\sqrt{13} \le y \le \sqrt{13}$$

$\Rightarrow \max y = \sqrt{13}$ đạt được

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Đồng thời: $\dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{2}\sin x}{b} = \dfrac{\sin 2x}{c} \Rightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{2b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2c}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a \\ c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases}$$ thế vào: $a^2 + b^2 + c^2 = 4$

Ta được: $a^2 + \dfrac{3}{2}a^2 + \dfrac{3}{4}a^2 = 4 \Rightarrow a = \dfrac{4}{\sqrt{13}} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}} \\ c = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \end{cases}$

và giá trị nhỏ nhất của y là:

$\min y = -\sqrt{13}$ đạt được

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ a = -\dfrac{4}{\sqrt{13}}, b = -\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}}, c = -\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

Vậy: + $\max y = \sqrt{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ a = \dfrac{4}{\sqrt{13}}, b = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}}, c = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \end{cases}$

+ $\min y = -\sqrt{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ a = -\dfrac{4}{\sqrt{13}}, b = -\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}}, c = -\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \end{cases}$

Dạng 5: DÙNG PHÉP LƯỢNG GIÁC HÒA KẾT HỢP VỚI ĐẠO HÀM

1. Phương pháp:

- Khi các ẩn $x; y$ thỏa mãn: $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$

  thì đặt $\begin{cases} x=a\sin t \\ y=a\cos t \end{cases}$

- Khi các ẩn $x; y$ thỏa mãn: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

  thì đặt $\begin{cases} x-a=R\sin t \\ y-b=R\cos t \end{cases}$

- Khi các ẩn $x; y; z$ thỏa mãn: $xy+yz+xz=1$ thì ta đặt

  $x=\tan\frac{A}{2}; y=\tan\frac{B}{2}; z=\tan\frac{C}{2}$ với $0<A, B, C<\pi$

- Khi các ẩn $x; y; z$ thỏa mãn: $x+y+z=xyz$

  thì đặt $x=\tan A; y=\tan B; z=\tan C$ với $-\frac{\pi}{2}<A, B, C<\frac{\pi}{2}$

2.Bài Tập:

Bài 1: Cho hai số x; y dương thỏa mãn: $x^2+y^2=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$

Giải

Vì $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x,y>0 \end{cases}$ nên tồn tại $t\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho: $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t \end{cases}$

Khi đó: $A=\frac{1}{\sin^3 t}+\frac{1}{\cos^3 t}$

$$A'=-\frac{3\cos t}{\sin^4 t}+\frac{3\sin t}{\cos^4 t}=3\cdot\frac{\sin^5 t-\cos^5 t}{\sin^4 t\cdot\cos^4 t}$$

$$A'=0\Leftrightarrow \sin^5 t=\cos^5 t\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}$$

Bảng biến thiên:

z	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'(z)		-	0	+	
f(z)	↘		$4\sqrt{2}$	↗	

Từ bảng biến thiên, suy ra:

$$\min A = 4\sqrt{2} \text{ đạt được khi } t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Bài 2: Cho hai số $x; y$ dương thỏa mãn: $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$

Giải

Vì $\begin{cases} x + y = 1 \\ x, y > 0 \end{cases}$ nên $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Khi đó: $A = \sin^4 t + \cos^4 t + \dfrac{1}{\sin^4 t} + \dfrac{1}{\cos^4 t}$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2t}\right)$$

Vì $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\sin^2 2t \le 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 t \ge \dfrac{1}{2}$ và $1 + \dfrac{16}{\sin^4 2t} \ge 17$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2t}\right) \ge \frac{17}{2}$$

$\Rightarrow A \ge \dfrac{17}{2} \Rightarrow \min A = \dfrac{17}{2}$ đạt được khi $\sin 2t = 1$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 3: Cho hai số $x; y$ dương thỏa: $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}} + \dfrac{y}{\sqrt{1 - y}}$

Giải

Theo giả thiết x, y > 0 và x + y = 1

$\Rightarrow 0 < x < 1$ và $0 < y < 1$

Đặt $\begin{cases} x = \sin^2\alpha \\ y = \cos^2\alpha \end{cases}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Thì $A = \dfrac{\sin^2\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$= \dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$

với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 1 < t < \sqrt{2}$

Lúc đó $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Xét hàm số: $A = f(t) = \dfrac{t\left(1 - \dfrac{t^2-1}{2}\right)}{\dfrac{t^2-1}{2}} = \dfrac{3t - t^3}{t^2 - 1}$

Bảng biến thiên:

t	1		$\sqrt{2}$
f'(t)	||	-	
f(t)	|| $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên, ta được:

minA = minf(t) = $\sqrt{2}$ đạt được khi $t = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của A là:

$\min A = \sqrt{2}$ đạt tại $x = y = \dfrac{1}{2}$

Bài 4: Cho ba số $x; y; z$ đều dương thỏa mãn: $x + y + z = xyz \quad (1)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

Giải

Đặt $x = \tan A; y = \tan B; z = \tan C$; với $0 < A, B, C < \dfrac{\pi}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = -\tan C\,(1 - \tan A \cdot \tan B)$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Leftrightarrow \tan(A + B) = \tan(-C)$

$\Leftrightarrow A + B + C = \pi \quad (2)$

Khi đó: $T = \dfrac{1}{\tan A} + \dfrac{1}{\tan B} + \dfrac{1}{\tan C} = \cot A + \cot B + \cot C > 0$

Từ (2) ta chứng minh được:

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

Như vậy: $T^2 = (\cot A + \cot B + \cot C)^2$

$= \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2\,(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A)$

$= \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2$

Theo bất đẳng thức Cosy ta co:

$\cot^2 A + \cot^2 B \geq 2\cot A \cdot \cot B$

$\cot^2 B + \cot^2 C \geq 2\cot B \cdot \cot C$

$\cot^2 C + \cot^2 A \geq 2\cot C \cdot \cot A$

Công ba bất đẳng thức ta được:

$$2\left(\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C\right) \geq 2\,(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A)$$

$\Rightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq 1$

$\Rightarrow T^2 \geq 3 \Rightarrow T \geq \sqrt{3}$

$\Rightarrow \min T = \sqrt{3}$ đạt được $\Leftrightarrow \cot A = \cot B = \cot C$

$\Leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$