Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh
Trường Phổ thông năng khiếu

Đề thi chọn đội tuyển Toán

Ngày thi thứ nhất: 21/11/2008

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1. a) Chứng minh tồn tại số n chẵn, n > 2008 sao cho 2009.n – 49 là số chính phương.

b) Chứng minh không tồn tại số nguyên m sao cho 2009.m – 147 là số chính phương.

Bài 2. Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu số chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc {3, 4, 5, 6} ?

Bài 3. Cho tam giác ABC có A cố định và B, C thay đổi trên một đường thẳng d cố định sao cho nếu gọi A' là hình chiếu của A lên d thì $\overline{A'B}.\overline{A'C}$ âm và không đổi. Gọi M là hình chiếu của A' lên AB.

a) Chứng minh rằng tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM thuộc một đường thẳng cố định.
b) Gọi N là hình chiếu của A' lên AC, K là giao điểm của các tiếp tuyế của đường tròn ngoại tiếp tam giác A'MN tại M và N. Chứng minh rằng K thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 4. Cho $f(x) = x^2 + ax + b$. Biết phương trình $f(f(x)) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 và $x_1 + x_2 = -1$. Chứng minh rằng $b \leq -1/4$.

Đại học Quốc gia Tp Hồ Chí Minh
Trường Phổ thông năng khiếu

Đề thi chọn đội tuyển Toán

Ngày thi thứ hai: 21/11/2008

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 5. Giả sử $P(x) = (x+1)^p(x-3)^q = x_n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$, trong đó p, q là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $a_1 = a_2$ thì 3n là một số chính phương.

Bài 6. a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

c) Chứng minh rằng tồn tại các số thực dương a, b, c sao cho

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} < 2$$

Bài 7. Cho góc Oxy và một điểm P bên trong nó. γ là một đường tròn thay đổi nhưng luôn đi qua O và P, γ cắt các tia Ox, Oy tại M, N. Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác OMN.

Bài 8. Với mỗi số nguyên dương n, gọi S(n) là tổng các chữ số của n.

a) Chứng minh rằng các số n = 999 và n = 2999 không thể biểu diễn được dưới dạng a + b với S(a) = S(b).

b) Chứng minh rằng mọi số 999 < n < 2999 đều biểu diễn được dưới dạng a + b với S(a) = S(b).

Đề số 1

Bài 1. Giải phương trình

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$$

Bài 2. Cho dãy $\{x_n\}$ xác định bởi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x_n} = e$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 3. Hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại A và B. Gọi PQ, RS là các đoạn tiếp tuyến chung ngoài của các đường tròn này (P, R nằm trên (C_1) và Q, S nằm trên (C_2)). Biết rằng RB//PQ. Tia RB cắt (C_2) tại điểm thứ hai W. Hãy tính tỷ số RB/BW.

Bài 4. Tìm tất cả các đa thức f(x) với hệ số nguyên sao cho với mọi n nguyên dương ta có f(n) là ước của $2^n - 1$.

Bài 5. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho $2^a + 3^b$ là bình phương của một số nguyên.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A. D là điểm di động trên cạnh AC. Đường tròn (O) đường kính BD cắt BC tại điểm thứ hai là P. Đường cao vẽ từ A của tam giác ABD cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Gọi F là giao điểm của CE và DP. I là giao điểm của AF và DE. Đường thẳng qua I song song DP cắt đường trung trực AI tại M. Chứng minh M di động trên 1 đường cố định khi D di động trên AC.

Bài 7. Tại một hội nghị có 100 đại biểu. Trong số đó có 15 người Pháp, mỗi người quen với ít nhất 70 đại biểu và 85 người Đức, mỗi người quen với không quá 10 đại biểu. Họ được phân vào 21 phòng. Chứng minh rằng có một phòng nào đó không chứa một cặp nào quen nhau.

Đề số 2

Bài 1. Cho $0 < x_0, x_1, \ldots, x_{669} < 1$ là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một cặp (x_i, x_j) sao cho

$$0 < x_i x_j (x_j - x_i) < \frac{1}{2007}$$

Bài 2. Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ và $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi m, $a_m a_{m+1}$ cũng là một số hạng của dãy số.

Bài 3. Cho đường tròn (C) đường kính AB và một điểm H cố định nằm trên AB. Gọi (T) là tiếp tuyến của đường tròn tại B. K là một điểm thay đổi trên (T). Đường tròn tâm K bán kính KH cắt (C) tại M và N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Tìm tất cả các hoán vị (a_1, a_2, …, a_n) của (1, 2, …, n) sao cho $2(a_1+\ldots+a_k)$ chia hết cho k+1 với mọi k=1, 2, …, n.

Bài 5. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^n + 29x^{n-1} + 2009$ với n là số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2 không thể phân tích thành tích của 2 đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1.

Bài 6. Cho tam giác ABC với O, I theo thứ tự là tâm của đường tròn ngoại, nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $\angle AIO \le 90^0$ khi và chỉ khi $AB + AC \ge 2.BC$.

Bài 7. Hình vuông được chia thành 16 hình vuông con bằng nhau, thu được tập hợp gồm 25 đỉnh. Hỏi cần phải bỏ đi ít nhất bao nhiêu đỉnh của tập hợp này để không có 4 đỉnh nào của tập hợp còn lại là đỉnh của một hình vuông với các cạnh song song với cạnh của hình vuông ban đầu?

Đề số 3

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(y+z) = x^2 + 2 \\ y(z+x) = y^2 + 3 \\ z(x+y) = z^2 + 4 \end{cases}$$

Bài 2. Hàm số f: R   R thoả mãn điều kiện f(cotg x) = sin 2x + cos 2x với mọi x thuộc (0, π). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số g: [-1, 1]   R, g(x) = f(x).f(1-x).

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại hai điểm B, C và A là một điểm thay đổi trên (O). AB, AC cắt đường tròn (O’) lần lượt tại C’, B’. Gọi M’ là trung điểm của B’C’. Chứng minh rằng AM’ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, n) thỏa mãn điều kiện: mỗi ước nguyên tố của a^n+1 cũng là ước nguyên tố của a+1.

Bài 5. Tìm tất cả các đa thức P(x) thoả mãn điều kiện $P^2(x) – P(x^2) = 2x^4$.

Bài 6. Cho tam giác cân ABC với AB = AC. P là một điểm bất kỳ nằm trong hay nằm trên các cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng $PA^2 + PB.PC \le AB^2$.

Bài 7. Cho A là một tập hợp gồm 8 phần tử. Tìm số lớn nhất các tập con gồm 3 phần tử của A sao cho giao của 2 tập bất kì trong các tập con này không phải là một tập hợp gồm 2 phần tử.

Đề số 4

Bài 1. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} x \geq y \geq z \geq 1 \\ 2y + 3z \geq 6 \\ 11x + 27z \geq 54 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{x^2} + \frac{2008}{y^2} + \frac{2009}{z^2}$.

Bài 2. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = 1, x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1 + \sqrt{x_n}}$ với mọi $n \in N$. Ta xác định dãy $\{y_n\}$ bởi công thức $y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i 2^i, \quad \forall n \in N^*$. Tìm công thức tổng quát của dãy $\{y_n\}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC, D là một điểm bất kỳ trên tia đối của tia CB. Đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD cắt nhau tại P và Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi.

Bài 4. Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ n sao cho tồn tại các số nguyên lẻ x_1, x_2, …, x_n thoả mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n^4$.

Bài 5. Tìm tất cả các hàm số f: R   R thoả mãn điều kiện

$$f(f(x) + y)) = f(f(x) - y) + 4f(x)y$$

với mọi x, y thuộc R.

Bài 6. Cho tam giác ABC có BC > AB > AC và cosA + cosB + cosC = 11/8. Xét các điểm X thuộc BC và Y thuộc AC kéo dài về phía C sao cho BX = AY = AB.

a) Chứng minh rằng XY = AB/2.

b) Gọi Z là điểm nằm trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác không chứa C sao cho ZC = ZA + ZB. Hãy tính tỷ số ZC/(XC+YC).

Bài 7. Cho n là số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2. Kí hiệu A = {1, 2, …, n}. Tập con B của tập A được gọi là 1 tập "tốt" nếu B khác rỗng và trung bình cộng của các phần tử của B là 1 số nguyên. Gọi T_n là số các tập tốt của tập A. Chứng minh rằng $T_n - n$ là 1 số chẵn.

Đề số 5

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = yz + \frac{8}{x} = 2xz - \frac{2}{y} = 3xy + \frac{18}{z}$$

Bài 2. Cho số thực a và dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi:

$x_1 = a$ và $x_{n+1} = \ln(3+\cos x_n + \sin x_n) - 2008$ với mọi n = 1, 2, 3, …

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.

Bài 3. Hai đường tròn có bán kính tỷ lệ 4:1 tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm M và nằm trong hình chữ nhật ABCD sao cho đường tròn lớn tiếp xúc với các cạnh AD, BC và CD, còn đường tròn nhỏ tiếp xúc AB và AD. Tiếp tuyến chung tại M của hai đường tròn cắt các cạnh AD và AB tại P và Q. Hãy tính các tỷ số AP/PD và AQ/QB.

Bài 4. Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $(a,b) \le \sqrt{a+b}$.

Bài 5. Cho a, b, c > 0, a + b + c = 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \ge a^2 + b^2 + c^2.$$

Bài 6. Trong mặt phẳng cho đường tròn (O) và đường thẳng d không có điểm chung với (O). Gọi H là hình chiếu của O lên d, gọi M là một điểm trên d (M không trùng với H). Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O). Gọi C, D là hình chiếu của H lên MA, MB. Các đường thẳng CD, AB cắt OH tại I và K. Chứng minh rằng I là trung điểm của HK

Bài 7. Trên bàn cờ vua kích thước 8x8 được chia thành 64 ô vuông đơn vị, người ta bỏ đi một ô vuông đơn vị nào đó ở vị trí hàng thứ m và cột thứ n. Gọi S(m;n) là số hình chữ nhật được tạo bởi một hay nhiều ô vuông đơn vị của bàn cờ sao cho không có ô nào trùng với vị trí của ô bị xóa bỏ ban đầu. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của S(m;n).

Đề số 6

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} |y| = |x-3| \\ (2\sqrt{z} - 2 + y)y = 1 + 4y \\ x^2 + z - 4x = 0 \end{cases}$$

Bài 2. Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi công thức truy hồi $a_1 = 1/2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$.
Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$ với mọi số nguyên dương n.

Bài 3. Các điểm A, B, C, D, E, F theo thứ tự nằm trên một đường tròn k. Tiếp tuyến của đường tròn k tại các điểm A và D và các đường thẳng BF và CE đồng quy tại một điểm P. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BC và EF hoặc song song với nhau, hoặc đồng quy tại một điểm.

Bài 4. (a) Cho trước số nguyên dương n. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương phân biệt x, y sao cho x + k chia hết cho y + k với mọi k = 1, 2, …, n.

(b) Chứng minh rằng nếu với các số nguyên dương x và y ta có x + k chia hết cho y + k với mọi số nguyên dương k thì x = y.

Bài 5. Tìm tất cả các đa thức P(x) với hệ số thực thoả mãn điều kiện $P^2(x) = P(x^2) - 2P(x)$.

Bài 6. Lục giác lồi ABCDEF có ABF là tam giác vuông cân tại A, BCEF là hình bình hành. AD = 3, BC = 1, CD + DE = $2\sqrt{2}$. Tính diện tích lục giác.

Bài 7. Cho X = {1, 2, …, n}. Tìm số tất cả các cặp sắp thứ tự (A, B) với A, B là các tập con của X sao cho A không phải là tập con của B và B cũng không phải là tập con của A.

Đề số 7

Bài 1. Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng $a+b+c \geq \dfrac{3}{a+b+c} + \dfrac{2}{abc}$.

Bài 2. Tìm tất cả các hàm số f: R   R thoả mãn điều kiện:

f(x-f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) -1

với mọi x, y thuộc R.

Bài 3. Các đường chéo của hình thang ABCD cắt nhau tại điểm P. Điểm Q nằm giữa hai đáy BC và AD được chọn sao cho ∠AQD = ∠CQB. Điểm P và Q nằm khác phía nhau đối với cạnh CD. Chứng minh rằng ∠BQP = ∠DAQ.

Bài 4. Tìm tất cả các số nguyên dương n có thể biểu diễn được dưới dạng

$$n = [a, b] + [b, c] + [c, a]$$

trong đó a, b, c là các số nguyên dương. ([a, b] ký hiệu bội số chung nhỏ nhất của các số nguyên dương a, b).

Bài 5. Tìm tất cả các đa thức hai biến P(x, y) sao cho $P(a,b).P(c,d) = P(ac+bd,ad+bc)$ với mọi a, b, c, d thuộc R.

Bài 6. Hãy xác định dạng của tứ giác ABCD diện tích S, biết rằng trong S tồn tại một điểm O sao cho $2S = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$.

Bài 7. Với số nguyên dương $n > 1$ xét $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Tô các số của S bằng 2 màu, u số màu đỏ và v số màu xanh. Hãy tìm số các bộ (x, y, z) thuộc S^3 sao cho

a) x, y, z được tô cùng màu;

b) $x + y + z$ chia hết cho n.