Chương 4.

CÁC BÀI TOÁN VỀ THIẾT LẬP HÀM SỐ

Bài toán thiết lập hàm số với các điều kiện nào đó, còn được gọi là các bài toán về phương trình hàm số, là một phần không thể thiếu được trong các sách chuyên khảo về hàm số. Trong chương này chúng tôi trình bày một số phương pháp để giải phương trình hàm số.

§1. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM SỐ

1) *Xét phương trình hàm số dạng :*

$$f(\varphi(x)) = g(x). \tag{1}$$

Để giải phương trình dạng (1), nói chung ta tiến hành như sau :

Đặt $\varphi(x) = t.$ (2)

- Nếu phương trình (2) dễ giải và cho biểu thức nghiệm đơn giản, chẳng hạn $x = h(t)$.

Khi đó lại thay vào (1) ta có :

$$f(t) = g(h(t)). \tag{3}$$

Vậy (3) chính là dạng của hàm số cần tìm.

- Nếu phương trình (2) hoặc là khó giải, hoặc là do biểu thức nghiệm phức tạp, khi ấy nếu như bằng các phép toán biến đổi nào đó, ta có thể đưa (1) về dạng : $f(\varphi(x)) = k(\varphi(x))$, khi đó hàm số phải tìm có dạng :

$$f(t) = k(t).$$

Chú ý : a) Phương pháp nói trên thường sử dụng để giải các bài toán đơn giản nhất về phương trình hàm số.

b) Vì cách giải trên là điều kiện cần, nên sau khi giải xong ta phải tiến hành thử lại xem hàm số vừa tìm được có thoả mãn các yêu cầu đầu bài đề ra hay không ?

2) *Xét phương trình dạng :*

$$\alpha(x)f(\varphi(x))+\beta(x)f(\psi(x))=g(x). \qquad (4)$$

Nếu như bằng phép thế nào đó $x=h(t)$ có tính chất :

$$\varphi(h(t))=\psi(t)\ ;\ \psi(h(t))=\varphi(t)$$

khi đó từ (4) ta có :

$$\alpha(h(t))\,f(\psi(t))+\beta(h(t))\,f(\varphi(t))=g(h(t)). \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra hệ phương trình bậc nhất hai ẩn sau :

$$\begin{cases}\alpha(x)f(\varphi(x))+\beta(x)f(\psi(x))=g(x) & (6)\\ \beta(h(x))\,f(\varphi(x))+\alpha(h(x))\,f(\psi(x))=g(h(x)) & (7)\end{cases}$$

Theo công thức Grame-me giải hệ (6), (7), giả sử ta suy ra :

$$f(\varphi(x))=G(x), \qquad (8)$$

và trở lại phương trình cơ bản dạng (1).

Chú ý : 1) Đôi khi để giải (4) ta phải quy về hệ 3 ẩn (hệ tuyến tính), hoặc thậm chí hệ có nhiều ẩn hơn.

2) Xin nhắc lại một lần nữa : sau khi tìm được hàm số, nhất thiết phải thử lại xem nó có thoả mãn yêu cầu đề ra hay không ?

Bài 1 : 1) Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng với mọi $x\neq 1$, ta có

$$f\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=\frac{2x+5}{x^2+1}.$$

2) Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng với mọi $x\neq 0$, ta có

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}.$$

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số thoả mãn điều kiện với mọi $x\neq 1$, ta có

$$f\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=\frac{2x+5}{x^2+1} \qquad (1)$$

1) Đặt $\dfrac{x+2}{x-1}=t\Rightarrow x=\dfrac{t+2}{t-1}$.

Khi đó từ giả thiết (1), ta có

$$f(t)=\frac{2\frac{t+2}{t-1}+5}{\left(\frac{t+2}{t-1}\right)^2+1}=\frac{7t^2-8t+1}{2t^2+2t+5}.$$

Vậy $f(x)=\dfrac{7x^2-8x+1}{2x^2+2x+5}$. (2)

Thử lại thấy hàm số dạng (2) thoả mãn (1), nên nó là hàm số duy nhất cần tìm.

2) Giả sử $f(x)$ là hàm số thoả mãn điều kiện với mọi $x \neq 0$, ta có

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}. \quad (3)$$

Viết lại (3) dưới dạng sau :

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right). \quad (4)$$

Từ (4) suy ra $f(t)=t^3-3t$.

Thử lại dễ dàng thấy rằng hàm số $f(x)=x^2-3x$ là hàm số thoả mãn (3), và đó là nghiệm duy nhất cần tìm.

Chú ý : 1) Phần 1) là minh hoạ cho trường hợp $\varphi(x)=t$, dễ dàng giải theo x và cho biểu thức nghiệm đơn giản.

2) Phần 2) là minh hoạ cho trường hợp $\varphi(x)=x+\dfrac{1}{x}=t$, cho ta biểu thức nghiệm phức tạp, vì thế cần đưa vế phải của phương trình về dạng hàm số của biến $\varphi(x)$.

Bài 2 : Tìm các hàm số $f(x)$, $g(x)$ thoả mãn hệ sau đây :

$$\begin{cases} f(x+1)+xg(x+1)=2x, & \forall x \neq 0 \\ f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+g\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x-1, & \forall x \neq 1. \end{cases}$$

Bài giải

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số thoả mãn hệ điều kiện sau :

$$\begin{cases} f(x+1)+xg(x+1)=2x, \ \forall x \neq 0 & (1) \\ f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+g\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x-1, \ \forall x \neq 1. & (2) \end{cases}$$

Đặt $x+1=t$ trong (1), và đặt $\dfrac{x+1}{x-1}=t$ trong (2), khi ấy ta đưa hệ (1) và (2) về dạng sau đây :

$$\begin{cases} f(t)+(t-1)g(t)=2t-2 & (3) \\ f(t)+g(t)=\dfrac{2}{t-1} & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) trừ (4) vế với vế ta có : $(t-2)g(t)=\dfrac{2t^2-4t}{t-1}$

$$\Rightarrow g(t)=\frac{2t}{t-1} \text{ (nếu } t \neq 2\text{)} \qquad (5)$$

Mặt khác trong (1) thay $x=1$, và trong (2) thay $x=3$ khi ấy $\dfrac{x+1}{x-1}=2$, ta có $f(2)+g(2)=2$.

Thay lại (5) vào (3) ta có : $f(t)=-2$ nếu $t \neq 2$ và $t \neq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=-2 \quad \forall x \neq 2, \ \forall x \neq 1 \\ g(x)=\dfrac{2x}{x-1} \quad \forall x \neq 2, \ \forall x \neq 1 \text{ và } f(2)+g(2)=2 \end{cases}$$

Thử lại vào (1), (2) ta thấy nghiệm đúng.

Vậy nghiệm của hệ (1) và (2) như sau :

$$f(x)=\begin{cases} -2, \forall x \neq 2, x \neq 1 \\ a \text{ khi } x=2 \\ b \text{ khi } x=1 \end{cases} ; \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{x-1}, \forall x \neq 2, \ x \neq 1 \\ 2-a \text{ khi } x=2 \end{cases}$$

ở đây a, b là các hằng số tuỳ ý.

Chú ý : Nếu thay $x=2$, ta có $\dfrac{2x}{x-1}=4$ và khi $a=-2 \Rightarrow 2-a=4$, vì thế trong các nghiệm cần tìm có nghiệm đơn giản sau đây :

$$f(x)=-2 \text{ và } g(x)=\frac{2x}{x-1}.$$

Trong nhiều sách cho đáp số trên. Dĩ nhiên nghiệm trên chấp nhận được nhưng chỉ là một nghiệm cần tìm.

Bài 3 : Tìm hàm số $f(x)$ thoả mãn hệ điều kiện sau :

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y, \text{ với mọi } x,\ y \\ f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1. \end{cases}$$

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số thoả mãn yêu cầu đề ra, tức là ta có

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y, \text{ với mọi } x,\ y & (1) \\ f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) & (2) \end{cases}$$

Trong (1) cho $x=0,\ y=t$; ta có :

$$f(t)+f(-t)=2\cos t. \qquad (3)$$

Trong (1) lại cho $x=\dfrac{\pi}{2}+t$; $y=\dfrac{\pi}{2}$, ta có

$$f(\pi+t)+f(t)=0. \qquad (4)$$

Bây giờ cho $x=\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{\pi}{2}+t$ thì từ (1) ta được

$$f(\pi+t)+f(-t)=-2\sin t. \qquad (5)$$

Cộng từng vế (3) với (4), rồi tương ứng trừ cho (5) ta đi đến

$$f(t)=\cos t+\sin t. \qquad (6)$$

Với hàm cho dưới dạng (6) ta thấy $\forall x,\ \forall y$ thì

$$f(x+y)+f(x-y)=\cos(x+y)+\sin(x+y)+\cos(x-y)+\sin(x-y)$$

$= 2\cos x\cos y + 2\sin x\cos y$

$= 2(\sin x + \cos y)\cos y \;= 2f(x)\cos y.$

Nghĩa là hàm cho dưới dạng thoả mãn (1) $\forall x$, $\forall y$.

Rõ ràng hàm này thoả mãn (2), vậy $f(x) = \sin x + \cos x$ là hàm số duy nhất thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 4 : Hàm số $f(x)$ xác định với mọi x và thoả mãn hệ điều kiện sau :

$$\begin{cases}(\alpha-\beta)f(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)f(\alpha-\beta)=4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2) \text{ với mọi } \alpha,\ \beta\\ f(1)=2\end{cases}$$

Tìm hàm số $f(x)$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ thoả mãn mọi yêu cầu đề bài, tức là ta có

$$\begin{cases}(\alpha-\beta)f(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)f(\alpha-\beta)=4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2) \quad \forall\alpha,\ \forall\beta & (1)\\ f(1)=2 & (2)\end{cases}$$

Trong (1) thay $\alpha = x+1$; $\beta = x$ thì từ (1), (2) có :

$$f(2x+1) = (2x+1)(4x^2+4x+2)$$

$$\Leftrightarrow f(2x+1) = (2x+1)\left[(2x+1)^2+1\right].$$

Từ đó suy ra $f(x) = x^3 + x.$ (3)

Bằng phép thử trực tiếp suy ra ngay hàm số xác định bởi (3) thoả mãn (1), (2).

Vậy $f(x) = x^3 + x$ là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài 5 : Tìm các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ nếu như với mọi x ta có

$$\begin{cases}f(3x-1)+g(6x-1)=3x\\ f(x+1)+xg(2x+3)=2x^2+x\end{cases}$$

Bài giải

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số cần tìm, tức là $\forall x$, ta có

$$\begin{cases} f(3x-1)+g(6x-1)=3x & (1) \\ f(x+1)+xg(2x+3)=2x^2+x & (2) \end{cases}$$

Trong (1) thay $3x-1=t$ thì (1) trở thành :

$$f(t)+g(2t+1)=t+1. \quad (3)$$

Trong (2) thay $x+1=t$ thì (2) trở thành :

$$f(t)+(t-1)g(2t+1)=2t^2-3t+1. \quad (4)$$

Lấy (4) trừ (3) ta có :

$$(t-2)g(2t+1)=2t^2-4t=2t(t-2) \quad (*)$$

$$\Rightarrow g(2t+1)=2t \quad \forall t\neq 2 \ \Rightarrow \ g(x)=x-1 \quad \forall x\neq 2.$$

Thay lại vào (3) ta có :

$$f(x)+2x=x+1, \quad \forall x\neq 2\ ; \ f(x)=1-x, \forall x\neq 2.$$

Trong (1) cho $x=1$ ta có $f(2)+g(5)=3.$

Trong (2) cho $x=1$ ta có $f(2)+g(5)=3.$

Do $g(5)=4 \Rightarrow f(2)=-1.$

Trong (1) cho $x=\frac{1}{2}$ ta có : $f\left(\frac{1}{2}\right)+g(2)=\frac{3}{2}.$

Trong (2) cho $x=-\frac{1}{2}$ ta có : $f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}g(2)=0.$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}g(2)=\frac{3}{2} \Rightarrow g(2)=1.$$

Từ $g(x)=\begin{cases} x-1, & \forall x\neq 2 \\ 1, \text{ nếu } x=2 \end{cases} \Leftrightarrow g(x)=x-1, \quad \forall x$

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \forall x\neq 2 \\ -1, & \text{nếu } x=2 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=1-x, \quad \forall x.$$

Thử lại $f(x)=1-x$ và $g(x)=x-1$ vào (1), (2) ta thấy đúng. Vì vậy đó là nghiệm của hệ đã cho. Vậy hệ (1), (2) có duy nhất nghiệm :

$$f(x)=1-x \text{ và } g(x)=x-1.$$

Chú ý : Từ (*) nếu suy ra ngay $g(2t+1)=2t$ là phạm sai lầm. Khi làm bài các bạn học sinh cần lưu ý những điều này. Ví dụ bài 5 đã chỉ rõ những chỗ mà các bạn nếu không chú ý trong khi làm bài sẽ dẫn đến sai sót.

§2. SỬ DỤNG TÍNH LIÊN TỤC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM SỐ

Bài 1 : Cho $f(x)$ là hàm liên tục, thoả mãn điều kiện

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \text{ với mọi } x,\ y$$

Hãy tìm hàm $f(x)$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục thoả mãn đề bài, tức là ta có

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,\ \forall y \tag{1}$$

Trong (1) thay $y=x$, ta có

$$f(x+x)=f(x)+f(x) \Rightarrow f(2x)=2f(x),\ \forall x$$

Từ đó theo nguyên lí quy nạp suy ra dễ dàng

$$f(nx)=nf(x),\ \ \forall x \tag{2}$$

Trong (2) thay $x=\dfrac{x}{n}$, ta có

$$f\left(n\frac{x}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right) \text{ hay } f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x),\quad \forall x \tag{3}$$

Giả sử r là số hữu tỉ dương tuỳ ý $\Rightarrow r=\dfrac{p}{q}$, với $p,\ q$ là các số nguyên dương. Khi đó theo (2), (3) ta có

$$f(rx)=f\left(\frac{p}{q}x\right)=pf\left(\frac{x}{q}\right)=p.\frac{1}{q}f(x)=\frac{p}{q}f(x)=rf(x).$$

Như vậy ta có $f(rx)=rf(x),\ \ \forall x$ (4)

với mọi số hữu tỉ dương r.

Đặt $x = y = 0$ thì từ (1) ta có

$$f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0. \quad (5)$$

Thay trong (1) y bằng $-x$, ta có

$$f(0) = f(x) + f(-x).$$

Theo (5) suy ra

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \quad (6)$$

Giả sử r là số hữu tỉ âm $\Rightarrow -r$ là số hữu tỉ dương.

Ta có $f(rx) = f[-(-rx)]$.

Theo (6), (4) suy ra $f(rx) = -f(-rx) = -(-r)f(x) = rf(x)$.

Như vậy ta đã chứng minh được với mọi số hữu tỉ r thì

$$f(rx) = rf(x), \quad \forall x.$$

Giả sử x_0 là một số vô tỉ tuỳ ý. Như ta đã biết $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} r_n$, ở đây r_n là các số hữu tỉ.

Vì $f(x)$ là hàm liên tục nên $\forall x$ ta có

$$f(x_0 x) = \lim_{n \to \infty} f(r_n x) = \lim_{n \to \infty} (r_n f(x)) = f(x) \lim_{n \to \infty} r_n = x_0 f(x).$$

Như thế ta chứng minh được với mọi số thực α thì

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad \forall x \quad (7)$$

Thay trong (7) $x = 1$, ta có $f(\alpha) = \alpha f(1), \quad \forall \alpha$ (8)

Như vậy sau khi đặt $a = f(1) = \text{const}$ thì từ (8) suy ra hàm số cần tìm có dạng $f(x) = ax$

Đảo lại rõ ràng $f(x) = ax$ thoả mãn hệ thức

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \; \forall y.$$

Như thế lớp hàm tuyến tính $f(x) = ax$ với $a = \text{const}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý : Phương trình hàm $f(x+y)=f(x)+f(y)$ với mọi $x,\ y\in\mathbb{R}$, với $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục thường gọi là *phương trình Cô-si*.

Sau đây ta sẽ xét một vài áp dụng của phương trình Cô-si.

Áp dụng 1 : Cho $a\in\mathbb{R}$. Hãy tìm các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x-y)=f(x)-f(y)+axy\quad\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài giải

Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn hệ thức

$$f(x-y)=f(x)-f(y)+axy\quad\forall x,\ y\in\mathbb{R}.\tag{1}$$

Trong (1) cho $x=1,\ y=0,$ ta có

$$f(1)=f(1)-f(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

Trong (1) lấy $x=y=1\Rightarrow f(0)=a\Rightarrow a=0.$ Từ đó suy ra có hai khả năng sau :

1) Nếu $a\neq 0$: Không tồn tại hàm $f(x)$ thoả mãn yêu cầu.

2) Nếu $a=0$: Khi đó (1) có dạng

$$f(x-y)=f(x)-f(y)\quad\forall x,\ y\in\mathbb{R}.\tag{2}$$

Trong (2) lấy $x=0,$ ta có :

$f(-y)=f(0)-f(y)\Rightarrow f(-y)=-f(y)\quad\forall y\in\mathbb{R}$, vậy $f(x)$ là hàm lẻ. Từ đó $\forall x,\ y\in\mathbb{R}$, ta có :

$$f(x+y)=f\big(x-(-y)\big)=f(x)-f(-y),$$

hay $f(x+y)=f(x)+f(y).$

Theo phương trình Cô-si suy ra $f(x)=C$, với C là hằng số. Tóm lại nếu $a=0$, thì $f(x)=C$, với C là hằng số, nên hàm số thoả mãn mọi yêu cầu của đầu bài.

Áp dụng 2 : Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục sao cho

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài giải

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và thoả mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Cho $y=0$, trong (1), có :

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)}{2}+\frac{f(0)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}f(0). \qquad (2)$$

Tương tự cho $x=0$, trong (1) ta có

$$\frac{1}{2}f(y)=f\left(\frac{y}{2}\right)-\frac{1}{2}f(0). \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(0)=\left(\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(0)\right)+\left(\frac{1}{2}f(y)-\frac{1}{2}f(0)\right)$$

$$=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)-f(0)\right)+\left(f\left(\frac{y}{2}\right)-f(0)\right) \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Đưa vào xét hàm số $g(t)=f(t)-f(0)$.

Khi đó từ tính liên tục của f, suy ra g cũng là hàm liên tục và lúc này (4) có dạng

$g(u+v)=g(u)+g(v) \quad \forall u,\ v \in R.$

Theo phương trình Cô-si, ta có $g(x)=C$, với C là hằng số.

Từ đó suy ra $f(x)=C+D$, ở đây C và D là các hằng số.

Đảo lại $f(x)=C+D$, với C, D là hằng số thoả mãn mọi yêu cầu đề ra. Tóm lại các hàm số cần tìm có dạng $f(x)=C+D$, ở đây C, D là các hằng số đó.

Áp dụng 3 : Tìm hàm số $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ liên tục sao cho

$$f\left(\sqrt{xy}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}\quad \text{với mọi } x,y\in\mathbb{R}_+.$$

Bài giải

Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục và thoả mãn điều kiện

$$f\left(\sqrt{xy}\right)=\frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big)\quad \forall x>0,\ y>0. \tag{1}$$

Đặt $x=e^u$, $y=e^v$, và $g(u)=f(e^u)$.

Khi đó $g(u)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (1) suy ra $\forall u, v\in\mathbb{R}$, ta có

$$f\left(\sqrt{e^ue^v}\right)=\frac{1}{2}\left(f(e^u)+f(e^v)\right)$$

$$\Rightarrow f\left(e^{\frac{u+v}{2}}\right)=\frac{f(e^u)+f(e^v)}{2}$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{u+v}{2}\right)=\frac{g(u)+g(v)}{2}.$$

Bây giờ theo phương trình Cô-si thì $g(u)=au+b$, trong đó a, b là các hằng số. Như vậy

$$f(e^u)=au+b.$$

Đặt $x=e^u\Rightarrow u=\ln x$ và ta có

$f(x)=a\ln x+b,\ \ x>0,$ ở đây a, b là các hằng số tuỳ ý.

Áp dụng 4 : Tìm $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ liên tục trên $\mathbb{R}_+$ sao cho

$$f\left(\sqrt{xy}\right)=\frac{2}{\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(y)}}\quad \text{với mọi } x,\ y\in\mathbb{R}_+$$

Bài giải

Giả sử $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục và thoả mãn hệ thức

$$f\left(\sqrt{xy}\right)=\frac{2}{\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(y)}}\quad \forall x>0,\forall y>0. \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $f(x)\neq 0 \quad \forall x>0$. Từ (1) suy ra $\forall x>0, \forall y>0$ thì kết hợp với $f(x)\neq 0, \quad \forall x>0$, ta có

$$\frac{1}{f\left(\sqrt{xy}\right)}=\frac{\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(y)}}{2}. \qquad (2)$$

Đặt $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$. Vì f liên tục $\forall x>0$ mà $f(x)\neq 0 \quad \forall x>0$ mà suy ra $g(x)$ là hàm liên tục khi $a>0$, ngoài ra ta có

$$g\left(\sqrt{xy}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{2}.$$

Theo áp dụng 3, ta có $g(x)=a\ln x+b$. Từ đó

$$f(x)=\frac{1}{a\ln x+b},\quad \forall x>0.$$

Đảo lại nếu $f(x)=\dfrac{1}{a\ln x+b}$, ở đây a, b là các hằng số.

Nếu $a\neq 0$. Xét phương trình

$$a\ln x+b=0 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{b}{a} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{b}{a}}.$$

Vậy nếu $a\neq 0$ thì $f(x)$ không liên tục tại $x=x_0=e^{-\frac{b}{a}}>0$.

Do đó để $f(x)$ liên tục khi $x>0$, ta cần có $a=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{b}$.

Vậy $f(x)=C$, trong đó $C\neq 0$ là hằng số. Tóm lại hàm số $f(x)=C$, ở đây $C\neq 0$ là hằng số, chính là hàm cần tìm.

Bài 2 : Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên toàn trục số không đồng nhất bằng không và thoả mãn điều kiện

$$f(x+y)=f(x).f(y) \text{ với mọi } x,\ y.$$

Tìm hàm $f(x)$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số cần tìm, khi đó ta có

$$f(x+y)=f(x).f(y) \quad \forall x,\ y \tag{1}$$

Thay trong (1) $x=y=\frac{t}{2}$ thì ta có

$$f(t)=f^2\left(\frac{t}{2}\right) \quad \forall t \Rightarrow f(x)\ge 0 \quad \forall x \tag{2}$$

Giả sử tồn tại x_0 mà $f(x_0)=0$. Khi đó $\forall t$, ta có

$$f(x_0+t)=f(x_0).f(t)=0$$

Từ $f(x_0+t)=0 \quad \forall t \Rightarrow f(x)\equiv 0$.

Điều này mâu thuẫn với f không phải là hàm đồng nhất bằng 0.

Kết hợp với (2) suy ra $f(x)>0 \ \forall x$. (3)

Đặt $a=f(1)$, như vậy do (3) suy ra $a>0$.

Vì $f(t)>0 \ \ \forall t$, nên ta có thể viết $\log_a f(t)=\varphi(t)$.

Do $f(t)$ liên tục $\forall t \Rightarrow \varphi(t)$ cũng là hàm liên tục trên toàn trục số.

Ta có $\forall x, \forall y$ thì $\varphi(x+y)=\log_a\left[f(x+y)\right]=\log_a\left[f(x).f(y)\right]$

$=\log_a f(x)+\log_a f(y)=\varphi(x)+\varphi(y)$

$\Rightarrow$ hàm số $\varphi(t)$ thoả mãn các điều kiện của bài 1.

Theo bài thì $\varphi(t)=mt$, với $m=\text{const} \Rightarrow f(t)=a^{mt}$.

Do $f(1)=a \Rightarrow a=a^m \Rightarrow m=1 \Rightarrow f(t)=a^t$.

Lớp hàm $f(x)=a^x$ thoả mãn yêu cầu đề ra, vì thế đó là lớp thoả mãn đề bài.

Bài 3 : Cho $f(x)$ là hàm liên tục khi $x > 0$, không đồng nhất bằng 0 và thoả mãn điều kiện $f(xy) = f(x) + f(y)$ với mọi $x > 0$, > 0, $y > 0$.

Tìm hàm $f(x)$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài, tức là ta có :

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x > 0, \forall y > 0.$$

Xét hàm số $\varphi(x) = f(e^x)$.

Như vậy $\varphi(x)$ là hàm số liên tục $\forall x$. Ta có $\forall x$, $\forall y$ thì

$$\varphi(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x.e^y) = f(e^x) + f(e^y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Vậy hàm số $\varphi(x)$ thoả mãn các điều kiện của bài 1. Theo bài 1 thì

$$\varphi(x) = cx, \text{ với } c = \text{const}.$$

Rõ ràng $c \neq 0$. Vì nếu $c = 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$ là điều vô lí

$$\Rightarrow f(e^x) = cx \Rightarrow f(t) = c \ln t.$$

Đặt $c = \dfrac{1}{\ln a} \Rightarrow f(t) = \dfrac{\ln t}{\ln a} = \log_a t$. (với $a > 0$, $a \neq 1$)

Thử lại ta thấy $f(x) = \log_a x$, $x > 0$ thoả mãn yêu cầu đề ra. Đó là lớp hàm cần tìm.

Bài 4 : Cho $f(x)$ là hàm liên tục, không đồng nhất bằng 0 xác định khi $x > 0$ và thoả mãn điều kiện

$$f(xy) = f(x).f(y) \text{ với mọi } x > 0, > 0, y > 0.$$

Tìm hàm số $f(x)$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài, tức là ta có

$$f(xy) = f(x).f(y) \quad \forall x > 0, \forall y > 0.$$

Lấy $\sqrt{t} = x = y \Rightarrow f(t) = f^2(\sqrt{t}) \geq 0$.

Như vậy $f(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$.

Giả sử tồn tại $x_0 > 0$ mà $f(x_0) = 0$. Khi đó $\forall t > 0$, ta có

$$f(x_0 t) = f(x_0).f(t) = 0 \Rightarrow f(x_0 t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$\Rightarrow f(x) \equiv 0 \quad \forall x > 0$, đó là điều mâu thuẫn với giả thiết $f \neq 0$. Vậy ta có $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

Đặt $\varphi(x) = \ln f(x)$, với $x > 0 \quad \forall x, y > 0$, ta có

$$\varphi(xy) = \ln f(xy) = \ln[f(x).f(y)]$$

$$= \ln f(x) + \ln f(y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Như vậy hàm số $\varphi(x)$ thoả mãn điều kiện của bài 3 nên theo bài 3 suy ra $\varphi(x) = \log_a x$ với hằng số $a > 0, a \neq 1$ nào đó

$$\Rightarrow \ln f(x) = \log_a x \Rightarrow f(x) = e^{\log_a x} = e^{\frac{\ln x}{\ln a}} = \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{\ln a}}.$$

Đặt $\alpha = \dfrac{1}{\ln a} \Rightarrow f(x) = x^{\alpha}$.

Thử lại thấy lớp hàm $f(x) = x^{\alpha}$ thoả mãn yêu cầu đề ra, vậy đó là lớp hàm cần tìm.

Bài 5 : Tìm tất cả các hàm liên tục xác định với mọi x sao cho ta có $f(x^2) + f(x) = x^2 + x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số thoả mãn mọi yêu cầu đầu bài.

Đặt $g(x) = f(x) - x$. Như vậy rõ ràng $g(x)$ là liên tục và ta có

$$g(x^2) = f(x^2) - x^2 = x - f(x) = -g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Từ (1) suy ra $g(x^4) = -g(x^2) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Từ (2) suy ra nói riêng $\forall x > 0$, ta có

$$g(x) = g\left(x^{4^{-n}}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x^{4^{-n}} = 1$, do vậy vì $g(x)$ liên tục nên từ (3) ta có

$$g(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x^{4^{-n}}\right) = g\left(\lim_{n\to\infty} x^{4^{-n}}\right) = g(1), \quad \forall x > 0. \tag{4}$$

Như vậy ta chứng minh được $g(x) = g(1), \quad \forall x > 0.$

Mặt khác $\begin{cases} g(1) = -g(1) \\ g(0) = -g(0) \end{cases}$ (do thay trong (1) lần lượt $x = 1$ và $x = 0$)

$$\Rightarrow g(1) = g(0) = 0 \Rightarrow g(x) = 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Do vậy từ (1) lại suy ra

$$g(x) = 0, \ \forall x < 0 \Rightarrow g(x) \equiv 0, \ \forall x \Rightarrow f(x) = x.$$

Đảo lại $f(x) = x$ thoả mãn yêu cầu đầu bài. Vậy $f(x) = x$ là hàm số duy nhất đáp ứng yêu cầu đề ra.

Bài 6 : Tìm hàm liên tục $f(x)$ xác định với mọi $x > 0$ thoả mãn tính chất sau đây :

$$\forall x \neq 1, \text{ thì } f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^2) \neq 0.$$

Bài giải

Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thoả mãn yêu cầu đề bài, tức là

$$\forall x \neq 1 \text{ thì } f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^2) \neq 0. \tag{1}$$

Từ (1) suy ra nói riêng ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^2) \neq 0 \quad \forall 0 < x < 1. \tag{2}$$

Từ đó suy ra tồn tại x_0, $0 < x_0 < 1$ sao cho $f(x_0) = 0$. (3)

Thật vậy nếu không phải như vậy thì $\forall x_0 \in (0\,;\,1)$, ta đều có $f(x_0) \neq 0$. Do vậy từ (2) suy ra $f(x_0^2) = 0$. Chú ý là do $x_0 \in (0\,;\,1) \Rightarrow 0 < x_0^2 < x_0$ $\Rightarrow 0 < x_0^2 < 1 \Rightarrow f(x_0^2) \neq 0$. Ta nhận được điều mâu thuẫn với $f(x_0^2) = 0$.

Vậy ta có (3) với $x_0 \in (0\,;\,1)$.

Từ (3) suy ra $f(x_0^2) \neq 0 \Rightarrow f(x_0^4) = 0$.

(Chú ý là do $0 < x_0 < 1 \Rightarrow 0 < x_0^4 < x_0^2 < 1$).

Đặt $h(x) = f(x) - f(x^2)$, với $0 < x < 1$.

Ta có $h(x_0) = f(x_0) - f(x_0^2) = -f(x_0^2)$

$$h(x_0^2) = f(x_0^2) - f(x_0^4) = f(x_0^2) \Rightarrow h(x_0) = -h(x_0^2). \quad (4)$$

Chú ý là $f(x_0^2) \neq 0 \Rightarrow f(x_0) \neq 0$. Vậy từ (4) suy ra

$$h(x_0)h(x_0^2) < 0. \quad (5)$$

Do $f(x)$ là hàm liên tục suy ra $h(x)$ cũng là hàm liên tục, do đó từ (5) suy ra tồn tại c, $x_0^2 < c < x_0$ sao cho

$$h(c) = 0 \Rightarrow f(c) = f(c^2). \quad (6)$$

Từ (6) suy ra điều vô lí, vì chú ý rằng $0 < c^2 < c < 1$, nên nếu $f(c) = 0$ thì $f(c^2) \neq 0$; còn nếu $f(c) \neq 0$ thì $f(c^2) = 0$.

Vậy trong mọi khả năng ta đều có $f(c) \neq f(c^2)$. Điều này mâu thuẫn với (6). Như vậy từ giả sử có tồn tại hàm $f(x)$ thoả mãn mọi yêu cầu đề bài sẽ dẫn đến vô lí.

Tóm lại bài toán đã cho vô nghiệm, tức là không tồn tại hàm liên tục xác định với $x > 0$ và thoả mãn điều kiện

$$\forall x \neq 1 \text{ ta có } f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^2) \neq 0.$$

Bài 7 : Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0\,;\,1]$ và thoả mãn hệ thức

$$f(xf(x)) = f(x), \text{ với mọi } x \in [0\,;\,1].$$

Bài giải

Giả sử $a \in (0\,;\,1]$, và $b = f(a)$. Theo giả thiết ta có

$$f(af(a)) = f(ab) = f(a).$$

Như vậy nói riêng $f(x)$ xác định tại $x = ab$.

Ta có $f(ab^2) = f(ab\,f(a)) = f(ab\,f(ab)) = f(ab) = f(a)$.

Như vậy nói riêng $f(x)$ cũng xác định tại $x = ab^2$.

Giả sử $f(x)$ đã xác định tại $x = ab^{n-1}$ và $f(ab^{n-1}) = f(a)$.

Khi đó ta có

$f(ab^n) = f(ab^{n-1}f(a)) = f(ab^{n-1}f(ab^{n-1}))$ (theo giả thiết quy nạp). Lại theo tính chất của hàm f, và có

$$f(ab^n) = f(ab^{n-1}) = f(a).$$

Như vậy $f(x)$ xác định tại mọi $x = ab^n$ và $f(ab^n) = f(a)$, với mọi $n \in N^*$.

Ta chứng minh rằng $b \in [0 ; 1]$. Thật vậy nếu không phải như vậy thì có hai khả năng xảy ra :

- Nếu $b < 0$. Khi đó $ab < 0$. Điều này vô lí vì theo trên $f(x)$ xác định tại $x = ab$ nên $ab \geq 0$.

- Nếu $b > 1$. Khi đó với $n \in N^*$ và đủ lớn ta có $ab^n > 1$. Điều này cũng vô lí vì theo trên $f(x)$ xác định tại $x = ab^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, tức là $0 \leq ab^n \leq 1$.

Như vậy ta đã chứng minh được $b \in [0 ; 1]$.

Có hai trường hợp cần xét :

1) Nếu $0 < b < 1$. Khi đó $\lim\limits_{n \to \infty} b^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (ab^n) = 0$.

Từ tính liên tục của hàm f trên $[0 ; 1]$ suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} f(ab^n) = f(0)$ (1)

Mặt khác ta có

$f(a) = f(ab^n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, nên

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} f(ab^n). \tag{2}$$

Từ (1), (2) suy ra $b = f(a) = f(0)$.

2) Hoặc là $b = 0$, $b = 1$.

Như vậy ta đã chứng minh được hàm f nhận không quá 3 giá trị là $\{0 ; 1 ; f(0)\}$. Thế mà $f(x)$ lại liên tục trên $[0 ; 1]$, nên $f(x)=c$ là hằng số.

Thử lại nếu $f(x)\equiv c$, với $0\le c\le 1$ và $\forall 0\le x\le 1$, thì $f(x)$ thoả mãn mọi yêu cầu đề bài.

Tóm lại các hàm số phải tìm là $f(x)\equiv c,\ \forall x\in[0 ; 1]$; ở đây c là hằng số tuỳ ý thuộc $[0 ; 1]$.

Bài 8 : Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định trên $(0 ; +\infty)$, có đạo hàm tại $x=1$ và thoả mãn điều kiện

$$f(xy)=\sqrt{x}f(y)+\sqrt{y}f(x)$$

với mọi x, y thực và dương.

Bài giải

Ta cần đến mệnh đề sau :

Mệnh đề phụ trợ : Cho $\varphi(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số liên tục tại một điểm x_0 nào đó, và $\varphi(x)$ là hàm số cộng tính, tức là với mọi x, $y\in\mathbb{R}$, thì

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y).$$

Khi đó $\varphi(x)$ có dạng sau : $\varphi(x)=ax$ với mọi $x\in\mathbb{R}$,

ở đây $a\in\mathbb{R}$ là một hằng số.

(Chứng minh mệnh đề xem ở cuối bài).

Trở lại bài toán của ta. Xét các hàm số sau :

$$g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\ ;\ \varphi(x)=g(e^x).$$

Giả thiết $f(xy)=\sqrt{x}f(y)+\sqrt{y}f(x)$ có thể viết dưới dạng tương đương sau :

$$\sqrt{xy}\,g(xy)=\sqrt{xy}\,g(x)+\sqrt{xy}\,g(y)$$

$$\Leftrightarrow g(xy)=g(x)+g(y) \text{ với mọi } x>0,\ y>0$$

$$\Leftrightarrow g(e^{u+v})=g(e^u)+g(e^v) \text{ với mọi } u,\ v\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v) \tag{1}$$

Vì $f(x)$ khả vi tại $x=1$, nên nói riêng $f(x)$ liên tục tại $x=1$, do đó $\varphi(x)$ liên tục tại $x=0$. Kết hợp với (1), và theo mệnh đề phụ trợ suy ra

$\varphi(x)=ax$, với a là hằng số thuộc $\mathbb{R}$.

Nói cách khác, ta có $g(e^x)=ax$ hay $\dfrac{f(e^x)}{\sqrt{e^x}}=ax$.

Từ đó $f(e^x)=ax.\sqrt{e^x}$.

Đặt $t=e^x>0$, thì $f(t)=a\sqrt{t}\ln t$.

Tóm lại hàm số $f(x)$ với $x>0$, được xác định bởi $f(x)=a\sqrt{x}\ln x$, trong đó a là hằng số thực tuỳ ý. Đó là tất cả các hàm cần tìm.

Chú ý : 1) Vì phép biến đổi của phương trình trên là tương đương, nên ta không cần thử lại (hoặc việc thử lại là đơn giản và hiển nhiên đúng).

2) Mệnh đề phụ trợ chứng minh như sau :

Do $\varphi(x)$ là hàm cộng tính, nên theo các phép chứng minh truyền thống dễ dàng suy ra

$\varphi(r)=ar$ với mọi $r\in\mathbb{Q}$,

ở đây $\mathbb{Q}$ là tập hợp tất cả các số hữu tỉ, còn $a=\varphi(1)$.

Với mọi $x\in R$, thì luôn luôn tồn tại dãy số hữu tỉ $\{r_n\}$ mà

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = x. \tag{1}$$

Từ (1) suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x-r_n+x_0\right)=x_0$. (2)

Vì $\varphi(x)$ liên tục tại $x=x_0$, nên từ (2) có

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi\left(x-r_n+x_0\right)=\varphi\left(x_0\right). \tag{3}$$

Từ (3) và tính cộng tính của hàm φ suy ra

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\varphi(x)-\varphi(r_n)+\varphi(x_0)\right]=\varphi(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x)+\varphi(x_0)-\lim_{n\to+\infty}\varphi(r_n)=\varphi(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x)-\lim_{n\to+\infty}(ar_n)=0 \text{ (do } r_n \text{ là hữu tỉ, nên } \varphi(r_n)=ar_n)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x)=a\lim_{n\to+\infty}r_n \Leftrightarrow \varphi(x)=ax.$$

Vậy với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có $\varphi(x)=ax$. Mệnh đề phụ trợ được chứng minh.

Bài 9 : Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $(-1\,;\,1)$ và thoả mãn hệ thức

$$(1-x^2)f(g(x))=(1+x^2)^2 f(x) \text{ với mọi } x\in(-1\,;\,1).$$

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định liên tục trên $(-1\,;\,1)$ và thoả mãn hệ thức

$$(1-x^2)f(g(x))=(1+x^2)^2 f(x),\quad \forall x\in(-1\,;\,1). \tag{1}$$

Viết lại (1) dưới dạng sau :

$$\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}f(g(x))=(1-x^2)f(x),\quad \forall x\in(-1\,;\,1). \tag{2}$$

Đặt $\varphi(x)=(1-x^2)f(x)$ với $x\in(-1\,;\,1)$.

Khi đó $\varphi(g(x))=\left[1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2\right]f(g(x)) =\dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}f(g(x))$.

Vì lẽ đó (2) lại có thể viết lại dưới dạng sau

$$\varphi(g(x))=\varphi(x),\quad \forall x\in(-1\,;\,1). \tag{3}$$

Để ý rằng $u(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\in(0\,;+\infty)$ là một song ánh từ $(0\,;+\infty)$ đến $(-1\,;\,1)$. Điều này suy từ $u'(x)=\dfrac{-2}{(1+x)^2}$ và bảng biến thiên sau

x		-1	0		$+\infty$
u'	$-$	$\|$	$\|$	$-$	
u		$\|$	1	$\searrow$	-1

Chú ý rằng vì $g(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ nên $-1\le g(x)\le 1$, và $g(x)$ là song ánh từ $(-\infty\,;+\infty)$ đến $(-1\,;1)$. Vì lẽ ấy (3) lại có thể viết lại dưới dạng sau :

$$\varphi\left(g\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)=\varphi\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \text{ với mọi } x\in(0\,;+\infty)$$

hay $\varphi\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\varphi\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, với mọi $x\in(0\,;+\infty)$. (4)

Xét hàm số $h(x)=\varphi\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, với $x\in(0\,;\infty)$.

Khi đó (4) lại có dạng sau :

$$h(x^2)=h(x),\quad \forall x\in(0\,;+\infty). \tag{5}$$

Do f xác định và liên tục trên $(-1\,;1)$, nên suy ra $h(x)$ liên tục trên $(0\,;+\infty)$. Từ hệ thức (5) bằng quy nạp dễ thấy với mọi $x\in(0\,;+\infty)$, ta có :

$$h(x)=h\left(\sqrt[2^n]{x}\right),\text{ với mọi } n\in\mathbb{N}^*. \tag{6}$$

Với mọi $\bar{x}$ tuỳ ý $\in(0\,;+\infty)$, thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[2^n]{\bar{x}}=1$

Từ tính liên tục của $h(x)$ trên $(0\,;+\infty)$ suy ra

$$h(1)=\lim_{n\to\infty}h\left(\sqrt[2^n]{\bar{x}}\right). \tag{7}$$

Từ (6) có $\lim\limits_{n\to\infty}h\left(\sqrt[2^n]{\bar{x}}\right)=h(\bar{x})$ (8)

Bây giờ kết hợp (7), (8) suy ra với mọi $\bar{x}\in(0\,;+\infty)$, ta có $h(\bar{x})=h(1)$.

Như vậy ta đi đến

$$\varphi(x)=\text{const},\quad \forall x\in(-1\,;1).$$

Do $\varphi(x)=(1-x^2)f(x)\Rightarrow f(x)=\dfrac{a}{1-x^2}$, ở đây a là hằng số tuỳ ý.

Đảo lại giả sử $f(x)=\dfrac{a}{1-x^2}$ với a là hằng số tuỳ ý.

Rõ ràng $f(x)$ xác định và liên tục trên $(-1\,;1)$.

Lúc này $\forall x\in(-1\,;1)$, ta có :

$$(1-x^2)f(g(x))=(1-x^2)\frac{a}{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}$$

$$=(1-x^2)\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}a=(1+x^2)^2f(x).$$

Vậy $f(x)$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra.

Tóm lại tất cả các hàm $f(x)$ cần tìm có dạng $f(x)=\dfrac{a}{1-x^2}$ với a là hằng số tuỳ ý.

Chú ý : Để cho $f(x)$ hoàn toàn xác định thì cần thêm một điều kiện phụ. Thí dụ nếu cho thêm $f(0)=2005$. Khi đó $a=2005$. Lúc này có duy nhất một hàm số cần tìm, đó là $f(x)=\dfrac{2005}{1-x^2}$.

Bài 10 : Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[-\dfrac{1}{12}\,;\dfrac{1}{6}\right]$ và thoả mãn điều kiện

$$1996f(x)-\frac{1997}{1998}f\left(\frac{x}{1999}\right)=1999x^{2000},\quad \forall x\in\left[-\frac{1}{12}\,;\frac{1}{6}\right].$$

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục thoả mãn yêu cầu đề ra, tức là ta có

$$1996f(x)-\frac{1997}{1998}f\left(\frac{x}{1999}\right)=1999x^{2000},\quad \forall x\in\left[-\frac{1}{12}\ ;\ \frac{1}{6}\right]. \qquad (1)$$

Đặt $\alpha=\dfrac{1996.1998.1999^{2000}}{1996.1998.1999^{2000}-1997}$. (2)

Xét hàm số $g(x)=f(x)-\alpha x^{2000}$, với $-\dfrac{1}{12}\le x\le\dfrac{1}{6}$.

Do $f(x)$ là hàm liên tục trên $\left[-\dfrac{1}{12}\ ;\ \dfrac{1}{6}\right]$ suy ra $g(x)$ cũng là hàm liên tục trên $\left[-\dfrac{1}{12}\ ;\ \dfrac{1}{6}\right]$.

Từ (1) suy ra $\forall x\in\left[-\dfrac{1}{12}\ ;\ \dfrac{1}{6}\right]$, ta có :

$$1996g(x)-\frac{1997}{1998}g\left(\frac{x}{1999}\right)+1996\alpha.x^{2000}-\frac{1997}{1998}\alpha\frac{x^{2000}}{1999^{2000}}=1996x^{2000}$$

$$\Rightarrow 1996\,g(x)-\frac{1997}{1998}g\left(\frac{x}{1999}\right)=x^{2000}\left(1996-1996\alpha+\frac{1997\alpha}{1998.1999^{2000}}\right)$$

$$\Rightarrow 1996\,g(x)-\frac{1997}{1998}g\left(\frac{x}{1999}\right)=$$

$$=x^{2000}\left(1996-\alpha\frac{1996.1998.1999^{2000}-1997}{1998.1999^{2000}}\right). \qquad (*)$$

Từ (2) và (*) suy ra $\forall x\in\left[-\dfrac{1}{12}\ ;\ \dfrac{1}{6}\right]$, ta có

$$1996\,g(x)-\frac{1997}{1998}g\left(\frac{x}{1999}\right)=0 \qquad (3)$$

Từ (3) $\Rightarrow g(x)=\dfrac{1997}{1996.1998}g\left(\dfrac{x}{1999}\right),\quad \forall x\in\left[-\dfrac{1}{12}\ ;\ \dfrac{1}{6}\right]$. (4)

Rõ ràng $\forall x\in\left[-\dfrac{1}{12}\ ;\ \dfrac{1}{6}\right]\Rightarrow\dfrac{x}{1999^n}\in\left[-\dfrac{1}{12}\ ;\ \dfrac{1}{6}\right]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, nên từ (4) dễ dàng bằng phép quy nạp suy ra

$$g(x)=\left(\frac{1997}{1996.1998}\right)^n g\left(\frac{x}{1999^n}\right),\quad \forall x\in\left[-\frac{1}{12};\frac{1}{6}\right],\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Do tính liên tục của hàm $g(x)$ trên $\left[-\frac{1}{12}\ ;\ \frac{1}{6}\right]$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{x}{1999^n}\right)=g\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1999^n}\right)=g(0). \tag{6}$$

Từ (4) cho $x=0$, ta có :

$$g(0)=\frac{1997}{1996.1998}g(0)\Rightarrow g(0)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{x}{1999^n}\right)=0 \tag{7}$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1997}{1996.1998}\right)^n=0$, vậy từ (6), (7) suy ra

$$g(x)=\lim_{n\to\infty} g(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1997}{1996.1998}\right)^n g\left(\frac{x}{1999^n}\right)\right]=0,\ \forall x\in\left[-\frac{1}{12}\ ;\ \frac{1}{6}\right]$$

$$\Rightarrow g(x)=0,\ \ \forall x\in\left[-\frac{1}{12}\ ;\ \frac{1}{6}\right]\Rightarrow f(x)=\alpha x^{2000},\ \ \forall x\in\left[-\frac{1}{12}\ ;\ \frac{1}{6}\right].$$

Thử lại thấy $f(x)=\alpha x^{2000}$ thoả mãn mọi yêu cầu đề bài, nên đó là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài 11 : Tìm tất cả các hàm số f liên tục xác định trên $[0\ ;\ 1]$ sao cho

$$f(x)\geq 2x f(x^2),\quad \forall x\in[0\ ;\ 1].$$

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trên $[0\ ;\ 1]$ sao cho

$$f(x)\geq 2x f(x^2),\quad \forall x\in[0\ ;\ 1]. \tag{1}$$

Trong (1) cho $x=0\Rightarrow f(0)\geq 0.$ (2)

Trong (1) cho $x=1\Rightarrow f(1)\geq 2f(1)\Rightarrow f(1)\leq 0.$ (3)

Xét với $0 < x < \frac{1}{2}$, ta sẽ chứng minh rằng

$$f(x) \geq (2x)^n x^{2^n - n - 1} f\left(x^{2^n}\right), \quad \forall n \geq 1. \tag{4}$$

Thật vậy với $n = 1$, thì theo giả thiết (1) có $f(x) \geq 2x\, f\left(x^2\right)$.

Giả sử (4) đã đúng đến $n = k$, tức là

$$f(x) \geq (2x)^k x^{2^k - k - 1} f\left(x^{2^k}\right). \tag{5}$$

Xét với $n = k + 1$. Do $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x^{2^k} < \frac{1}{2}$.

Từ đó theo (1) suy ra

$$f\left(x^{2^k}\right) \geq 2x^{2^k} f\left(x^{2^{k+1}}\right). \tag{6}$$

Từ (5), (6) suy ra

$$f(x) \geq (2x)^k x^{2^k - k - 1} 2x^{2^k} f\left(x^{2^{k+1}}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq (2x)^{k+1} . x^{2^{k+1} - (k+1) - 1} f\left(x^{2^{k+1}}\right).$$

Vậy (4) cũng đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra

$$f(x) \geq (2x)^n x^{2^n - n - 1} f\left(x^{2^n}\right), \quad \forall 0 < x < \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq 1. \tag{7}$$

Từ $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 2x < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (2x)^n x^{2^n - n - 1} f\left(x^{2n}\right) = 0. \tag{8}$$

Từ (7) (8) suy ra $f(x) \geq 0 \quad \forall 0 < x < \frac{1}{2}$.

Kết hợp với $f(0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0, \quad \forall 0 \leq x < \frac{1}{2}$. (9)

Mặt khác với $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < 1$, nên theo (1) ta có

$$f\left(\sqrt{x}\right) \geq 2\sqrt{x}\, f(x), \ \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \le \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x > 0.$$

Do đó lập luận bằng quy nạp như trên, lại có

$$f(x) \le \frac{f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)}{2^n x^{1-\frac{1}{2^n}}}, \quad \forall 0 < x < 1, \ \forall n \ge 1. \qquad (10)$$

Vì $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f\left(x^{2^{1/n}}\right)}{2^n x^{1-\frac{1}{2^n}}} = 0 \Rightarrow f(x) \le 0, \ \forall x \in (0\,;1).$ (11)

Từ (9), (11) suy ra $f(x) = 0, \quad \forall 0 \le x \le \frac{1}{2}.$ (12)

Với mỗi $x_0 \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ $\left(\text{tức } \frac{1}{2} \le x_0 \le 1\right)$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x^{2^{n_0}} < \frac{1}{2}$.

Từ đó suy ra $f(x_0) \ge 2^{n_0} x^{2^{n_0}-1} f\left(x^{2^{n_0}}\right)$

$$\Rightarrow f(x_0) \ge 0, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]. \qquad (13)$$

Từ (11), (13) suy ra $f(x) = 0, \ \forall \frac{1}{2} \le x \le 1.$ (14)

Từ (12), (14) có $f(x) = 0, \quad \forall 0 \le \overline{x} \le 1.$

Do $f(x)$ liên tục trên $[0\,;1] \Rightarrow f(x) \equiv 0$ khi $x \in [0\,;1]$.

Đảo lại rõ ràng $f(x) \equiv 0, \ \forall x \in [0\,;1]$ thoả mãn đầu bài.

Vậy hàm tầm thường $f(x) \equiv 0$ là hàm duy nhất cần tìm.

Bài 12 : Tìm hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f(4x) + f(9x) = 2f(6x) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Bài giải

Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm liên tục và thoả mãn điều kiện

$$f(4x)+f(9x)=2f(6x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Đặt $t=6x$, khi đó ta có

$$f\left(\frac{2}{3}t\right)+f\left(\frac{3}{2}t\right)=2f(t),\quad \forall t\in\mathbb{R},$$

hay $f\left(\frac{2}{3}t\right)-f(t)=f(t)-f\left(\frac{3}{2}t\right),\quad \forall t\in\mathbb{R}.$ (1)

Đưa vào xét hàm số

$$g(t)=f(t)-f\left(\frac{3}{2}t\right).$$

Khi đó (1) có dạng $g(t)=g\left(\frac{2}{3}t\right),\quad \forall t\in\mathbb{R}.$ (2)

Từ (2) dễ dàng suy ra $g(t)=g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n t\right),\quad \forall t\in\mathbb{R},\ \forall n$ nguyên dương.

Do $f(x)$ liên tục, nên suy ra $g(x)$ cũng liên tục. Vì lẽ ấy khi cho $n\to+\infty$ và do $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ với mỗi t cố định, nên ta có

$$g(t)=\lim_{n\to\infty} g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n t\right)=g(0). \tag{3}$$

Vì $g(0)=f(0)-f\left(\frac{3}{2}.0\right)=f(0)-f(0)=0$, vì thế từ (3) đi đến

$g(t)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}$, hay $f(t)=f\left(\frac{3}{2}t\right),\quad \forall t\in\mathbb{R}$, tức là

$$f\left(\frac{2}{3}x\right)=f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Như vậy ta lại có $f(x)=f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$

Từ đó do tích liên tục của f và do $\left(\frac{2}{3}\right)^n x \to 0$ với mỗi x cố định, suy ra

$$f(x) = f(0).$$

Vậy $f(x) = C$, với C là hằng số. Thử lại thấy hàm số này thoả mãn mọi yêu cầu của đề bài. Do đó các hàm số cần tìm có dạng $f(x) = C$, với C là hằng số.

Bài 13 : Tìm hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) = f\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Bài giải

Đặt $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và thoả mãn hệ thức

$$f(x) = f\left(\frac{x}{1+x^2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Rõ ràng (1) có thể viết lại dưới dạng

$$f(x) = f(\varphi(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Từ (2) bằng quy nạp dễ dàng suy ra $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có :

$f(x) = f(\varphi_n(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n$ nguyên dương,

ở đây $\varphi_n(x) = \underbrace{\varphi(\varphi\ldots\varphi(x)\ldots)}_{n \text{ hàm } \varphi}$.

Với $\overline{x} > 0$ tuỳ ý, ta hãy xét dãy

$$\varphi_1(\overline{x}) = \frac{x}{1+x^2}\ ;\ \varphi_2(\overline{x}) = \varphi(\varphi_1(\overline{x})), \ldots, \varphi_n(\overline{x}) = \varphi(\varphi_{n-1}(\overline{x})).$$

Rõ ràng $\varphi_n(\overline{x}) > 0 \quad \forall n = 1, 2, \ldots$ (do $\overline{x} > 0$).

Ta có

$$\varphi_{n+1}(\overline{x})-\varphi_n(\overline{x})=\frac{\varphi_n(\overline{x})}{1+\varphi_n^2(\overline{x})}-\varphi_n(\overline{x})=\frac{-\varphi_n^3(\overline{x})}{1+\varphi_n^2(\overline{x})}<0.$$

Vì lẽ đó $\{\varphi_n(\overline{x})\}$ là dãy giảm. Dãy này bị chặn dưới bởi 0, vậy tồn tại giới hạn

$$l(\overline{x})=\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(\overline{x}). \qquad (3)$$

Từ $\varphi_{n+1}(\overline{x})=\dfrac{\varphi_n(\overline{x})}{1+\varphi_n^2(\overline{x})}$ và lấy giới hạn cả hai vế kết hợp với dùng (3)

ta đi đến $l(\overline{x})=\dfrac{l(\overline{x})}{1+l^2(\overline{x})}$

$$\Leftrightarrow l(\overline{x})\left(1-\frac{1}{1+l^2(\overline{x})}\right)=0\Leftrightarrow l(\overline{x})=0.$$

Như vậy với mọi $\overline{x}>0$, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n(\overline{x})=0$. (4)

Từ $f(\overline{x})=f(\varphi_n(\overline{x}))$, $\forall n$ nguyên dương.

Do (4) và do tính liên tục của f, suy ra

$$f(\overline{x})=\lim_{n\to+\infty}f(\varphi_n(\overline{x}))=f(0). \qquad (5)$$

Vì $\overline{x}>0$ tuỳ ý, nên có $f(x)=f(0)$, $\forall x>0$.

Với $x\le 0$ bằng lập luận hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$f(x)=f(0),\quad \forall x\le 0.$$

Tóm lại $f(x)=C$, với C là hằng số.

Thử lại ta thấy $f(x)=C$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra.

Do đó $f(x)=C$, với C là hằng số đồng thời đó là hàm cần tìm.

Bài 14 : Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$ với mọi $x,\ y\in\mathbb{R}$.

Bài giải .

Giả sử $f : R \to R$ là hàm số liên tục và thoả mãn hệ thức

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Trong (1) lấy $x = y = 0$, ta có

$$(f(0))^2 - f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \text{ hoặc } f(0) = 1. \tag{2}$$

Xét hai khả năng :

1) Nếu $f(0) = 0$. Khi đó trong (1) lấy $y = 0$, thì $\forall x \in \mathbb{R}$, có

$$-f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó thấy rằng hàm $f(x) = 0$ không thoả mãn (1), vì nếu không ta có $\sin x \sin y = 0$, $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$ là điều vô lí. Vậy $f(x) = 0$ không phải là hàm cần tìm.

2) Nếu $f(0) = 1$. Trong (1) lấy $y = -x$, và có

$$f(x)f(-x) - f(0) = -\sin^2 x$$

$$\Rightarrow f(x)f(-x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x.$$

Như vậy $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x)f(-x) = \cos^2 x.$$

Nói riêng thì

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ hoặc } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

a) Nếu $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Trong (1) lấy $y = \frac{\pi}{2}$ thì $\forall x \in \mathbb{R}$, có

$$f(x)f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

b) Nếu $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$. Trong (1) lấy $y=-\frac{\pi}{2}$, thì $\forall x\in\mathbb{R}$, có

$$f(x)f\left(-\frac{\pi}{2}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Từ đó đi đến $f(t)=\cos t,\ \ \forall t\in\mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy hàm số này thoả mãn mọi yêu cầu đề bài.

Tóm lại có duy nhất hàm số $f(x)=\cos x$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

§3. SỬ DỤNG TÍNH KHẢ VI ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 1 : Tìm các hàm khả vi $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(x+f(y))=f(y+f(x)) \text{ với mọi } x,\ y\in\mathbb{R}.$$

Bài giải

Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi và $\forall x,\ y\in\mathbb{R}$, ta có

$$f(x+f(y))=f(y+f(x)). \qquad (1)$$

Cố định y, đạo hàm cả hai vế của (1) theo x ta có :

$$f'(x+f(y))=f'(y+f(x)).f'(x). \qquad (2)$$

Cố định x, đạo hàm cả hai vế của (2) theo y ta có

$$f'(x+f(y)).f'(y)=f'(y+f(x)). \qquad (3)$$

Nhân hai vế của (2) với $(-f'(y))$ rồi cộng vào (3), ta thu được

$$-f'(y+f(x)).f'(x)f'(y)+f'(y+f(x))=0,$$

hay $f'(y+f(x))[1-f'(x)f'(y)]=0.$ (4)

Hệ thức (4) đúng $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}$. Chỉ có hai trường hợp sau xảy ra :

1) Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$, sao cho $f'(x_0)=0$. Khi đó trong (4) thay $x=x_0$, ta có $f'(y+f(x_0)).[1-f'(x_0)f'(y)]=0, \quad \forall y \in \mathbb{R},$

hay $f'(y+f(x_0))=0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$ (5)

Do $f(x_0)$ là hằng số, nên (5) cũng có nghĩa là $f'(y)=0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$

Từ đó dẫn đến $f(x) \equiv C$, ở đây C là hằng số.

Thử lại rõ ràng $f(x) \equiv C$ thoả mãn yêu cầu đề ra

$$f'(x)=\frac{1}{f'(y)}, \quad \forall x, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Từ hệ thức trên suy ra $f'(x)$ chỉ có thể là hằng số. Gọi hằng số đó là A, thì từ $f'(x)=A \Rightarrow A^2=1 \Rightarrow A=\pm 1$.

- Nếu $A=1 \Rightarrow f(x)=x+d$, d là hằng số.

Thử lại vào đầu bài ta thấy

$$f(x+f(y))=x+f(y)+d$$
$$=x+y+d+d=x+y+2d.$$

Mặt khác $f(y+f(x))=y+f(x)+d$

$$=y+x+d+d=x+y+2d.$$

Vậy $f(x)=x+d$ thoả mãn yêu cầu đề ra.

- Nếu $A=-1 \Rightarrow f(x)=-x+d$, d là hằng số.

Thử lại ta có

$$f(x+f(y))=-x-f(y)+d$$
$$=-x-(-y+d)+d$$
$$=-x+y. \tag{6}$$

Mặt khác $f\left(y+f(x)\right)=-y-f(x)+d$

$$=-y-(-x+d)+d$$

$$=x-y. \qquad (7)$$

Từ (6) (7) suy ra hệ thức $f\left(x+f(y)\right)=f\left(y+f(x)\right)$ không thể đúng $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}$.

Tóm lại trường hợp $A=-1$ loại.

Vậy các hàm số cần tìm có dạng $f(x)=x+d$, d là hằng số hoặc $f(x)\equiv C$ với C là hằng số.

Bài 2 : Tìm hàm khả vi hai lần $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn hệ thức

$$(x+y)f''(x+y)=f(x)+f(y) \text{ với mọi } x, y\in\mathbb{R}.$$

Bài giải

Trước hết ta chứng minh rằng $f(x)$ khả vi vô hạn lần với $x\neq 0$ (xem chứng minh ở cuối bài).

Với $x\neq -y$, $x\neq 0$, $y\neq 0$ lần lượt đạo hàm hai vế của hệ thức đã cho theo x và y ta có

$$f''(x+y)+(x+y)f'''(x+y)=f'(x). \qquad (1)$$

$$f''(x+y)+(x+y)f'''(x+y)=f'(y). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\forall x\neq -y, x\neq 0, y\neq 0$ thì

$$f'(x)=f'(y).$$

Nói riêng ta có $f'(x)=f'(1), \quad \forall x\neq 0, x\neq 1.$ (3)

Do f khả vi hai lần nên f' là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Vì lẽ đó từ (3) suy ra $f'(0)=f'(1)$; $f'(-1)=f'(1)$

(Chú ý rằng $f'(1)$ là hằng số). Tóm lại ta có

$f'(x)=f'(1)=C$, C là hằng số.

Từ đó $f(x)=C+D$, ở đây C, D là hằng số.

Thay lại vào hệ thức đầu bài ta có hệ thức sau $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}$

$$(x+y).0=(C+D)+(C+D),$$

hay $2D+C(x+y)=0, \ \forall x, \forall y \in \mathbb{R}.$ (4)

Trong (4) cho $x=y=0 \Rightarrow 2D=0 \Rightarrow D=0.$ Vậy từ (4) đi đến

$$C(x+y)=0 \ \ \forall x, \forall y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Lấy trong (5) $x=-1, y=2$, ta có $C=0$.

Vậy $f(x)\equiv 0$ là hàm số duy nhất thoả mãn yêu cầu đề bài.

Chú ý : 1) Ta có cách khác để giải bài toán trên như sau :

Từ hệ thức $(x+y)f''(x+y)=f(x)+f(y)$.

Lấy $y=-x$, ta đi đến

$$f(x)+f(-x)=0.$$

Vậy $f(x)$ là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$ (vì dĩ nhiên $f(0)=0$).

Trong hệ thức lấy $y=0$, ta có $x f''(x)=f(x)$.

Với $x\neq 0$, ta có

$$f''(x)=\frac{f(x)}{x}$$

$$\Rightarrow f''(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{-f(x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=f''(x).$$

Vậy $f''(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

Ta sử dụng kết quả sau đây (xem bài 2 trang 81) : Nếu $F(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$, khi đó nếu $F(x)$ là hàm chẵn (lẻ), thì $F'(x)$ là hàm lẻ (chẵn) trên $\mathbb{R}$.

Do $f(x)$ là hàm lẻ trên $\mathbb{R} \Rightarrow f''(x)$ cũng là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$.

Như vậy $f''(x)$ là hàm vừa chẵn, vừa lẻ trên $\mathbb{R}$, tức là ta có

$f''(x)=-f''(x), \ \ \forall x\in\mathbb{R}$ hay $f''(x)=0$.

Từ đó lập luận tiếp như trên suy ra $f(x) \equiv 0$ là hàm duy nhất cần tìm.

2) Bây giờ ta chứng minh $f(x)$ khả vi vô hạn lần với $x \neq 0$.

Trong hệ thức đầu bài đặt $x = y$ ta có

$$2x f''(2x) = 2f(x)$$

$$\Rightarrow uf''(u) = 2f\left(\frac{u}{2}\right), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Vì f là hàm khả vi hai lần trên $\mathbb{R}$, nên từ hệ thức trên suy ra $f''(u)$ là hàm khả vi hai lần, tức là f là hàm khả vi 4 lần. Lập luận tương tự suy ra nhận xét được chứng minh.

Bài 3 : Tìm các hàm khả vi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn hệ thức

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài giải

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi và thoả mãn hệ thức đã cho

$$f(x+y) = f(x) + f(y); \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Chỉ có hai khả năng sau xảy ra :

1) Nếu $f(x) \equiv 0$. Khi đó dễ thấy hàm này thoả mãn mọi yêu cầu đề ra.

2) Nếu $f(x) \not\equiv 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ mà $f(x_0) \neq 0$.

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}$ thì

$$f(x_0) = f\left(x + (x_0 - x)\right) = f(x) f(x_0 - x). \qquad (2)$$

Do $f(x_0) \neq 0$, nên từ (2) nói riêng suy ra $f(x) \neq 0$. Điều này đúng $\forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x) \not\equiv 0$, thì $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (3)

Trong (1) cho $x = y = 0$ và có $f(0) = f^2(0)$.

Do $f(0) \neq 0 \Rightarrow f(0) = 1$.

Từ (1) suy ra

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Như thế ta chứng minh được $f(x)>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$ (4)

Đạo hàm cả hai vế của (1) theo x, rồi theo y và có

$$\begin{cases} f'(x+y)=f'(x)f(y) & (5)\\ f'(x+y)=f(x)f'(y) & (6)\end{cases}$$

Từ (5), (6) suy ra $f'(x)f(y)=f(x)f'(y)$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(y)}{f(y)}. \tag{7}$$

Trong (7) lấy $y=0$ và có

$$\left(\ln f(x)\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(0)}{f(0)}=C \text{ (C là hằng số)}$$

$$\Rightarrow \ln f(x)=C+D$$

$$\Rightarrow f(x)=e^{C+D}. \tag{8}$$

Trong (8) cho $x=0$ và do $f(0)=1\Rightarrow e^{D}=1\Rightarrow D=0.$

Vậy $f(x)=e^{C}$, C là hằng số.

Thử lại thấy $f(x)=e^{C}$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra.

Tóm lại các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ khả vi thoả mãn hệ thức đã cho là các hàm sau hoặc là $f(x)\equiv 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$ hoặc là $f(x)=e^{C}$, với C là hằng số nào đó

Bài 4 : Tìm ~~các~~ hàm khả vi $f:(-1\,;1)\to\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \text{ với mọi } x,\ y\in(-1\,;1).$$

Bài giải

Giả sử $f:(-1\,;1)\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi và thoả mãn hệ thức

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right),\quad \forall x,\ y\in(-1\,;1). \tag{1}$$

Chú ý rằng khi $x,\ y \in (-1\ ;\ 1)$, thì $\dfrac{x+y}{1+xy} \in (-1\ ;\ 1)$.

Trong (1) cho $x = y = 0$, và có $2f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$ (2)

Đạo hàm hai vế của (1) lần lượt theo x, theo y và có

$$\begin{cases} f'(x) = f'\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right).\dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2} & (3) \\ f'(y) = f'\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right).\dfrac{1-x^2}{(1+xy)^2} & (4) \end{cases}$$

Từ (3), (4) suy ra $(1-x^2)f'(x) = (1-y^2)f'(y),\quad \forall x,\ y \in (-1\ ;\ 1).$ (5)

Trong (5) cho $y = 0$ và có

$(1-x^2)f'(x) = f'(0)$, hay

$$f'(x) = \frac{f'(0)}{1-x^2} = \frac{f'(0)}{2}\left(\frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)(1-x)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}f'(0)\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right). \quad (6)$$

Chú ý đến hệ quả của định lí Lagrange, ta thấy hai hàm số có cùng đạo hàm thì chỉ sai khác nhau một hằng số. Ta lại thấy hàm số

$$-\frac{f'(0)}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

có đạo hàm là vế phải của (6). Vì lẽ ấy suy ra

$$f(x) = -\frac{1}{2}f'(0)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C,$$

ở đây C là hằng số. Mặt khác ta có $0 = f(0) = C$, nên suy ra

$f(x) = -\dfrac{1}{2}f'(0)\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = A\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra.

Vậy các hàm cần tìm có dạng

$f(x) = A\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$, trong đó A là hằng số tuỳ ý.

§4. SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT KHÁC CỦA HÀM SỐ

Bài 1 : Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định và là hàm tăng thực sự với mọi x và thoả mãn hệ thức sau :

$$f\left(f(x)+y\right)=f(x+y)+1 \text{ với mọi } x,\ y\in\mathbb{R}.$$

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm tăng thực sự với mọi x và thoả mãn hệ thức

$$f\left(f(x)+y\right)=f(x+y)+1,\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Trong (1) thay $y=0$, ta có

$$f\left(f(x)\right)=f(x)+1,\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

Trong (1) thay $x=0$, ta có

$$f\left(f(0)+y\right)=f(y)+1$$

hay $f\left(f(0)+x\right)=f(x)+1,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $f\left(f(x)\right)=f\left(f(0)+x\right),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$ (4)

Chú ý rằng do $f(x)$ là hàm tăng thực sự, nên từ (4) suy ra

$$f(0)+x=f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Trong (5) thay x bởi $f(x)+y$, ta có

$$f(0)+f(x)+y=f\left(f(x)+y\right). \tag{6}$$

Lại thay $f(x)=f(0)+x$ vào (6), ta có

$$f\left(f(x)+y\right)=x+2f(0)+y\ ;\ \forall x, \forall y. \tag{7}$$

Trong (5) lại thay x bởi $x+y$, ta có $f(x+y)=f(0)+x+y$

$$\Rightarrow f(x+y)+1=f(0)+x+y+1. \tag{8}$$

Bây giờ từ (1) và (8) có $f\left(f(x)+y\right)=f(0)+x+y+1.$ (9)

Từ (7), (9) suy ra $x+2f(0)+y=f(0)+x+y+1\Rightarrow f(0)=1.$ (10)

Do vậy từ (5), (10) đi đến $f(x) = x + 1$.

Thử lại thấy hàm $f(x) = x + 1$ là làm thực sự tăng $\forall x, \forall y$, ta có $f(f(x) + y) = f(x) + y + 1 = x + 1 + y + 1 = f(x + y) + 1$, tức là thoả mãn yêu cầu đề bài.

Như vậy $f(x) = x + 1$ là hàm duy nhất cần tìm.

Bài 2 : Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

2) Tồn tại hằng số M sao cho

$$f(x) \leq M, \ \forall x \in [0 ; 1]$$

3) $f(1) = 2005$.

Tìm $f(x)$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra :

Từ $f(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ và đặt $x = y = 0$, suy ra

$$f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0. \tag{1}$$

Bằng quy nạp dễ thấy $f(nx) = nf(x), \ \forall n \in \mathbb{N}$. (2)

Từ (2) suy ra với mọi số hữu tỉ $r > 0$, ta có

$$f(rx) = rf(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Thật vậy $r = \frac{p}{q}$, ở đây p, q là các số nguyên dương.

Ta có $q f(rx) = q f\left(p\frac{x}{q}\right) = f\left(qp\frac{x}{q}\right)$ (theo (2))

$$= f(px) = pf(x) \text{ (lại theo (2)).}$$

Từ đó $f(rx) = \frac{p}{q} f(x) = rf(x)$.

Vậy (3) đúng. Từ (1) suy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$, thì

$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ (theo tính chất 1) của f)

Nói cách khác với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(-x) = -f(x).$$

Từ đó kết hợp với (3), ta đi đến : $\forall$ số hữu tỉ r, ta có

$$f(rx) = rf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Lấy $x \in [0 ; 1]$, thì $1 - x \in [0 ; 1]$, vì thế theo tính chất 2) của hàm f, ta có

$f(1-x) \leq M$, hay $f(1) - f(x) \leq M$,

$f(1) - M \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [0 ; 1]$.

Từ đó suy ra bằng cách chọn N đủ lớn, ta có

$$-N \leq f(x) \leq N, \quad \forall x \in [0 ; 1]. \tag{5}$$

(cụ thể việc chọn $N = \max\{M, M - f(1)\}$. Thật vậy từ cách xác định N ta có $N \geq M$. Mặt khác $N \geq M - f(1) \Rightarrow f(1) - M \geq -N$).

Nói khác đi, ta có $|f(x)| \leq N \quad \forall x \in [0, 1]$. (6)

Theo trên $\forall x \in \mathbb{R}$, thì $f(-x) = -f(x)$, nên từ (6) suy ra

$$|f(x)| \leq N, \quad \forall x \in [-1 ; 1]. \tag{7}$$

Lấy $\bar{x}$ tuỳ ý $\in \mathbb{R}$. Khi đó luôn luôn tồn tại số hữu tỉ dương $\bar{r}$ sao cho $|\bar{x}| \leq \bar{r}$, tức là $\left|\frac{\bar{x}}{\bar{r}}\right| \leq 1$. Áp dụng (7), ta có

$$\left|f\left(\frac{\bar{x}}{\bar{r}}\right)\right| \leq N. \tag{8}$$

Do $\bar{r}$ hữu tỉ nên $\frac{1}{\bar{r}}$ cũng là số hữu tỉ. Áp dụng (4), thì

$$f\left(\frac{\bar{x}}{\bar{r}}\right) = f\left(\frac{1}{\bar{r}}\bar{x}\right) = \frac{1}{\bar{r}} f(\bar{x}). \tag{9}$$

Thay (9) vào (8), và có $\left|\frac{1}{\bar{r}} f(\bar{x})\right| \leq N.$

Từ tính dương của $\bar{r}$, ta đi đến $\left|f(\bar{x})\right| \le \bar{r} N.$ (10)

Bất đẳng thức (10) đúng với mọi số hữu tỉ dương $\bar{r}$, mà $\bar{r} \ge |\bar{x}|$. Do đó bằng phép quy giới hạn trong (10), ta có

$$\left|f(\bar{x})\right| \le |\bar{x}| N. \qquad (11)$$

Bất đẳng thức (11) có thể viết lại là

$$0 \le \left|f(\bar{x})\right| \le |\bar{x}| N. \qquad (12)$$

Do (12) đúng với mọi $\bar{x} \in \mathbb{R}$, nên theo nguyên lí kẹp suy ra

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0. \qquad (13)$$

Do $f(1) = 2005$, nên với mọi số hữu tỉ r, theo (4) có

$$f(r) = f(r.1) = r f(1) = 2005r. \qquad (14)$$

Lấy x_0 là số thực tuỳ ý $\in \mathbb{R}$. Khi đó tồn tại dãy số hữu tỉ $\{r_n\}$ sao cho $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = x_0$.

Ta có $r_n - x_0 \to 0$. Vì thế theo (13) suy ra

$$\lim_{r_n - x_0 \to \infty} f(r_n - x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty}\left(f(r_n) - f(x_0)\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f(r_n) = f(x_0). \qquad (15)$$

Theo (14), thì $f(r_n) = 2005r_n$, do vậy thay vào (15) có

$$f(x_0) = 2005 \lim_{n \to \infty} r_n = 2005x_0.$$

Như vậy nếu $f(x)$ là hàm số thoả mãn mọi yêu cầu đề bài, thì

$$f(x) = 2005x.$$

Đảo lại nếu $f(x) = 2005x$, thì dĩ nhiên $f(x)$ thoả mãn mọi điều kiện đặt ra. Như vậy tồn tại duy nhất hàm số $f(x) = 2005x$ thoả mãn yêu cầu đặt ra.

Bài 3 : Tìm tất cả các hàm số $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn hệ thức sau :

$$f(y - f(x)) = f(x^{2005} - y) - 2004y f(x) \text{ với mọi } x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài giải

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài, tức là $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(y - f(x)) = f(x^{2005} - y) - 2004y f(x). \quad (1)$$

Trong (1), thay $y = f(x)$, ta có

$$f(0) = f(x^{2005} - f(x)) - 2004(f(x))^2. \quad (2)$$

Trong (1), lại thay $y = x^{2005}$ và có

$$f(x^{2005} - f(x)) = f(0) - 2004x^{2005} f(x). \quad (3)$$

Cộng từng vế (2), (3) và có

$$f(x)\left[f(x) + x^{2005}\right] = 0. \quad (4)$$

Như thế với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có đẳng thức (4) nói trên. Từ đó suy ra nếu $f(x)$ thoả mãn yêu cầu đề bài, thì $f(0) = 0$, hoặc $f(x) = -x^{2005}$ với mọi x mà $f(x) \neq 0$.

- Nếu $f_1(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hoặc $f_2(x) = -x^{2005}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, thì các hàm này thoả mãn đồng thời $f(0) = 0$ và $f(x) = -x^{2005}$ với mọi x mà $f(x) \neq 0$.

- Bây giờ ta chứng minh rằng ngoài f_1, f_2 ra không còn hàm nào khác mà lại thoả mãn đề bài. Thật vậy giả thiết phản chứng tồn tại $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn yêu cầu đề bài mà lại có $\overline{f} \not\equiv f_1$; $\overline{f} \not\equiv f_2$.

Theo lập luận trên ta suy ra $\overline{f}(x)$ phải thoả mãn (4), tức là $\forall x \in \mathbb{R}$, thì $\overline{f}(x)(\overline{f}(x) + x^{2005}) = 0$. (5)

Vì $\overline{f}(x) \not\equiv f_2(x)$, nên phải tồn tại x_0 mà $\overline{f}(x_0) \neq f_2(x_0)$. Chú ý rằng do $\overline{f}(0) = 0$ (suy từ (5)), và $f_2(0) = 0$, nên $x_0 \neq 0$.

Vì $\overline{f}(x_0) \neq f_2(x_0) \Leftrightarrow \overline{f}(x_0) + x_0^{2005} \neq 0$, do đó từ (5) có

$$\overline{f}(x_0) = 0. \quad (6)$$

Lại thấy $\overline{f}(x) \not\equiv f_1(x) \quad \forall x$, mà $f_1(x) \equiv 0$; $\overline{f}(0) = 0$, nên tồn tại $y_0 \neq 0$ sao cho

$$\overline{f}(y_0) \neq 0. \quad (7)$$

Trong hệ thức

$$\overline{f}\left(y - \overline{f}(x)\right) = \overline{f}\left(x^{2005} - y\right) - 2004 y \overline{f}(x), \quad (8)$$

thay $x = 0$, và chú ý rằng $\overline{f}(0) = 0$, ta có

$$\overline{f}(y) = \overline{f}(-y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Vì lẽ đó có thể cho rằng $y_0 > 0$. Từ (7) suy ra

$$\overline{f}(y_0) + y_0^{2005} = 0 \Rightarrow \overline{f}(y_0) = -y_0^{2005}. \quad (9)$$

Bây giờ thay $x_0, -y_0$ vào (8), và đi đến

$$\overline{f}\left(-y_0 - \overline{f}(x_0)\right) = \overline{f}\left(x_0^{2005} + y_0\right) + 2004 y_0 \overline{f}(x_0). \quad (10)$$

Từ (6), (10) ta thu được

$$\overline{f}(-y_0) = \overline{f}\left(x_0^{2005} + y_0\right). \quad (11)$$

Kết hợp (9), (11) và có (ngoài ra để ý rằng $f(-y_0) = f(y_0)$)

$$-y_0^{2005} = \overline{f}\left(x_0^{2005} + y_0\right). \quad (12)$$

Do $y_0 > 0$, nên $\overline{f}\left(x_0^{2005} + y_0\right) < 0$ (nói riêng $\neq 0$), vì thế từ (5) có

$$\overline{f}\left(x_0^{2005} + y_0\right) + \left(x_0^{2005} + y_0\right)^{2005} = 0. \quad (13)$$

Từ (12), (13) ta có

$$-y_0^{2005} = -\left(x_0^{2005} + y_0\right)^{2005} \Leftrightarrow y_0^{2005} = \left(y_0 + x_0^{2005}\right)^{2005}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với $x_0 \neq 0$. Vậy $\overline{f} \in \{f_1, f_2\}$.

Như vậy điều kiện cần là $f = f_1$ hoặc $f = -f_2$.

- Nếu $f = f_1$, tức là $f(x) \equiv 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó rõ ràng f thoả mãn yêu cầu đề ra.

- Nếu $f = -x^{2005}$. Khi đó $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ta có

$$\mathrm{VT}(1) = f(y - f(x)) = -\left(y + x^{2005}\right)^{2005}$$

$$\mathrm{VP}(1) = f\left(x^{2005} - y\right) - 2004\, y f(x)$$

$$= -\left(x^{2005} - y\right)^{2005} + 2004 y\, x^{2005}$$

Nếu (1) đúng $\forall x, y \in \mathbb{R}$ thì ta phải có $\forall x, \forall y$:

$$-\left(y + x^{2005}\right)^{2005} = -\left(x^{2005} - y\right)^{2005} + 2004\, y\, x^{2005}. \qquad (*)$$

Rõ ràng (*) có thể viết lại dưới dạng sau : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ta có

$$\left(y - x^{2005}\right)^{2005} + \left(y + x^{2005}\right)^{2005} + 2004 x^{2005} y = 0. \qquad (**)$$

Rõ ràng (**) không thể đúng $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Thật vậy, nếu cho $x = 1$, ta sẽ có đẳng thức sau đúng $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$(y-1)^{2005} + (y+1)^{2005} + 2004 y = 0.$$

Đây quả là điều vô lí. Vậy $f_2(x) = -x^{2005}$ không thoả mãn yêu cầu đề bài. Như thế $f(x) \equiv 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ là hàm số duy nhất thoả mãn yêu cầu đề bài.

Bài 4 : Cho $D = (-1\,;\,+\infty)$.

Tìm tất cả các hàm $f : D \to D$ sao cho đồng thời hai điều kiện sau :

1) $f\left(x + f(y) + x f(y)\right) = y + f(x) + y f(x)$ với mọi $x, y \in D$

2) $\dfrac{f(x)}{x}$ là hàm đơn điệu tăng trên $(-1\,;\,0)$ và $(0\,;\,+\infty)$.

Bài giải

Giả sử $f: D \to D$ là hàm số thoả mãn mọi yêu cầu đầu bài. Ta có bổ đề sau :

Bổ đề : Nếu tồn tại $a \in D$ mà $f(a) = a$, thì $a = 0$.

Chứng minh bổ đề : Trong giả thiết 1) thay $x = y = a$, ta có

$$f(a + f(a) + af(a)) = a + f(a) + af(a). \quad (1)$$

Vì $f(a) = a$, nên từ (1) suy ra

$$f(a^2 + 2a) = a^2 + 2a. \quad (2)$$

Đặt $b = a^2 + 2a$, khi đó (2) có dạng $f(b) = b$. (3)

Có 3 khả năng sau xảy ra :

1) Nếu $b = a$. Khi đó $a^2 + 2a = a \Rightarrow a = 0$ hoặc $a = -1$. Do $a > -1$, nên $a = 0$.

2) Nếu $b > a$. Khi đó $a^2 + 2a > a \Rightarrow a > 0$ hoặc $a < -1$.

Từ đó dẫn đến $a > 0$, nghĩa là $b > a > 0$. Sử dụng giả thiết 2) và có

$$\frac{f(b)}{b} > \frac{f(a)}{a}. \quad (4)$$

Do $f(a) = a$; $f(b) = b$, nên từ (4) đi đến điều vô lí : $1 > 1$.

Vậy trường hợp $b > a$ không thoả mãn.

3) Nếu $b < a$. Khi đó $a^2 + 2a < a \Rightarrow -1 < a < 0$.

Khi $-1 < a < 0$, thì do $b = a^2 + 2a$, nên dễ thấy $-1 < b < 0$. Từ đó dựa vào giả thiết 2) và do $b < a$ nên

$$\frac{f(b)}{b} < \frac{f(a)}{a}. \quad (5)$$

Từ đó ta đi đến điều vô lí $1 < 1$.

Vậy trường hợp $b < a$ không thoả mãn. Như thế bổ đề đã được chứng minh.

Quay lại bài toán của ta. Trong giả thiết 1) lấy $y = x$ và có

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x). \quad (6)$$

Dựa vào (6) và bổ đề suy ra

$$x + f(x) + x f(x) = 0$$

$$\Rightarrow x + f(x)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{x}{x+1}.$$

Đảo lại nếu $f(x) = \frac{-x}{x+1}$, thì

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0.$$

Vậy $\frac{f(x)}{x}$ là hàm đơn điệu tăng trên $(-1\,;0)$ và $(0\,;+\infty)$. Điều kiện 1) dễ dàng được nghiệm đúng. Vậy có duy nhất một hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài, đó là $f(x) = \frac{-x}{x+1}$.

Bài 5 : Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x)$ hoặc không có không điểm, hoặc chỉ có hữu hạn các điểm, ngoài ra với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y)).$$

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số cần tìm. Thay trong hệ thức

$$f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y)) \tag{1}$$

$x = 0$, ta có với mọi $y \in \mathbb{R}$, thì

$$f(y) = f(f(y)). \tag{2}$$

Thay trong (1) $x = 1$, $y = 0$, ta có

$$f(1) = f(1) + f(f(0))$$

$$\Rightarrow f(f(0)) = 0. \tag{3}$$

Từ (2), (3) suy ra $f(0) = f(f(0)) = 0.$ (4)

Bây giờ thay $y = 0$ vào (1), ta thu được (dựa vào (3))

$$f\left(x^4\right) = x^3 f(x). \tag{5}$$

Ta chứng minh rằng $f(1) \neq 0$. Thật vậy nếu $f(1) = 0$, khi đó dựa vào (1) có (lấy $x = y = 1$)

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f\left(f(1)\right) = 0 + f(0) = 0 + 0 = 0$$

$$f(3) = f(1+2) = f(1) + f\left(f(2)\right) = 0 + f(0) = 0 + 0 = 0$$

Quá trình này cứ tiếp tục mãi, và ta có $f(4) = f(5) = \ldots = 0$.

Điều này mâu thuẫn với việc f chỉ có một số hữu hạn các không điểm. Vậy giả thiết phản chứng $f(1) = 0$ là sai.

Do đó

$$f(1) = k \tag{6}$$

ở đây k là số $\neq 0$ nào đó.

Từ (6) có

$$f\left(f(1)\right) = f(k). \tag{7}$$

Do $f\left(f(1)\right) = f(1)$ (xem (2)), vì thế từ (7) có

$$f(k) = k. \tag{8}$$

Lấy h là số khác 0 và khác 1. Ta chứng minh rằng $f(h) \neq 0$.

Thật vậy giả thiết phản chứng $f(h) = 0$. Trong (1) thay $x = h$ và $y = 0$, ta có $f\left(h^4\right) = h^3 f(h) + f\left(f(0)\right) = h^3 f(h)$ (kết hợp với (3))

Vì $f(h) = 0 \Rightarrow f\left(h^4\right) = 0$.

Từ đó suy ra $f\left(h^{16}\right) = f\left(h^{64}\right) = \ldots = f\left(h^{s}\right) = \ldots = 0$.

Điều này mâu thuẫn với việc f chỉ có hữu hạn không điểm. Vậy giả thiết phản chứng là sai, tức là $f(h) \neq 0$ với mọi $h \neq 0$, $h \neq 1$.

Lấy x tuỳ ý $\in \mathbb{R}$. Đặt $z = f\left(x^4\right) - x^4$.

Dựa vào (2), thì $f(x^4) = f(f(x^4)) = f(z + x^4)$.

Do vậy theo (4), suy ra

$$f(x^4) = x^3 f(x) + f(z). \tag{9}$$

Từ (5) và (9), đi đến $f(z) = 0$. (10)

Do $f(1) = k$ với $k \neq 0$, và $f(h) \neq 0 \quad \forall h \neq 0, h \neq 1$, nên từ (10) suy ra $z = 0$.

Như vậy $f(x^4) = x^4, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nói riêng khi $x > 0$, ta có $f(x) = x$.

Mặt khác $f(x^4) = f((-x)^4 + 0) = -x^3 f(-x)$ (theo (1))

$$\Rightarrow x^4 = -x^3 f(-x).$$

Vậy với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $f(-x) = -x$.

Tóm lại $f(x) = x$.

Đảo lại hàm số $f(x) = x$ thoả mãn mọi yêu cầu đặt ra. Vì lẽ đó $f(x) = x$ là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài 6 : Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho thoả mãn đồng thời các điều kiện sau :

1) $f(1) = 1$

2) $f(-1) = -1$

3) $f(x) \leq f(0)$ với mọi $0 < x < 1$

4) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ với mọi x, y

5) $f(x+y) \leq f(x) + f(y) + 1$ với mọi x, y.

Bài giải

Thay trong điều kiện 4) $y = 1$, ta có $\forall x \in \mathbb{R}$, thì

$$f(x+1) \geq f(x) + f(1).$$

Theo 1) ta có : $f(x+1) \geq f(x)+1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ (1)

Lại có $f(x) = f((x+1)+(-1))$, vì thế lại theo 4) và có

$f(x) \geq f(x+1)+f(-1) \Rightarrow f(x) \geq f(x+1)-1$ (theo 2))

$$\Rightarrow f(x)+1 \geq f(x+1). \tag{2}$$

Kết hợp (1) (2) suy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$, thì

$$f(x+1) = f(x)+1. \tag{3}$$

Ta có theo 1) và (3) :

$$1 = f(1) = f(0+1) = f(0)+1.$$

Từ đó đi đến

$$f(0) = 0. \tag{4}$$

Vì lẽ ấy áp dụng tính chất 3), ta có

$$f(x) \leq 0 \quad \forall 0 < x < 1. \tag{5}$$

Mặt khác lại có

$$1 = f(1) = f(x+(1-x)). \tag{6}$$

Do vậy theo tính chất 5) suy ra từ (6)

$$1 \leq f(x)+f(1-x)+1, \text{ hay}$$

$$f(x)+f(1-x) \geq 0. \tag{7}$$

Nếu $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < 1-x < 1$. Vì thế áp dụng (5) suy ra

$$f(x) \leq 0 \text{ và } f(1-x) \leq 0, \text{ hay}$$

$$f(x)+f(1-x) \leq 0. \tag{8}$$

Bây giờ từ (7) và (8) suy ra $f(x) = f(1-x) = 0$ khi $0 < x < 1$.

Tóm lại ta đã chứng minh được các điều kiện sau đây :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ khi } 0 \leq x < 1 \\ f(x+1) = f(x)+1. \end{cases}$$

Vì lẽ đó suy ra $f(x) = [x]$, ở đây $[x]$ chỉ phần nguyên của số x. Đảo lại $f(x) = [x]$, thoả mãn mọi yêu cầu đề bài. Như vậy $f(x) = [x]$ là hàm số duy nhất thoả mãn mọi yêu cầu đề ra.

Bài 7 : Tìm hàm số $f(x)$ xác định trên toàn trục số và thoả mãn điều kiện sau :

Với mọi x_1, x_2, với mọi $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, ta có

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Bài giải

Xét hàm $g(x) = f(x) - f(0)$.

Như vậy $g(x)$ xác định trên toàn trục số và $g(0) = 0$. (1)

Với mọi x_1, x_2 ; $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ và $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, ta có

$$g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(0)$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) - f(0) = \lambda_1 [f(x_1) - f(0)] + \lambda_2 [f(x_2) - f(0)]$$

$$= \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2). \quad (2)$$

Lấy x tuỳ ý, khi đó nếu $0 \leq \mu \leq 1$, ta có

$g(\mu x) = g[(1-\mu)0 + \mu x]$. Theo (2) suy ra

$$g(\mu x) = (1-\mu) g(0) + \mu g(x).$$

Theo (1) suy ra $g(\mu x) = \mu g(x)$.

Như vậy $g(\mu x) = \mu g(x), \quad \forall \mu \in [0 ; 1], \forall x.$ (3)

Với $\mu > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\mu}$ và $\frac{1}{\mu} \in (0 ; 1)$, do vậy theo (3) có

$$g(x) = g\left[\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)0 + \frac{1}{\mu}(\mu x)\right] = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) g(0) + \frac{1}{\mu} g(\mu x)$$

$$= \frac{1}{\mu} g(\mu x) \Rightarrow g(\mu x) = \mu g(x), \quad \forall \mu > 1, \forall x. \quad (4)$$

Để ý rằng $0 = g(0) = g\left[\frac{1}{2}(-x) + \frac{1}{2}x\right]$, vì thế từ (3) có

$$0=\frac{1}{2}g(-x)+\frac{1}{2}g(x)\Rightarrow g(-x)=-g(x),\quad \forall x \qquad (5)$$

Với $\mu>0$ (khi đó $-\mu>0$), ta có theo (3) và (4)

$g(\mu x)=g\left[(-\mu)(-x)\right]=-\mu g(-x)$, vì thế từ (5) có

$$g(\mu x)=\mu g(x),\quad \forall \mu<0,\ \forall x \qquad (6)$$

Như vậy từ (1), (3), (4), (6) suy ra $\forall x$, $\forall$ số thực μ thì

$$g(\mu x)=\mu g(x).$$

Nói riêng khi $x=1\Rightarrow g(\mu)=\mu g(1)\quad \forall \mu$.

$\Rightarrow g(x)=ax$ với a là hằng số $\Rightarrow f(x)-f(0)=ax$

$\Rightarrow f(x)=ax+b$, với a, b là hằng số.

Thử lại thấy $f(x)=ax+b$ thoả mãn mọi yêu cầu đặt ra, và đó chính là lớp hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài.

Chú ý : Để ý rằng điều kiện

$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$ tương đương với hệ điều kiện

$$\begin{cases} f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2) \\ f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\ge \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2) \end{cases}$$

Vì thế từ bài toán trên suy ra kết quả sau đây : Hàm số $f(x)$ xác định trên toàn trục số là vừa lồi, vừa lõm khi và chỉ khi nó có dạng $f(x)=ax+b$ (tức là khi và chỉ khi nó là hàm bậc nhất).

Bài 8 : Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho

$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$ với mọi $x, y\in\mathbb{R}$.

Bài giải

Đặt $c=f(0)$, và đặt

$$A=f(R)=\{a: a=f(y),\ \text{với } y\in\mathbb{R}\}$$

(nói khác đi A là miền giá trị của hàm f).

Giả sử $a\in A$, tức là $a=f(y)$ với $y\in\mathbb{R}$. Thay trong giả thiết $x=a$; y (với $f(y)=a$), ta có

$$f(a-a)=f(a)+a^2+f(a)-1$$

$$\Rightarrow c=f(0)=2f(a)+a^2-1$$

$$\Rightarrow f(a)=\frac{1+c}{2}-\frac{a^2}{2}. \qquad (1)$$

Trước hết để ý rằng $c=f(0)\neq 0$. Thật vậy nếu trái lại $f(0)=0$, khi đó thay $x=y=0$, thì từ giả thiết đi đến

$$f(0-f(0))=f(f(0))+0f(0)+f(0)-1, \text{ vì } f(0)=0$$

nên đi đến $f(0)=f(0)+f(0)-1\Rightarrow f(0)=1$.

Điều này dẫn đến mâu thuẫn (vì $f(0)=0$ mà $f(0)=1$). Nhận xét

$$c=f(0)\neq 0$$

được chứng minh xong.

Đưa vào xét tập hợp sau đây :

$$A-B=\{x : x\in\mathbb{R} \text{ sao cho tồn tại } a,\ b\in A \text{ mà } x=a-b\}.$$

Ta có mệnh đề sau : $A-B=\mathbb{R}$. (2)

(Mệnh đề được chứng minh ở cuối bài).

Như vậy với mọi $x\in\mathbb{R}$, luôn tồn tại $a,\ b\in A$ sao cho $x=a-b$.

Từ đó

$$f(x)=f(a-b). \qquad (3)$$

Do $b\in A$, nên $b=f(\bar{y})$, với $\bar{y}\in\mathbb{R}$.

Áp dụng tính chất với $a, \bar{y}$, ta có

$$f(a-f(\bar{y}))=f(f(\bar{y}))+af(\bar{y})+f(a)-1, \text{ hay}$$

$$f(x)=f(a-b)=f(b)+ab+f(a)-1. \qquad (4)$$

Do $a\in A$, $b\in A$, nên áp dụng (1) có

$$f(a)=\frac{1+c}{2}-\frac{a^2}{2}\ ;\ f(b)=\frac{1+c}{2}-\frac{b^2}{2}. \qquad (5)$$

Từ đó kết hợp (4), (5) suy ra

$$f(x)=\frac{1+c}{2}-\frac{b^2}{2}+ab+\frac{1+c}{2}-\frac{a^2}{2}-1, \text{ hay}$$

$$f(x)=c-\frac{b^2}{2}+ab-\frac{a^2}{2}$$

$$=c-\frac{(a-b)^2}{2}=c-\frac{x^2}{2}.$$

Như vậy ta đã chứng minh được $f(x)=c-\frac{x^2}{2}, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$ (6)

Lấy $a\in A$, khi đó một mặt ta có (theo (6))

$$f(a)=\frac{1+c}{2}-\frac{a^2}{2}. \qquad (7)$$

Mặt khác theo (6), thì

$$f(a)=c-\frac{a^2}{2}. \qquad (8)$$

Từ (7), (8) suy ra $\frac{1+c}{2}=c\Leftrightarrow c=1$.

Thay lại vào (6), đi đến

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2}, \quad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad (9)$$

Đảo lại hàm số $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra. Do vậy $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ là hàm số duy nhất thoả mãn mọi yêu cầu đề ra.

Bài 9 : Tìm các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y, z\in\mathbb{R}$, ta có

$$f(xy)+f(xz)-2f(x)f(yz)\geq\frac{1}{2}.$$

Bài giải

Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn bất đẳng thức sau

$$f(xy)+f(xz)-2f(x)f(yz)\geq \frac{1}{2},\quad \forall x, y, z\in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Trong (1) cho $x=y=z=1$, ta có

$$2f(1)-2(f(1))^2\geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(f(1))^2-4f(1)+1\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2f(1)-1)^2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Trong (1) cho $x=y=z=0$, lại có

$2f(0)-2(f(0))^2\geq \frac{1}{2}$. Từ đó đi đến

$$f(0)=\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Trong (1) cho $x=0$, $z=1$. Khi đó từ (1) suy ra $\forall y\in \mathbb{R}$, thì

$$f(0)+f(0)-2f(0)f(y)\geq \frac{1}{2}.$$

Từ đó theo (3) đi đến $f(y)\leq \frac{1}{2}$. (4)

Trong (1) lại cho $y=z=1$. Khi đó từ (1) suy ra $\forall x\in \mathbb{R}$, thì

$$f(x)+f(x)-2f(x)f(1)\geq \frac{1}{2}.$$

Bây giờ từ (2), ta có $f(x)\geq \frac{1}{2}$. (5)

Từ (4), (5) ta thấy $f(x)\equiv \frac{1}{2},\quad \forall x\in \mathbb{R}$.

Đảo lại nếu $f(x)\equiv \frac{1}{2}$, thì rõ ràng thoả mãn yêu cầu đề ra. Vậy $f(x)\equiv \frac{1}{2}$ là hàm số duy nhất thoả mãn mọi yêu cầu đề ra.

Nhận xét : Trong bài tập trên bất phương trình hàm chuyển thành phương trình hàm và bài toán vẫn có nghiệm duy nhất !

Bài 10 : Tìm các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện sau :

1) $f(x) \geq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $f(x+y) \geq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Bài giải

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số thoả mãn mọi yêu cầu đề ra, tức là có

$$\begin{cases} f(x) \geq x, \quad \forall x \in \mathbb{R} & (1) \\ f(x+y) \geq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. & (2) \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} e^{f(x)} \geq e^{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} & (3) \\ \dfrac{e^{f(x+y)}}{e^{x+y}} \geq \dfrac{e^{f(x)}e^{f(y)}}{e^{x+y}} = \dfrac{e^{f(x)}}{e^{x}} \cdot \dfrac{e^{f(y)}}{e^{y}}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} & (4) \end{cases}$$

Đặt $g(x) = \dfrac{e^{f(x)}}{e^{x}}$.

Khi đó từ (3), (4) ta đi đến

$$\begin{cases} g(x) \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} & (5) \\ g(x+y) \geq g(x)g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} & (6) \end{cases}$$

Trong (5), (6) cho $x = y = 0$, ta có

$$\begin{cases} g(0) \geq 1 \\ g(0) \geq \left(g(0)\right)^2 \end{cases}$$

Từ hệ trên suy ra $g(0) = 1$. (7)

Ta có $1 = g(0) = g(x + (-x)) \geq g(x)g(-x)$ (áp dụng (6)).

Từ đó suy ra (chú ý rằng từ (5) ta có $g(x) \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

$$1 \leq g(x) \leq \frac{1}{g(-x)} \leq 1.$$

Vì lẽ ấy ta có $g(x)=1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, hay

$$e^{f(x)}=e^{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)=x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đảo lại $f(x)$ thoả mãn mọi yêu cầu đề bài. Vậy $f(x)=x$ là hàm số duy nhất thoả mãn mọi yêu cầu đề ra.

Bài 11 : Tìm tất cả các hàm $f(x)$ có tập xác định và tập giá trị là đoạn $[0, 1]$ và thoả mãn các điều kiện sau :

1) $2x-f(x) \in [0 ; 1]$ với mọi $x \in [0 ; 1]$

2) $f(2x-f(x))=x$ với mọi $x \in [0 ; 1]$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số có tập xác định và tập giá trị là đoạn $[0 ; 1]$ và thoả mãn các hệ thức sau :

$$\begin{cases} 2x-f(x) \in [0 ; 1], \quad \forall x \in [0 ; 1] & (1) \\ f(2x-f(x))=x, \quad \forall x \in [0 ; 1] & (2) \end{cases}$$

Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh điều khẳng định sau :

$\forall x \in [0 ; 1]$, $\forall n=1, 2, \ldots$, ta có các hệ thức

$$\begin{cases} (n+1)x-nf(x) \in [0 ; 1] \\ f((n+1)x-nf(x))=nx-(n-1)f(x) \end{cases}$$

- Với $n=1$, thì điều khẳng định chính là các giả thiết (1) và (2), vậy nó đúng.

- Giả sử điều khẳng định đã đúng đến $n=k$, tức là ta có

$$\begin{cases} (k+1)x-kf(x) \in [0 ; 1], & \forall x \in [0 ; 1] \\ f[(k+1)x-kf(x)]=kx-(k-1)fx, & \forall x \in [0 ; 1] \end{cases}$$

- Xét với $n=k+1$. Ta có

$(k+2)x-(k+1)f(x)=2[(k+1)x-kf(x)]-[kx-(k-1)f(x)]$.

Theo giả thiết quy nạp suy ra

$(k+2)x-(k+1)f(x)=2[(k+1)x-kf(x)]-f[(k+1)x-kf(x)]$. (3)

Lại do giả thiết quy nạp thì $(k+1)x-kf(x)\in[0\,;\,1]$, vậy từ (3) suy ra (dựa vào giả thiết (1)) $(k+2)x-(k+1)f(x)\in[0\,;\,1]$.

Do $(k+1)x-kf(x)\in[0\,;\,1]$, vậy theo (2) suy ra

$$f\left[2\left((k+1)x-kf(x)\right)-f\left((k+1)x-kf(x)\right)\right]=(k+1)x-kf(x). \quad (*)$$

Theo giả thiết quy nạp thì

$$f\left((k+1)x-kf(x)\right)=kx-(k-1)f(x)$$

$$\Rightarrow 2\left((k+1)x-kf(x)\right)-f\left((k+1)x-kf(x)\right)$$

$$=(2k+2)x-2kf(x)-kx+(k-1)f(x)=(k+2)x-(k+1)f(x).$$

Như vậy từ (*) có

$$f\left[(k+2)x-(k+1)f(x)\right]=(k+1)x-kf(x).$$

Ta thấy điều khẳng định cũng đúng với $n=k+1$. Như vậy điều khẳng định đã được chứng minh.

Từ khẳng định ta suy ra $f(x)=x$ khi $x\in[0\,;\,1]$. Thật vậy giả sử tồn tại $x_0\in[0\,;\,1]$ mà $f(x_0)\neq x_0$. Ta có

$$(n+1)x_0-nf(x_0)=n\left(x_0-f(x_0)\right)+x_0. \quad (4)$$

Theo kết luận trên thì

$$(n+1)x_0-nf(x_0)\in[0\,;\,1],\quad \forall n.$$

Mặt khác vì $x_0\neq f(x_0)$, nên với n đủ lớn thì chắc chắn

$$n\left(x_0-f(x_0)\right)+x_0\notin[0\,;\,1].$$

Như vậy ta suy ra mâu thuẫn $\Rightarrow f(x)=x,\quad \forall x\in[0\,;\,1]$.

Đảo lại hàm số $f(x)=x$ rõ ràng thoả mãn mọi yêu cầu của đầu bài.

Như vậy $f(x)=x$ là hàm duy nhất cần tìm.

Bài 12 : Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định với mọi x và thoả mãn điều kiện :

$$f(x).f(y)=f\left(x^2+y^2\right) \text{ với mọi } x,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Bài giải

Giả sử hàm số $f(x)$ thoả mãn yêu cầu đề bài, tức là ta có :

$$f(x).f(y)=f\left(x^2+y^2\right),\quad \forall x,\, y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Trong (1) cho $x=y=0,$ ta có

$$f^2(0)=f(0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)=0\\ \text{hoặc } f(0)=1\end{array}\right.$$

Xét hai khả năng :

1) Nếu $f(0)=0.$

Trong (1) thay $y=0,$ ta có $f(x).f(0)=f\left(x^2\right)$

$$\Rightarrow f\left(x^2\right)=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (1) thay y bằng $x,$ ta có

$$f^2(x)=f\left(\left(x\sqrt{2}\right)^2\right),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Do (2) và (3) suy ra $f(x)=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$

2) Nếu $f(0)=1.$

Trong (1) thay $y=0,$ ta có $f(x).f(0)=f\left(x^2\right)$

$$\Rightarrow f(x)=f\left(x^2\right),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Vì thế từ (4) suy ra chỉ cần xét với $x\geq 0.$

Từ (1) suy ra $f\left(x^2+y^2\right)=f(x).f(y)=f\left(x^2\right)f\left(y^2\right)\quad \forall x, \forall y$

$$\Rightarrow f(x+y)=f(x).f(y),\quad \forall x\geq 0,\, y\geq 0$$

$$\Rightarrow f(2x)=f^2(x)\geq 0,\quad \forall x\geq 0. \tag{5}$$

Ta có $f^4(x)=\left(f(x).f(x)\right)^2=f^2\left(2x^2\right)=\left[f\left(x\sqrt{2}\right)\right]^2$ (do (1) và (5)).

Mặt khác theo (1), ta có

- $f\left(x\sqrt{2}\right).f\left(x\sqrt{2}\right)=f\left(2x^2+2x^2\right)=f\left(4x^2\right)$
- $f\left(4x^2\right)=f(2x)$ (do thay trong (4) x bởi $2x$)

• Lại theo (5) có $f(2x)=f^2(x)$

Từ đó suy ra $f^4(x)=f^2(x), \quad \forall x \geq 0.$ (6)

Như vậy suy ra chỉ có hai khả năng sau (trong trường hợp $f(0)=1$) :

a) Tồn tại $x_0>0$ sao cho $f(x_0)=0$ (chú ý ở đây $f(0)=1\neq 0$). Như vậy $f(x+x_0)=f(x).f(x_0), \quad \forall x \geq 0.$

Do $f(x_0)=0 \Rightarrow f(x+x_0)=0, \quad \forall x \geq 0$ tức là

$$f(x)=0, \quad \forall x \geq x_0.$$

Mặt khác với mọi $\bar{x}>0$ thì luôn tồn tại số n nguyên dương sao cho

$$\bar{x}>\frac{x_0}{2^n}.$$

Theo (5) ta có $f(x_0)=f^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$ mà $f(x_0)=0 \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2}\right)=0.$

Tương tự $f\left(\frac{x_0}{2}\right)=f^2\left(\frac{x_0}{4}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{4}\right)=0.$

$$f(x_0)=f\left(\frac{x_0}{2}\right)=f\left(\frac{x_0}{4}\right)=\ldots-f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=0.$$

Vì $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=0$ mà $\bar{x}>\frac{x_0}{2^n}$, nên lập luận như trên suy ra $f(\bar{x})=0.$

Kết hợp lại ta có $f(x)=0 \quad \forall x>0.$

Trong trường hợp này hàm số có dạng

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ nếu } x\neq 0\\ 1, \text{ nếu } x=0\end{cases}$$

b) Nếu $f(x)=1, \ \forall x \geq 0 \Rightarrow f(x)=1, \quad \forall x<0 \Rightarrow f(x)\equiv 1.$

Lúc này $f(x)\equiv 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Thử lại cả ba hàm số đều thoả mãn yêu cầu đầu bài.

Tóm lại, có ba hàm số thoả mãn đề ra :

Hoặc là $f(x)\equiv 0$; hoặc $f(x)\equiv 1$; hoặc là $f(x)=\begin{cases}0, \text{ nếu } x\neq 0\\ 1, \text{ nếu } x=0\end{cases}$

Bài 13 : Tìm mọi hàm số $f(x)$ xác định với mọi x sao cho

$f(xy)+f(x-y)+f(x+y+1)=xy+2x+1$ với mọi x, $\forall y\in\mathbb{R}$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định với mọi x và

$$f(xy)+f(x-y)+f(x+y+1)=xy+2x+1,\quad \forall x,\forall y\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Thay trong (1) $y=-1$, ta có :

$$f(-x)+f(x+1)+f(x)=x+1,\quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Lại thay trong (1) $y=0$, ta được

$$f(0)+f(x)+f(x+1)=2x+1,\quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra $f(-x)-f(0)=-x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$ (4)

Đặt trong (4) x bằng $-x$, ta có : $f(x)-f(0)=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$ (5)

$$\Rightarrow f(x)-x=f(0)-0,\quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad (6)$$

Đặt $g(x)=f(x)-x$, ta có $g(x)=g(0),\quad \forall x\in\mathbb{R}$ (7)

Viết lại (1) dưới dạng sau :

$$\left[f(xy)-xy\right]+\left[f(x-y)-(x-y)\right]+\left[f(x+y+1)-(x+y+1)\right]=0$$

$$\Rightarrow g(xy)+g(x-y)+g(x+y+1)=0,\quad \forall x,\forall y\in\mathbb{R} \qquad (8)$$

Trong (7) thay lần lượt x bởi xy, $x-y$, $x+y+1$ thì từ (8) có

$3g(0)=0\Rightarrow g(0)=0\Rightarrow g(x)=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Thử lại thấy $f(x)=x$ thoả mãn đầu bài.

Vậy có duy nhất hàm số $f(x)=x$ là nghiệm cần tìm.

Bài 14 : Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định và tăng khi $x>0$ và thoả mãn điều kiện $f(x+1)=f(x)+2^{-x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}^{+}$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số cần tìm, tức là

$$f(x+1)=f(x)+2^{-x},\quad \forall x>0 \tag{1}$$

Xét hàm số $g(x)=-2^{1-x}$. Ta có

$$g(x+1)=-2^{1-(1+x)}=-2^{-x}=-\frac{1}{2^x}.$$

Vì $g(x)=-\frac{2}{2^x}=-\frac{1}{2^x}-\frac{1}{2^x}\Rightarrow g(x+1)=g(x)+2^{-x}\quad \forall x.$

Xét hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$.

Từ giả thiết (1) suy ra $\forall x>0$, ta có $h(x+1)=f(x+1)-g(x+1)$

$$=f(x)+2^{-x}-\left(g(x)+2^{-x}\right)=f(x)-g(x)=h(x)$$

$$\Rightarrow h(x+1)=h(x),\quad \forall x>0. \tag{2}$$

Do $f(x)$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}^+=\{x : x>0\}$ nên tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a \ (a \text{ có thể bằng } \infty).$$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{2^x}=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)-\lim_{x\to+\infty} g(x)=a.$$

Giả sử x_0 cố định $\in\mathbb{R}^+$ (tức là $x_0>0$).

Khi đó từ (2) suy ra

$$h(x_0)=h(x_0+n),\quad \forall n \text{ nguyên dương}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} h(x_0+n)=h(\overline{x_0}).$$

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=a\Rightarrow h(x_0)=a.$

Như vậy $h(x_0)=a,\quad \forall x_0>0$

$$\Rightarrow h(x)\equiv a,\quad \forall x>0$$

$$\Rightarrow f(x)=h(x)+g(x)=-\frac{2}{2^x}+a,\quad \forall x>0.$$

Đảo lại hàm số $f(x) = -\frac{2}{2^x} + a$, với a là hằng số thoả mãn yêu cầu đề ra. Thật vậy khi $y > x > 0$, ta có :

$$2^y > 2^x \Rightarrow \frac{2}{2^y} < \frac{2}{2^x} \Rightarrow -\frac{2}{2^y} > -\frac{2}{2^x} \Rightarrow f(y) > f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm tăng khi $x > 0$.

Lại thấy $f(x+1) = -\frac{2}{2^{x+1}} + a = -\frac{1}{2^x} + a$

$$= -\frac{2}{2^x} + \frac{1}{2^x} + a = f(x) + 2^{-x}.$$

Tóm lại lớp hàm số $f(x) = -\frac{2}{2^x} + a$, với a là hằng số tuỳ ý thoả mãn yêu cầu đầu bài.

Bài 15 : Tìm hàm số $f(x)$ xác định khi $x > 0$ và thoả mãn các điều kiện sau :

1) f là hàm tăng thực sự

2) $f(x) > \frac{-1}{x}$ với mọi $x > 0$

3) $f(x) f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$ với mọi $x > 0$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định $\forall x > 0$ và thoả mãn ba yêu cầu đề ra như trong bài đòi hỏi. Từ điều kiện

$$f(x).f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1, \quad \forall x > 0 \qquad (1)$$

và $f(x) > -\frac{1}{x}$ ta suy ra $f(x) + \frac{1}{x} > 0$, ta có

$$f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right).f\left[f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{f(x) + \frac{1}{x}}\right] = 1, \quad \forall x > 0. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\forall x > 0$, có

$$f(x) = f\left[f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{f(x)+\frac{1}{x}}\right]. \quad (3)$$

Do f là hàm tăng thực sự, nên từ (3) suy ra

$$x = f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{f(x)+\frac{1}{x}}, \quad \forall x > 0. \quad (4)$$

Từ (1) (4) suy ra

$$x = \frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)+\frac{1}{x}}, \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow x^2 f^2(x) - xf(x) - 1 = 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow xf(x) = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2x} \text{ hoặc } f(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2x} \text{ với } x > 0.$$

Đảo lại chỉ có hàm $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2x}$ với $x > 0$ là thoả mãn yêu cầu đề ra (chú ý là $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2x}$ khi $x > 0$ là hàm đơn điệu giảm nên bị loại ngay).

Vậy có duy nhất hàm số $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2x}$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Bài 16 : Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định $\forall x$ sao cho

$f(x+y) \geq f(x).f(y) \geq 2000^{x+y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số cần tìm, tức là ta có

$$f(x+y) \geq f(x).f(y) \geq 2000^{x+y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Trong (1) thay $x = y = 0$, ta có

$$f(0) \geq f^2(0) \geq 1 \Rightarrow f(0) = 1. \quad (2)$$

Trong (1) thay $y = -x$, ta có

$$f(0) \geq f(x).f(-x) \geq 1. \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra $f(x).f(-x) = 1, \quad \forall x.$ (4)

Trong (1) lại thay $y = 0$, ta có

$$f(x) \geq f(x).\ f(0) \geq 2000^x, \quad \forall x.$$

Vì $f(0) = 1 \Rightarrow f(x) \geq 2000^x, \quad \forall x.$ (5)

Từ (5) suy ra $f(-x) \geq 2000^{-x}, \quad \forall x$ (6)

$$\Rightarrow f(x).f(-x) \geq 2000^{x+(-x)}, \quad \forall x$$

$$f(x)f(-n) \geq 1, \quad \forall x \quad (7)$$

Bây giờ từ (4), (7) suy ra $f(x) = 2000^x$.

Thử lại thấy $f(x) = 2000^x$ thoả mãn yêu cầu đặt ra. Vậy $f(x) = 2000^x$ là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài 17 : Tìm các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định $\forall x$ sao cho

1) $g(x)$ là hàm tuần hoàn trên $\mathbb{R}$

2) $x^3 = f([x]) + g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

ở đây $[x]$ để chỉ phần nguyên của x.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số cần tìm. Gọi T là chu kì của hàm số $g(x)$ thì $T > 0$ và $g(x+T) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ (1)

Từ giả thiết ta có

$x^3 = f([x]) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$ nên có

$$(x+T)^3 = f([x+T]) + g(x+T) = f([x+T]) + g(x)$$

$$\Rightarrow T^3 + 3T^2x + 3Tx^2 + x^3 = f([x+T]) + g(x)$$

$$\Rightarrow T^3+3T^2x+3Tx^2+f([x])+g(x)=f([x+T])+g(x)$$

$$\Rightarrow T^3+3T^2x+3Tx^2=f([x+T])-f([x]),\quad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad (2)$$

Lấy x_0 tuỳ ý $\in\left[0\,;[T]+1-T\right]$, tức $0\le x_0<1+[T]-T$.

Khi đó chú ý là $\left[x_0+T\right]=\left[x_0\right]$, vậy từ (2) suy ra

$$3Tx_0^2+3T^2x_0+T^3=0,\quad \forall\, 0\le x_0<1+[T]-T. \qquad (3)$$

Đẳng thức (3) (với chú ý là $3T\neq 0$, do $3T>0$) có nghĩa là phương trình bậc hai $3Tx^2+3T^2x+T^3=0$ có vô hạn nghiệm. Mọi nghiệm của nó là x_0 tuỳ ý thuộc $(0\,;1+[T]-T)$, chú ý là $1+[T]-T>0$ theo định nghĩa phần nguyên.

Điều vô lí này chứng tỏ rằng bài toán đã cho vô nghiệm.

Tóm lại không có cặp hàm số $f(x)$, $g(x)$ nào thoả mãn yêu cầu đề bài.

Bài 8 : Tìm tất cả các hàm $f:Z^+\to Z^+$ thoả mãn hệ thức

$$f(f(x))=n+2 \text{ với mọi } x\in Z^+,$$

ở đây Z^+ là tập hợp tất cả các số nguyên không âm.

Bài giải

Giả sử $f:Z^+\to Z^+$ là hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài, tức là ta có

$$f(f(n))=n+2,\quad \forall n\in Z^+. \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $f(n+2)=f\left[f(f(n))\right]=f(n)+2\quad \forall n\in Z^+$.

Như vậy bằng phép quy nạp ta chứng minh được

$$\begin{cases} f(2k)=f(0)+2k & (2)\\ f(2k+1)=f(1)+2k & (3)\end{cases}$$

với $k=0, 1, \ldots$ (các bạn đọc giả tự thử lại phép quy nạp đơn giản này).

Do $f(0)\in Z^+$ nên $f(0)=2a$ hoặc $f(0)=2a+1$, với $a\in Z^+$.

1) Nếu $f(0)=2a\Rightarrow f(f(0))=f(2a)=f(0)+2a=2a+2a=4a$.

Mặt khác $f(f(0))=0+2$ (theo (1)). Từ đó suy ra $4a=2$.

Đó là điều vô lí vì $a \in Z^+$, do vậy $f(0) \neq 2a$.

2) Nếu $f(0) = 2a+1 \Rightarrow 2 = f(f(0)) = f(2a+1) = f(1)+2a$

$$\Rightarrow f(1)+2a = 2. \quad (4)$$

Do $f(1) \in Z^+$, và $a \in Z^+$, nên từ (4) suy ra chỉ có thể $a = 0$ hoặc $a = 1$.

a) Nếu $a = 0 \Rightarrow$ từ (4) có $f(1) = 2$; $f(0) = 1$.

Vậy $\begin{cases} f(2k) = 2k+1 \\ f(2k+1) = 2k+2 \end{cases} \Rightarrow f(n) = n+1.$

(Thử lại thấy $f(n) = n+1$ thoả mãn yêu cầu đề ra).

b) Nếu $a = 1$. Từ (4) có $f(1) = 0$; $f(0) = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2k) = 2k+3 \\ f(2k+1) = 2k \end{cases} \Rightarrow f(n) = \begin{cases} n+3, \text{ nếu } n \text{ chẵn} \\ n-1, \text{ nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Thử lại thấy hàm này cũng thoả mãn yêu cầu đề ra.

Tóm lại có hai hàm thoả mãn yêu cầu đề bài :

$$f(n) = n+1 \text{ ; hoặc } f(n) = \begin{cases} n+3, \text{ nếu } n \text{ chẵn} \\ n-1, \text{ nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

ở đây $n = 0, 1, 2, \ldots$

Bài 19 : Cho $\mathbb{R}^+$ là tập tất cả các số thực dương. Hãy xây dựng một hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ thoả mãn điều kiện

1) $f(\alpha+1) > f(\alpha)$

2) Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, tồn tại vô hạn cặp số tự nhiên m, n để $f(m\alpha) = f(n\beta)$.

Bài giải

Trước hết chứng minh bổ đề : Với mọi $\varepsilon, a, b \in \mathbb{R}^+$ tồn tại vô số số tự nhiên m, n, k để $|na-m| < \varepsilon$; $|nb-k| < \varepsilon$.

Chứng minh bổ đề

Chọn $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Xét N^2+1 cặp (x, y) dạng $x = \{l a\}$; $y = \{l b\}$ với $l = 0, 1, \ldots, N^2$. Đặt tương ứng (x, y) với $([N_x], [N_y])$, ở đây $[\alpha]$ chỉ phần nguyên của số α, $\{\alpha\}$ chỉ phần lẻ của số α. Dễ thấy $x, y \in [0 ; 1]$ nên $[N_x]$, $[N_y] \in \{0, 1, \ldots, N^0 - 1\}$. Vì chỉ có N^2 cặp (u, v) với $u, v \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại 2 cặp (x_1, y_1), (x_2, y_2) được đặt ra tương ứng với cùng 1 cặp (u, v). Nghĩa là $\exists l_1, l_2 \in \{0, 1, \ldots, N^2\}$; $l_1 < l_2$ sao cho

$$\begin{cases} x_1 = \{l_1 a\} ; y_1 = \{l_1 b\} ; x_2 = \{l_2 a\} ; y_2 = \{l_2 b\} \\ [Nx_1] = [Nx_2] ; [Ny_1] = [Ny_2] \end{cases}$$

Ta có $|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{N}(Nx_1 - Nx_2)\right| = \left|\frac{1}{N}(\{Nx_1\} - \{Nx_2\})\right| \le \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Tương tự $|y_1 - y_2| < \varepsilon$.

Đặt $n_0 = l_2 - l_1$; $m_0 = [l_2 a] - [l_1 a]$; $k_0 = [l_2 b] - [l_1 b]$, ta có :

$$|n_0 a - m_0| = |\{l_2 a\} - \{l_1 a\}| < \varepsilon ; |n_0 b - k_0| < \varepsilon.$$

Xét tương tự cho N^2+1 cặp (x, y) dạng $x = \{l_j a\}$; $y = \{l_j b\}$ với $l_j = jN^2$; $jN^2 + 1, \ldots, jN^2 + N^2$; $j = 1, 2, \ldots$ ta sẽ được các số tự nhiên n_j, m_j, k_j sao cho $|n_j a - m_j| < \varepsilon$; $|n_j b - k_j| < \varepsilon$; $j = 1, 2, 3, \ldots$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán. Xét hàm số $f(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$. Rõ ràng $f(\alpha + 1) > f(\alpha)$.

Chọn $0 < \varepsilon \le \min\left\{\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\beta}\right\}$. Theo bổ đề tồn tại vô số m, n, k sao cho

$$\left|k\frac{1}{\alpha} - m\right| < \varepsilon ; \left|k\frac{1}{\beta} - n\right| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} k - \alpha\varepsilon < m\alpha < k + \alpha\varepsilon \\ k - \beta\varepsilon < m\beta < k + \beta\varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-\dfrac{1}{2} < n\beta < k+\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left[m\alpha+\dfrac{1}{2}\right]=\left[n\beta+\dfrac{1}{2}\right] \\ k-\dfrac{1}{2} < m\alpha < k+\dfrac{1}{2} \Rightarrow f(m\alpha)=f(n\beta) \end{cases}$$

Vậy $f(x)=\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$ là một hàm số cần tìm.

Chú ý : Nguyên lí Đi-rích-lê là một trong các nguyên lí cơ bản của Toán học hay sử dụng. Nội dung của nó đơn giản như sau : Có $n+1$ con thỏ nhốt vào n chuồng, thì có ít nhất một chồng có ít nhất hai con thỏ.

Bài 20 : Tìm hàm số $f(x):\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn phương trình

$f(f(x))+f(x)=1999.2000x$ với mọi $x\in\mathbb{R}^+$

ở đây $\mathbb{R}^+=\{x : x\geq 0\}$.

Giả sử $f(x)$ là hàm số cần tìm.

Lấy $x_0\geq 0$ cố định. Xét dãy số $\{u_n\}$ như sau :

$$u_0=x\ ;\ u_1=f(u_0)=f(x)\ ;$$
$$\ldots$$
$$u_{n+1}=f(u_n),\quad \forall n=1,2,\ldots$$

Từ giả thiết suy ra $u_{n+2}+u_{n+1}=1999.2000u_n$. (1)

Theo lí thuyết dãy số từ (1), xét phương trình đặc trưng sau đây

$$y^2+y=1999.2000. \qquad (2)$$

Dễ thấy (2) có hai nghiệm là $y_1=1999$; $y_2=-2000$, do vậy công thức tổng quát của u_n là $u_n=C_1.1999^n+C_2(-2000)^n$, trong đó C_1 và C_2 là các hằng số.

- Nếu $C_2<0$, thì do $\lim\limits_{k\to+\infty}u_{2k}=-\infty \Rightarrow u_n<0$ với n là số chẵn đủ lớn.

Đó là điều vô lí vì $u_n\in Z^+\ \ \forall n$.

- Nếu $C_2>0$, thì do $\lim\limits_{k\to+\infty}u_{2k+1}=-\infty \Rightarrow u_n<0$ với n là số lẻ đủ lớn.

Đó cũng là điều vô lí do như trên.

Như vậy $C_2 = 0 \Rightarrow u_n = C_1.1999^n$

$$\Rightarrow u_0 = C_1 \text{ mà } u_0 = x \Rightarrow C_1 = x.$$

Ta có $f(x) = u_1 = 1999x \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$

Thử lại ta có $f(x) = 1999x \geq 0, \quad \forall x \geq 0$

Và $f(f(x)) + f(x) = 1999f(x) + f(x) = 2000f(x) = 1999.2000x,$

tức là $f(x) = 1999x$ là hàm số duy nhất thoả mãn mọi điều kiện đề bài.

Bài 21 : Tìm hàm số $f(x)$ xác định với mọi x sao cho thoả mãn các điều kiện sau :

1) $f(x) = \cos x$ với $0 < x < 2\pi$

2) $f(x+2\pi) = 2f(x)+1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số thoả mãn mọi yêu cầu đề ra, tức là

$$\begin{cases} f(x) = \cos x, \text{ với } 0 < x < 2\pi & (1) \\ f(x+2\pi) = 2f(x)+1, \quad \forall x & (2) \end{cases}$$

Ta có nhận xét sau : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, ta có

$$f(x+2n\pi) = 2^n[f(x)+1]-1. \qquad (3)$$

Ta chứng minh (3) bằng quy nạp :

- Với $n = 0, 1$ thì rõ ràng ta có $f(x+2\pi) = 2f(x)+1$ (theo giả thiết)

$f(x) = f(x)$ (hiển nhiên đúng).

- Giả sử (3) đã đúng đến $n = k$, tức là

$$f(x+2k\pi) = 2^k[f(x)+1]-1. \qquad (4)$$

- Xét với $n = k+1$, ta có

$$f(x+2(k+1)\pi) = f(x+2k\pi+2\pi).$$

Theo giả thiết ta có

$$f((x+2k\pi)+2\pi) = 2f(x+2k\pi)+1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Theo giả thiết quy nạp, suy ra

$$f(x+2k\pi+2\pi)=2^{k+1}[f(x)+1]-2+1$$

$$\Rightarrow f[x+2(k+1)\pi]=2^{k+1}[f(x)+1]-1$$

$\Rightarrow$ (3) cũng đúng khi $n=k+1$, theo nguyên lí quy nạp thì (3) đúng $\forall n\geq 0$. Nhận xét được chứng minh.

Xét $f(x-2n\pi)$ với $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^+$ ($\mathbb{N}^+$ là tập các số nguyên dương).

Đặt $x_1=x-2n\pi\Rightarrow x=x_1+2n\pi$

$$\Rightarrow f(x)=f(x_1+2n\pi)=2^n(f(x_1)+1)-1,\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{5}$$

$$\Rightarrow f(x)+1=2^n(f(x_1)+1)$$

$$\Rightarrow 2^{-n}(f(x)+1)=f(x_1)+1,\text{ hay}$$

$$f(x-2n\pi)=f(x_1)=2^{-n}[f(x)+1]-1,\quad \forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}^+. \tag{6}$$

Vậy từ (3) và (6) suy ra

$$f(x+2n\pi)=2^n[f(x)+1]-1,\quad \forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{Z}.$$

Lấy x_0 tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}$. Khi đó tồn tại $0\leq\alpha<2\pi$ sao cho

$$x_0=\alpha+\left[\frac{x}{2\pi}\right].2\pi$$

(ở đây qua $[a]$ kí hiệu là phần nguyên của số a).

Ta có $f(x_0)=f\left(\alpha+\left[\frac{x}{2\pi}\right]2\pi\right)$.

Vậy theo nhận xét trên có $f(x_0)=2^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}(f(\alpha)+1)-1$

$$=2^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}(\cos\alpha+1)-1=2^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}(\cos x_0+1)-1.$$

Do x_0 là tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=2^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}(\cos x+1)-1.$ (7)

Thử lại ta thấy hàm $f(x)$ xác định bởi (7) thoả mãn mọi yêu cầu đề ra. Như vậy có duy nhất hàm $f(x)$ cần tìm là

$$f(x)=2^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}(1+\cos x)-1.$$

Bài 22 : Hãy xây dựng một hàm số $f(x)$ xác định với mọi x, không đồng nhất là hằng số và thoả mãn điều kiện :

$$\left(f(x)-f(y)\right)^2 \le |x-y| \text{ với mọi } x,\ y\in\mathbb{R}.$$

Bài giải

Xét hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{khi } x>0\\ 0 & \text{khi } x\le 0.\end{cases}$

- Khi đó nếu .$x>0,\ y>0,$ thì

$$\left(f(x)-f(y)\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\le\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|=|x-y|.$$

- Nếu $x>0,\ y\le 0,$ thì

$$\left(f(x)-f(y)\right)^2=\left(\sqrt{x}-0\right)^2=x\le|x-y| \text{ (chú ý ở đây } y\le 0\text{)}.$$

- Nếu $x\le 0,\ y>0,$ thì chứng minh tương tự

- Nếu $x\le 0,\ y\le 0,$ thì $\left(f(x)-f(y)\right)^2=0\le|x-y|.$

Tóm lại hàm số đặt ra là một trong những hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài.

Chú ý : Có thể thấy các hàm số sau đây cũng thoả mãn yêu cầu đề bài :

$$f(x)\begin{cases}|x|, \text{ nếu } |x|\le\dfrac{1}{2}\\[2mm] 0, \text{ nếu } |x|>\dfrac{1}{2}\end{cases} \quad\text{hoặc}\quad f(x)=\frac{1}{2}\cos x.$$

Bài tập trên là một minh hoạ cho các hàm số cần tìm có thể là không duy nhất !

Bài 23 : Tất cả các hàm $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}$ sao cho

$f(1)=1$; $f(2n)=f(n)$ và $f(2n+1)\Rightarrow 1-f(n)$ với mọi $n\in\mathbb{N}^+$

ở đây $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên, còn $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Bài giải

Giả sử f là hàm số cần tìm thoả mãn các yêu cầu đề ra, tức là ta có

$$\begin{cases} f(1) = 1 & (1) \\ f(2n) = f(n)\,;\; f(2n+1) = 1 - f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ & (2) \end{cases}$$

Đặt $g(n) = f(n) - \dfrac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$. Khi đó từ (1) (2) suy ra

$$\begin{cases} g(1) = \dfrac{1}{2} & (3) \\ g(2n) = g(n)\,;\; g(2n+1) = -g(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ & (4) \end{cases}$$

Lấy n_0 tuỳ ý thuộc $\mathbb{N}^+$. Giả sử trong hệ nhị phân n_0 có biểu diễn

$$n_0 = a_0 a_1 \dots a_k \text{ với } a_0 = 1.$$

Khi đó trong hệ nhị phân, ta có biểu diễn

$$2n_0 = a_0 a_1 \dots a_k 0 \;;\; 2n_0 + 1 = a_0 a_1 \dots a_k 1.$$

Như vậy (4) có dạng

$$\begin{cases} g\left(\overline{a_0 a_1 \dots a_k 0}\right) = g\left(\overline{a_0 a_1 \dots a_k}\right) & (5) \\ g\left(\overline{a_0 a_1 \dots a_k 1}\right) = g\left(\overline{a_0 a_1 \dots a_k}\right) & (6) \end{cases}$$

Từ (5) và (6) suy ra

$$g\left(\overline{a_0 a_1 \dots a_k a_{k+1}}\right) = (-1)^{a_{k+1}} g\left(\overline{a_0 a_1 \dots a_k}\right) \qquad (7)$$

ở đây $a_{k+1} \in \{0\,;\,1\}$. Công thức (7) đúng với mọi số $a_0 a_1 \dots a_k a_{k+1}$ ở dạng cơ số 2 $(a_0 = 1)$, tức là đúng $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

Từ công thức (7) suy ra bằng cách áp dụng liên tiếp nó

$$g\left(\overline{a_0 a_1 \dots a_k}\right) = (-1)^{a_k} (-1)^{a_{k-1}} \dots (-1)^{a_1} g\left(\overline{a_0}\right)$$

$$= (-1)^{\sum_{j=1}^{k} a_j} g(1) \text{ vì } g(1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g(n_0) = g(\overline{a_0a_1\ldots a_k}) = (-1)^{\sum_{j=1}^{k} a_j}\frac{1}{2}.$$

Như vậy ta đi đến (với chú ý $a_0 = 1$)

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{nếu trong biểu diễn nhị phân của } n \text{ có mặt một số lẻ số 1} \\ -\dfrac{1}{2}, & \text{nếu trong biểu diễn nhị phân của } n \text{ có mặt một số chẵn số 1} \end{cases}$$

hay

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{nếu trong biểu diễn nhị phân của } n \text{ có mặt một số lẻ số 1} \\ 0, & \text{nếu trong biểu diễn nhị phân của } n \text{ có mặt một số chẵn số 1} \end{cases}$$

Đảo lại hàm $f(n)$ xác định như trên thoả mãn mọi yêu cầu đề bài nên $f(n)$ là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài 24 : Hàm số $f(x)$ xác định với mọi x và thoả mãn các điều kiện sau :

1) $f(1) = 1$

2) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi x, y

3) Nếu $x \neq 0$, thì $f(x) = x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Hãy tìm $f(x)$.

— *Bài giải*

Từ $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

cho $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$ (2)

Trong (1) cho $y = -x \Rightarrow f(0) = f(x) + f(-x)$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Vậy $f(x)$ là hàm lẻ trên toàn trục số $\Rightarrow f(-1) = -f(1) = 1.$ (4)

Lấy x_0 tuỳ ý sao cho $x_0 \neq 0$; $x_0 \neq -1$, theo (1) ta có

$$f\left(\frac{x_0}{x_0+1}\right)+f\left(\frac{1}{x_0+1}\right)=f\left(\frac{x_0+1}{x_0+1}\right)=f(1)=1. \qquad (5)$$

Mặt khác do $\frac{x_0}{x_0+1}\neq 0 \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{x_0+1}\right)=\frac{x_0^2}{(x_0+1)^2}f\left(\frac{x_0+1}{x_0}\right)$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x_0}{x_0+1}\right)=\frac{x_0^2}{(x_0+1)^2}f\left(1+\frac{1}{x_0}\right)=\frac{x_0^2}{(x_0+1)^2}\left[f(1)+f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right]$$

$$=\frac{x_0^2}{(x_0+1)^2}\left(1+\frac{1}{x_0^2}f(x_0)\right). \qquad (6)$$

Lại có $f\left(\frac{1}{x_0+1}\right)=\frac{1}{(x_0+1)^2}f(1+x_0)=\frac{1}{(x_0+1)^2}\left[f(1)+f(x_0)\right]$

$$=\frac{1}{(x_0+1)^2}\left(1+f(x_0)\right). \qquad (7)$$

Từ (5), (6), (7) suy ra :

$$1=\frac{1}{(x_0+1)^2}\left[x_0^2+f(x_0)+1+f(x_0)\right]$$

$$\Rightarrow x_0^2+2x_0+1=x_0^2+2f(x_0)+1 \Rightarrow f(x_0)=x_0.$$

Như thế ta đã chứng minh được $\begin{cases} f(0)=0\ ;\ f(-1)=-1 \\ f(x)=x \quad \forall x\neq 0,\ x\neq -1. \end{cases}$

Điều đó có nghĩa là $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f(x)=x$.

Đảo lại $f(x)=x$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra, và nó là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài 25 : Tìm đa thức với hệ số thực $P(x)$ sao cho

$$\begin{cases} P(x)=\sqrt{P(x^2+1)-33}+32 \ \text{ với mọi } x\geq 0 \\ P(2005)=2037 \end{cases}$$

Bài giải

Giả sử $P(x)$ là đa thức thoả mãn hai điều kiện sau đây :

$$\begin{cases} P(x)=\sqrt{P(x^2+1)-33}+32, \quad \forall x \geq 0 & (1) \\ P(2005)=2037 & (2) \end{cases}$$

Thay trong (1) $x=2005$, ta có

$$P(2005^2+1)-33=(P(2005)-32)^2=2005^2$$

$$\Rightarrow P(2005^2+1)=(2005^2+1)+32. \quad (3)$$

Đặt $x_1=2005^2+1$, thì từ (3) có $P(x_1)=x_1+32$. (4)

Đặt $x_2=x_1^2+1$, khi đó từ (1) có

$$P(x_1^2+1)=(P(x_1)-32)^2+33=(x_1^2+1)+32$$

$$\Rightarrow P(x_2)=x_2+32. \quad (5)$$

Bằng quy nạp suy ra $x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$, với $x_n=x_{n-1}^2+1$.

Như vậy đa thức $Q(t)=P(t)-(t+32)$ có vô hạn nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (Vì $Q(x_1)=Q(x_2)=\ldots=Q(x_n)=\ldots=0$). Do vậy

$$Q(t)\equiv 0 \Rightarrow P(t)=t+32 \Rightarrow P(x)=x+32.$$

Thử lại thấy $P(x)=x+32$ thoả mãn mọi yêu cầu đề bài. Vậy $P(x)=x+32$ là đa thức duy nhất thoả mãn yêu cầu đề bài.

Chú ý : Trong bài trên đã sử dụng kết quả sau đây :

1) Nếu $P(x)$ là đa thức bậc $n \geq 1$, thì nó không thể có quá n nghiệm.

2) Nếu $P(x)$ là đa thức mà lại là hàm tuần hoàn, thì

$P(x)\equiv C$, với C là hằng số nào đó.

Kết quả trên được chứng minh như sau :

1) Giả sử $P(x)$ là đa thức bậc n, không giảm tổng quát có thể giả sử $a_n=1$. Giả sử phản chứng $P(x)$ có quá n nghiệm. Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ là $n+1$ nghiệm phân biệt (trong số các nghiệm của nó). Theo định lí Bezut, thì

$$P(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x), \text{ với } \deg Q_{n-1}(x) = n - 1.$$

Ta có $0 = P(x_k) = (x_k - x_1)Q_{n-1}(x_k)$. (1)

Do $x_k \neq x_1$, nên từ (1) suy ra $Q_{n-1}(x_k) = 0$ với $k = 2, 3, \ldots, n$, vậy x_k là các nghiệm của đa thức $Q_{n-1}(x)$, $k = \overline{2, n}$.

Lại theo định lí Bezut, có

$$Q_{n-1}(x) = (x - x_2)Q_{n-2}(x), \text{ với } \deg Q_{n-2}(x) = n - 2.$$

Ta có $0 = Q_{n-1}(x_k) = (x_k - x_2)Q_{n-2}(x_k)$, với $k = 3, 4, \ldots, n$.

Do $x_k \neq x_2 \quad \forall k = 3, \ldots, n$; nên $x_3, x_4, \ldots, x_n$ là các nghiệm của đa thức $Q_{n-2}(x)$.

Lập luận tương tự ta đi đến

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)Q_0(x)$$

ở đây $\deg Q_0(x) = 0 \Rightarrow Q(x) \equiv C$, với C là hằng số $\neq 0$.

Ta có $0 = P(x_{n+1}) = C(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\ldots(x_{n+1} - x_n)$. (*)

Do $x_1 \neq x_k, \quad \forall k = 2, \ldots, n+1 \Rightarrow C(x_{n+1} - x_1)\ldots(x_{n+1} - x_n) \neq 0$.

Vậy từ (*) suy ra mâu thuẫn $\Rightarrow$ giả thiết phản chứng là sai $\Rightarrow$ đa thức $P(x)$ bậc n có không quá n nghiệm $\Rightarrow$ đ.p.c.m.

2) Giả sử $P(x)$ là đa thức mà lại là hàm tuần hoàn, nên tồn tại $T > 0$ sao cho $P(x + T) = P(x) \quad \forall x$.

Đặt $Q(x) = P(x) - P(0) \Rightarrow \deg Q(x) = \deg P(x)$.

Ta có $Q(x + T) = P(x + T) - P(0) = P(x) - P(0) = Q(x) \quad \forall x$

$\Rightarrow Q(x)$ cũng là hàm tuần hoàn với chu kì $T > 0$.

Do $Q(0) = 0 \Rightarrow Q(T) = Q(2T) = \ldots = Q(nT) = \ldots = 0$.

Vậy đa thức $Q(x)$ có vô hạn nghiệm kT, $k = 1, 2, \ldots$

Theo phần 1) suy ra $Q(x) \equiv 0 \Rightarrow P(x) \equiv P(0)$

$\Rightarrow P(x) \equiv C$, với C là hằng số suy ra đ.p.c.m.

Bài 26 : Tìm mọi đa thức $P(x) \neq 0$, thoả mãn điều kiện

$$xP(x-1) = (x-3)P(x) \text{ với mọi } x.$$

Giả sử $P(x)$ là đa thức thoả mãn điều kiện đầu bài, tức là

$$xP(x-1) = (x-3)P(x), \quad \forall x \tag{1}$$

Trong (1) thay $x = 0$, ta có $-3P(0) = 0 \Rightarrow P(0) \Rightarrow P(1) = 0$.

Trong (1) thay $x = 1$, ta có $P(0) = -2P(1) = 0$.

Trong (1) thay $x = 2$, ta có $2P(1) = -P(2) \Rightarrow P(2) = 0$.

Vậy $P(x)$ nhận $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ là nghiệm. Theo định lí Bezut, thì $P(x)$ có dạng

$P(x) = x(x-1)(x-2)Q(x)$, với $Q(x)$ là đa thức nào đó.

Từ đó lại thay vào (1), có

$$x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x-1) = (x-3)x(x-1)(x-2)Q(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow Q(x-1) = Q(x), \quad \forall x. \tag{2}$$

Hệ thức (2) chứng tỏ rằng $Q(x)$ là hàm tuần hoàn. $Q(x)$ là đa thức mà lại là hàm tuần hoàn, nên theo kết quả phụ đã dẫn ra trong chú ý ở bài trước, ta suy ra $Q(x) \equiv C$, với $C = \text{const}$.

Như vậy $P(x) = Cx(x-1)(x-2)$. (3)

Thử lại thấy $P(x)$ xác định bởi công thức (3) thoả mãn đề bài, đó chính là lớp các đa thức cần tìm.

Chú ý : Nếu cho thêm một điều kiện phụ, chẳng hạn $P(3) = 6$, thì từ (3) ta có $P(3) = 6 = C.3.2.1 \Rightarrow C = 1$

Lúc này chỉ có duy nhất một đa thức $P(x) = x(x-1)(x-2)$ thoả mãn yêu cầu.

Bài 27 : Tìm mọi đa thức $P(x) \neq 0$, nếu như

$$P(x^2) = (P(x))^2 \text{ với mọi } x.$$

Bài giải

Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ là đa thức cần tìm, tức là ta có hệ số $P(x^2) = (P(x))^2$, $\forall x$. (1)

Ta sẽ chỉ ra rằng $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Thật vậy nếu không phải như thế tức là có ít nhất một trong các hệ số nói trên khác không.

Chọn $k < n$ lớn nhất mà $a_k \neq 0$, tức là

$$P(x) = a_n x^n + a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \quad (2)$$

Từ (2) và (1) suy ra hệ thức sau đúng $\forall x$:

$$a_n x^{2n} + a_k x^{2k} + a_{k-1}x^{2k-2} + \cdots + a_1 x^2 + a_0 =$$

$$= \left(a_n x^n + a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)^2. \quad (3)$$

Trong (3) cân bằng hệ số của x^{n+k}, ta thấy ở vế trái không chứa số hạng có luỹ thừa x^{n+k} (vì $2n > n+k > 2k$) ; còn ở vế phải số hạng đó là $2a_n\, a_k x^{n+k}$.

Vì thế ta có $2a_n a_k = 0$. (4)

Do $a_n \neq 0$, nên từ (4) suy ra $a_k = 0$. Đó là điều vô lí. Vậy giả thiết phản chứng là sai. Như vậy ta có $P(x) = a_n x^n$.

Từ (5) và (1) có $a_n x^{2n} = a_n^2 x^{2n}$, $\forall x$

$$\Rightarrow a_n = a_n^2 \Rightarrow a_n = 1 \text{ (do } a_n \neq 0\text{)}.$$

Như vậy $P(x) = x^n$.

Thử lại thấy $P(x) = x^n$ thoả mãn yêu cầu đề bài suy ra đa thức cần tìm là $P(x) = x^n$, với n là số nguyên dương tuỳ ý.

Chú ý : Từ bài trên suy ra :

Tìm mọi đa thức $P(x) \neq 0$ sao cho $P(x^2 - 2x) = [P(x-2)]^2$, $\forall x$. Bằng cách đặt $y = x - 1$ và $Q(y) = P(y-1)$. Khi đó ta có

$$[P(x-2)]^2 = [P(y-1)]^2 = [Q(y)]^2$$

$$P(x^2 - 2x) = P(y^2 - 1) = Q(y^2).$$

Vậy từ giả thiết ta có $Q(y^2) = (Q(y))^2 \quad \forall y.$

Theo bài trên suy ra $Q(y) = y^n \Rightarrow P(y-1) = y^n \Rightarrow P(x) = (x+1)^n$.

Vậy các đa thức cần tìm là $P(x) = (x+1)^n$, trong đó n là số nguyên dương tuỳ ý.

Bài 28 : Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện sau :

1) $f(x+y) \le f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1.$

Bài giải

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số thoả mãn hai điều kiện đã cho.

Trong điều kiện 1) cho $x = y = 0$, ta có $f(0) \le 2f(0) \Rightarrow f(0) \ge 0.$ (1)

Trong 1) cho $y = -x$, ta có

$$f(0) \le f(x) + f(-x). \tag{2}$$

Từ (1), (2) suy ra $f(-x) \ge -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ (3)

Từ 1) bằng quy nạp dễ dàng suy ra $f(nx) \le nf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n$ nguyên dương. Đặt $nx = t$, ta có $f(t) \le nf\left(\dfrac{t}{n}\right)$, hay

$$\frac{f(x)}{n} \le f\left(\frac{x}{n}\right), \quad \forall n, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lấy $x_0 > 0$ tuỳ ý, ta có

$$\frac{f\left(\frac{x_0}{n}\right)}{\frac{x_0}{n}} \ge \frac{f(x_0)}{n\frac{x_0}{n}} = \frac{-f(x_0)}{-x_0} \ge \frac{f(-x_0)}{-x_0} \ge \frac{f\left(-\frac{x_0}{n}\right)}{-\frac{x_0}{n}}.$$

(Chú ý là $x_0 > 0$).

Khi $n \to +\infty$ và dựa vào điều kiện 2) suy ra

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f\left(\frac{x_0}{n}\right)}{\frac{x_0}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f\left(-\frac{x_0}{n}\right)}{-\frac{x_0}{n}} = 1, \text{ từ đó}$$

$$\frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{f(-x_0)}{-x_0} = 1, \quad \forall x_0 > 0.$$

Nói cách khác, ta có $f(x) = x \quad \forall x \neq 0$.

Mặt khác từ (1) ta có (dựa cả vào tính chất 1))

$$0 \leq f(0) = f(1+(-1)) \leq f(1) + f(-1) = 1 + (-1) = 0.$$

Vậy $f(0) = 0$. Do đó $f(x) = x \quad \forall x$.

Thử lại thấy $f(x) = x$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra. Do đó $f(x) = x$ là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài 29 : Tìm hàm $f(x)$ xác định, nghịch biến trong $(0\ ;\ +\infty)$ và thoả mãn hệ thức

$$f(x + f(y)) = \frac{y}{xy+1}, \text{ với mọi } x, y \text{ dương.}$$

Bài giải

Giả sử $f(x)$ là hàm số cần tìm. Nói riêng thoả mãn hệ thức

$$f(x + f(y)) = \frac{y}{xy+1}, \quad \forall x, \forall y > 0. \tag{1}$$

Từ (1) suy ra $x + f(y)$ phải nằm trong tập xác định $(0\ ;\ +\infty)$, tức là ta phải có

$$x + f(y) > 0, \quad \forall x > 0, y > 0. \tag{2}$$

Nói riêng từ (2) đi đến $f(x) > 0, \quad \forall x > 0.$ (3)

Thật vậy nếu không phải thế thì tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) < 0.$ (4)

Lấy $x_1 = -\frac{1}{2} f(x_0)$. Khi đó $x_1 > 0$. Theo (2) có $x_1 + f(x_0) > 0$ hay

$$-\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_0) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} f(x_0) > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) > 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (4). Vậy (3) được chứng minh.

Với $a > 0$ tuỳ ý và với $y \geq 2a$. Theo (1) với $x = \frac{y-a}{ay}$ (khi đó $x > 0$), ta có :

$$f\left(\frac{y-a}{ay}+f(y)\right)=\frac{y}{y\frac{y-a}{ay}+1}=a.$$

Mặt khác $f\left(\frac{x-a}{ax}+f(x)\right)=\frac{x}{\frac{x-a}{ax}x+1}=a.$

Do vậy $f\left(\frac{y-a}{ay}+f(y)\right)=f\left(\frac{x-a}{ax}+f(x)\right)$ $\forall x>0$ và $y\geq 2a.$

Vì f là nghịch biến trên $\mathbb{R}$, nên từ hệ thức trên ta thu được

$$\frac{y-a}{ay}+f(y)=\frac{x-a}{ax}+f(x),\quad \forall x>0,\ \forall y\geq 2a$$

$$f(y)-\frac{1}{y}=f(x)-\frac{1}{x},\quad \forall x>0, \forall y\geq 2a \tag{5}$$

Từ (5) suy ra $f(x)-\frac{1}{x}=C_a,\quad \forall x\geq 2a.$

Ta chứng minh rằng C_a là hằng số không phụ thuộc a.

Thật vậy giả sử tồn tại $0<a_1<a_2$, ta có

$$f(x)=\frac{1}{x}+C_{a_1},\quad \forall x\geq 2a_1$$

$$f(x)=\frac{1}{x}+C_{a_2},\quad \forall x\geq 2a_2.$$

Từ đó nếu $x\geq 2\max(a_1, a_2)$, thì suy ra $C_{a_1}=C_{a_2}$. Vì lẽ đó ta đi đến với mọi $x\geq 2a$, thì

$$f(x)=\frac{1}{x}+C, \text{ ở đây } C \text{ là hằng số.}$$

Mặt khác do $a>0$ tuỳ ý, nên ta có

$$f(x)=\frac{1}{x}+C, \text{ với } x>0.$$

Mặt khác ta cần có $f(x)>0\quad \forall x>0$, do đó $C\geq 0$. Trong điều kiện thay $x=y=1$, ta có

$$f(1+f(1))=\frac{1}{2}$$

hay $\dfrac{1}{1+f(1)}+C=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+1+C}+C=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{C+2}+C=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1+C^2+2C=\dfrac{1}{2}(C+2)$

$\Leftrightarrow 2+2C^2+4C=C+2$

$\Leftrightarrow 2C^2+3C=0$

Do $C\geq 0 \Rightarrow C=0$

Từ đó đi đến $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Thử lại thấy $f(x)=\dfrac{1}{x}$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra, và đó là hàm duy nhất thoả mãn yêu cầu đề ra.

Bài 30 : Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f:(0\,;+\infty)\to(0\,;+\infty)$ sao cho $f^2(x)\geq f(x+y)\big(f(x)+y\big)$ với mọi $x, y>0$.

Bài giải

Giả sử tồn tại $f:(0\,;+\infty)\to(0\,;+\infty)$ sao cho

$$f^2(x)\geq f(x+y)\big(f(x)+y\big),\quad \forall x, \forall y>0. \tag{1}$$

Viết lại (1) dưới dạng sau :

$$f(x)-f(x+y)\geq f(x)-\frac{f^2(x)}{f(x)+y}=\frac{yf(x)}{f(x)+y}. \tag{2}$$

Do $f:(0\,;+\infty)\to(0\,;+\infty)$, nên từ (2) suy ra $f(x)$ là hàm giảm. Thật vậy nếu $x_2>x_1>0$. Khi đó theo (2) thì

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)-f\left[x_1+(x_2-x_1)\right]=\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{f(x_1)+(x_2-x_1)}>0$$

$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Với $\overline{x}>0$ cố định, hãy chọn n nguyên dương sao cho

$$nf(\overline{x}+1)\ge 1. \qquad (3)$$

(Do $f(\overline{x}+1)>0$ cố định, nên $n\ge \dfrac{1}{f(\overline{x}+1)}$, và chọn $n=\left[\dfrac{1}{f(\overline{x}+1)}\right]+1$,

ở đây qua $[\alpha]$ chỉ phần nguyên của số α).

Với $k=0,1,\ldots,n-1$, ta có

$$n\ge \frac{1}{f(\overline{x}+1)}\ge \frac{1}{f\left(\overline{x}+\dfrac{k+1}{n}\right)}.$$

(Chú ý do f là hàm giảm, nên

$$f(\overline{x}+1)\le f\left(\overline{x}+\frac{k+1}{n}\right) \text{ vì } \overline{x}+1>\overline{x}+\frac{k+1}{n}.$$

Từ đó ta có (dựa vào (2))

$$f\left(\overline{x}+\frac{k}{n}\right)-f\left(\overline{x}+\frac{k+1}{n}\right)=f\left(\overline{x}+\frac{k}{n}\right)-f\left[\left(\overline{x}+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\right]$$

$$\ge \frac{\dfrac{1}{n}f\left(\overline{x}+\dfrac{k}{n}\right)}{f\left(\overline{x}+\dfrac{k}{n}\right)+\dfrac{1}{n}}=\frac{f\left(\overline{x}+\dfrac{k}{n}\right)}{nf\left(\overline{x}+\dfrac{k}{n}\right)+1}$$

Lại để ý rằng $\dfrac{f\left(\overline{x}+\dfrac{k}{n}\right)}{nf\left(\overline{x}+\dfrac{k}{n}\right)+1}=\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{f\left(\overline{x}+\dfrac{k}{n}\right)}}\ge\dfrac{1}{2n}$ (theo (3))

Vì thế đi đến với mọi $k=0,1,\ldots,n-1$ ta có

$$f\left(\overline{x}+\frac{k}{n}\right)-f\left(\overline{x}+\frac{k+1}{n}\right)\ge\frac{1}{2n}. \qquad (4)$$

Cộng n vế bất đẳng thức dạng (4) (cho k chạy từ 0 đến $n-1$), ta thu được

$$f(\overline{x})-f(\overline{x}+1)\ge\frac{1}{2}, \text{ hay}$$

$$f(\overline{x}+1)\le f(\overline{x})-\frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Do (5) đúng với mọi $\overline{x} > 0$ tuỳ ý, nên với mọi m nguyên dương thì áp dụng liên tiếp (5) có

$$f(\overline{x}+2m) \le f(\overline{x}+2m-1) - \frac{1}{2} \le f(\overline{x}+2m) - 1 \le \ldots \le f(\overline{x}) - m.$$

Nhưng với mọi $\overline{x} > 0$, với mọi m nguyên dương, thì

$$f(\overline{x}+2m) \le f(\overline{x}) - m. \tag{6}$$

Hãy chọn $\overline{m}$ nguyên dương sao cho $\overline{m} \ge f(\overline{x})$. Khi đó ta có

$$f(\overline{x}+2\overline{m}) \le f(\overline{x}) - \overline{m} \le 0.$$

Điều này mâu thuẫn với $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

Vậy giả thiết phản chứng là sai, tức là không tồn tại hàm f thoả mãn các yêu cầu của đầu bài.

Đó là đ.p.c.m.

Bài 31 : Tìm tất cả các hàm số $f : [1\,;+\infty) \to [1\,;+\infty)$ thoả mãn điều kiện

$$f(xf(y)) = yf(x) \text{ với mọi } x,\ y \in [1\,;+\infty).$$

Bài giải

Giả sử $f : [1\,;+\infty) \to [1\,;+\infty)$ và thoả mãn điều kiện

$$f(xf(y)) = yf(x), \quad \forall x,\ y \in [1\,;+\infty). \tag{1}$$

Trong (1) cho $x = y = 1$, ta có $f(f(1)) = f(1)$. (2)

Trong (1) lấy $y = f(1)$, thì $\forall x \in [1\,;+\infty)$ có

$$f(xf(f(1))) = f(1).f(x). \tag{3}$$

Thay (2) vào (3) và có $f(xf(1)) = f(1).f(x)$ với mọi $x \ge 1$. (4)

Mặt khác $f(xf(1)) = f(x)$. (5)

Từ (4), (5) dẫn đến $f(1).f(x) = f(x)$.

Do $f : [1\,;+\infty) \to [1\,;+\infty)$, nên $f(x) \ne 0 \Rightarrow f(1) = 1$. (6)

Ta chứng minh rằng nếu $y > 1$, thì $f(y) > 1$. Nếu không phải như thế thì tồn tại $y_0 > 1$ sao cho $f(y_0) = 1 \Rightarrow f(f(y_0)) = f(1) = 1$. (7)

Chú ý rằng $f\left(f\left(y_0\right)\right)=f\left(1.f\left(y_0\right)\right)=y_0 f(1)=y_0$. (8)

Từ (7), (8) suy ra $y_0=1$. Điều này mâu thuẫn với $y_0>1$.

Như thế ta đã chứng minh được $f(y)>1$ khi $y>1$. (9)

Ta lấy $x>y\geq 1$. Theo tính chất của hàm f, thì

$$f(x)=f\left(\frac{x}{y}y\right)=f\left(\frac{x}{y}f\left(f(y)\right)\right) \text{ (chú ý rằng } y=f\left(f(y)\right)\text{)}$$

$$=f(y).f\left(\frac{x}{y}\right)>f(y)$$

(chú ý là $x>y\geq 1 \Rightarrow \frac{x}{y}>1$, vì thế theo (9) có $f\left(\frac{x}{y}\right)>1$). Vậy f là hàm đồng biến trên $[1\,;+\infty)$

Ta sẽ chứng minh rằng $f(x)=x,\quad \forall x\in[1\,;+\infty)$.

Thật vậy nếu không phải như thế, tức là $\exists x_0\in[1\,;+\infty)$ sao cho $f(x_0)\neq x_0$.

- Nếu $f(x_0)>x_0 \Rightarrow f\left(f(x_0)\right)>f(x_0)$ (do f là đồng biến)

$$\Rightarrow x_0>f(x_0) \Rightarrow x_0>f(x_0)>x_0.$$

Điều vô lí này chứng tỏ $f(x_0)>x_0$ là sai.

- Nếu $f(x_0)<x_0 \Rightarrow f\left(f(x_0)\right)<f(x_0)$

$$\Rightarrow f(x_0)<x_0<f(x_0).$$

Ta lại dẫn đến mâu thuẫn. Vậy ta có $f(x)=x \quad \forall x\geq 1$.

Đảo lại hàm số $f(x)=x$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra. Vì lẽ đó $f(x)=x$ là hàm số duy nhất cần tìm.

Bài 32 : Cho $\mathbb{R}^*$ là tập hợp các số thực không âm. Hãy tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ sao cho thoả mãn các điều kiện sau :

1) $f\left(xf(y)\right)f(y)=f(x+y)$ với mọi $x,\ y\in\mathbb{R}^*$

2) $f(2)=0$

3) $f(x)\neq 0$ với mọi x mà $0\leq x<2$.

Bài giải

Giả sử $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ là hàm số thoả mãn mọi yêu cầu đề ra.

Trong điều kiện 1) thay $y = 2$, ta có (để ý rằng $f(2) = 0$)

$$f(x+2) = 0, \quad \forall x \geq 0. \tag{1}$$

Kết hợp (1) với điều kiện (3) như sau :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \geq 2. \tag{2}$$

Từ điều kiện 1) ta thấy với mọi $0 \leq x < 2$, thì (ở đây lấy $y = x$ và thay x bằng $2 - x$ do $0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 < 2 - x \leq 0$)

$$f\big((2-x)f(x)\big)f(x) = f(2-x+x) = f(2) = 0. \tag{3}$$

Do $x < 2$, nên $f(x) \neq 0$, vì thế từ (3) suy ra

$$f\big((2-x)f(x)\big) = 0. \tag{4}$$

Từ (2) (4), ta đi đến $(2-x)f(x) \geq 2$. (5)

Vì $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, nên $f(x) \geq 0$, mà $f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) > 0$. Do vậy từ (5) ta có

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{2-x}{2}. \tag{6}$$

Lấy x, y sao cho $0 \leq x < y < 2$. Khi đó từ (1) với chú ý rằng thay y bởi x và x bởi $y - x$ (chú ý là $y - x > 0$), và có

$$f\big((y-x)f(x)\big)f(x) = f(y-x+x) = f(y). \tag{7}$$

Chú ý rằng do $y < 2$, nên $f(y) \neq 0$. Vì lẽ đó từ (7) có

$$f\big((y-x)f(x)\big) \neq 0.$$

Lại theo (2) suy ra $(y-x)f(x) < 2$. (8)

Do $0 \leq x < 2$, nên $f(x) > 0$. Vì lẽ đó (8) có thể viết dưới dạng

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{y-x}{2}. \tag{9}$$

Từ (6), (9) suy ra với mọi x, y mà $0 \leq x < y < 2$, ta có

$$\frac{y-x}{2} < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{2-x}{2}. \tag{10}$$

Chú ý rằng (10) đúng với mọi $0 \le x < y < 2$, nên suy ra

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{2-x}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{2-x} \text{ với mọi } 0 \le x < 2.$$

Kết hợp với (2) có

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{2}{2-x} & \text{khi } 0 \le x < 2 \\ 2, & \text{khi } x \ge 2. \end{cases} \qquad (11)$$

Đảo lại nếu $f(x)$ có dạng (11) thì dễ dàng thấy rằng nó thoả mãn yêu cầu đầu bài. Vậy hàm số có dạng (11) là hàm số duy nhất thoả mãn mọi yêu cầu của đề bài.

Bài 33 : Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) = \max_{y\in\mathbb{R}} \{xy - f(y)\}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Bài giải

Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm cần tìm, tức là

$$f(x) = \max_{y\in\mathbb{R}} \{xy - f(y)\}.$$

Nói riêng khi lấy $y = x$, ta có $f(x) \ge x^2 - f(x)$

$$\Rightarrow f(x) \ge \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in R. \qquad (1)$$

Mặt khác hiển nhiên ta có

$$xy - f(y) \le xy - \frac{y^2}{2} \text{ (do theo (1) thì } f(y) \ge \frac{y^2}{2}\text{)}.$$

Từ đó suy ra

$$f(x) = \max_{y\in\mathbb{R}} \left\{xy - \frac{y^2}{2}\right\}. \qquad (2)$$

Để ý rằng $\max_{y\in R} \left\{xy - \frac{y^2}{2}\right\} = \frac{x^2}{2}$. Do vậy từ (2) có

$$f(x) \le \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Bây giờ từ (1), (3) suy ra $f(x)=\frac{x^2}{2}$.

Đảo lại rõ ràng nếu $f(x)=\frac{x^2}{2}$, thì rõ ràng thoả mãn yêu cầu đề ra.

Tóm lại $f(x)=\frac{x^2}{2}$ là hàm duy nhất thoả mãn yêu cầu đề bài.

Chú ý : Xét hàm số $g(y)=-\frac{y^2}{2}+xy$.

Ta có $g'(y)=-y+x$.

Vì thế xét dãy biến thiên sau :

y		x	
g'(y)	+	0	–
g(y)	↗		↘

Từ đó ta có

$$\max_{y\in\mathbb{R}} g(y)=\max_{y\in\mathbb{R}}\left\{xy-\frac{y^2}{2}\right\}=g(x)=x^2-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}.$$

Vậy nhận xét được chứng minh.

Bài 34 : Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện sau :

1) $f(x+f(y))=y+f(x)$ với mọi $x,\ y\in\mathbb{R}$

2) Với mọi $x\neq 0$, tập hợp $\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}$ là tập hợp hữu hạn.

Bài giải

Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số thoả mãn yêu cầu đề ra. Trong giả thiết

$$f(x+f(y))=y+f(x),$$

ta lấy $x=y+f(0)$, và có

$$f(f(x))=f(f(y+f(0)))=f(0+f(y))=y+f(0)=x.$$

Như vậy ta đã chứng minh được $f(f(x))=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Vì lẽ đó với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ta có :

$$f(x+y) = f\big(x + f(f(y))\big) = f(y) + f(x). \qquad (1)$$

Lấy $\overline{x} \in \mathbb{R}$, tuỳ ý. Lấy mọi m nguyên dương, miễn là $m \neq -f(\overline{x})$. Dĩ nhiên tập các m như vậy là vô hạn. Theo tính chất của hàm f, ta có

$$\frac{f\big(m + f(\overline{x})\big)}{m + f(\overline{x})} = \frac{\overline{x} + f(m)}{m + f(\overline{x})} = \frac{\overline{x} + m f(1)}{m + f(\overline{x})}. \qquad (2)$$

(Chú ý rằng ta có $f(m) = f(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ lần}}) = m f(1)$ do đã sử dụng (1)).

Xét tập hợp sau đây

$$A = \left\{ \frac{f\big(m + f(\overline{x})\big)}{m + f(\overline{x})} : n \text{ nguyên dương } m \neq -f(\overline{x}) \right\}$$

Theo giả thiết A là tập hợp hữu hạn, trong khi đó số các m nguyên dương $\neq -f(\overline{x})$ là vô hạn, nên phải tồn tại các số nguyên dương m_1, m_2 khác với $-f(\overline{x})$ (và $m_1 \neq m_2$) sao cho ta có

$$\frac{f\big(m_1 + f(\overline{x})\big)}{m_1 + f(\overline{x})} = \frac{f\big(m_2 + f(\overline{x})\big)}{m_2 + f(\overline{x})}. \qquad (3)$$

Từ (2), (3), ta đi đến

$$\frac{\overline{x} + m_1 f(1)}{m_1 + f(\overline{x})} = \frac{\overline{x} + m_2 f(1)}{m_2 + f(\overline{x})}$$

$$\Leftrightarrow m_2 \overline{x} + m_1 m_2 f(1) + \overline{x} f(\overline{x}) + m_1 f(1) f(\overline{x}) =$$

$$= m_1 \overline{x} + m_1 m_2 f(1) + \overline{x} f(\overline{x}) + m_2 f(1) f(\overline{x})$$

$$\Leftrightarrow \overline{x}(m_2 - m_1) - (m_2 - m_1) f(1) f(\overline{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m_2 - m_1)\big(\overline{x} - f(1) f(\overline{x})\big) = 0.$$

Do $m_1 \neq m_2 \Rightarrow f(1) f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Đẳng thức trên đúng với mọi $\overline{x} \in \mathbb{R}$, nên ta có $\forall x \in \mathbb{R}$, thì

$$f(1) f(x) = x. \qquad (4)$$

Trong (4) lấy $x=1$, và có $\left(f(1)\right)^2=1 \Rightarrow f(1)=\pm 1$.

Thay lại vào (4) và có $f(x)=x$ hoặc $f(x)=-x$.

Thử lại thấy cả hai hàm $f(x)=x$ và $f(x)=-x$ thoả mãn yêu cầu đề ra. Tóm lại hàm cần tìm là $f(x)=x$ hoặc $f(x)=-x$.

Bài 35 : Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ và $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y\in\mathbb{R}$ ta có hệ thức sau :

$$f\left(x+g(y)\right)=xf(y)-yf(x)+g(x).$$

Bài giải

Giả sử $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hai hàm số thoả mãn hệ thức

$$f\left(x+g(y)\right)=xf(y)-yf(x)+g(x),\quad \forall x, y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Ta cần mệnh đề sau :

Mệnh đề phụ trợ : Phương trình $g(x)=0$ có nghiệm với $x\in\mathbb{R}$. (Chứng minh bổ đề ở cuối bài).

Theo mệnh đề trên tồn tại $\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho

$$g(\alpha)=0. \tag{1}$$

Trong hệ thức (1) lấy $y=\alpha$ và có

$$f\left(x+g(\alpha)\right)=xf(\alpha)-\alpha f(x)+g(x). \tag{*}$$

Do $g(\alpha)=0$, nên từ trên suy ra

$$f(x)=xf(\alpha)-\alpha f(x)+g(x),$$

hay $g(x)=(\alpha+1)f(x)-f(\alpha)x,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$ (2)

Từ (*), (2) suy ra

$f\left(x+g(y)\right)=xf(y)-yf(x)+(\alpha+1)f(x)-xf(\alpha),$

hay $f\left(x+g(y)\right)=(\alpha+1-y)f(x)+\left(f(y)-f(\alpha)\right)x,\ \forall x, y\in\mathbb{R}.$ (3)

Trong (3) đặt $y=\alpha+1$ và có

$$f\left(x+g(\alpha+1)\right)=\left(f(\alpha+1)-f(\alpha)\right)x. \tag{4}$$

Đặt $n=g(\alpha+1)$; $m=f(\alpha+1)-f(\alpha)$, từ (4) suy ra

$$f(n+x)=mx. \tag{5}$$

Do m, n là các hằng số, nên từ (5) suy ra $f(x)$ là hàm số tuyến tính. Vì lẽ đó kết hợp với (2), thì $g(x)$ cũng là hàm tuyến tính.

Bây giờ đặt $\begin{cases} f(x)=tx+r \\ g(x)=px+q, \end{cases}$

ở đây p, q, t, r là các hằng số (do f và g là các hàm số tuyến tính). Thay lại vào (1) và có $\forall x, y \in \mathbb{R}$, thì

$$t(x+g(y))+r=x(ty+r)-y(tx+r)+px+q$$

$$\Rightarrow tx+t(py+q)+r=txy+xr-tyx-yr+px+q$$

$$\Rightarrow tx+tpy+tq+r=txy+xr-tyx-yr+px+q$$

$$\Rightarrow (t-r-p)x+(tp+r)y+tq+r-q=0. \tag{6}$$

Vì (6) đúng $\forall x, y \in \mathbb{R}$, nên ta có

$$\begin{cases} t-r-p=0 \\ tp+r=0 \\ tq+r-q=0 \end{cases}$$

Từ hệ trên suy ra

$$t=\frac{p}{p+1}\,;\, r=\frac{-p^2}{p+1}\,;\, q=-p^2, \text{ với } p\neq -1.$$

Như vậy

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{p}{p+1}x-\dfrac{p^2}{p+1} \\ g(x)=px-p^2 \end{cases}$$

với $p \neq -1$.

Thử lại thấy hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra. Đó chính là tất cả các hàm cần tìm.

Chú ý : Bây giờ ta chứng minh mệnh đề phụ trợ như sau :

1) Nếu $f(0)=0$. Khi đó trong (1) chọn $y=0$, ta có

$$f(x+g(0))=xf(0)-0.f(x)+g(x)$$

$$\Rightarrow f\left(x+g(0)\right)=g(0). \tag{7}$$

Vì (7) đúng $\forall x\in\mathbb{R}$, nên trong (7) thay $x=-g(0)$ và có

$$f(0)=g(0)\Rightarrow g(0)=0.$$

Vậy kết luận của mệnh đề phụ trợ đúng trong trường hợp này.

2) Nếu $f(0)=b\neq 0$. Trong (1) chọn $x=0$, ta có

$$f\left(g(y)\right)=-yf(0)+g(0).$$

Đặt $g(0)=a$, khi đó ta có

$$f\left(g(y)\right)=a-by,\ \ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Vì $b\neq 0$, nên từ (8) suy ra g là đơn ánh và f là toàn ánh. Thật vậy giả sử $g(y_1)=g(y_2)$. Theo (8) có

$$a-by_1=f\left(g(y_1)\right)=f\left(g(y_2)\right)=a-by_2$$

$$\Rightarrow b(y_1-y_2)=0\Rightarrow y_1=y_2 \text{ (do } b\neq 0\text{)}.$$

Vậy g là đơn ánh. Lấy $c\in\mathbb{R}$ tuỳ ý. Do $b\neq 0$, nên tồn tại $\overline{y}\in\mathbb{R}$ sao cho

$$a-b\overline{y}=c.$$

Theo (8), ta được $f\left(g(\overline{y})\right)=a-b\overline{y}=c$.

Đặt $\overline{x}=g(\overline{y})$, vậy $f(\overline{x})=c$. Như thế f là toàn ánh. Nhận xét được chứng minh.

Trong (1) thay x bởi $g(x)$, và có

$$f\left(g(x)+g(y)\right)=g(x)f(y)-yf\left(g(x)+g\left(g(x)\right)\right). \tag{9}$$

Do tính đối xứng, nên cũng có

$$f\left(g(y)+g(x)\right)=g(y)f(x)-af\left(g(y)+g\left(g(y)\right)\right). \tag{10}$$

Từ (8), (9), (10), đi đến $\forall x,\ y\in\mathbb{R}$, thì

$$g(x)f(y)-ay+g\left(g(x)\right)=g(y)f(x)-ax+g\left(g(y)\right). \tag{11}$$

Do f toàn ánh, nên nói riêng tồn tại $x_1 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_1) = 0$. Trong (11) lấy $y = x_1$ và có

$$-a x_1 + g(g(x)) = g(x_1) f(x) - a x + g(x_1)$$

$$\Rightarrow g(g(x)) = k f(x) - a x + g(g(x_1)) + a x_1,$$

với $k = g(x_1)$.

Đặt $d = g(g(x_1)) + a x_1$, ta có

$$g(g(x)) = k f(x) - a x + d. \tag{12}$$

Từ (11) (12) có

$$g(x) f(y) - ay + k f(x) - a x + d = g(y) f(x) - a x + k f(y) - ay + d$$

hay $g(x) f(y) + k f(x) = g(y) f(x) + k f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$ (13)

Trong (13) cho $y = 0$, và có

$$b g(x) + k f(x) = a f(x) + k b. \tag{14}$$

(Chú ý là $f(0) = b$; còn $g(0) = a$).

Từ (14) và chú ý là $b \neq 0$, nên có

$$g(x) = \frac{a-k}{b} f(x) + k. \tag{15}$$

Ta có $a - k = g(0) - g(x_1)$. Chú ý rằng $f(x_1) = 0$ mà $f(0) = b \neq 0$. Do đó $x_1 \neq 0$. Do g là đơn ánh mà $x_1 \neq 0 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_0) \Rightarrow a - k \neq 0$.

Vì lẽ đó kết hợp với $f(x)$ là toàn ánh, nên từ (15) suy ra $g(x)$ cũng là toàn ánh. Nói riêng tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ để cho $g(\alpha) = 0$.

Mệnh đề phụ trợ được chứng minh. Bài toán được giải hoàn toàn.

Bài 36 : Cho $S = \{x : x \in \mathbb{R}, x > -1\}$. Tìm tất cả các hàm $f : S \to S$ sao cho nó thoả mãn hai điều kiện sau :

1) $f(x + f(y) + x f(y)) = y + f(x) + y f(x)$ với mọi $x, y \in S$

2) Hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$ tăng thực sự trên các khoảng $-1 < x < 0$: $0 < x < +\infty$.

Bài giải

Giả sử $f : S \to S$ là hàm số thoả mãn mọi yêu cầu đề bài.

Từ điều kiện 2) suy ra phương trình $f(x) = x$ với $x \in S$ cùng lắm là có 3 nghiệm $x_1 \in (-1 ; 0)$; $x_2 = 0$ và $x_3 \in (0 ; +\infty)$.

Giả sử $x_1 \in (-1 ; 0)$ là nghiệm của phương trình $f(x) = x$, tức $f(x_1) = x_1$. Trong điều kiện 1) thay $x = y = x_1$ ta có

$$f\left(x_1 + f(x_1) + x_1 f(x_1)\right) = x_1 + f(x_1) + x_1 f(x_1)$$

hay $f\left(x_1^2 + 2x_1\right) = x_1^2 + 2x_1$. (1)

Do $-1 < x_1 < 0 \Rightarrow -1 < x_1^2 + 2x_1 < 0$.

Vì thế $x_1^2 + 2x_1$ cũng là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ trong $(-1 ; 0)$. Theo lập luận trên suy ra

$$x_1^2 + 2x_1 = x_1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_1 = 0.$$

Nhưng $x_1^2 + x_1 > 0$ khi $-1 < x_1 < 0$.

Điều vô lí này chứng tỏ rằng trong khoảng $(-1 ; 0)$, phương trình $f(x) = x$ cũng vô nghiệm. Lập luận hoàn toàn tương tự suy ra phương trình $f(x) = x$, trên khoảng $(0 ; +\infty)$ cũng vô nghiệm.

Vì thế phương trình $f(x) = x$ nếu có nghiệm trên S thì nghiệm chỉ có thể là $x = 0$. Trong hệ thức 1) lấy $y = x$; khi đó với mọi $x \in S$, ta có

$$f\left(x + f(x) + xf(x)\right) = x + f(x) + xf(x). \quad (2)$$

Hệ thức (2) chứng tỏ rằng với mọi $x \in S$, thì $x + f(x) + x f(S)$ đều là nghiệm của phương trình

$$f(x) = x.$$

Do $f(x) = x$ trên S chỉ có thể có nghiệm là $x = 0$. Vì lẽ đó với mọi $x \in S$, thì

$$x + f(x) + xf(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x)(1+x)+x=0.$$

Do $x+1\neq 0 \Rightarrow f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$.

Thử lại hàm số $f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$ quả là hàm số từ S vào S và thoả mãn mọi điều kiện đề ra. Vì lẽ đó bài toán có nghiệm duy nhất là

$$f(x)=-\frac{x}{1+x}.$$

Bài 37 : Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho

$$f\left(x^2+f(y)\right)=y+\left(f(x)\right)^2 \text{ với mọi } x,\ y\in\mathbb{R}.$$

Bài giải

Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số thoả mãn hệ thức

$$f\left(x^2+f(y)\right)=y+\left(f(x)\right)^2,\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Trong (1) chọn $x=y=0$, và có

$$f\left(f(0)\right)=\left(f(0)\right)^2.$$

Đặt $t=f(0)$, theo trên ta có $t^2=f(t)$. (2)

Thay trong (1), $y=0$ và có

$f\left(x^2+f(0)\right)=\left(f(x)\right)^2$, hay $\forall x\in\mathbb{R}$, thì

$$f\left(x^2+t\right)=\left(f(x)\right)^2. \tag{3}$$

Bây giờ trong (1) lấy $x=0,\ y=x$ và có

$f\left(f(x)\right)=x+\left(f(0)\right)^2$, hay

$$f\left(f(x)\right)=x+t^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Dựa vào (2), thì

$$f\left(\left(f(1)\right)^2+t^2\right)=f\left(\left(f(1)\right)^2+f(t)\right).$$

Thay trong (1) x bằng $f(1)$ và y bởi t, thì

$$f\left(\left(f(1)\right)^2+f(t)\right)=t+\left(f\left(f(1)\right)\right)^2.$$

Từ đó có

$$f\left(t^2+\left(f(1)\right)^2\right)=t+\left(f\left(f(1)\right)\right)^2. \qquad (5)$$

Trong (4) thay $x=1$ và có $f\left(f(1)\right)=1+t^2$

$$\Rightarrow \left(f\left(f(1)\right)\right)^2=\left(1+t^2\right)^2. \qquad (6)$$

Bây giờ kết hợp (5), (6) và có

$$f\left(t^2+\left(f(1)\right)^2\right)=1+t+2t^2+t^4. \qquad (7)$$

Mặt khác ta có theo (3) $\left(f(1)\right)^2=f(1+t)$, vì thế

$$f\left(t^2+\left(f(1)\right)^2\right)=f\left(t^2+f(1+t)\right).$$

Thay trong (1) x bằng t và y bởi $1+t$, ta có

$f\left(t^2+f(1+t)\right)=1+t+\left(f(t)\right)^2=1+t+t^4$ (do (2) thì $t^2=f(t)$).

Vì thế đi đến

$$f\left(t^2+\left(f(1)\right)^2\right)=t^4+t+1. \qquad (8)$$

Bây giờ kết hợp (7) (8) và có $1+t+2t^2+t^4=1+t+t^4$, hay $t=0$. Như thế ta đã chứng minh được *kết quả quan trọng* sau đây :

$$f(0)=0. \qquad (9)$$

Trong (1) lấy $y=x,\ x=0$ rồi sử dụng (9) ta có

$$f\left(f(x)\right)=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad (10)$$

Trong (1) lại lấy $y=0$, và theo (9) có

$$f\left(x^2\right)=\left(f(x)\right)^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad (11)$$

Lấy $\bar{y}\in\mathbb{R}$. Đặt $z=f\left(\bar{y}\right)$. Theo (10) thì

$$\bar{y}=f\left(f\left(\bar{y}\right)\right)=f(z).$$

Khi đó theo (1) có

$$f\left(x^2+\bar{y}\right)=f\left(x^2+f(z)\right)=z+\left(f(x)\right)^2=f\left(\bar{y}\right)+\left(f(x)\right)^2.$$

Như vậy ta chứng minh được hệ thức sau :

$$f\left(x^2+y\right)=f(y)+\left(f(x)\right)^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Lấy $\overline{x}>0$ tuỳ ý. Đặt $z^2=\overline{x}$, khi đó ta có

$$f\left(\overline{x}+y\right)=f\left(z^2+y\right)=f(y)+\left(f(z)\right)^2=f(y)+f\left(z^2\right) \text{ (theo (1))}$$

$$\Rightarrow f\left(\overline{x}+y\right)=f(y)+f\left(\overline{x}\right).$$

Vậy ta cũng có hệ thức sau :

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Trong (13) lấy $y=-x$, ta có

$$f(0)=f(x)+f(-x).$$

Do (9) suy ra $f(-x)=-f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ (14)

Từ (14) ta có sau khi kết hợp với (13)

$$f(x-y)=f(x)-f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Lấy $x \in \mathbb{R}$ tuỳ ý. Đặt $y=f(x)$. Ta chứng minh rằng $y=x$. Thật vậy nếu trái lại thì có hai khả năng sau :

- Nếu $y>x$. Đặt $z=y-x$. Ta có

$$f(z)=f(y-x)=f(y)-f(x) \text{ (theo (5)).}$$

Do $y=f(x) \Rightarrow f(y)=f\left(f(x)\right)=x$ (theo (10)).

Vì thế có $f(z)=x-y=-z.$

- Nếu $y<x$. Đặt $z=x-y$. Ta có

$$f(z)=f(x-y)=f(x)-f(y)=y-x=-z.$$

Tóm lại trong cả hai trường hợp trên nếu $z>0$, thì $f(z)=-z<0$. Chọn w sao cho $w^2=z$. Khi ấy

$$f(z)=f\left(w^2\right)=\left(f(w)\right)^2 \text{ (theo (11)).}$$

Từ đó suy ra $\left(f(w)\right)^2<0$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ giả thiết phản chứng là sai, tức là :

$$f(x)=x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đảo lại hàm $f(x)=x$ thoả mãn mọi yêu cầu đề ra. Do vậy $f(x)=x$ là hàm duy nhất cần tìm.