NGUYỄN VĂN MẬU

BẤT ĐẲNG THỨC

ĐỊNH LÝ VÀ ÁP DỤNG

Prof.Dr.Hab. **Nguyen Van Mau**
Hanoi University of Science,
Faculty of Maths-Mechs-Informatics
334 Nguyen Trai Str., Thanh Xuan, Hanoi
E-mail: *nvmau@hn.vnn.vn*

HÀ NỘI 2005

Lời nói đầu

Các vấn đề liên quan đến bất đẳng thức là một bộ phận quan trọng của giải tích và đại số. Nhiều dạng toán của hình học, lượng giác và nhiều môn học khác cũng đòi hỏi giải quyết các vấn đề về ước lượng, cực trị và tối ưu, ... Các học sinh và sinh viên thường phải đối mặt với nhiều dạng toán loại khó liên quan đến chuyên đề này.

Bất đẳng thức có vị trí đặc biệt trong toán học không chỉ như là những đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng vai trò như là một công cụ đắc lực của các mô hình toán học liên tục cũng như các mô hình toán học rời rạc trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn, ...

Trong hầu hết các kỳ thi học sinh giỏi toán quốc gia, thi Olympic Toán khu vực và quốc tế, thi Olympic toán sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng, các bài toán liên quan đến bất đẳng thức cũng hay được đề cập và thường thuộc loại khó hoặc rất khó. Các bài toán về ước lượng và tính giá trị cực trị (cực đại, cực tiểu) của các tổng, tích cũng như các bài toán xác định giới hạn của một số biểu thức cho trước thường có mối quan hệ ít nhiều đến các tính toán, ước lượng (bất đẳng thức) tương ứng.

Lý thuyết bất đẳng thức và đặc biệt, các bài tập về bất đẳng thức rất phong phú và cực kỳ đa dạng. Hiện có hàng trăm giáo trình cơ bản và sách chuyên đề, tham khảo về đại số, giải tích, số học và hình học trình bày lý thuyết và bài tập về bất đẳng thức. Gần đây, số lượng các sách tham khảo và chuyên đề về bất đẳng thức được rất nhiều tác giả viết và khai thác theo những chủ đề và các quan điểm phân loại khác nhau. Tuy vậy, các tài liệu về bất đẳng thức như là một chuyên đề chọn lọc cho giáo viên và học sinh hệ Chuyên Toán bậc trung học phổ thông thì chưa có nhiều, còn chưa thể hiện được đầy đủ hệ thống các ý tưởng cơ bản, cách thức tiếp cận và một số hướng ứng dụng theo các dạng toán cũng như phương pháp giải điển hình.

Để đáp ứng cho nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi và nhằm đáp ứng yêu cầu sáng tạo các dạng bài tập mới về chuyên đề bất đẳng thức và các bài toán cực trị, chúng tôi viết cuốn sách nhỏ này nhằm cung cấp một số cơ sở dữ liệu cơ bản về bất đẳng thức và một số vấn đề đại số liên quan đến bất đẳng thức. Đồng thời, cũng cho phân loại một số dạng toán về bất đẳng thức theo nhận dạng cũng như thuật toán để giải chúng. Đây cũng là bài giảng mà tác giả đã bồi dưỡng cho các giáo viên giảng dạy chuyên toán và cho học sinh, sinh viên các đội tuyển thi Olympic Toán quốc gia, khu vực và quốc tế. Một số dạng bài tập được chọn lọc là các đề ra của các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và Olympic Toán quốc tế. Một số các bài toán minh hoạ khác được trích từ các tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Toán học trong nhà trường, Kvant, Mathematica, các sách giáo khoa và sách giáo trình cơ bản, các đề thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế cũng như một số đề thi Olympic Toán sinh viên trong những năm gần đây (xem [1]-[19]).

Cuốn sách gồm phần mở đầu và 9 chương và phụ lục.

Chương 1. Bất đẳng thức Cauchy
Chương 2. Hàm đơn điệu và tựa đơn điệu
Chương 3. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và nhân
Chương 4. Hàm lồi, lõm và tựa lồi lõm
Chương 5. Bất đẳng thức Karamata
Chương 6. Sắp thứ tự một số bộ dãy có trọng
Chương 7. Bất đẳng thức hàm
Chương 8. Bất đẳng thức trong dãy vô hạn
Chương 9. Bất đẳng thức tích phân
Phụ lục. Bảng các bất đẳng thức liên qua

Trong tài liệu này, chúng tôi đã sử dụng một số kỹ thuật và bài tập trích từ các báo cáo đăng trong Kỷ yếu Hội nghị khoa học về chuyên đề Bất đẳng thức ([17]-[19]). Ngoài ra, chúng tôi cũng đưa vào xét một số vấn đề liên quan đến hệ thống ứng dụng như là một cách tiếp cận của phương pháp nhằm giúp các độc giả hiểu sâu sắc hơn cơ sở và cấu trúc của lý thuyết bất đẳng thức.

Tuy nhiên, trong tài liệu này không đề cập nhiều và sâu đến các bài toán có nội dung liên quan đến kiến thức hiện đại của giải tích cũng như không đề cập đến những bất đẳng thức và các bài toán cực trị trên các tập rời rạc có ràng buộc phức tạp của lý thuyết quy hoạch và tối ưu. Các dạng bất đẳng thức số học và hình học cũng không có mặt trong tài liệu này.

Cuốn sách dành cho học sinh năng khiếu Toán học bậc trung học phổ thông, các sinh viên và học viên cao học, một số đề mục được viết dành riêng cho các thầy giáo và cô giáo trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi Toán. Trong cuốn sách này, có trình bày một số kết qủa mới chưa có trong các sách hiện hành, chủ yếu lấy từ kết quả của các seminar khoa học của Khối Chuyên Toán - Tin, Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội và một số báo cáo đẳng trong Kỷ yếu Hội Nghị Khoa Học "Các chuyên đề Toán chọn lọc của Hệ THPT Chuyên", nên đòi hỏi độc giả cũng phải giành khá nhiều thời gian tìm hiểu thì mới lĩnh hội được đầy đủ ý tứ và cách thức tiếp cận của phương pháp. Tuy nhiên, bạn đọc cũng có thể bỏ qua các đề mục mới để tập trung đọc các phần có nội dung quen thuộc trước rồi sau đó hãy quay lại phần kiến thức nâng cao. Trong cuốn sách này, tên gọi của các bất đẳng thức cổ điển được viết theo cách gọi truyền thống lấy từ các sách chuyên khảo và chuyên đề hiện hành và không phiên âm tên riêng ra tiếng Việt.

Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới PGS TS Trần Huy Hổ, PGS Nguyễn Thuỷ Thanh và các thành viên Seminar Giải tích - Đại số cũng như seminar Phương pháp Toán Sơ cấp, đã đọc bản thảo và cho nhiều ý kiến đóng góp quý báu cho cuốn sách được hoàn chỉnh. Tác giả sẽ vô cùng biết ơn các bạn đọc có ý kiến đóng góp về nội dung cũng như cách thức trình bày của cuốn sách. Mọi góp ý xin gửi về địa chỉ: Nhà xuất bản Giáo dục, 81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội.

Hà Nội, ngày 10 tháng 8 năm 2005

Tác giả

Nguyễn Văn Mậu

Prof.Dr.Hab. **Nguyen Van Mau**
Hanoi University of Science
Faculty of Maths-Mechs-Informatics
334 Nguyen Trai Str., Thanh Xuan, Hanoi
E-mail: *nvmau@hn.vnn.vn*

Chương 1

Bất đẳng thức Cauchy

1.1 Tam thức bậc hai

Bất đẳng thức cơ bản và cũng là quan trọng nhất trong chương trình đại số bậc trung học phổ thông chính là bất đẳng thức dạng sau đây

$$x^2 \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Gắn với bất đẳng thức (1.1) là bất đẳng thức dạng sau

$$(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

hay

$$x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2x_1x_2, \ \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$.

Bất đẳng thức (1.1) là dạng bậc hai đơn giản nhất của bất đẳng thức bậc hai mà học sinh đã làm quen ngay từ chương trình lớp 9. Định lý Viete đóng vai trò rất quan trọng trong việc tính toán và ước lượng giá trị của một số biểu thức dạng đối xứng theo các nghiệm của phương trình bậc hai tương ứng. Đặc biệt, trong chương trình Đại số lớp 10, mảng bài tập về ứng dụng định lý (thuận và đảo) về dấu của tam thức bậc hai là công cụ hữu hiệu của nhiều dạng toán ở bậc trung học phổ thông.

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$. Khi đó

$$af(x) = \Big(ax + \frac{b}{2}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4},$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$. Từ đẳng thức này, ta có kết quả quen thuộc sau.

Định lý 1. *Xét tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.

i) Nếu $\Delta < 0$ *thì* $af(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Nếu $\Delta = 0$ *thì* $af(x) \geqslant 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $x = -\dfrac{b}{2a}$.

iii) Nếu $\Delta > 0$ *thì* $af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2)$ *với*

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}. \tag{1.2}$$

Trong trường hợp này, $af(x) < 0$ *khi* $x \in (x_1, x_2)$ *và* $af(x) > 0$ *khi* $x < x_1$ *hoặc* $x > x_2$.

Ta nhắc lại kết quả sau.

Định lý 2 (Định lý đảo). *Điều kiện cần và đủ để tồn tại số* α *sao cho* $af(\alpha) < 0$ *là* $\Delta > 0$ *và* $x_1 < \alpha < x_2$, *trong đó* $x_{1,2}$ *là các nghiệm của* $f(x)$ *xác định theo* (1.2).

Nhận xét rằng, các định lý trên đều được mô tả thông qua bất đẳng thức (kết quả so sánh biệt thức Δ với 0). Định lý sau đây cho ta tiêu chuẩn nhận biết, thông qua biểu diễn hệ số, khi nào thì tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, có nghiệm.

Định lý 3. *Tam thức bậc hai* $f(x) = 3x^2 + 2bx + c$ *có nghiệm (thực) khi và chỉ khi các hệ số* b, c *có dạng*

$$\begin{cases} b = \alpha + \beta + \gamma \\ c = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \end{cases} \tag{1.3}$$

Proof. Điều kiện đủ là hiển nhiên vì theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned} \Delta' =& b^2 - 3c = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ =& \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ =& \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2 + \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Điều kiện cần. Giả sử phương trình (10) có nghiệm thực x_1, x_2. Xét đa thức bậc ba

$$F(x) = (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma).$$

Khi đó

$$F'(x) = 3x^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

Chọn $\alpha = \beta = -x_1$, ta thu được

$$F(x) = (x - x_1)^2(x + \gamma).$$

Tiếp theo, cần chọn γ sao cho $F'(x) \equiv f(x)$. Đồng nhất thức hệ số, ta nhận được

$$\gamma = \frac{2x_2 - x_1}{2}.$$

$\square$

Tiếp theo, trong chương này, ta xét các dạng toán cơ bản về bất đẳng thức và cực trị có sử dụng tính chất của tam thức bậc hai.

Xét đa thức thuần nhất bậc hai hai biến

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad a \neq 0,$$
$$\Delta := b^2 - 4ac.$$

Khi đó, nếu $\Delta \leqslant 0$ thì $aF(x,y) \geqslant 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Vậy khi $b^2 \leqslant 4ac$ và $a < 0$ thì hiển nhiên

$$ax^2 + cy^2 \geqslant |bxy|, \ \forall x, y.$$

Trường hợp riêng, khi $a = c = 1$, $b = \pm 2$ thì ta nhận lại được kết quả

$$x^2 + y^2 \geqslant 2|xy|$$

hay

$$\frac{u+v}{2} \geqslant \sqrt{uv}, \ u, v \geqslant 0.$$

Về sau, ta sử dụng các tính chất của dạng phân thức bậc hai

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$$

với điều kiện

$$a_2 > 0, \ f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

để tìm cực trị của một số dạng toán bậc hai.

Bài toán 1. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$$

với điều kiện

$$a_2 > 0, \ f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải.

Nhận xét rằng khi $x = 0$ thì $y(0) = \dfrac{c_1}{c_2}$ và khi $x \to \infty$ thì $y \to \dfrac{a_1}{a_2}$. Tiếp theo, ta xét các giá trị $y \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ và $y \neq \dfrac{a_1}{a_2}$.

Giả sử y là một giá trị của biểu thức, $y \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ và $y \neq \dfrac{a_1}{a_2}$. Khi đó phương trình tương ứng

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} = y$$

phải có nghiệm, hay phương trình

$$(a_2y - a_1)x^2 + (b_2y - b_1)x + (c_2y - c_1) = 0 \tag{1.4}$$

phải có nghiệm.

Do (1.4) là phương trình bậc hai nên điều này tương đương với

$$\Delta = (b_2y - b_1)^2 - 4(a_2y - a_1)(c_2y - c_1) \geqslant 0$$

hay

$$g(y) := (b_2^2 - 4a_2c_2)y^2 + 2(b_1b_2 + 2a_2c_1 + 2a_1c_2)y + b_1^2 - 4a_1c_1 \geqslant 0$$

phải có nghiệm. Vì $g(y)$ có $b_2^2 - 4a_2c_2 < 0$ nên theo Định lý đảo của tam thức bậc hai, thì

$$\Delta' = (b_1b_2 + 2a_1c_2 + a_2c_1)^2 - (4a_1c_1 - b_1^2)(4a_2c_2 - b_2^2) \geqslant 0. \tag{1.5}$$

và

$$y_1 \leqslant y \leqslant y_2,$$

với

$$y_{1,2} = \frac{b_1b_2 + 2a_2c_1 + 2a_1c_2 \pm \sqrt{\Delta'}}{b_2^2 - 4a_2c_2},$$

và Δ' được tính theo công thức (1.5).

Suy ra $\max y = y_2$ và $\min y = y_1$, đạt được khi ứng với mỗi j ($j = 1, 2$), xảy ra đồng thời

$$\begin{cases} \Delta = (b_2y_j - b_1)^2 - 4(a_2y_j - a_1)(c_2y_j - c_1) = 0, \\ x_j = -\dfrac{1}{2}\dfrac{b_2y_j - b_1}{a_2y_j - a_1}. \end{cases}$$

Xét một vài ví dụ minh hoạ sau đây.

Ví dụ 1. *Cho x, y là các số thực sao cho*

$$2x^2 + y^2 + xy \geqslant 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = x^2 + y^2.$$

Giải.

Đặt $2x^2 + y^2 + xy = a$, $a \geqslant 1$. Khi đó

$$\frac{M}{a} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2 + y^2 + xy}$$

1) Nếu $y = 0$ thì $\dfrac{M}{a} = \dfrac{1}{2}$.

2) Nếu $y \neq 0$ suy ra

$$\frac{M}{a} = \frac{t^2 + 1}{2t^2 + t + 1}, \quad t = \frac{x}{y}$$

Ta chỉ cần xác định các giá trị $\dfrac{M}{a}$ sao cho phương trình

$$\frac{M}{a} = \frac{t^2 + 1}{2t^2 + t + 1}$$

có nghiệm.

Nghĩa là phương trình

$$\Big(2\frac{M}{a} - 1\Big)t^2 + \frac{M}{a}t + \frac{M}{a} - 1 = 0$$

có nghiệm. Thế thì biệt thức Δ phải không âm. Ta có

$$\Delta = \Big(\frac{M}{a}\Big)^2 - 4\Big(2\frac{M}{a} - 1\Big)\Big(\frac{M}{a} - 1\Big) \geqslant 0$$

hay

$$-7\Big(\frac{M}{a}\Big)^2 + 12\Big(\frac{M}{a}\Big) - 4 \geqslant 0.$$

Giải bất phương trình bậc hai này ta được

$$\frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} \leqslant \frac{M}{a} \leqslant \frac{6 + 2\sqrt{2}}{7}.$$

Suy ra

$$M \geqslant \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}a \geqslant \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} = M_0.$$

Vậy $\min M = \dfrac{6-2\sqrt{2}}{7}$, đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = M_1 y \\ 2x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = M_1 y \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{2}(1-2M_0)}{\sqrt{2-7M_0+7M_0^2}}, \end{cases}$$

với $M_1 = \dfrac{-M_0}{2(2M_0-1)}$.

Ví dụ 2. *Cho*

$$x^2 + y^2 + xy = 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^2 - xy + 2y^2.$$

Giải.

Ta có thể viết A dưới dạng

$$A = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

1) Nếu $y = 0$ thì $A = 1$.
2) Nếu $y \neq 0$ thì

$$A = \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + t + 1},\ \ t = \frac{x}{y}$$

Cần xác định A để phương trình

$$A = \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + t + 1}$$

có nghiệm. Điều đó tương đương với việc phương trình

$$(A-1)t^2 + (A+1)t + A - 2 = 0$$

có nghiệm, tức là

$$\Delta = (A+1)^2 - 4(A-1)(A-2) \geqslant 0.$$

Từ đó, ta được

$$\frac{7-2\sqrt{7}}{3} \leqslant A \leqslant \frac{7+2\sqrt{7}}{3}$$

Vậy $\max A = \dfrac{7+2\sqrt{7}}{3}$, đạt được khi

$$\begin{cases} x = \dfrac{A_2+1}{2(1-A_2)}y \\ x^2+y^2+xy=1 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \dfrac{A_2+1}{2(1-A_2)}y \\ y = \pm\dfrac{2(A_2-1)}{\sqrt{7-6A_2+3A_2^2}} \end{cases}$$

và $\min A = \dfrac{7-2\sqrt{7}}{3}$, đạt được khi

$$\begin{cases} x = \dfrac{A_1+1}{2(1-A_1)}y \\ x^2+y^2+xy=1 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \dfrac{A_1+1}{2(1-A_1)}y \\ y = \pm\dfrac{2(A_1-1)}{\sqrt{7-6A_1+3A_1^2}} \end{cases}$$

trong đó A_1, A_2 lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

Ví dụ 3. *Cho $x^2+y^2-xy=1$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức*

$$M = x^4+y^4-x^2y^2.$$

Giải. Từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned} 1 &= x^2+y^2-xy \geqslant 2xy-xy = xy \\ 1 &= (x+y)^2-3xy \geqslant -3xy \end{aligned}$$

Từ đó ta có $-\frac{1}{3} \leqslant xy \leqslant 1$. Mặt khác, từ giả thiết ta có $x^2+y^2 = 1+xy$ nên

$$\begin{aligned} x^4+y^4 &= -x^2y^2+2xy+1 \\ x^4+y^4-x^2y^2 &= -2t^2+2t+1, \quad t = xy \end{aligned}$$

Vậy cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của tam thức bậc hai

$$f(t) = -2t^2+2t+1; \quad -\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 1.$$

Ta có

$$\max M = f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{2},$$

đạt được khi và chỉ khi

$$xy = \frac{1}{2}, \text{ và } x^2+y^2-xy=1$$

hay là

$$(x,y) \in \left\{ \Big(\frac{\sqrt{5} \mp 1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2\sqrt{2}} \Big), \Big(-\frac{\sqrt{5} \mp 1}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2\sqrt{2}} \Big) \right\}$$

Vậy

$$\min M = f\Big(-\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{9},$$

đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} xy = -\frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 - xy = 1 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Bài toán 2 (Thi HSG Toán Việt Nam 2003). *Cho hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện*

$$f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x, \quad x \in (0, \pi).$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$g(x) = f(\sin^2 x) f(\cos^2 x).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(\cot x) &= \sin 2x + \cos 2x \\ &= \frac{2\cot x}{\cot^2 x + 1} + \frac{\cot^2 x - 1}{\cot^2 x + 1} \\ &= \frac{\cot^2 x + 2\cot x - 1}{\cot^2 x + 1} \ \forall x \in (0; \pi) \end{aligned}$$

Với mỗi $t \in \mathbb{R}$ đều tồn tại $x \in (0, \pi)$ sao cho $\cot x = t$, ta được

$$f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$g(x) = f(\sin^2 x) f(\cos^2 x) = \frac{\sin^4 2x + 32 \sin^2 2x - 32}{\sin^4 2x - 8 \sin^2 2x + 32}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $u = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x$. Dễ thấy, $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $u \in \Big[0, \dfrac{1}{4}\Big]$. Vì vậy

$$\min_{x\in\mathbb{R}} g(x) = \min_{0 \leqslant u \leqslant 1/4} h(u) \ \text{ và } \ \max_{x\in\mathbb{R}} g(x) = \max_{0 \leqslant u \leqslant 1/4} h(u),$$

trong đó

$$h(u) = \frac{u^2 + 8u - 2}{u^2 - 2u + 2}.$$

Ta tính dạo hàm của hàm $h(u)$

$$h'(u) = \frac{2(-5u^2 + 4u + 6)}{(u^2 - 2u + 2)^2}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được $h'(u) > 0 \ \forall u \in \Big[0, \dfrac{1}{4}\Big]$. Suy ra hàm $h(u)$ đồng biến trên $\Big[0, \dfrac{1}{4}\Big]$. Vì vậy, trên $\Big[0, \dfrac{1}{4}\Big]$, ta có

$$\min h(u) = h(0) = -1$$

và

$$\max h(u) = h\Big(\frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{25}.$$

Vậy $\min g(x) = -1$, đạt được chẳng hạn khi $x = 0$ và $\max g(x) = \dfrac{1}{25}$, đạt được chẳng hạn khi $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Bài toán 3 (Thi HSG Toán Việt Nam 2003). *Cho hàm số f xác định trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện*

$$f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x, \ \ \forall x \in (0, \pi).$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x)f(1-x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Ta có

$$\begin{aligned} f(\cot x) &= \sin 2x + \cos 2x \\ &= \frac{2\cot x}{\cot^2 x + 1} + \frac{\cot^2 x - 1}{\cot^2 x + 1} \\ &= \frac{\cot^2 x + 2\cot x - 1}{\cot^2 x + 1}, \ \ \forall x \in (0; \pi) \end{aligned}$$

Từ đó, với lưu ý rằng với mỗi $t \in \mathbb{R}$ đều tồn tại $x \in (0, \pi)$ sao cho $\cot x = t$, ta được

$$f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dẫn tới,

$$g(x) = f(x)f(1-x) = \frac{x^2(1-x)^2 + 8x(1-x) - 2}{x^2(1-x)^2 - 2x(1-x) + 2}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $u = x(1-x)$. Dễ thấy, khi x chạy qua $[-1, 1]$ thì u chạy qua $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$. Vì vậy,

$$\min_{-1\leqslant x\leqslant 1} g(x) = \min_{-2\leqslant u\leqslant \frac{1}{4}} h(u) \quad \text{và} \quad \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} g(x) = \max_{-2\leqslant u\leqslant \frac{1}{4}} h(u),$$

trong đó

$$h(u) = \frac{u^2 + 8u - 2}{u^2 - 2u + 2}.$$

Ta có

$$h'(u) = \frac{2(-5u^2 + 4u + 6)}{(u^2 - 2u + 2)^2}$$

Từ việc khảo sát dấu của $h'(u)$ trên $[-2; 1/4]$, ta thu được

$$\min_{-2\leqslant u\leqslant \frac{1}{4}} h(u) = h\left(\frac{2-\sqrt{34}}{5}\right) = 4 - \sqrt{34}$$

và

$$\max_{-2\leqslant u\leqslant \frac{1}{4}} h(u) = \max\{h(-2); h(1/4)\} = \frac{1}{25}.$$

Vậy, trên $[-1; 1]$, ta có $\min g(x) = 4 - \sqrt{34}$ và $\max g(x) = \frac{1}{25}$.

Bài toán 4 (MO Nga 1999). *Cho hàm số*

$$f(x) = x^2 + ax + b\cos x.$$

Tìm tất cả các giá trị của a, b sao cho phương trình $f(x) = 0$ và $f(f(x)) = 0$ có cùng một tập hợp nghiệm thực (khác rỗng).

Giải.

Giả sử r là một nghiệm của $f(x)$. Khi đó $b = f(0) = f(f(x)) = 0$. Do đó $f(x) = x(x+a)$, suy ra hoặc $r = 0$ hoặc $r = -a$.

Vì vậy

$$f(f(x)) = f(x)(f(x) + a) = x(x+a)(x^2 + ax + a).$$

Ta chọn a sao cho $x^2 + ax + a$ không có nghiệm thực nằm giữa 0 và $-a$.

Thật vậy nếu 0 hoặc $-a$ là nghiệm của phương trình $x^2 + ax + a = 0$, thì phải có $a = 0$ và khi đó $f(f(x))$ không có nghiệm nào khác.

Nói cách khác, $\Delta = a^2 - 4a < 0$ hay $0 < a < 4$.

Vậy với $0 \leqslant a < 4$ thì hai phương trình đã cho có cùng tập hợp nghiệm $x = 0$, $x = -a$.

Bài toán 5. *Cho tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *thoả mãn điều kiện*

$$|f(-1)| \leqslant 1,\ |f(0)| \leqslant 1,\ |f(1)| \leqslant 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $|f(x)|$ *với* $x \in [-1;1]$.

Giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \Big[\frac{f(1)+f(-1)}{2} - f(0)\Big]x^2 + \Big[\frac{f(1)-f(-1)}{2}\Big]x + f(0) \\ &= \frac{f(1)}{2}(x^2+x) + \frac{f(-1)}{2}(x^2-x) + f(0)(1-x^2) \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant \frac{1}{2}|x^2+x| + \frac{1}{2}|x^2-x| + |1-x^2| \\ &= \frac{1}{2}(|x^2+x| + |x^2-x|) + |1-x^2| \end{aligned}$$

Vì $x \in [-1;1]$ nên $(x^2+x)(x^2-x) = x^2(x^2-1) \leqslant 0$. Do đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|x^2+x| + |x^2-x|) + |1-x^2| &= \frac{1}{2}|x^2+x-x^2+x| + 1 - x^2 \\ &= |x| + 1 - x^2 \\ &= -(|x| - \tfrac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} \leqslant \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $|f(x)| \leqslant \dfrac{5}{4}$. Vậy $\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| = \dfrac{5}{4}$.

1.2 Bất đẳng thức Cauchy

Tiếp theo, thực hiện theo ý tưởng của Cauchy[1] đối với tổng

$$\sum_{i=1}^{n}(x_it - y_i)^2 = t^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + \sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

ta nhận được tam thức bậc hai dạng

$$f(t) = t^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 \geqslant 0,\ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

nên $\Delta \leqslant 0$.

[1] Augustin-Louis Cauchy 1789-1857

Định lý 4. *Với mọi bộ số (x_i), (y_i), ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big). \tag{2.1}$$

Dấu đẳng thức trong (2.1) xảy ra khi và chỉ khi hai bộ số (x_i) và (y_i) tỷ lệ với nhau, tức tồn tại cặp số thực α, β, không đồng thời bằng 0, sao cho

$$\alpha x_i + \beta y_i = 0, \ \ \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Bất đẳng thức (2.1) thường được gọi là bất đẳng thức Cauchy[2] (đôi khi còn gọi là bất đẳng thức Bunhiacowski, Cauchy - Schưwarz hoặc Cauchy-Bunhiacowski).

Nhận xét rằng, bất đẳng thức Cauchy cũng có thể được suy trực tiếp từ đồng nhất thức Lagrange sau đây

Định lý 5. *(Lagrange). Với mọi bộ số (x_i), (y_i), ta luôn có đồng nhất thức:*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big)^2 = \sum_{i,j=1,\, i<j}^{n} (x_iy_j - x_jy_i)^2.$$

Tương tự, ta cũng có các đẳng thức dạng sau đây (Bạn đọc dễ dàng tự kiểm chứng trực tiếp).

Bài toán 6. *Với mọi bộ số (x_i, y_i), ta luôn có đẳng thức sau*

$$\begin{aligned} &E_2(x+y)E_1(x)E_1(y) - E_1(x+y)E_2(x)E_1(y) - E_1(x+y)E_1(x)E_2(y) \\ =&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(x_i\sum_{j=1}^{n} y_j - y_i\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)^2, \end{aligned}$$

trong đó

$$E_1(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i, \ \ E_2(x) := \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} x_ix_j.$$

Nhận xét rằng, từ đồng nhất thức này ta thu được bất đẳng thức sau đây

[2]Tại Việt Nam và một số nước Đông Âu, bất đẳng thức này được mang tên là "Bất đẳng thức Bunhiacowski","Bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacowski" hoặc "Bất đẳng thức Cauchy - Schưwarz". Còn bất đẳng thức giữa các giá trị trung bình cộng và nhân thì được gọi là bất đẳng thức Cauchy. Thực ra, theo cách gọi của các chuyên gia đầu ngành về bất đẳng thức (Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G., Bellman R.,...), thì bất đẳng thức tích phân dạng (2.1) mới mang tên là bất đẳng thức Bunhiacowski.

Hệ quả 1. *Với mọi bộ số dương* (x_i, y_i)*, ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$\frac{E_2(x+y)}{E_1(x+y)} \geqslant \frac{E_2(x)}{E_1(x)} + \frac{E_2(y)}{E_1(y)},$$

trong đó

$$E_1(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i, \;\; E_2(x) := \sum_{i=1, j, i\neq j}^{n} x_i x_j.$$

Về sau, ta đặc biệt quan tâm đến trường hợp đặc biệt ứng với hai cặp số $(1, 1)$ và $a, b)$. Khi đó bất đẳng thức Cauchy trùng với bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân.

Hệ quả 2. *Với mọi cặp số dương* (a, b)*, ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$2(a+b) \geqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,$$

hay

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

1.3 Dạng phức và dạng đảo của bất đẳng thức Cauchy

Trước hết, ta có nhận xét rằng từ một đẳng thức đã cho đối với bộ số thực ta đều có thể mở rộng (theo nhiều cách thức khác nhau) thành một đẳng thức mới cho bộ số phức. Chẳng hạn, ta có thể coi mọi số thực a đã cho như là phần thực của một số phức $z = a + ib$ ($b \in \mathbb{R}$).

Ta nêu một số đồng nhất thức về sau cần sử dụng.

Định lý 6. *Với mọi bộ số* (a_j, b_j, u_j, v_j)*, ta luôn có đẳng thức sau*

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_j u_j \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \sum_{j=1}^{n} u_j v_j \\ &= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_j b_k - b_j a_k)(u_j v_k - u_k v_j). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nhận xét rằng, từ đồng nhất thức này ta thu được đồng nhất thức Lagrange sau đây đối với bộ số phức.

Định lý 7. *Với mọi bộ số phức* (a_j, b_j)*, ta luôn có đẳng thức sau*

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 - \Big| \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \Big| = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |\overline{a_j} b_k - a_k \overline{b_j}|. \tag{3.2}$$

Proof. .

Từ đẳng thức (3.1), bằng cách thay a_j bởi $\overline{a_j}$, v_j bởi $\overline{b_j}$ và u_j bởi a_j, ta sẽ thu được (3.2). □

Hệ thức (3.2) cho ta bất đẳng thức Cauchy sau đây đối với bộ số phức.

Hệ quả 3. *Với mọi bộ số phức (a_j, b_j), ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2 \geqslant \Big|\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\Big|. \tag{3.3}$$

Giả sử ta có bộ các cặp số dương (a_k, b_k) sao cho

$$\frac{a_k}{b_k}\in[\alpha,\beta],\ \ \alpha>0,\ \ k=1,2,\dots,n.$$

Khi đó, theo Định lý đảo của tam thức bậc hai thì

$$\Big(\beta-\frac{a_k}{b_k}\Big)\Big(\frac{a_k}{b_k}-\alpha\Big)\geqslant 0$$

hay

$$a_k^2+\alpha\beta b_k^2\leqslant(\alpha+\beta)a_kb_k,\ \ k=1,2,\dots,n.$$

Từ đây suy ra

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\alpha\beta\sum_{k=1}^{n}b_k^2\leqslant(\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)^{\frac12}\Big(\alpha\beta\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big)^{\frac12}\leqslant\frac12\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\alpha\beta\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big).$$

Vậy nên

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)^{\frac12}\Big(\alpha\beta\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big)^{\frac12}\leqslant\frac12(\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

Từ đây, ta thu được bất đẳng thức đảo Cauchy.

Định lý 8. *Giả sử ta có bộ các cặp số dương (a_k, b_k) sao cho*

$$\frac{a_k}{b_k}\in[\alpha,\beta],\ \ \alpha>0,\ \ k=1,2,\dots,n.$$

Khi đó

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)^{\frac12}\leqslant\frac{A}{G}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k,$$

trong đó

$$A = \frac{\alpha + \beta}{2}, \;\; G = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Nhìn chung, rất nhiều bất đẳng thức nhận được từ các đồng nhất thức. Vì vậy, việc thiết lập được các đồng nhất thức được coi như một phương pháp hữu hiệu để sáng tác và chứng minh bất đẳng thức.

Bài toán 7. *Chứng minh rằng với mọi bộ ba số (x, y, z), ta luôn có đẳng thức sau*

$$(2x + 2y - z)^2 + (2y + 2z - x)^2 + (2z + 2x - y)^2 = 9(x^2 + y^2 + z^2).$$

Hãy tổng quát hoá?

Bài toán 8. *Chứng minh rằng với mọi bộ bốn số (x, y, z, t), ta luôn có đẳng thức sau*

$$(x+y+z-t)^2+(y+z+t-x)^2+(z+t+x-y)^2+(t+x+y-z)^2 = 4(x^2+y^2+z^2+t^2).$$

Hãy tổng quát hoá?

Bài toán 9. *Chứng minh rằng với mọi bộ số (u_k, v_k, p_k), ta luôn có đẳng thức sau*

$$\sum_{j,k=1}^{n} (u_k v_j + u_j v_k) p_j p_k = 2\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k p_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k p_k\Big).$$

Bài toán 10. *Chứng minh rằng với mọi bộ số (u_k, v_k, p_k), ta luôn có đẳng thức sau*

$$\sum_{j,k=1}^{n} (u_j v_j + u_k v_k) p_j p_k = 2\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k v_k p_k\Big).$$

Tiếp theo, ta xét một số mở rộng khác (dạng phức) của bất đẳng thức Cauchy.

Định lý 9 (N.G.deBruijn). *Với bộ số thực $a_1, \dots, a_n$ và bộ số phức (hoặc thực) $z_1, \dots, z_n$, ta đều có*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big|^2 \leqslant \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big|\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_k = Re(\lambda z_k)$ $(k = 1, \dots, n)$, trong đó λ là số phức và $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^2 z_k^2$ là số thực không âm.

Proof. Bằng cách thực hiện đồng thời phép quay quanh gốc toạ độ đối với các $z_k's$, ta thu được

$$\sum_{k=1}^{n} a_k z_k \geqslant 0.$$

Rõ ràng phép quay này không ảnh hưởng đến giá trị của modul các số.

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big|, \qquad \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big|, \qquad |z_k| \quad (k = 1, \dots, n).$$

Vậy, chỉ cần chứng minh

$$\sum_{k=1}^{n} a_k z_k \geqslant 0.$$

Nếu ta đặt $z_k = x_k + iy_k \quad (k = 1, \dots, n)$, thì

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big|^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big).$$

Vì

$$2x_k^2 = |z_k|^2 + Re z_k^2,$$

ta nhận được

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big|^2 \leqslant \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} Re z_k^2\Big).$$

Từ bất đẳng thức này và

$$\sum_{k=1}^{n} Re z_k^2 = Re \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big|$$

ta thu được đpcm. □

1.4 Tam thức bậc (α) và tam thức bậc (α, β)

Ta có nhận xét rằng bất đẳng thức Cauchy dưới dạng sơ đẳng

$$x^2 + 1 \geqslant 2x, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

có thể xem như bất đẳng thức tam thức bậc hai trong trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Khi đó, ta dễ dàng mở rộng cho tam thức bậc α ($\alpha > 1$) để có bất đẳng thức tương tự như (4.1) bằng cách thay số 2 bởi số α. Thật vậy, ta cần thiết lập bất đẳng thức dạng

$$x^\alpha + (?) \geqslant \alpha x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{4.2}$$

sao cho dấu đẳng thức vẫn xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Thay $x = 1$ vào (4.2), ta nhận được $(?) = \alpha - 1$, tức là (4.2) có dạng

$$x^\alpha + \alpha - 1 \geqslant \alpha x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.3}$$

Đây chính là bất đẳng thức Bernoulli quen biết.

Sử dụng đạo hàm, ta dễ dàng chứng minh (4.3).

Thật vậy, xét hàm số

$$f(x) = x^\alpha + \alpha - 1 - \alpha x, \ \ x > 0.$$

Ta có $f(1) = 0$ và $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$. Suy ra $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 1$ và $x = 1$ là cực tiểu duy nhất của $f(x)$ trên $\mathbb{R}^+$ nên $f(x) \geqslant f(1) = 0$.

Nhận xét 1. *Trong áp dụng, đặc biệt trong các dạng toán xác định giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất, bất đẳng thức Bernoulli dạng (4.3) chỉ được sử dụng trong các trường hợp đảm bảo chắc chắn rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.*

Trong những trường hợp, nếu dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0 > 0$ cho trước, ta cần thay (4.3) bởi bất đẳng thức sau đây

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha + \alpha - 1 \geqslant \alpha \frac{x}{x_0}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.4}$$

Tiếp theo, ta lại có nhận xét rằng bất đẳng thức Cauchy dưới dạng sơ đẳng

$$x^2 + 1 \geqslant 2x, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

có thể xem như bất đẳng thức tam thức bậc (4,1) (ứng với luỹ thừa 2 và luỹ thừa 1 của x), trong trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Khi đó, ta dễ dàng mở rộng một cách tự nhiên cho tam thức bậc (α, β) ($\alpha > \beta > 0$) để có bất đẳng thức tương tự như (4.1) bằng cách thay luỹ thừa 2 bởi số α và luỹ thừa 1 bởi β.

Thật vậy, ta cần thiết lập bất đẳng thức dạng

$$x^\alpha + (?) \geqslant (??)x^\beta, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{4.6}$$

sao cho dấu đẳng thức vẫn xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Sử dụng phép đổi biến $x^\beta = t$ và $\dfrac{\alpha}{\beta} = \gamma$, ta có thể đưa (4.6) về dạng

$$t^\gamma + (?) \geqslant (??)t, \ \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{4.7}$$

So sánh với (4.3), ta thấy ngay cần chọn $(?) = \gamma - 1$ và $(??) = \gamma$. Vậy nên

$$t^\gamma + \gamma - 1 \geqslant \gamma t, \ \ \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

hay

$$x^\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geqslant \frac{\alpha}{\beta} x^\beta, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+, \tag{4.8}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Ta nhận được bất đẳng thức Bernoulli đối với tam thức bậc (α, β) ứng với trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Để sử dụng bất đẳng thức Bernoulli cho trường hợp đảm bảo chắc chắn rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0$ ($x_0 > 0$) cho trước, ta chỉ cần thay (4.8) bởi bất đẳng thức sau đây

Định lý 10. *Giả sử cho trước $x_0 > 0$ và cặp số (α, β) thoả mãn điều kiện $\alpha > \beta > 0$. Khi đó*

$$\Big(\frac{x}{x_0}\Big)^\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\Big(\frac{x}{x_0}\Big)^\beta, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.9}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0$.

Bài toán 11. *Cho bộ các số dương a, b, c; α, β với $\alpha > \beta$. Chứng minh rằng*

$$\Big(\frac{a}{b}\Big)^\alpha + \Big(\frac{b}{c}\Big)^\alpha + \Big(\frac{c}{a}\Big)^\alpha \geqslant \Big(\frac{a}{b}\Big)^\beta + \Big(\frac{b}{c}\Big)^\beta + \Big(\frac{c}{a}\Big)^\beta.$$

Giải. Ta sử dụng bất đẳng thức (4.8). Ta có

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{a}{b}\Big)^\alpha + \dfrac{\alpha}{\beta} - 1 \geqslant \dfrac{\alpha}{\beta}\Big(\dfrac{a}{b}\Big)^\beta, \\ \Big(\dfrac{b}{c}\Big)^\alpha + \dfrac{\alpha}{\beta} - 1 \geqslant \dfrac{\alpha}{\beta}\Big(\dfrac{b}{c}\Big)^\beta, \\ \Big(\dfrac{c}{a}\Big)^\alpha + \dfrac{\alpha}{\beta} - 1 \geqslant \dfrac{\alpha}{\beta}\Big(\dfrac{c}{a}\Big)^\beta, \\ \Big(\dfrac{\alpha}{\beta} - 1\Big)\Big[\Big(\dfrac{a}{b}\Big)^\beta + \Big(\dfrac{b}{c}\Big)^\beta + \Big(\dfrac{c}{a}\Big)^\beta\Big] \geqslant 3\Big(\dfrac{\alpha}{\beta} - 1\Big) \end{cases} \tag{4.10}$$

Cộng các vế tương ứng của (4.10) ta thu được

$$\Big(\frac{a}{b}\Big)^\alpha + \Big(\frac{b}{c}\Big)^\alpha + \Big(\frac{c}{a}\Big)^\alpha \geqslant \Big(\frac{a}{b}\Big)^\beta + \Big(\frac{b}{c}\Big)^\beta + \Big(\frac{c}{a}\Big)^\beta.$$

Tiếp theo, ta xét dạng tam thức bậc (α, β):

$$f(x) = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + c$$

với điều kiện $\alpha > 0 > \beta$ và $a\alpha + b\beta = k > 0$.

Trường hợp riêng, khi $k = 0$, ta thu được dạng *phân thức chính quy* và sẽ được xét chi tiết ở chương tiếp theo.

Ta có kết quả sau đây.

Định lý 11. *Tam thức bậc* (α, β) *dạng*

$$f(x) = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + c,$$

trong đó $a, b > 0$*,* $\alpha > 0 > \beta$ *và* $a\alpha + b\beta = k \geqslant 0$ *có tính chất sau:*

$$f(x) \geqslant f(1), \ \ \forall x \geqslant 1.$$

Proof. Để ý rằng

$$f'(x) = a\alpha x^{\alpha-1} + b\beta x^{\beta-1}$$

và trong khoảng $(0, +\infty)$, ta có $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi

$$x = x_0, \quad \text{trong đó} \quad x_0 = \sqrt{1 - \frac{k}{a\alpha}} \leqslant 1.$$

Do vậy, $f(x)$ đồng biến trong $[1, +\infty)$, nên

$$f(x) \geqslant f(1), \ \ \forall x \geqslant 1.$$

□

Hệ quả 4. *Tam thức bậc* (α, β) *dạng*

$$f(x) = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + c,$$

trong đó $a, b > 0$*,* $\alpha > 0 > \beta$ *và* $a\alpha + b\beta = 0$ *có tính chất sau:*

$$\min_{x>0} f(x) = f(1).$$

1.5 Nhận xét về một số bất đẳng thức liên quan

Tiếp theo, ta xét bất đẳng thức dạng nội suy sau đây.

Định lý 12. *Với mọi cặp dãy số thực* $a = (a_1, \dots, a_n)$ *và* $b = (b_1, \dots, b_n)$ *và* $0 \leqslant x \leqslant 1$*, ta đều có*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x \sum_{i \neq j} a_i b_j\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{i<j} a_i a_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x \sum_{i<j} b_i b_j\Big).$$

Rõ ràng, với $x = 0$*, ta thu được bất đẳng thức Cauchy.*

Proof. Xét tam thức bậc hai theo y:

$$\begin{aligned} f(y) &= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{i<j} a_i a_j\Big) y^2 - 2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x \sum_{i \neq j} a_i b_j\Big) y + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x \sum_{i<j} b_i b_j \\ &= (1-x) \sum_{k=1}^{n} (a_k y - b_k)^2 + x \Big(\sum_{k=1}^{n} (a_k y - b_k)\Big)^2. \end{aligned}$$

Dễ thấy $f(y) \geqslant 0$ với mọi y, và vì vậy ta suy ra ngay được đpcm. □

Sử dụng đồng nhất thức, ta thu được một mở rộng của bất đẳng thức Cauchy.

Định lý 13 (H.W.Mclaughlin). *Với mọi bộ số thực* $a = (a_1, \dots, a_n)$ *và* $b = (b_1, \dots, b_n)$*, ta đều có*

$$\Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\Big) \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i)\Big)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_i b_j - a_j b_i - a_{n+i} b_{n+j} + a_{n+j} b_{n+i} = 0$$

và

$$a_i b_{n+j} - a_j b_{n+i} + a_{n+i} b_j - a_{n+j} b_i = 0$$

ứng với mọi $i, j = 1, \dots, n$.

Proof. Chứng minh được suy trực tiếp từ đẳng thức

$$\Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i)\Big)^2 =$$

$$= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i - a_{n+i} b_{n+j} + a_{n+j} b_{n+i})^2 +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_{n+j} - a_j b_{n+i} - a_{n+i} b_j + a_{n+j} b_i)^2.$$

□

Tương tự, ta có thể mở rộng bất đẳng thức Cauchy cho bốn bộ số.

Sử dụng kỹ thuật bất đẳng thức Cauchy đối với $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ và $\dfrac{a_k b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$, ta thu được

Định lý 14. *Với mọi bộ số thực a_k, b_k sao cho $a_k^2 + b_k^2 \neq 0, k = 1, \dots, n$, ta đều có*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2 b_k^2}{a_k^2 + b_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Bất đẳng thức đầu xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi a and b tỷ lệ và bất đẳng thức sau xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi các véctơ $\{|a_k|\}_{k=1}^{n}$ và $\{|b_k|\}_{k=1}^{n}$ trực giao.

Ta xét tiếp các bất đẳng thức Ostrowski và Fan-Todd.

Định lý 15 (A.M.Ostrowski). *Cho hai dãy không tỷ lệ $a = (a_1, \dots, a_n)$ và $b = (b_1, \dots, b_n)$ và dãy số thực $x = (x_1, \dots, x_n)$ thoả mãn điều kiện*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1.$$

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x_k = \frac{b_k \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 - a_k \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Proof. Đặt

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \qquad c = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

trong đó $y_i = \dfrac{Ab_i - Ca_i}{AB - C^2}$.

Dãy $y_1, \ldots, y_n$ thoả mãn điệu kiện đề bài. Mọi dãy $x_1, \ldots, x_n$ từ giả thiết cũng thoả mãn

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{A}{AB - C^2}.$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{A}{AB - C^2}.$$

Mọi dãy $x_1, \ldots, x_n$ theo giả thiết thoả mãn

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$$

Vậy nên

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{A}{AB - C^2},$$

chính là điều phải chứng minh. □

Tiếp theo, ta chứng minh

Định lý 16 (K.Fan and J.Todd). *Với mọi dãy số thực $a = (a_1, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, \ldots, b_n)$ thoả mãn điều kiện $a_i b_j \neq a_j b_i$ ứng với $i \neq j$, ta đều có*

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2} \leqslant \binom{n}{2}^{-2} \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1, j\neq i} \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j} \Big)^2$$

Proof. Ta thấy

$$x_i = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \frac{a_i a_j}{a_j b_i - a_i b_j}$$

có thể nhóm thành các cặp có dạng

$$\binom{n}{2}^{-1} \Big(\frac{a_i a_j}{a_j b_i - a_i b_j} + \frac{a_j a_i}{a_i b_j - a_j b_i} \Big) \quad (i \neq j)$$

và từng cặp như vậy đều bằng 0.

Vậy ta chuyển được về tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

Tương tự, cũng có $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$.

Vậy theo kết quả của Định lý vừa chứng minh, ta có ngay đpcm. □

Tiếp theo, ta xét một dạng bất đẳng thức, thực chất là bất đẳng thức Cauchy, trong hình học gắn với tích trong trong không gian tuyến tính, thường được gọi là Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz[3].

Trước hết, ta nhắc lại tích vô hướng đối với cặp véctơ

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \ \ b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

trong không gian $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau

$$(a, b) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j. \tag{6.1}$$

Từ (6.1), ta thấy ngay rằng

$$(a, a) \geqslant 0, \ \ (a, a) = 0 \Leftrightarrow a = (0, 0, \dots, 0).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(a, b) \leqslant (a, a)^{\frac{1}{2}} (b, b)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.2}$$

Để ý rằng, tích vô hướng (6.1) có các tính chất sau đây.

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \ \ (a, a) \geqslant 0, \ \ \forall a,\\
&\text{(ii)} \ \ (a, a) = 0 \Leftrightarrow a = (0, 0, \dots, 0),\\
&\text{(iii)} \ \ (\alpha a, b) = \alpha(a, b), \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}^n,\\
&\text{(iv)} \ \ (a, b + c) = (a, b) + (a, c), \ \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}^n,\\
&\text{(v)} \ \ (a, b) = (b, a), \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Định nghĩa 1. *Không gian véctơ với tích (a, b) có các tính chất (i)-(v) được gọi là không gian với tích trong.*

Ví dụ 4. *Giả sử (γ_j) là bộ số dương cho trước. Khi đó, tích vô hướng với trọng (γ_j)*

$$(a, b) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j b_j \tag{6.3}$$

là tích trong, tức có các tính chất (i)-(v).

[3]Đôi khi được gọi là bất đẳng thức Schwarz (Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921)

Định lý 17. *Đối với mọi không gian với tích trong (a, b), ta đều có bất đẳng thức Cauchy-Schwarz*

$$(a, b) \leqslant (a, a)^{\frac{1}{2}} + (b, b)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra đối với cặp véctơ a, b khác 0 khi và chỉ khi $b = \lambda a$ với $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

Proof. Sử dụng tính chất

$$(v - w, v - w) \geqslant 0$$

ta thu được

$$(v, w) \leqslant \frac{1}{2}(v, v) + \frac{1}{2}(w, w). \tag{6.5}$$

Vì (6.4) luôn luôn thoả mãn khi một trong hai véctơ bằng 0. Vậy, ta chỉ xét các véctơ khác 0. Ta đặt

$$\hat{v} = \frac{v}{(v, v)^{\frac{1}{2}}}, \;\; \hat{w} = \frac{w}{(w, w)^{\frac{1}{2}}},$$

Khi đó, theo (6.5) thì $(\hat{v}, \hat{w}) \leqslant 1$. Từ đó, ta có ngay (6.4). □

Đặc biệt, đối với không gian các hàm số liên tục trên một đoạn thẳng $[\alpha, \beta]$ cho trước, ta có bất đẳng thức Bunhiacowski[4].

Định lý 18. *Với mọi cặp hàm số $f(t), g(t)$ liên tục trên đoạn thẳng $[\alpha, \beta]$, ta đều có*

$$\Big(\int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt\Big)^2 \leqslant \int_\alpha^\beta [f(t)]^2 dt \int_\alpha^\beta [g(t)]^2 dt.$$

Proof. Sử dụng tính chất

$$\int_\alpha^\beta \Big(f(t) - \lambda g(t)\Big)^2 dt \geqslant 0, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ta suy ra

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C \geqslant 0, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

trong đó

$$A = \int_\alpha^\beta [g(t)]^2 dt, \;\; C = \int_\alpha^\beta [f(t)]^2 dt, \;\; B = \int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt.$$

Từ đây, áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta có ngay đpcm. □

Tiếp theo, ta dễ dàng kiểm chứng

[4]Victor Yacovlewich Bunhiacowski 1804-1889

Ví dụ 5. *Giả sử $V = \mathcal{C}[\alpha, \beta]$ là không gian các hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$. Khi đó, tích vô hướng của cặp hàm số $f(t), g(t) \in V$ được định nghĩa như sau*

$$(f, g) = \int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt \tag{6.6}$$

chính là tích trong, tức có các tính chất (i)-(v).

Tương tự như trường hợp không gian $\mathbb{R}^n$, ta có thể định nghĩa tích (6.6) với trọng.

Ví dụ 6. *Giả sử $V = \mathcal{C}[\alpha, \beta]$ là không gian các hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$ và $\omega(t)$ là hàm số liên tục và dương trên $[\alpha, \beta]$. Khi đó, tích vô hướng của cặp hàm số $f(t), g(t) \in V$ với trọng $\omega(t)$ được định nghĩa như sau*

$$(f(t), g(t)) = \int_\alpha^\beta \omega(t)f(t)g(t)dt \tag{6.7}$$

là tích trong, tức có các tính chất (i)-(v).

Các ứng dụng của bất đẳng thức Schwaz và Bunhiacowski trong phép tính tích phân sẽ được đề cập ở các chương sau.

1.6 Phương pháp bất đẳng thức Cauchy

1.6.1 Độ gần đều và sắp thứ tự dãy cặp điểm

Từ bất đẳng thức

$$x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2x_1x_2, \ \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

ta suy ra với mọi cặp số không âm x, y với tổng bằng 1 cho trước thì tích xy đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$. Vậy

$$xy \leqslant \frac{1}{4}. \tag{5.1}$$

Nếu ta có một cặp số không âm khác, chẳng hạn u, v với tổng bằng 1 thì tích uv cũng có tính chất như đã nêu và

$$uv \leqslant \frac{1}{4}. \tag{5.2}$$

Phải chăng ta có thể cho một tiêu chuẩn để có thể sắp thứ tự cặp số xy và uv?

Nhận xét rằng, ta không thể sắp thự tự tất cả các cặp số dương theo một trình tự thông thường trên đường thẳng được. Tuy nhiên, đối với các cặp số dương có chung tổng thì nếu để ý đến trường hợp đặc biệt đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra khi các số hạng (hoặc thừa số đối với tích) bằng nhau, thì ta có thể phát biểu thứ tự các cặp đó dưới dạng văn học rằng tích xy đạt giá trị lớn nhất trong trường hợp cặp số đó là đều, tức là $x = y$.

Định nghĩa 2. *(i) Xét các cặp số không âm x, y với tổng không đổi (để đơn giản, ta chọn $x + y = 1$). Ta gọi hiệu*

$$\rho(x, y) := \max(x, y) - \min(x, y),$$

là độ lệch của cặp số x, y hay là độ gần đều của cặp số x, y

(ii) Cặp x_1, y_1 được gọi là gần đều hơn (độ lệch nhỏ hơn) cặp x_2, y_2 (hay cặp x_2, y_2 được gọi là xa đều hơn cặp x_1, y_1), nếu

$$\rho(x_1, y_1) \leqslant \rho(x_2, y_2).$$

Như vậy, theo định nghĩa trên thì cặp x, y luôn có độ lệch $\rho(x, y) \geqslant 0$ và độ lệch bằng 0 khi và chỉ khi $x = y$, khi đó cặp x, y là cặp gần đều nhất và các cặp $0, 1$ và $1, 0$ sẽ là những cặp xa đều nhất.

Với các quy ước như trên, ta có thể sắp thứ tự các tích xy với tổng $x + y = 1$ không đổi theo ngôn ngữ "gần đều" như sau.

Định lý 19. *Xét các cặp số không âm x_j, y_j $(j = 1, 2)$ với tổng không đổi (để đơn giản, ta chọn $x + y = 1$). Khi đó*

$$x_1 y_1 \geqslant x_2 y_2$$

khi và chỉ khi cặp x_1, y_1 gần đều hơn cặp x_2, y_2.

Proof. .

Xét các cặp số không âm x, y với tổng bằng 1 không đổi. Không mất tính tổng quát, coi $0 \leqslant x < y$. Với mỗi $\epsilon > 0$ đủ nhỏ, để đảm bảo $x + \epsilon < y - \epsilon$ (chỉ cần chọn $\epsilon \in [0, \frac{y-x}{2})$). Dễ thấy rằng cặp $x + \epsilon, y - \epsilon$ gần đều hơn cặp x, y đã cho. Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$xy \leqslant (x + \epsilon)(y - \epsilon) \tag{5.3}$$

là đủ.

Điều này là hiển nhiên vì (5.3) tương đương với bất đẳng thức $\epsilon(y - x - \epsilon) \geqslant 0$. □

Thứ tự sắp được theo ngôn ngữ "gần đều dần" cho ta một cách tiếp cận tự nhiên với nhiều bài toán của thực tiễn. Chẳng hạn, khi ta có cặp số tự nhiên x, y có tổng bằng một số lẻ thì cặp số đó sẽ không bao giờ là cặp số nguyên bằng nhau được. Khi đó khái niệm gần đều nhất (mà không phải là đều) sẽ có ý nghĩa thực tiễn.

Nhận xét rằng, đối với các cặp số dương có chung tích thì ta cũng có thể phát biểu thứ tự các cặp đó dưới dạng văn học rằng tổng $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất trong trường hợp cặp số đó là đều, tức là $x = y$.

Định nghĩa 3. *(i) Xét các cặp số dương x, y với tích không đổi (để đơn giản, ta chọn $xy = a > 0$). Ta gọi hiệu*

$$\rho(x, y) := \max(x, y) - \min(x, y),$$

là độ lệch của cặp số x, y hay là độ gần đều của cặp số x, y

(ii) Cặp x_1, y_1 được gọi là gần đều hơn (độ lệch nhỏ hơn) cặp x_2, y_2 (hay cặp x_2, y_2 được gọi là xa đều hơn cặp x_1, y_1), nếu

$$\rho(x_1, y_1) \leqslant \rho(x_2, y_2).$$

Như vậy, theo định nghĩa trên thì cặp x, y luôn có độ lệch $\rho(x, y) \geqslant 0$ và độ lệch bằng 0 khi và chỉ khi $x = y$, khi đó cặp x, y là cặp gần đều nhất và các cặp $0, 1$ và $1, 0$ sẽ là những cặp xa đều nhất.

Với các quy ước như trên, ta có thể sắp thứ tự các tổng $x + y$ với tích xy không đổi theo ngôn ngữ "gần đều" như sau.

Định lý 20. *Xét các cặp số dương x_j, y_j $(j = 1, 2)$ với tích không đổi (để đơn giản, ta chọn $x_j y_j = 1$). Khi đó*

$$x_1 + y_1 \leqslant x_2 + y_2$$

khi và chỉ khi cặp x_1, y_1 gần đều hơn cặp x_2, y_2.

Proof. Xét các cặp số dương x, y với tích bằng 1 không đổi. Không mất tính tổng quát, coi $0 < x < y$. Với mỗi $\epsilon > 1$, để đảm bảo $\epsilon x < (\epsilon)^{-1} y$ (chỉ cần chọn $\epsilon \in \left(1, \sqrt{\frac{y}{x}}\right)$.

Dễ thấy rằng cặp $x\epsilon, y(\epsilon)^{-1}$ gần đều hơn cặp x, y đã cho. Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$x + y \geqslant x\epsilon + y(\epsilon)^{-1} \tag{5.4}$$

là đủ.

Điều này là hiển nhiên vì (5.4) tương đương với bất đẳng thức $\epsilon x \leqslant y$. □

Định lý sau đây đóng vai trò trọng tâm đối với hai cặp số sắp được thứ tự.

Xét hai cặp số $(z, 2 - z)$ và $(y, 2 - y)$ với

$$1 \leqslant z \leqslant y \leqslant 2$$

hoặc

$$0 \leqslant y \leqslant z \leqslant 1.$$

Khi đó, theo định nghĩa, rõ ràng cặp số $(z, 2 - z)$ gần đều hơn so với cặp số $(y, 2 - y)$. Vậy nên, ta có

Định lý 21 (H.W.Melaughlin, F.T.Metcalf). *Với mọi cặp dãy số dương* $a = (a_1, \dots, a_n)$ *và* $b = (b_1, \dots, b_n)$ *sao cho* $1 \leqslant z \leqslant y \leqslant 2$ *hoặc* $0 \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$*, ta đều có*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^y b_k^{2-y}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^{2-y} b_k^y\Big) \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^z b_k^{2-z}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^{2-z} b_k^z\Big).$$

Đây chính là một dạng nội suy bất đẳng thức Cauchy trong $[0, 1]$. Từ kết quả này, ta dễ dàng thu được ngay bất đẳng thức Cauchy quen biết.

Nhận xét 2. *Vấn đề sắp thứ tự gần đều đối với bộ số tuỳ ý sẽ được đề cập trong các chương sau. Đặc biệt quá trình sắp thứ tự gắn chặt chẽ với giả thiết của Karamata khi mở rộng các bất đẳng thức cổ điển đối với lớp hàm lồi, lõm và tựa lồi lõm.*

1.6.2 Kỹ thuật tách và ghép bộ số

Trong những năm gần đây, chúng ta thấy có khá nhiều dạng bất đẳng thức trong các đề kỳ thi Olympic quốc tế, vô địch quốc gia của nhiều nước trên thế giới. Rất nhiều bài toán về bất đẳng thức xuất phát từ các phép biến đổi biểu thức đối xứng theo các kiểu (đặc thù) khác nhau.

Trong mục này chúng ta đưa ra một số dạng bất đẳng thức lấy từ các kỳ thi Olympic quốc tế và Olympic quốc gia của một số nước mà cách giải dựa chủ yếu vào kỹ thuật tách, ghép và điều chỉnh bộ hệ số $\{a_k\}$ trong bất đẳng thức Cauchy. Để minh hoạ và để tính toán đơn giản, ta chỉ xét các ví dụ với cặp bộ ba biến.

Bài toán 12. *Cho* $a, b, c > 0$*. Chứng minh rằng*

$$a + b + c \leqslant 2\Big(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\Big).$$

Giải. Ta viết vế trái dưới dạng

$$a + b + c = \frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(a + b + c)^2 \leqslant \Big(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\Big)[(b + c) + (c + a) + (a + b)].$$

Từ đây ta thu được đpcm.

Bài toán 13. *Cho* $a, b, c > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$*. Chứng minh rằng*

$$\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) - (a + b + c) \geqslant 2\sqrt{3}.$$

Giải.

Từ hệ thức hiển nhiên

$$(\sqrt{3}x-1)^2(2\sqrt{3}x+3) \geqslant 0,$$

suy ra

$$\frac{1}{a} - a \geqslant \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}a^2.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{b} - b \geqslant \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}b^2,$$

$$\frac{1}{c} - c \geqslant \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}c^2.$$

Do đó

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) - (a+b+c) = \Big(\frac{1}{a}-a\Big) + \Big(\frac{1}{b}-b\Big) + \Big(\frac{1}{c}-c\Big)$$

$$\geqslant \Big(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}a^2\Big) + \Big(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}b^2\Big) + \Big(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}c^2\Big) = 2\sqrt{3},$$

đpcm.

Nhận xét 3. *Bằng phương pháp tương tự, ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức sau: Với mọi cặp số dương a, b và bộ số dương x_k với tổng $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$, ta đều có*

$$a\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\Big) \pm \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) \geqslant (an \pm b)\sqrt{n}.$$

Bài toán 14. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng*

$$\Big(\frac{a+b}{a+b+c}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{b+c}{a+b+c}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{c+a}{a+b+c}\Big)^{1/2} \leqslant 6^{1/2}.$$

Giải. Đặt

$$T := \Big(\frac{a+b}{a+b+c}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{b+c}{a+b+c}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{c+a}{a+b+c}\Big)^{1/2}.$$

Khi đó, ta có

$$T^2 = \Big[1\cdot\Big(\frac{a+b}{a+b+c}\Big)^{1/2} + 1\cdot\Big(\frac{b+c}{a+b+c}\Big)^{1/2} + 1\cdot\Big(\frac{c+a}{a+b+c}\Big)^{1/2}\Big]^2.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$T^2 \leqslant (1^2+1^2+1^2)\Big(\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}\Big)=6.$$

Từ đây suy ra

$$\Big(\frac{a+b}{a+b+c}\Big)^{1/2}+\Big(\frac{b+c}{a+b+c}\Big)^{1/2}+\Big(\frac{c+a}{a+b+c}\Big)^{1/2}\leqslant 6^{1/2}.$$

Bài toán 15 (APMO 1991). *Cho hai bộ số dương $a_1,a_2,\dots,a_n$ và $b_1,b_2,\dots,b_n$ có chung tổng:*

$$\sum_{k=1}^n a_k=\sum_{k=1}^n b_k.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n a_k.$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k\Big)^2\leqslant \sum_{k=1}^n\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\sum_{k=1}^n(a_k+b_k).$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant \frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^n a_k\Big)^2}{\sum\limits_{k=1}^n(a_k+b_k)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n a_k,$$

đpcm.

Bài toán 16. *Cho $a,b,c>0$, $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Giải. Ký hiệu

$$M:=\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\Big)^2\\
=&\Big(\sqrt{\frac{ab}{c(b+c)}}\sqrt{b+c}+\sqrt{\frac{bc}{a(c+a)}}\sqrt{c+a}+\sqrt{\frac{ca}{b(a+b)}}\sqrt{a+b}\Big)^2\\
\leqslant&\Big[\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)}\Big][2(a+b+c)]=M[2(a+b+c)].
\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca),$$

nên

$$\Big(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\Big)^2\geqslant 3(b+c+a).$$

Suy ra $M\geqslant\dfrac{3}{2}$, hay

$$\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Bài toán 17 (Japan MO- 2004). *Cho $a,b,c>0,\ a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leqslant 2\Big(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Big). \tag{5.5}$$

Giải. Ta viết (5.5) dưới dạng

$$\begin{aligned}
&\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\\
=&\ 3+\frac{2a}{1-a}+\frac{2b}{1-b}+\frac{2c}{1-c}\leqslant 2\Big(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Big)\\
\Leftrightarrow&\ 2a\Big(\frac{1}{c}-\frac{1}{1-a}\Big)+2b\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{1-b}\Big)+2c\Big(\frac{1}{b}-\frac{1}{1-c}\Big)\geqslant 3\\
\Leftrightarrow&\ a\Big(\frac{1}{c}-\frac{1}{b+c}\Big)+b\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{c+a}\Big)+c\Big(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\Big)\geqslant\frac{3}{2}\\
\Leftrightarrow&\ \frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Điều cần chứng minh này chính là bất đẳng thức ở bài trước.

Bài toán 18 (MO Romanian 2004). *Chứng minh rằng, với mọi $a, b, c > 0$, ta đều có*

$$\frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)} \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}. \tag{5.6}$$

Giải. Đặt

$$\frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)} = M.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}} + \sqrt{\frac{b}{ca}} + \sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2 = \\
=&\Big(\sqrt{\frac{a}{bc(c+a)}}\sqrt{c+a} + \sqrt{\frac{b}{ca(a+b)}}\sqrt{a+b} + \sqrt{\frac{c}{ab(b+c)}}\sqrt{b+c}\Big)^2 \\
\leqslant&\Big[\frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)}\Big][2(a+b+c)] = M[2(a+b+c)].
\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}} + \sqrt{\frac{b}{ca}} + \sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2 \geqslant 3\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big)$$

hay

$$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}} + \sqrt{\frac{b}{ca}} + \sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2 \geqslant \frac{27}{(a+b+c)}$$

nên suy ra (5.6):

$$M \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Bài toán 19 (MO USA). *Xét các số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)}.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big)^2 = \\
=&\Big(\frac{1}{a\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c} + \frac{1}{b\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{1}{c\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\Big)^2 \\
\leqslant&P[2(a+b+c)].
\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2 \geqslant 3\Big(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\Big)$$

hay

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2 \geqslant \frac{3(a+b+c)}{abc} = 3(a+b+c).$$

Từ đây suy ra $P \geqslant \frac{3}{2}$ và $P_{\min} = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$).

Bài toán 20. *Chứng minh rằng, với mọi bộ số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$, ta đều có*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2 =\\
=&\Big(\frac{1}{a\sqrt{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)}+\frac{1}{b\sqrt{b(c+a)}}\sqrt{b(c+a)}+\frac{1}{c\sqrt{c(a+b)}}\sqrt{c(a+b)}\Big)^2\\
\leqslant&\Big[\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\Big][2(ab+bc+ca)].\end{aligned}$$

Mặt khác, theo giả thiết $abc = 1$, ta có

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2 = (ab+bc+ca)^2.$$

Từ đây suy ra ngay được đpcm.

Bài toán 21. *Chứng minh rằng, với mọi bộ số dương a, b, c, ta đều có*

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)}+\frac{b^4}{c^2(a+b)}+\frac{c^4}{a^2(b+c)} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\Big)^2 =\\
=&\Big(\frac{a^2}{b\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a}+\frac{b^2}{c\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}+\frac{c^2}{a\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}\Big)^2\\
\leqslant&\Big[\frac{a^4}{b^2(c+a)}+\frac{b^4}{c^2(a+b)}+\frac{c^4}{a^2(b+c)}\Big][2(a+b+c)].\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\Big)^2 \geqslant (a+b+c)^2.$$

Từ đây ta suy ra đpcm.

Bài toán 22. *Chứng minh rằng, với mọi bộ số dương a, b, c, ta đều có*

$$\frac{a^6}{b^3(a+c)}+\frac{b^6}{c^3(a+b)}+\frac{c^6}{a^3(b+c)} \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\Big)^2 = \\
= &\Big(\frac{a^3}{b\sqrt{bc+ba}}\sqrt{bc+ba}+\frac{b^3}{c\sqrt{ca+cb}}\sqrt{ca+cb}+\frac{c^3}{a\sqrt{ab+ac}}\sqrt{ab+ac}\Big)^2\\
\leqslant &\Big[\frac{a^6}{b^3(a+c)}+\frac{b^6}{c^3(a+b)}+\frac{c^6}{a^3(b+c)}\Big][2(ab+bc+ca)].
\end{aligned}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\Big)^2 \geqslant (ab+bc+ca)^2.$$

Từ đây ta suy ra đpcm.

Bài toán 23. *Cho hai bộ số dương p, q, r và x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\frac{p}{q+r}x^2+\frac{q}{r+p}y^2+\frac{r}{p+q}z^2 \geqslant (xy+yz+zx)-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2).$$

Giải.
Đặt

$$\frac{p}{q+r}x^2+\frac{q}{r+p}y^2+\frac{r}{p+q}z^2 = M.$$

Ta sử dụng biến đổi sau

$$\begin{aligned}
M &= \Big(\frac{p}{q+r}x^2+x^2\Big)+\Big(\frac{q}{r+p}y^2+y^2\Big)+\Big(\frac{r}{p+q}z^2+z^2\Big)-(x^2+y^2+z^2)\\
&= (p+q+z)\Big(\frac{x^2}{q+r}+\frac{y^2}{r+p}+\frac{z^2}{p+q}\Big)-(x^2+y^2+z^2).\\
&=\frac{1}{2}\Big((\sqrt{q+r})^2+(\sqrt{r+p})^2+(\sqrt{p+q})^2\Big)\Big((\frac{x}{\sqrt{q+r}})^2+(\frac{y}{\sqrt{r+p}})^2+(\frac{z}{\sqrt{p+q}})^2\Big)\\
&\quad -(x^2+y^2+z^2).
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big((\sqrt{q+r})^2+(\sqrt{r+p})^2+(\sqrt{p+q})^2\Big)\Big((\frac{x}{\sqrt{q+r}})^2+\frac{y}{\sqrt{r+p}})^2+\frac{z}{\sqrt{p+q}})^2\Big)$$

$$\geqslant (x+y+z)^2.$$

Suy ra

$$M \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2),$$

hay

$$M \geqslant (xy+yz+zx)-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{p}{y+z-x}=\frac{q}{x+z-y}=\frac{r}{x+y-z}.$$

Bài toán 24. *Với $a,b,c>0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}P =&\Big(\frac{3a}{b+c}+3\Big)+\Big(\frac{4b}{c+a}+4\Big)+\Big(\frac{5c}{a+b}+5\Big)-12\\ =&(a+b+c)\Big(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\Big)-12\\ =&\frac{1}{2}\Big[(\sqrt{b+c})^2+(\sqrt{c+a})^2+(\sqrt{a+b})^2\Big]\Big[\Big(\sqrt{\frac{3}{b+c}}\Big)^2\\ &+\Big(\sqrt{\frac{4}{c+a}}\Big)^2+\Big(\sqrt{\frac{5}{a+b}}\Big)^2\Big]-12\\ \geqslant&\frac{1}{2}\Big(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\Big)^2-12\end{aligned}$$

Vậy $\quad P_{\min}=\dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\Big)^2-12$, khi :

$$\frac{b+c}{\sqrt{3}}=\frac{c+a}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{5}}.$$

1.6.3 Thứ tự và sắp lại thứ tự của bộ số

Kỹ thuật sắp lại thứ tự của bộ dãy số cho trước để phù hợp với đặc thù của bài toán đóng vai trò rất tích cực trong việc định hướng sáng tác bài tập cũng như định hướng cách chứng minh các bất đẳng thức. Chú ý rằng, sau khi sắp lại thứ tự bộ số, chẳng hạn $x \geqslant y \geqslant z$, ta thấy ngay cặp số $x-y, y-z$ gần đều hơn cặp $x-z, 0$. Vì vậy, ứng với mọi $\alpha > 1$, ta dễ dàng kiểm chứng hàm số $f(t) = t^\alpha$ có tính chất

$$f(x-z) + f(0) \geqslant f(x-y) + f(y-z),$$

hay

$$(x-z)^\alpha \geqslant (x-y)^\alpha + (y-z)^\alpha.$$

Một cách tổng quát, với mỗi bộ số sắp được

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n,$$

và với mọi $\alpha > 1$, ta đều có

$$(x_1 - x_n)^\alpha \geqslant (x_1 - x_2)^\alpha + (x_2 - x_3)^\alpha + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^\alpha.$$

Bài toán 25. *Giả sử $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2 b}{c^2} + \frac{b^2 c}{a^2} + \frac{c^2 a}{b^2} \geqslant a + b + c.$$

Giải. Ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \Big(\frac{a}{c}\sqrt{b}\frac{c}{a}\sqrt{b} + \frac{b}{a}\sqrt{c}\frac{a}{b}\sqrt{c} + \frac{c}{b}\sqrt{a}\frac{b}{c}\sqrt{a}\Big)^2\\ &\leqslant \Big(\frac{a^2 b}{c^2} + \frac{b^2 c}{a^2} + \frac{c^2 a}{b^2}\Big)\Big(\frac{c^2 b}{a^2} + \frac{a^2 c}{b^2} + \frac{b^2 a}{c^2}\Big).\end{aligned}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2 b}{c^2} + \frac{b^2 c}{a^2} + \frac{c^2 a}{b^2} \geqslant \frac{ab^2}{c^2} + \frac{bc^2}{a^2} + \frac{ca^2}{b^2}.$$

Thật vậy, ta có

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^2b}{c^2}+\frac{b^2c}{a^2}+\frac{c^2a}{b^2}\geqslant\frac{ab^2}{c^2}+\frac{bc^2}{a^2}+\frac{ca^2}{b^2}\\
\Leftrightarrow\ & a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3\geqslant a^3b^4+b^3c^4+c^3a^4\\
\Leftrightarrow\ & a^3b^3(a-b)+b^3c^3(b-c)+c^3a^3(c-a)\geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3-c^3+c^3)(a-b)+b^3c^3(b-c)+c^3a^3(c-a)\geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3-c^3)(a-b)+c^3\Big[a^3(a-b)+b^3(b-c)+a^3(c-a)\Big]\geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3-c^3)(a-b)+c^3\Big[a^3(c-b)+b^3(b-c)\Big]\geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3-c^3)(a-b)+c^3(b-c)(b^3-a^3)\geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & (b-c)(a-b)[a^2(ab^2-c^3)+c^2(a^3-b^2c)+abc(a^2-c^2)]\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Từ đây suy ra

$$(a+b+c)^2\leqslant\Big(\frac{a^2b}{c^2}+\frac{b^2c}{a^2}+\frac{c^2a}{b^2}\Big)^2$$

hay

$$a+b+c\leqslant\frac{a^2b}{c^2}+\frac{b^2c}{a^2}+\frac{c^2a}{b^2}.$$

Bài toán 26. *Giả sử $a\geqslant b\geqslant c>0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

Giải. Ta có

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\Big)^2=\\
=&\Big(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{b}{a}\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{a}{b}+\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{c}{b}\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{b}{c}+\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{a}{c}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{c}{a}\Big)^2\\
\leqslant&\Big(\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}+\frac{a^2}{c^3}\Big)\Big(\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\Big).
\end{aligned}
$$

Tiếp theo, ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}+\frac{a^2}{c^3}\geqslant\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}.$$

Thật vậy, ta có các biến đổi tương đương sau

$$\begin{aligned}
&\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}+\frac{a^2}{c^3}\geqslant\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\\
\Leftrightarrow\ & b^5c^3+c^5a^3+a^5b^3\geqslant a^5c^3+b^5a^3+c^5b^3\\
\Leftrightarrow\ & a^3b^3(a^2-b^2)+b^3c^3(b^2-c^2)+c^3a^3(c^2-a^2)\geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3-c^3+c^3)(a^2-b^2)+b^3c^3(b^2-c^2)+c^3a^3(c^2-a^2)\geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3-c^3)(a^2-b^2)+c^3(b^2-c^2)(a^3-b^3)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\Big)^2\leqslant\Big(\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\Big)^2,$$

hay

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\leqslant\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}.$$

Bài toán 27 (IMO 1995). *Cho các số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Giải.

Đặt $bc = x$, $ca = y$ và $ab = x$. Theo giả thiết, ta thu được

$$\frac{1}{a}=x,\ \frac{1}{b}=y,\ \frac{1}{c}=z$$

và

$$x+y+z\geqslant 3.$$

Ta đưa bất đẳng thức đã cho về dạng

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Do vai trò của a, b, c cũng như của x, y, z bình đẳng, không mất tổng quát, ta có thể giả thiết $a \geqslant b \geqslant c$ hay $0 < x \leqslant y \leqslant z$. Khi đó

$$\begin{cases} x^2\leqslant y^2\leqslant z^2\\ \dfrac{1}{y+z}\leqslant\dfrac{1}{z+x}\leqslant\dfrac{1}{x+y}.\end{cases}$$

Theo bất đẳng thức hoán vị, thì

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{x^2}{y+x}+\frac{y^2}{z+y}+\frac{z^2}{x+z}$$

và

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{x^2}{x+z}+\frac{y^2}{y+x}+\frac{z^2}{z+y}.$$

Từ đây, cộng các vế tương ứng, ta nhận được

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2+z^2}{x+z}+\frac{y^2+x^2}{y+x}+\frac{z^2+y^2}{z+y}\Big).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$x^2+z^2\geqslant\frac{(x+z)^2}{2},y^2+x^2\geqslant\frac{(y+x)^2}{2},z^2+y^2\geqslant\frac{(z+y)^2}{2},$$

và vì vậy

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2+z^2}{x+z}+\frac{y^2+x^2}{y+x}+\frac{z^2+y^2}{z+y}\Big)\geqslant\frac{1}{2}(x+y+z)\geqslant\frac{3}{2}.$$

Từ đây, ta thu được đpcm.

Nhận xét 4. *Sau khi sắp lại thứ tự, ta cũng có thể sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Chebyshev*

$$\Big(\frac{x+y+z}{3}\Big)\Big(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\Big)\leqslant\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}.$$

Từ các kết quả quen biết (ứng với $xyz=1$)

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant 1,\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geqslant\frac{3}{2},$$

ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

1.6.4 Điều chỉnh và lựa chọn tham số

Một số bất đẳng thức đồng bậc dạng không đối xứng thì dấu đẳng thức trong các bất đẳng thức xảy ra khi giá trị của các biến tương ứng không bằng nhau. Vì vậy, kỹ thuật để giải các bài toán cực trị dạng không đối xứng là rất cần thiết. Một trong những kỹ thuật cơ bản nhất chính là xây dựng thuật toán sắp thứ tự gần đều. Trong trường hợp dạng bậc hai thì sử dụng phương pháp miền giá trị như đã nêu ở trên. Trong phần này, ta nêu thêm một kỹ thuật nữa nhằm điều chỉnh tính đều bằng tham số. Ta đưa vào các tham số tự do cần thiết thường là các giá trị trung gian được xác định sau theo cách chọn đặc biệt để tất cả các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra. Tham số phụ được đưa vào hợp lí để phương trình xác định chúng có nghiệm.

Bài toán 28. *Cho số dương a. Xét bộ số dương x, y, z thoả mãn điều kiện*

$$xy + yz + zx = 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a(x^2 + y^2) + z^2.$$

Giải.

Ta thấy biểu thức P đối xứng theo x, y, do vậy, vai trò của x và y là bình đẳng nên có thể đặt $\frac{z^2}{2} = \alpha x^2 = \alpha y^2$,$\alpha > 0$ được chọn sau.

Theo bất đẳng thức Cauchy (hoặc bất đẳng thức AG) cho 2 số dương, ta có

$$\alpha x^2 + \frac{z^2}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xz,\ \ \alpha y^2 + \frac{z^2}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}yz,\ \ \sqrt{\frac{\alpha}{2}}(x^2 + y^2) \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xy.$$

Từ các bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\Big(\alpha + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\Big)(x^2 + y^2) + z^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(xy + yz + zx) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}.$$

Chọn α sao cho

$$\Big(\alpha + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\Big) = a,$$

hay

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{4}.$$

Ta thấy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{2} = \alpha x^2 = \alpha y^2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} x = y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1 + 8a}}, \\ z = \dfrac{\sqrt[4]{1 + 8a} - 1}{2\sqrt[4]{1 + 8a}}. \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho bằng

$$\min P = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{2}.$$

Bài toán 29. *Cho u, v là các số dương. Xét bộ số dương a, b, c thoả mãn điều kiện*

$$ab + bc + ca = 1;$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = ua^2 + vb^2 + c^2.$$

Giải.

Ta phân tích

$$u = x + y,\ \ v = z + t,\ \ 1 = m + n,$$

trong đó x, y, z, t, m, n là các số dương sẽ được chọn sau.

Theo bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương, ta có

$$xa^2 + tb^2 \geqslant 2\sqrt{xt}ab,\ \ ya^2 + nc^2 \geqslant 2\sqrt{yn}ac,\ \ zb^2 + mc^2 \geqslant 2\sqrt{zm}bc.$$

Từ các bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$Q \geqslant 2\sqrt{xt}ab + 2\sqrt{yn}ac + 2\sqrt{zm}bc.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xa^2 = tb^2 \\ ya^2 = nc^2 \\ zb^2 = mc^2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} \dfrac{x}{t} = \dfrac{b^2}{a^2} \\ \dfrac{n}{y} = \dfrac{a^2}{c^2} \\ \dfrac{z}{m} = \dfrac{c^2}{b^2} \end{cases}$

Suy ra

$$xzn = ytm. \tag{5.7}$$

Chọn x, y, z, t, m, n sao cho

$$xt = yn = zm = \alpha$$

thoả mãn (5.7)

Ta có

$$\begin{aligned}(5.7) &\Leftrightarrow (x + y)(z + t)(m + n) = uv \\ &\Leftrightarrow (xz + xt + yz + yt)(m + n) = uv \\ &\Leftrightarrow xzm + xtm + yzm + ytm + xzn + xtn + yzn + ytn = uv \\ &\Leftrightarrow (x + y + m + n + t + z)\alpha + 2xzn = uv.\end{aligned}$$

Mà $(xzn)(ytm) = \alpha^3$ nên $xzn = \sqrt{\alpha^3}$.

Đặt $q = \sqrt{\alpha}$ thì

$$2q^3 + (u + v + 1)q^2 - uv = 0. \tag{5.8}$$

Rõ ràng (5.8) có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là q_0.

Vậy $\min P = 2q_0$ với q_0 là nghiệm dương duy nhất của phương trình (5.8).

Nhận xét 5. *Hai bài toán trên hoàn toàn có thể giải được theo phương pháp tam thức bậc hai thông thường.*

Bài toán 30 (Thi chọn đội tuyển Việt Nam dự IMO-1994). *Xét bộ số thực a, b, c, d thoả mãn điều kiện*

$$\frac{1}{2} \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leqslant 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$Q = (a - 2b + c)^2 + (b - 2c + d)^2 + (b - 2a)^2 + (c - 2d)^2.$$

Giải.

Do vai trò của a và d, b và c là đối xứng trong biểu thức trên, ta dự doán rằng điểm cực trị sẽ đạt được tại các bộ số thoả mãn điều kiện $a^2 = d^2$, $b^2 = c^2$. Với p là số thực dương (được xác định sau), theo bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacopski, ta có

$$\begin{aligned}
&(1 + 3p)\Big(\frac{a^2}{1} + \frac{2b^2}{p} + \frac{c^2}{p}\Big) \geqslant (a - 2b + c)^2\\
&(p + 2)\Big(\frac{b^2}{p} + 2a^2\Big) \geqslant (b - 2a)^2\\
&(1 + 3p)\Big(\frac{d^2}{1} + \frac{2c^2}{p} + \frac{b^2}{p}\Big) \geqslant (d - 2c + b)^2\\
&(p + 2)\Big(\frac{c^2}{p} + 2d^2\Big) \geqslant (c - 2d)^2
\end{aligned}$$

Cộng vế với vế 4 bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$Q \leqslant (5 + 5p)(a^2 + d^2) + \frac{5 + 10p}{p}(b^2 + c^2). \tag{5.9}$$

Bây giờ ta cần chọn $p > 0$ sao cho

$$1 + p = \frac{1 + 2p}{p},$$

tức $p = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Thay $p = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ vào (5.9), ta nhận được

$$Q \leqslant \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a > 0, c > 0, b < 0, d < 0 \\ |a| = |d| = \left|\frac{b}{p}\right| = \left|\frac{c}{p}\right| \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ trên ứng với $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ta nhận được

$$\begin{cases} a = -d = -\dfrac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \\ -b = c = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}} \end{cases} \tag{5.10}$$

Vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức bằng

$$\max Q = \frac{5(3+\sqrt{5})}{2}$$

khi a, b, c, d thoả mãn điều kiện (5.10).

Tiếp theo, ta tìm giá trị nhỏ nhất.

Với cách phân tích tương tự như trên, việc tìm Min Q được trình bày hoàn toàn tương tự.

Ta có

$$\begin{aligned} Q &= 5(a^2+d^2) + 6(b^2+c^2) + 2a(c-4b) + 2d(b-4c) - 8bc \\ &\geqslant 5(a^2+d^2) + 6(b^2+c^2) - \frac{1}{p}[p^2a^2 + (c-4b)^2] - \frac{1}{p}[p^2d^2 + (b-4c)^2] - 8bc \end{aligned}$$

hay

$$Q \geqslant (5-p)(a^2+d^2) + \Big(6 - \frac{17}{p}\Big)(b^2+c^2) + 2\Big(\frac{8}{p} - 4\Big)bc.$$

Chọn p trong khoảng (2,5) sao cho $\dfrac{8}{p} - 4 < 0$ và vì vậy

$$\begin{aligned} Q &\geqslant (5-p)(a^2+d^2) + \Big(6 - \frac{17}{p}\Big)(b^2+c^2) + 2\Big(\frac{8}{p} - 4\Big)(b^2+c^2) \\ Q &\geqslant (5-p)(a^2+d^2) + \Big(2 - \frac{9}{p}\Big)(b^2+c^2). \end{aligned}$$

Tiếp theo,chọn p sao cho $5 - p = 2 - \dfrac{9}{p}$, tức $p = \dfrac{3+\sqrt{45}}{2} \in (2,5)$, ta được

$$Q \geqslant \Big(5 - \frac{3+\sqrt{45}}{2}\Big)(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqslant \frac{7-\sqrt{45}}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} pa = c - 4b \\ pd = b - 4c \\ b = c \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} a = d = \pm\dfrac{3}{2\sqrt{9+p^2}} \\ b = c = \mp\dfrac{3}{2\sqrt{9+p^2}} \end{cases} \quad \text{với } p = \frac{3+\sqrt{45}}{2}.$$

Vậy

$$\min Q = \frac{7-\sqrt{45}}{4}.$$

Bài toán 31. *Xét bộ số x, y, z thoả mãn điều kiện*

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{16}{25}xy = a^2,$$

trong đó a là số dương cho trước.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy + yz + zx.$$

Giải.

Với q tuỳ ý (được chọn sau) trong $(0,1)$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm, ta có

$$\begin{cases} q(x^2+y^2) \geqslant 2q\sqrt{x^2y^2} \geqslant 2qxy \\ (1-q)x^2 + \frac{z^2}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{1-q}{2}x^2z^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{1-q}{2}}xz \\ (1-q)y^2 + \frac{z^2}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{1-q}{2}y^2z^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{1-q}{2}}yz \\ \frac{16}{25}xy = \frac{16}{25}xy. \end{cases}$$

Cộng vế các tương ứng của các bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$a^2 \geqslant \Big(2q + \frac{16}{25}\Big)xy + 2\sqrt{\frac{1-q}{2}}(yz+zx). \tag{5.11}$$

Để xuất hiện biểu thức P ở vế phải của (1) ta chỉ việc chọn q sao cho

$$2q + \frac{16}{25} = 2\sqrt{\frac{1-q}{2}} \quad \text{hay} \quad q = \frac{7}{25}.$$

Thay giá trị q vào (5.11) ta thu được $P \leqslant \dfrac{5a^2}{6}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y = \frac{5z}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{15}{25}xy = a^2 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = y = \pm\frac{a}{\sqrt{3}} \\ z = \pm\frac{3a}{5\sqrt{3}}. \end{cases}$$

1.7 Bài tập

Bài 1. *Cho tam thức bậc hai* $f(t) = at^2 + bt + c$. *Đặt*

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}z = x_1 \\ \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z - \dfrac{1}{3}x = y_1 \\ \dfrac{2}{3}z + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}y = z_1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$f(x_1) + f(y_1) + f(z_1) = f(x) + f(y) + f(z), \ \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Bài 2. *Xác định các bộ số* α, β, γ *sao cho ứng với mọi tam thức bậc hai* $f(t) = at^2 + bt + c$, *ta đều có hằng đẳng thức*

$$f(x_1) + f(y_1) + f(z_1) = f(x) + f(y) + f(z), \ \ \forall x, y, z \in \mathbb{R},$$

trong đó

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = x_1 \\ \alpha y + \beta z + \gamma x = y_1 \\ \alpha z + \beta x + \gamma y = z_1 \end{cases}$$

Bài 3. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số*

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}, \ \ \textit{trong đoạn } [0; 2].$$

Bài 4. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số*

$$y = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}.$$

Bài 5. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số*

$$y = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x.$$

Bài 6. *Cho các số thực* $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số*

$$y = \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}.$$

Bài 7. *Xét các tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *thoả mãn điều kiện*

$$|f(x)| \leqslant 1 \ \ \forall x \in [-1, 1].$$

Chứng minh rằng

$$\max(4a^2 + 3b^2) = 16.$$

Bài 8. *Giả sử các số thực* x, y, z *thoả mãn điều kiện* $xy + yz + zx = 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$M = x^2 + 2y^2 + 5z^2.$$

Bài 9. *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Chứng minh rằng với mọi tam giác* ABC, *ta đều có*

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 1\Big)x^2 + \Big(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 1\Big)y^2 + \Big(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\Big)z^2\\ \geqslant&\Big(3 - \frac{b+c}{a}\Big)yz + \Big(3 - \frac{c+a}{b}\Big)zx + \Big(3 - \frac{a+b}{c}\Big)xy.\end{aligned}$$

Bài 10. *Cho* $a \geqslant b \geqslant c > 0$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3b}{c^3} + \frac{b^3c}{a^3} + \frac{c^3a}{b^3} \geqslant a + b + c.$$

Bài 11. *Cho* $0 \leqslant x < 1$. *Chứng minh rằng với mọi bộ số* (a_k), *ta đều có*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Bài 12. *Chứng minh rằng với mọi bộ số* (a_k), *ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k \leqslant \binom{2n}{n}^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Bài 13. *Chứng minh rằng với mọi bộ số dương* (a_k) *sao cho* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, *ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k + \frac{1}{a_k}\Big)^2 \geqslant n^3 + 2n + \frac{1}{n}.$$

Bài 14. *Chứng minh rằng với mọi bộ số* (a_k), *ta đều có*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big|^2 + \Big|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\Big|^2 \leqslant (n+2)\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Bài 15. *Chứng minh rằng với mọi bộ số* (a_{jk}, x_j, y_k) $(j = 1, 2, \dots, m;\ \ k = 1, 2, \dots, n)$, *ta đều có*

$$\Big|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jy_k\Big|^2 \leqslant \sqrt{DC}\Big(\sum_{j=1}^{m}|x_j|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\Big)^{1/2},$$

trong đó

$$D = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|,\ \ C = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{j=1}^{m}|a_{jk}|.$$

Bài 16. *Tìm các cặp số* a, b *thoả mãn điều kiện* $a \leqslant b \leqslant 4$ *sao cho bất đẳng thức:*

$$(x + y + z - 4)^2 < xyz$$

nghiệm đúng với mọi $x, y, z \in [a, b]$ *và hiệu* $b - a$ *là lớn nhất.*

Bài 17. *Chứng minh rằng với mọi* $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, *ta luôn có*

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geqslant \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

Bài 18 (K.Fan and J.Todd). *Giả sử* $p_{ij}(i, j = 1, \dots, n; i \neq j)$ *thoả mãn điều kiện*

$$p_{ij} = pji,\quad P = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} p_{ij} \neq 0.$$

Chứng minh rằng, khi đó với mọi cặp dãy số thực $a_1, \dots, a_n$ *và* $b_1, \dots, b_n$ *sao cho* $a_ib_j \neq a_jb_i (i \neq j)$, *ta đều có*

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i\Big)^2} \leqslant \frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1, j\neq i}\frac{p_{ij}a_j}{a_jb_i - a_ib_j}\Big)^2.$$

Chương 2

Hàm đơn điệu và tựa đơn điệu

2.1 Hàm đơn điệu

Về sau, ta thường sử dụng ký hiệu $I(a, b) \subset \mathbb{R}$ là nhằm ngầm định một trong bốn tập hợp (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ hoặc $[a, b]$ với $a < b$.

Thông thường, khi hàm số $f(x)$ xác định trên tập $I(a, b) \subset \mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện:

Với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2,$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng trên $I(a, b)$.

Đặc biệt, khi ứng với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2,$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng thực sự trên $I(a, b)$.

Ngược lại, khi

$$f(x_1) \geqslant f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2; \;\; \forall x_1, x_2 \in I(a, b),$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $I(a, b)$. Nếu xảy ra

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2; \;\; \forall x_1, x_2 \in I(a, b),$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm thực sự trên $I(a, b)$.

Những hàm số đơn điệu tăng thực sự trên $I(a, b)$ được gọi là hàm đồng biến trên $I(a, b)$ và hàm số đơn điệu giảm thực sự trên $I(a, b)$ được gọi là hàm nghịch biến trên tập đó.

Trong chương trình giải tích lớp 12, chúng ta đã rất quen biết các tiêu chuẩn để nhận biết một hàm số khả vi cho trước trên khoảng (a, b) là một hàm đơn điệu trên khoảng đó.

Định lý 22. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a, b).*

(i) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.

(i) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Các định lý sau đây cho ta một số đặc trưng đơn giản khác của hàm đơn điệu. Một vài đặc trưng quan trọng của lớp hàm vừa có tính đơn điệu vừa có tính chất lồi hoặc tính lõm sẽ được đề cập trong phần khảo sát các hàm lồi và hàm lõm ở các chương sau.

Định lý 23. *Hàm $f(x)$ các định trên $\mathbb{R}^+$ là một hàm số đơn điệu tăng khi và chỉ khi với mọi cặp bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big). \tag{1.1}$$

Proof. Khi $f(x)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ thì hiển nhiên ta có

$$f(x_j) \leqslant f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big), \ \ j = 1, 2, \dots, n.$$

Suy ra

$$a_j f(x_j) \leqslant a_j f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big), \ \ j = 1, 2, \dots, n. \tag{1.2}$$

Lấy tổng theo j ($j = 1, 2, \dots, n$), từ (1.2), ta thu được (1.1).

Ngược lại, với $n = 2$, từ (1.1), ta có

$$f(x) + \epsilon f(h) \leqslant (1 + \epsilon) f(x + h), \ \ \forall \epsilon, \, h > 0. \tag{1.3}$$

Khi $\epsilon \to 0$, ta thu được $f(x + h) \geqslant f(x)$, hay $f(x)$ là một hàm đồng biến. □

Định lý 24. *Để bất đẳng thức*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big), \tag{1.4}$$

được thoả mãn với mọi bộ số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$, điều kiện đủ là hàm $g(x) := \dfrac{f(x)}{x}$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$.

Proof. Nhận xét rằng, ta có hàm số $f(x) = xg(x)$ và (1.4) sẽ có dạng (1.1) với $a_j = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$):

$$\sum_{k=1}^{n} x_k g(x_k) \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) g\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big). \tag{1.5}$$

hiển nhiên được thoả mãn ứng với $g(x)$ là một hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$. □

Hệ quả 5. *Giả sử* $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ *là hàm đơn điệu tăng trong* $[0, +\infty]$*. Khi đó với mọi dãy số dương và giảm* $x_1, x_2, \dots, x_n$*, ta đều có*

$$f(x_1 - x_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k - f(x_{k+1})).$$

Nhận xét rằng, (1.5) không là điều kiện cần để $g(x)$ là một hàm đồng biến. Thật vậy, chỉ cần chọn hàm $g(x)$ có tính chất

$$0 < g(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \ \text{ và } \ \ \max g(x) \leqslant 2 \min g(x),$$

ta dễ dàng kiểm chứng rằng (1.5) được thoả mãn. Chẳng hạn, ta thấy hàm số

$$g(x) = 3 + \sin x, \ \ x \in \mathbb{R}^+,$$

thoả mãn điều kiện nêu trên và vì vậy nó thoả mãn điều kiện (1.5). Tuy nhiên, hàm $g(x)$ không là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$.

Nếu bổ sung thêm điều kiện: $g(x) := \dfrac{f(x)}{x}$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ và $x_1, x_2, \dots, x_n$, là bộ số gồm các số lớn hơn 1, thì ta thu được bất đẳng thức thực sự:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) < f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big).$$

Tương tự, ta cũng có thể phát biểu các đặc trưng đối với hàm đơn điệu giảm.

Định lý 25. *Hàm* $f(x)$ *xác định trên* $\mathbb{R}^+$ *là một hàm số đơn điệu giảm khi và chỉ khi với mọi cặp bộ số dương* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *và* $x_1, x_2, \dots, x_n$*, ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big).$$

Định lý 26. *Để bất đẳng thức*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geqslant f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big),$$

được thoả mãn với mọi bộ số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$*, điều kiện đủ là hàm* $g(x) := \dfrac{f(x)}{x}$ *đơn điệu giảm trên* $\mathbb{R}^+$*.*

Nhận xét rằng, trong số các hàm số sơ cấp một biến, thì hàm tuyến tính $f(x) = ax$ đóng vai trò đặc biệt quan trọng, vì nó rất dễ nhận biết về tính đồng biến (khi $a > 0$) và nghịch biến (khi $a < 0$) trong mỗi khoảng tuỳ ý cho trước. Đặc trưng sau đây sẽ cho ta thấy rõ hơn về đặc trưng (bất đẳng thức hàm) của hàm tuyến tính.

Định lý 27. *Giả thiết rằng, với mọi cặp bộ số dương*

$$a_1, a_2, \dots, a_n; \;\; x_1, x_2, \dots, x_n,$$

ta đều có

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \geqslant f\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big). \tag{1.6}$$

thì $f(x) = ax$, trong đó a là hằng số.

Proof. Lấy $n = 2$ và chọn $x_1 = x$, $x_2 = y$; $a_1 = \dfrac{y}{2x}$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, từ (1.6), ta thu được

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(y)}{y}, \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Suy ra $g(x) := \dfrac{f(x)}{x}$ là một hàm hằng trên $\mathbb{R}^+$. □

Tiếp theo, ta nêu một số tính chất của hàm đơn điệu để ước lượng một số tổng và tích phân.

Định lý 28. *(Maclaurin, Cauchy).*

Giả thiết rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $(0, +\infty)$. Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k). \tag{1.7}$$

Khi $f(x)$ là hàm nghịch biến thì có dấu bất đẳng thức thực sự.

Proof. Thật vậy, theo giả thiết, $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm, nên ta luôn có

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k), \;\; k = 0, 1, \dots$$

Lấy tổng theo k, ta thu được (1.7), chính là điều phải chứng minh. □

Định lý 29. *Giả thiết rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $(0,+\infty)$ và $\{a_k\}$ là một dãy tăng trong $(0,+\infty)$. Khi đó, ta luôn có*

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})f(a_k) \leqslant \int\limits_{a_0}^{a_n} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})f(a_{k-1}). \tag{1.8}$$

Khi $f(x)$ là hàm nghịch biến thì có dấu bất đẳng thức thực sự.

Proof. Thật vậy, theo giả thiết, $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm, nên ta luôn có

$$(a_k-a_{k-1})f(a_k) \leqslant \int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx \leqslant (a_k-a_{k-1})f(a_{k-1}).$$

Lấy tổng theo k, ta thu được (1.8), chính là điều phải chứng minh. □

Định lý 30. *Giả thiết rằng $f(x)$ là một hàm đồng biến trên $[0,+\infty)$ và $f(0)=0$. Gọi $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$. Khi đó, ta luôn có*

$$ab \leqslant \int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^b g(x)dx, \ \ \forall a,b \geqslant 0.$$

Proof. Bất đẳng thức được suy trực tiếp bằng cách so sánh diện tích tạo bởi đường cong $y=f(x)$ và $x=g(y)$ với diện tính hình chữ nhật tạo bởi $x=0,\ x=a;\ y=0,$ $y=b$. □

Hệ quả 6. *Giả thiết rằng $f(x)$ là một hàm đồng biến trên $[0,+\infty)$ và $f(0)=0$. Gọi $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$. Khi đó, ta luôn có*

$$ab \leqslant af(a)+bg(b), \ \ \forall a,b \geqslant 0.$$

Định lý 31. *Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm và đơn điệu tăng trên $[\alpha,\beta)$ với $0 \leqslant \alpha < \beta$. Khi đó $\forall a \in [\alpha,\beta)$; $\forall b \in [f(\alpha), f(\beta))$ ta có*

$$\int\limits_{\alpha}^{a} f(x)dx + \int\limits_{f(\alpha)}^{b} f^{-1}(x)dx \geqslant ab - \alpha f(\alpha)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(a)=b$.

Proof. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $x = \alpha$, $x = a$, $y = 0$, $y = f(x)$ thì

$$S_1 = \int\limits_{\alpha}^{a} f(x)dx$$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(\alpha)$, $y = b$, $x = 0$, $y = f^{-1}(x)$, thì

$$S_2 = \int\limits_{f(\alpha)}^{b} f^{-1}(x)dx$$

Gọi S là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, thì $S = ab$ Gọi S' là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 0$, $x = \alpha$, $y = 0$, $y = f(\alpha)$, thì $S' = \alpha f(\alpha)$. Trong cả hai trường hợp $f(a) \leqslant b$ hoặc $f(a) > b$, ta đều có $S_1 + S_2 \geqslant S - S'$. Do đó

$$\int\limits_{\alpha}^{a} f(x)dx + \int\limits_{f(\alpha}^{b} f^{-1}(x)dx \geqslant ab - \alpha f(\alpha).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(a) = b$. □

Định lý 32. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[0, b]$,$\forall a \in [0, b]$. Khi đó, ta luôn có*

$$b\int\limits_{0}^{a} f(x)dx \geqslant a\int\limits_{0}^{b} f(x)dx. \tag{1.9}$$

Tương tự, với $f(x)$ liên tục và đồng biến trên $[0, b]$,$\forall a \in [0, b]$ thì

$$b\int\limits_{0}^{a} f(x)dx \leqslant a\int\limits_{0}^{b} f(x)dx.$$

Proof. Nếu $a = 0$ hoặc $a = b$ thì bất đẳng thức (1.9) trở thành đẳng thức.

Nếu $0 < a < b$, thì do $f(x)$ nghịch biến trên $[0, b]$ nên với mọi x thoả mãn điều kiện $0 < a \leqslant x \leqslant b$, ta đều có $f(x) \leqslant f(a)$. Suy ra

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \leqslant f(a)\int\limits_{a}^{b} dx = (b - a)f(a).$$

Vậy nên

$$f(a) \geqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (1.10)$$

Mặt khác, khi $0 < x \leqslant a$, thì $f(x) \geqslant f(a)$. Suy ra

$$\int\limits_0^a f(x)dx \geqslant \int\limits_0^a f(a)dx = af(a),$$

hay

$$\frac{1}{a}\int\limits_0^a f(x)dx \geqslant f(a). \qquad (1.11)$$

Từ (1.10) và (1.11), suy ra

$$\frac{1}{a}\int\limits_0^a f(x)dx \geqslant f(a) \geqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$$

hay

$$\frac{1}{a}\int\limits_0^a f(x)dx \geqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (1.12)$$

Do đó

$$(b-a)\int\limits_0^a f(x)dx \geqslant a\int\limits_a^b f(x)dx \ \text{ (do } a > 0, (b-a) > 0)$$

hay

$$(b-a)\int\limits_0^a f(x)dx \geqslant a\Big[\int\limits_a^0 f(x)dx + \int\limits_0^b f(x)dx\Big].$$

Vậy nên

$$b\int\limits_0^a f(x)dx \geqslant a\int\limits_0^b f(x)dx. \qquad (1.13)$$

Ta chứng minh rằng, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b$ hoặc $a = 0$.

Thật vậy, nếu tồn tại $c \in (0, b)$ sao cho

$$b\int\limits_0^c f(x)dx = c\int\limits_0^b f(x)dx$$

thì

$$\frac{1}{c}\int\limits_0^c f(x)dx = \frac{1}{b}\int\limits_0^b f(x)dx = \frac{1}{b-c}\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Vậy

$$\frac{1}{c}\int\limits_0^c f(x)dx = \frac{1}{b-c}\int\limits_c^b f(x)dx. \tag{1.14}$$

Từ (1.14) suy ra tồn tại $\xi \in (0, c)$ và $\delta \in (c, b)$, sao cho

$$\frac{1}{c}(c-0)f(\xi) = \frac{1}{b-c}(b-c)f(\delta).$$

Mà $\delta > \xi$, điều này trái với giả thiết rằng $f(x)$ là hàm số nghịch biến trong (a, b). Vậy, không xảy ra dấu đẳng thức. □

Hệ quả 7. *- Nếu $b = 1$ và $f(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[0, 1]$ thì $\forall a \in [0, 1]$, ta đều có*

$$\int\limits_0^a f(x)dx \geqslant a\int\limits_0^1 f(x)dx.$$

- Nếu $b = 1$, $f(x)$ liên tục và đồng biến trên $[0, 1]$ thì $\forall a \in [0, 1]$, ta đều có

$$\int\limits_0^a f(x)dx \leqslant a\int\limits_0^1 f(x)dx.$$

Định lý 33 (Bất đẳng thức thứ tự Chebyshev). *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm đơn điệu tăng và (x_k) là một dãy đơn điệu tăng:*

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n.$$

Khi đó với mọi bộ trọng (p_j):

$$p_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \dots, n;\ \ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1,$$

ta đều có

$$\Big(\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)\Big)\Big(\sum_{k=1}^n p_k g(x_k)\Big) \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)g(x_k)\Big).$$

Proof. Theo giả thiết thì

$$0 \leqslant [f(x_k) - f(x_j)][g(x_k) - g(x_j)]$$

hay

$$f(x_k)g(x_j) + f(x_j)g(x_k) \leqslant f(x_j)g(x_j) + f(x_k)g(x_k). \tag{1.15}$$

Để ý rằng

$$\sum_{j,k=1}^{n} p_j p_k [f(x_k)g(x_j) + f(x_j)g(x_k)] = 2\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k g(x_k)\Big)$$

và

$$\sum_{j,k=1}^{n} p_j p_k [f(x_j)g(x_j) + f(x_k)g(x_k)] = 2\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)g(x_k).$$

Kết hợp các đẳng thức này với (1.15), ta thu được

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k g(x_k)\Big) \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)g(x_k)\Big).$$

□

2.2 Hàm tựa đơn điệu

Ta nhắc lại tính chất quen biết sau đây.

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và đơn điệu tăng trên $I(a, b)$. Khi đó, với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 \leqslant x_2,$$

và ngược lại, ta có

$$f(x_1) \geqslant f(x_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 \leqslant x_2;\;\; \forall x_1, x_2 \in I(a, b),$$

khi $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $I(a, b)$.

Tuy nhiên, trong ứng dụng, có nhiều hàm số chỉ đòi hỏi có tính chất yếu hơn, chẳng hạn như:

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 \leqslant x_2,\;\; \forall x_1, x_2 > 0 \;\text{ mà }\; x_1 + x_2 \leqslant 1,$$

thì không nhất thiết $f(x)$ phải là một hàm đơn điệu tăng trên $(0, 1)$.

Ví dụ, với hàm số $f(x) = \sin \pi x$, ta luôn có khẳng định sau đây.

Bài toán 1. *Nếu A, B, C là các góc của ΔABC thì*

$$\sin A \leqslant \sin B \Leftrightarrow A \leqslant B. \tag{2.1}$$

Như vậy, mặc dù hàm $f(x) = \sin \pi x$ không đồng biến trong $(0, 1)$, ta vẫn có bất đẳng thức (suy từ (2.1)), tương tự như đối với hàm số đồng biến trong $(0, 1)$:

$$\sin \pi x_1 \leqslant \sin \pi x_2 \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2,\ \ \forall x_1, x_2 > 0 \ \text{ mà } \ \ x_1 + x_2 < 1. \tag{2.2}$$

Ta đi đến định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 4. *Hàm số $f(x)$ xác định trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ được gọi là hàm số tựa đồng biến trong khoảng đó, nếu*

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2,\ \ \forall x_1, x_2 > 0 \ \textit{ mà } \ \ x_1 + x_2 < b. \tag{2.3}$$

Tương tự, ta cũng có định nghĩa hàm tựa nghịch biến trong một khoảng cho trước.

Định nghĩa 5. *Hàm số $f(x)$ xác định trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ được gọi là hàm số tựa nghịch biến trong khoảng đó, nếu*

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2,\ \ \forall x_1, x_2 > 0 \ \textit{ mà } \ \ x_1 + x_2 < b. \tag{2.4}$$

Bài toán 2. *Mọi hàm $f(x)$ tựa đồng biến trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ đều đồng biến trong khoảng $\Big(0, \dfrac{b}{2}\Big)$.*

Proof. Khẳng định được suy trực tiếp từ Định nghĩa 1. Thật vậy, khi $x_1, x_2 \in \Big(0, \dfrac{b}{2}\Big)$ thì hiển nhiên, $x_1 + x_2 < b$ và ta thu được

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2,\ \ \forall x_1, x_2 \in \Big(0, \frac{b}{2}\Big). \tag{2.5}$$

Hệ thức (2.5) cho ta điều cần chứng minh. □

Bài toán 3. *Giả thiết rằng hàm $h(x)$ đồng biến trong khoảng $\Big(0, \dfrac{b}{2}\Big]$. Khi đó hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} h(x), \ \ \textit{khi} \ \ x \in \Big(0, \dfrac{b}{2}\Big], \\ h(b - x), \ \ \textit{khi} \ \ x \in \Big[\dfrac{b}{2}, b\Big), \end{cases}$$

là hàm số tựa đồng biến trong $(0, b)$.

Định lý 34. *Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0,b) \subset (0,+\infty)$ là hàm tựa đồng biến trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là các điều kiện sau đây đồng thời được thoả mãn:*

(i) $f(x)$ đồng biến trong khoảng $\left(0,\dfrac{b}{2}\right)$

(ii) $f(x) \geqslant f(b-x),\ \ \forall x \in \left[\dfrac{b}{2},b\right)$.

Proof. Khi hàm $f(x)$ tựa đồng biến trong $(0,b)$ thì theo Bài toán 1, hàm $f(x)$ đồng biến trong khoảng $\left(0,\dfrac{b}{2}\right)$. Xét $x \in \left[\dfrac{b}{2},b\right)$. Khi đó, để $x_1 \in (0,b)$ sao cho đồng thời $x_1 < x$ và $x_1 + x < b$, ta cần chọn $x_1 \in \left(0,\dfrac{b}{2}\right)$ và $x_1 < b - x \in \left(0,\dfrac{b}{2}\right)$. Do vậy, mọi $x_2 \in \left[\dfrac{b}{2},b\right)$ ta đều có $x_1 < x_2$ và để $x_1 + x_2 < b$ thì dễ thấy $x_2 \in \left(\dfrac{b}{2},b-x_1\right)$. Vì theo giả thiết, thì $f(x_1) < f(x_2)$ với mọi $x_2 \in \left(\dfrac{b}{2},b-x_1\right)$, nên $f(x_2) > f(x)$ (do $x_1 < x$) □

2.3 Hàm đơn điệu từng khúc và phép đơn điệu hoá hàm số

Nhìn chung, khi giải quyết các bài toán thực tế, ta thường phải làm việc với lớp các hàm đơn điệu từng khúc. Trong mục này, ta chủ yếu xét các hàm số $f(x)$ xác định trên $I(a,b)$ mà trên đó hàm $f(x)$ chỉ có hữu hạn các điểm dừng (điểm cực trị).

Trước hết ta xét một số ví dụ đơn giản với hàm số có hai khoảng đơn điệu.

Ví dụ 7. *Xét hàm số*

$$f(x) = |x-p|,\ \ 0 < p < 1.$$

Xác định các hàm số đơn điệu $g(x)$ trong $[0,1]$ sao cho

$$g(x) \geqslant f(x),\ \ \forall x \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Giải. Nhận xét rằng, đồ thị hàm số đã cho, trên $\mathbb{R}$, có trục đối xứng $x = \dfrac{p}{2}$.

Trước hết, ta xác định hàm số đơn điệu giảm $g_0(x)$ mức thấp nhất thoả mãn (3.1), tức là, ứng với mọi $g(x)$ đơn điệu giảm và thoả mãn (3.1), ta đều có

$$g(x) \geqslant g_0(x),\ \ \forall x \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Vì trong $[0,p]$ hàm số đã cho nghịch biến nên hiển nhiên $g_0(x) = f(x)$ trong $[0,p]$. Vì trong $[p,1]$, hàm $f(x)$ đồng biến, nên $g_0(x) \equiv 0$. Vậy ta có hàm số đơn điệu giảm $g_0(x)$ mức thấp nhất thoả mãn (3.1) được xác định theo công thức

$$g_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{khi } 0 \leqslant x \leqslant p \\ f(p) = 0, & \text{khi } p \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Mọi hàm số đơn điệu giảm khác được xác định theo (3.2),

Tiếp theo, ta xác định hàm số đơn điệu tăng $g_1(x)$ mức thấp nhất thoả mãn (3.1), tức là, ứng với mọi $g(x)$ đơn điệu tăng và thoả mãn (3.1), ta đều có

$$g(x) \geqslant g_1(x),\ \ \forall x \in [0,1]. \tag{3.3}$$

Xét trường hợp $0 \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{2}$ hay $0 \leqslant 2p \leqslant 1$. Vì trong $[0,p]$ hàm số đã cho nghịch biến và đồ thị hàm số đã cho có trục đối xứng $x = \dfrac{p}{2}$, nên hiển nhiên $g_0(x) = f(0) = p$ trong $[0,2p]$. Vì trong $[2p,1]$, hàm $f(x)$ đồng biến, nên $g_0(x) \equiv f(x)$. Vậy ta có hàm số đơn điệu tăng $g_1(x)$ mức thấp nhất thoả mãn (3.1) được xác định theo công thức

$$g_0(x) = \begin{cases} p, & \text{khi } 0 \leqslant x \leqslant 2p \\ f(x), & \text{khi } 2p \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Đối với trường hợp $\dfrac{1}{2} \leqslant p$, thì hiển nhiên hàm số đơn điệu tăng $g_1(x)$ mức thấp nhất thoả mãn (3.1) sẽ là hàm hằng $g_1(x) \equiv p$.

Mọi hàm số đơn điệu tăng khác được xác định theo (3.3),

Tương tự, ta xét việc mô tả lớp hàm đơn điệu cho trường hợp hàm số đã cho ở đường mức cao nhất.

Ví dụ 8. *Xét hàm số*

$$f(x) = x^2 - 2px + 1,\ \ 0 < p < 1.$$

Xác định các hàm số đơn điệu $g(x)$ trong $[0,1]$ sao cho

$$g(x) \leqslant f(x),\ \ \forall x \in [0,1]. \tag{3.4}$$

Giải. Nhận xét rằng, đồ thị hàm số $y = f(x)$ (xét trên $\mathbb{R}$) có trục đối xứng $x = p$.

Trước hết, ta xây dựng hàm số đơn điệu giảm $g_0(x)$ mức cao nhất thoả mãn (3.4), tức là, ứng với mọi $g(x)$ đơn điệu giảm và thoả mãn (3.4), ta đều có

$$g(x) \leqslant g_0(x),\ \ \forall x \in [0,1]. \tag{3.5}$$

Vì trong $[0,p]$ hàm số đã cho nghịch biến nên hiển nhiên $g_0(x) = f(x)$ trong $[0,p]$. Vì trong $[p,1]$, hàm $f(x)$ đồng biến, nên

$$g_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{khi } 0 \leqslant x \leqslant p \\ f(p) = 1, & \text{khi } p \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Mọi hàm số đơn điệu giảm khác được xác định theo (3.5), Tiếp theo, ta xác định hàm số đơn điệu tăng $g_1(x)$ mức cao nhất thoả mãn (3.4), tức là, ứng với mọi $g(x)$ đơn điệu tăng và thoả mãn (3.4), ta đều có

$$g(x) \leqslant g_1(x), \ \ \forall x \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Xét trường hợp $0 \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{2}$ hay $0 \leqslant 2p \leqslant 1$. Vì trong $[0,p]$ hàm số đã cho nghịch biến và đồ thị hàm số đã cho có trục đối xứng $x = \dfrac{p}{2}$, nên hiển nhiên $g_0(x) = f(0) = 1$ trong $[0,2p]$. Vì trong $[2p,1]$, hàm $f(x)$ đồng biến, nên $g_0(x) \equiv f(x)$. Vậy ta có hàm số đơn điệu tăng $g_1(x)$ mức cao nhất thoả mãn (3.4) được xác định theo công thức

$$g_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{khi } 0 \leqslant x \leqslant 2p \\ f(x), & \text{khi } 2p \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Đối với trường hợp $\dfrac{1}{2} \leqslant p$, thì hiển nhiên hàm số đơn điệu tăng $g_1(x)$ mức cao nhất thoả mãn (3.4) sẽ là hàm hằng $g_1(x) \equiv 1$.

Mọi hàm số đơn điệu tăng khác được xác định theo (3.4),

Ví dụ 9. *Cho số $p \in (0,1)$ và cho hàm số $f(x) = |x-p|$. Xét các bộ số x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$) trong $[0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$M = |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + |f(x_3) - f(x_4)|.$$

Giải. Nhận xét rằng, đồ thị hàm số đã cho, trên $\mathbb{R}$, có trục đối xứng $x = \dfrac{p}{2}$.

Bài toán 4 (Tổng quát). *Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có hữu hạn khoảng đơn điệu trên $[a,b]$ và $1 < n \in \mathbb{N}$. Xét tất cả các dãy số tăng $\{x_i\}$ trong $[a,b]$:*

$$x_0 = a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} = b.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=0}^{n} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big|.$$

Để giải quyết bài toán này ta xét từng trường hợp cụ thể.

Bài toán 5. *Cho hàm $f(x)$ liên tục và đơn điệu trên $[a,b]$ với $-\infty < a < b < +\infty$ và $1 < n \in \mathbb{N}$. Xét tất cả các dãy số tăng $\{x_i\}$ trong $[a,b]$:*

$$x_0 = a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} = b.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=0}^{n} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big|.$$

Giải. Vì $f(x)$ đơn điệu trên $[a,b]$ nên với mọi dãy tăng $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ trong $[a,b]$:

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

ta đều có

$$\sum_{i=0}^{n} \Big|f(x_i) - f(x_{i+1})\Big| = \Big|f(a) - f(b)\Big|.$$

Do vậy

$$\max \sum_{i=0}^{n} \Big|f(x_i) - f(x_{i+1})\Big| = \Big|f(a) - f(b)\Big|.$$

Bài toán 6. *Cho* $n_0 \in \mathbb{N}$, $-\infty < a < b < +\infty$ *và hàm* $f(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *và có* n_0 *khoảng đơn điệu,* $n_0 \leqslant n \in \mathbb{N}$.

Xét tất cả các dãy số tăng $\{x_i\}$ *trong* $[a,b]$*:*

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} = b.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i+1}).$$

Giải.

Theo giả thiết, số điểm cực trị của $f(x)$ trên (a,b) là n_0.

Do $n \geqslant n_0$, ta có lời giải của bài toán như sau:

Giả sử $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là một dãy tăng tuỳ ý trong $[a,b]$ sao cho

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Gọi các điểm cực trị (điểm tại đó hàm đã cho thay đổi tính đơn điệu) của $f(x)$ là

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}; (a_1 < a_2 < \cdots < a_{n_0}).$$

Khi đó ta bổ sung các điểm cực trị này vào dãy ban đầu, ta có dãy mới: $(x'_i)_{i=1}^{m}$.

$$(n \leqslant m \leqslant n + n_0)\text{với } x'_0 = a$$
$$x'_{m+1} = b$$

(Dãy mới $(x'_i)_{i=1}^{m}$ cũng được sắp xếp theo thứ tự tăng.

Ta có

$$\sum_{i=0}^{n} \Big|f(x_i) - f(x_{i+1})\Big| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \Big|f(x^!_i) - f(x^!_{i+1})\Big|.$$

Mặt khác, rõ ràng trên $[a_i, a_{i+1}]$ hàm số $f(x)$ đơn điệu, nên

$$\sum_{i=0}^{m} \Big|f(x'_i) - f(x'_{i+1})\Big| \leqslant \sum_{i=0}^{n_0} \Big|f(a_i) - f(a_{i+1})\Big|.$$

Vậy

$$\max \sum_{i=0}^{n} \Big|f(x_i) - f(x_{i+1})\Big| = \sum_{i=0}^{n_0} \Big|f(a_i) - f(a_{i+1})\Big|.$$

Bài toán 7. *Cho $f(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$, $f(x)$ có m điểm cực trị và $m \leqslant n \in \mathbb{N}$. Giả sử*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = M, -\infty < M < +\infty.$$

Xét tất cả các dãy số tăng $\{x_i\}$:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < +\infty.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=0}^{n} \Big|f(x_i) - f(x_{i+1})\Big| \leqslant M.$$

Giải.

Trước hết, ta có nhận xét rằng đối với các bài toán tìm giá trị lớn nhất của biểu thức ở trên, thì khi cố định n và a, ta có

$$\max \sum_{i=0}^{n} \Big|f(x_i) - f(x_{i+1})\Big|$$

là một hàm đơn điệu tăng đối với "biến số" b. Như vậy, khi b đủ lớn sao cho $[a, b]$ chứa tất cả các điểm cực trị của $f(x)$ trên $[a, +\infty)$, thì

$$F(b) = \max \sum_{i=0}^{n} \Big|f(x_i) - f(x_{i+1})\Big|$$

chỉ phụ thuộc vào giá trị $f(b)$. Vì vậy

$$\sum_{i=0}^{n} \Big|f(x_i) - f(x_{i+1})\Big| \leqslant \lim_{b\to+\infty} F(b) = M.$$

Bài toán 8. *Cho $f(x)$ liên tục trên $(-\infty, b]$. Giả thiết rằng*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = m, \quad -\infty < m < +\infty$$

và $f(x)$ có n_0 (hữu hạn) điểm cực trị trên $(-\infty, b]$, $n_0 \leqslant n \in \mathbb{N}$.

Xét tất cả các dãy số $x_0 = -\infty < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} = b$.

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=0}^{n} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big| \leqslant m.$$

Giải. Bài toán này được giải quyết tương tự như bài toán trên. Xét $[a, b]$ với a đủ bé sao cho $[a, b]$ chứa tất cả các điểm cực trị của $f(x)$. Khi đó, với mọi dãy $(x_i)_{i=1}^{n}$ sao cho $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$, ta tính được:

$$F(a) = \max \sum_{i=0}^{n} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big|.$$

Dễ thấy khi nới rộng $[a, b]$ về phía bên trái thì $F(a)$ cũng là hàm đơn điệu tăng. Suy ra

$$\sum_{i=0}^{n} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big| \leqslant \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

Bài toán 9. *Cho $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$M = \sum_{i=0}^{n} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big|,$$

trong đó

$$x_i \in \mathbb{Z}, \quad x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Giải.

Với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $a < b$, thì trên $[a, b]$ có hữu hạn số điểm nguyên là $n_0 = b - a + 1$. Như vậy, nếu $n = b - a - 1$ thì chỉ có một cách lựa chọn dãy $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Các điểm nguyên nằm trong $[a, b]$, nên

$$\max \sum_{i=0}^{n} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big| = \sum_{i=0}^{n} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big|.$$

Nếu $n + 2 < n_0$ tức $n < n_0 - 2$, ta có các điểm nguyên trong $[a, b]$ là

$$a, a + 1 \ldots, b - 1, b.$$

Tương ứng, ta có các giá trị của hàm là

$$\{f(a), f(a+1); \dots ; f(a+i_1); \dots ; f(a+i_k); \dots f(b)\}.$$

Như vậy, dãy trên có thể phân thành các dãy con (bao gồm một số hạng liên tiếp) và có tính chất tăng dần hoặc giảm dần.

Giả sử dãy được phân thành:

$$\{f(a), f(a+1); \dots ; f(a+i_1)\}; \dots \{f(a+i_k); \dots ; f(b)\}.$$

Thực chất các điểm nguyên $a+i_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ hoặc là phần nguyên của các điểm cực trị hoặc là phần nguyên của các điểm cực trị cộng thêm 1.

Khi đó ta xét các trường hợp cụ thể như sau.

Nếu $n \geqslant k$, ta có

$$\max \sum_{i=0}^{n} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big| = \sum_{j=0}^{k} \Big| f(a+i_j) - f(a+i_{j+1}) \Big|.$$

Các số a_{ij} xác định trong dãy $j = 1, 2, \dots , k$, với $a + i_0 = a$, $a + i_{k+1} = b$.

- Nếu $1 < n < k; \{x_1, x_2, \dots , x_n\}$ là dãy các điểm nguyên thoả mãn điều kiện của bài toán, thì ta xét tất cả các tổ hợp chập n của k phần tử

$$(a_{i1},\ a_{i2},\ \dots ,\ a_{ik})$$

ứng với mỗi trường hợp. Chẳng hạn $(a_{i1},\ a_{i2},\ \dots ,\ a_{in})$ là một tổ hợp chập n của k phần tử a_{ij} đã sắp theo thứ tự tăng. Ta tính được

$$S = \sum_{j=0}^{n} \Big| f(a_{ij}) - f(a_{ij+1}) \Big|.$$

Chọn giá trị lớn nhất trong các tổng S ở trên, ta được

$$\max \sum_{i=0}^{n} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big|.$$

Bài toán 10. *Xét tất cả các dãy số*

$$0 = x_0 < x_1 < \dots x < x_{1999} = 2\pi.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=0}^{1998} \Big| \cos(x_i) - \cos(x_{i+1}) \Big|.$$

Giải.

Ta có các điểm cực trị của hàm số $f(x) = \cos x$ trên $[0, 2\pi]$ là $x = 0$, $x = \pi$ và $x = 2\pi$. Vậy nên

$$\max \sum_{i=0}^{1998} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big| = \Big| \cos 0 - \cos \pi \Big| + \Big| \cos \pi - \cos 2\pi \Big| = 4.$$

Bài toán 11. *Cho* $f(x) = x^3 - 3x^2$. *Tìm* $x \in (-10, 10)$, *sao cho*

$$S = \Big| f(-10) - f(x) \Big| + \Big| f(x) - f(10) \Big|$$

đạt giá trị lớn nhất.

Giải.

Trước hết ta cần xác định các điểm cực trị của hàm số $f(x)$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$ và $f'(x) = 0$ khi $x = 0$, $x = 2$.

Qua điểm $x = 0$ và $x = 2$, hàm $f'(x)$ đổi dấu. Vậy $x = 0, x = 2$ là hai điểm cực trị của $f(x)$ trên $(-10, 10)$.

Ta chỉ cần xét :

$$x = 0 \to S_1 = \Big| f(-10) - f(0) \Big| + \Big| f(0) - f(10) \Big| = 1300 + 700 = 2000$$
$$x = 2 \to S_2 = \Big| f(-10) - f(2) \Big| + \Big| f(2) - f(10) \Big| = 1300 + 700 = 2000.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức bằng $\max\{S_1, S_2\} = 2000$. Đạt được khi $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bài toán 12. *Cho* $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2$. *Tìm* $x_1, x_2 \in (-2, 3)$ *sao cho* $x_1 < x_2$ *và*

$$S = \Big| f(-2) - f(x_1) \Big| + \Big| f(x_1) - f(x_2) \Big| + \Big| f(x_2) - f(3) \Big|$$

đạt giá trị lớn nhất.

Giải.

Dễ thấy trên $[-2, 3]$, hàm số $f(x)$ có các điểm cực trị là $x = \dfrac{-5}{4}, x = 0, x = 2$.

Ta có $C_3^2 = 3$ nên sẽ có 3 bộ phần tử sắp xếp theo thứ tự tăng dần lấy từ $\{x = \dfrac{-5}{4}, 0, 2\}$, là

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-5}{4} \\ x_2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5}{4} \\ x_2 = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Vậy ta cần xét cả 3 trường hợp.

- Với $x_1 = \dfrac{-5}{4}, x_2 = 0$, ta có

$$\begin{aligned}S_1 &= \left|f(-2) - f\Big(\frac{-5}{4}\Big)\right| + \left|f\Big(\frac{-5}{4}\Big) - f(0)\right| + \left|f(0) - f(3)\right|\\ &= \left|4 - \frac{875}{256}\right| + \left|\frac{-875}{256} - 0\right| + |0 - 9| = 13 - \frac{875}{128}.\end{aligned}$$

- Với $x_1 = \dfrac{-5}{4}, x_2 = 2$, ta tính được $S_2 = 35$. Thật vậy

$$S_2 = \left|f(-2) - f\Big(\frac{-5}{4}\Big)\right| + \left|f\Big(\frac{-5}{4}\Big) - f(2)\right| + \left|f(2) - f(3)\right| = 35.$$

Vậy nên $S_a = \max\{S_1, S_2, S_3\}$, khi $x_1 = 0, x_2 = 2$ hoặc $x_1 = \dfrac{-5}{4}, x_2 = 2$.

Bài toán 13. *Cho $f(x) = \sin x$. Xét tất cả các dãy số (x_i) sao cho $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots x_9 = 10\pi$. Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$M = \sum_{i=0}^{8} \left|f(x_i) - f(x_{i+1})\right|.$$

Giải.

Dễ thấy trên $[0, 10\pi]$, hàm số $f(x)$ có các điểm cực trị là $x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ với $k = 0, 1, \ldots, 9$, trong đó

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi, x_5 = \frac{\pi}{2} + 4\pi, x_7 = \frac{\pi}{2} + 6\pi, x_9 = \frac{\pi}{2} + 8\pi$$

có cùng độ cao tung độ,

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi, x_4 = \frac{\pi}{2} + 3\pi, x_6 = \frac{\pi}{2} + 5\pi, x_8 = \frac{\pi}{2} + 7\pi, x_{10} = \frac{\pi}{2} + 9\pi,$$

có cùng độ cao tung độ.

Do vậy, trong số các tổ hợp chập 8 của 10 phần tử, ta chỉ cần chọn 8 điểm liên tiếp (trong số các điểm cực trị đã được đánh số thứ tự ở trên).

Do vậy

$$\begin{aligned}\max\sum_{i=0}^{8}\left|f(x_i) - f(x_{i+1})\right| &= \left|\sin 0 - \sin\frac{\pi}{2}\right| + \left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin\Big(\frac{\pi}{2} + \pi\Big)\right| +\\ &+ \cdots + \left|\sin\Big(\frac{\pi}{2} + 7\pi\Big) - \sin 10\pi\right| = 1 + 7.2 + 1 = 16\end{aligned}$$

Bài toán 14. *Cho* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. *Xét dãy số tuỳ ý*

$$x_0 = -2 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leqslant 2005.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=0}^{3} |f(x_i) - f(x_{i+1})|.$$

Giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$. Suy ra $f'(x) = 0$ khi $x = \pm 1$.

Xét $x > 1$, trên $[-2, x]$ ta xét phân hoạch tuỳ ý $x_0 = -2 < x_1 < x_2 < x_3 < x$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{i=0}^{3} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big| \\
&= \max \sum_{i=0}^{3} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big| = \\
&= \Big| f(-2) - f(-1) \Big| + \Big| f(-1) - f(1) \Big| + \Big| f(1) - f(2005) \Big| \\
&= \Big| -\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \Big| + \Big| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Big| + \\
&+ \Big| \frac{1}{2} - f(2005) \Big| = \frac{11}{10} + \frac{1}{2} - f(2005) = \frac{16}{10} - f(2005).
\end{aligned}$$

Vậy nên

$$\max \sum_{i=0}^{3} |f(x_i) - f(x_{i+1})| = \sup \sum_{i=0}^{3} |f(x_i) - f(x_{i+1})| = \frac{16}{10} - f(2005).$$

Bài toán 15. *Cho* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. *Xét tất cả các dãy số*

$$x_0 = -\infty < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = 2.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=0}^{4} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big| \leqslant \frac{8}{5}.$$

Giải.

Hàm số đã cho có các điểm cực trị $x = \mp 1$. Ta có , ứng với mọi dãy

$$(x_i)_1^5;\ \ x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = 2,$$

ta đều có

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{i=0}^{4} \Big| f(x_i) - f(x_i+1) \Big| = \Big| f(a) - f(-1) \Big| + \\
&+ \Big| f(-1) - f(1) \Big| + \Big| f(1) - f(2) \Big| \\
&\Big| f(a) + \frac{1}{2} \Big| + \Big| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Big| + \Big| \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \Big| = \\
&= f(a) + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{10} = \frac{8}{5} + f(a).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{i=0}^{4} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big| \leqslant \lim_{a\to+\infty} \Big(\frac{8}{5} - \frac{a}{a^2+1} \Big) = \frac{8}{5}.$$

Bài toán 16. *Cho* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. *Xét tất cả các dãy* $(x_i)_1^4$, *sao cho*

$$x_0 = -\infty < x_1 < x_2 < x_3 < x < x_4 < x_5 = +\infty.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=0}^{n} \Big| f(x_i) - f(x_i+1) \Big| \leqslant 2.$$

Giải.

Hàm số $f(x)$ có các điểm cực trị $x = \pm 1$ và $f(-1) = -\dfrac{1}{2};\ f(1) = \dfrac{1}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{i=0}^{3} \Big| f(x_i) - f(x_{i+1}) \Big| = \\
&= \Big| f(a) - f(-1) \Big| + \Big| f(-1) - f(1) \Big| + \Big| f(1) - f(b) \Big| \\
&+ f(a) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - f(b) = f(a) - f(b) + 2.
\end{aligned}$$

Do

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

nên

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{3}\Big|f(x_i)-f(x_i+1)\Big|\\&\leqslant \lim_{a\to-\infty,\ b\to+\infty}(f(a)-f(b)+2)=2.\end{aligned}$$

Bài toán 17. *Cho hàm số* $f(x)=x^3-3x+1$. *Xét tất cả các dãy* $\{x_1,x_2,\dots,x_5\}$ *sao cho*

$$x_i\in\mathbb{Z},(i=1,2,\dots,5),\ \ x_0=-10<x_1<\cdots<x_5<x_6=10.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\sum_{i=0}^{5}\Big|f(x_i)-f(x_i+1)\Big|.$$

Giải.

Tương tự như cách giải các bài toán đã khảo sát, ta có

$$\begin{aligned}&\max\sum_{i=0}^{n}\Big|f(x_i)-f(x_{i+1})\Big|=\\&=\Big|f(-10)-f(-1)\Big|+\Big|f(-1)-f(1)\Big|+\Big|f(1)-f(10)\Big|\\&=2f(-1)-2f(1)=f(10)-f(-10).\end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức M bằng $f(10)-f(-10)=1940$.

2.4 Hàm đơn điệu tuyệt đối

Định nghĩa 6. *Hàm số* $f(x)$ *được gọi là hàm đơn điệu tuyệt đối trong khoảng* (a,b) *nếu đạo hàm mọi cấp của nó đều không đổi dấu:*

$$f^{(k)}(x)\geqslant 0,\ \ \forall x\in(a,b),\ k=0,1,2,\dots$$

Cũng vậy, ta có định nghĩa hàm đồng biến và nghịch biến tuyệt đối.

Định nghĩa 7. *Hàm số* $f(x)$ *được gọi là hàm đồng biến (nghịch biến) tuyệt đối trong khoảng* (a,b) *nếu các đạo hàm mọi cấp của nó đều là hàm đồng biến (nghịch biến) tuyệt đối trong khoảng đó.*

Ví dụ về các hàm số sơ cấp đơn điệu, đồng biến (nghịch biến) tuyệt đối trong khoảng (a, b) $(a > 0)$ là các hàm số sau.

Ví dụ 10. *Mọi đa thức $P(x)$ với các hệ số đều dương là hàm đơn điệu tăng tuyệt đối trong khoảng $(0, +\infty)$.*

Thật vậy, dãy các đa thức $P^{(k)}(x)$ có các hệ số đều không âm nên

$$P^{(k)}(x) \geqslant 0, \ \ \forall x > 0, k = 0, 1, \ldots$$

Ví dụ 11. *Hàm số $f(x) = e^x$ hàm đồng biến tuyệt đối trong khoảng $(0, +\infty)$.*

Ví dụ 12. *Với mọi hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên $[0, 1]$, hàm số*

$$f(x) = \int\limits_0^1 g(t)e^{tx}dt$$

đồng biến tuyệt đối trong khoảng $(0, 1)$.

Ví dụ 13. *Hàm số $f(x) = e^x$ đồng biến tuyệt đối trong khoảng $(0, +\infty)$.*

Ví dụ 14. *Hàm số*

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^x$$

là hàm nghịch biến tuyệt đối trong khoảng $(0, +\infty)$.

Nhận xét 6. *Nếu hàm số $f(x)$ là hàm đồng biến tuyệt đối trong khoảng (a, b) thì hàm số $g(x) := -f(x)$ sẽ là hàm nghịch biến)tuyệt đối trong khoảng đó và ngược lại. Vì vậy, không mất tính tổng quát, ta chỉ trình bày các bài toán liên quan đến hàm đơn điệu tăng và đồng biến tuyệt đối trong khoảng đã cho.*

Bài toán 18. *Chứng minh rằng với mọi hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0, 1]$, hàm số*

$$f(x) = \int\limits_0^1 g(t)e^{tx}dt$$

sẽ là hàm đồng biến tuyệt đối trong khoảng $(0, 1)$.

Chứng minh được suy trực tiếp từ tính chất của tích phân xác định.

Bài toán 19. *Cho hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0, 1]$ và hàm số*

$$f(x) = \int\limits_0^1 g(t)e^{\lambda tx}dt, \ \ \lambda \geqslant 0.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}} \geqslant \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k+2)}},\ \ \forall x \in (0,1),\ k = 0, 1, \ldots$$

Chứng minh được suy trực tiếp từ bất đẳng thức Chebyshev đối với tích phân xác định sau đây

$$\int\limits_0^1 g(t)t^k e^{\lambda tx}dt \int\limits_0^1 g(t)t^{2+k}e^{\lambda tx}dt \geqslant \int\limits_0^1 g(t)t^{k+1}e^{\lambda tx}dt \int\limits_0^1 g(t)t^{k+1}e^{\lambda tx}dt.$$

2.5 Hàm đơn điệu có tính tuần hoàn

Song song với lớp hàm đơn điệu thông thường và đơn điệu tuyệt đối, nhiều lớp hàm đơn điệu khác cũng được đưa ra và nghiên cứu các đặc trưng của chúng như đơn điệu đầy đủ [1], đơn điệu có tính tuần hoàn hoàn toàn [2],...

Định nghĩa 8. *Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm đơn điệu có tính tuần hoàn trong khoảng (a, b) khi và chỉ khi các đạo hàm của chúng không triệt tiêu (có dấu không đổi) và*

$$f^{(k)}(x)f^{(k+2)}(x) \leqslant 0,\ \ \forall x \in (a,b),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ví dụ về các hàm số sơ cấp đơn điệu có tính tuần hoàn trong khoảng (a, b) $(a > 0)$ là các hàm số sau.

Ví dụ 15. *Hàm số*

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

là hàm số đơn điệu có tính tuần hoàn trong khoảng $(0, +\infty)$.

Ví dụ 16. *Hàm số*

$$f(x) = \cos x$$

là hàm số đơn điệu có tính tuần hoàn trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Ví dụ 17. *Cho hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0, +\infty)$ thì hàm số*

$$f(x) = \int\limits_0^1 g(t)e^{-\lambda tx}dt,\ \ \lambda > 0$$

là hàm số đơn điệu có tính tuần hoàn trong khoảng $(0, +\infty)$.

[1] Tiếng Anh: completely monotonic function

[2] Tiếng Anh: cyclically monotonic function

Bài toán 20. *Cho hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0,1]$ và hàm số*

$$f(x) = \int\limits_0^1 g(t)e^{-tx}dt.$$

Chứng minh rằng

$$\left|f^{(k)}\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\right| \geqslant 2^k\left|f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\right|,\ \ \forall x,y\in(0,1),\ k=0,1,\dots$$

Chứng minh được suy trực tiếp từ bất đẳng thức Chebyshev đối với tích phân xác định.

Nhận xét 7. *Hoàn toàn tương tự, ta cũng có thể khảo sát lớp hàm lồi thay cho lớp hàm đơn điệu.*

2.6 Một số ứng dụng của hàm đơn điệu

Có thể nói rằng các tính chất cơ bản của hàm số luôn đóng vai trò quan trọng như là những công cụ hữu hiệu nhất để định hướng giải cũng như sáng tác bài tập mới. Những kiến thức đầu tiên liên quan đến khái niệm đơn điệu được đề cập ở bậc tiểu học chính là các bài toán về tỷ lệ thuận và tỷ lệ nghịch. Đặc biệt, nhiều tính chất cơ bản của phân số số học là những kiến thức sâu sắc được sử dụng giải quyết khá nhiều bài toán khó của các kỳ thi OLympic các quốc gia và quốc tế.

Ta xét ví dụ rất quen thuộc sau đây.

Bài toán 21. *Chứng minh rằng với mọi bộ số dương a,b,c, ta đều có*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}. \tag{4.1}$$

Đây là bài toán cơ bản (có trong tất cả các sách giáo trình về bất đẳng thức) nhằm để mô tả các ứng dụng khác nhau của các bất đẳng thức cổ điển như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức AG,... để giải. Tuy nhiên, nếu ta viết lại (4.1) dưới dạng

$$\frac{a^1}{b^1+c^1}+\frac{b^1}{c^1+a^1}+\frac{c^1}{a^1+b^1}\geqslant\frac{a^0}{b^0+c^0}+\frac{b^0}{c^0+a^0}+\frac{c^0}{a^0+b^0}, \tag{4.2}$$

với ngầm định $a^0=b^0=c^0=1$, thì ta có ngay nhận xét rằng (4.2) có dáng dấp của một hàm đồng biến

$$g(1)\geqslant g(0),$$

với

$$g(t)=\frac{a^t}{b^t+c^t}+\frac{b^t}{c^t+a^t}+\frac{c^t}{a^t+b^t},\ \ t\in\mathbb{R}.$$

Ta chứng minh rằng nhận xét vừa nêu ở trên là hoàn toàn đúng. Tuy nhiên (bạn đọc hãy tự kiểm chứng), các kỹ thuật cơ bản của các bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức AG không còn hiệu lực. Tính đồng biến của $g(t)$ ứng với $t \geqslant 0$ được suy từ nhận xét sau đây (xem lại tính chất của phân số ở bậc tiểu học).

Tính chất 1. *(i) Nếu hai phân số dương có cùng tử số dương thì phân số nào có mẫu số lớn hơn thì bé hơn,*

(ii) Nếu hai phân số âm có cùng tử số dương thì phân số nào có mẫu số lớn hơn thì lớn hơn.

Tính chất 2. *Xét phân số* $\dfrac{p}{q}$ *với* $q > 0$*. Khi đó*

(i) Nếu phân số $\dfrac{p}{q}$ *dương thì khi tăng mẫu số, phân số sẽ giảm,*

(ii) Nếu phân số $\dfrac{p}{q}$ *âm thì khi tăng mẫu số, phân số sẽ tăng.*

Nói cách khác, ta có

Bài toán 22. *Cho phân số* $\dfrac{p}{q}$ *với* $q > 0$ *và số dương* d*. Khi đó*

(i) Nếu phân số $\dfrac{p}{q}$ *dương thì* $\dfrac{p}{q} \geqslant \dfrac{p}{q+d}$,

(ii) Nếu phân số $\dfrac{p}{q}$ *âm thì* $\dfrac{p}{q} \leqslant \dfrac{p}{q+d}$.

Từ kết quả của bài toán này, ta dễ dàng chứng minh

Bài toán 23. *Với mọi bộ số dương* a, b, c *cho trước, hàm số*

$$g(t) = \frac{a^t}{b^t + c^t} + \frac{b^t}{c^t + a^t} + \frac{c^t}{a^t + b^t}, \ \ t \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

là một hàm đồng biến trong $[0, +\infty)$.

Hệ quả 8. *Cho* $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$*. Chứng minh rằng với mọi bộ số dương* a, b, c*, ta đều có*

$$\frac{a^\alpha}{b^\alpha + c^\alpha} + \frac{b^\alpha}{c^\alpha + a^\alpha} + \frac{c^\alpha}{a^\alpha + b^\alpha} \geqslant \frac{a^\beta}{b^\beta + c^\beta} + \frac{b^\beta}{c^\beta + a^\beta} + \frac{c^\beta}{a^\beta + b^\beta}.$$

Bài toán 24. *Chứng minh rằng với mọi bộ số* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *ta 1uôn có đa thức*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i + j} x^{i+j}$$

là một hàm đồng biến trong $[0, +\infty)$.

Giải.

Thật vậy, ta có

$$Q'(x) = \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j x^{i+j} = \frac{1}{x}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\Big)^2.$$

Suy ra $Q'(x) \geqslant 0$ với mọi $x \geqslant 0$. Do đó hàm số $Q(x)$ đồng biến trong $[0, +\infty)$. Từ đây, ta thu được

Hệ quả 9 (Bất đẳng thức Hilbert). *Với mọi bộ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ta 1uôn có*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} \geqslant 0.$$

Proof. Do đa thức

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} x^{i+j}$$

đồng biến trong $[0, +\infty)$ nên $Q(1) \geqslant Q(0) = 0$, hay

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} = f(1) \geqslant 0,$$

chính là đpcm. □

2.7 Bài tập

Bài 1. *Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, ta đều có*

$$\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \frac{1}{x} + \ln x.$$

Bài 2. *Cho $1 \neq x > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{\ln x}{x - 1} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Bài 3. *Cho $a, b > 0$ và $x > y > 0$. Chứng minh rằng*

$$(a^x + b^x)^y < (a^y + b^y)^x.$$

Bài 4. *Cho $x > 0$. Chứng minh rằng*

$$\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Bài 5. *Cho* $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. *Chứng minh rằng*

$$2x < \pi \sin x.$$

Bài 6. *Tìm* $a > 0$ *để* $a^x \geqslant 1 + x$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$.

Bài 7. *Tìm* $a > 0$ *để* $a^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ *với mọi* $x > 0$.

Bài 8. *Giả thiết rằng* $f(x) \geqslant 0$ *và là một hàm đơn điệu giảm trên* $(0, \alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ *và đơn điệu tăng trên* $(\alpha, 1)$. *Khi đó, ta luôn có*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)dx \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Bài 9. *Giả thiết rằng* $f(x)$ *là một hàm đơn điệu tăng trên* $[0, +\infty)$ *và* $f(0) = 0$. *Nếu* $g(x)$ *là hàm ngược của* $f(x)$ *thì ta luôn luôn có*

$$mn \leqslant \sum_{k=0}^{m}[f(k)] + \sum_{k=0}^{m}[g(k)],$$

trong đó $[y]$ *là phần nguyên của* y.

Bài 10. *Cho* $f(x) = x^4 + 2mx^2 + m$.
(i) Tìm m *để* $f(x) > 0$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$.
(ii) Với m *vừa tìm được, chứng minh rằng*

$$f(x) + f'(x) + f''(x) + f^{(3)}(x) + f^{(4)}(x) > 0 \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Bài 11. *Cho đa thức bậc bốn* $P(x)$ *thoả mãn điều kiện:*

$$P(x) \geqslant 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng

$$P(x) + P'(x) + P''(x) + P^{(3)}(x) + P^{(4)}(x) \geqslant 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 12. *Chứng minh rằng với mọi* $x > 0$, *ta luôn có*

$$(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1.$$

Bài 13. *Cho* $0 < a < b;\ \ 1 < n \in \mathbb{N}$. *Chứng minh rằng*

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a).$$

Bài 14. *Cho bộ ba số dương x, y, z và ba số thực p, q, r thoả mãn điều kiện*

$$p+q>0; \quad q+r>0; \quad r+p>0.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{p}{q+r}x^2+\frac{q}{r+p}y^2+\frac{r}{p+q}z^2 \geqslant xy+yz+zx-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2).$$

Bài 15. *Cho hàm số $f(x)=\sin x+\cos 2x$. Xét tất cả các dãy số*

$$0=x_0 \leqslant x_1 < \ldots < x_{10} \leqslant 2\pi.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\sum_{i=0}^{9}\Big|f(x_i)-f(x_{i+1})\Big|.$$

Bài 16. *Cho hàm số $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$. Xét tất cả các dãy số*

$$0=x_0 \leqslant x_1 < \ldots < x_{10} \leqslant 2\pi.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\sum_{i=0}^{9}\Big|f(x_i)-f(x_{i+1})\Big|.$$

Bài 17. *Cho hàm số $f(x)=4x^3-3x+1$. Xét tất cả các dãy số*

$$-1=x_0 \leqslant x_1 < \ldots < x_6 \leqslant 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\sum_{i=0}^{5}\Big|f(x_i)-f(x_{i+1})\Big|.$$

Bài 18. *Cho bộ n số $(a) := (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ với $a_j \in I(a,b)$. Giả sử $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $I(a,b)$ còn $g(x)$ là hàm số nghịch biến trên $I(a,b)$. Gọi*

$(c) := (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ *là một hoán vị của* (a). *Chứng minh rằng*

$$(i) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i f(a_{n+1-i}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i f(a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i f(a_i),$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^{n} g(a_i) f(a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(c_i) f(a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(a_{n+1-i}) f(a_i),$$

$$(iii) \quad n \sum_{i=1}^{n} g(a_i) f(a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(a_i) \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \leqslant n \sum_{i=1}^{n} g(a_{n+1-i}) f(a_i),$$

$$(iv) \quad n \sum_{i=1}^{n} a_i) f(a_{n+1-i}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i f(a_i).$$

Bài 19. *Cho* $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$ *thoả mãn* $|f(x)| \leqslant |\sin x|$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$. *Chứng minh rằng*

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n \leqslant 1.$$

Bài 20. *Cho* $0 < a \leqslant a_k \leqslant b$. *Chứng minh rằng*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big) \leqslant \frac{n^2(a^2+b^2)}{2ab}.$$

Bài 21. *Cho* $x_i \in \mathbb{R}^+$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $S = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. *Chứng minh rằng*

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \leqslant 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}.$$

Bài 22. *Cho* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. *Gọi* S_k *là tổng của tất cả các tích gồm* k *thừa số lấy từ tập* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Chứng minh rằng*

$$S_k S_{n-k} \geqslant \Big(C_n^k\Big)^2 a_1 a_2 \cdots a_n, \quad \forall k = 1, \ldots, n-1.$$

Bài 23 (IMO95). *Cho* $a, b, c > 0$; $abc = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Bài 24. *Cho* $a, b, c > 0$ *thoả mãn điều kiện* $abc = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leqslant 1.$$

Chương 3

Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và nhân

Trong chương này ta sẽ đề cập đến định lý về bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân (còn gọi là Bất đẳng thức AM-GM hoặc ngắn gọn là Bất đẳng thức AG) và trình bày một số phương pháp chứng minh truyền thống theo ý tưởng của các toán học nổi tiếng.

3.1 Định lý về giá trị trung bình cộng và nhân

Định lý 35. *Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm. Khi đó*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{1.1}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AG là bất đẳng thức giữa trung bình nhân và trung bình điều hoà (gọi và viết tắt là Bất đẳng thức GM-HM hoặc GH[1])

Hệ quả 10 (Bất đẳng thức GH). *Với mọi bộ số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ta đều có*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Proof. Sử dụng bất đẳng thức AG đối với bộ số $x_k := \dfrac{1}{a_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, ta có ngay bất đẳng thức GH. □

[1] Geometric mean -Trung bình nhân, Harmonic mean -Trung bình điều hoà

Cho đến nay, người ta đã biết đến hàng trăm cách khác nhau để chứng minh Bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân (gọi tắt là: Bất đẳng thức AM-GM hoặc AG). Mỗi cách chứng minh Định lý 1 đều có những đặc thù theo ý tưởng và mục tiêu riêng của các nhà toán học. Có những cách chứng minh (của một số nhà khoa học nổi tiếng) xuất phát từ những ý tưởng tưởng như chẳng ăn nhập và hoàn toàn không liên quan trực tiếp gì tới các giá trị trung bình cộng và trung bình nhân của bộ số dương đã cho. Sau đây, ta sẽ trình bày một số cách chứng minh tương đối sơ cấp và dễ hiểu giúp ta nhìn nhận các mở rộng sau đó một cách hệ thống và có tính lôgic tự nhiên.

3.1.1 Quy nạp kiểu Cauchy

Đây là kiểu quy nạp theo cặp hướng (lên-xuống) do Cauchy đề xuất vào năm 1821 (*Cauchy A.L.*, Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, I$^{\text{re}}$ partie, Analyse thức giữa giá trị trung bình cộng (trung bình số học) và trung bình nhân (trung bình hình học).

Từ hệ thức bậc hai

$$u_1^2 + u_2^2 \geqslant 2u_1u_2,\ \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

ta suy ra

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2},\ \forall x_1, x_2 \text{ không âm.} \tag{1.3}$$

Thay x_1, x_2 lần lượt bằng các biến mới $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ và $\dfrac{x_3 + x_4}{2}$, từ (1.3) ta nhận được

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} &\geqslant \Big[\frac{x_1 + x_2}{2}\frac{x_3 + x_4}{2}\Big]^{\frac{1}{2}} \geqslant \\ &\geqslant \big[(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}\big]^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Tiếp tục quá trình như trên ta thấy bất đẳng thức (1.1) đúng với $n = 1, 2.4, \ldots$ và nói chung, đúng với n là luỹ thừa của 2. Đây chính là quy nạp theo hướng lên trên.

Bây giờ ta thực hiện quy trình quy nạp theo hướng xuống phía dưới. Ta chứng minh rằng, khi bất đẳng thức (1.1) đúng với n $(n > 1)$ thì nó cũng đúng với $n - 1$. Thay x_n trong (1.1) bởi

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n - 1}$$

và giữ nguyên các biến x_i khác, từ (1.1) ta thu được

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}}{n} \geqslant$$

$$\geqslant (x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}}$$

hay

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geqslant (x_1x_2\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

Rút gọn biểu thức trên, ta thu được

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}.$$

Từ kết quả đã chứng minh theo cặp hướng (lên-xuống), ta thu được phép chứng minh quy nạp của Định lý 1.

Tiếp theo, theo đúng cách chứng minh quy nạp kiểu Cauchy, ta dễ dàng chứng minh các bất đẳng thức sau đây.

Bài toán 1 (Bất đẳng thức Ky Fan). *Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số dương trong $\Big(0, \dfrac{1}{2}\Big]$. Khi đó*

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)^n} \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (1-x_k)}{\Big[\sum\limits_{k=1}^{n} (1-x_k)\Big]^n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Bài toán 2. *Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các số không âm và $n = 1, 2, \ldots$. Khi đó*

$$\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}\Big)^n \leqslant \frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_m^n}{m}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

3.1.2 Một số dạng đa thức đối xứng sơ cấp

Đa thức $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với bộ n biến số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được hiểu là hàm số (biểu thức) có dạng

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{N} M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

trong đó

$$M_k(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j_1+\cdots+j_n=k} a_{j_1\cdots j_n} x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n},\ \ j_i \in \mathbb{N}\ \ (i=1,2,\dots,n). \quad (1.5)$$

Trong mục này ta quan tâm chủ yếu đến các dạng đa thức đồng bậc (1.1) biến số thực và nhận giá trị thực, đặc biệt là các đa thức đối xứng sơ cấp quen biết liên quan đến các hằng đẳng thức đáng nhớ trong chương trình toán trung học phổ thông.

Trước hết, ta nhắc lại công thức khai triển nhị thức Newton:

$$(x+a)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}x^k.$$

Nếu ta coi $(x+a)^n$ như là tích của n thừa số: $(x+a)(x+a)\cdots(x+a)$, thì khi đó tích

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

cũng có thể viết dưới dạng một biểu thức tương tự như công thức khai triển nhị thức Newton như sau:

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} p_j^{n-k} x^k,$$

trong đó

$$\begin{cases} p_1 &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\\ p_2^2 &= \frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j}{\binom{n}{2}},\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ p_n^n &= a_1a_2\cdots a_n. \end{cases} \quad (1.6)$$

Vậy nên, nếu các số $a_1,a_2,\dots,a_n$ đều dương (hoặc không âm và không đồng thời bằng 0) thì không mất tính tổng quát, ta có thể coi các số $p_1,p_2,\dots,p_n$ đều là số dương (không âm). Từ (1.6), ta thu được

$$\begin{cases} p_1 &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\\ p_2 &= \sqrt{\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j}{\binom{n}{2}}},\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ p_n &= \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Ta thấy, p_1 chính là trung bình cộng, p_n là trung bình nhân, và do đó, các p_j khác cũng là các đại lượng trung bình cần đặt tên cho chúng như là những đối tượng cơ bản cần tập trung nghiên cứu.

Định nghĩa 9. *Cho $\overline{a}$ là bộ n số dương $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ $(n \geqslant 1,\, n \in \mathbb{N})$. Khi đó*

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + a_1)(x + a_2)\dots(x + a_n) \\ &= x^n + E_1(\overline{a})x^{n-1} + E_2(\overline{a})x^{n-2} + \dots + E_n(\overline{a}), \end{aligned}$$

trong đó

$$E_1(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n} a_i,\ \ E_2(\overline{a}) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j, \dots,\ \ E_n(\overline{a}) = a_1a_2\dots a_n.$$

Đặt $E_0(\overline{a}) = 1$. Ta gọi $E_r(\overline{a})$ $(r \in \{1, \dots, n\})$ là các hàm (đa thức) đối xứng sơ cấp thứ r ($E_r(\overline{a})$ là tổng của tất cả các tích r số khác nhau của bộ số $\overline{a}$).

Ký hiệu

$$P_r(\overline{a}) = \frac{r!(n-r)!}{n!}E_r(\overline{a}).$$

Định nghĩa 10. *Giả sử $x_1, x_2, \dots x_n$ là bộ n các số thực không âm (ký hiệu bởi $(\overline{x})$) và $y_1, y_2, \dots, y_n$ là bộ các số thực không âm khác (được ký hiệu bởi $(\overline{y})$).*

Hai dãy $(\overline{x})$ và $(\overline{y})$ được gọi là đồng dạng (và ký hiệu $(\overline{x}) \sim (\overline{y})$ nếu tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$ sao cho ta có $x_j = \lambda y_j$ $(j = 1, \dots, n)$.

Bài toán 3. *Cho $\overline{a}$ là bộ $(a_1 \dots a_n)$ các số thực dương. Đặt $P_0 = 1$, $P_k = P_k(\overline{a})$; $E_r = E_r(\overline{a})$. Chứng minh rằng*

$$P_{k-1}.P_{k+1} \leqslant P_k^2 \ \ (k = 1, 2, \dots n-1).$$

(Nếu các a_i đều dương và không đồng thời bằng nhau thì ta có dấu bất đẳng thức thực sự).

Proof. Giả sử

$$f(x, y) = (x + a_1y)(x + a_2y)\dots(x + a_ny) = E_0x^n + E_1x^{n-1}y + \dots + E_ny^n,$$

E_i là tổng tất cả các tích i số khác nhau,

$$P_k = \frac{k!(n-k)!}{n!}E_k.$$

Vì tất cả các $a_i > 0$ và $\dfrac{x}{y} = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $f(x,y) = 0$ nên $\dfrac{x}{y} = 0$ không phải là nghiệm bội trong các phương trình nhận từ đạo hàm của nó.

Từ đó ta có thể kết luận rằng các số P_i dương, tức là phương trình

$$P_{k-1}x^2 + 2P_k xy + P_{k+1}y^2 = 0$$

nhận được từ $f(x,y) = 0$ bằng cách lấy vi phân liên tiếp theo x và y. Do phương trình này có nghiệm thực nên $P_{k-1}P_{k+1} \leqslant P_k^2$. □

Bài toán 4. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$E_{r-1}E_{r+1} \leqslant E_r^2.$$

Proof. Từ bất đẳng thức trong Bài toán 3 ta có

$$P_{k-1}P_{k+1} \leqslant P_k^2.$$

Suy ra

$$\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!}E_{k-1}\frac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}E_{x+1} \leqslant \Big(\frac{k!(n-k)!}{n!}\Big)E_k^2$$

hay

$$\frac{(k-1)(n-k+1)}{k(n-k)}E_{k-1}.E_{k+1} \leqslant E_k^2 \;\; E_{k-1}.E_{k+1} \leqslant E_k^2.$$

□

Bài toán 5. *Cho các số $a_i > 0$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ và không đồng thời bằng nhau. Chứng minh bất đẳng thức*

$$P_1 > P_2^{\frac{1}{2}} > P_3^{\frac{1}{3}} > \dots > P_n^{\frac{1}{n}}. \tag{1.8}$$

Proof. Theo bất đẳng thức trong Bài toán 1, ta có

$$\begin{gathered} P_0P_2 < P_1^2 \\ (P_1P_3)^2 < P_2^4 \\ \dots\dots\dots \\ (P_{r-1}P_{r+1})^r < P_r^{2r} \end{gathered}$$

Suy ra

$$(P_0P_2)(P_1P_3)^2\dots(P_{r-1}P_{r+1})^r < P_1^2P_2^4\cdots P_r^{2r}$$
$$\Rightarrow P_{r+1}^r < P_r^{r+1} \Rightarrow P_r^{\frac{1}{r}} > P_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}.$$

□

Nhận xét 8. *Ta dễ dàng chứng minh $P_{r-1}P_{r+1} < P_r^2$ bằng phương pháp qui nạp.*

Thật vậy, giả sử bất đẳng thức đúng với $n-1$ số dương $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ và đặt E_r', P_r' là các E_r, P_r tạo bởi $n-1$ số ấy và giả sử tất cả các số đó không đồng thời bằng nhau.

Khi đó $E_r' = a_nE_{r-1}' \Rightarrow P_r = \dfrac{r}{n}P_r' + \dfrac{r}{n}a_nP_{r-1}'$.

Từ đó suy ra
$$n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P_r^2) = A + Ba_n + Ca_n^2,$$
trong đó

$$\begin{aligned}
A =&\{(n-r)^2-1\}P_{r-1}'P_{r+1}' - (n-r)^2P_r'\\
B =&(n-r+1)(r+1).P_{r-1}'P_{r+1}' + (n-r-1)(r-1)P_{r-2}'P_{r+1}' -\\
&-2(r-1)P_{r-2}'P_{r+1}'\\
C =&(r^2-1)P_{r-2}'P_r' - r^2P_{r-1}^2.
\end{aligned}$$

Vì các a_i không đồng thời bằng nhau nên theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
&P_{r-1}'P_{r+1}' < P_r'P_{r-2}' - P_r' < P_{R-1}'\\
&P_{r-2}'P_{r+1}' < P_{r-1}'P_r' \Rightarrow A < -P_r', B < 2P_{r-1}'P_r', C < P_{r-1}'\\
&n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P_n') < -(P_r' - a_nP_{r-1}') \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Điều này vẫn đúng khi $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$. Khi đó $a_n \neq a_1$.

Từ bất đẳng thức (8), ta thu được bất đẳng thức sau:

Hệ quả 11.
$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \dots \geqslant p_n,$$
trong đó
$$\begin{cases}
p_1 &= \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n},\\
p_2 &= \sqrt{\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j}{\binom{n}{2}}},\\
\dots & \dots\dots\dots\\
p_n &= \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.
\end{cases}$$

Đặc biệt, $p_1 \geqslant p_n$*. Đó chính là Bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân.*

3.1.3 Quy nạp kiểu Ehlers

Ta chứng minh Định lý 1 đối với bộ số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mà

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1. \tag{1.9}$$

Khi đó (10) có dạng

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n. \tag{1.10}$$

Giả thiết (11) đúng với bộ n số thoả mãn (10). Giả thiết rằng ta có bộ $n+1$ số dương thoả mãn điều kiện:

$$x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} = 1.$$

Giả thiết rằng (không mất tổng quát) x_1 và x_2 là hai số từ bộ $n+1$ số trên có tính chất:

$$x_1 \geqslant 1, \;\; x_2 \leqslant 1.$$

Khi đó

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leqslant 0$$

hay

$$x_1 x_2 + 1 \leqslant x_1 + x_2. \tag{1.11}$$

Từ (12) và do bộ n số $x_1x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ có tính chất

$$(x_1 x_2) x_3 x_4 \cdots x_{n+1} = 1,$$

suy ra

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geqslant 1 + x_1 x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geqslant 1 + n.$$

Định lý được chứng minh.

3.1.4 Đồng nhất thức Hurwitz

Xét hàm số n biến thực $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ký hiệu $Pf(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là tổng các f theo tất cả $n!$ hoán vị của các đối số x_i. Với quy ước như vậy, ta có

$$\begin{cases} Px_1^n = (n-1)!(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n), \\ Px_1x_2\dots x_n = n!x_1x_2\cdots x_n. \end{cases}$$

Xét các biểu thức g_k xác định theo công thức sau đây

$$\begin{cases} g_1 &= P[(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2)], \\ g_2 &= P[(x_1^{n-2} - x_2^{n-2})(x_1 - x_2)x_3], \\ g_3 &= P[(x_1^{n-3} - x_2^{n-3})(x_1 - x_2)x_3x_4], \\ & \dots\dots\dots \\ g_{n-1} &= P[(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)x_3\dots x_n]. \end{cases}$$

Nhận xét rằng khi các x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ đều không âm thì các biểu thức g_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, theo định nghĩa, cũng nhận giá trị không âm. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} g_k &= P[(x_1^{n-k} - x_2^{n-k})(x_1 - x_2)x_3x_4\dots x_{k+1}] \\ &= P[(x_1 - x_2)^2(x_1^{n-k-1} + \cdots + x_2^{n-k-1})x_3x_4\dots x_{k+1}] \end{aligned}$$

luôn luôn là một số không âm khi các $x_i \geqslant 0$.

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} g_1 &= Px_1^n + Px_2^n - Px_1^{n-1}x_2 - Px_2^{n-1}x_1 \\ &= 2Px_1^n - 2Px_1^{n-1}x_2. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\begin{cases} g_2 &= 2Px_1^{n-1}x_2 - 2Px_1^{n-2}x_2x_3, \\ g_3 &= 2Px_1^{n-2}x_2x_3 - 2Px_1^{n-3}x_2x_3x_4, \\ & \dots\dots\dots \\ g_{n-1} &= 2Px_1^2x_2\dots x_{n-1} - 2Px_1x_2\dots x_n. \end{cases}$$

Lấy tổng các g_i, ta thu được

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_{n-1} = 2Px_1^n - 2Px_1x_2\dots x_n. \tag{1.12}$$

Theo định nghĩa thì (13) chính là

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n}{n} - x_1x_2\cdots x_n = \frac{1}{2n!}(g_1 + g_2 + \cdots + g_{n-1}) \geqslant 0.$$

3.1.5 Đẳng thức (phương trình) hàm

Xét bài toán xác định giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$$

với điều kiện

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Ký hiệu giá trị lớn nhất của M là $f_n(a)$ ứng với $n \in \mathbb{N}$ và $a > 0$.

Ta cố định x_n và như vậy cần chọn $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ thoả mãn điều kiện

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = a - x_n$$

để tích $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ là lớn nhất.

Từ đây suy ra

$$f_n(a) = \max_{0 \leqslant x_n \leqslant a} [x_n f_{n-1}(a - x_n)],\ n = 2, 3, \dots,$$

trong đó $f_1(a) = a$.

Thực hiện đổi biến $x_i = a y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, ta thu được

$$f_n(a) = a^n f_n(1).$$

Từ đây suy ra

$$f_n(1) = f_{n-1}(1)[\max_{0 \leqslant y \leqslant 1} y(1-y)^{n-1}] = \frac{f_{n-1}(1)(n-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Từ hệ thức $f_1(1) = 1$ ta thu được $f_n(1) = \dfrac{1}{n^n}$, chính là điều phải chứng minh của Định lý 1.

3.1.6 Đồng nhất thức Jacobsthal

Sử dụng hằng đẳng thức quen biết

$$t^n - nt + n - 1 = (t-1)[t^{n-1} + t^{n-1} + \cdots + t - (n-1)],\ n \in \mathbb{N}^*,$$

ta suy ra

$$t^n + n - 1 \geqslant nt,\ \forall t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.13}$$

Ký hiệu

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

Khi đó ta có đồng nhất thức (Jacobsthal) sau:

$$A_n = \frac{G_{n-1}}{n}\Big[(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \Big(\frac{G_n}{G_{n-1}}\Big)^n\Big]. \tag{1.14}$$

Theo (1.13) thì

$$\Big(\frac{G_n}{G_{n-1}}\Big)^n \geqslant n\frac{G_n}{G_{n-1}} + 1 - n. \tag{1.15}$$

Từ (1.15) và (1.14) ta thu được

$$A_n \geqslant \frac{G_{n-1}}{n}\Big[(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} - (n-1) + n\frac{G_n}{G_{n-1}}\Big]$$

hay

$$A_n - G_n \geqslant \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1},\ n > 1.$$

Từ đây suy ra $A_n \geqslant G_n$.

3.1.7 Cực trị của hàm số

Như ta đã thấy, phương pháp quy nạp "tiến-lùi" của Cauchy cho ta thuật toán hữu hiệu để chứng minh bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân. Phải chăng, ta có thể chứng minh bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân theo phương pháp quy nạp thông thường? Điều này thực hiện được thông qua các đồng nhất thức như đã thấy ở các mục trên. Sau đây, ta sử dụng phương pháp khảo sát hàm số một biến để thực hiện phép chứng minh quy nạp bất đẳng thức cực trên.

Xét dãy số dương $x_1, x_2, \ldots$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$, cố định, ta ký hiệu

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \ G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

Xét hàm số

$$f_n(t) := \frac{1}{n}\Big(x_n + t + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\Big) - \sqrt[n]{(x_n + t)\prod_{i=1}^{n-1} x_i}$$

trong khoảng $(-x_n, +\infty)$. Ta có $f_n(1) = A_n - G_n$ và

$$f'_n(t) == \frac{1}{n} - \frac{1}{n}(x_n + t)^{\frac{1-n}{n}} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n-1} x_i}.$$

Giải phương trình $f'_n(t) = 0$, ta thu được nghiệm duy nhất

$$t_n = \Big(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\Big)^{\frac{1}{n-1}} - x_n,$$

nên

$$f_n(t_n) = \min f_n(t)$$

và hiển nhiên, $f_n(1) \geqslant f_n(t_n)$.

Sử dụng giả thiết quy nạp: $A_{n-1} - G_{n-1} \geqslant 0$, ta thấy

$$f_n(t_n) = \frac{1}{n}\Big(x_n + t_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\Big) - \sqrt[n]{(x_n + t_n)\prod_{i=1}^{n-1} x_i}$$

$$= \frac{G_{n-1} + (n-1)A_{n-1}}{n} - G_{n-1} = \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}).$$

Vậy nên

$$A_n - G_n \geqslant \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}) \geqslant 0.$$

3.1.8 Hàm exponent

Một trong những tính chất cực kỳ quan trọng của hàm mũ (exponent) tự nhiên $f(x) = e^x$ là tính bất biến (dừng) của nó đối với toán tử vi phân

$$(e^x)' = e^x.$$

Từ đó dễ dàng kiểm chứng bất đẳng thức quen thuộc

$$e^x \geqslant 1 + x \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Từ đó, ta nhận được hệ qủa

Bài toán 6.

$$e^{x-1} \geqslant x \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Gọi A_n là trung bình cộng của các số x_j $(j = 1, \dots, n)$. Giả sử $x_i > 0$ $\forall i$, khi đó ta có

$$\frac{x_1}{A_n} \leqslant e^{\frac{x_1}{A_n}} - 1$$
$$\dots$$
$$\frac{x_n}{A_n} \leqslant e^{\frac{x_n}{A_n}} - 1$$

Suy ra

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{A_n^n} \leqslant e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{A_n} - n} = e^{n-n} = e^0 = 1$$

hay

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \leqslant A_n^n.$$

Suy ra

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x_1}{A_n} = \cdots = \dfrac{x_n}{A_n} = 1$ hay $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

3.1.9 Hoán vị bộ số

Nhận xét rằng, nếu $b_1, b_2, \dots, b_n$ là một hoán vị của bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, thì

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \geqslant n.$$

Thật vậy, không giảm tổng quát, ta coi

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n.$$

Khi đó, hiển nhiên rằng

$$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{a_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{a_n}.$$

Vì vậy

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \geqslant \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_n} = n.$$

Tiếp theo, ta đặt

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},\ a_1 = \frac{x_1}{G_n},\ a_2 = \frac{x_1 x_2}{G_n^2}, \dots, a_n = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{G_n^n} = 1.$$

Khi đó, theo nhận xét ở trên, thì

$$\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} \geqslant n$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{G_n} + \frac{x_2}{G_n} + \cdots + \frac{x_n}{G_n} \geqslant n,$$

hay

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

3.2 Bất đẳng thức AG suy rộng

Một mở rộng tự nhiên của Định lý 1 cho bộ số có trọng là định lý sau đây.

Định lý 36 (Bất đẳng thức AG suy rộng). *Giả sử cho trước hai cặp dãy số dương* $x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \ p_1, p_2, \ldots, p_n$. *Khi đó*

$$x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \leqslant \Big(\frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\Big)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \tag{2.1}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Nhận xét 9. *Các phương pháp đã nêu ở trên để chứng minh bất đẳng thức AG đều có thể sử dụng (có cải biên) để chứng minh Bất đẳng thức AG suy rộng.*

Proof. Đặt

$$s = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$e^{x-1} \geqslant x, \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

ta thu được hệ

$$\begin{cases} x_1 \leqslant s e^{\frac{x_1}{s} - 1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n \leqslant s e^{\frac{x_1}{s} - 1} \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_1^{p_1} \leqslant s^{p_1} e^{(\frac{x_1}{s} - 1) p_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{p_n} \leqslant s^{p_n} e^{(\frac{x_n}{s} - 1) p_n} \end{cases}$$

Vậy nên

$$x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n} \leqslant s^{p_1+\cdots+p_n} e^{\frac{x_1p_1+\cdots+x_np_n}{s}-(p_1+\cdots+p_n)},$$

hay

$$x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n} \leqslant s^{p_1+\cdots+p_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x_1}{s} = \cdots = \dfrac{x_n}{s} = 1$ hay $x_1 = \cdots = x_n$.

□

Một hệ quả trực tiếp rút ra từ định lý vừa chứng minh để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức phân thức chính quy được phát biểu như sau.

Hệ quả 12. *Giả sử cho trước hai cặp dãy số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, với*

$$x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n} = M.$$

Khi đó

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \geqslant (\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)\Big[M\prod_{k=1}^{n}\Big(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\Big)^{\beta_k}\Big]^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x_k = \frac{\beta_k A}{\alpha_k B},$$

trong đó

$$B = \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n,\ \ A = (\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)\Big[M\prod_{k=1}^{n}\Big(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\Big)^{\beta_k}\Big]^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}}.$$

Nhận xét 10. *Các hệ quả khác rút ra từ Định lý 1 và 2 sẽ được trình bày ở các chương sau.*

Độ lệch giữa trung bình cộng và trung bình nhân được mô tả như sau.

Định lý 37. *Với mọi dãy số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta đều có*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \geqslant \frac{1}{n}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n})^2.$$

Proof. Do vai trò của các số hạng là như nhau nên ta có thể coi vế phải của bất đẳng thức là biểu thức dạng $\frac{1}{n}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2$.

Đặt

$$A_k = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\ \ ;\ \ G_k = \sqrt[k]{a_1a_2\dots a_k}\ \ (k\in\{2,\dots,n\}).$$

Ta nêu một cách chứng minh khác đối với bất đẳng thức

$$(k+1)(A_{k+1} - G_{k+1}) \geqslant k(A_k - G_k).$$

Thật vậy, nếu đặt

$$x = \sqrt[k+1]{a_{k+1}} \;\; ; \;\; g = \sqrt[k+1]{G_k},$$

thì ta có

$$(k+1)A_{k+1} = kA_k + a_{k+1} = kA_k + x^{k+1} \;\; ; \;\; G_{k+1} = \sqrt[k+1]{G_k^k x^{k+1}} = g^k x.$$

Do đó

$$kA_k + x^{k+1} - (k+1)g^k x \geqslant kA_k - kg^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^{k+1} - (k+1)g^k x + kg^{k+1} \geqslant 0.$$

Dễ thấy

$$f(x) = (x-g)^2(x^{k-1} + 2gx^{k-2} + \ldots + kg^{k-1}),$$

nên $f(x) \geqslant 0$.

Từ đó, ta thu được

$$n(A_n - G_n) \geqslant (n-1)(A_{n-1} - G_{n-1}) \geqslant \ldots \geqslant 2(A_2 - G_2) = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2.$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

□

3.3 Hàm phân thức chính quy

Tiếp theo, ta sẽ nêu một ứng dụng quan trọng của bất đẳng thức AG suy rộng liên quan đến một lớp hàm số, thường được gọi là hàm phân thức chính quy.

Trước hết ta xét lớp hàm phân thức chính quy một biến.

Định nghĩa 11. *Hàm số $f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}^+$ được gọi là hàm phân thức chính quy, nếu*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{\alpha_k},$$

trong đó

$$a_k \geqslant 0, \;\; k = 1, 2, \ldots, n; \;\; \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k = 0. \tag{3.1}$$

Ví dụ 18. *Dễ dàng kiểm chứng các hàm số sau đây là phân thức chính quy:*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + \frac{1}{x}, \\ f_2(x) &= 2x + \frac{1}{x} + \frac{\sin\alpha}{x^{\sin\alpha}} + \frac{\cos\alpha}{x^{\cos\alpha}}. \end{aligned}$$

Từ định nghĩa, ta dễ dàng kiểm tra các tính chất sau đây.

Tính chất 3. *Nếu $f(x)$ là các hàm phân thức chính quy, thì $f(x) > 0$ ứng với mọi $x > 0$.*

Tính chất 4. *Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm phân thức chính quy, thì với mọi cặp số dương α, β, hàm số*

$$h(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$$

cũng là hàm phân thức chính quy.

Tính chất 5. *Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm phân thức chính quy, thì hàm số*

$$h(x) := f(g(x))$$

cũng là hàm phân thức chính quy.

Tính chất 6. *Nếu $f(x)$ là hàm phân thức chính quy, thì hàm số*

$$h(x) := [f(x)]^m, \;\; m \in \mathbb{N}^*,$$

cũng là hàm phân thức chính quy.

Tương tự, ta có định nghĩa hàm phân thức chính quy nhiều biến.

Định nghĩa 12. *Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là hàm phân thức chính quy trên tập*

$$\{x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0\},$$

nếu

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} a_k x^{\alpha_{1k}} x^{\alpha_{2k}} \cdots x^{\alpha_{nk}}, \;\; a_k \geqslant 0, \;\; k = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.2}$$

trong đó

$$\begin{cases} \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \cdots + \alpha_{1m}a_m = 0 \\ \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{2m}a_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}a_1 + \alpha_{n2}a_2 + \cdots + \alpha_{nm}a_m = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Định nghĩa 13. *Giả sử hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm phân thức chính quy, tức $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thoả mãn điều kiện (3.2)-(3.3). Khi đó các hàm số*

$$h_j(x_j) := \sum_{k=1}^{m} a_k x_j^{\alpha_{jk}}, \ \ j = 1, 2, \dots, n,$$

được gọi là các phân thức thành phần của $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ví dụ 19. *Dễ dàng kiểm chứng hàm số sau đây là phân thức chính quy:*

$$f(x, y) = x^{-\frac{2}{p}} y^{-\frac{2}{q}} + 2x^{\frac{5}{p}} y^{\frac{2}{q}} + 2x^{-\frac{2}{p}} y^{-\frac{2}{q}},$$

và các hàm số

$$f_1(x) = x^{-\frac{2}{p}} + 2x^{\frac{5}{p}} - 2x^{\frac{2}{p}},$$
$$f_2(y) = y^{-\frac{2}{q}} + 2y^{\frac{2}{q}} - 2y^{\frac{2}{q}}$$

là các phân thức thành phần của $f(x, y)$.

Dễ dàng kiểm tra rằng

Định lý 38. *Hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm phân thức chính quy khi và chỉ khi các hàm phân thức thành phần của $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cũng là các hàm phân thức chính quy.*

Tiếp theo, ta chứng minh định lý cơ bản sau đây.

Định lý 39. *Với mỗi hàm phân thức chính quy $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ trên tập $\{x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0\}$, ta đều có*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

Proof. Để chứng minh định lý, ta nhắc lại hệ quả của bất đẳng thức AG suy rộng:

Với cặp dãy số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, thoả mãn điều kiện

$$x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n} = M,$$

ta đều có

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \geqslant (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) \Big[M \prod_{k=1}^{n} \Big(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \Big)^{\beta_k} \Big]^{\frac{1}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x_k = \frac{\beta_k A}{\alpha_k B},$$

trong đó

$$B = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n, \ \ A = (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)\Big[M \prod_{k=1}^{n} \Big(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\Big)^{\beta_k}\Big]^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}}.$$

Giả sử $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là điểm tuỳ ý cho trước. Đặt

$$y_k = a_k x_1^{\alpha_{1k}} x_2^{\alpha_{2k}} \cdots x_n^{\alpha_{nk}}, \ \ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Theo giả thiết thì

$$\begin{cases} \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \cdots + \alpha_{1m}a_m = 0 \\ \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{2m}a_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}a_1 + \alpha_{n2}a_2 + \cdots + \alpha_{nm}a_m = 0 \end{cases}$$

nên

$$\prod_{k=1}^{m} y_k^{a_k} = \prod_{k=1}^{m} (a_k x_1^{\alpha_{1k}} x_2^{\alpha_{2k}} \cdots x_n^{\alpha_{nk}})^{a_k} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} a_k^{a_k} \prod_{k=1}^{m} x_1^{\alpha_{1k}a_k} \cdots \prod_{k=1}^{m} x_n^{\alpha_{nk}a_k} = \prod_{k=1}^{m} a_k^{a_k}.$$

Vậy nếu đặt

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k^{a_k}$$

và xét bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các số dương

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_m$$

với điều kiện

$$X_1^{a_1} X_1^{a_1} \cdots X_1^{a_1} = M,$$

và áp dụng nhận xét đã nêu ta thu được điều phải chứng minh. □

Hệ quả 13. *Với mỗi hàm phân thức chính quy* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *trên tập* $\{x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0\}$, *ta đều có*

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

3.4 Một số kỹ thuật vận dụng bất đẳng thức AG

Tiếp theo, trong mục này nêu cách thức vận dụng bất đẳng thức AG trong thực hành như là một công cụ trung gian để giải quyết một số dạng bất đẳng thức quen biết.

3.4.1 Điều chỉnh và lựa chọn tham số

Cũng như các ứng dụng đối với bất đẳng thức Cauchy, một số bất đẳng thức đồng bậc dạng không đối xứng ở mục này được xét khi dấu đẳng thức trong các bất đẳng thức xảy ra khi giá trị của các biến tương ứng không bằng nhau. Vì vậy, kỹ thuật để giải các bài toán cực trị dạng không đối xứng là rất cần thiết. Một trong những kỹ thuật cơ bản nhất chính là xây dựng thuật toán sắp thứ tự gần đều. Trong trường hợp dạng bậc hai thì sử dụng phương pháp miền giá trị như đã nêu ở trên. Trong phần này, ta nêu thêm một kỹ thuật nữa nhằm điều chỉnh tính đều bằng tham số. Ta đưa vào các tham số tự do cần thiết thường là các giá trị trung gian được xác định sau theo cách chọn đặc biệt để tất cả các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra. Tham số phụ được đưa vào hợp lí để phương trình xác định chúng có nghiệm.

Bài toán 7. *Xét bộ số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n > 2$) thoả mãn các điều kiện*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 1. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_i - x_j|.$$

Giải.

Với $n = 3$, không giảm tổng quát, ta giả sử $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$. Ta có

$$\frac{P}{2} = (x_1 - x_2)\frac{x_3 - x_1}{2}(x_3 - x_2).$$

Sử dụng bất đẳng thức AG cho 3 số không âm, ta nhận được

$$\frac{P}{2} = \Big(\frac{(x_1 - x_2) + \frac{x_3 - x_1}{2} + (x_3 - x_2)}{3}\Big)^3,$$

hay

$$\frac{P}{2} \leqslant \Big(\frac{x_3 - x_1}{2}\Big)^3 \leqslant \frac{1}{8}.$$

Suy ra
$$P \leqslant \frac{1}{4}.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1 \\ (x_1 - x_2) = \frac{x_3 - x_1}{2} = (x_3 - x_2) \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$
Vậy $\max P = \dfrac{1}{4}$ khi $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$.

Với $n = 4$, một cách tự nhiên, ta có dự đoán rằng $\max P$ đạt được khi $x_1 = -x_4$, $x_2 = -x_3$.

Giả sử $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$. Khi đó thì $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$. Chọn hiệu $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ là đơn vị và đặt $x_3 - x_2 = a$, thì ta sẽ có bộ biến để biểu thức P đạt maximum, cần thoả mãn điều kiện
$$x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \frac{x_3 - x_2}{a} = \frac{x_3 - x_1}{a+1} = \frac{x_4 - x_2}{a+1} = \frac{x_4 - x_1}{a+2}.$$
Từ cách phân tích trên, ta có lời giải của bài toán trong trường hợp $n = 4$ như sau.

Với giả thiết $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$, ta có
$$P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$
Do đó
$$\frac{P}{a(a+2)(a+1)^2} = (x_2 - x_1)\frac{(x_3 - x_2)}{a+1}\frac{(x_4 - x_1)}{a+2}\frac{(x_3 - x_2)}{a}\frac{(x_4 - x_2)}{a+1}(x_4 - x_3)$$
$$\leqslant \left[\frac{1}{6}\Big((x_2 - x_1) + \frac{(x_3 - x_2)}{a+1} + \frac{(x_4 - x_1)}{a+2} + \frac{(x_3 - x_2)}{a} + \frac{(x_4 - x_2)}{a+1} + (x_4 - x_3)\Big)\right]^6$$
Suy ra
$$P \leqslant \frac{1}{2^8}\left[(x_2 - x_1)\Big(1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2}\Big) + \Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + -1\Big)(x_3 - x_2)\right]^6$$
Ta chọn a sao cho
$$\Big(1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2}\Big) = \Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + -1\Big),$$
hay $a = \sqrt{2} - 1$. Khi đó
$$\Big(1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2}\Big) = \Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + -1\Big) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

và ta thu được

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\Big(\frac{sqrt2}{2}\Big)^2 P \leqslant \frac{1}{2^8}\Big[\frac{3\sqrt{2}}{2}(-x_1-x_2+x_3+x_4)^6\Big]^6$$

hay

$$P \leqslant \frac{1}{2^6}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ -x_1-x_2+x_3+x_4=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|=1 \\ (x_1-x_2)=(x_4-x_3)=\frac{x_4-x_3}{\sqrt{2}-1}=\frac{x_3-x_1}{\sqrt{2}}=\frac{x_4-x_2}{\sqrt{2}}=\frac{x_4-x_1}{\sqrt{2}+1}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta nhận được

$$\begin{cases} x_4=-x_1=\frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ x_3=-x_2=\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \tag{2.2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức bằng $\max P = \dfrac{1}{2^8}$ khi các biến thoả mãn điều kiện (2.2).

Xét trương hợp $n=5$.

Với giả thiết $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$, ta dự đoán bộ số tương ứng để P đạt maximum là $x_5=-x_1$, $x_4=-x_2$, $x_3=0$.

Do vậy $x_2-x_1=x_5-x_4$ và $x_3-x_2=x_4-x_3$. Từ đó, ta có thể đoán nhận rằng nếu hiệu x_2-x_1 bằng đơn vị và x_3-x_2 bằng a thì bộ số để P đạt maximum cần phải thoả mãn điều kiện

$$\frac{x_2-x_1}{1}=\frac{x_4-x_3}{a}=\frac{x_3-x_2}{a}=\frac{x_3-x_1}{a+1}=\frac{x_5-x_3}{a+1}=\frac{x_4-x_2}{2a}=$$

$$=\frac{x_5-x_2}{2a+1}=\frac{x_4-x_1}{2a+1}=\frac{x_5-x_1}{2a+2}=\frac{x_5-x_4}{1}.$$

Từ cách phân tích trên ta suy ra lời giải của bài toán trong trường hợp $n=5$ như sau.

Không giảm tổng quát, ta giả sử $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$. Từ đó suy ra

$$P=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_5-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4).$$

Xét biểu thức

$$Q := \frac{P}{4a^2(a+1)^3(2a+1)^2}.$$

Viết Q dưới dạng

$$Q = \Big(\frac{(x_2-x_1)}{1}\Big)\Big(\frac{(x_3-x_1)}{a+1}\Big)\Big(\frac{(x_4-x_1)}{2a+1}\Big)\Big(\frac{(x_5-x_1)}{2a+2}\Big)\Big(\frac{(x_3-x_2)}{a}\Big)\times$$

$$\times\Big(\frac{(x_4-x_2)}{2a}\Big)\Big(\frac{(x_5-x_2)}{2a+1}\Big)\Big(\frac{(x_4-x_3)}{a}\Big)\Big(\frac{(x_5-x_3)}{a+1}\Big)\Big(\frac{(x_5-x_4)}{1}\Big).$$

Sử dụng bất đẳng thức AG cho 10 số không âm, ta có

$$Q \leqslant \frac{1}{10^{10}}\Big[\Big(\frac{(x_2-x_1)}{1}+\Big)\Big(\frac{(x_3-x_1)}{a+1}\Big)+\Big(\frac{(x_4-x_1)}{2a+1}\Big)+\Big(\frac{(x_5-x_1)}{2a+2}\Big)+\Big(\frac{(x_3-x_2)}{a}\Big)$$

$$+\Big(\frac{(x_4-x_2)}{2a}\Big)+\Big(\frac{(x_5-x_2)}{2a+1}\Big)+\Big(\frac{(x_4-x_3)}{a}\Big)+\Big(\frac{(x_5-x_3)}{a+1}\Big)+\Big(\frac{(x_5-x_4)}{1}\Big)\Big]^{10}.$$

Suy ra

$$Q \leqslant \frac{1}{10^{10}}\Big[\Big(\frac{3}{2(a+1)}+\frac{1}{2a+1}+1\Big)(-x_1+x_5)+\Big(-1+\frac{3}{2a}+\frac{1}{2a+1}\Big)(-x_2+x_4)\Big]^{10} \tag{2.3}$$

Chọn $a > 0$ sao cho

$$\Big(\frac{3}{2(a+1)}+\frac{1}{2a+1}+1\Big) = \Big(-1+\frac{3}{2a}+\frac{1}{2a+1}\Big) = q,$$

ta thu được $a = \frac{1}{2}$, $q = \frac{5}{2}$ và $Q = \frac{P}{27/4}$.

Từ đây, suy ra

$$Q \leqslant \frac{1}{10^{10}}\Big[\frac{5}{2}(-x_1-x_2+x_4+x_5)\Big]^{10} = \frac{1}{2^{10}}$$

hay

$$P \leqslant \frac{1}{2^{20}}\frac{27}{4} = \frac{27}{2^{22}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0 \\ -x_1-x_2+x_3+x_4+x_5 = |x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+x_5| = 1 \\ (x_2-x_1) = \frac{x_3-x_1}{3/2} = \frac{x_4-x_1}{2} = \frac{x_5-x_1}{3} = \frac{x_3-x_2}{1/2} = \\ \frac{x_4-x_2}{1} = \frac{x_5-x_2}{2} = \frac{x_4-x_3}{1/2} = \frac{x_5-x_3}{3/2} = \frac{x_5-x_4}{1}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta nhận được

$$\begin{cases} x_1 = -x_5 = -\frac{3}{8} \\ x_2 = -x_4 = -\frac{1}{8} \\ x_3 = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức bằng $\max P = \dfrac{27}{2^{22}}$ khi các biến thoả mãn điều kiện (2.4).

Nhận xét 11. *Bằng phương pháp tương tự sẽ tìm được lời giải của bài toán ứng với* $n \geqslant 6$.

Bài toán 8 (Thi chọn đội tuyển Việt Nam dự IMO-2001). *Xét bộ 3 số thực dương* a, b, c *thoả mãn điều kiện*

$$21ab + 2bc + 12ca \leqslant 12.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

Giải.

Với x, y, z là các số thực dương tuỳ ý (sẽ được chọn sau), áp dụng bất đẳng thức AG suy rộng, ta có

$$P = \frac{x}{ax} + \frac{2y}{by} + \frac{3z}{cz} \geqslant (x+y+z)\Big[\Big(\frac{1}{ax}\Big)^x\Big(\frac{2}{by}\Big)^y\Big(\frac{3}{cz}\Big)^z\Big]^{\frac{1}{x+y+z}}$$

$$= \frac{x+y+z}{\Big]\Big(\frac{abxy}{2}\Big)^{\frac{x+y-z}{2}}\Big(\frac{bcyz}{6}\Big)^{\frac{-x+y+z}{2}}\Big(\frac{cazx}{3}\Big)^{\frac{x-y+z}{2}}\Big]^{\frac{1}{x+y+z}}}$$

$$\geqslant \frac{(x+y+z)^2}{\frac{xy(x+y-z)}{4}ab + \frac{yz(y+z-x)}{12}bc + \frac{zx(z+x-y)}{6}ca}.$$

Suy ra

$$P \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{\frac{xy(x+y-z)}{4}ab + \frac{yz(y+z-x)}{12}bc + \frac{zx(z+x-y)}{6}ca}. \tag{2.5}$$

Chọn các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện

$$\frac{xy(x+y-z)}{4.21} = \frac{yz(y+z-x)}{12.2} = \frac{zx(z+x-y)}{6.8},$$

hay $(x, y, z) = (6, 5, 4)$.

Thay $(x, y, z) = (6, 5, 4)$ vào (2.5), ta nhận được

$$P \geqslant \frac{15}{2},$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1}{6a} = \frac{2}{5b} = \frac{3}{4c} \\ 15ab = \frac{10bc}{3} = 8cz \\ 21ab + 2bc + 8ca = 12 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{3}{1}. \end{cases}$$

Vậy

$$\min P = \frac{15}{2} \quad \text{khi} \quad (a, b, c) = \Big(\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{1}\Big).$$

Bài toán 9. *Xét bộ số thoả mãn các điều kiện*

$$\begin{cases} x, y, z \in [1, 3], \;\; u, v, w \in [5, 7], \;\; a, b, c \in [9, 11] \\ a + b + c + x + y + z + u + v + w = 160 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của

$$F = abcxyzuvw.$$

Giải.

THeo bất đẳng thức AG cho 3 số dương thì

$$F \leqslant \Big(\frac{a + b + c}{3}\frac{x + y + z}{3}\frac{u + v + w}{3}\Big)^3.$$

Dấu dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có

$$x = y = z, \;\; u = v = w, \;\; a = b = c.$$

Đặt

$$\begin{cases} \frac{a+b+c}{3} = r, \\ \frac{x+y+z}{3} = p, \\ \frac{u+v+w}{3} = q. \end{cases}$$

Khi đó thì

$$\begin{cases} p \in [1, 3], \;\; q \in [5, 7], \;\; r \in [9, 11] \\ p + q + r = 20 \\ F \leqslant (pqr)^3. \end{cases}$$

Xét $m > n > 1$, ta có

$$(mp)(nq)r \leqslant \Big(\frac{mp+nq+r}{3} = \Big(\frac{p+q+r}{3} + \frac{m-1}{3}p + \frac{n-1}{3}q\Big)^3$$
$$\leqslant \Big(\frac{20}{3} + \frac{m-1}{3}3 + \frac{n-1}{3}7\Big)^3.$$

Suy ra

$$F \leqslant \frac{1}{(mn)^3}\Big(\frac{20+3(m-1)+7(n-1)}{3}\Big)^9.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=y=z, \ \ u=v=w, \ \ a=b=c. \\ mp=nq=r, \ \ p=3, q=7, \ \ p+q+r=20, \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} x=y=z=3, \ \ u=v=w=7, \ \ a=b=c=10. \\ m=\frac{10}{3}, \ \ n=\frac{10}{7}. \end{cases}$$

Thay m, n, ta được $F \leqslant (210)^3$.

Kết luận: Max $F = (210)^3$, đạt được khi

$$\begin{cases} x=y=z=3, \ \ u=v=w=7, \ \ a=b=c=10. \\ m=\frac{10}{3}, \ \ n=\frac{10}{7}. \end{cases}$$

3.4.2 Kỹ thuật tách, ghép và phân nhóm

Bài toán 10. *Cho a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng*

$$a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n} \geqslant a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n.$$

Giải.

Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{m\cdot a^{m+n} + nb^{m+n}}{m+n} \geqslant a^m b^n,$$
$$\frac{mb^{m+n} + nc^{m+n}}{m+n} \geqslant b^m c^n,$$
$$\frac{mc^{m+n} + na^{m+n}}{m+n} \geqslant c^m a^n.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 11. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geqslant a^3 + b^3 + c^3.$$

Giải.

Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a^5}{b^2} + ab^2 \geqslant 2a^3\\
&\frac{b^5}{c^2} + bc^2 \geqslant 2b^3\\
&\frac{c^5}{a^2} + ca^2 \geqslant 2c^3\\
&a^3 + b^3 + c^3 \geqslant ab^2 + bc^2 + ca^2
\end{aligned}$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 12. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^5}{bc} + \frac{b^5}{ca} + \frac{c^5}{ab} \geqslant a^3 + b^3 + c^3.$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a^5}{bc} + abc \geqslant 2a^3\\
&\frac{b^5}{ca} + abc \geqslant 2b^3\\
&\frac{c^5}{ab} + abc \geqslant 2c^3\\
&a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc
\end{aligned}$$

Cộng bốn bất đẳng thức này, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 13. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geqslant \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}.$$

Giải.

Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{a^5}{b^3} + ab \geqslant 2\frac{a^3}{b}.$$

Từ đây, suy ra

$$\frac{a^5}{b^3} + 2ab \geqslant \frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{b} + ab.$$

Mặt khác, ta lại có

$$\frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{b} + ab \geqslant \frac{a^3}{b} + 2a^2,$$

nên

$$\frac{a^5}{b^3} + 2ab \geqslant \frac{a^3}{b} + 2a^2.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{b^5}{c^3} + 2bc \geqslant \frac{b^3}{c} + 2b^2$$
$$\frac{c^5}{a^3} + 2ca \geqslant \frac{c^3}{a} + 2c^2$$

và

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 2(ab + bc + ca).$$

Cộng các bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 14. *Cho a, b, c là các số dương phân biệt thoả mãn điều kiện*

$$\frac{a^{102}}{b^{100}} + \frac{b^{102}}{c^{100}} + \frac{c^{102}}{a^{100}} < 1.$$

Chứng minh rằng luôn tồn tại các số tự nhiên k ($0 \leq k \leqslant 99$) sao cho bất đẳng thức sau đây được thoả mãn

$$\frac{a^{k+3}}{b^{k+1}} + \frac{b^{k+3}}{c^{k+1}} + \frac{c^{k+3}}{a^{k+1}} \leq \frac{1}{100} + \frac{a^{k+2}}{b^k} + \frac{b^{k+2}}{c^k} + \frac{c^{k+2}}{a^k}.$$

Giải. Vì a, b, c là các số dương phân biệt nên ta có thể sắp thứ tự dãy bất đẳng thức sau

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} < \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} < \cdots < \frac{a^{102}}{b^{100}} + \frac{b^{102}}{c^{100}} + \frac{c^{102}}{a^{100}} < 1.$$

Ta chia đoạn $[0, 1]$ thành 100 đoạn nhỏ bằng nhau có độ dài bằng nhau $= \dfrac{1}{100}$. Suy ra, theo nguyên lý Dirichle, trong 101 biểu thức của dãy bất đẳng thức trên phải có ít nhất hai biểu thức thuộc cùng một đoạn. Từ kết luận này, ta thu được điều cần chứng minh.

Nhận xét 12. *Khi sử dụng bất đẳng thức AG, cần chú ý đến nhận xét sau*

1. Lựa chọn thừa số để đảm bảo dấu đẳng thức của bất đẳng thức xảy ra,

2. Bổ sung thêm một số số hạng để sau khi sử dụng bất đẳng thức AG ta khử được mẫu số của biểu thức phân thức.

Bài toán 15. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geqslant \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{9a^3}{a+2b} + a(a+2b) \geqslant 6a^2$$
$$\frac{9b^3}{b+2c} + b(b+2c) \geqslant 6b^2$$
$$\frac{9c^3}{c+2a} + c(c+2a) \geqslant 6c^2$$

và

$$2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca).$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 16. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{(b+c)^2} + \frac{b^3}{(c+a)^2} + \frac{c^3}{(a+b)^2} \geqslant \frac{1}{4}(a+b+c).$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{8a^3}{(b+c)^2} + (b+c) + (b+c) \geqslant 6a$$

$$\frac{8b^3}{(c+a)^2} + (c+a) + (c+a) \geqslant 6b$$

$$\frac{8c^3}{(a+b)^2} + (a+b) + (a+b) \geqslant 6c$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 17. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{4a^3}{b(c+a)} + 2b + (c+a) \geqslant 6a$$

$$\frac{4b^3}{c(a+b)} + 2c + (a+b) \geqslant 6b$$

$$\frac{4c^3}{a(b+c)} + 2a + (b+c) \geqslant 6c$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 18. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4}{bc^2} + \frac{b^4}{ca^2} + \frac{c^4}{ab^2} \geqslant a+b+c.$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{a^4}{bc^2} + b + c + c \geqslant 4a$$

$$\frac{b^4}{ca^2} + c + a + a \geqslant 4b$$

$$\frac{c^4}{ab^2} + a + b + b \geqslant 4c$$

Cộng các bất đẳng thức ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 19. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{(a+b)(b+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(a+b)} \geqslant \frac{1}{4}(a+b+c).$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{8a^3}{(a+b)(b+c)} + (a+b) + (b+c) \geqslant 6a$$

$$\frac{8b^3}{(b+c)(c+a)} + (b+c) + (c+a) \geqslant 6b$$
$$\frac{8c^3}{(c+a)(a+b)} + (c+a) + (a+b) \geqslant 6c$$

Cộng các bất đẳng thức ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 20. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

Giải. Ta sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{b^3}{a^2} + \frac{c^3}{b^2} + \frac{a^3}{c^2} \geqslant a+b+c.$$

Suy ra

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^3}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^3}{\left(\frac{1}{b}\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^3}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

Bài toán 21. *Cho a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện*

$$a+b+c = 3abc.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a^3(c+2b)} + \frac{ca}{b^3(a+2c)} + \frac{ab}{c^3(b+2a)} \geqslant 1.$$

Giải.

Trước hết, ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geqslant \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2). \tag{2.6}$$

Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{9a^3}{b+2c} + a(b+2c) \geqslant 6a^2$$
$$\frac{9b^3}{c+2a} + b(c+2a) \geqslant 6b^2$$
$$\frac{9c^3}{a+2b} + c(a+2b) \geqslant 6c^2$$
$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3(ab+bc+ca)$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức (2.6).
Từ (2.6), ta thu được

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{b}+\frac{2}{c}}+\frac{\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{c}+\frac{2}{a}}+\frac{\frac{1}{c^3}}{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}\\
\geqslant&\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\Big)\\
\geqslant&\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\Big)\\
=&\frac{1}{3}\Big(\frac{a+b+c}{abc}\Big)=1.
\end{aligned}$$

Bài toán 22. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}\geqslant ab^2+bc^2+ca^2.$$

Giải.

Ta có:

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}\geqslant a^3+b^3+c^3$$

và

$$a^3+b^3+c^3\geqslant ab^2+bc^2+ca^2.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}\geqslant ab^2+bc^2+ca^2.$$

Bài toán 23. *Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$ và cho đa thức*

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+1\in\mathbb{R}[x],$$

với $a_i \geqslant 0$ $(i=1,\dots,n-1)$. Biết rằng $P(x)$ có n nghiệm đều thực. Chứng minh rằng $P(m)\geqslant(m+1)^n$.

Giải.

Do $a_i \geqslant 0$ $(i=0,\dots,n-1)$ và vì $P(0)=1>0$ nên các nghiệm của $P(x)$ đều không âm. Gọi các nghiệm của $P(x)$ là

$$-x_1,-x_2,\dots,-x_n\ \ (x_i>0,\ i=1,\dots,n).$$

Theo Định lý Viette thì

$$x_1x_2\cdots x_n=1$$

và vì hệ số bậc cao nhất của $P(x)$ bằng 1 nên

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i).$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, thì

$$P(m) = \prod_{i=1}^{n}(m + x_i) \geqslant (m+1)^N \sqrt[m+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = (m+1)^n.$$

Bài toán 24. *Cho đa thức*

$$P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

có các nghiệm đều dương. Chứng minh rằng

$$|a_{2n-k}a_k| \geqslant \left(C_n^k\right)^2 |a_0| \quad \forall k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Giải. Theo Định lý Vieete thì

$$|a_{2n-k}| = \Big|\sum x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{2n-k}}\Big|,$$

trong đó tổng chứa C_{2n}^{2n-k} số hạng.

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (bất đẳng thức Cauchy) ta được

$$|a_{2n-k}| \geqslant \left(\prod x_i^{C_{2n-1}^{2n-k-1}}\right)^{\frac{1}{C_{2n}^{2n-k}}} C_{2n}^{2n-k}.$$

Để ý rằng

$$C_{2n}^{2n-k} = \frac{2n}{2n-k} C_{2n-1}^{2n-k-1}.$$

Từ đó suy ra

$$|a_{2n-k}| \geqslant \left(\prod x_i\right)^{\frac{2n-k}{2n}} C_{2n}^{2n-k}.$$

Tương tự ta cũng có

$$|a_k| \geqslant \left(\prod x_i\right)^{\frac{k}{2n}} C_{2n}^{k}.$$

Từ đó suy ra

$$|a_{2n-k}a_k| \geqslant \left(C_n^k\right)^2 |a_0| \quad \forall k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

3.5 Bài tập

Bài 1 (India MO 2003). *Cho a, b là các số dương thoả mãn điều kiện $a + b = 2$. Chứng minh rằng*

$$x^3y^3(x^3 + y^3) \leqslant 2.$$

Bài 2 (IMO 1995). *Cho a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Bài 3 (IMO 2001). *Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ba}} \geqslant 1.$$

Bài 4 (Thi chọn Đội tuyển Việt Nam 2005). *Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geqslant \frac{3}{8}.$$

Bài 5 (IMO 2005). *Cho a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện $abc \geqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2} + \frac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2} + \frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2} \geqslant 0.$$

Bài 6. *Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện*

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=6. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = x^2y + y^2z + z^2x.$$

Bài 7 (IMO 96). *Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thoả mãn điều kiện*

$$|f(x)| \leqslant 1,\ \ \forall x \in [-1; 1].$$

Chứng minh rằng

$$|a| + |b| + |c| + |c| + |d| \leqslant 7.$$

Bài 8. *Cho $n \in \mathbb{N};\ \ n \geq 3$. Chứng minh rằng $n^{n+1} > (n+1)^n$.*

Bài 9. *Cho* $x, y, z > 0$. *Chứng minh rằng*

$$x^x y^y z^z \geqslant (xyz)^{\frac{x+y+z}{3}}.$$

Bài 10. *Cho* $x, y \geqslant 0$; $x + y = 1$. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của*

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}.$$

Bài 11. *Giả sử phương trình* $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *có ba nghiệm, ký hiệu:* m, n, p. *Chứng minh rằng*

$$\frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{\sqrt{3}}{n} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{p} \leqslant m^2 + n^2 + p^2$$

Bài 12 (IMO 2000). *Cho* $a, b, c > 0$; $abc = 1$. *Chứng minh rằng*

$$(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leqslant 1.$$

Bài 13. *Cho* $x, y, z > 0$. *Chứng minh rằng*

$$(i) \quad (1+x)(1+y)(1+z) \geqslant (1 + \sqrt[3]{xyz})^3,$$

$$(ii) \quad (1 + \frac{x}{y})(1 + \frac{y}{z})(1 + \frac{z}{x}) \geqslant 2(1 + \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}).$$

Bài 14. *Cho* $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$. *Tìm* a, b, c *để*

$$|f(x)| \leqslant 1, \ \forall x \in [-1; 1].$$

Bài 15. *Cho* $a, b, c, d > 0$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}.$$

Bài 16. *Biết rằng phương trình:* $x^3 - ax^2 + bx - 1 = 0$ *có 3 nghiệm dương. Chứng minh rằng*

$$2a^2(a+1) \geqslant 9(3b-1).$$

Bài 17. *Cho tam giác* ABC *ngoại tiếp đường tròn bán kính* r *và nội tiếp trong đường tròn bán kính* $R = 1$. *Gọi* ρ *là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác* $A'B'C'$, *trong đó* $A'; B'; C'$ *là chân các đường cao hạ từ* A, B, C *của tam giác* ABC. *Chứng minh rằng*

$$\rho \leqslant 1 - \frac{1}{3}(1+r)^2.$$

Bài 18. *Tam giác ABC có diện tích S. Trên các cạnh $BC = a; CA = b; AB = c$ lấy các điểm D, E, F sao cho tam giác DEF đều. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S} \geqslant \frac{2\sqrt{2}S}{DE}.$$

Bài 19. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $\forall P \in mp\ (ABC)$, ta luôn có $PA + PB + PC \geqslant CA + CB$ là $\widehat{ACB} \geqslant 120^0$.*

Bài 20. *Tứ giác $ABCD$ thoả mãn điều kiện*
(i) $AB = AD + BC$,
(ii) Tồn tại điểm P ở trong tứ giác có khoảng cách đến CD bằng x sao cho $AP = x + AD$; $BP = x + BC$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

Bài 21. *Cho một số tam giác nhọn. Từ các cạnh của các tam giác đó dựng một tam giác mới Δ theo quy tắc sau: Cạnh nhỏ nhất của Δ bằng tổng các cạnh nhỏ nhất của các tam giác đã cho ; Cạnh "trung bình" của Δ bằng tổng các cạnh "trung bình" của các tam giác đã cho ; Cạnh lớn nhất của Δ bằng tổng các cạnh lớn nhất của các tam giác đã cho. Gọi α là góc lớn nhất trong tam giác Δ. Chứng minh rằng $cos\alpha > 1 - \sqrt{2}$.*

Bài 22. *Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện $6(a + b + c)r^2 = abc$. Lấy điểm M bất kỳ thuộc đường tròn nội tiếp tam giác.*
Hạ MD, ME, MFlần lượt $\perp$ với BC, CA, AB. Gọi S, S_1 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, DEF. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của tỷ số $\dfrac{S}{S_1}$.

Bài 23. *Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy các điểm X, Y, Z sao cho $\Delta\ XYZ \sim \Delta\ ABC$. Tìm vị trí của X, Y, Z sao cho $\Delta\ XYZ$ có diện tích nhỏ nhất.*

Bài 24. *Cho tập S gồm n điểm trên mặt phẳng thoả mãn hai tính chất sau:*
1) Không có ba điểm nào thẳng hàng.
2) Với $\forall\ P \in S, \exists$ ít nhất k điểm $\in S$ có cùng khoảng cách đến P. Chứng minh rằng

$$k \geqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Bài 25. *Trên mặt phẳng cho điểm O và đường gấp khúc khép kín F. (F có thể không lồi, có thể suy biến). Gọi p là chu vi ; d là tổng các khoảng cách từ O đến các đỉnh của F còn h là tổng các khoảng cách từ O đến các đường thẳng chứa các cạnh của F.*
Chứng minh rằng $4(d^2 - h^2) \geqslant p^2$.

Chương 4

Hàm lồi, lõm và tựa lồi, lõm

4.1 Các tính chất cơ bản của hàm lồi

Định nghĩa 14. *Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lồi (lồi dưới) trên tập $[a, b) \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in [a, b)$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có*

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \tag{1.1}$$

Nếu dấu đẳng thức trong (1.1) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lồi thực sự (chặt) trên $[a, b)$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lõm (lồi trên) trên tập $[a, b) \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in [a, b)$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \tag{1.2}$$

Nếu dấu đẳng thức trong (1.2) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lồi thực sự (chặt) trên $[a, b)$.

Tương tự, ta cũng có định nghĩa về hàm lồi (lõm) trên các tập (a, b), $(a, b]$ và $[a, b]$. Về sau, ta sử dụng ký hiệu $I(a, b)$ là nhằm ngầm định một trong bốn tập hợp (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ và $[a, b]$.

Chú ý rằng, đôi khi ta chỉ nói về tính lồi của một hàm số mà không nói tới hàm đó lồi trên tập $I(a, b)$ một cách cụ thể như đã nêu ở trên.

Nhận xét rằng, khi $x_1 < x_2$ thì $x := \alpha x_1 + \beta x_2$ với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$ đều thuộc (x_1, x_2) và

$$\alpha = \frac{x_1 - x}{x_2 - x_1},\ \ \beta = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}.$$

Về sau, ta thường quan tâm và nói nhiều đến các tính chất cua hàm lồi trên $I(a, b)$. Bạn đọc tự ngầm hiểu và phát biểu cũng như thực hiện các phép tính tương ứng cho trường hợp hàm lõm trên $I(a, b)$.

Tính chất 7. *Nếu $f(x)$ lồi (lõm) trên $I(a,b)$ thì $g(x) := cf(x)$ là hàm lõm (lồi) trên $I(a,b)$ khi $c < 0$ ($c > 0$).*

Tính chất 8. *Tổng hữu hạn các hàm lồi trên $I(a,b)$ là một hàm lồi trên $I(a,b)$.*

Tính chất 9. *Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lồi trên $I(a,b)$ và nếu $g(x)$ lồi và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a,b)$.*

Proof. .
Thật vậy, theo giả thiết, $f(x)$ là hàm số liên tục trên $I(a,b)$ nên tập giá trị của nó cũng là một tập dạng $I(c,d) \subset \mathbb{R}$. Theo giả thiết $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a,b)$ nên với mọi $x_1, x_2 \in I(a,b)$ và cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Từ giả thiết $g(x)$ là hàm số đồng biến, ta nhận được

$$g[f(\alpha x_1) + f(\beta x_2)] \leqslant g[\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)]. \tag{1.3}$$

Do $g(x)$ là hàm lồi nên

$$g[\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)] \leqslant \alpha g[f(x_1)] + \beta g[f(x_2)]. \tag{1.4}$$

Từ (1.3) và (1.4) suy ra

$$g[f(\alpha x_1) + f(\beta x_2)] \leqslant \alpha g[f(x_1)] + \beta g[f(x_2)].$$

□

Tương tự, ta cũng có các tính chất

Tính chất 10. *(i) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lõm trên $I(a,b)$ và nếu $g(x)$ lồi và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a,b)$.*

(ii) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lõm trên $I(a,b)$ và nếu $g(x)$ lõm và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a,b)$.

(iii) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lồi trên $I(a,b)$ và nếu $g(x)$ lõm và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a,b)$.

Tính chất 11. *Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) trên $I(a,b)$ và nếu $g(x)$ hàm ngược của $f(x)$ thì ta có các kết luận sau:*

(i) $f(x)$ lõm, đồng biến $\Leftrightarrow$ $g(x)$ lồi, đồng biến,

(ii) $f(x)$ lõm, nghịch biến $\Leftrightarrow$ $g(x)$ lõm, nghịch biến,

(iii) $f(x)$ lồi, nghịch biến $\Leftrightarrow$ $g(x)$ lồi, nghịch biến.

Proof. được suy trực tiếp từ tính chất của hàm ngược là hàm ngược luôn luôn cùng tính đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) với hàm xuất phát. □

Tính chất 12. *Nếu $f(x)$ là hàm số khả vi trên trên $I(a,b)$ thì $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a,b)$ khi và chỉ khi $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $I(a,b)$.*

Proof. Giả sử $f(x)$ lồi trên $I(a,b)$. Khi đó với $x_1 < x < x_2$ $(x, x_1, x_2 \in I(a,b)$, ta có

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} > 0, \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} > 0, \quad \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$

và vì vậy

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

hay

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{1.5}$$

Trong (1.5), cho $x \to x_1$, ta thu được

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{1.6}$$

Tương tự, trong (1.5), cho $x \to x_2$, ta thu được

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2). \tag{1.7}$$

Từ (1.6) và (1.7), ta nhận được $f'(x_1) \leqslant f(x_2)$, tức hàm số $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng.

Ngược lại, giả sử $f'(x)$ là hàm số đơn điệu tăng và $x_1 < x < x_2$ $(x, x_1, x_2 \in I(a,b)$. Theo Định lý Lagrange, tồn tại x_3, x_4 với $x_1 < x_3 < x < x_4 < x_2$ sao cho

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_3), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_4).$$

Do $f'(x_3) \leqslant f(x_4)$ nên

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_4),$$

tức là ta có (5). □

Về sau, ta thường dùng các tính chất sau đây:

Định lý 40. *Nếu $f(x)$ khả vi bậc hai trên $I(a,b)$ thì $f(x)$ lồi (lõm) trên $I(a,b)$ khi và chỉ khi $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$) trên $I(a,b)$.*

Proof. được suy trực tiếp từ tính chất 6. □

Định lý 41. *Nếu $f(x)$ lồi trên (a,b) thì tồn tại các đạo hàm một phía $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ với mọi $x \in (a,b)$ và*

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x).$$

Proof. Với $x_0 \in (a,b)$ cố định, chọn các số dương tuỳ ý u,v sao cho $x_0 - u \in (a,b)$, $x_0 + v \in (a,b)$. Khi đó, theo (1.5), thì

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - u)}{u} \leqslant \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v}. \tag{1.8}$$

Chọn $v' > v$ để $x_0 + v' \in (a,b)$, thì $x_0 < x_0 + v < x_0 + v'$ và theo (1.5), thì

$$\frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v} \leqslant \frac{f(x_0 + v') - f(x_0 + v)}{v' - v}. \tag{1.9}$$

Biến đổi (1.9), ta thu được

$$\frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v} \leqslant \frac{f(x_0 + v') - f(x_0)}{v'}. \tag{1.10}$$

Hệ thức (1.10) chứng tỏ rằng hàm số

$$g(v) := \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v}$$

là một hàm đơn điệu tăng và khi v giảm dần tới 0 thì $g(v)$ đơn điệu giảm và bị chặn (theo (1.8)) nên tồn tại giới hạn một phía

$$\lim_{v \to 0^+} g(v) = \lim_{v \to 0^+} \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v} = f'_+(x_0).$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được sự tồn tại của đạo hàm trái $f'_-(x_0)$.

Nhận xét rằng, nếu trong (1.8), cho $u, v \to 0^+$ thì sẽ thu được bất đẳng thức

$$f'_-(x_)) \leqslant f'_+(x_0).$$

□

Nhận xét 13. *Các hàm số $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ là những hàm đơn điệu tăng trong (a,b).*

Proof. Thật vậy, khi $x_1 < x_2$ thì ta chọn t_1, t_2 sao cho $x_1 < t_1 < t_2 < x_2$. Khi đó, theo (1.5) thì

$$\frac{f(t_1) - f(x_1)}{t_1 - x_1} \leqslant \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(t_2)}{x_2 - t_2}. \tag{1.11}$$

Lấy giới hạn khi $t_1 \to x_1$ và $t_2 \to x_2$ trong (1.11), ta thu được

$$f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2)$$

và vì vậy

$$f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2)$$

hay

$$f'_-(x_1) \leqslant f'_-(x_2), \text{ khi } x_1 < x_2,$$

$$f'_+(x_1) \leqslant f'_+(x_2), \text{ khi } x_1 < x_2.$$

□

Định lý 42. *Nếu $f(x)$ lồi trên $I(a,b)$ thì $f(x)$ liên tục trên (a,b).*

Proof. Theo Định lý 3 thì tồn tại các đạo hàm một phía $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ với mọi $x \in (a,b)$ và do vậy hàm số $f(x)$ vừa liên tục trái và liên tục phải. Suy ra $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong (a,b). □

Nhận xét 14. *Hàm lồi trên $[a,b]$ có thể không liên tục tại đầu mút của đoạn $[a,b]$.*

Thật vậy, chẳng hạn hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x \text{ khi } x \in (0,1) \\ 1 \text{ khi } x = 1 \end{cases}$$

là hàm lồi trên [0,1] nhưng không liên tục tại $x = 1$.

Như vậy hàm lồi luôn là hàm liên tục trong khoảng đang xét. Về sau, ta luôn luôn quan tâm đến các hàm số lồi và liên tục trên $I(a,b)$. Tính chất sau đây cho phép ta dễ dàng kiểm chứng tính lồi (lõm) đối với một hàm số cho trước và nhiều tác giả chọn tính chất này để đặc trưng cho hàm lồi.

Định lý 43 (Jensen). *Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a,b)$ là*

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ \forall x_1, x_2 \in I(a,b). \tag{1.12}$$

Proof. Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a,b)$ thì ta có ngay (1.12) bằng cách chọn $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$.

Giả sử ta có (1.12). Ta cần chứng minh rằng với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1) + f(\beta x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}$ thì $\beta \in \mathbb{Q}$ và ta có thể viết

$$\alpha = \frac{m}{q},\ \ \beta = \frac{n}{q},$$

trong đó $m, n \in \mathbb{Z},\ \ q \in \mathbb{N}$ và $m + n = q$. Bằng phương pháp quy nạp, ta có ngay

$$f(\alpha x_1) + f(\beta x_2) = f\Big(\frac{mx_1 + nx_2}{q}\Big)$$
$$\leqslant \frac{mf(x_1) + nf(x_2)}{q} = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

Nếu α là số vô tỷ thì $\beta\ (= 1 - \alpha)$ cũng là số vô tỷ. Chọn dãy số hữu tỷ dương u_n trong khoảng (0,1) có giới hạn bằng α:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha.$$

Khi đó, hiển nhiên dãy $v_n := 1 - u_n$ cũng nằm trong (0,1) và

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \beta.$$

Theo chứng minh trên ứng với trường hợp α hữu tỷ, thì

$$f(u_n x_1 + v_n x_2) \leqslant u_n f(x_1) + v_n f(x_2),\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ x_1, x_2 \in I(a,b).$$

Chuyển qua giới hạn và sử dụng tính liên tục của $f(x)$, ta thu được

$$f(\alpha x_1) + f(\beta x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

□

Nhận xét 15. *Giả sử $f(x) \not\equiv const$ và là hàm lồi trên $[a,b]$ với $f(a) = f(b)$. Khi đó $f(x) \neq f(a)$ với mọi $x \in (a,b)$.*

Tiếp theo, ta đặc biệt quan tâm đến lớp con của lớp các hàm lồi là lớp các hàm lồi hai lần khả vi. Đây là lớp hàm thông dụng nhất của giải tích gắn với nhiều bất đẳng thức cổ điển.

Định lý 44. *Giả sử $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng (a,b). Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên (a,b) là*

$$f''(x) \geqslant 0, \ \ \forall x \in (a,b). \tag{1.13}$$

Proof. Điều kiện cần. Khi $f(x)$ là hàm lồi, ta có

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x) \geqslant 0, \ \ \forall x \in (a,b),\ h>0, \text{ mà } \ x \pm h \in (a,b). \tag{1.14}$$

Giả sử $f''(x_0) < 0$. Khi đó tồn tại cặp số dương δ, h sao cho

$$f'(x_0+u) - f'(x_0-u) < -\delta u, \ \ \text{với } 0 \leqslant u \leqslant v.$$

Lấy tích phân hai vế theo cận từ $u=0$ đến $u=h$, ta được

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0) < -\frac{1}{2}\delta h^2,$$

mâu thuẫn với (1.14).

Điều kiện đủ. Ta sử dụng giả thiết $f"(x) \geqslant 0$ trong (a,b) để chứng minh bất đẳng thức (1.13):

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ \ \forall x_1, x_2 \in (a,b).$$

Thật vậy, theo Định lý Lagrange thì

$$f'(x) \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \ \text{ khi } x > x_0,$$

và

$$f'(x) \geqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \ \text{ khi } x < x_0.$$

Suy ra

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \ \text{ khi } x_1 < x < x_2.$$

Điều này tương đương với

$$f(x) \leqslant \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2), \ \text{ khi } x_1 < x < x_2.$$

Chọn $x = \dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$, ta được (1.13). ◻

4.2 Thứ tự sắp được của dãy số sinh bởi hàm lồi

Theo Định lý 8 thì nếu $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng (a, b), khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên (a, b) là

$$f''(x) \geqslant 0,\ \ \forall x \in (a, b).$$

Nếu $f(x)$ là hàm liên tục và lồi trên $I(a, b)$ thì theo Định lý 5, ta có điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ là

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},\ \ \forall x_1, x_2 \in I(a, b).$$

Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ có $f''(x) \geqslant 0$ trên $I(a, b)$ và $x_1, x_2 \in I(a, b)$ với $x_1 < x_2$. Hiển nhiên rằng ta có thứ tự: $x_1 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < x_2$. Khi đó có vô số dãy số tăng dần $\{u_k\}$ trong $\Big(x_1, \dfrac{x_1 + x_2}{2}\Big)$:

$$x_1 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

và dãy số giảm dần $\{v_k\}$ trong $\Big(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, x_2\Big)$:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} < v_n < v_{n-1} < \cdots < v_1 < v_0 = x_2$$

sao cho

$$u_j + v_j = x_1 + x_2,\ \ \forall j = 0, 1, \ldots, n.$$

Hiển nhiên, theo Định lý 5, thì

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(u_j) + f(v_j)}{2},\ \ \forall j = 0, 1, \ldots, n.$$

Ta thấy xuất hiện ngay một câu hỏi tự nhiên là:

Phải chăng có thể sắp thứ tự dãy số $\{f(u_j) + f(v_j)\}$ như một dãy đơn điệu?

Câu hỏi đó được trả lời bằng khẳng định sau đây.

Định lý 45. *Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ có $f''(x) \geqslant 0$ trên $I(a, b)$ và $x_1, x_2 \in I(a, b)$ với $x_1 < x_2$. Khi đó với mọi dãy số tăng dần $\{u_k\}$ trong $\Big(x_1, \dfrac{x_1 + x_2}{2}\Big)$:*

$$x_1 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

và dãy số giảm dần $\{v_k\}$ *trong* $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$*:*

$$\frac{x_1+x_2}{2} < v_n < v_{n-1} < \cdots < v_1 < v_0 = x_2$$

sao cho

$$u_j + v_j = x_1 + x_2, \ \forall j = 0, 1, \ldots, n,$$

ta đều có

$$f(u_0) + f(v_0) \geqslant f(u_1) + f(v_1) \geqslant \cdots \geqslant f(u_n) + f(v_n).$$

Nói cách khác: Dãy $\{f(u_j) + f(v_j)$ *là một dãy giảm.*

Proof. Ta chỉ cần xét với $x_1, x_2 \in I(a,b)$ cho trước trước với $x_1 < x_2$, thì

$$f(x_1) + f(x_2) \geqslant f(x_1 + \epsilon) + f(x_2 - \epsilon),$$

trong đó $0 \leqslant \epsilon \leqslant \frac{x_2 - x_1}{2}$.

Thật vậy, từ giả thiết $0 \leqslant \epsilon \leqslant \frac{x_2 - x_1}{2}$ ta thu được

$$x_1 \leqslant x_1 + \epsilon \leqslant x_2 - \epsilon \leqslant x_2.$$

Theo Định lý Lagrange thì

$$f(x_1 + \epsilon) - f(x_1) = f'(\theta_1)\epsilon, \text{với } \theta_1 \in (x_1, x_1 + \epsilon),$$

$$f(x_2) - f(x_2 - \epsilon) = f'(\theta_2)\epsilon, \text{với } \theta_2 \in (x_2 - \epsilon, x_2).$$

Vì $\theta_1 < \theta_2$ và $f''(x) \geqslant 0$ nên $f'(\theta_1) \leqslant f'(\theta_2)$.

Mặt khác, do $\epsilon \geqslant 0$ nên

$$f(x_2) - f(x_2 - \epsilon) - f(x_1) \geqslant f(x_1 + \epsilon) - f(x_1)$$

hay

$$f(x_1) + f(x_2) \geqslant f(x_1 + \epsilon) + f(x_2 - \epsilon).$$

Định lý được chứng minh.

□

Tương tự, ta có kết quả sau đối với hàm số lõm.

Định lý 46. *Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ có $f''(x) \leqslant 0$ trên $I(a,b)$ và $x_1, x_2 \in I(a,b)$ với $x_1 < x_2$. Khi đó với mọi dãy số tăng dần $\{u_k\}$ trong $\left(x_1, \dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$:*

$$x_1 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \frac{x_1+x_2}{2}$$

và dãy số giảm dần $\{v_k\}$ trong $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$:

$$\frac{x_1+x_2}{2} < v_n < v_{n-1} < \cdots < v_1 < v_0 = x_2$$

sao cho

$$u_j + v_j = x_1 + x_2, \ \forall j = 0, 1, \dots, n,$$

ta đều có

$$f(u_0) + f(v_0) \leqslant f(u_1) + f(v_1) \leqslant \cdots \leqslant f(u_n) + f(v_n).$$

Nói cách khác: Dãy $\{f(u_j) + f(v_j)$ là một dãy tăng.

Nhận xét rằng, trong ứng dụng, ta thường làm việc với một dãy số cho trước và các biến đổi liên quan đến chúng. Chẳng hạn, cho trước dãy số giảm

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n.$$

Khi đó, ta luôn có các khẳng định sau đây.

Bổ đề 1. *Giả sử cho trước dãy số giảm*

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n.$$

Khi đó

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geqslant k\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Bổ đề 2. *Giả sử cho trước dãy số giảm*

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n.$$

Khi đó, luôn tồn tại dãy số không âm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, sao cho

$$x_1 - \alpha_1 \geqslant x_2 + \alpha_1 - \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant x_{n-1} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} \geqslant x_n + \alpha_{n-1}.$$

Thật vậy, ta chỉ cần chọn dãy $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, như sau

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \frac{x_1 - x_2}{2}, 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \frac{x_2 - x_3}{2}, \dots, 0 \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \frac{x_{n-1} - x_n}{2}.$$

Từ Định lý 6 và 7, ta có thể chứng minh kết quả sau đây.

Định lý 47. *Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ có $f''(x) \geqslant 0$ trên $I(a,b)$ và dãy số giảm trong $I(a,b)$*

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n.$$

Khi đó với mọi dãy số không âm $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, sao cho

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \frac{x_1 - x_2}{2}, 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \frac{x_2 - x_3}{2}, \ldots, 0 \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \frac{x_{n-1} - x_n}{2},$$

ta đều có

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqslant f(x_1 - \alpha_1) +$$
$$+ f(x_2 + \alpha_1 - \alpha_2) + \cdots + f(x_{n-1} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) + f(x_n + \alpha_{n-1}).$$

Định lý 48. *Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ có $f''(x) \leqslant 0$ trên $I(a,b)$ và dãy số giảm trong $I(a,b)$*

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n.$$

Khi đó với mọi dãy số không âm $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, sao cho

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \frac{x_1 - x_2}{2}, 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \frac{x_2 - x_3}{2}, \ldots, 0 \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \frac{x_{n-1} - x_n}{2},$$

ta đều có

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leqslant f(x_1 - \alpha_1) +$$
$$+ f(x_2 + \alpha_1 - \alpha_2) + \cdots + f(x_{n-1} + \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) + f(x_n + \alpha_{n-1}).$$

4.3 Hàm lồi, lõm bậc cao

Tiếp theo, ta xét lớp hàm lồi bậc cao và một số tính chất cơ bản của chúng. Trước hết, ta nhắc lại các tính chất đặc trưng và cũng là định nghĩa của hàm đồng biến và hàm lồi quen biết. Đó là,

Tính chất 13 (Dạng nội suy). *Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $I(a,b)$ khi và chỉ khi với mọi cặp số phân biệt $x_0, x_1 \in I(a,b)$, ta đều có*

$$\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} \geqslant 0. \tag{5.1}$$

Chứng minh là hiển nhiên.

Tính chất 14 (Dạng nội suy). *Hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a,b)$ khi và chỉ khi với mọi bộ ba số phân biệt $x_0, x_1, x_2 \in I(a,b)$, ta đều có*

$$\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \geqslant 0. \tag{5.2}$$

Chứng minh được suy trực tiếp từ tính chất tương đương sau đây của hàm lồi

Tính chất 15. *Hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a,b)$ khi và chỉ khi với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a,b)$, $x_1 < x_2$, ta đều có*

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \text{ khi } x_1 < x < x_2.$$

Từ các tính chất đã nêu này, gợi ý cho ta có thể ngầm coi hàm đồng biến như là hàm lồi "bậc 0", còn hàm lồi thì cũng có thể gọi là "hàm đồng biến bậc hai". Với cách ngầm hiểu như vậy, ta có thể phát biểu định nghĩa hàm lồi bậc cao (bậc k, $k \in \mathbb{N}^*$) tuỳ ý, như sau.

Định nghĩa 15. *Hàm số $f(x)$ được gọi là n-lồi trên $I(a,b)$ khi ứng với mọi bộ $n+1$ số phân biệt trong $I(a,b)$, ta đều có*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] := \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega'_(x_j)} \geqslant 0,$$

trong đó

$$\omega(x) := \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Tương tự, ta cũng có định nghĩa hàm lõm bậc cao.

Định nghĩa 16. *Hàm số $f(x)$ được gọi là n-lõm trên $I(a,b)$ khi ứng với mọi bộ $n+1$ số phân biệt trong $I(a,b)$, ta đều có*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] := \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega'_(x_j)} \leqslant 0,$$

trong đó

$$\omega(x) := \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Từ Định nghĩa hàm n-lồi (lõm) trên $I(a,b)$, ta dễ dàng chứng minh các tính chất sau.

Tính chất 16. *Nếu hàm số $f(x)$ là n-lồi trên $I(a,b)$ với $n > 2$, thì tồn tại $f^{(k)}(x)$ với mọi $1 \leqslant k \leqslant n-2$ và hàm số $g(x) := f^{(k)}(x)$ là $n-k$-lồi trên $I(a,b)$.*

Tính chất 17. *Hàm số $f(x)$ có đạo hàm bậc n trên $I(a,b)$ là n-lồi trên $I(a,b)$ khi và chỉ khi*

$$f^{(n)}(x) \geqslant 0, \ \forall x \in I(a,b).$$

Cũng tương tự như phép biểu diễn hàm lồi (lõm) thông thường, ta có

Định lý 49. *Nếu hàm số $f(x)$ là n-lồi trên $[a,b]$ thì tồn tại hàm số $g(x)$ và đa thức $P(x)$ bậc không quá $n-1$, sao cho*

$$f(x) = P(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t)dt. \tag{5.3}$$

Chứng minh được suy trực tiếp từ biểu diễn của hàm lồi $f^{(n-2)}(x)$

$$f^{(n-2)}(x) = a_0 + \int_a^x g(t)dt,$$

và lấy tích phân $n-2$ lần liên tiếp, ta sẽ thu được (5.3), điều phải chứng minh.

4.4 Biểu diễn hàm lồi và lõm

Để đơn giản cách trình bày, về sau, nếu không có chú thích đặc biệt, ta chỉ xét lớp các hàm lồi (lõm) khả vi bậc hai. Như vậy, hàm $f(x)$ đơn điệu tăng trong $I(a,b)$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \geqslant 0, \ \ \forall x \in I(a,b)$$

và hàm $f(x)$ lồi trên $I(a,b)$ khi và chỉ khi

$$f"(x) \geqslant 0, \ \ \forall x \in I(a,b).$$

Từ đó, ta có nhận xét, khi hàm $f(x)$ lồi trên $I(a,b)$ thì đạo hàm bậc nhất của nó là một hàm đơn điệu tăng.

Do vậy, ta có thể phát biểu tính chất biểu diễn hàm lồi như sau.

Định lý 50. *Hàm $f(x)$ lồi trên $I(a,b)$ khi và chỉ khi tồn tại hàm $g(x)$ đơn điệu tăng trong $I(a,b)$ và số $c \in (a,b)$, sao cho*

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt.$$

Tiếp theo, còn có rất nhiều cách tiếp cận khác đến lớp các hàm lồi và hàm lõm và người ta tìm các cách biểu diễn chúng theo những mục tiêu khác nhau để giải quyết các bài toán thực tiễn.

Trong mục này, chúng ta đặc biệt quan tâm đến một dạng biểu diễn hàm lồi và hàm lõm thông qua các hàm số bậc nhất, vì lớp hàm này đơn giản và dễ tính toán trên tập giá trị của chúng.

Để ý rằng, nếu $f(x)$ là hàm lồi liên tục trên $[a, b]$ và với một cặp số dương (α, β) với $\alpha + \beta = 1$ xảy ra đẳng thức

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = f(\alpha a + \beta b)$$

thì $f(x)$ là hàm số (đa thức) bậc nhất.

Vì vậy, khi hàm số $f(x)$ lồi và khả vi trên $I(a, b)$ thì đồ thị của nó luôn luôn thuộc nửa mặt phẳng trên tạo nên bởi tiếp tuyến tại mỗi điểm tuỳ ý cho trước của đồ thị đó. Nói cách khác, nếu $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ thì với mọi cặp $x_0, x \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.2}$$

Thật vậy, ta có (2.2) tương đương với

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ khi } x > x_0; \ \ x_0, x \in I(a, b), \tag{2.3}$$

và

$$f'(x_0) \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ khi } x < x_0; \ \ x_0, x \in I(a, b). \tag{2.4}$$

Các bất đẳng thức

(2.3)

và (2.4) là hiển nhiên (theo Định lý Lagrange).

Dễ nhận thấy rằng (2.2) xảy ra đẳng thức khi $x_0 = x$. Vậy ta có thể viết (2.2) dưới dạng

$$f(x) = \min_{u \in I(a,b)} [f(u) + f'(u)(x - u).$$

Tương tự, ta cũng có biểu diễn đối với hàm lõm.

Khi hàm số $f(x)$ lõm và khả vi trên $I(a, b)$ thì đồ thị của nó thuộc nửa mặt phẳng dưới tạo bởi tiếp tuyến tại mỗi điểm tuỳ ý thuộc đồ thị, tức là với mỗi cặp $x_0, x \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.5}$$

Dễ nhận thấy rằng (2.5) xảy ra đẳng thức khi $x_0 = x$. Vậy ta có thể viết (5) dưới dạng

$$f(x) = \max_{u \in I(a,b)} [f(u) + f'(u)(x - u). \tag{2.6}$$

Vậy, chúng ta đã có một dạng biểu diễn hàm lồi và hàm lõm thông qua cực trị của các hàm số bậc nhất phụ thuộc tham biến. Phép biểu diễn này được (theo Bellman) gọi là biểu diễn á tuyến tính và nó đóng vai trò quan trọng như là một công cụ hữu hiệu trong nhiều bài toán cực trị và tối ưu.

Tương tự, ta cũng có biểu diễn đối với lớp hàm lồi nhiều biến.

Xét hàm số thực nhiều biến $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Giả sử, ứng với mọi bộ số $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ mà
$$z_1 \geqslant z_2 \geqslant \dots \geqslant z_n$$
ta đều có
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant F(z_1, z_2, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)\frac{\partial F}{\partial z_i}.$$
Khi đó, hiển nhiên
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{R(z)}\Big[F(z_1, z_2, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)\frac{\partial F}{\partial z_i}\Big].$$

4.5 Một số lớp hàm số biểu diễn được dưới dạng tuyến tính

Trong phần trước, chúng ta đã đề cập đến một dạng biểu diễn hàm lồi và hàm lõm thông qua các hàm số bậc nhất (thường được gọi là á tuyến tính), vì lớp hàm này đơn giản và dễ tính toán trên tập giá trị của chúng.

Trong mục này, ta đặc biệt quan tâm đến các dạng biểu diễn tương tự đối với một số lớp hàm số và bất đẳng thức quen biết.

Chẳng hạn, với hàm số gấp khúc $h(x) = |x|$, ta có biểu diễn tuyến tính dạng sau:
$$|x| = \min_{-1 \leqslant u \leqslant 1}(ux). \tag{5.1}$$
Thật vậy, theo định nghĩa của hàm dấu sign, thì
$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{khi } x > 0,\\ -1, & \text{khi } x < 0,\\ 0, & \text{khi } x = 0.\end{cases}$$
Vậy nên
$$|x| \geqslant ux, \ \text{khi } -1 \leqslant u \leqslant 1,$$
và dấu đẳng thức xảy ra khi $u = \operatorname{sign} x$. Từ đó ta có ngay (5.1).

Tư tưởng biểu diễn hàm số được mô tả như sau.

Giả sử cho đa thức với hệ số thực $f(x,y)$ biến $x, y \in \mathbb{R}$ và giả thiết rằng

$$f(ax_1 + bx_2, y) = af(x_1, y) + bf(x_2, y) \ \ \forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}.$$

Cho tập $S \subset \mathbb{R}$ và ký hiệu

$$g(x) = \max_{y \in S} f(x, y).$$

Khi đó

$$g(x_1 + x_2) \leqslant g(x_1) + g(x_2) \ \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, ta có

$$g(x_1 + x_2) = \max_{y \in S} f(x_1 + x_2, y) =$$

$$\max_{y \in S} [f(x_1, y) + f(x_2, y)] \leqslant$$

$$\leqslant \max_{y \in S} f(x_1, y) + \max_{y \in S} f(x_2, y) =$$

$$g(x_1) + g(x_2),$$

chính là điều phải chứng minh.

Bây giờ ta chuyển sang xét các biểu diễn tương tự đối với một số lớp bất đẳng thức.

Ta nhắc lại bất đẳng thức AG:

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \tag{5.2}$$

với $a, b, p, q > 0$ và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Đặt

$$a = \frac{x_k^p}{X}, \ \ b = \frac{y_k^q}{Y}, \ \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

trong đó

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k^p, \ \ Y = \sum_{k=1}^{n} y_k^q,$$

thì từ (5.2),ta thu được bất đẳng thức Holder quen biết sau đây.

Định lý 51 (Bất đẳng thức Holder). *Với mọi bộ số không âm $(x_k), (y_k)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) và cặp số dương p, q mà $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.3}$$

Từ bất đẳng thức Holder (5.3), ta thu được hệ quả

Hệ quả 14 (Bất đẳng thức Mincowski). *Với mọi bộ số không âm $(x_k), (y_k)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ và số dương $p > 1$, ta đều có*

$$\Big[\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p\Big]^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.4}$$

Proof. Để ý rằng

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p = \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} y_k(x_k + y_k)^{p-1}. \tag{5.5}$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder đối với từng số hạng ở vế phải của (5.5), ta thu được

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big[\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p\Big]^{\frac{1}{q}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big[\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p\Big]^{\frac{1}{q}},$$

chính là bất đẳng thức (5.4).

□

Tư tưởng biểu diễn dạng tuyến tính được mô tả như sau. Từ bất đẳng thức Holder, ta có thể phát biểu kết quả

Định lý 52. *Với mọi bộ số không âm (x_k) và số $p > 1$, ta đều có biểu diễn dạng tuyến tính sau*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \max_{R(y)} \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

trong đó $R(y)$ là tập hợp được xác định theo hệ thức

$$R(y) := (y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, \dots, y_n \geqslant 0),\ \ \text{mà}\ \sum_{k=1}^{n} y_k^q = 1,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Cũng vậy, từ bất đẳng thức AG

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k t_k}{n} \geqslant \Big(\prod_{k=1}^{n} x_k t_k\Big)^{\frac{1}{n}},$$

ta có biểu diễn sau

Định lý 53. *Với mọi bộ số không âm (x_k), ta đều có biểu diễn dạng tuyến tính sau*

$$\Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}} = \min_{R(t)} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k t_k}{n}, \tag{5.6}$$

trong đó $R(t)$ là tập hợp được xác định theo hệ thức

$$R(t) := (1_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, \dots, t_n \geqslant 0), \ \ \text{mà} \ \prod_{k=1}^{n} t_k = 1.$$

Sử dụng biểu diễn dạng tuyến tính này, ta chứng minh bất đẳng thức Mincowski sau.

Hệ quả 15 (Bất đẳng thức Mincowski). *Với mọi bộ số không âm $(x_k), (y_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), ta đều có*

$$\Big[\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k)\Big]^{\frac{1}{n}} \geqslant \Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}} + \Big(\prod_{k=1}^{n} y_k\Big)^{\frac{1}{n}}. \tag{5.7}$$

Proof. Sử dụng biểu diễn (5.6), ta có

$$\Big[\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k)\Big]^{\frac{1}{n}} = \min_{R(t)} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k(x_k + y_k)}{n},$$

trong đó $R(t)$ là tập hợp được xác định theo hệ thức

$$R(t) := (1_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, \dots, t_n \geqslant 0), \ \ \text{mà} \ \prod_{k=1}^{n} t_k = 1.$$

Mặt khác

$$\min_{R(t)} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k(x_k + y_k)}{n} \geqslant \min_{R(t)} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k x_k}{n} + \min_{R(t)} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k y_k}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}} + \Big(\prod_{k=1}^{n} y_k\Big)^{\frac{1}{n}},$$

chính là (5.7), đpcm. □

Tiếp theo, sử dụng biểu diễn dạng tuyến tính, ta chứng minh bất đẳng thức Mincowski với luỹ thừa $p \in (0, 1)$.

Định lý 54 (Bất đẳng thức Mincowski). *Với mọi bộ số không âm $(x_k), (y_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) và số dương $p \in (0, 1)$, ta đều có*

$$\Big[\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p\Big]^{\frac{1}{p}} \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.8}$$

Proof. Để ý rằng, nếu đặt

$$x_k = u_k^{\frac{1}{p}},\ \ y_k = v_k^{\frac{1}{p}},$$

thì (5.8) có dạng

$$\Big[\sum_{k=1}^{n}\Big(u_k^{\frac{1}{p}} + v_k^{\frac{1}{p}}\Big)^p\Big]^{\frac{1}{p}} \geqslant \Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} v_k\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^p. \tag{5.9}$$

Vì rằng $0 < p < 1$, nên

$$\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} v_k\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^p = \max_{R(t)}\Big[t_1\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big) + t_2\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k\Big)\Big],$$

trong đó $R(t)$ là tập hợp được xác định theo hệ thức

$$R(t) := (1_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0),\ \text{ mà } t_1^q + t_2^q = 1,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Mà

$$\max_{R(t)}\Big[t_1\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k\Big) + t_2\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k\Big)\Big] \leqslant \sum_{k=1}^{n}\max_{R(t)}(t_1u_1 + t_2v_1),$$

và

$$\sum_{k=1}^{n}\max_{R(t)}(t_1u_1 + t_2v_1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big(u_k^{\frac{1}{p}} + v_k^{\frac{1}{p}}\Big)^p,$$

nên ta dễ dàng thu được (5.9), đpcm.

□

Tương tự, sử dụng biểu diễn

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \max_{R(y)}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

trong đó $R(y)$ là tập hợp được xác định theo hệ thức

$$R(y) := (y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, \dots, y_n \geqslant 0),\ \text{ mà } \sum_{k=1}^{n} y_k^q = 1,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức dạng phân thức.

Định lý 55 (Bất đẳng thức Beckenbach). *Với các bộ số dương* $(x_k), (y_k)$ *(*$k = 1, 2, \dots, n$*) và số dương* $p \in (1, 2]$*, ta đều có*

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p}{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^{k-1}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^{p-1}} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^{p-1}}.$$

Nhận xét rằng, trong ứng dụng, nhiều khi ta cần sử dụng các biểu diễn dạng bậc hai, bậc ba,... mà không nhất thiết phải có biểu diễn dạng tuyến tính đã mô tả ở trên. Xét ví dụ sau đây.

Bài toán 1. *Cho đa thức hai biến* $P(x, y)$ *thoả mãn điều kiện*
(i) $P(tx, ty) = t^2P(x, y)$ *với mọi* $x, y, t \in \mathbb{R}$*,*
(ii) $P(b + c, a) + P(c + a, b) + P(a + b, c) = 0$ *với mọi* $a, b, c \in \mathbb{R}$*,*
(iii) $P(1, 0) = 1$*.*

Chứng minh rằng đa thức $P(x, y)$ *có thể viết được dưới dạng*

$$P(x, y) = (x + y)^m(x - 2y), \ \ m \in \mathbb{N}.$$

Giải.
Trong (i) đặt $b = 1 - a$; $c = 0$, ta thu được

$$P(1 - a, a) = -1 - P(a, 1 - a).$$

Tiếp tục, lại đặt $c = 1 - a - b$ và kết hợp với (i), ta được

$$P(a + b, 1 - a - b) = P(a, 1 - a) + P(b, 1 - b) + 2. \tag{5.10}$$

Xét hàm số $f(x) = P(x, 1 - x) + 2$. Khi đó, $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = P(1, 0) + 2 = 3$ nên (5.10) trở thành $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Đó là phương trình hàm Cauchy

$$\begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y), \\ f(1) = 3. \end{cases} \tag{5.11}$$

Phương trình (5.11) có nghiệm duy nhất $f(x) = 3x$. Vậy nên

$$P(x, 1 - x) = 3x - 2. \tag{5.12}$$

Với $a + b \neq 0$, đặt $t = a + b$; $x = \dfrac{a}{a + b}$, $y = \dfrac{b}{a + b}$, thì ta sẽ thu được

$$P(a, b) = (a + b)^n P\Big(\frac{a}{a + b}, 1 - \frac{a}{a + b}\Big)$$

$$= (a+b)^n\Big(3\frac{a}{a+b} - 2\Big) = (a+b)^{n-1}(a-2b). \tag{5.13}$$

Nhưng $P(x, y)$ liên tục nên (5.13) cũng đúng với cả trường hợp $a + b = 0$.
Tóm lại $P(x, y) = (x + y)^{n-1}(x - 2y)$.

4.6 Hàm tựa lồi và tựa lõm

Nhận xét rằng, việc mở rộng khái niệm của hàm lồi và hàm lõm như là một nhu cầu tự nhiên. Trong thực tế, có rất nhiều bài toán ứng dụng gắn với hàm số khả vi bậc hai nhưng không áp dụng phương pháp hàm lồi được vì đạo hàm bậc hai đổi dấu trong khoảng đang xét. Chẳng hạn, nếu bất đẳng thức

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

xảy ra với mọi cặp x, y trong $I(a, b)$ thì người ta gọi $f(x)$ là J-lồi (theo nghĩa Jensen). Tuy nhiên, nếu bất đẳng thức

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

chỉ xảy ra với mọi cặp x, y với $x \leqslant y$ và $z \geqslant 0$ mà $x, y + z \in I(a, b)$, thì ta nói hàm số $f(x)$ là Wright-lồi.

Tiếp theo, nếu để ý đến phép tính số học, thì vế trái và vế phải của bất đẳng thức

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

lần lượt là giá trị hàm số tại điểm là trung bình cộng của đối số và trung bình cộng của các giá trị hàm số tương ứng. Do vậy, nếu ta thay vế trái bởi giá trị trung bình nhân, ta thu được

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \sqrt{f(x)f(y)},$$

thì sẽ thu được lớp hàm thường được gọi là lồi logarit. Tương tự, ta có các định nghĩa hàm lồi mũ, hàm lồi sin,...

Tiếp theo, ta nhắc lại các tiêu chuẩn đơn giản để nhận biết tính lồi (lõm) của một hàm số.

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng (a, b). Khi đó
(i) điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên (a, b) là

$$f''(x) \geqslant 0, \ \ \forall x \in (a, b).$$

(ii) điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lõm trên (a, b) là

$$f''(x) \leqslant 0, \ \ \forall x \in (a, b).$$

Tuy nhiên, cũng như đã nhận xét ở trên, trong ứng dụng, ta nhận thấy, do đặc thù của dạng toán, có khi chỉ đòi hỏi hàm số đã cho có tính chất yếu hơn tính lồi (lõm), chẳng hạn như, khi

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \ \ \forall x_1, x_2 > 0 \text{ mà } \ x_1 + x_2 \leqslant 1,$$

thì không nhất thiết $f(x)$ phải là một hàm lồi trên $(0, 1)$.

Cũng như vậy, đối với hàm số $f(x)$ mà

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \ \ \forall x_1, x_2 > 0 \text{ mà } \ x_1 + x_2 \leqslant 1,$$

thì không nhất thiết đòi hỏi $f(x)$ phải là một hàm lõm trên $(0, 1)$.

Ví dụ, với hàm số $f(x) = \cos \pi x$, ta luôn có khẳng định sau đây.

Bài toán 2. *Nếu A, B, C là các góc của ΔABC thì*

$$\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \leqslant \cos \frac{A + B + C}{3}. \tag{4.1}$$

Như vậy, mặc dù hàm $f(x) = \cos(\pi x)$ không là hàm lõm trong $(0, 1)$, ta vẫn có bất đẳng thức (suy từ (4.1)), tương tự như đối với hàm số lõm trong $(0, 1)$:

$$\frac{\cos(\pi x_1) + \cos(\pi x_2)}{2} \leqslant \cos \frac{(x_2 + x_2)\pi}{2} \ \text{ mà } \ x_1 + x_2 < 1. \tag{4.2}$$

Ta đi đến định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 17. *Hàm số $f(x)$ xác định trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ được gọi là hàm tựa lồi trong khoảng đó, nếu*

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \ \ \forall x_1, x_2 > 0 \ \textit{mà} \ \ x_1 + x_2 \leqslant b. \tag{4.3}$$

Tương tự, ta cũng có định nghĩa hàm tựa lõm trong một khoảng cho trước.

Định nghĩa 18. *Hàm số $f(x)$ xác định trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ được gọi là hàm tựa lõm trong khoảng đó, nếu*

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \ \ \forall x_1, x_2 > 0 \ \textit{mà} \ \ x_1 + x_2 \leqslant b. \tag{4.4}$$

Từ định nghĩa, ta có ngay khẳng định:

Nhận xét 16. *Mọi hàm $f(x)$ lồi (lõm) trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ đều là hàm tựa lồi (lõm) trong khoảng đó.*

Nhận xét 17. *Nếu hàm $f(x)$ tựa lồi trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ thì nó là hàm tựa lồi trong mọi khoảng $(0, a)$ với $0 < a \leqslant b$.*

Nhận xét 18. *Mọi hàm $f(x)$ tựa lồi (lõm) trong $(0, b) \subset (0, +\infty)$ đều là hàm lồi (lõm) trong khoảng $(0, a)$ với $0 < a \leqslant \frac{b}{2}$.*

Proof. Thật vậy, giả sử $f(x)$ tựa lồi trong $(0, b)$. Khi $x_1, x_2 \in \Big(0, \frac{b}{2}\Big)$ thì hiển nhiên, $x_1 + x_2 < b$ và ta thu được

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in \Big(0, \frac{b}{2}\Big).$$

Hệ thức này chứng tỏ $f(x)$ là một hàm lồi trong khoảng $\Big(0, \frac{b}{2}\Big)$. □

Định lý 56. *Giả thiết rằng hàm $h(x)$ có đạo hàm cấp hai và lồi trên $\Big(0, \frac{b}{2}\Big]$. Khi đó hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} h(x), \ \ khi \quad x \in \Big(0, \frac{b}{2}\Big], \\ h(b - x), \ \ khi \quad x \in \Big[\frac{b}{2}, b\Big), \end{cases}$$

sẽ là một hàm tựa lồi trong $(0, b)$.

Proof. Thật vậy, theo giả thiết thì $f(x)$ có đạo hàm bậc hai trên $(0, b)$ và do $h''(x) \geqslant 0$ trên $\Big(0, \frac{b}{2}\Big]$, nên

$$f''(x) = \begin{cases} h''(x) \geqslant 0, \ \ \text{khi} \quad x \in \Big(0, \frac{b}{2}\Big], \\ h''(b - x) \geqslant 0, \ \ \text{khi} \quad x \in \Big[\frac{b}{2}, b\Big). \end{cases}$$

Vậy nên $f(x)$ là một hàm tựa lồi trên $(0, b)$. □

Nhận xét 19. *Kết luận của nhận xét trên vẫn đúng đối với hàm $h(x)$ lồi tuỳ ý trên $\Big(0, \frac{b}{2}\Big]$.*

Định lý 57. *Cho hàm số $h(x)$ liên tục và lồi trong $\left(0, \dfrac{b}{2}\right]$. Xét hàm số $f(x)$ xác định theo công thức sau:*

$$f(x) = \begin{cases} h(x), \ \ \textit{khi } x \in \left(0, \dfrac{b}{2}\right] \\ 2h\left(\dfrac{b}{2}\right) - h(b-x), \ \ \textit{khi } x \in \left(\dfrac{b}{2}, b\right). \end{cases}$$

Khi đó, $f(x)$ là một hàm tựa lồi trên $(0, b)$.

Proof. Theo giả thiết, $h(x)$ lồi trong khoảng $\left(0, \dfrac{b}{2}\right]$ và $f(x)$ xác định và liên tục trong $(0, b)$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức (4.3):

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in (0, b) \text{ với } \ x_1 + x_2 < b.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in (0, b) \text{ với } \ x_1 + x_2 < b. \tag{4.5}$$

Coi $x_1 < x_2$. Khi đó, nếu $x_2 < \dfrac{b}{2}$ thì (4.5) có dạng

$$h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{h(x_1)+h(x_2)}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in (0, b) \text{ với } \ x_1 + x_2 < b.$$

Điều này là hiển nhiên.

Xét trường hợp $x_2 > \dfrac{b}{2}$. Đặt $\dfrac{b}{2} = d$. Khi đó, (4.5) có dạng

$$h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{h(x_1)+2h(d)-h(b-x_2)}{2}.$$

Dễ dàng suy ra

$$b - x_2, x_1 + x_2 - d \in (0, d), \ \ (b - x_2) + (x_1 + x_2 - d) = x_1 + d.$$

Không mất tổng quát, coi $x_1 + x_2 - \dfrac{b}{2} \leqslant b - x_2$. Khi đó

$$x_1 \leqslant x_1 + x_2 - \frac{b}{2} \leqslant b - x_2 \leqslant d$$

và theo Định lý Lagrange, ta có

$$h(d) - h(b - x_2) = h'(u)(d - - x_2), \ \ u \in (b - x_2, d) \tag{4.6}$$

và

$$h(x_1+x_2-d)-h(x_1)=h'(v)(d-x_2),\ \ v\in(x_1,x_1+x_2-d). \tag{4.7}$$

Vì $v \leqslant u$ nên $h'(v) \leqslant h'(u)$, từ (4.6) và (4.7), ta thu được

$$h(d)+h(x_1) \geqslant h(x_1+x_2-d)+h(b-x_2). \tag{4.8}$$

Do

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)=f\Big(\frac{x_1+x_2-d+d}{2}\Big) \leqslant \frac{f\Big(\frac{x_1+x_2-d}{2}+f(d)\Big)}{2},$$

nên

$$f\Big(x_1+x_2-d\Big) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)-f(d). \tag{4.9}$$

(4.8) và (4.9) cho ta

$$f(d)+f(x_1) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)-f(d)+f(b-x_2),$$

hay

$$2f(d)-f(b-x_2) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)-f(x_1). \tag{4.10}$$

Mặt khác, theo giả thiết, ta có

$$f(x_2)+f(b-x_2) \geqslant 2f(d),$$

hay

$$2f(d)-f(b-x_2) \leqslant f(x_2).$$

Hệ thức này và (4.10) cho ta (4.5). □

Định lý 58. *Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0,b)$ là một hàm tựa lồi trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là các điều kiện sau đây đồng thời được thoả mãn:*

(i) $f(x)$ lồi trong $\Big(0,\dfrac{b}{2}\Big]$,

(ii) $f(x)+f(b-x) \geqslant 2f\Big(\dfrac{b}{2}\Big),\ \ \forall x\in\Big(0,\dfrac{b}{2}\Big)$.

Proof. Điều kiện cần là hiển nhiên.

Điều kiện đủ. Giả sử $f(x)$ lồi trong khoảng $\Big(0,\dfrac{b}{2}\Big]$ và

$$f(x)+f(b-x) \geqslant 2f\Big(\frac{b}{2}\Big),\ \ \forall x\in\Big(0,\frac{b}{2}\Big).$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\ \ \forall x_1,x_2\in(0,b)\ \text{ với }\ x_1+x_2<b. \tag{4.11}$$

Coi $x_1 < x_2$. Khi đó, hiển nhiên $x_2 < \dfrac{b}{2}$. Nếu $x_2 \leqslant \dfrac{b}{2}$ thì (4.11) là hiển nhiên.

Xét $x_2 > \dfrac{b}{2}$. Khi đó, dễ dàng suy ra

$$b - x_2, x_1 + x_2 - \frac{b}{2} \in \Big(0, \frac{b}{2}\Big),\ \ (b - x_2) + (x_1 + x_2 - \frac{b}{2}) = x_1 + \frac{b}{2}.$$

Không mất tổng quát, coi $x_1 + x_2 - \dfrac{b}{2} \leqslant b - x_2$. Khi đó

$$x_1 \leqslant x_1 + x_2 - \frac{b}{2} \leqslant b - x_2 \leqslant \frac{b}{2}$$

và theo Định lý Lagrange, ta có

$$f\Big(\frac{b}{2}\Big) - f(b - x_2) = f'(u)\Big(\frac{b}{2} - x_2\Big),\ \ u \in \Big(b - x_2, \frac{b}{2}\Big) \tag{4.12}$$

và

$$f\Big(x_1 + x_2 - \frac{b}{2}\Big) - f(x_1) = f'(v)\Big(\frac{b}{2} - x_2\Big),\ \ v \in \Big(x_1, x_1 + x_2 - \frac{b}{2}\Big). \tag{4.13}$$

Vì $v \leqslant u$ nên $f'(v) \leqslant f'(u)$, từ (4.12) và (4.13), ta thu được

$$f\Big(\frac{b}{2}\Big) + f(x_1) \geqslant f\Big(x_1 + x_2 - \frac{b}{2}\Big) + f(b - x_2). \tag{4.14}$$

Do

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) = f\Big(\frac{x_1 + x_2 - \frac{b}{2} + \frac{b}{2}}{2}\Big) \leqslant \frac{f\Big(\frac{x_1+x_2-\frac{b}{2}}{2} + f\Big(\frac{b}{2}\Big)\Big)}{2},$$

nên

$$f\Big(x_1 + x_2 - \frac{b}{2}\Big) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) - f\Big(\frac{b}{2}\Big). \tag{4.15}$$

(4.14) và (4.15) cho ta

$$f\Big(\frac{b}{2}\Big) + f(x_1) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) - f\Big(\frac{b}{2}\Big) + f(b - x_2),$$

hay

$$2f\Big(\frac{b}{2}\Big) - f(b - x_2) \geqslant 2f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) - f(x_1). \tag{4.16}$$

Mặt khác, theo giả thiết, ta có

$$f(x_2) + f(b - x_2) \geqslant 2f\Big(\frac{b}{2}\Big),$$

hay

$$2f\Big(\frac{b}{2}\Big) - f(b - x_2) \leqslant f(x_2). \tag{4.17}$$

Hệ thức (4.16) và (3.17) cho ta điều cần chứng minh. □

Tương tự, ta có tiêu chuẩn để nhận biết hàm tựa lõm trên một khoảng cho trước.

Định lý 59. *Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0, b)$ là một hàm tựa lõm trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là các điều kiện sau đây đồng thời được thoả mãn:*

(i) $f(x)$ *lõm trong* $\Big(0, \dfrac{b}{2}\Big]$,

(ii) $f(x) + f(b - x) \leqslant 2f\Big(\dfrac{b}{2}\Big), \ \forall x \in \Big(0, \dfrac{b}{2}\Big)$.

Từ Định lý 3 và 4, ta có thu được phương pháp dựng các hàm tựa lồi trên $(0, b)$ như sau.

Hệ quả 16. *Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0, b)$ là một hàm tựa lồi trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là tồn tại hàm số $h_0(x)$ liên tục và lồi trong $\Big(0, \dfrac{b}{2}\Big]$ sao cho*

$$f(x) = \begin{cases} h_0(x), & \textit{khi } x \in \Big(0, \dfrac{b}{2}\Big] \\ h_1(x), & \textit{khi } x \in \Big(\dfrac{b}{2}, b\Big), \end{cases}$$

trong đó

$$h_1(x) \geqslant 2h\Big(\frac{b}{2}\Big) - h(b - x), \ \forall x \in \Big(\frac{b}{2}, b\Big).$$

Tương tự, ta có cách xây dựng hàm tựa lõm trên một khoảng cho trước.

Hệ quả 17. *Để hàm $f(x)$ xác định trong $(0, b)$ là một hàm tựa lõm trong khoảng đó, điều kiện cần và đủ là tồn tại hàm số $h_0(x)$ liên tục và lõm trong $\Big(0, \dfrac{b}{2}\Big]$ sao cho*

$$f(x) = \begin{cases} h_0(x), & \textit{khi } x \in \Big(0, \dfrac{b}{2}\Big] \\ h_1(x), & \textit{khi } x \in \Big(\dfrac{b}{2}, b\Big), \end{cases}$$

trong đó

$$h_1(x) \leqslant 2h\Big(\frac{b}{2}\Big) - h(b - x), \ \forall x \in \Big(\frac{b}{2}, b\Big).$$

Các định lý sau đây cho ta mối liên hệ chặt chẽ giữa hàm các tựa đồng biến (nghịch biến) với hàm tựa lồi (tựa lõm).

Định lý 60. *Hàm khả vi $f(x)$ là tựa đồng biến trên tập $(0, b)$ khi và chỉ khi mọi nguyên hàm $F(x)$ của nó đều là hàm tựa lồi trên tập đó.*

Định lý 61. *Hàm khả vi $f(x)$ là tựa nghịch biến trên tập $(0, b)$ khi và chỉ khi mọi nguyên hàm $F(x)$ của nó đều là hàm tựa lõm trên tập đó.*

4.7 Bài tập

Bài 1. *Cho dãy số tăng $a_1, a_2, \dots, x_n$ trong $[a, b]$ và đa thức $P(x)$ bậc không quá $n-1$. Xét hàm số*

$$F(x) = P(x) + \sum_{j=1}^{m} c_j \Big(\frac{x - x_j + |x - x_j|}{2}\Big)^{n-1}.$$

Chứng minh rằng $F(x)$ là hàm lồi bậc n khi và chỉ khi

$$c_j \geqslant; \ \ j = 1, 2, \dots, m.$$

Bài 2. *Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng*

$$(sinA)^{sinA}(sinB)^{sinB}(sinC)^{sinC} > (\frac{2}{3})^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$$

Bài 3. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geqslant a^3 + b^3 + c^3.$$

Bài 4. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng*

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 - b^c - bc^2 + 3abc \geqslant 0.$$

Bài 5. *Chứng minh rằng*

$$\tan^6 \frac{A}{2} + \tan^6 \frac{B}{2} + \tan^6 \frac{C}{2} \geqslant \frac{1}{9}.$$

Bài 6. *Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Chứng minh rằng*

$$\frac{52}{27} \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

Bài 7. *Cho* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ *là những số thực thoả mãn điều kiện*

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k \geqslant 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $p = Max\{|a_1|; |a_2|, \dots, |a_n|\}$. *Chứng minh rằng* $p = a_1$ *và*

$$(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) \leqslant x^n - a_1^n \ \ \forall x > a_1.$$

Bài 8. *Cho* $a > 2$ *và dãy số* (a_n) *xác định như sau:*

$$a_0 = 1, \ \ a_1 = a$$
$$a_{n+1} = \Big(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} - 2\Big)a_n.$$

Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, *ta luôn có*

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} < \frac{1}{2}\Big(2 + a - \sqrt{a^2 - 4}\Big).$$

Bài 9. *Cho các số dương* $x_i; y_i$ *thoả mãn điều kiện*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i + y_i} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Bài 10. *Cho* $a, b, c, d \geqslant 0; \ \ a + b + c + d = 1$. *Chứng minh rằng*

$$abc + bcd + cda + dab \leqslant \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

Bài 11. *Cho* $a, b, c, d \geqslant 0; \ \ ab + bc + cd + da = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{b + c + d} + \frac{b^3}{c + d + a} + \frac{c^3}{a + b + d} + \frac{d^3}{a + b + c} \geq \frac{1}{3}.$$

Chương 5

Bất đẳng thức Karamata

5.1 Định lý Karamata

Trong mục này ta đặc biệt quan tâm đến dạng bất đẳng thức sau (thường được gọi là Bất đẳng thức Karamata) có rất nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

Định lý 62 (Bất đẳng thức Karamata). *Cho hai dãy số* $\{x_k, y_k \in I(a,b),\ k = 1, 2, \dots, n\}$, *thoả mãn các điều kiện*

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n,\ \ y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geqslant y_1 \\ x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geqslant y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \end{cases} \tag{1.0}$$

Khi đó, ứng với mọi hàm lồi thực sự $f(x)$ *(*$f"(x) > 0$*) trên* $I(a,b)$, *ta đều có*

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geqslant f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n). \tag{1.1}$$

Proof. Sử dụng biểu diễn đối với hàm lồi

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) =$$

$$= \max_{t_1,\dots,t_n \in I(a,b)} \Big[\sum_{i=1}^{n} f(t_i) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - t_i) f'(t_i) \Big]. \tag{1.2}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết bộ số $t_1, \dots, t_n \in I(a, b)$ cũng là một bộ số giảm, tức là

$$t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_n.$$

Khi đo, để chứng minh (1.2),ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\begin{aligned} &x_1 f'(t_1) + x_2 f'(t_2) + \cdots + x_n f'(t_n) \geqslant \\ &\geqslant y_1 f'(t_1) + y_2 f'(t_2) + \cdots + y_n f'(t_n). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Sử dụng biến đổi Abel

$$\begin{aligned} &x_1 f'(t_1) + x_2 f'(t_2) + \cdots + x_n f'(t_n) = \\ &= S_1[f'(t_1) - f'(t_2)] + S_2[f'(t_2) - f'(t_3)] + \cdots + \\ &+ S_{n-1}[f'(t_{n-1}) - f'(t_n)] + S_n f'(t_n), \end{aligned} \tag{1.4}$$

với

$$S_k(x) := x_1 + x_2 + \cdots + x_k.$$

Vì rằng $f"(x) > 0$ nên $f'(x_k) \leqslant f'(x_{k-1}$. Mặt khác, do $S_k(x) \geqslant S_k(y)$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ và $S_n(x) = S_n(y)$, ta thu được ngay (1.4).

$\square$

Nhận xét 20. *Vậy thì câu hỏi nảy sinh là:*

Tại sao với những giả thiết có tính nhân tạo như vậy lại hay được thiết lập và được sử dụng rộng rãi trong nhiều dạng toán ứng dụng của nhiều lĩnh vực khác nhau của thực tiễn?

Câu trả lời có thể nằm ngay ở bản chất của các hệ thống các giả thiết. Thật vậy, khi cho trước một hàm phi tuyến (hàm lồi, lõm) tổng quát, sẽ rất khó để có thể khẳng định tính so sánh được của tổng các giá trị tại hai bộ điểm phân biệt tuỳ ý cho trước của hàm số đã cho. Hệ điều kiện (1.0) chỉ dựa trên các so sánh tuyến tính (của các tổng số học) các đại lượng sắp được cho trước, được coi như là một dạng giả thiết đơn giản nhất.

Câu hỏi nảy sinh tiếp theo là:

Tại sao lại có quá nhiều giả thiết như vậy đối với hai bộ số đã cho? Phải chăng số lượng các điều kiện đưa ra của giả thiết đã thực sự tối ưu?

Câu trả lời chắc là sẽ rất khó và cần chỉnh lý theo một định hướng và một nghĩa cụ thể.

Định lý sau đây (dành cho bạn đọc đã có kiến thức cơ bản về đại số tuyến tính) cho ta tiêu chuẩn để hai bộ dãy số đơn điệu giảm $\{x_k, y_k,\ k = 1, 2, \dots, n\}$, thoả mãn các điều kiện (1.0).

Định lý 63 (I. Schur). *Điều kiện cần và đủ để hai bộ dãy số đơn điệu giảm* $\{x_k, y_k;\ k = 1, 2, \dots, n\}$, *thoả mãn các điều kiện*

$$\begin{cases} x_1 \geqslant y_1 \\ x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geqslant y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \end{cases} \tag{1.5}$$

là giữa chúng có một phép biến đổi tuyến tính dạng

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ \ i = 1, 2, \dots, n,$$

trong đó

$$a_{kl} \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{jl} = 1;\ \ k, l = 1, 2, \dots, n.$$

Khi đẳng thức cuối cùng trong giả thiết của định lý trên bị phá vỡ, ta cần phải điều chỉnh và có thêm giả thiết đối với hàm số đã cho để kết luận của Định lý dạng Karamata tương tự vẫn còn hiệu lực.

Định lý 64. *Cho hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm cấp hai tại mọi* $x \in (a; b)$ *sao cho* $f'(x) \geqslant 0$ *với mọi* $x \in [a; b]$ *và* $f''(x) > 0$ *với mọi* $x \in (a; b)$.
Giả sử $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *và* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *là các số* $\in [a; b]$, *đồng thời thoả mãn các điều kiện* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ *và* $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ *và*

$$\begin{cases} x_1 \geqslant a_1 \\ x_1 + x_2 \geqslant a_1 + a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{cases}$$

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

Proof. Sử dụng biểu diễn đối với hàm lồi

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) =$$

$$= \max_{t_1,\dots,t_n\in I(a,b)} \Big[\sum_{i=1}^{n} f(t_i) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - t_i)f'(t_i)\Big]. \tag{1.2}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết bộ số $t_1,\dots,t_n \in I(a,b)$ cũng là một bộ số giảm, tức là

$$t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_n.$$

Khi đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$x_1f'(t_1) + x_2f'(t_2) + \cdots + x_nf'(t_n) \geqslant$$

$$\geqslant y_1f'(t_1) + y_2f'(t_2) + \cdots + y_nf'(t_n).$$

Sử dụng biến đổi Abel

$$x_1f'(t_1) + x_2f'(t_2) + \cdots + x_nf'(t_n) =$$

$$= S_1[f'(t_1) - f'(t_2)] + S_2[f'(t_2) - f'(t_3)] + \cdots +$$

$$+S_{n-1}[f'(t_{n-1}) - f'(t_n)] + S_nf'(t_n),$$

với

$$S_k(x) := x_1 + x_2 + \cdots + x_k.$$

Vì rằng $f"(x) > 0$ nên $f'(x_k) \leqslant f'(x_{k-1}$. Mặt khác, do $S_k(x) \geqslant S_k(y)$ $(k = 1,2,\dots,n-1)$ và vì $S_n(x) \geqslant S_n(y)$ và $f'(t_n) \geqslant 0$, ta thu được ngay đpcm. □

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

Định lý 65. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a;b)$ sao cho $f'(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in [a;b]$ và $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a;b)$. Giả sử $a_1, a_2, \cdots, a_n$ và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số $\in [a;b]$, thoả mãn điều kiện $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ và*

$$\begin{cases} x_1 \leqslant a_1 \\ x_1 + x_2 \leqslant a_1 + a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{cases}$$

Khi đó:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

Định lý 66. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a; b)$ sao cho $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$.*

Giả sử $a_1, a_2, \cdots, a_n$ và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số $\in [a; b]$, thoả mãn điều kiện $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$.

$$\begin{cases} x_1 \geqslant a_1 \\ x_1 + x_2 \geqslant a_1 + a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{cases}$$

Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

Nhận xét rằng, điều kiện (1.5) cho ta một thuật toán nắn đều một bộ số cho trước bằng phương pháp biến đổi tuyến tính. Đối với các bạn đọc đã có kiến thức về đại số tuyến tính và toán học cao cấp, dễ nhận thấy phép biểu diễn hàm lồi (lõm) một biến có thể mở rộng cho hàm lồi nhiều biến. Cụ thể là, ứng với mọi hàm lồi $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ta đều có

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \max_{(t_1, \dots, t_n)} F(t_1, t_2, \dots, t_n) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - t_i) \frac{\partial F}{\partial t_i} \Big]. \tag{1.6}$$

Sử dụng cách chứng minh tương tự như đối với bất đẳng thức Karamata, ta thu được

Định lý 67. *Giả sử $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thoả mãn điều kiện (1.6). Khi đó với mọi cặp bộ số đơn điệu giảm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, thoả mãn điều kiện Schur (1.5), ta đều có*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant F(y_1, y_2, \dots, y_n). \tag{1.7}$$

Nhận xét 21. *Có thể nói rằng định lý 6 cho ta một công cụ rất mạnh để thực hiện quá trình làm đều và thuật toán dồn biến để chứng minh nhiều dạng bất đẳng thức phức tạp.*

Thật vậy, từ (1.7), ta có ngay hệ quả

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant F\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \dots, x_n\Big).$$

5.2 Bất đẳng thức đan dấu

Trong phần này ta xét một số bất đẳng thức đan dấu sinh bởi hàm lồi. Các bất đẳng thức dạng này đều quy được về bất đẳng thức Karamata quen biết.

Định lý 68 (Bất đẳng thức Szego). *Cho hàm số $f(x)$ xác định và lồi trên tập $[0, a]$ với $a > 0$ và cho dãy $2n - 1$ số không âm và đơn điệu giảm*

$$a \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2n-1} \geqslant 0.$$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} f(a_j) \geqslant f\Big(\sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} a_j \Big).$$

Proof. Để ý rằng, từ dãy giảm

$$a \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2n-1} \geqslant 0,$$

ta có thể thành lập hai bộ dãy giảm thoả mãn điều kiện Karamata

$$a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}, \;\; b_1, b_3, \ldots, b_{2n-1},$$

trong đó dãy $b_1, b_3, \ldots, b_{2n-1}$ là sự sắp xếp theo thứ tự giảm dần và đánh số lại dãy các số

$$a_2, a_4, \ldots, a_{2n-2}, a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Karamata, ta có ngay đpcm. □

Cũng vậy, theo đúng cách thức lập luận ở trên, ta có các kết quả sau (bạn đọc hãy tự chứng minh).

Định lý 69 (Bất đẳng thức Bellman). *Cho hàm số $f(x)$ xác định và lồi trên tập $[0, a]$ với $a > 0$ và $f(0) \leqslant 0$. Xét dãy n số không âm và đơn điệu giảm*

$$a \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0.$$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} f(a_j) \geqslant f\Big(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_j \Big).$$

Định lý 70 (Bất đẳng thức Olkin). *Cho hàm số $f(x)$ xác định và lồi trên tập $[0, a]$ với $a > 0$. Xét cặp dãy số không âm và đơn điệu giảm*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$$
$$1 \geqslant \alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n \geqslant 0.$$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned}&\Big[1 - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\alpha_j\Big] f(0) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\alpha_j f(a_j)\\ &\geqslant f\Big(\sum_{j=1}^{2n-1}(-1)^{j-1}\alpha_j a_j\Big).\end{aligned}$$

5.3 Độ gần đều và thứ tự sắp được của một dãy các tam giác

Định nghĩa 19. *Với mỗi tam giác ABC cho trước, ta kí hiệu*

$$\delta_{\Delta ABC} = \max\{A, B, C\} - \min\{A, B, C\}$$

và gọi $\delta_{\Delta ABC}$ là độ gần đều của tam giác ABC.

Rõ ràng $\delta_{\Delta ABC} \geqslant 0$ và $\delta_{\Delta ABC} = 0$ khi và chỉ khi tam giác ABC là một tam giác đều.

Định nghĩa 20. *Với mỗi cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ thoả mãn đồng thời các điều kiện*

$$\max\{A_1, B_1, C_1\} \leqslant \max\{A_2, B_2, C_2\}, \ \min\{A_1, B_1, C_1\} \geqslant \min\{A_2, B_2, C_2\},$$

thì ta nói cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là cặp sắp được thứ tự và tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$.

Vậy trong trường hợp có sắp thứ tự :

Với mỗi cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ (với $A_1 \geqslant B_1 \geqslant C_1, \ A_2 \geqslant B_2 \geqslant C_2$) thoả mãn đồng thời các điều kiện

$$A_1 \leqslant A_2, \ C_1 \geqslant C_2,$$

thì ta sẽ có tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$.

Nhận xét 22. *Tam giác đều gần đều hơn mọi tam giác khác.*

Nhận xét 23. *Trong tập hợp các tam giác không nhọn thì tam giác vuông cân gần đều hơn mọi tam giác khác.*

Ta nhắc lại tính chất sau.

Nhận xét 24. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f"(x)$ trong (a, b).*
a) Nếu $f"(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \text{ với } x, x_0 \in (a, b).$$

b) Nếu $f"(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì

$$f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \text{ với } x, x_0 \in (a, b).$$

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC và cho ba số không âm α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Đặt*

$$\begin{cases} A_0 = \alpha A + \beta B + \gamma C \\ B_0 = \alpha B + \beta C + \gamma A \\ C_0 = \alpha C + \beta A + \gamma B. \end{cases}$$

Chứng minh rằng, khi đó tam giác $A_0B_0C_0$ gần đều hơn tam giác ABC.

Giải. Theo giả thiết, ta có
$A_0 \leqslant \max\{A, B, C\}$, $B_0 \leqslant \max\{A, B, C\}$, $C_0 \leqslant \max\{A, B, C\}$ nên

$$\max\{A_0, B_0, C_0\} \leqslant \max\{A, B, C\}.$$

Tương tự, thì
$A_0 \geqslant \min\{A, B, C\}$, $B_0 \geqslant \min\{A, B, C\}$, $C_0 \geqslant \min\{A, B, C\}$ nên

$$\min\{A_0, B_0, C_0\} \geqslant \min\{A, B, C\}.$$

Từ đây suy ra tam giác $A_0B_0C_0$ gần đều hơn tam giác ABC.

Kết quả sau đây bao hàm hầu hết các bất đẳng thức dạng đối xứng dạng cơ bản trong tam giác.

Bài toán 2. *Cho tam giác $A_2B_2C_2$ gần đều hơn tam giác $A_1B_1C_1$ và cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$. Khi đó*

$$f(A_1) + f(B_1) + f(C_1) \geqslant f(A_2) + f(B_2) + f(C_2).$$

Giải. Do $f"(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$ nên

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \ \ \forall x \in (0, \pi). \tag{3.1}$$

Không mất tính tổng quát, ta coi

$$A_1 \geqslant B_1 \geqslant C_1, \ A_2 \geqslant B_2 \geqslant C_2.$$

Khi đó, theo Định nghĩa 2 ta có $A_1 \geqslant A_2$ và $C_1 \leqslant C_2$. Suy ra

$$\begin{cases} A_1 \geqslant A_2 \\ A_1 + B_1 \geqslant A_2 + B_2 \\ A_1 + B_1 + C_1 = A_2 + B_2 + C_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Theo (3.1), thì

$$\begin{cases} f(A_1) \geqslant f(A_2) + f'(A_2)(A_1 - A_2) \\ f(B_1) \geqslant f(B_2) + f'(B_2)(B_1 - B_2) \\ f(C_1) \geqslant f(C_2) + f'(C_2)(C_1 - C_2). \end{cases} \tag{3.3}$$

Cộng các vế tương ứng của (3), ta được

$$\begin{aligned} &f(A_1) + f(B_1) + f(C_1) \geqslant f(A_2) + f(B_2) + f(C_2) \\ &+ (f'(B_2) - f'(C_2)[(A_1 + B_1) - (A_2 + B_2)] + (f'(A_2) - f'(B_2)(A_1 - A_2) \\ &\geqslant f(A_2) + f(B_2) + f(C_2). \end{aligned}$$

Nhận xét 25. *Vì ta chỉ quan tâm đến các góc dương A, B, C có tổng bằng π, nên kết quả của bài toán trên vẫn đúng với lố hàm tựa lồi (tựa lõm) trong $(0, \pi)$.*

Bài toán 3. *Cho tam giác $A_2B_2C_2$ gần đều hơn tam giác $A_1B_1C_1$ và cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$. Khi đó*

$$f(A_1) + f(B_1) + f(C_1) \leqslant f(A_2) + f(B_2) + f(C_2).$$

Giải. Do $f"(x) \leqslant 0$ Với mọi $x \in (0, \pi)$, nên theo Nhận xét 3 ta có

$$f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \ \ \forall x_0 \in (0, \pi). \tag{3.4}$$

Không mất tính tổng quát, ta coi

$$A_1 \geqslant B_1 \geqslant C_1, \ A_2 \geqslant B_2 \geqslant C_2.$$

Khi đó, vì tam giác A_2B_2C-2 gần đều hơn tam giác A_1B_1C-1 nên

$$\begin{cases} A_1 \geqslant A_2 \\ A_1+B_1 \geqslant A_2+B_2 \\ A_1+B_1+C_1 = A_2+B_2+C_2. \end{cases} \tag{3.5}$$

Theo (3.4) và (3.5), thì

$$\begin{cases} f(A_1) \leqslant f(A_2)+f'(A_2)(A_1-A_2) \\ f(B_1) \leqslant f(B_2)+f'(B_2)(B_1-B_2) \\ f(C_1) \leqslant f(C_2)+f'(C_2)(C_1-C_2). \end{cases} \tag{3.6}$$

Cộng các vế tương ứng của (3.6), ta được

$$\begin{aligned} &f(A_1)+f(B_1)+f(C_1) \leqslant f(A_2)+f(B_2)+f(C_2) \\ &+(f'(B_2)-f'(C_2)[(A_1+B_1)-(A_2+B_2)]+(f'(A_2)-f'(B_2)(A_1-A_2) \\ &\leqslant f(A_2)+f(B_2)+f(C_2). \end{aligned}$$

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC và cho ba số dương α,β,γ sao cho $\alpha+\beta+\gamma=1$. Đặt*

$$\begin{cases} A_0=\alpha A+\beta B+\gamma C \\ B_0=\alpha B+\beta C+\gamma A \\ C_0=\alpha C+\beta A+\gamma B \end{cases} \tag{3.7}$$

Chứng minh rằng $\sin A+\sin B+\sin C \leqslant \sin A_0+\sin B_0+\sin C_0$.

Giải. Theo giả thiết ta có $A_0+B_0+C_0=A+B+C=\pi$ nên $A_0,\ B_0,\ C_0$ là các góc của một tam giác và

$$\begin{cases} A \geqslant A_0 \\ A+B \geqslant A_0+B_0 \\ A+B+C = A_0+B_0+C_0 \end{cases}$$

với giả thiết $A \geqslant B \geqslant C;\ \ A_0 \geqslant B_0 \geqslant C_0$.
Xét hàm số $f(x)=\sin x,\ \ \forall x\in[0,\pi]$. Theo Nhận xét 3 ta có
Ta có $f'(x)=\cos x$; $f''(x)=-\sin x \leqslant 0$ $,\forall x\in[0,\pi]$. Suy ra

$$f(x) \leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\ ,\ \forall x\in[0,\pi]\ ,\ x_0\in[0,\pi].$$

Vậy nên

$$\sin A \leqslant \sin A_0+\cos A_0(A-A_0),$$

$$\sin B \leqslant \sin B_0 + \cos B_0(B - B_0),$$
$$\sin C \leqslant \sin C_0 + \cos C_0(C - C_0).$$

Suy ra

$$\sin A+\sin B+\sin C \leqslant \sin A_0+\sin B_0+\sin C_0+\cos C_0(A+B+C-A_0-B_0-C_0)+$$
$$(\cos B_0 - \cos C_0)(A + B - A_0 - B_0) + (\cos A_0 - \cos B_0)(A - A_0).$$

Vì $A + B + C - (A_0 + B_0 + C_0) = 0$; $A + B \geqslant A_0 + B_0$; $A \geqslant A_0$
$\pi > B_0 \geqslant C_0 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \cos B_0 \leqslant \cos C_0$,
$\pi \geqslant A_0 \geqslant B_0 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \cos A_0 \leqslant \cos B_0$,
nên $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \sin A_0 + \sin B_0 + \sin C_0$.

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC và cho ba số dương α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Đặt*

$$\begin{cases} A_0 = \alpha A + \beta B + \gamma C \\ B_0 = \alpha B + \beta C + \gamma A \\ C_0 = \alpha C + \beta A + \gamma B. \end{cases} \tag{3.8}$$

Chứng minh rằng

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leqslant \cos\frac{A_0}{2} + \cos\frac{B_0}{2} + \cos\frac{C_0}{2}.$$

Giải. Chỉ cần xét hàm số $f(x) = \cos x$ thì $f''(x) = -\cos x < 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Chứng minh hoàn toàn tương tự như Bài toán 4, ta được bất đẳng thức

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leqslant \cos\frac{A_0}{2} + \cos\frac{B_0}{2} + \cos\frac{C_0}{2}.$$

Bài toán 6. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC không nhọn, ta luôn có*

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geqslant 2\sqrt{2} - 1.$$

Giải. Không mất tính tổng quát, ta coi $A \geqslant B \geqslant C$. Khi đó

$$\begin{cases} A \geqslant \dfrac{\pi}{2} \\ A + B \geqslant \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \\ A + B + C = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \dfrac{A}{2} \geqslant \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} \geqslant \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{8} \\ \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \tan x$ với $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ta có $f''(x) > 0$ với $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Vậy nên theo Nhận xét 3 ta có

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \ \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Theo Bài toán 2 thì

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geqslant \tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{8} + \tan\frac{\pi}{8}.$$

Để ý rằng $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ nên

$$\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{8} + \tan\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2} - 1.$$

Vậy

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geqslant 2\sqrt{2} - 1.$$

5.4 Điều chỉnh từng phần bộ biến số

Chúng ta đều biết rằng đặc điểm của nhiều bất đẳng thức là dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả hoặc một vài biến số bằng nhau. Vì vậy, tuỳ theo đặc thù của bài toán, ta có cách tiếp cận của quá trình làm đều toàn phần hoặc một bộ phận biến số. Ta thu được các phương pháp điều chỉnh quá trình nắn đều của bộ biến số cho trước. Thông thường, quá trình nắn đều từng bộ phận biến số được thực hiện rất đơn giản, thông qua các giá trị trung bình quen biết như trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hoà,... Quá trình đó cho phép ta giảm dần lượng biến số của bộ biến cho trước nên thường được gọi là phương pháp dồn biến. Tiếp theo, ta chỉ xét một vài dạng dồn biến đơn giản nhất.

Đó là quá trình dồn biến bằng trung bình cộng và trung bình nhân. Còn có nhiều dạng điều chỉnh khác dựa vào sự chuyển đổi các trung bình điều hoà, trung bình đồng bậc,...

Phương pháp dồn biến dựa vào trung bình cộng và trung bình nhân là dạng đơn giản nhất.

Để chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant 0, \tag{4.1}$$

ta có thể chứng minh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_n\Big).$$

hoặc

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant f\Big(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, \dots, x_n\Big).$$

Sau đó, chuyển sang việc chứng minh (1.1) về chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geqslant g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

tức là chứng minh bất đẳng thức có ít biến số hơn. Dĩ nhiên, các bất đẳng thức (5.4) có thể không đúng, hoặc chỉ đúng trong một số điều kiện nào đó. Vì ta chỉ thay đổi hai biến số nên có thể kiểm tra tính đúng đẳng của bất đẳng thức này một cách dễ dàng.

Câu hỏi hiển nhiên sẽ xuất hiện là

Bài toán mở 1. *Với điều kiện nào thì*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_n\Big),$$

ứng với mọi bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Bài toán mở 2. *Với điều kiện nào thì*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant f\Big(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, \dots, x_n\Big),$$

ứng với mọi bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Như ta đã nêu trong đầu chương, thì câu trả lời (điều kiện đủ) cho hai bài toán mở trên dễ dàng tìm được trong lớp hàm hàm lồi (lõm) nhiều biến. Phép chứng minh dựa vào tính chất của cặp dãy thoả mãn điều kiện Schur. Ta sử dụng biểu diễn dạng tuyến tính

Định lý 71. *Với mọi hàm lồi* $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *ta đều có biểu diễn*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{(t_1, t_2, \dots, t_n} \Big[F(t_1, t_2, \dots, t_n) \sum_{k=1}^{n} (x_k - t_k) \frac{\partial F}{\partial t_k}\Big].$$

Nhờ định lý này, ta dễ dàng chứng minh (theo đúng cách chứng minh Bất đẳng thức Karamata).

Định lý 72 (Bất đẳng thức Ostrowski). *Với mọi hàm lồi $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và với mọi bộ số $y_1, y_2, \dots, y_n$ gần đều hơn bộ số $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta đều có bất đẳng thức*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant F(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Ta xét các bài toán sau để minh hoạ phương pháp (xem [19]).

Bài toán 7. *Chứng minh rằng nếu $x, y, z, > 0$ thì*

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xyz)^{2/3} \geqslant (x + y + z)^2.$$

Proof. Xét hàm số

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xyz)^{2/3} - (x + y + z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx + 3(xyz)^{2/3} \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \leqslant y \leqslant z$. Ta cần chứng minh $F(x, y, z) \geqslant 0$. Thực hiện điều chỉnh dồn biến bằng trung bình nhân, ta sẽ chứng minh

$$F(x, y, z) \geqslant F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}). \tag{4.2}$$

Thật vậy, xét hiệu $d = F(x, y, z) - F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz})$. Ta có

$$\begin{aligned} d &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - (x^2 + yz + yz - 2x\sqrt{yz} - 2x\sqrt{yz} - 2yz) \\ &\quad + 3(xyz)^{2/3} - 3(xyz)^{2/3} \\ &= y^2 + z^2 - 2yz + 4x\sqrt{yz} - 2x(y + z) \\ &= (y - z)^2 + 2x(-y - z + 2\sqrt{yz}) \\ &= (y - z)^2 - 2x(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \\ &= (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2[(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2 - 2x] \\ &= (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2[(y + z - 2x) + 2\sqrt{y}z] \geqslant 0 \end{aligned}$$

Vì $x \leqslant y \leqslant z$ nên suy ra $y + z \geqslant 2x$. Từ đó suy ra bất đẳng thức (4.2) đúng.

Mặt khác, ta có

$$F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) = x^2 - 4x\sqrt{yz} + 3(xyz)^{2/3}.$$

Do

$$\begin{aligned} x^2 + 3(xyz)^{2/3} &= x^2(xyz)^{2/3} + (xyz)^{2/3} + (xyz)^{2/3} \\ &\geqslant 4(x^2y^2z^2)^{1/4} = 4x\sqrt{yz} \end{aligned}$$

(theo bất đẳng thức AG cho bốn số không âm x^2, $(xyz)^{2/3}$, $(xyz)^{2/3}$, $(xyz)^{2/3}$.)

Do vậy $F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) \geqslant 0$. Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

Bài toán 8. *Chứng minh rằng nếu $x, y, z, t \geqslant 0$, thì*

$$3(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 4\sqrt{xyzt} \geqslant (x + y + z + t)^2.$$

Proof. Xét hàm số

$$\begin{aligned} F(x, y, z, t) &= 3(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 4\sqrt{xyzt} - (x + y + z + t)^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2xy - 2xz - 2xt \\ &\quad - 2yz - 2yt - 2zt + 4\sqrt{xyzt} \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$. Ta cần chứng minh rằng $F(x, y, z, t) \geqslant 0$, trước hết, ta có $F(x, y, z, t) \geqslant F(x, y, \sqrt{zt}, \sqrt{zt})$. Thật vậy, xét hiệu $d = F(x, y, z, t) - F(x, y, \sqrt{zt}, \sqrt{zt})$.

$$\begin{aligned} d &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2xy - (2xz + 2xt + 2yt + 2zt) + 4\sqrt{xyzt} - \\ &\quad - [2(x^2 + y^2 + zt + zt) - 2xy + 2x\sqrt{zt} + 2x\sqrt{zt} \\ &\quad + 2y\sqrt{zt} + 2y\sqrt{zt} + 2zt) + 4\sqrt{xyzt}] \\ &= 2(z^2 + t^2) - 4zt - 2x(z + t) - 2y(z + t) + 4 + 4x\sqrt{zt} + 4y\sqrt{zt} \\ &= 2(t - z)^2 - 2x(\sqrt{t} - \sqrt{z})^2 - 2y(\sqrt{t} - \sqrt{z})^2 \\ &= (\sqrt{t} - \sqrt{z})^2[2(\sqrt{t} + \sqrt{z})^2 - 2x - 2y] \end{aligned}$$

Do $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$ nên

$$2(\sqrt{t} + \sqrt{z})^2 - 2x - 2y = 2(t + z - x - y + 2\sqrt{zt}) \geqslant 0$$

suy ra $d \geqslant 0$.

Tiếp theo ta chứng minh

$$F(x, y, \alpha, \alpha) \geqslant F(x, (y\alpha^2)^{1/3}, (y\alpha^2)^{1/3}, (y\alpha^2)^{1/3})$$

với $\alpha = \sqrt{zt}$. Đặt $\beta = (y\alpha^2)^{1/3}$ suy ra $y = \frac{\beta^3}{\alpha^2}$, ta phải chứng minh

$$F(x, \frac{\beta^3}{\alpha^2}, \alpha, \alpha) \geqslant F(x, \beta, \beta, \beta)$$

và $x \leqslant \frac{\beta^3}{\alpha^2} \leqslant \alpha$.

Thật vậy xét

$$
\begin{aligned}
&F(x,\frac{\beta^3}{\alpha^2},\alpha,\alpha)-F(x,\beta,\beta,\beta)=\\
&=2(x^2+\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\alpha^2+\alpha^2)-[2(\frac{x\beta^3}{\alpha^2})+2x\alpha+\frac{2\beta^3}{\alpha}+\frac{2\beta^3}{\alpha}+2\alpha^2]+4\sqrt{x\beta^3}-\\
&\quad-[2(x^2+\beta^2+\beta^2+\beta^2)-(2x\beta+2x\beta+2x\beta+2\beta^2+2\beta^2+2\beta^2+4\sqrt{x\beta^3}]\\
&=2\Big(\frac{\beta^6}{\alpha^4}+2\alpha^2\Big)-\Big(\frac{2x\beta^3}{\alpha^2}+4x\alpha+\frac{4\beta^3}{\alpha}+2\alpha^2\Big)+6x\beta\\
&=2\Big(\frac{\beta^6}{\alpha^4}+\alpha^2-\frac{2\beta^3}{\alpha}\Big)-2x\Big(\frac{\beta^3}{\alpha^2}+2\alpha-3\beta)\\
&=2\Big(\frac{\beta^3}{\alpha^2}-\alpha\Big)^2+2x(3\beta-\frac{\beta^3}{\alpha^2}-2\alpha)
\end{aligned}
$$

Mà

$$3\beta-\frac{\beta^3}{\alpha^2}\geqslant 4\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}}-2(\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha}})^2 \tag{4.3}$$

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức sau

$$
\begin{gathered}
3\beta\geq 4\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha}}-\frac{\beta^3}{\alpha}\\
3\beta\alpha\geqslant 4\sqrt{\beta^3\alpha}-\frac{\beta^3}{\alpha}\\
\beta-4\sqrt{\beta\alpha}+3\alpha\geqslant 0\\
(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})(\sqrt{\beta}-3\sqrt{\alpha})\geqslant 0
\end{gathered}
$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $\beta\leqslant\alpha$. Vậy (4.3) đúng.

Từ đó suy ra

$$F(x,\frac{\beta^3}{\alpha^2},\alpha,\alpha)-F(x,\beta,\beta,\beta)\geqslant 2(\alpha-\frac{\beta^3}{\alpha^2})^2+2x(4\sqrt{\beta^3}\alpha-\frac{2\beta^3}{\alpha}-2\alpha)$$

Vế trái của bất đẳng thức này lớn hơn hoặc bằng

$$
\begin{gathered}
2(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2-4x(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2\\
\geqslant 2(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2[(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2-2x]\geqslant 0
\end{gathered}
$$

đúng. Vậy

$$F(x, \frac{\beta^3}{\alpha^2}, \alpha, \alpha) \geqslant F(x, \beta, \beta, \beta)$$

Mà

$$F(x, \beta, \beta, \beta) = 2x^2 - 6x\beta + 4\sqrt{x\beta^3}$$

~p dụng bất đẳng thức cosi ta có

$$2x^2 + 4\sqrt{x\beta^3} = x^2 + x^2 + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} \geqslant 6x\beta$$

Suy ra $F(x, \beta, \beta, \beta) \geqslant 0$, suy ra $F(x, y, z, t) \geqslant 0$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

□

Bài toán 9. *Cho a, b, c là các số không âm, sao cho $a + b + c = d$, $n \geq 2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ac}.$$

Proof. Không giảm tổng quát, ta giả sử $a \geqslant b \geqslant c$.

Xét

$$P(a, b, c) = \frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ac}.$$

Ta chứng minh

$$P(a, b, c) \leqslant P(a, b + c, 0)$$

Thật vậy ta xét hiệu

$$\begin{aligned} &P(a, b, c) - P(a, b + c, 0) \\ &\quad = \frac{[a(b + c)]^n}{1 - a(b + c)} - \Big[\frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ca}\Big] \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{[a(b + c)]^n}{1 - a(b + c)} &= a^n \frac{(b + c)^n}{1 - a(b + c)} = \\ &= a^n \frac{(b^n + nb^{n-1}c + \cdots + nbc^{n-1} + c^n)}{1 - a(b + c)} \\ &> \frac{a^n b^n}{1 - a(b + c)} + \frac{a^n b^n}{1 - a(b + c)} + \frac{na^n b^{n-1}c}{1 - a(b + c)} \end{aligned}$$

Do $a, b, c \geqslant 0$ suy ra $1 - a(b+c) = 1 - ab - ac \geqslant 1 - ab$ và $1 - a(b+c) \geqslant 1 - ac$, suy ra

$$\frac{a^n b^n}{1 - a(b+c)} > \frac{a^n b^n}{1 - ab} \text{ và } \frac{b^n c^n}{1 - a(b+c)} > \frac{c^n b^n}{1 - a(b+c)} > \frac{a^n c^n}{1 - ac}$$

và

$$\frac{na^n b^{n-1} c}{1 - a(b+c)} \geqslant \frac{na^n b^{n-1} c}{1 - bc} \geqslant \frac{b^n c^n}{1 - bc}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = 0$, suy ra $P(a, b, c) \leqslant P(a, b+c, 0)$.

Vậy ta cần tìm giá trị lớn nhất của

$$P(a, b+c, 0) = \frac{(a(b+c))^n}{1 - a(b+c)} = \frac{a^n d^n}{1 - ad}, \;\; a \geqslant 0, d \geqslant 0, \; a + d = 1.$$

Ta có

$$ad \leqslant \frac{(a+d)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

Suy ra

$$P(a, b+c, 0) \leqslant \frac{(1/4)^n}{1 - 1/4} = \frac{1}{3.4^{n-1}}$$

Vậy

$$P_{\max} = \frac{1}{3.4^{n-1}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$ và các hoán vị của nó. □

Bài toán 10. *Cho a, b, c là các số thực bất kỳ, chứng minh rằng*

$$F(a, b, c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4) \geqslant 0.$$

Proof. Đây là đề thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 1996, dùng phương pháp dồn biến cho trung bình cộng rồi thực hiện bước sau cùng bằng phương pháp đạo hàm.

Xét hiệu $d = F(a, b, c) - F(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2})$

$$\begin{aligned}
d &= (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4) \\
&\quad - 2(a\frac{b+c}{2})^4 - (b+c)^4 + \tfrac{4}{7}(a^4 + 2\Big(\frac{b+c}{2}\Big)^4\Big) \\
&= (a+b)^4 + (c+a)^4 - 2\Big(a + \frac{b+c}{2}\Big)^4 + \tfrac{4}{7}\Big(\frac{(b+c)^4}{8} - b^4 - c^4\Big) \\
&= a(4b^3 + 4c^3 - (b+c)^3) + 3a^2(2b^2 + c^2 - (b+c)^2) + \tfrac{3}{7}(b^4 + c^4 - \tfrac{1}{8}(b+c)^4) \\
&= 3a(b+c)(b-c)^2 + 3a^2(b-c)^2 + \tfrac{3}{56}(b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc) \\
&= 3a(a+b+c)(b+c)^2 + \tfrac{3}{56}(b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc)
\end{aligned}$$

Hạng tử $\frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2+7c^2+10bc) \geqslant 0$, ta xét hạng tử $3a(a+b+c)(b+c)^2$.

Nếu a, b, c cùng dấu thì $3a(a+b+c)$ không âm, suy ra $d \geqslant 0$.

Nếu a, b, c không cùng dấu, như vậy trong a, b, c có ít nhất một số cùng dấu với a, b, c. Không mất tổng quát, giả sử đó là a. Từ đẳng thức trên ta suy ra

$$F(a,b,c) \geqslant F\Big(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\Big).$$

Như vậy ta còn phải chứng minh $F(a,b,c) \geqslant 0$ với mọi a, b hay là

$$2(a+b)^4 + (2b)^4 - \tfrac{4}{7}(a^4+2b^3) \geqslant 0 \tag{4.4}$$

Nếu $b = 0$ thì bất đẳng thức trên là hiển nhiên.

Nếu $b \neq 0$ thì chia hai vế bất đẳng thức cho b^4 và đặt $x = a/b$, thế thì (4.4) trở thành

$$2(x+1)^4 + 16 - \tfrac{4}{7}(x^4+2) \geqslant 0.$$

Xét hàm số

$$f(x) = 2(x+1)^4 - \tfrac{4}{7}(x^4+2) + 16.$$

Tính đạo hàm ta được

$$f'(x) = 8(x+1)^3 - \tfrac{16}{7}x^3.$$

Suy ra $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x+1 = (2/7)^3 x$ hay $x = -2,99294$. Suy ra

$$f_{\min} = f(-2,9294) = 0,4924 > 0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. □

Tiếp theo, ta nêu một số ví dụ có thể sử dụng đạo hàm để nhận biết quy trình điều chỉnh dồn biến. Phương pháp này rất hữu ích cho các bất đẳng thức gồm ba biến, vì sau khi dồn biến ta đã giảm số biến xuống còn hai biến, từ đó có thể thiết lập quan hệ đơn giản giữa hai biến để đi đến biểu thức hàm một biến.

Bài toán 11. *Cho bốn số không âm a, b, c, d thoả mãn điều kiện $a+b+c+d = 1$. Chứng minh rằng*

$$abc + bcd + acd + abd \leqslant \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

Proof. Đặt $F(a,b,c,d) = \frac{176}{27}abcd - (abc+bcd+acd+abd)$. Do $a+b+c+d = 1$ nên trong bốn số a, b, c, d luôn tồn tại hai số có tổng nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$. Giả sử $a+b \leqslant \frac{1}{2}$. Ta xét $t = \frac{1}{2}(c+d)$ và

$$F(a,b,c,d) - F(a,b,t,t) = (t^2 - cd)(a+b-\tfrac{176}{27}ab)$$

Dễ thấy $t^2 - cd \geqslant 0$, ngoài ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b} \geqslant 8 > \frac{176}{27}$. Suy ra $a + b - \frac{176}{27}ab \geqslant 0$. Vậy $F(a,b,c,d) - F(a,b,t,t) \geqslant 0$ suy ra $F(a,b,c,d) \geqslant F(a,b,t,t)$.

Ta cần chứng minh

$$F(a,b,t,t) = \tfrac{176}{27}abt^2 - 2abt - at^2 - bt^2 \geqslant -\tfrac{1}{27}.$$

Với $a + b + 2t = 1$, $t \geqslant \frac{1}{4}$. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$F(a,b,t,t) = 2t^3 - t^2 + \tfrac{176}{27}abt^2 - 2abt \geqslant -\frac{1}{27}.$$

Cố định t, ta xét $F(ab) = ab(\frac{176}{27}t^2 - 2t) + 2t^3 - t^2$. Tính đạo hàm $F'(ab) = \frac{176}{27}t^2 - 2t$. Nếu $t \geqslant \frac{27}{88}$ thì $F'(ab) \geqslant 0$ suy ra $F(ab)$ đồng biến, do đó $F(ab) \geqslant F(0) = 2t^3 - t^2 = f(t)$. Xét hàm $f(t) = 2t^3 - t^2$ trên $[\frac{27}{88}, \frac{1}{2}]$. Tính đạo hàm ta có

$$F'(t) = 6t^2 - 2t.$$

$F'(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = \frac{1}{3}$. $f'(t)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $t = \frac{1}{3}$ suy ra $t = \frac{1}{3}$ là cực tiểu của f. Thành thử $f(t) \geqslant f(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27}$. Kết hợp tất cả các điều đã nêu trên, ta suy ra $F(a,b,c,d) \geqslant -\frac{1}{27}$.

Nếu $\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{27}{88}$ thì $F'(ab) \leqslant 0$. Mà $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(1-2t)^2}{4}$. Suy ra

$$F(ab) \geqslant F\left(\frac{(1-2t)^2}{4}\right) = 2t^3 - t^2 + \tfrac{176}{27}t^2\frac{(1-2t)^2}{4} - 2t\frac{(1-2t)^2}{4} = g(t).$$

Xét

$$g(t) = \frac{176}{27}t^4 - \frac{176}{27}t^3 + \frac{71}{27}t^2 - \frac{1}{2}t$$

Tính đạo hàm ta được

$$g'(t) = (4t-1)\left(\frac{176}{27}t^2 - \frac{88}{27}t + \frac{1}{2}\right) \geqslant 0.$$

Suy ra $g(t)$ đồng biến và do vậy $g(t) \geqslant g(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{27}$.

Tóm lại $F(a,b,c,d) \geqslant -\frac{1}{27}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi bốn số bằng $\frac{1}{4}$ hoặc ba số bằng $\frac{1}{3}$ và một số bằng 0.

□

Bài toán 12. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geqslant \frac{3}{8}.$$

Proof. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{(1+b/a)^3}+\frac{1}{(1+c/b)^3}+\frac{1}{(1+a/c)^3}\geqslant\frac{3}{8}.$$

Đặt $x=b/a, y=c/b, z=a/c$ suy ra $x,y,z>0$ và $xyz=1$. Vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}\geqslant\frac{3}{8},$$

với $x,y,z>0$ và $xyz=1$. Đặt $z=\min\{x,y,z\}$ thì từ $xyz=1$ suy ra $z\leqslant 1$ và $xy\geq 1$. Ta có nhận xét rằng

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\geqslant\frac{2}{1+\sqrt{xy}}.$$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với mỗi bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\geqslant\frac{1}{1+\sqrt{xy}}-\frac{1}{1+y}$$
$$\frac{(\sqrt{xy}-x)}{(1+x)(1+\sqrt{xy})}\geqslant\frac{y-\sqrt{xy}}{(1+y)(1+\sqrt{xy})}$$
$$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{(1+x)(1+\sqrt{xy})}\geqslant\frac{\sqrt{y}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{(1+x)(1+xy)}$$
$$\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x}y-\sqrt{y}-x\sqrt{y})}{(1+x)(1+y)}\geqslant 0$$
$$\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2(\sqrt{xy}-1)}{(1+x)(1+y)}\geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $xy\geqslant 1$.

Mặt khác ta cũng có

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Bất đẳng thức này có thể chuyển về dạng $3(a-b)^2$ một cách dễ dàng. Bây giờ, áp dụng nhận xét thứ hai, và nhận xét thứ nhất, ta được

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}\geqslant 2\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\right)^3\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{2}{1+\sqrt{xy}}\right)^3.$$

Vậy nên bây giờ ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{2}{(\sqrt{xy}+1)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}\geqslant\frac{3}{8}.$$

Thật vậy, đặt $a = \sqrt{xy}$, suy ra $a^2 = xy = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{a^2}$, $a \geq 1$. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{2}{(1+a)^3} + \frac{1}{(1+\frac{1}{a^2})^3} \geqslant \frac{3}{8}.$$

hay là

$$\frac{2}{(1+a)^3} + \frac{a^6}{(a^2+1)^3} \geqslant \frac{3}{8}.$$

Tiếp tục biến đổi đơn giản cho ta bất đẳng thức

$$(a-1)^2(5a^4 + 25a^6 + 51a^5 + 71a^4 + 55a^3 + 51a^2 + 17a + 13) \geqslant 0$$

Bất đẳng thức trên đúng vì $a \geqslant 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$, $x = y$, $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+y}$ tức là $x = y = z = 1$. Vậy

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geqslant \frac{3}{8}.$$

Dấu đẳng thức xuất hiện khi $a = b = c$. □

5.5 Một số định lý mở rộng đối với hàm lồi

Trong ứng dụng, ngoài việc xây dựng các kỹ thuật biến đổi để áp dụng được các định lý, các nhà toán học cũng rất quan tâm đến các bất đẳng thức hàm, tức là mở rộng các bất đẳng thức tổng quát cho cả lớp hàm đang xét. Những thành tựu theo hướng này đã bùng nổ trong những năm gần đây. Điều đó dẫn đến lượng bài tập được sáng tác trở nên phong phú và hỗn độn, thiếu tính hệ thống. Vì vậy, nhu cầu hệ thống hoá và cho các tiêu chuẩn nhận biết về tính đúng đắn của nhiều lớp bất đẳng thức đang trở nên cấp bách.

Vào năm 1965, T. Popoviciu đã chứng minh Định lý sau đây

Định lý 73 (T. Popoviciu). *Với mọi hàm lồi trên $I(a,b)$ và với mọi $x, y, z \in I(a,b)$, ta đều có bất đẳng thức*

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\Big(\frac{x+y+z}{3}\Big) \geqslant 2f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + 2f\Big(\frac{y+z}{2}\Big) + 2f\Big(\frac{z+x}{2}\Big).$$

Nhận xét rằng Định lý trên là một mở rộng thực sự của các kết quả quen biết (bất đẳng thức Jensen) về hàm lồi. Thật vậy, theo bất đẳng thức Jensen, thì

$$f(x) + f(y) + f(z) \geqslant f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + f\Big(\frac{y+z}{2}\Big) + f\Big(\frac{z+x}{2}\Big).$$

và

$$3f\Big(\frac{x+y+z}{3}\Big) \leqslant f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + f\Big(\frac{y+z}{2}\Big) + f\Big(\frac{z+x}{2}\Big).$$

Do vậy, Định lý Popoviciu cho ta thực hiện được phép cộng trái chiều.

Hệ quả 18. *Với mọi hàm lồi trên $I(a,b)$ và với mọi $x,y,z \in I(a,b)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 3$, ta đều có bất đẳng thức*

$$f(x)+f(y)+f(z)+\alpha f\Big(\frac{x+y+z}{3}\Big) \geqslant \Big(1+\frac{\alpha}{3}\Big)\Big[f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)+f\Big(\frac{y+z}{2}\Big)+f\Big(\frac{z+x}{2}\Big)\Big].$$

Chứng minh Định lý Popoviciu. Ta coi $x \geqslant y \geqslant z$. Khi đó sẽ xảy ra một trong hai khả năng:

$$x \geqslant \frac{x+y+z}{3} \geqslant y \geqslant z$$

hoặc

$$x \geqslant y \geqslant \frac{x+y+z}{3} \geqslant z.$$

Ta chỉ cần xét trường hợp $x \geqslant y \geqslant \dfrac{x+y+z}{3} \geqslant z$ kà đủ.

Khi đó dễ dàng kiểm tra

$$x \geqslant y \geqslant \frac{x+y+z}{3} \geqslant \frac{x+y+z}{3} \geqslant \frac{x+y+z}{3} \geqslant z, \tag{5.1}$$

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \frac{x+y}{2} \geqslant \frac{x+z}{2} \geqslant \frac{x+z}{2} \geqslant \frac{y+z}{2} \geqslant \frac{y+z}{2} \tag{5.2}$$

và

$$x+y+z+3\Big(\frac{x+y+z}{3}\Big) = 2\Big(\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}\Big).$$

Ta thu được dãy (5.2) gần đều hơn (5.1). Theo Định lý Karamata, ta được điều phải chứng minh. □

Đến năm 1982, A. Lupas [7] đã mở rộng Định lý Popoviciu theo hướng sau.

Định lý 74 (A. Lupas). *Với mọi bộ số dương p,q,r và với mọi $x,y,z \in I(a,b)$, ta đều có bất đẳng thức*

$$pf(x)+qf(y)+rf(z)+(p+q+r)f\Big(\frac{px+qy+rz}{p+q+r}\Big) \tag{5.1}$$

$$\geqslant (p+q)f\Big(\frac{px+qy}{p+q}\Big)+(q+r)f\Big(\frac{qy+rz}{q+r}\Big)+(r+p)f\Big(\frac{rz+px}{r+p}\Big) \tag{5.3}$$

Proof. Tương tự như cách chứng minh Định lý Popoviciu, không mất tính tổng quát, giả thiết rằng

$$x \geqslant y \geqslant \frac{px+qy+rz}{p+q+r} \geqslant z.$$

Từ đó, ta có thể áp dụng Định lý Karamata cho bộ số có trọng để thu được (5.3).

□

Ta nhắc lại giả thiết Karamata đối với hai bộ số sắp được như sau. Ta nói rằng véctơ $\overrightarrow{A} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ với giả thiết $a_1 \geqslant a_2 \geqslant cdots \geqslant a_n$ xa đều hơn so với véctơ $\overrightarrow{B} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ cũng với giả thiết $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$, và được ký hiệu $\overrightarrow{A} \succeq \overrightarrow{B}$, nếu

$$\begin{aligned} a_1 &\geqslant b_1 \\ a_1 + a_2 &\geqslant b_1 + b_2 \\ &\vdots \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} &\geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \end{aligned}$$

Dựa vào Định lý Karamata, ta có thể dễ dàng chứng minh các định lý sau đây.

Định lý 75 (Vasile Cirtoaje). *Với mọi hàm lồi $f(x)$ trên $I(a,b)$ và $a_1, a_2, \dots, a_n \in I(a,b)$, ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$\begin{aligned} f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) + n(n-2)f\Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\Big) \\ \geqslant (n-1)(f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n)) \end{aligned}$$

trong đó $b_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i} a_j$ với mọi i.

Chứng minh.

Không mất tổng quát, ta coi $n \geqslant 3$ và $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. Khi đó tồn tại số tự nhiên m sao cho $1 \leqslant m \leqslant n-1$ và

$$a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_m \leqslant a \leqslant a_{m+1} \leqslant \cdots \leqslant a_n,$$

trong đó $a = (a_1 + \cdots + a_n)/n$. Ta cũng có

$$b_1 \geqslant cdots \geqslant b_m \geqslant a \geqslant b_{m+1} \geqslant \cdots \geqslant b_n.$$

Dễ thấy rằng điều cần chứng minh được suy ra từ hai bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_m) + n(n-m-1)f(a) \\ \geqslant (n-1)(f(b_{m+1}) + f(b_{m+2}) + \cdots + f(b_n)) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(a_{m+1}) + f(a_{m+2}) + \cdots + f(a_n) + n(m-1)f(a) \\ \geqslant (n-1)(f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_m)) \end{aligned} \quad (2)$$

Để chứng minh (1), ta áp dụng bất đẳng thức Jensen đối với hàm lồi

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_m) + (n-m-1)f(a) \geqslant (n-1)f(b),$$

trong đó
$$b = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m + (n-m-1)a}{n-1}.$$

Vậy ta chỉ còn chứng minh rằng

$$(n-m-1)f(a) + f(b) \geqslant f(b_{m+1}) + f(b_{m+2}) + \cdots + f(b_n).$$

Vì

$$a \geqslant b_{m+1} \geqslant b_{m+2} \geqslant cdots \geqslant b_n$$

và

$$(n-m-1)a + b = b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_n,$$

ta thấy ngay $\overrightarrow{A}_{n-m} = [a, \ldots, a, b]$ xa đều hơn $\overrightarrow{B}_{n-m} = [b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n]$. Vậy bất đẳng thức (1) được suy ngay từ Định lý Karamata.

Bất đẳng thức (2) được chứng minh tương tự bằng cách sử dụng bất đẳng thức Jensen quen biết

$$\frac{f(a_{m+1}) + f(a_{m+2}) + \cdots + f(a_n) + (m-1)f(a)}{n-1} \geqslant f(c),$$

ứng dụng cho

$$f(c) + (m-1)f(a) \geqslant f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_m),$$

trong đó
$$c = (a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n + (m-1)a/(n-1).$$

Bất đẳng thức cuối này suy được ngay từ bất đẳng thức Karamata, vì rằng

$$b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_m \geqslant a$$

và $c + (m-1)a = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$, và $\overrightarrow{C}_m = [c, a, \ldots, a]$ xa đều hơn $\overrightarrow{D}_m = [b_1, b_2, \ldots, b_m]$.

Định lý 76 (Vasile Cirtoaje). *Với mọi hàm lồi f trên $I(a,b)$ và $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I(a,b)$, ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$\begin{aligned}(n-2)(f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)) + nf\Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\Big)\\ \geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\Big(\frac{a_i + a_j}{2}\Big)\end{aligned}$$

Chứng minh.

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Với $n = 2$, ta thu được đẳng thức. Giả thiết rằng $n \geqslant 3$ và rằng bất đẳng thức đúng với $n-1$. Ta chứng minh nó đúng với n.

Giả sử $a = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$ và let $x = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})/(n-1)$. Theo giả thiết quy nạp thì

$$(n-3)(f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{n-1})) + (n-1)f(x) \geqslant 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} f\Big(\frac{a_1 + a_j}{2}\Big).$$

Vậy chỉ cần chỉ ra rằng

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{n-1})+(n-2)f(a_n)+nf(a) \geqslant (n-1)f(x)+2\sum_{i=1}^{n-1} f\Big(\frac{a_i + a_n}{2}\Big).$$

Từ bất đẳng thức Jensen, ta có

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{n-1}) \geqslant (n-1)f(x).$$

Vậy nên

$$(n-2)f(a_n) + nf(a) \geqslant 2\sum_{i=1}^{n-1} f\Big(\frac{a_i + a_n}{2}\Big),$$

vì rằng

$$(n-2)a_n + na = 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i + a_n}{2},$$

ta có thể sử dụng bất đẳng thức Karamata cho hai trường hợp.

Trường hợp 1. Khi $2a \geqslant \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} + \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Không mất tổng quát, coi $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. Vậy thì $a \geqslant (a_1 + a_n)/2$. Theo bất đẳng thức Karamata, ta chỉ cần chứng minh

$$a_n \leqslant \min\{(a_1 + a_n)/2, (a_2 + a_n)/2, \cdots, (a_{n-1} + a_n)/2\}$$

và

$$a \geqslant max\{(a_1 + a_n)/2, (a_2 + a_n)/2, \cdots, (a_{n-1} + a_n)/2\}.$$

Điều kiện thứ nhất là hiển nhiên và điều kiện thứ hai suy từ $a \leqslant (a_1 + a_n)/2$.

Trường hợp 2. Khi $2a < \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} + \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Không giảm tổng quát coi $a_1 \leqslant a_2 \leq \cdots \leqslant a_n$. Then $a \leqslant (a_1 + a_n)/2$. Theo bất đẳng thức Karamata, ta chỉ cần chứng minh $a \leqslant \min\{(a_1 + a_n)/2, (a_2 + a_n)/2, \cdots, (a_{n-1} + a_n)/2\}$ và $a_n \geqslant max\{(a_1 + a_n)/2, (a_2 + a_n)/2, \cdots, (a_{n-1} + a_n)/2\}$. Điều kiện thứ hai là hiển nhiên và điều kiện thứ nhất suy từ $a \leqslant (a_1 + a_n)/2$.

Sau đây, ta mô tả một số áp dụng trực tiếp.

Bài toán 13. *Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là bộ số dương thoả mãn điều kiện $a_1a_2\dots a_n = 1$. Chứng minh rằng khi đó ta luôn có*

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} + n(n-2) \geqslant (n-1)\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\Big).$$

Giải. Bất đẳng thức này được suy trực tiếp từ Định lý 4 nếu ta xét hàm lồi $f(x) = e^x$ và thay bộ số $a_1, a_2, \dots, a_n$ bởi bộ số $(n-1)\ln a_1, (n-1)\ln a_2, \dots, (n-1)\ln a_n$, tương ứng.

Bài toán 14. *Xét bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thoả mãn điều kiện $a_1+a_2+\dots+a_n = n$. Khi đó, ta luôn có*

$$(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_n) \geqslant (n-1)^n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Giải. Chỉ cần áp dụng Định lý 4 với hàm lồi $f(x) = -\ln x$ ứng với $x > 0$, ta có ngay điều phải chứng minh.

Nhận xét 26. *Với $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ kéo theo $a_1a_2\dots a_n \leqslant 1$, ta thấy bất đẳng thức AG sắc hơn bất đẳng thức*

$$(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_n) \geqslant (n-1)^n a_1a_2\cdots a_n.$$

Thật vậy, từ các bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
n - a_1 &= a_2 + a_3 + \dots + a_n \geqslant (n-1)(a_2a_3\cdots a_n)^{\frac{1}{n-1}}\\
n - a_2 &= a_1 + a_3 + \dots + a_n \geqslant (n-1)(a_1a_3\cdots a_n)^{\frac{1}{n-1}}\\
&\ \vdots\\
n - a_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geqslant (n-1)(a_1a_2\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}},
\end{aligned}$$

ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài toán 15. *Xét bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và đặt $b_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i} a_j$ ứng với mọi i. Chứng minh rằng khi đó*

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} \geqslant \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \tag{3}$$

Giải.

Giả sử $a = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$. Sử dụng hệ thức

$$\frac{(n-1)b_i}{a_i} = \frac{na}{a_i} - 1 \quad \text{và} \quad \frac{a_i}{b_i} = \frac{na}{b_i} - n + 1$$

với $i = 1, 2, \dots, n$, ta thấy (3) tương đương với bất đẳng thức

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{n(n-2)}{a} \geqslant (n-1)\Big(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}\Big).$$

Bất đẳng thức này dễ dàng nhận được từ Định lý 4 ứng dụng cho hàm lồi $f(x) = 1/x$ với $x > 0$.

Bài toán 16. *Xét bộ số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ thoả mãn điều kiện*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}. \tag{4}$$

Chứng minh rằng khi đó

$$\frac{1}{1+(n-1)x_1} + \frac{1}{1+(n-1)x_2} + \cdots + \frac{1}{1+(n-1)x_n} \geqslant 1 \tag{5}$$

Giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể suy từ (3) theo cách sau đây. Giả thiết ngược lại rằng

$$\frac{1}{1+(n-1)x_1} + \frac{1}{1+(n-1)x_2} + \cdots + \frac{1}{1+(n-1)x_n} < 1. \tag{6}$$

Ta chứng minh rằng (4) không thoả mãn. Giả sử

$$a_i = \frac{1}{1+(n-1)x_i}, \ \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Nhận xét rằng $a_i > 0$ và

$$x_i = \frac{1-a_i}{(n-1)a_i}, \ \ \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Theo (6) thì $\sum a_i < 1$. Vậy nên

$$1 - a_i > \sum_{j\neq i} a_j = (n-1)b_i \tag{7}$$

ứng với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Do đó

$$\begin{aligned}
x_1 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-a_i}{(n-1)a_i} &> \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} && \text{by (7)}\\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} && \text{by (3)}\\
&> \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)a_i}{1-a_i} && \text{by (7)}\\
&= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}
\end{aligned}$$

Vậy nên, ta có điều phải chứng minh.

5.6 Các định lý dạng Karamata

Trong phần này, ta sẽ nêu kết luận về tính so sánh được đối với một số biểu thức sinh bởi các bộ số (có trọng hoặc không trọng) sắp theo thứ tự cho trước. Các ràng buộc này tương tự như các giả thiết của Bất đẳng thức Karamata.

Bài toán 17. *Giả thiết cho ba cặp số dương* (α_1, α_2), (u_1, u_2) *và* (x_1, x_2) *thoả mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} u_1 \leqslant u_2, \\ \alpha_1 x_1 \leqslant \alpha_1 u_1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng, khi đó

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leqslant u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = u_1$ *và* $x_2 = u_2$.

Proof. Xét hàm số

$$y = \Big(\frac{x}{\alpha_1}\Big)^{\alpha_1} \Big(\frac{s-x}{\alpha_2}\Big)^{\alpha_2}.$$

Ta có

$$y' = \Big(\frac{x}{\alpha_1}\Big)^{\alpha_1 - 1} \Big(\frac{s-x}{\alpha_2}\Big)^{\alpha_2 - 1} \Big(\frac{s-x}{\alpha_2} - \frac{x}{\alpha_1}\Big).$$

Vậy nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha_1} = \frac{s-x}{\alpha_2} = \frac{s}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

và $y' > 0$ khi $\dfrac{x}{\alpha_1} < \dfrac{s}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Do đó với

$$\frac{x}{\alpha_1} \leqslant \frac{u}{\alpha_1} \leqslant \frac{s}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

thì ta có

$$\Big(\frac{x}{\alpha_1}\Big)^{\alpha_1} \Big(\frac{s-x}{\alpha_2}\Big)^{\alpha_2} \leqslant \Big(\frac{u}{\alpha_1}\Big)^{\alpha_1} \Big(\frac{s-u}{\alpha_2}\Big)^{\alpha_2}.$$

Đặt

$$\frac{x}{\alpha_1} = x_1,\ \frac{s-x}{\alpha_2} = x_2, \frac{u}{\alpha_1} = u_1,\ \frac{s-u}{\alpha_2} = u_2.$$

Suy ra, khi

$$x_1 \leqslant u_1 \leqslant u_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,$$

ta thu được

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \leqslant u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}.$$

Nhận thấy rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i,\ \forall i = 1, 2.$ $\square$

Bài toán 18. *Giả thiết cho ba bộ ba số dương* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, (u_1, u_2, u_3) *và* (x_1, x_2, x_3), *thoả mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3, \\ \alpha_1 x_1 \leqslant \alpha_1 u_1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leqslant \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3. \end{cases}$$

Khi đó

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3} \leqslant u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}u_3^{\alpha_3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i,\ \forall i = 1, 2, 3.$

Proof. Theo giả thiết thì

$$\begin{cases} u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3, \\ \alpha_1 x_1 \leqslant \alpha_1 u_1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leqslant \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, \end{cases}$$

nên ta cần xét hai trường hợp.

Trường hợp 1).
Khi $x_1 = u_1 - d_1, x_2 = u_2 - d_2, x_3 = u_3 + d_3$ với $d_1, d_2, d_3 \geqslant 0$.
Khi đó $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 = \alpha_3 d_3$ và từ đó, ta thu được

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3} &= (u_1 - d_1)^{\alpha_1}(u_2 - d_2)^{\alpha_2}(u_3 + d_3)^{\alpha_3} \\ &\leqslant u_1^{\alpha_1}(u_2 - d_2)^{\alpha_2}\Big(u_3 + d_3 - \frac{\alpha_1 d_1}{\alpha_3}\Big)^{\alpha_3} \leqslant u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}u_3^{\alpha_3}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i; \forall i = 1, 2, 3.$

Trường hợp 2).
Khi $x_1 = u_1 - d_1,\ x_2 = u_2 + d_2,\ x_3 = u_3 + d_3$ với $d_1, d_2, d_3 \geqslant 0$.

Khi đó $\alpha_1 d_1 = \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3$ và từ đó, ta thu được

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = (u_1 - d_1)^{\alpha_1}(u_2 + d_2)^{\alpha_2}(u_3 + d_3)^{\alpha_3}$$
$$\leqslant \left(u_1 - d_1 + \frac{\alpha_2 d_2}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}(u_3 + d_3)^{\alpha_3} \leqslant u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i; \forall i = 1, 2, 3.$

□

Bây giờ, ta có thể chứng minh định lý sau.

Định lý 77. *Giả thiết cho ba bộ số dương (α_i), (u_i) và (x_i) thoả mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n, \\ \alpha_1 x_1 \leqslant \alpha_1 u_1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leqslant \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \leqslant \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{n-1} u_{n-1}, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n. \end{cases}$$

Khi đó, ta có

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \cdots u_n^{\alpha_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Proof. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp thông thường.

Theo hai bài toán vừa chứng minh thì định lý đã đúng với $n = 2$ và $n = 3$.

Giả sử định lý đúng với n. Ta chứng minh định lý đúng với $n + 1$.

Theo giả thiết thì

$$\begin{cases} u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1}, \\ \alpha_1 x_1 \leqslant \alpha_1 u_1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leqslant \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \leqslant \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{n+1} u_{n+1} \end{cases}$$

nên ứng với chỉ số k, ta có thể giả sử

$$x_k \leqslant u_k,\ x_k = u_k - d_k,\ u_{k+1} \leqslant x_{k+1},\ x_{k+1} = u_{k+1} + d_{k+1}.$$

Ta chia ra hai trường hợp để xét.

Trường hợp 1). Khi $\alpha_k d_k \leqslant \alpha_{n+1} d_{k+1}$, thì

$$\begin{aligned}
&x_1^{\alpha_1}\cdots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}}\cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\\
&= x_1^{\alpha_1}\cdots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\Big(u_k - d_k\Big)^{\alpha_k}\Big(u_{k+1}+d_{k+1}\Big)^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}}\cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\\
&\leqslant x_1^{\alpha_1}\cdots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} u_k^{\alpha_k}\Big(u_{k+1}+d_{k+1}\frac{\alpha_k d_k}{\alpha_{k+1}}\Big)^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}}\cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\\
&\leqslant u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}\cdots u_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i,\ \forall i = 1, 2, \dots, n+1$.

Trường hợp 2). Khi $\alpha_k d_k > \alpha_{a+1} d_{k+1}$, thì

$$\begin{aligned}
&x_1^{\alpha_1}\cdots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}}\cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\\
&= x_1^{\alpha_1}\cdots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\Big(u_k - d_k\Big)^{\alpha_k}\Big(u_{k+1}+d_{k+1}\Big)^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}}\cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\\
&\leqslant x_1^{\alpha_1}\cdots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\Big(u_k - d_k + \frac{\alpha_{k+1}d_{k+1}}{\alpha_k}\Big)^{\alpha_k}\Big(u_{k+1}\Big)^{\alpha_{k+1}} x_{k+2}^{\alpha_{k+2}}\cdots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\\
&\leqslant u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}\cdots u_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i,\ \forall i = 1, 2, \dots, n+1$.

Vậy định lý đúng với mọi $n \geqslant 2$.

□

Hệ quả 19. *Với mọi bộ số dương (α_i) và (x_i), ta đều có*

$$\begin{aligned}
&x_1x_2\cdots x_n \leqslant \Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\Big)^n\\
&x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \Big(\frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\Big)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\\
&\Big(\frac{x_1}{\alpha_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{x_2}{\alpha_2}\Big)^{\alpha_2}\cdots\Big(\frac{x_n}{\alpha_n}\Big)^{\alpha_n}\\
&\leqslant \Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\Big)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}
\end{aligned}$$

Bài toán 19. *Giả thiết cho hàm số $f(x)$ xác định và có $f''(x) > 0$ trên $[\alpha, \beta]$ và cho hai cặp số x_1, x_2; $u_1, u_2 \in [\alpha, \beta]$. Khi đó với mọi cặp số dương (γ_1, γ_2) và (u_1, u_2) thoả mãn các điều kiện*

$$\begin{cases} u_1 \leqslant u_2, \\ \gamma_1 x_1 \leqslant \gamma_1 u_1, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, \end{cases}$$

ta đều có

$$\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) \geqslant \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = u_1$ và $x_2 = u_2$.

Proof. Xét hàm số

$$y = \gamma_1 f\Big(\frac{x}{\gamma_1}\Big) + \gamma_2 f\Big(\frac{s-x}{\gamma_2}\Big),$$

với $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Ta có

$$y' = f'\Big(\frac{x}{\gamma_1}\Big) - f'\Big(\frac{s-x}{\gamma_2}\Big) = 0$$

khi $\dfrac{x}{\gamma_1} = \dfrac{s-x}{\gamma_2} = \dfrac{s}{\gamma_1+\gamma_2}$ và $y' < 0$ khi $\dfrac{x}{\gamma_1} < \dfrac{s}{\gamma_1+\gamma_2}$.

Do đó với

$$\frac{x}{\gamma_1} \leqslant \frac{u}{\gamma_1} \leqslant \frac{s}{\gamma_1+\gamma_2},$$

ta có

$$\gamma_1 f\Big(\frac{x}{\gamma_1}\Big) + \gamma_2 f\Big(\frac{s-x}{\gamma_2}\Big) \geqslant \gamma_1 f\Big(\frac{u}{\gamma_1}\Big) + \gamma_2 f\Big(\frac{s-u}{\gamma_2}\Big).$$

Đặt

$$\frac{x}{\gamma_1} = x_1, \frac{s-x}{\gamma_2} = x_2, \frac{u}{\gamma_1} = u_1, \frac{s-u}{\gamma_2} = u_2.$$

Suy ra, ứng với

$$x_1 \leqslant u_1 \leqslant u_2,\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2,$$

ta có

$$\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) \geqslant \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2).$$

Nhận xét rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = u_1$ và $x_2 = u_2$. □

Bài toán 20. *Giả thiết cho hàm số $f(x)$ xác định và có $f''(x) > 0$ trên $[\alpha, \beta]$ và cho các bộ số $(x_1, x_2, x_3), (u_1, u_2, u_3)$ nằm trong $[\alpha, \beta]$. Khi đó với mọi bộ số dương $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ và (u_1, u_2, u_3), thoả mãn các điều kiện*

$$\begin{cases} u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3, \\ \gamma_1 x_1 \leqslant \gamma_1 u_1, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \leqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3, \end{cases}$$

ta đều có

$$\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \gamma_3 f(x_3) \geqslant \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2) + \gamma_3 f(u_3).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2, 3$.

Proof. Khi đó, theo giả thiết thì $x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3 \in [\alpha, \beta]$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$ và

$$\begin{cases} u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \\ \gamma_1 x_1 \leqslant \gamma_1 u_1, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \leqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3. \end{cases}$$

a) Xét trường hợp khi $x_1 = u_1 - d_1$, $x_2 = u_2 - d_2$, $x_3 = u_3 + d_3$. Khi đó, hiển nhiên

$$\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 = \gamma_3 d_3$$

và

$$\begin{aligned} &\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \gamma_3 f(x_3) = \gamma_1 f(u_1 - d_1) + \gamma_2 f(u_2 - d_2) + \gamma_3 f(u_3 + d_3) \\ &\geqslant \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2 - d_2) + \gamma_3 f\Big(u_3 + d_3 - \frac{\gamma_1 d_1}{\gamma_3}\Big) \\ &\geqslant \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2) + \gamma_3 f(u_3). \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2, 3$.

b) Khi $x_1 = u_1 - d_1, x_2 = u_2 + d_2, x_3 = u_3 + d_3$, thì hiển nhiên, ta có

$$\gamma_1 d_1 = \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3$$

và

$$\begin{aligned} &\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \gamma_3 f(x_3) = \gamma_1 f(u_1 - d_1) + \gamma_2 f(u_2 + d_2) + \gamma_3 f(u_3 + d_3) \\ &\geqslant \gamma_1 f\Big(u_1 - d_1 + \frac{\gamma_2 d_2}{\gamma_1}\Big) + \gamma_2 f(u_2) + \gamma_3 f(u_3 + d_3) \\ &\geqslant \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2) + \gamma_3 f(u_3). \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i, \forall i = 1, 2, 3$

$\square$

Bây giờ, ta chuyển sang xét trường hợp tổng quát.

Định lý 78. *Giả thiết cho hàm số $f(x)$ xác định và có $f''(x) > 0$ trên $[\alpha, \beta]$ và cho các bộ số $(x_i), (u_i)$ trong $[\alpha, \beta]$. Khi đó với mọi bộ số dương (γ_i), (u_i) thoả mãn các điều kiện*

$$\begin{cases} u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n, \\ \gamma_1 x_1 \leqslant \gamma_1 u_1, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \leqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_{n-1} x_{n-1} \leqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_{n-1} u_{n-1} \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_n x_n = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_n x_n, \end{cases}$$

ta đều có

$$\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_n f(x_n) \geqslant \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2) + \cdots + \gamma_n f(u_n).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2, , n$.

Proof. Theo kết qủa của hai bài toán vừa chứng minh thì Định lý đúng với các trường hợp $n = 2, 3$.

Giả sử định lý đúng với n. Ta chứng minh định lý đúng với $n + 1$.

Theo giả thiết, thì ta có

$$\begin{cases} x_i, u_i \in [\alpha, \beta];\ \gamma_i > 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, n+1; \\ u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1} \\ \gamma_1 x_1 \leqslant \gamma_1 u_1, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \leqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_n x_n \leqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_n u_n \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_{n+1} x_{n+1} = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_{n+1} u_{n+1}. \end{cases}$$

Không mất tổng quát, giả sử

$$x_k \leqslant u_k, u_{k+1} \leqslant x_{k+1}.$$

Đặt $x_k = u_k - d_k, x_{k+1} = u_{k+1} + d_{k+1}$ với $d_k, d_{k+1} \geqslant 0$.

a) Khi $\gamma_k d_k \leqslant \gamma_{k+1} d_{k+1}$, thì

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f(x_k) + \gamma_{k+1} f(x_{k+1}) + \\
&+ \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f(u_k - d_k) + \\
&+ \gamma_{k+1} f(u_{k+1} + d_{k+1}) + \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\geqslant \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f(u_k) + \\
&+ \gamma_{k+1} f\Big(u_{k+1} + d_{k+1} - \frac{\gamma_k d_k}{\gamma_{k+1}}\Big) + \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\geqslant \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2) + \cdots + \gamma_{n+1} f(u_{n+1}).
\end{aligned}$$

b) Khi $\gamma_k d_k > \gamma_{k+1} d_{k+1}$, thì

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f(x_k) + \gamma_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&+ \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f(u_k - d_k) + \gamma_{k+1} f(u_{k+1} + d_{k+1}) \\
&+ \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\geqslant \gamma_1 f(x_1) + \gamma_2 f(x_2) + \cdots + \gamma_{k-1} f(x_{k-1}) + \gamma_k f\Big(u_k - d_k + \frac{\gamma_{k+1} d_{k+1}}{\gamma_k}\Big) \\
&+ \gamma_{k+1} f(u_{k+1}) + \gamma_{k+2} f(x_{k+2}) + \cdots + \gamma_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\geqslant \gamma_1 f(u_1) + \gamma_2 f(u_2) + \cdots + \gamma_{n+1} f(u_{n+1}).
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n+1$

Vậy Định lý đúng với mọi $n \geqslant 2$.

□

Nhận xét 27. *Khi $f''(x) < 0$ trên $[\alpha, \beta]$ thì ta có bất đẳng thức đổi chiều.*

Định lý 79. *Giả sử với mọi bộ số dương c, (u_i) và (α_i) thoả mãn các điều kiện*

$$\begin{cases}
\frac{u_1}{\alpha_1} \leqslant \frac{u_2}{\alpha_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{u_n}{\alpha_n}; \\
x_1 \leqslant u_1, \\
x_1 + x_2 \leqslant u_1 + u_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}, \\
x_1 + x_2 + \cdots + x_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n
\end{cases}$$

Khi đó, ta luôn có

$$\alpha_1\Big(\frac{x_1}{\alpha_1}\Big)^{c+1}+\alpha_2\Big(\frac{x_2}{\alpha_2}\Big)^{c+1}+\cdots+\alpha_n\Big(\frac{x_n}{\alpha_n}\Big)^{c+1}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{c+1}}{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)^c}.$$

Giải.

Các hàm số $f(x)=\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1}$ và $f'(x)=\frac{c+1}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{c}$ đều xác định và đồng biến trong $\mathbb{R}^+$, nên với $c, x_i, u_i, \alpha_i > 0\ \forall i = 1, 2, \dots, n$, thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} \frac{u_1}{\alpha_1}\leqslant\frac{u_2}{\alpha_2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{u_n}{\alpha_n};\\ x_1\leqslant u_1, x_1+x_2\leqslant u_1+u_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_{n-1},\\ x_1+x_2+\cdots+x_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\end{cases}$$

ta luôn có

$$\begin{aligned}&\alpha_1\Big(\frac{x_1}{\alpha_1}\Big)^{c+1}+\alpha_2\Big(\frac{x_2}{\alpha_2}\Big)^{c+1}+\cdots+\alpha_n\Big(\frac{x_n}{\alpha_n}\Big)^{c+1}\geqslant\\ \geqslant\ &\alpha_n\Big(\frac{u_1}{\alpha_1}\Big)^{c+1}+\alpha_2\Big(\frac{u_2}{\alpha_2}\Big)^{c+1}+\cdots+\alpha_n\Big(\frac{u_n}{\alpha_n}\Big)^{c+1},\\ &\frac{x_1^{c+1}}{\alpha_1^c}+\frac{x_2^{c+1}}{\alpha_2^c}+\cdots+\frac{x_n^{c+1}}{\alpha_n^c}\geqslant\\ \geqslant\ &\frac{u_1^{c+1}}{\alpha_1^c}+\frac{u_2^{c+1}}{\alpha_2^c}+\cdots+\frac{u_n^{c+1}}{\alpha_n^c}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^{c+1}}{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)^c}.\end{aligned}$$

5.7 Bài tập

Bài 1. *Chứng minh rằng với mọi cặp số x_1, x_2, ta đều có*

$$x^6+y^6+z^6+3(xyz)^2\geqslant 2(y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3).$$

Bài 2. *Chứng minh rằng với mọi bộ số dương x, y, z, ta đều có*

$$\Big(\frac{2x_1+x_2}{3}\Big)^2+\Big(\frac{x_1+2x_2}{3}\Big)^2\geqslant\Big(\frac{2x_1+3x_2}{5}\Big)^2+\Big(\frac{3x_1+2x_2}{5}\Big)^2.$$

Bài 3. *Chứng minh rằng với cặp số dương x_1, x_2, ta đều có*

$$\sqrt{5}\Big(\frac{1}{\sqrt{4x_1+x_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_1+4x_2}}\Big)\geqslant\sqrt{3}\Big(\frac{1}{\sqrt{2x_1+x_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_1+2x_2}}\Big)\geqslant\sqrt{2}\frac{2}{\sqrt{x_1+x_2}}.$$

Bài 4. *Chứng minh rằng với cặp số dương x_1, x_2, ta đều có*

$$\sqrt{3}\Big(\frac{1}{\sqrt{x_1+2x_2}}+\frac{1}{\sqrt{2x_1+x_2}}\Big) \geqslant \sqrt{5}\Big(\frac{1}{\sqrt{2x_1+3x_2}}+\frac{1}{\sqrt{3x_1+2x_2}}\Big) \geqslant \sqrt{2}\frac{2}{\sqrt{x_1+x_2}}.$$

Bài 5. *Xét bộ số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}. \tag{4}$$

Chứng minh rằng khi đó

$$\frac{x_1}{n-1+x_1} + \frac{x_2}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{x_n}{n-1+x_n} \geqslant 1$$

Bài 6. *Chứng minh rằng với mọi bộ số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ta đều có*

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + n(x_1^2x_2^2x_n^2)^{\frac{1}{n}} \geqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2.$$

Bài 7. *Cho $a, b, c; x, y, z \geqslant 0$ thoả mãn điều kiện*

$$\begin{cases} a \geqslant x \geqslant y \geqslant z > 0 \\ ayz + bzx + cxy \geqslant 3xyz \\ ay + bx \geqslant 2xy. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant x^2 + y^2 + z^2.$$

Bài 8.

Cho hai bộ số dương $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n > 0 \\ x_1 \geqslant y_1 \\ x_1x_2 \geqslant y_1y_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_n \geqslant y_1y_2\cdots y_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \geqslant y_1^k + y_2^k + \cdots + y_n^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

ư

Chương 6

Sắp thứ tự một số bộ số có trọng

Trong chương này, ta khảo sát một số quy luật sắp thứ tự của các bộ số với các ràng buộc tuyến tính.

6.1 Bất đẳng thức Abel

Trong các nghiên cứu về dãy số và chuỗi số, chúng ta thường sử dụng biến đổi sau đây, thường được gọi là biến đổi Abel (xem phần chứng minh Bất đẳng thức Karamata).

Xét tổng

$$Z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_k,\ \ k = 1, 2, \dots , n$$

và

$$S_n = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} S_n &= \alpha_1 Z_1 + \alpha_2(Z_2 - Z_1) + \cdots + \alpha_n(Z_n - Z_{n-1}) \\ &= Z_1(\alpha_1 - \alpha_2) + Z_2(\alpha_2 - \alpha_3) + \cdots + Z_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + Z_n\alpha_n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Từ biến đổi (1.1) này, ta có các kết quả sau đây (gọi là các bất đẳng thức Abel)

Định lý 80. *Giả sử (z_j) là một dãy số (thực hoặc phức) tuỳ ý và*

$$Z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_k,\ \ k = 1, 2, \dots , n.$$

Khi đó với mọi dãy số dương đơn điệu giảm (α_k):

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n > 0,$$

ta đều có

$$|\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n| \leqslant \alpha_1 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |Z_k|.$$

Chứng minh.

Thật vậy, từ đồng nhất thức (1.1), ta nhận được

$$\begin{aligned}
&|Z_1|(\alpha_1-\alpha_2)+|Z_2|(\alpha_2-\alpha_3)+\cdots+|Z_{n-1}|(\alpha_{n-1}-\alpha_n)+|Z_n|\alpha_n\\
\leqslant&\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k|[(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+\cdots+(\alpha_{n-1}-\alpha_n)+\alpha_n]\\
=&\alpha_1\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k|.
\end{aligned}$$

Định lý 81. *Giả sử (z_j) là một dãy số (thực hoặc phức) tuỳ ý và*

$$Z_k=z_1+z_2+\cdots+z_k,\ \ k=1,2,\dots,n.$$

Khi đó với mọi dãy số không âm và đơn điệu tăng (β_k):

$$0\leqslant\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\cdots\leqslant\beta_n,$$

ta đều có

$$|\beta_1z_1+\beta_2z_2+\cdots+n_nz_n|\leqslant 2\beta_n\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k|.$$

Chứng minh.

Ta xét tổng

$$Z_k=z_1+z_2+\cdots+z_k,\ \ k=1,2,\dots,n$$

và

$$S_n=\beta_1z_1+\beta_2z_2+\cdots+\beta_nz_n.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
S_n&=\beta_1Z_1+\beta_2(Z_2-Z_1)+\cdots+\beta_n(Z_n-Z_{n-1})\\
&=Z_1(\beta_1-\beta_2)+Z_2(\beta_2-\beta_3)+\cdots+Z_{n-1}(\beta_{n-1}-\beta_n)+Z_n\beta_n.
\end{aligned}$$

Vậy nên

$$\begin{aligned}
|S_n|&=|\beta_1Z_1+\beta_2(Z_2-Z_1)+\cdots+\beta_n(Z_n-Z_{n-1})|\\
&\leqslant|Z_1||\beta_1-\beta_2|+|Z_2||\beta_2-\beta_3|+\cdots+|Z_{n-1}||\beta_{n-1}-\beta_n|+|Z_n||\beta_n|\\
&\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k|[(\beta_2-\beta_1)+(\beta_3-\beta_2)+\cdots+(\beta_n-\beta_{n-1})+\beta_n]\\
&=[(\beta_n-\beta_1)+\beta_n]\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k|[\leqslant 2\beta_n\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Z_k|.
\end{aligned}$$

6.2 Một số quy luật sắp thứ tự bộ số có trọng

Trong phần này, ta sẽ nêu một số quy luật đơn giản để sắp xếp bộ số. Một số bất đẳng thức cổ điển quen biết chính là các trường hợp riêng của những cách sắp thứ tự này.

Định lý 82. *Giả thiết rằng cho dãy số không âm tuỳ ý* (α_n). *Khi đó*

$$\alpha_n\Big(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}\Big)^{n-1} \leqslant \Big(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\Big)^n.$$

Chứng minh.

Ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức (xem phần chứng minh bất đẳng thức AG)

$$nt - t^n \leqslant n-1,\ \ \forall t \geqslant 0, n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.1}$$

Thật vậy, hàm số $f(t) = nt - t^n$ có $f'(t) = n(1 - t^{n-1} = 0$ khi $t = 1$ và $f'(t)$ đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ nên $f(t) \leqslant f(1)$.

Chọn $t = \sqrt[n]{\Big(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\Big)}$, trong đó $\alpha_{n-1} = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}$, từ (2.1) ta có ngay đpcmb.

Tiếp theo, ta xét sự so sánh các kết quả tính toán trên cặp bộ số sắp thứ tự cho trước.

Bài toán 1. *Giả thiết rằng* $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$, $u_1 \leqslant u_2$ *và các điều kiện sau được thoả mãn*

$$\begin{cases} x_1 \leqslant u_1,\\ x_1 + x_2 = u_1 + u_2\end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 \geqslant \gamma_1u_1 + \gamma_2u_2$$

và

$$\gamma_2x_1 + \gamma_1x_2 \leqslant \gamma_2u_1 + \gamma_1u_2.$$

Chứng minh.

Từ giả thiết $\gamma_1 \leqslant \gamma_2,\ \ u_1 \leqslant u_2,\ \ x_1 \leqslant u_1,\ \ x_1 + x_2 = u_1 + u_2$, ta có $x_1 = u_1 - d$, $x_2 = u_2 + d$ với $d \geqslant 0$ và vì vậy

$$\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 = \gamma_1(u_1 - d) + \gamma_2(u_2 + d) = \gamma_1u_1 + \gamma_2u_2 + (\gamma_2 - \gamma_1)d \geqslant \gamma_1u_1 + \gamma_2u_2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_2$ hoặc $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2$.

Tương tự, ta có

$$\gamma_2x_1 + \gamma_1x_2 = \gamma_2(u_1 - d) + \gamma_1(u_2 + d) = \gamma_2u_1 + \gamma_1u_2 - (\gamma_2 - \gamma_1)d \leqslant \gamma_2u_1 + \gamma_1u_2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_2$ hoặc $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$.

Bài toán 2. *Giả thiết rằng* $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \gamma_3$, $u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3$ *và các điều kiện sau được thoả mãn*

$$\begin{cases} x_1 \leqslant u_1, \\ x_1 + x_2 \leqslant u_1 + u_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = u_1 + u_2 + u_3. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \geqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3$$

và

$$\gamma_3 x_1 + \gamma_2 x_2 + +\gamma_1 x_3 \leqslant \gamma_3 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_1 u_3.$$

Chứng minh.

Từ giả thiết $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \gamma_3$, $u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3$, $x_1 \leqslant u_1$, $x_1 + x_2 \leqslant u_1 + u_2$, $x_1 + x_2 + x_3 = u_1 + u_2 + u_3$, ta nhận được

(i) $x_1 = u_1 - d_1$, $x_2 = u_2 - d_2$, $x_3 = u_3 + d_3$, $d_1 + d_2 = d_3$, $d_1, d_2, d_3 \geqslant 0$, hoặc

(ii) $x_1 = u_1 - d_1$, $x_2 = u_2 + d_2$, $x_3 = u_3 + d_3$, $d_1 = d_2 + d_3$, $d_1, d_2, d_3 \geqslant 0$.

Xét trường hợp (i): $x_1 = u_1 - d_1$, $x_2 = u_2 - d_2$, $x_3 = u_3 + d_3$, $d_1 + d_2 = d_3$. Khi đó

$$\begin{aligned} \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 &= \gamma_1(u_1 - d_1) + \gamma_2(u_2 - d_2) + \gamma_3(u_3 + d_3) \\ &\geqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2(u_2 - d_2) + \gamma_3(u_3 + d_3 - d_1) \\ &\geqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3(u_3 + d_3 - d_2 - d_1) \\ &= \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_3$ hoặc $x_i = u_i \ \forall i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \gamma_3 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_1 x_3 &= \gamma_3(u_1 - d_1) + \gamma_2(u_2 - d_2) + \gamma_1(u_3 + d_3) \\ &\leqslant \gamma_3 u_1 + \gamma_2(u_2 - d_2) + \gamma_1(u_3 + d_3 - d_1) \\ &\leqslant \gamma_3 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_1(u_3 + d_3 - d_2 - d_1) \\ &= \gamma_3 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_1 u_3 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_3$ hoặc $x_i = u_i \ \forall i = 1, 2, 3$.

Xét trường hợp (ii): $x_1 = u_1 - d_1$, $x_2 = u_2 + d_2$, $x_3 = u_3 + d_3$, $d_1 = d_2 + d_3$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 &= \gamma_1(u_1 - d_1) + \gamma_2(u_2 + d_2) + \gamma_3(u_3 + d_3)\\
&\geqslant \gamma_1(u_1 - d_1 + d_2) + \gamma_2 u_2 + \gamma_3(u_3 + d_3)\\
&\geqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3(u_3 + d_3 + d_2 - d_1)\\
&= \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_3$ hoặc $x_i = u_i, \forall i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
\gamma_3 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_1 x_3 &= \gamma_3(u_1 - d_1) + \gamma_2(u_2 + d_2) + \gamma_1(u_3 + d_3)\\
&\leqslant \gamma_3(u_1 - d_1 + d_2) + \gamma_2 u_2 + \gamma_1(u_3 + d_3)\\
&\leqslant \gamma_3(u_1 - d_1 + d_2 + d_3) + \gamma_2 u_2 + \gamma_1 u_3\\
&= \gamma_3 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_1 u_3
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_3$ hoặc $x_i = u_i\ \forall i = 1, 2, 3$.

Bây giờ, ta có thể chứng minh

Định lý 83. *Giả thiết rằng cho hai dãy số tăng (γ_n) và (u_n):*

$$\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n,\ u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n$$

thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases}
x_1 \leqslant u_1,\\
x_1 + x_2 \leqslant u_1 + u_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1},\\
x_1 + x_2 + \cdots + x_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.
\end{cases}$$

Khi đó

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_n x_n \geqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_n u_n, \tag{2.2}$$

và

$$\gamma_n x_1 + \gamma_{n-1} x_2 + \cdots + \gamma_1 x_n \leqslant \gamma_n u_1 + \gamma_{n-1} u_2 + \cdots + \gamma_1 u_n. \tag{2.3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_n$ hoặc $x_i = u_i,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$

Chứng minh.

Ta thấy, theo kết quả của hai bài toán vừa chứng minh thì Định lý đã đúng với $n = 2$ và $n = 3$. Tiếp theo, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Giả sử định lý đúng với n, ta chứng minh nó cũng đúng với $n + 1$.

Theo giả thiết thì

$$\begin{cases} \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_{n+1}, \\ u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1}, \\ x_1 \leqslant u_1, \\ x_1 + x_2 \leqslant u_1 + u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}, \\ x_1 + x_2 + \cdots x_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \end{cases}$$

Không giảm tổng quát, giả sử ứng với chỉ số k, ta có

$$x_k \leqslant u_k,\ u_{k+1} \leqslant x_{k+1}$$

thì $x_k = u_k - d_k$, và $x_{k+1} = u_{k+1} + d_{k+1}$ với $d_k \geqslant 0$, $d_{k+1} \geqslant 0$.

Ta xét các trường hợp:

a) Khi $d_k \leqslant d_{k+1}$ thì

$$\begin{aligned} &\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_{k-1} x_{k-1} + \gamma_k x_k + \gamma_{k+1} x_{k+1} + \gamma_{k+2} x_{k+2} + \cdots + \gamma_{n+1} x_{n+1} \\ &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_{k-1} x_{k-1} + \gamma_k (u_k - d_k) + \gamma_{k+1}(u_{k+1} + d_{k+1}) + \\ &+ \gamma_{k+2} x_{k+2} + \cdots + \gamma_{n+1} x_{n+1} \\ &\geqslant \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_{k-1} x_{k-1} + \gamma_k u_k + \gamma_{k+1}(u_{k+1} + d_{k+1} - d_k) + \\ &+ \gamma_{k+2} x_{k+2} + \cdots + \gamma_{n+1} x_{n+1} \\ &\geqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_{n+1} u_{n+1}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_{n+1}$ hoặc $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2, , n + 1$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}
&\gamma_{n+1}x_1 + \gamma_n x_2 + \cdots + \gamma_{n+3-k}x_{k-1} + \gamma_{n+2-k}x_k + \gamma_{n+1-k}x_{k+1} + \\
&\qquad\qquad + \gamma_{n-k}x_{k+2} + \cdots + \gamma_1 x_{n+1} \\
&= \gamma_{n+1}x_1 + \gamma_n x_2 + \cdots + \gamma_{n+3-k}x_{k-1} + \gamma_{n+2-k}(u_k - d_k) + \gamma_{n+1-k}(u_{k+1} + d_{k+1}) \\
&\qquad\qquad + \gamma_{n-k}x_{k+2} + \cdots + \gamma_1 x_{n+1} \\
&\leqslant \gamma_{n+1}x_1 + \gamma_n x_2 + \cdots + \gamma_{n+3-k}x_{k-1} + \gamma_{n+2-k}u_k + \gamma_{n+1-k}(u_{k+1} + d_{k+1} - d_k) \\
&\qquad\qquad + \gamma_{n-k}x_{k+2} + \cdots + \gamma_1 x_{n+1} \\
&\leqslant \gamma_{n+1}x_1 + \gamma_n x_2 + \cdots + \gamma_1 u_{n+1}
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_{n+1}$ hoặc $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n+1$

b) Khi $d_k > d_{k+1}$ thì

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_{k-1}x_{k-1} + \gamma_k x_k + \gamma_{k+1}x_{k+1} + \gamma_{k+2}x_{k+2} + \cdots + \gamma_{n+1}x_{n+1} \\
&= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_{k-1}x_{k-1} + \gamma_k(u_k - d_k) + \gamma_{k+1}(u_{k+1} + d_{k+1}) \\
&\qquad\qquad + \gamma_{k+2}x_{k+2} + \cdots + \gamma_{n+1}x_{n+1} \\
&\geqslant \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_{k-1}x_{k-1} + \gamma_k(u_k - d_k + d_{k+1}) + \gamma_{k+1}u_{k+1} \\
&\qquad\qquad + \gamma_{k+2}x_{k+2} + \cdots + +\gamma_{n+1}x_{n+1} \\
&\geqslant \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_{n+1}u_{n+1}
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_{n+1}$ hoặc $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n+1$

$$\begin{aligned}
&\gamma_{n+1}x_1 + \gamma_n x_2 + \cdots + \gamma_{n+3-k}x_{k-1} + \gamma_{n+2-k}x_k + \gamma_{n+1-k}x_{k+1} \\
&\qquad\qquad + \gamma_{n-k}x_{k+2} + \cdots + \gamma_1 x_{n+1} \\
&= \gamma_{n+1}x_1 + \gamma_n x_2 + \cdots + \gamma_{n+3-k}x_{k-1} + \gamma_{n+2-k}(u_k - d_k) + \gamma_{n+1-k}(u_{k+1} + d_{k+1}) \\
&\qquad\qquad + \gamma_{n-k}x_{k+2} + \cdots + \gamma_1 x_{n+1} \\
&\leqslant \gamma_{n+1}x_1 + \gamma_n x_2 + \cdots + \gamma_{n+3-k}x_{k-1} + \gamma_{n+2-k}(u_k - d_k + d_{k+1}) + \gamma_{n+1-k}u_{k+1} + \\
&\qquad\qquad + \gamma_{n-k}x_{k+2} + \cdots + \gamma_1 x_{n+1} \\
&\leqslant \gamma_{n+1}u_1 + \gamma_n u_2 + \cdots + \gamma_1 u_{n+1}.
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_{n+1}$ hoặc $x_i = u_i$, với mọi $i = 1, 2, \ldots, n+1$.
Vậy định lý đúng với mọi $n \geqslant 2$.

Hệ quả 20. *Giả sử các điều kiện sau đồng thời được thoả mãn*

$$\begin{cases} x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,\\ \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n,\\ o < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n,\\ 0 < \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n. \end{cases}$$

Khi đó ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \cdots + \gamma_nx_n \geqslant (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n)\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big),$$
$$\gamma_nx_1 + \gamma_{n-1}x_2 + \cdots + \gamma_1x_n \leqslant (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n)\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big),$$
$$\frac{\gamma_nx_1 + \gamma_{n-1}x_2 + \cdots + \gamma_1x_n}{\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
$$\leqslant \frac{\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \cdots + \gamma_nx_n}{\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n},$$
$$\gamma_1\alpha_1x_1 + \gamma_2\alpha_2x_2 + \cdots + \gamma_n\alpha_nx_n$$
$$\geqslant (\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \cdots + \gamma_n\alpha_n)\Big(\frac{\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\Big).$$

Dấu đẳng thức khi và chỉ khi hoặc $\gamma_1 = \gamma_n$ *hoặc* $x_1 = x_n$.

Hệ quả 21. *Giả sử các điều kiện sau đồng thời được thoả mãn*

$$\begin{cases} x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,\\ \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n,\\ o < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n,\\ 0 < \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n. \end{cases}$$

Khi đó ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\gamma_n\alpha_1x_1 + \gamma_{n-1}\alpha_2x_2 + \cdots + \gamma_1\alpha_nx_n$$
$$\leqslant (\gamma_n\alpha_1 + \gamma_{n-1}\alpha_2 + \cdots + \gamma_1\alpha_n)\Big(\frac{\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\Big),$$
$$\frac{\gamma_n\alpha_1x_1 + \gamma_{n-1}\alpha_2x_2 + \cdots + \gamma_1\alpha_nx_n}{\gamma_n\alpha_1 + \gamma_{n-1}\alpha_2 + \cdots + \gamma_1\alpha_n}$$
$$\leqslant \frac{\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$
$$\leqslant \frac{\gamma_1\alpha_1x_1 + \gamma_2\alpha_2x_2 + \cdots + \gamma_n\alpha_nx_n}{\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \cdots + \gamma_n\alpha_n}.$$

Dấu đẳng thức khi và chỉ khi hoặc $\gamma_1 = \gamma_n$ *hoặc* $x_1 = x_n$.

Hệ quả 22. *Giả sử các điều kiện sau đồng thời được thoả mãn*

$$\begin{cases} x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n, \\ \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n, \\ o < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n, \\ 0 < \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n. \end{cases}$$

Khi đó ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_1\beta_1 x_1 + \alpha_2\beta_2 x_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n x_n}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n} \\ \geqslant\ &\frac{(\alpha_1+\beta_1)x_1 + (\alpha_2+\beta_2)x_2 + \cdots + (\alpha_n+\beta_n)x_n}{(\alpha_1+\beta_1) + (\alpha_2+\beta_2) + \cdots + (\alpha_n+\beta_n)}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha_1\beta_1 = \alpha_n\beta_n$ *hoặc* $x_1 = x_n$.

Bài toán 3. *Giả thiết rằng*

$$\begin{cases} u_1, u_2 \geqslant 0;\ x_1, x_2 \geqslant 0,\ u_1 \leqslant u_2, \\ x_1 \leqslant u_1, \\ x_1 + x_2 = u_1 + u_2. \end{cases}$$

Khi đó

$$x_1 x_2 \leqslant u_1 u_2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_2$ *hoặc* $x_1 = u_1$ *và* $x_2 = u_2$.

Chứng minh. Theo giả thiết thì $0 < x_1 \leqslant u_1 \leqslant u_2$, $x_1 \leqslant u_1$, $x_1 + x_2 = u_1 + u_2$, nên $x_1 = u_1 - d$, $x_2 = u_2 + d$, $d \geqslant 0$.

Ta có

$$x_1 x_2 = (u_1 - d)(u_2 + d) = u_1 u_2 - d(u_2 + d - u_1) \leqslant u_1 u_2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = u_1$ và $x_2 = u_2$.

Bài toán 4. *Giả thiết rằng*

$$\begin{cases} u_1, u_2, u_3,\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \\ u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n, \\ x_1 \leqslant u_1, \\ x_1 + x_2 \leqslant u_1 + u_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = u_1 + u_2 + u_3 \end{cases}$$

Khi đó

$$x_1x_2x_3 \leqslant u_1u_2u_3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_3$ *hoặc* $x_i = u_i$ *với mọi* $i = 1, 2, 3$.

Chứng minh.

Theo giả thiết thì

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, u_1,\, u_2,\, u_3\, \in \mathbb{R}^+,\, u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3$$

và

$$x_1 \leqslant u_1,\, x_1 + x_2 \leqslant u_1 + u_2,\;\; x_1 + x_2 + x_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

nên ta có hai trường hợp cần xét:

Trường hợp 1).

Khi $x_1 = u_1 - d_1$, $x_2 = u_2 - d_2$, $x_3 = u_3 + d_3$, $d_1 + d_2 = d_3$ với $d_1, d_2, d_3 \geqslant 0$. Khi đó thì

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 = (u_1 - d_1)(u_2 - d_2)(u_3 + d_3) &\leqslant u_1(u_2 - d_2)(u_3 + d_3 - d_1) \\ &\leqslant u_1u_2(u_3 + d_3 - d_1 - d_2) = u_1u_2u_3. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2, 3$.

Trường hợp 2).

Khi $x_1 = u_1 - d_1$, $x_2 = u_2 + d_2$, $x_3 = u_3 + d_3$, $d_1 = d_2 + d_3$ với $d_1, d_2, d_3 \geqslant 0$. Khi đó thì

$$x_1x_2x_3 = (u_1 - d_1)(u_2 + d_2)(u_3 + d_3) \leqslant (u_1 - d_1 + d_2)u_2(u_3 + d_3) \leqslant u_1u_2u_3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2, 3$.

Bây giờ, ta có thể chứng minh

Định lý 84. *Giả thiết rằng*

$$\begin{cases} u_1,\, u_2,\, ,u_n,\, x_1,\, x_2,\, ,x_n \in \mathbb{R}^+, \\ u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n, \\ x_1 \leqslant u_1, \\ x_1 + x_2 \leqslant u_1 + u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leqslant u_1 + u_2 + \cdots u_{n-1}, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \end{cases}$$

Khi đó, ta có bất đẳng thức

$$x_1x_2\cdots x_n \leqslant u_1u_2\cdots u_n.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\gamma_1 = \gamma_n$ *hoặc* $x_i = u_i$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Chứng minh.

Theo các bài toán vừa chứng minh thì định lý đã đúng với $n = 2$ và $n = 3$.

Giả sử định lý đúng với n. Ta sẽ chứng minh định lý cũng đúng với $n + 1$.

Với giả thiết

$$\begin{cases} u_1,\, u_2, \ldots, u_{n+1},\, x_1,\, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^+, \\ u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1}, \\ x_1 \leqslant u_1, \\ x_1 + x_2 \leqslant u_1 + u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant u_1 + u_2 + \cdots u_n, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1}, \end{cases}$$

thì ứng với chỉ số k, ta có thể coi $x_k \leqslant u_k$ và $u_{k+1} \leqslant x_{k+1}$.

Đặt $x_k = u_k - d_k$, $x_{k+1} = u_{k+1} + d_{k+1}$ với $d_k, d_{k+1} \geqslant 0$. Ta có hai trường hợp để xét.

Trường hợp 1).

Khi $d_k \leqslant d_{k+1}$ thì

$$\begin{aligned} &x_1x_2\ldots x_{k-1}x_kx_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{n+1} \\ &= x_1x_2\cdots x_{k-1}(u_k - d_k)(u_{k+1} + d_{k+1})x_{k+2}\cdots x_{n+1} \\ &\leqslant x_1x_2\cdots x_{k-1}u_k(u_{k+1} + d_{k+1} - d_k)x_{k+2}\cdots x_{n+1} \\ &\leqslant u_1u_2\cdots u_{n+1} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Trường hợp 2).

Khi $d_k > d_{k+1}$ thì

$$\begin{aligned}
&x_1x_2\cdots x_{k-1}x_kx_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{n+1}\\
&= x_1x_2\cdots x_{k-1}(u_k - d_k)(u_{k+1} + d_{k+1})x_{k+2}\cdots x_{n+1}\\
&\leqslant x_1x_2\cdots x_{k-1}(u_k - d_k + d_{k+1})u_{k+1}x_{k+2}\cdots x_{n+1}\\
&\leqslant u_1u_2\cdots u_{n+1}
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = u_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Vậy, định lý đúng với mọi $n \geqslant 2$.

Hệ quả 23. *Với giả thiết*

$$0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,\ 0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n,$$

ta luôn có

$$x_1x_2\cdots x_n \leqslant \Big(\frac{\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\Big)^n.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = x_n$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Đặc biệt, khi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1$, thì ta nhận lại được bất đẳng thức AG:

$$x_1x_2\cdots x_n \leqslant \Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big)^n.$$

6.3 Sắp thứ tự và ước lượng phần tử trong bộ số

Bài toán 5 (Thi HSG Việt Nam 1998). *Tồn tại hay không tồn tại một dãy số thực $\{x_n\}$ thỏa mãn các điều kiện sau*

(i) $|x_n| \leqslant 0,666$ với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$

(ii) $|x_m - x_n| \geqslant \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{m(m+1)}$ với mọi cặp số nguyên dương phân biệt m, n.

Giải.

Giả sử tồn tại dãy số như vậy. Với mỗi số nguyên dương N, ta sắp xếp lại bộ số $x_1, \ldots, x_N$ theo thứ tự tăng dần

$$x_{i1} \leqslant x_{i2} \leqslant \cdots \leqslant x_{iN}.$$

Khi đó

$$|x_{iN} - x_{i1}| = |x_{iN} - x_{iN-1}| + \cdots + |x_{i2} - x_{i1}| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{i_N(i_N+1)} + \frac{1}{i_{N-1}(i_{N-1}+1)} + \cdots + \frac{1}{i_2(i_2+1)} + \frac{1}{i_1(i_1+1)} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{i_k(i_k+1)} - \frac{1}{i_N(i_N+1)} - \frac{1}{i_1(i_1+1)} = S_N.$$

Vì $i_1, i_2, ..., i_N$ là một hoán vị của bộ số $1, 2, ..., N$ nên ta có

$$\begin{aligned} S_N &= 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{i_N(i_N+1)} - \frac{1}{i_1(i_1+1)} \\ &= 2\Big(1 - \frac{1}{N+1}\Big) - \frac{1}{i_N(i_N+1)} - \frac{1}{i_1(i_1+1)} \\ &\geqslant 2\Big(1 - \frac{1}{N+1}\Big) - \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{4}{3} - \frac{2}{N+1} \end{aligned}$$

Để ý rằng

$$|x_{iN} - x_{i1}| \leqslant 2 \times 0,666 < 4/3.$$

Chọn số N đủ lớn, ta suy ra mâu thuẫn.

Kết luận:

Không tồn tại dãy số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài toán 6 (Vô địch Liên Xô 1986). *Chứng minh rằng với mọi bộ số dương tuỳ ý $a_1, a_2, ..., a_n$, ta đều có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1+a_2} + \cdots + \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} < 4\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\Big).$$

Giải.

Nhận xét rằng vế phải của bất đẳng thức không thay đổi khi ta thay đổi thứ tự của các a_k và do đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho trường hợp ứng với tổng bên trái lớn nhất. Điều này xảy ra khi bộ số a_i được sắp theo thứ tự tăng dần.

Thật vậy, giả sử

$$0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant ... \leqslant b_n$$

là dãy các số a_k được sắp xếp lại theo thứ tự. Khi đó, ứng với mọi chỉ số k ta đều có

$$b_1 + \cdots + b_k \leqslant a_1 + \cdots + a_k$$

và

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{(a_1+a_2)} + \cdots + \frac{n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)} \leqslant \frac{1}{b_1} + \frac{2}{(b_1+b_2)} + \cdots + \frac{n}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)}.$$

Với mọi chỉ số k, ta ghép các số hạng của tổng bên phải thành từng cặp để ước lượng

$$\frac{2k-1}{b_1+b_2+\cdots+b_{2k-1}}+\frac{2k}{b_1+b_2+\cdots+b_{2k-1}}<\frac{2k-1}{kb_k}+\frac{2k}{(k+1)b_k}<\frac{4}{b_k}.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 7. *Cho hai dãy số tự nhiên $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Chứng minh rằng tồn tại cặp chỉ số p và q sao cho $a_p \leqslant a_q$ và $b_p \leqslant b_q$.*

Giải. Chọn dãy các chỉ số i_n tăng theo cách sau đây :
Chọn a_{i_1} là một trong các số bé nhất của dãy, a_{i_2} là một trong các số bé nhất của dãy $a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, \ldots, \ldots$. Khi đó rõ ràng dãy nhận được là một dãy số tự nhiên tăng dần. Giả sử b_{i_k} là số nhỏ nhất trong dãy $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots$. Khi đó rõ ràng $i_k < i_{k+1}$, $a_{i_k} \leqslant a_{i_{k+1}}$ và $b_{i_k} \leqslant b_{i_{k+1}}$. Ta chọn $p = i_k$, $q = i_{k+1}$, thì cặp p, q sẽ thoả mãn điều kiện bài ra.

Bài toán 8. *Cho số dương x và hai dãy các số $\{a_n(x)\}$ và $\{b_n(x)\}$ được xác định như sau :*

$$a_n(x) = [nx],\ \ b_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{[jx]}{j}.$$

Chứng minh rằng $a_n(x) \geqslant b_n(x)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải. Ta viết $x = [x] + \{x\}$. Khi đó bất đẳng thức $a_n(x) \geqslant b_n(x)$ tương đương với

$$[n\{x\}] \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{[j\{x\}]}{j}. \tag{2.1}$$

Vì vế trái là hàm hằng từng khúc nên ta chỉ cần chứng minh (2.1) cho các nút dạng $\{x\} = \dfrac{p}{q}$ $((p, q) = 1,\ 1 \leqslant p \leqslant q-1,\ 2 \leqslant q \leqslant n)$ mà tại đó có sự thay đổi giá trị của hàm số. Ký hiệu $u_k = \Big[\dfrac{p}{q}k\Big]$, $v_k = q\Big\{\dfrac{p}{q}k\Big\}$thì

$$0 \leqslant v_k < q,\ \ v_k = kp - qu_k, \tag{2.2}$$

và

$$(2.1) \Leftrightarrow u_n \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j}{j}.$$

Do $(p, q) = 1$ nên các số $v_1, v_2, \ldots, v_{q-1}$ khác 0 và đôi một khác nhau. Suy ra chúng trùng với bộ số $\{1, 2, \ldots, q-1\}$ và vì vậy theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân thì

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{[v_j]}{j}}{q-1} \geq \frac{\sum\limits_{j=1}^{q-1} \dfrac{[v_j]}{j}}{q-1} \geqslant 1.$$

Suy ra

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{[v_j]}{j} \geqslant q-1,$$

và theo (2.2) thì

$$\begin{aligned} u_n + \frac{q-1}{q} &\geq u_n + \frac{v_n}{q} = \frac{np}{q} = \frac{p}{q} + \frac{2p}{2q} + \cdots + \frac{np}{nq} \\ &= \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n} + \frac{1}{q}\Big(\frac{v_1}{1} + \cdots + \frac{v_n}{n}\Big) \\ &\geqslant \frac{u_1}{1} + \cdots + \frac{u_n}{n} + \frac{q-1}{q}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$u_n \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j}{j}.$$

Từ đó, dễ dàng suy ra $a_n(x) \geqslant b_n(x)$ với mọi $x \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 9. *Cho dãy số dương $\{a_n\}$ với $a_1 = 1$ và dãy số $\{b_n\}$ xác định như sau :*

$$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng

$$b_n \geqslant (\sqrt{a_2} - 1)^2, \;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Đặt

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \;\; ; \;\; G_k = \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} \;\; (k \in \{2, \ldots, n\}).$$

Trước hết, ta chứng minh rằng

$$(k+1)(A_{k+1} - G_{k+1}) \geqslant k(A_k - G_k). \tag{2.3}$$

Thật vậy, nếu đặt

$$x = \sqrt[k+1]{a_{k+1}} \;\; ; \;\; g = \sqrt[k+1]{G_k},$$

thì ta có

$$(k+1)A_{k+1} = kA_k + a_{k+1} = kA_k + x^{k+1} \;\; ; \;\; G_{k+1} = \sqrt[k+1]{G_k^k x^{k+1}} = g^k x.$$

Do đó có thể viết (3) thành

$$kA_k + x^{k+1} - (k+1)g^k x \geqslant kA_k - kg^{k+1}.$$

Suy ra

$$x^{k+1} - (k+1)g^k x + kg^{k+1} \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Đặt

$$f(x) = x^{k+1} - (k+1)g^k x + kg^{k+1}.$$

Dễ thấy

$$f(x) = (x-g)^2(x^{k-1} + 2gx^{k-2} + \ldots + kg^{k-1}),$$

nên $f(x) \geqslant 0$, tức (2.3) đúng.
Từ (2.3), ta được

$$n(A_n - G_n) \geqslant (n-1)(A_{n-1} - G_{n-1}) \geqslant \ldots \geqslant 2(A_2 - G_2) = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2.$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

Bài toán 10. *Xét dãy số nguyên dương $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện*

$$a_n > a_{n-1}a_{n+1},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng

$$a_n > n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Nhận xét rằng dãy $\{a_n\}$ là một dãy tăng thực sự. Thật vậy, nếu xảy ra một trường hợp $a_{k+1} \leqslant a_k$ thì do giả thiết $a_{k+1} > a_k a_{k+2}$ ta thu được $a_{k+1} > a_{k+2}$ và cứ như thế ta thu được một dãy số nguyên dương giảm thực sự, điều này là không thể.

Do $a_1 > a_0 \geqslant 1$ nên theo quy nạp ta có ngay $a_n > n$.

Bài toán 11. *Cho số nguyên dương N và dãy các số thực dương $\{a_k\}$ thoả mãn điều kiện $a_1 + a_2 + \cdots + a_N \geqslant N$. Lập dãy số $\{s_n\}$ như sau :*

$$s_n = \frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_N^n}{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_N^{n+1}}.$$

Chứng minh rằng

$$s_n \leqslant 1,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Nhận xét rằng, ta luôn có

$$(a-1)(a^n - 1) \geqslant 0.$$

Suy ra

$$a^{n+1} - a^n \geqslant a - 1,$$

và

$$\begin{aligned}(a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_N^{n+1}) - (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_N^n) &\geq \\ \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_N - N &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Vậy nên

$$s_n \leqslant 1,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài toán 12. *Cho số nguyên dương* M, N *và dãy các số thực dương* $a_1, a_2, \dots, a_N$. *Lập các dãy số* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ *như sau :*

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a_1^M}{a_2^n} + \frac{a_2^M}{a_3^n} + \cdots + \frac{a_{N-1}^M}{a_N^n} + \frac{a_N^M}{a_1^n}, \\ v_n &= a_1^{M-n} + a_2^{M-n} + \cdots + a_N^{M-n}. \end{aligned}$$

Chứng minh rằng

$$u_n \geqslant v_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Nhận xét rằng khi $n = M$ thì theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$u_n = \frac{a_1^M}{a_2^n} + \frac{a_2^M}{a_3^n} + \cdots + \frac{a_{N-1}^M}{a_N^n} + \frac{a_N^M}{a_1^n} \geqslant N = v_n.$$

Khi $n < M$ thì cũng theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta thu được

$$(M-n)\frac{a_1^M}{a_2^n} + na_2^{M-n} \geqslant Ma_1^{M-n},$$

$$(M-n)\frac{a_2^M}{a_3^n} + na_3^{M-n} \geqslant Ma_2^{M-n},$$

$$\dots$$

$$(M-n)\frac{a_N^M}{a_1^n} + na_1^{M-n} \geqslant Ma_N^{M-n}.$$

Cộng các vế tương ứng, ta được

$$(M-n)u_n + nv_n \geqslant Mv_n.$$

Do đó $u_n \geqslant v_n$.
Trường hợp $n > M$ được xét hoàn toàn tương tự.

Bài toán 13. *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *sao cho ứng với mỗi cặp chỉ số* m, n *cho trước ta đều có*

$$-1 \leqslant a_{m+n} - a_m - a_n \leqslant 1.$$

Chứng minh rằng khi đó ứng với mọi cặp chỉ số p, q*, ta đều có*

$$\left|\frac{a_p}{p} - \frac{a_q}{q}\right| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Giải. Theo giả thiết thì

$$a_{m+n} - 1 \leqslant a_m + a_n \leqslant a_{m+n} + 1.$$

Chứng minh bằng quy nạp, ta có

$$a_{pq} - (q-1) \leqslant qa_p \leqslant a_{pq} + (q-1),$$

và

$$(q+1)a_p \geqslant a_{p(q+1)} - q.$$

Thay đổi vai trò của p và q, ta được

$$a_{pq} - (p-1) \leqslant pa_q \leqslant a_{pq} + (p-1).$$

Do đó

$$|pa_q - qa_p| \leqslant \max\{|a_{pq} + (p-1) - [a_{pq} - (q-1)]|, |a_{pq} + (q-1) - [a_{pq} - (p-1)]|\}.$$

Suy ra

$$|pa_q - qa_p| \leqslant p + q - 2 < p + q.$$

Từ đây ta có

$$\Big|\frac{a_p}{p} - \frac{a_q}{q}\Big| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Ta nhắc lại bài toán quen biết đã được đề cập ở Chương 3.

Bài toán 14. *Cho dãy số dương $\{a_n\}$. Lập các dãy trung bình cộng $\{S_n\}$ và dãy trung bình nhân $\{G_n\}$ của dãy đã cho như sau :*

$$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \ \ G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Chứng minh rằng

$$S_n - G_n \geqslant \frac{n-1}{n}(S_{n-1} - G_{n-1}) \ \ (n = 2, 3, \ldots).$$

Giải. Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli

$$x^n + n - 1 \geqslant nx, \ \ x \geqslant 0, \, n > 1,$$

với $x = \dfrac{G_n}{G_{n-1}}$, ta thu được

$$S_n \geqslant \frac{G_{n-1}}{n}\Big[(n-1)\frac{S_{n-1}}{G_{n-1}} - (n-1) + n\frac{G_n}{G_{n-1}}\Big].$$

Suy ra

$$S_n - G_n \geqslant \frac{n-1}{n}(S_{n-1} - G_{n-1}) \ \ (n = 2, 3, \ldots).$$

Bài toán 15. *Cho ba dãy số dương* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *được xác định như sau :*

$$\begin{aligned} &a_0 = b_0 = c_0 = 1,\\ &a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n c_n},\ \ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n c_n},\ \ c_{n+1} = c_n + \frac{1}{b_n a_n},\ \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Chứng minh rằng

$$a_n \geqslant q\sqrt[3]{n},\ \ b_n \geqslant q\sqrt[3]{n},\ \ c_n \geqslant q\sqrt[3]{n} \textit{với } 0 < q \leqslant \sqrt[3]{3}.$$

Giải. Từ giả thiết suy ra

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + \frac{1}{a_n b_n c_n}.$$

Do đó

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n} = \cdots = \frac{a_0}{b_0} = 1,$$

và

$$\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{a_n}{c_n} = \cdots = \frac{a_0}{c_0} = 1.$$

Vậy nên

$$a_{n+1} = a_n + \Big(\frac{a_n}{b_n}\Big)\Big(\frac{a_n}{c_n}\Big)\frac{1}{a_n^2} = a_n + \frac{1}{a_n^2}.$$

Từ đó suy ra

$$a_{n+1}^3 = \Big(a_n + \frac{1}{a_n^2}\Big)^3 > a_n^3 + 3 > \cdots > a_0^3 + 3(n+1) > 3(n+1),$$

tức là $a_n > \sqrt[3]{3n}$.
Chứng minh tương tự, ta có $b_n > \sqrt[3]{3n}$ và $c_n > \sqrt[3]{3n}$.

Bài toán 16. *Cho cặp số dương* a, b *(*$a \leqslant b$*) và hai dãy các số* $\{a_n(x)\}$ *và* $\{b_n(x)\}$ *được xác định như sau :*

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_{n+1} = 2(a_n + b_n),$$

$$b_{n+1} = \frac{(a_n + b_n)(a_n^2 + b_n^2)}{a_n b_n},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng

$$4^n(a+b) \leqslant a_{n+1} + b_{n+1} \leqslant 2^{2n+1}\sqrt{ab}\Big(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\Big)^{3^n}.$$

Giải. Theo giả thiết thì $a_n > 0$, $b_n > 0$ với mọi $n \geqslant 1$ và

$$b_{n+1} = \frac{(a_n + b_n)(a_n^2 + b_n^2)}{a_n b_n} \geqslant \frac{(a_n + b_n)2a_n b_n}{a_n b_n} = 2(a_n + b_n).$$

Suy ra

$$a_{n+1} + b_{n+1} \geqslant 4(a_n + b_n) \geqslant 4^2(a_{n-1} + b_{n-1}) \geq \ldots \geqslant 4^n(a + b).$$

Tương tự ta có

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{2(a_n + b_n)^2(a_n^2 + b_n^2)}{a_n b_n} \geqslant 16a_n b_n \geq \ldots \geqslant 16^n ab.$$

Vậy nên

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= \frac{(a_n + b_n)^3}{a_n b_n} \leqslant \frac{(a_n + b_n)^3}{16^{n-1}ab} \\ &\leqslant \frac{(a_{n-1} + b_{n-1})^{3^2}}{16^{(n-1)+(n-2)3}(ab)^{1+3}} \leq \cdots \\ &\leqslant \frac{(a_1 + b_1)^{3^n}}{16^{(n-1)+(n-2)3+\cdots+2.3^{n-3}+3^{n-2}}(ab)^{1+3+\cdots+3^{n-2}}} \\ &\leqslant 2^{2n+1}\sqrt{ab}\Big(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\Big)^{3^n}. \end{aligned}$$

Bài toán 17. *Xét dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} 0 < a_n < 1 \\ a_{n+1}(1 - a_n) \geq \dfrac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < a_n \leqslant \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Bất đẳng thức

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < a_n$$

có thể dễ dàng chứng minh được bằng phương pháp quy nạp.
Thật vậy, ta có $a_1 > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}$ (đúng). Giả sử $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2k} < a_k$. Suy ra

$$1 - a_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} = \frac{k+1}{2k}.$$

Từ giả thiết

$$a_{k+1}(1-a_k) \geq \frac{1}{4},$$

suy ra

$$a_{k+1} > \frac{1}{4(1-a_k)} > \frac{2k}{4(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}$$

(điều phải chứng minh).

Để chứng minh bất đẳng thức $a_n \leqslant \frac{1}{2}$, ta sử dụng hệ thức

$$a_n(1-a_n) \leq \frac{1}{4} \leqslant a_{n+1}(1-a_n).$$

Suy ra $a_n \leqslant a_{n+1}$ và dãy $\{a_n\}$ bị chặn trên nên có giới hạn a với $a(1-a) = \frac{1}{4}$. Do đó $a = \frac{1}{2}$ và $a_n \leqslant \frac{1}{2}$.

6.4 Sắp thứ tự các trung bình của bộ số với trọng

Như đã thấy ở phần trên, bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân chỉ là sự sắp được của hai phần tử trong một dãy biểu thức sắp được thứ tự. Các biểu thức này chính là những hàm đối xứng sơ cấp. Tiếp theo, ta xét một số mở rộng các dạng trung bình sinh bởi các đa thức đối xứng. Các mở rộng này, chủ yếu dựa trên các tính chất của hàm số như tính đơn điệu (tựa đơn điệu) để so sánh , tính lồi, lõm (tựa lồi, lõm) để sắp thứ tự theo các đặc trưng cho trước.

Xét bộ n số dương tuỳ ý

$$(x) := (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

và bộ hệ số dương (thường được gọi là trọng đơn vị)

$$(\alpha) := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Định nghĩa 21. *Xét các số thực $h \neq 0$. Khi đó tổng $M_h(x,\alpha)$ xác định theo công thức*

$$M_h(x,\alpha) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h\Big)^{\frac{1}{h}},$$

được gọi là trung bình bậc h (theo trọng (α)).

Nhận xét rằng, ứng với $h = -1$, $h = 1$ và $h = 2$, ta lần lượt nhận được các trung bình điều hoà, trung bình cộng và trung bình nhân.

Định lý 85. *Với mỗi bộ n số dương (x) và trọng (α), ta đều có*

$$\lim_{h\to 0} M_h(x,\alpha) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \tag{6.1}$$

tức là, giới hạn là một trung bình nhân suy rộng.

Proof. Trước hết, ta tính giới hạn

$$\lim_{h\to 0} \ln(M_h(x,\alpha)) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h}{h}.$$

Theo quy tắc L'Hospital, ta tính được

$$\lim_{h\to 0} \ln(M_h(x,\alpha)) = \lim_{h\to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h \ln x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i = \ln\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}\Big).$$

Từ đây, dễ dàng suy ra (6.1). □

Định lý 86. *Với mỗi bộ n số dương (x) trọng (α), ta đều có*

$$\lim_{h\to +\infty} M_h(x,\alpha) = \max\{x_i;\ i = 1, 2, \dots, n\}. \tag{6.2}$$

Proof. Thật vậy, nếu đặt

$$x_s = \max\{x_i;\ i = 1, 2, \dots, n\},$$

thì với mọi $h > 0$, ta có

$$\alpha_s^{\frac{1}{h}} x_s \leqslant M_h(x,\alpha) \leqslant x_s.$$

Từ đây, chuyển qua giới hạn ta thu được (6.2). □

Hoàn toàn tương tự, bằng cách đặt chuyển qua giới hạn khi $h \to -\infty$, ta có

Định lý 87. *Với mỗi bộ n số dương (x) trọng (α), ta đều có*

$$\lim_{h\to -\infty} M_h(x,\alpha) = \min\{x_i;\ i = 1, 2, \dots, n\}. \tag{6.3}$$

Proof. Thật vậy, để ý rằng

$$M_{-h}(x,\alpha)=\frac{1}{M_h\Big(\dfrac{1}{x},\alpha\Big)},\ \ \forall h<0.$$

Từ đây, chuyển qua giới hạn ta có ngay (6.3). □

Từ các kết qủa trên, ta quy ước:

$$M_0(x,\alpha)=\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},$$

$$M_{-\infty}(x,\alpha)=\min\{x_i;\ \ i=1,2,\dots,n\},$$

$$M_{+\infty}(x,\alpha)=\max\{x_i;\ \ i=1,2,\dots,n\}.$$

Từ thứ tự sắp được

$$\min\{x_i;\ \ i=1,2,\dots,n\}\leqslant\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}\leqslant\max\{x_i;\ \ i=1,2,\dots,n\},$$

ta có thứ tự sắp được

$$M_{-\infty}(x,\alpha)\leqslant M_0(x,\alpha)\leqslant M_{+\infty}(x,\alpha),$$

ứng với sự sắp thứ tự tự nhiên theo chiều tăng dần

$$-\infty,\ \ 0,\ \ +\infty.$$

Bây giờ ta có thể chứng minh một kết qủa mạnh hơn rằng, dãy $M_h(x,\alpha)$ là sắp được theo h như là một hàm đồng biến của hàm số biến $h\in\mathbb{R}$.

Bài toán 18. *Với mỗi bộ n số dương* (x) *trọng* (α)*, ta đều có*

$$\frac{dM_h(x,\alpha)}{dh}\geqslant 0,\ \ \forall h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Proof. Thật vậy, để ý rằng

$$\frac{h^2}{M_h(x,\alpha)}\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i^h\frac{dM_h(x,\alpha)}{dh}=$$

$$=\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i^h\ln x_i^h-\Big(\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i^h\Big)\ln\Big(\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i^h\Big). \tag{6.4}$$

Mặt khác, dễ dàng kiểm tra tính lồi của hàm số $g(x) := x\ln x$ trong $(0,+\infty)$. Thật vậy, ta có $g''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ ứng với mọi $x > 0$. Do vậy, với $g(x)$ (là hàm lồi), ta thu được

$$g(x_i) \geqslant f(x) + (x_i - x)g'(x),\ \ \forall x, x_i > 0.$$

Từ đây, chọn $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, ta được

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(x_i) \geqslant g\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big)$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ln x_i \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) \ln \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big). \tag{6.5}$$

Dấu đẳng thức trong (5) xảy ra khi và chỉ khi các số x_i đều nhận giá trị bằng nhau. Từ (6.4) và (6.5) ta suy ra

$$\frac{dM_h(x,\alpha)}{dh} \geqslant 0,\ \ \forall h \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

Như vậy, nếu các số x_i không nhận giá trị bằng nhau thì $M_h(x,\alpha)$ là một hàm đồng biến theo biến $h \in \mathbb{R}$. Đồ thì của hàm $y = M_h(x,\alpha)$ có hai tiệm cận ngang $y = \min\{x_i;\ \ i = 1, 2, \dots, n\}$ và $y = \max\{x_i;\ \ i = 1, 2, \dots, n\}$.

Bài toán 19. *Với mỗi bộ n số dương (x) trọng (α), ta đều có*

$$f(h) = h \ln M_h(x,\alpha)$$

là một hàm lồi trên $\mathbb{R}$.

Proof. Vì $f(h)$ là hàm khả vi, nên ta kiểm tra tính lồi trực tiếp thông qua tính đạo hàm của hàm số

$$f(h) = \ln\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h)\Big).$$

Ta có

$$f'(h) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h \ln x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h},$$

$$f''(h) = \frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h (\ln x_i)^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h \ln x_i\Big)^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^h\Big)^2}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^h\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^h(\ln x_i)^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^h \ln x_i\Big)^2 \geqslant 0,$$

nên kéo theo $f''(h) \geqslant 0$. □

Từ đây, ta nhận được kết qủa của một bài toán tìm giá trị nhỏ nhất liên quan đến dạng trung bình bậc h có trọng.

Bài toán 20. *Với mỗi bộ n số dương (x) trọng (α), xét bộ các số h_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) với tổng*

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i = S,$$

không đổi. Khi đó

$$\prod_{i=1}^{n} M_{h_i}^{\alpha_i h_i} \geqslant M_S^S. \tag{6.6}$$

Proof. Theo Bài toán 5 thì hàm số

$$f(h) = \ln\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^h)\Big)$$

là hàm lồi khả vi bậc hai nên

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i) \geqslant f\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big).$$

Từ đây, ta có ngay (6.6), đpcm. □

6.5 Sắp thứ tự các tổng của bộ số theo bậc của chúng

Xét bộ n số dương tuỳ ý

$$(x) := (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Cũng tương tự như đối với trung bình $M_h(x, \alpha)$ trong mục trước, ta xét tổng bậc h đối với bộ (x).

Định nghĩa 22. *Xét các số thực $h \neq 0$. Khi đó tổng $S_h(x)$ xác định theo công thức*

$$S_h(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^h\Big)^{\frac{1}{h}}, \tag{7.1}$$

được gọi là tổng bậc h của bộ số (x).

Tính đơn điệu của tổng $S_h(x)$ dạng (7.1) được phát biểu dưới dạng sau.

Bài toán 1. *Với mỗi bộ n số dương (x), tổng $S_h(x)$ nghịch biến trong $(-\infty, 0)$ và trong $(0, +\infty)$. Ngoài ra,*

$$\lim_{h\to-\infty} S_h(x) = \min\{x_i;\ i = 1, 2, \dots, n\}$$

và

$$\lim_{h\to+\infty} S_h(x) = \max\{x_i;\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Proof. Vì $S_h(x)$ khả vi trong các khoảng $(-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$, nên ta kiểm tra tính đơn điệu trực tiếp bằng tính đạo hàm và xét dấu của nó trong các khoảng tương ứng. Sử dụng đẳng thức

$$h \ln S_h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^h$$

để tính đạo hàm hai vế theo h, ta dễ dàng suy ra kết luận của bài toán. □

Bài toán 2. *Với mỗi bộ n số dương (x), hàm số sau: $f(h) := h \ln S_h(x)$, là một hàm lồi theo h.*

Proof. Chứng minh được suy ra từ tính chất lồi của hàm số (xem Bài toán 5 ở mục trên) ư$F(h) := h \ln M_h(x, \alpha)$. □

Tương tự, dễ dàng kiểm tra tính lồi của các hàm số $g_1(h) = S_h(x)$ và $g_2(h) := \ln S_h(x)$ trong $(0, +\infty)$. Từ đây, ta thu được

Hệ quả 24. *Với mỗi bộ n số dương (x) và bộ số dương (α), xét các bộ số $(h) = h_1, h_2, \dots, h_n$ sao cho tổng*

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_n h_n = M$$

không đổi. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i S_{h_i}^{\alpha_i} \geqslant S_M(x).$$

Hệ quả 25. *Với mỗi bộ n số dương (x) và bộ số dương (α), xét các bộ số $(h) = h_1, h_2, \ldots, h_n$ sao cho tổng*

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_n h_n = M$$

không đổi. Khi đó

$$\prod_{i=1}^{n} S_{h_i}^{\alpha_i} \geqslant S_M(x).$$

6.6 Bài tập

Bài 1. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < 2, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 2. *Cho $0 < x \leqslant y \leqslant z$, và $2x + 3y + 5z = 10$. Hỏi giá trị lớn nhất của xyz?*

Bài 3. *Cho $x \leqslant y \leqslant z$ và $\sqrt{2}x + 2y + \sqrt{5}z = 2(\sqrt{2} + 2 + \sqrt{5})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + 2y + 3z$*

Bài 4. *Cho $x \leqslant y \leqslant z$ và $3z + 10y + 21z = 102$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức $4x + 7y + 10z$ và $5x + 9y + 13z$*

Bài 5. *Cho $x \geqslant y \geqslant z$ và $3z + 2y + z = 12$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức $\sqrt{5}x + 2y + z$*

Bài 6. *Chứng minh rằng từ bốn số dương cho trươc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ta luôn luôn tìm được cặp số α_i, α_j với $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ sao cho*

$$0 \leqslant \frac{\alpha_i - \alpha_j}{1 + \alpha_i + \alpha_j + 2\alpha_i\alpha_j} < 2 - \sqrt{3}.$$

Bài 7. *Chứng minh rằng từ 13 số thực phân biệt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{13}$ ta luôn luôn tìm được cặp số α_i, α_j với $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ sao cho*

$$0 < \frac{\alpha_i - \alpha_j}{1 + \alpha_i\alpha_j} < 2 - \sqrt{3}.$$

Bài 8. *Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng*

$$|16(x^5 + y^5) - 20(x^3 + y^3) + 5(x + y)| \leqslant \sqrt{2}.$$

Bài 9. *Cho* $x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 0$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_n+1} \geqslant \frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+1}.$$

Bài 10. *Trên mặt phẳng cho* $2n+1$ *đường thẳng. Gọi* $f(n)$ *là số tam giác nhọn có các cạnh nằm trên các đường thẳng đó. Chứng minh rằng*

$$f(n) \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bài 11. *Tìm* $n \in \mathbb{N}$ *để bất đẳng thức sau đúng với mọi bộ số thực* $x_1, x_2, \dots, x_n$*:*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})x_n.$$

Bài 12. *Cho các số* $x_1, x_2, \dots, x_{2002} \in [1; 2]$ *thoả mãn điều kiện*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2002} = 2010.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2002}^3.$$

Bài 13. *Cho các số* $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}; 2 \leqslant n \in \mathbb{N},\ a < b$, *thoả mãn điều kiện*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a - x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b - x_k}.$$

Chứng minh rằng

$$b - a > \min_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \Big(x_{k+1} - x_k \Big).$$

Bài 14. *Cho dãy các số tự nhiên tăng* $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}}{\alpha_2} + \frac{\sqrt{\alpha_3 - \alpha_2}}{\alpha_3} + \cdots + \frac{\sqrt{\alpha_n - \alpha_{n-1}}}{\alpha_n} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Chương 7

Bất đẳng thức hàm

Nội dung của các bài toán liên quan đến bất đẳng thức hàm được xét trong chương này gắn với việc xác định các lớp hàm số cụ thể theo các ràng buộc cho trước. Chẳng hạn, khi ta xét cặp số $x, y \geqslant 0$ thoả mãn ràng buộc $x + y = 1$ thì ta có hàng loạt bất đẳng thức liên quan đến cặp số x, y này, như

$$\begin{aligned}
&2(x^2 + y^2) \geqslant 1\\
&4(x^3 + y^3) \geqslant 1\\
&\sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant 1\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

thì câu hỏi tự nhiên nảy sinh là:

Với những hàm số $f(x)$ nào xác định trên $[0, 1]$ có tính chất

$$f(x) + f(y) \geqslant 1$$

ứng với mọi cặp số $x, y \geqslant 0$ thoả mãn ràng buộc $x + y = 1$.

Những bài toán như vậy thường được gọi là bất đẳng thức hàm thuộc các dạng toán về bất phương trình hàm.

Trước hết, ta xét một trong những mở rộng lớp bài toán ứng dụng rộng rãi là việc xây dựng bất đẳng thức dạng Cauchy cho lớp hàm số (trừu tượng) tổng quát thay thế hàm bình phương. Ta có kết quả sau đây mô tả lớp hàm có tính chất như hàm bậc hai.

Định lý 88. *Để bất đẳng thức*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(a_i, b_i) \sum_{i=1}^{n} g(a_i, b_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

nghiệm đúng với mọi cặp dãy số dương $a = (a_1, \dots, a_n)$ và $b = (b_1, \dots, b_n)$, điều kiện cần và đủ là
(i) $f(a, b)g(a, b) = a^2b^2$,
(ii) $f(ka, kb) = k^2 f(a, b), \ \ k > 0$,
(iii) $\dfrac{bf(a,1)}{af(b,1)} + \dfrac{af(b,1)}{bf(a,1)} \leqslant \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$.

Proof. Điều kiện cần

Thật vậy, ứng với $n = 1$, bất đẳng thức có dạng

$$(ab)^2 \leqslant f(a, b)g(a, b) \leqslant a^2b^2$$

chính là điều kiện cần kiểm chứng.

Với $n = 2$, ta có

$$2a_1b_1a_2b_2 \leqslant f(a_1, b_1)g(a_2, b_2) + f(a_2, b_2)g(a_1, b_1) \leqslant a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2.$$

Xét ước lượng đối với hàm $g(x)$.

$$2 \leqslant \frac{f(a_1, b_1)}{f(a_2, b_2)}\frac{a_2b_2}{a_1b_1} + \frac{f(a_2, b_2)}{f(a_1, b_1)}\frac{a_1b_1}{a_2b_2} \leqslant \frac{a_1b_2}{a_2b_1} + \frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

Thay a_1, b_1 bởi a, b và a_2, b_2 bởi ka, kb ($k > 0$), ta thu được

$$2 \leqslant \frac{f(a, b)}{f(ka, kb)}k^2 + \frac{f(ka, kb)}{f(a, b)}k^{-2} \leqslant 2$$

và điều này xảy ra chỉ khi $\dfrac{k^2f(a, b)}{f(ka, kb)} = 1$, tức điều kiện (ii) được thoả mãn. Tiếp theo, ta viết

$$2 \leqslant \frac{\frac{f(a,1)}{a}}{\frac{f(b,1)}{b}} + \frac{\frac{f(b,1)}{b}}{\frac{f(a,1)}{a}} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

Bất đẳng thức đầu luôn thoả mãn, còn bất đẳng thức thứ hai tương đương với (iii).

Điều kiện đủ

Giả thiết các điều kiện (i)-(iii) được thoả mãn. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ib_ia_jb_j &\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (f(a_i, b_i)g(a_j, b_j) + f(a_j, b_j)g(a_i, b_i)) \\ &\leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2) \end{aligned}$$

Vì vậy, chỉ cần kiểm tra bất đẳng thức

$$2a_ib_ia_jb_j \leqslant f(a_i,b_i)g(a_j,b_j) + f(a_j,b_j)g(a_i,b_i) \leqslant a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2.$$

Ta có

$$2 \leqslant \frac{\frac{f(a,1)}{a}}{\frac{f(b,1)}{b}} + \frac{\frac{f(b,1)}{b}}{\frac{f(a,1)}{a}} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

thoả mãn và đặt $a = \dfrac{a_i}{b_i}, b = \dfrac{a_j}{b_j}$, ta thu được

$$2 \leqslant \frac{f(a_i,b_i)}{f(a_j,b_j)}\frac{a_jb_j}{a_ib_i} + \frac{f(a_j,b_j)}{f(a_i,b_i)}\frac{a_ib_i}{a_jb_j} \leqslant \frac{a_ib_j}{a_jb_i} + \frac{a_jb_i}{a_ib_j}.$$

Nhân bất đẳng thức cuối với $a_ib_ia_jb_j$, ta thu được đpcm. □

Ví dụ 20 (E.A.Milne).

$$f(x,y) = x^2 + y^2, g(x,y) = x^2y^2/(x^2 + y^2).$$

Ví dụ 21 (D.K.Callebaut).

$$f(x,y) = x^{1+\alpha} + y^{1-\alpha}, g(x,y) = x^{1+\alpha}y^{1-\alpha}.$$

7.1 Hàm khoảng cách

7.1.1 Hàm khoảng cách một biến

Với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ ta đặt tương ứng một điểm $A(x,0)$ trên trục hoành của mặt phẳng toạ độ Đề-các. Nhận xét rằng phép tương ứng đó là một-một và khoảng cách từ A đến gốc toạ độ $O(0,0)$ được tính bằng công thức $\rho(OA) = \rho(x) = |x|$. Khi đó, hàm $\rho(x)$ có các tính chất sau:

(i) $\rho(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \rho(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0,$

(ii) $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y),\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Trong mục này, ta sẽ khảo sát các hàm số có tính chất như hàm $\rho(x)$ và một số hàm số liên quan.

Định nghĩa 23. *Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ được gọi là hàm khoảng cách nếu nó thoả mãn đồng thời các tính chất sau:*

(i) $f(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0,$ (1.1)

(ii) $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y),\ \forall x \in \mathbb{R}.$ (1.2)

Bài toán 1. *Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|^\alpha$ là hàm khoảng cách khi và chỉ khi $\alpha \in (0, 1]$.*

Bài giải. Nhận xét rằng hàm số $f(x) = |x|^\alpha$ thoả mãn điều kiện (1.1) khi và chỉ khi $\alpha > 0$. Xét điều kiện (1.2). Với $x + y = 0$ thì (1.2) luôn luôn thoả mãn.

Xét trường hợp $x + y > 0$. Khi đó

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right| = 1.$$

Vì vậy

$$\left|\frac{x}{x+y}\right|^\alpha + \left|\frac{y}{x+y}\right|^\alpha \geqslant 1, \ \ \forall\alpha \in (0, 1]$$

và

$$\left|\frac{x}{x+y}\right|^\alpha + \left|\frac{y}{x+y}\right|^\alpha \leqslant 1, \ \ \forall\alpha \in (1, +\infty).$$

Vậy, khi $\alpha > 1$ thì hàm số $f(x) = |x|^\alpha$ không thoả mãn điều kiện (1.2).

Xét trường hợp $x + y < 0$. Khi đó

$$|x + y| \leqslant \max\{|x|, |y|\}$$

nên

$$|x + y|^\alpha \leqslant |x|^\alpha + |y|^\alpha, \ \ \forall\alpha > 0.$$

Vậy, hàm số $f(x) = |x|^\alpha$ là hàm khoảng cách khi và chỉ khi $\alpha \in (0, 1]$.

7.1.2 Hàm khoảng cách hai biến

Tương tự, đối với trường hợp hai chiều, ứng với mỗi cặp số thực $x, y \in \mathbb{R}$ ta đặt tương ứng một điểm $A(x, y)$ trên mặt phẳng toạ độ Đề-các (Oxy). Nhận xét rằng phép tương ứng đó là một-một và khoảng cách từ A đến điểm $B(x_1, y_1)$ được tính bằng công thức

$$\rho(AB) := \rho(x - x_1, y - y_1) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}.$$

Trường hợp riêng, khoảng cách từ A đến gốc toạ độ $O(0, 0)$ được tính bằng công thức

$$\rho(OA) = \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Khi đó, hàm $\rho(x)$ có các tính chất sau:

(i) $\rho(x, y) \geqslant 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \rho(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ (x, y) = (0, 0)$,

(ii) $\rho(AC) \leqslant \rho(AB) + \rho(BA), \ \forall A, B, C$.

Tiếp theo, ta sẽ khảo sát các hàm số có tính chất tương tự như hàm $\rho(x, y)$ và một số hàm số liên quan.

Định nghĩa 24. *Hàm số $f(x, y)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ được gọi là hàm khoảng cách nếu nó thoả mãn đồng thời các tính chất sau:*

$$
\begin{aligned}
&f(x, y) = f(y, x), \;\; f(x, y) \geqslant 0 \;\; \forall x, y \in \mathbb{R},\\
&f(x, y) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; (x, y) = (0, 0),\\
&f(x_1 - x_3, y_1 - y_3) \leqslant f(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + f(x_2 - x_3, y_2 - y_3), \forall x_j, y_j \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Bài toán 2. *Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện*
(i) $f(x, y) = f(y, x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,
(ii) $f(x, ky_1 + y_2) = k(f(x, y_1) + f(x, y_2)$ với mọi $k, x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,
(iii) $f(x, x) \geqslant 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x, x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.
Chứng minh rằng hàm số $f(x, y)$ thoả mãn các điều kiện
a) $|f(x, y)|^2 = f(x, x)f(y, y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,
b) $\sqrt{f(x + y, x + y)} \leqslant \sqrt{f(x, x)} + \sqrt{f(y, y)}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài giải. Từ điều kiện (ii) với $y_1 = y_2 = y$, ta được

$$f(x, (k + 1)y) = (k + 1)f(x, y)$$

hay

$$f(x, ky) = kf(x, y), \;\; \forall k, x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra

$$f(x, y) = f(x, y1) = yf(x, 1) = yf(1, x) = xyf(1, 1). \tag{1.4}$$

Vậy nên

$$f(x, x) = x^2 f(1, 1), \;\; f(y, y) = y^2 f(1, 1). \tag{1.5}$$

Từ (1.4) và (1.5), ta thu được

$$|f(x, y)|^2 = f(x, x)f(y, y) \;\text{ với mọi }\; x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ (1.4) ta được

$$f(x + y, x + y) = (x + y)^2 f(1, 1). \tag{1.6}$$

Từ (1.5) và (1.6) ta có ngay đpcm.

Bài toán 3. *Cho $p > 1$. Chứng minh rằng hàm số*

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

thoả mãn điều kiện

$$f(x + y) \leqslant f(x) + f(y), \;\; \forall x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Bài giải. Nhận xét rằng (1.7) chính là hệ quả của bất đẳng thức Mincovski. Thật vậy, ta có

$$f(x+y) = \Big[\sum_{i=1}^{n}(|x_i + y_i|)^p\Big]^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big[\sum_{i=1}^{n}(|x_i| + |y_i|)^p\Big]^{\frac{1}{p}}$$

Theo bất đẳng thức Mincovski thì

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}(|x_i| + |y_i|)^p\Big]^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = f(x) + f(y).$$

Vậy nên

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$$

Bài toán 4. *Chứng minh rằng hàm số* $f(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ *là hàm khoảng cách khi và chỉ khi* $p \geqslant 1$.

Bài giải. Nhận xét rằng hàm số $f(x,y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ thoả mãn điều kiện (1.6) khi và chỉ khi $p > 0$. Xét điều kiện (1.7).

Với $p = 1$ thì (1.7) hiển nhiên thoả mãn. Xét trường hợp $p > 1$. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Holder cho cặp số (p, q) với $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ta thu được

$$(|x_1 - x_3|^p + |y_1 - y_3|^p) = (|(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)|^p + |(y_1 - y_2) + (y_2 - y_3)|^p)$$

7.1.3 Hàm khoảng cách nhiều biến

Bây giờ ta chuyển sang xét lớp hàm số nhiều biến dạng $F(\bar{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có tính chất

$$\begin{cases} F(\bar{x}) > 0 \ \ \forall \bar{x} \neq \bar{0} \\ F(t\bar{x}) = tF(\bar{x}) \ \ \forall t \geqslant 0 \\ F(\bar{x}) + F(\bar{y}) \geqslant F(\overline{x+y}). \end{cases}$$

Nhận xét rằng $F(\bar{x})$ chính là một mở rộng khái niệm hàm khoảng cách quen biết. Ký hiệu $(\bar{x}, \bar{y})$ là tích vô hướng

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Đặt

$$G(\bar{y}) = \max_{\bar{x}} \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{F(\bar{y})}$$

và gọi $G(\bar{y})$ là hàm tựa.

Bài toán 5. *Chứng minh rằng ta luôn có đẳng thức*

$$F(\bar{y}) = \max_{\bar{x}} \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{G(\bar{y})}$$

Bài toán 6. *Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức*

$$(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant F(\bar{x})G(\bar{y}).$$

7.2 Bất đẳng thức hàm liên quan đến tam giác

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) một số hệ thức đặc trưng cho tam giác mà mọi học sinh bậc THPT đều quen biết. Đây là những hệ thức đặc biệt quan trọng liên quan đến sự ràng buộc tự nhiên của các yếu tố cạnh và góc trong một tam giác.

Tính chất 18. *Trong mọi ΔABC ta đều có: ứng với góc lớn hơn thì cạnh lớn hơn.*

Nhận xét 1. Điều khẳng định trên cho ta một kết luận tương đương sau đây:
Trong ΔABC khi $A < B$ thì $\sin A < \sin B$.

Và như vậy, mặc dù hàm số $f(x) = \sin x$ không đồng biến trong $(0, \pi)$ ta vẫn có hệ thức kiểu "đồng biến" cho cặp góc của một tam giác.

Tính chất 19. *Trong mọi ΔABC ta đều có:*

$$\cos A + \cos B \leqslant 2\cos\frac{A+B}{2}$$

Nhận xét 2. Như vậy, mặc dù hàm số $f(x) = \cos x$ không là hàm lõm (có đạo hàm bậc hai luôn luôn âm) trong $(0, \pi)$ ta vẫn có hệ thức kiểu "hàm lõm" cho cặp góc của một tam giác.

Tính chất 20. *Trong mọi ΔABC ta đều có bất đẳng thức*

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

Tính chất 21. *Trong mọi ΔABC ta đều có bất đẳng thức*

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3},$$

Tính chất 22. *Trong mọi ΔABC ta đều có bất đẳng thức*

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geqslant 3\sqrt{3},$$

Tính chất 23. *Trong mọi ΔABC ta đều có bất đẳng thức*

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2},$$

Nhận xét 3. Điều khẳng định của các Tính chất 3-5 dễ dàng kiểm chứng trực tiếp được dựa trên bất đẳng thức Young W.H. quen biết đối với lớp hàm có đạo hàm không đổi dấu trong khoảng $(0,\pi)$.

Tuy nhiên, đối với khẳng định của Tính chất 6 thì ta thấy ngay rằng đặc trưng của hàm lõm không còn được sử dụng như một công cụ cơ bản để kiểm chứng trực tiếp tính đúng đắn của bất đẳng thức đã cho. Vậy nên, một vấn đề xuất hiện một cách tự nhiên là: Về tổng thể, ta có thể mô tả được hay không lớp các hàm tổng quát thoả mãn điều kiện

$$f(A)+f(B)+f(C)\leqslant 3f\Big(\frac{\pi}{3}\Big),$$

hoặc

$$f(A)+f(B)+f(C)\geqslant 3f\Big(\frac{\pi}{3}\Big).$$

với mọi ΔABC?

Sau đây ta xét một số minh hoạ thông qua cách xây dựng các phương trình hàm để mô tả những nhận xét đã nêu ở trên.

7.2.1 Hàm tựa đồng biến dạng hàm số sin

Bài toán 7. *Cho hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0,\pi)$. Chứng minh rằng các điều kiện sau đây là tương đương:*

$$f(x)+f(y)\leqslant 2f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\ \ \forall x,y,x+y\in(0,\pi)\tag{2.1}$$

$$f(x)+f(y)+f(z)\leqslant 3f\Big(\frac{x+y+z}{3}\Big)\ \ \forall x,y,z,x+y+z\in(0,\pi]\tag{2.2}$$

Giải. Thật vậy, từ (2.1) dễ dàng suy ra (2.2). Giả sử $x \geqslant y \geqslant z$ thì ta có

$$f(z) + f(\frac{x+y+z}{3}) \leqslant 2f\Big(\frac{z + \frac{x+y+z}{3}}{2}\Big) \qquad (2.3)$$

Từ (2.1) và (2.3) suy ra

$$f(x) + f(y) + f(z) + f\Big(\frac{x+y+z}{3}\Big) \leqslant 2\Big[f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + f\Big(\frac{z + \frac{x+y+z}{3}}{2}\Big)\Big]$$

$$\leqslant 4f(\frac{x+y+z}{3}) \ \forall x, y, z, x+y+z \in (0, \pi].$$

Ngược lại, từ (2.2) với giả thiết $x \leqslant z \leqslant y$, đặt $z = \frac{x+y}{2}$, ta thu được (2.1).

Bài toán 8. *Xác định các hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0, \pi)$ và thỏa mãn điều kiện:*

Với mọi tam giác ABC thì $A < B$ khi và chỉ khi $f(A) < f(B)$.

Giải.

Trước hết, ta có nhận xét rằng điều kiện $A < B$ khi và chỉ khi $f(A) < f(B)$ với mọi cặp góc nhọn A, B tương đương với $f(t) = f_0(t)$ là một hàm đồng biến trong $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Xét hàm số

$$g_0(t) = \begin{cases} f_0(t) \text{ khi } & 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ f_0(\pi - t) \text{ khi } & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

Ta chứng minh rằng, khi đó $g_0(t)$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Thật vậy, ta có $g_0(A) < g_0(B)$ với mọi góc A, B nhọn và $A < B$. Xét trường hợp $0 < A < \frac{\pi}{2} < B < \pi$ với $A + B < \pi$.

Ta có $\pi - B > A$ và

$g_0(B) = f_0(\pi - B) > f_0(A) = g_0(A)$.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng mọi hàm $f(t)$ thỏa mãn điều kiện bài toán đều có dạng

$$f(t) = \begin{cases} g_0(t) \text{ khi } & 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \geqslant g_0(t) \text{ khi } & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

Thật vậy, với điều kiện $g_0(B) \leqslant f(B)$ với mọi góc B tù, ta có với $0 < A < \frac{\pi}{2} < B < \pi$ với $A + B < \pi$ thì $\pi - B > A$ và

$$f(B) \geqslant g_0(B) = f_0(\pi - B) > f_0(A) = g_0(A) = f(A).$$

Bài toán 9. *Xét hàm số*

$$f(t) = \begin{cases} \sin t \;\; khi \;\; 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1 + \cos t \;\; khi \;\; \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

Chứng minh rằng ứng với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}. \tag{2.4}$$

Giải.

Khi ΔABC nhọn thì (2.4) có dạng quen biết

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Xét trường hợp ΔABC tù với $C > \frac{\pi}{2}$ thì (2.4) có dạng

$$\sin A + \sin B + 1 + \cos C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}. \tag{2.5}$$

Để ý rằng với góc C tù thì

$$1 + \cos C \leqslant \sin C$$

nên ta có (2.5) là đúng.

7.2.2 Hàm tựa lõm dạng hàm số cosin

Bài toán 10. *Cho hàm số $q(t)$ xác định và lõm trong khoảng $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Xác định các hàm số $g(t)$ xác định trong khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ sao cho hàm số*

$$f(t) = \begin{cases} q(t), \;\; khi \;\; 0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ g(t), \;\; khi \;\; \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi \end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện sau

Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqslant 3.f\left(\frac{\pi}{3}\right) \tag{2.6}$$

Giải.

Nếu tam giác ABC nhọn hoặc vuông (do giả thiết hàm $q(t)$ lõm), thì dễ thấy ngay rằng điều kiện bài toán được thỏa mãn.

Xét trường hợp khi tam giác ABC tù, chẳng hạn góc $C > \frac{\pi}{2}$.

Ta sẽ chứng minh rằng mọi hàm số có dạng

$$f_0(t) = \begin{cases} q(t), \text{ khi } 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 2q\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - q(\pi - t), \text{ khi } \frac{\pi}{2} < t \leqslant \pi \end{cases}$$

là hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trước hết ta chứng minh hàm $f_0(t)$ thỏa mãn điều kiện

$$f_0(A) + f_0(C) \leqslant 2.f_0\Big(\frac{A+C}{2}\Big)$$

hay

$$q(A) + 2q\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - q(\pi - C) \leqslant 2.q\Big(\frac{A+C}{2}\Big). \tag{2.7}$$

Do $C > \frac{\pi}{2}$ nên

$$\pi - C, A + C - \frac{\pi}{2} \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big), \quad (\pi - C) + \Big(A + C - \frac{\pi}{2}\Big) = A + \frac{\pi}{2}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A + C - \frac{\pi}{2} \leqslant \pi - C$.

Khi đó ta có

$$A \leqslant A + C - \frac{\pi}{2} \leqslant \pi - C \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Theo định lý Lagrange thì

$$q\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - q(\pi - C) = q'(u).\Big(C - \frac{\pi}{2}\Big), \;\; u \in \Big(\pi - C, \frac{\pi}{2}\Big)$$

và

$$q\Big(A + C - \frac{\pi}{2}\Big) - q(A) = q'(v).\Big(C - \frac{\pi}{2}\Big), \;\; v \in \Big(A, A + C - \frac{\pi}{2}\Big)$$

Do $q(t)$ là hàm lõm ($q"(t) \leqslant 0$) nên $q'(t)$ là hàm số nghịch biến và từ đó dẫn đến $q'(v) \geqslant q'(u)$. Suy ra

$$q\Big(A + C - \frac{\pi}{2}\Big) - q(A) \geqslant q\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - q(\pi - C)$$

hay

$$q(A) + q\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - q(\pi - C) \leqslant q\Big(A + C - \frac{\pi}{2}\Big) \tag{2.8}$$

Mặt khác, do

$$f\Big(\frac{A+C}{2}\Big) = f\Big(\frac{A+C-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2}\Big) \geqslant \frac{f(A+C-\frac{\pi}{2})+f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)}{2}$$

nên

$$f\Big(A+C-\frac{\pi}{2}\Big) \leqslant 2f\Big(\frac{A+C}{2}\Big) - f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)$$

hay

$$q\Big(A+C-\frac{\pi}{2}\Big) \leqslant 2q\Big(\frac{A+C}{2}\Big) - q\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \tag{2.9}$$

Từ (2.8) và (2.9), ta thu được

$$q(A) + q\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - q\Big(\pi - C\Big) \leqslant 2q\Big(\frac{A+C}{2}\Big) - q\Big(\frac{\pi}{2}\Big)$$

hay

$$q(A) + 2.q\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - q(\pi - C\Big) \leqslant 2q\Big(\frac{A+C}{2}\Big),$$

tức là ta có (2.7)

Vậy $f_0(t)$ là hàm tựa lõm trên khoảng $(0,\pi)$.

Khi đó, ta có

$$f_0(B) + f_0\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = q(B) + q\Big(\frac{\pi}{3}\Big) \leqslant 2q\Big(\frac{B+\frac{\pi}{3}}{2}\Big)$$

và

$$f_0(A) + f_0(C) = q(A) + 2q\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - q(\pi - C) \leqslant 2q\Big(\frac{A+C}{2}\Big).$$

Suy ra

$$f_0(A) + f_0(B) + f_0(C) + f_0\Big(\frac{\pi}{3}\Big) \leqslant 4q\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = 4f_0\Big(\frac{\pi}{3}\Big)$$

hay

$$f_0(A) + f_0(B) + f_0(C) \leqslant 3f_0\Big(\frac{\pi}{3}\Big),$$

tức là (2.6) được thỏa mãn.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng mọi hàm $f(t)$ có dạng

$$f(t) = \begin{cases} q(t), \ \text{khi} \ \ 0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \leqslant 2q\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) - q(\pi - t), \ \text{khi} \ \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi \end{cases}$$

đều thỏa mãn (2.6).

Thật vậy, nếu tam giác ABC nhọn hoặc vuông, thì do $q(t)$ là hàm lõm nên hiển nhiên (2.6) đúng.

Nếu tam giác ABC tù, chẳng hạn góc $C > \dfrac{\pi}{2}$, ta có

$$f(B) + f\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = q(B) + q\Big(\frac{\pi}{3}\Big) \leqslant 2q\Big(\frac{B + \frac{\pi}{3}}{2}\Big)$$

và

$$f(A) + f(C) \leqslant q(A) + 2q\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - q(\pi - C) \leqslant 2f\Big(\frac{A + C}{2}\Big)$$

theo (2.7).

Suy ra

$$f(A) + f(B) + f(C) + f(\frac{\pi}{3}) \leqslant 4f\Big(\frac{\pi}{3}\Big)$$

hay

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqslant 3.f\Big(\frac{\pi}{3}\Big).$$

Vậy (2.6) được thỏa mãn.

Bài toán 11. *Xét hàm số*

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & \textit{khi} \quad 0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ g(t), & \textit{khi} \quad \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi \end{cases}$$

Xác định các hàm số $g(t)$ xác định trong khoảng $\Big(\dfrac{\pi}{2}, \pi\Big)$ và thỏa mãn điều kiện

Với mọi tam giác ABC ta có

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqslant 3f\Big(\frac{\pi}{3}\Big). \tag{2.10}$$

Giải.

Trước hết ta nhận xét rằng $f(t) = \sin t$ là hàm lõm trong khoảng $\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$ (vì $f"(t) = -\sin t \leqslant 0, \forall x \in \Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$).

Xét hàm số

$$f_0(t) = \begin{cases} \sin t, \text{ khi } 0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 2 - \sin t, \text{ khi } \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Ta chứng minh rằng $f_0(t)$ là hàm số thỏa mãn điều kiện (2.10)

Thật vậy, nếu tam giác ABC nhọn hoặc vuông, thì do hàm $f(t) = \sin t$ là hàm lõm trong khoảng $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ nên ta có

$$\sin A + \sin B \leqslant 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

và

$$\sin C + \sin\frac{\pi}{3} \leqslant 2\sin\left(\frac{C+\dfrac{\pi}{3}}{2}\right).$$

Suy ra

$$\sin A + \sin B + \sin C + \sin\frac{\pi}{3} \leqslant 2.\left[\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) + \sin\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right]$$

$$\leqslant 4.\sin\left(\frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4}\right) = 4\sin\frac{\pi}{3}.$$

Suy ra

$$\sin A + \sin B + \sin C + \leqslant 3\sin\frac{\pi}{3}$$

hay

$$f_0(A) + f_0(B) + f_0(C) \leqslant 3f_0\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Vậy (5) được thỏa mãn.

Xét trường hợp tam giác ABC tù, chẳng hạn góc $C > \dfrac{\pi}{2}$. Ta chứng minh rằng

$$f_0(A) + f_0(C) \leqslant 2f_0\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

hay

$$\sin A + 2 - \sin C \leqslant 2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right). \tag{2.11}$$

Dễ thấy $\pi - C, A + C - \dfrac{\pi}{2} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $(\pi - C) + \left(A + C - \dfrac{\pi}{2}\right) = A + \dfrac{\pi}{2}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $A + C - \dfrac{\pi}{2} \leqslant \pi - C \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Khi đó ta có

$$A \leqslant A + C - \frac{\pi}{2} \leqslant \pi - C \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta có

$$f_0\left(\frac{\pi}{2}\right) - f_0(\pi - C) = f_0'(u)\left(C - \frac{\pi}{2}\right)\ \ u \in \left(\pi - C, \frac{\pi}{2}\right)$$

hay

$$1 - \sin C = \cos u\left(C - \frac{\pi}{2}\right)$$

và
$$f_0\Big(A+C-\frac{\pi}{2}\Big)-f_0(A)=f_0'(v)\Big(C-\frac{\pi}{2}\Big)\ \ v\in\Big(A,A+C-\frac{\pi}{2}\Big)$$
hay
$$\sin\Big(A+C-\frac{\pi}{2}\Big)-\sin A=\cos v\Big(C-\frac{\pi}{2}\Big).$$
Do $\cos v\geqslant\cos u$ (vì $u,v\in\Big(0,\dfrac{\pi}{2}\Big)$ và $v<u$) nên ta suy ra
$$\sin\Big(A+C-\frac{\pi}{2}\Big)-\sin A\geqslant 1-\sin C$$
hay
$$1+\sin A\leqslant\sin\Big(A+C-\frac{\pi}{2}\Big)+\sin C \tag{2.12}$$
Mặt khác theo giả thiết, ta có
$$f_0\Big(\frac{A+C}{2}\Big)=f_0\Big(\frac{A+C-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2}\Big)\geqslant\frac{f_0(A+C-\frac{\pi}{2})+f_0(\frac{\pi}{2})}{2}$$
hay
$$\sin\frac{A+C}{2}\geqslant\frac{\sin\Big(A+C-\frac{\pi}{2}\Big)+1}{2}.$$
Suy ra
$$\sin(A+C-\frac{\pi}{2})\leqslant 2\sin\frac{A+C}{2}-1. \tag{2.13}$$
Từ (2.12) và (2.13, ta thu được
$$1+\sin A\leqslant 2.\sin\frac{A+C}{2}-1+\sin C$$
hay
$$\sin A+2-\sin C\leqslant 2\sin\frac{A+C}{2}.$$
Khi đó ta có
$$\sin A+2-\sin C\leqslant 2\sin\frac{A+C}{2}$$
và
$$\sin B+\sin\frac{\pi}{3}\leqslant\sin\frac{B+\frac{\pi}{3}}{2}.$$
Suy ra
$$\sin A+\sin B+2-\sin C+\sin\frac{\pi}{3}\leqslant 2\Big[\sin\frac{A+C}{2}+\sin\frac{B+\frac{\pi}{3}}{2}\Big]\leqslant 4\sin\frac{\pi}{3}.$$

Do đó

$$\sin A + \sin B + 2 - \sin C \leqslant 3\sin\frac{\pi}{3}$$

hay

$$f_0(A) + f_0(B) + f_0(C) \leqslant 3f_0\Big(\frac{\pi}{3}\Big).$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng mọi hàm $f(t)$ thỏa mãn (2.11) đều có dạng

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{khi } 0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ \leqslant 2 - \sin t, & \text{khi } \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Thật vậy, nếu tam giác ABC nhọn hoặc vuông, thì (2.11) tương đương với

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3.\sqrt{3}}{2}.$$

Nếu tam giác ABC tù, chẳng hạn $C > \dfrac{\pi}{2}$ thì (2.11) tương đương với

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqslant \sin A + \sin B + 2 - \sin C \leqslant 3f\Big(\frac{\pi}{3}\Big).$$

Kết luận: Mọi hàm số $g(t)$ thoả mãn điều hiện $g(t) \leqslant 2 - \sin t,\ \ t \in \Big(\dfrac{\pi}{2}, \pi\Big)$ đều thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bài toán 12. *Xác định các hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0, \pi)$ và thỏa mãn điều kiện:*

Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + f(B) \leqslant 2f(\frac{A+B}{2}) \tag{2.14}$$

Giải.

Trước hết ta có nhận xét rằng điều kiện

$$f(A) + f(B) \leqslant 2.f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)$$

được thoả mãn ứng với mọi tam giác ABC sẽ kéo theo $f(t) = f_0(t)$ là hàm số lõm trên khoảng $(0, \pi)$.

Xét hàm số

$$g_0(t) = \begin{cases} f_0(t), & \text{khi } 0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 2.f_0\big(\frac{\pi}{2}\big) - f_0(\pi - t), & \text{khi } \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Ta chứng minh rằng hàm $g_0(t)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Thật vậy, nếu $0 < A < B \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ thì

$$g_0(A) + g_0(B) = f_0(A) + f_0(B) \leqslant 2.f_0\Big(\frac{A+B}{2}\Big) = 2.g_0\Big(\frac{A+B}{2}\Big).$$

Xét trường hợp $B > \dfrac{\pi}{2}$. Ta có

$$0 < A < \frac{\pi}{2} < B < \pi.$$

Dễ thấy, $\pi - B, A + B - \dfrac{\pi}{2} \in \Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$ và $(\pi - B) + \Big(A + B - \dfrac{\pi}{2}\Big) = A + \dfrac{\pi}{2}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử

$$A \leqslant A + B - \frac{\pi}{2} \leqslant \pi - B \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta có

$$f_0\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - f_0(\pi - B) = f_0'(u)\Big(B - \frac{\pi}{2}\Big),\ \ u \in \Big(\pi - B, \frac{\pi}{2}\Big)$$

và

$$f_0\Big(A + B - \frac{\pi}{2}\Big) - f_0(A) = f_0'(v)\Big(B - \frac{\pi}{2}\Big),\ \ v \in \Big(A, A + B - \frac{\pi}{2}\Big).$$

Do $f_0(t)$ là hàm số lõm trong khoảng $\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$ nên từ giả thiết $v \leqslant u$ suy ra $f_0'(v) \geqslant f_0'(u)$. Từ đó, ta nhận được

$$f_0\Big(A + B - \frac{\pi}{2}\Big) - f_0(A) \geqslant f_0\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - f_0(\pi - B)$$

hay

$$f_0\Big(A + B - \frac{\pi}{2}\Big) \geqslant f_0(A) + f_0\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - f_0(\pi - B) \tag{2.15}$$

Mặt khác, theo giả thiết thì

$$f_0\Big(\frac{A+B}{2}\Big) = f_0\Big(\frac{A + B - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2}\Big) \geqslant \frac{f_0(A + B - \frac{\pi}{2}) + f_0(\frac{\pi}{2})}{2}$$

hay

$$f_0\Big(A + B - \frac{\pi}{2}\Big) \leqslant 2f_0\Big(\frac{A+B}{2}\Big) - f_0\Big(\frac{\pi}{2}\Big). \tag{2.16}$$

Thay (2.16) vào (2.15), ta thu được

$$f_0(A) + 2f_0\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - f_0(\pi - B) \leqslant 2f_0\Big(\frac{A+B}{2}\Big)$$

hay

$$g_0(A) + g_0(B) \leqslant 2g_0\Big(\frac{A+B}{2}\Big),$$

tức là (2.14) được thỏa mãn.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng mọi hàm $f(t)$ thỏa mãn bài toán đều có dạng

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), \text{ khi } 0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \leqslant 2.f_0\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - f_0(\pi - t), \text{ khi } \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi, \end{cases}$$

trong đó $f_0(t)$ là hàm số lõm trong khoảng $\Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

Thật vậy, nếu $0 < A < B \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ thì ta có điều phải chứng minh là hiển nhiên.

Nếu $0 < A < \dfrac{\pi}{2} < B < \pi$, thì ta có

$$f(A) + f(B) \leqslant f_0(A) + 2.f_0\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - f_0(\pi - B) \leqslant 2.f_0\Big(\frac{A+B}{2}\Big) = 2.f\Big(\frac{A+B}{2}\Big),$$

tức là ta có điều cần phải chứng minh.

7.3 Hàm số bảo toàn bất đẳng thức trong hình học

7.3.1 Hàm số chuyển đổi các tam giác

Ta nhắc lại (không chứng minh) một số hệ thức đặc trưng cho tam giác mà mọi học sinh bậc THPT đều quen biết. Đây là những hệ thức đơn giản mô tả sự ràng buộc tự nhiên của các yếu tố cạnh và góc trong một tam giác.

Bài toán 13. *Điều kiện cần và đủ để 3 số dương A, B, C là độ đo các góc của một tam giác ΔABC là*

$$A + B + C = \pi.$$

Bài toán 14. *II. Điều kiện cần và đủ để 3 số dương a, b, c khi gắn với cùng một đơn vị đo lường lập thành độ dài các cạnh của một tam giác ΔABC là*

$$\begin{cases} a + b > c \\ b + c > a \\ c + a > b \end{cases}$$

Nói cách khác, ta có thể phát biểu ngắn gọn như sau.

Bài toán 15. *Điều kiện cần và đủ để 3 số dương a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác ΔABC là*

$$|b - c| < a < b + c.$$

Trong phần này sẽ khảo sát các đặc trưng hàm cơ bản của một số hàm số sinh bởi các phép biến hình sơ cấp dạng tịnh tiến, đồng dạng, phản xạ và nghịch đảo trên đường thẳng thực.

Bài toán 16. *1. Xác định α để hàm số $f(x) = x + \alpha$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi ΔABC.*

Giải.

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết phải có

$$f(a) > 0,\ \ f(b) > 0,\ \ f(c) > 0.$$

Suy ra

$$a + \alpha > 0,\ \ b + \alpha > 0,\ \ c + \alpha > 0,\ \ \forall \Delta ABC$$

hay

$$\alpha > -a,\ \ \alpha > -b,\ \ \alpha > -c,\ \ \forall \Delta ABC.$$

Điều này tương đương với

$$\alpha > \max\{-a, -b, -c\},\ \ \forall \Delta ABC$$

hay $\alpha \geqslant 0$.

Ngược lại, với $\alpha \geqslant 0$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác do a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Vậy nên với $\alpha \geqslant 0$ thì hàm số $f(x) = x+\alpha$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi ΔABC.

Bài toán 17. *2. Xác định α để hàm số $f(x) = \alpha x$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi ΔABC.*

Giải.

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết phải có

$$f(a) > 0,\ \ f(b) > 0,\ \ f(c) > 0,\ \ \forall \Delta ABC.$$

Suy ra

$$\alpha a > 0,\ \ \alpha b > 0,\ \ \alpha c > 0,\ \ \forall \Delta ABC. \tag{1}$$

Từ (1) ta thu được $\alpha > 0$. Thật vậy, nếu $\alpha \leqslant 0$ thì $f(a) \leqslant 0$.

Vậy với $\alpha > 0$ thì hàm số $f(x) = \alpha x$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi ΔABC.

Bài toán 18. *3. Xác định α, β để hàm số $f(x) = \alpha x + \beta$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi ΔABC.*

Giải.

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết phải có

$$f(a) > 0,\ \ f(b) > 0,\ \ f(c) > 0,\ \ \forall \Delta ABC.$$

Suy ra

$$\alpha a + \beta > 0,\ \ \alpha b + \beta > 0,\ \ \alpha c + \beta > 0,\ \ \forall \Delta ABC. \tag{1}$$

Từ (1) ta thu được $\alpha \geqslant 0$. Thật vậy, nếu $\alpha < 0$, β tuỳ ý cho trước thì ta chọn ΔABC có a đủ lớn thì theo tính chất của nhị thức bậc nhất sẽ nhận được $\alpha a + \beta < 0$.

Tương tự, cũng từ (1) ta suy ra $\beta \geqslant 0$. Thật vậy, nếu $\beta < 0$, ta chọn ΔABC có a đủ nhỏ thì theo tính chất của nhị thức bậc nhất sẽ nhận được $\alpha a + \beta < 0$.

Trường hợp khi đồng thời xảy ra $\alpha = 0, \beta = 0$ thì $f(x) \equiv 0$ không thoả mãn bài toán.

Với $\alpha \geqslant 0,\ \ \beta \geqslant 0$ và $\alpha + \beta > 0$ thì ta thấy $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác do a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Vậy nên:

Với $\alpha \geqslant 0,\ \ \beta \geqslant 0$ và $\alpha + \beta > 0$ thì hàm số $f(x) = \alpha x + \beta$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi ΔABC.

Bài toán 19. *4. Xác định α, β để hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\alpha x + \beta}$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi ΔABC.*

Giải. Không mất tính tổng quát, ta luôn luôn giả thiết $a \geqslant b \geqslant c$.

Nhận xét rằng, phép nghịch đảo $g(x) = \dfrac{1}{x}$ không có tính chất: $g(a), g(b), g(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi ΔABC. Thật vậy, xét tam giác cân với $a = b = 2$, $c = 1$ thì ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết phải có

$$f(a) > 0,\ \ f(b) > 0,\ \ f(c) > 0,\ \ \forall \Delta ABC.$$

Suy ra

$$\alpha a + \beta > 0,\ \ \alpha b + \beta > 0,\ \ \alpha c + \beta > 0,\ \ \forall \Delta ABC. \tag{1}$$

Từ (1) ta thu được $\alpha \geqslant 0$. Thật vậy, nếu $\alpha < 0$, β tuỳ ý cho trước thì ta chọn ΔABC có a đủ lớn thì theo tính chất của nhị thức bậc nhất sẽ nhận được $\alpha a + \beta < 0$.

Tương tự, cũng từ (1) ta suy ra $\beta \geqslant 0$. Thật vậy, nếu $\beta < 0$, ta chọn ΔABC có a đủ nhỏ thì theo tính chất của nhị thức bậc nhất sẽ nhận được $\alpha a + \beta < 0$.

Trường hợp khi đồng thời xảy ra $\beta = 0$ thì $f(x) \equiv 0$ không thoả mãn bài toán (theo nhận xét ở trên).

Với $\alpha = 0$, $\beta > 0$, ta thu được hàm hằng dương nên $f(a) = f(b) = f(c) > 0$ và $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác đều.

Xét trường hợp $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Khi đó

$$f(a) \geqslant f(b) \geqslant f(c).$$

Vậy ta cần xác định các số dương α, β sao cho luôn có

$$f(a) + f(b) > f(c),\ \ \forall \Delta ABC,\ \ a \geqslant b \geqslant c$$

hay

$$\frac{1}{\alpha a + \beta} + \frac{1}{\alpha b + \beta} > \frac{1}{\alpha c + \beta},\ \ \forall \Delta ABC,\ \ a \geqslant b \geqslant c. \tag{1}$$

Xét các tam giác ABC cân đồng dạng với tam giác cạnh $3, 3, 1$, tức $a = b = 3d$, $c = d$ với $d > 0$ tuỳ ý. Khi đó, (1) có dạng

$$\frac{1}{3d\alpha + \beta} + \frac{1}{3d\alpha + \beta} > \frac{1}{d\alpha + \beta},\ \ \forall d > 0$$

hay

$$\frac{2}{3d\alpha + \beta} > \frac{1}{d\alpha + \beta},\ \ \forall d > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3d\alpha + \beta}{2} > \frac{d\alpha + \beta}{,}\ \ \forall d > 0$$

hay

$$\beta > 2d\alpha,\ \ \forall d > 0.$$

Điều này không xảy ra khi d đủ lớn.

Vậy với $\alpha = 0,\ \ \beta > 0$ thì hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\alpha x + \beta}$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi ΔABC.

Bài toán 20. 5. *Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$, $f(0) = 0$ và có đạo hàm trong $(0, \pi)$ sao cho $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành độ đo các góc của một tam giác ứng với mọi ΔABC cho trước.*

Giải.

Ta cần xác định hàm khả vi $f(x)$ sao cho

$$\begin{cases} f(x) > 0,\ \ \forall x \in (0, \pi) \\ f(0) = 0 \\ f(A) + f(B) + f(C) = \pi. \end{cases}$$

Theo giả thiết thì $f(0) = 0$ nên $f(\pi) = \pi$ và $C = \pi - (A + B)$.

Suy ra

$$f(A) + f(B) + f(\pi - A - B) = \pi, \ \ \forall A, B, A + B \in [0, \pi]$$

hay

$$f(x) + f(y) + f(\pi - x - y) = \pi, \ \ \forall x, y, x + y \in [0, \pi]. \tag{1}$$

Lấy đạo hàm trong $(0, \pi)$ theo biến x, ta thu được

$$f'(x) - f'(\pi - x - y) = 0, \ \ \forall x, y, x + y \in [0, \pi]. \tag{2}$$

Từ (2) suy ra $f'(x)$ là hàm hằng trong $(0, \pi)$ và vì vậy $f(x) = px + q$. Do $f(0) = 0$ nên $q = 0$ và vì vậy $f(x) = px$. Do $f(\pi) = \pi$ nên $p = 1$ và ta thu được $f(x) = x$.

Vậy hàm số $f(x) = x$ là liên tục trong $[0, \pi]$, $f(0) = 0$ và có đạo hàm trong $(0, \pi)$ để $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành độ đo các góc của một tam giác ứng với mọi ΔABC cho trước.

Bài toán 21. *6. Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ và*

$$f(0) = 0, \ \ f(x) > 0 \ \ \forall x \in (0, \pi)$$

và $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành độ đo các góc của một tam giác ứng với mọi ΔABC cho trước.

Giải.

Ta phát biểu bài toán đã cho dưới dạng:

Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ và

$$f(0) = 0, \ \ f(x) > 0, \ \ f(x) + f(y) + f(\pi - x - y) = \pi, \ \ \forall x, y \in (0, \pi), x + y < \pi. \tag{1}$$

Do $f(0) = 0$ nên với $y = 0$, ta thu được

$$f(x) + f(0) + f(\pi - x) = \pi, \ \ \forall x \in [0, \pi].$$

Đặt $f(x) = x + g(x)$ thì $g(0) = 0$ và $g(x)$ là hàm liên tục trong $[0, \pi]$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow x + g(x) + (\pi - x) + g(\pi - x) = \pi$$

$$\Leftrightarrow g(x) + g(\pi - x) = 0, \ \ \forall x \in [0, \pi]$$

hay

$$g(\pi - x) = -g(x), \ \ \forall x \in [0, \pi]. \tag{2}$$

Thế $f(x) = x + g(x)$ vào (1) và sử dụng (2), ta thu được

$$x + g(x) + y + g(y) + \pi - (x+y) + g(\pi - (x+y)) = \pi, \ \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leqslant \pi$$

hay

$$g(x) + g(y) - g(x+y) = 0, \ \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leqslant \pi$$

hay

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \ \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leqslant \pi. \quad (3)$$

Do $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ nên (3) là phương trình hàm Cauchy và $g(x) = \alpha x$ và $f(x) = (1+\alpha)x$. Để $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$, ta cần có $1 + \alpha > 0$ và để

$$f(A) + f(B) + f(C) = \pi$$

ta cần có $1 + \alpha = 1$. Suy ra $\alpha = 0$ và $f(x) \equiv x$.

Bài toán 22. *7. Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ sao cho $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành độ đo các góc của một tam giác ứng với mọi ΔABC cho trước.*

Giải.

Ta thấy có hai hàm số hiển nhiên thoả mãn bài toán, đó là $f(x) = x$ và $f(x) \equiv \dfrac{\pi}{3}$.

Ta phát biểu bài toán đã cho dưới dạng:

Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ và

$$f(x) > 0, \ f(x) + f(y) + f(\pi - x - y) = \pi, \ \forall x, y \in (0, \pi), x + y < \pi. \quad (1)$$

Cho $y \to 0$, ta thu được

$$f(x) + f(0) + f(\pi - x) = \pi, \ \forall x \in (0, \pi)$$

hay

$$f(\pi - x) = \pi - f(0) - f(x), \ \forall x \in [0, \pi].$$

Thế vào (1), ta thu được

$$x + g(x) + y + g(y) + \pi - (x+y) + g(\pi - (x+y)) = \pi, \ \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leqslant \pi$$

hay

$$f(x) + f(y) + [\pi - f(0) - f(x+y)] = \pi, \ \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leqslant \pi$$

hay

$$f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leqslant \pi. \quad (2)$$

Đặt $f(x) = f(0) + g(x)$. Khi đó $g(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ và (2) có dạng

$$g(x+y) = g(x) + g(y),\ \ \forall x, y \in [0, \pi], x + y \leqslant \pi. \tag{3}$$

Do $g(x)$ liên tục trong $[0, \pi]$ nên (3) là phương trình hàm Cauchy và $g(x) = \alpha x$ và $f(x) = \alpha x + \beta$. Ta cần xác định α, β để $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$ và để

$$f(A) + f(B) + f(C) = \pi$$

hay

$$\begin{cases} \alpha x + \beta & > 0,\ \ \forall x \in (0, \pi) \\ \alpha(A + B + C) + 3\beta = \pi. \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \alpha x + \beta & > 0,\ \ \forall x \in (0, \pi) \\ \alpha\pi + 3\beta = \pi. \end{cases}$$

hay

$$f(x) = \alpha x + \frac{(1-\alpha)\pi}{3} > 0,\ \ \forall x \in (0, \pi). \tag{4}$$

Cho $x \to 0$ và $x \to \pi$, từ (4) ta thu được

$$-\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Với $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ thì hiển nhiên (4) thoả mãn.
Xét $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ thì $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{2}$ thoả mãn điều kiện bài ra.
Thậy vậy, với $0 < x < \pi$ thì $f(x) > f(\pi) = 0$.
Xét $\alpha == 1$ thì $f(x) = x$ hiển nhiên thoả mãn điều kiện bài ra.
Vậy, các hàm cần tìm đều có dạng

$$f(x) = \alpha x + \frac{(1-\alpha)\pi}{3},\ \ -\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Bài toán 23. *8. Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0, 1]$ sao cho $f(a), f(b), f(c)$ tạo thành độ đo các cạnh của một tam giác nội tiếp trong đường tròn đường kính 1 ứng với mọi ΔABC nội tiếp trong đường tròn đường kính 1 cho trước.*

Giải.

Ta có nhận xét sau:

Xét đường tròn O đường kính bằng 1. Ký hiệu $M(\Delta)$ là tập hợp tất cả các tam giác nội tiếp trong đường tròn O đó. Khi đó điều kiện cần và đủ để ba số dương α, β, γ là ba góc của một tam giác thuộc $M(\Delta)$ là $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ tạo thành độ đo các cạnh của một tam giác thuộc $M(\Delta)$.

Thật vậy, khi α, β, γ là ba góc của một tam giác thì $2R\sin\alpha, 2R\sin\beta, 2R\sin\gamma$ hay $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ là độ dài các cạnh tương ứng của tam giác nội tiếp được trong đường tròn O đường kính bằng 1.

Ngược lại, khi $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ là độ dài các cạnh tương ứng của tam giác nội tiếp được trong đường tròn O đường kính bằng 1 thì do các góc α, β, γ dương nên α, β, γ là ba góc của một tam giác.

Vậy, theo kết quả bài toán 7 thì các hàm cần tìm có dạng

$$f(x) = \sin\Big(\alpha x + \frac{(1-\alpha)\pi}{3}\Big), \ \ -\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

7.3.2 Nhận xét về hàm liên quan đến diện tích đa giác

Ta nhắc lại một hệ thức đặc trưng cho hình chữ nhật và hình bình hành mà mọi học sinh bậc phổ thông đều quen biết.

Diện tích S_{cn} của hình chữ nhật có độ dài các cạnh (chiều dài và chiều rộng) là a và b ($a \geqslant b$ trong cùng một đơn vị đo lường) được tính bằng công thức

$$S_{cn} = ab. \tag{1}$$

Nếu tứ giác không phải là hình chữ nhật mà chỉ là hình bình hành thì diện tích S_{bh} của hình bình hành có độ dài các cạnh (chiều dài và chiều rộng) là a và b ($a \geqslant b$ trong cùng một đơn vị đo lường) và góc xen giữa là γ được tính bằng công thức

$$S = ab\sin\gamma. \tag{2}$$

Như vậy, S_{cn} và S_{bh} là một hàm số dương $f(x, y)$ theo hai biến số dương (x, y)) nhận giá trị dương:

$$f(x, y) > 0, \ \ x, y > 0$$

và có các đặc trưng hàm

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y), \ \ \forall x_1, x_2, y > 0, \tag{3}$$

$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2), \ \forall x, y_1, y_2 > 0. \tag{4}$$

Một câu hỏi nảy sinh tự nhiên là: "Phải chăng hàm số liên tục $f(x, y)$ theo từng biến dương x, y và thoả mãn đồng thời các điều kiện (3) và (4) sẽ cho ta sự mô tả biểu thức tương tự (gần giống) như công thức tính diện tích của hình chữ nhật và hình bình hành?"

Một hàm như vậy được gọi là *hàm diện tích của hình bình hành.*

Bài toán 24. *1. Xác định các hàm số $f(x, y)$ liên tục theo từng biến dương x, y và thoả mãn đồng thời các điều kiện (2) và (3).*

Giải.

Ta có nhận xét sau:

Nếu cố định biến y và viết $f(x, y) = g_y(x)$ thì (2) cho ta

$$g_y(x_1 + x_2) = g_y(x_1) + g_y(x_2), \ \forall x_1, x_2 > 0. \tag{4}$$

Ta nhận được (4) chính là phương trình hàm Cauchy (theo tham số y) nên (4) có nghiệm

$$g_y(x) = a(y)x, \ \forall x, y > 0. \tag{5}$$

Thay biểu thức (5) vào (3), ta thu được

$$c(y_1 + y_2) = c(y_1) + c(y_2), \ \forall y_1, y_2 > 0. \tag{6}$$

Ta nhận được (6) chính là phương trình hàm Cauchy nó có nghiệm $c(y) = \alpha y$.

Từ đây suy ra

$$f(x, y) = \alpha xy, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x, y > 0.$$

Như vậy, hàm diện tích của hình bình hành luôn luôn có dạng

$$f(x, y) = \alpha xy, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x, y > 0.$$

Nhận xét rằng, nếu ta quy chuẩn theo một quy ước rằng hình chữ nhật đơn vị (hình vuông đơn vị) có diện tích bằng 1, thì hàm diện tích của hình bình hành sẽ là hàm diện tích của chữ nhật và ta thu được công thức tính diện tích hình chữ nhật quen biết.

Bài toán 25. *2. Xác định các hàm số $f(x, y)$ liên tục theo từng biến dương x, y và thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:*

$$\begin{gathered} f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y), \ \forall x_1, x_2, y > 0, \\ f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2), \ \forall x, y_1, y_2 > 0, \\ f(1, 1) = 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Giải.

Theo Bài toán 1 thì hàm diện tích của hình bình hành luôn luôn có dạng

$$f(x,y) = \alpha xy,\ \ \alpha \in \mathbb{R},\ \ \forall x, y > 0.$$

Từ điều kiện (7), ta có $f(1,1) = \alpha = 1$.

Vậy nên, ta nhận được công thức $f(x,y) = xy$.

7.4 Bất phương trình hàm với cặp biến tự do

Bài toán 26. *Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(i) $f(x) \geqslant 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R},$

(ii) $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Bài giải. Thay $x = 0$ vào điều kiện đầu bài, ta thu được

$$\begin{cases} f(0) \geqslant 0 \\ f(0) \geqslant 2f(0) \end{cases} \text{hay}\quad f(0) = 0.$$

Vậy nên

$$f(0) = f(x + (-x)) \geqslant f(x) + f(-x) \geqslant 0.$$

Suy ra $f(x) \equiv 0$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) \equiv 0$ thoả mãn điều kiện bài ra.

Bài toán 27. *Cho trước hàm số $h(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$. Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(i) $f(x) \geqslant ax,\ \ \forall x \in \mathbb{R},$

(ii) $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Bài giải. Để ý rằng $h(x+y) = h(x) + h(y)$. Đặt $f(x) = h(x) + g(x)$. Khi đó ta thu được các điều kiện (i) $g(x) \geqslant 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R},$

(ii) $g(x+y) \geqslant g(x) + g(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Lặp lại cách giải Bài toán 1. Thay $x = 0$ vào điều kiện đầu bài, ta thu được

$$\begin{cases} g(0) \geqslant 0 \\ g(0) \leqslant 0 \end{cases} \text{hay}\quad g(0) = 0.$$

Vậy nên

$$g(0) = g(x + (-x)) \geqslant g(x) + g(-x) \geqslant 0.$$

Điều này kéo theo $g(x) \equiv 0$ hay $f(x) = ax$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = ax$ thoả mãn điều kiện bài ra.

Bài toán 28. *Cho số dương a. Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(i) $f(x) \geqslant a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $f(x+y) \geqslant f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bài giải. Để ý rằng $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy ta có thể logarit hoá hai vế các bất đẳng thức của điều kiện đã cho.

(i) $\ln f(x) \geqslant (\ln a)x, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\ln f(x+y) \geqslant \ln f(x) \ln f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Đặt $\ln f(x) = \varphi(x)$, ta thu được

(i) $\varphi(x) \geqslant (\ln a)x, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\varphi(x+y) \geqslant \varphi(x)\varphi(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ta nhận được Bài toán 2. Bằng cách đặt $\varphi(x) = g(x) + (\ln a)x$, ta thu được các điều kiện

(i) $g(x) \geqslant 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(ii) $g(x+y) \geqslant g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

và $g(x) \equiv 0$ hay $\varphi(x) = (\ln a)x$. Suy ra $f(x) = a^x$ Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = a^x$ thoả mãn điều kiện bài ra.

Bài toán 29. *Xác định các hàm số $f(x)$ thoả mãn các điều kiện sau:*

$$f(x) \geqslant f(0), \ f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Bài giải. Đặt $f(0) = a$ và $f(x) - a = g(x)$. Khi đó (3.1) có dạng

$$g(x) \geqslant 0, \ g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \geqslant \frac{g(x)+g(y)}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

với $g(0) = 0$.

Thay $y = 0$ vào (3.2), ta thu được

$$g\Big(\frac{x}{2}\Big) \geqslant \frac{g(x)}{2} \text{ hay } g(x) \geqslant 2g\Big(\frac{x}{2}\Big), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Từ (3.2) và (3.3), ta suy ra

$$g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \geqslant g\Big(\frac{x}{2}\Big) + g\Big(\frac{y}{2}\Big), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

hay

$$g(0) = 0, \ g(x) \geqslant 0, \ g(x+y) \geqslant g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Tiếp theo, ta nhận được Bài toán 1. Suy ra $g(x) \equiv 0$ và $f(x) = \text{const}$.

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) \equiv c$ thoả mãn điều kiện bài ra.

Bài toán 30. *Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau*
(i) $f(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
(ii) $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Giải. Từ giả thiết bài toán, thay $x = y$ ta được

$$\begin{cases} f(0) \geqslant 0 \\ f(0) \geqslant f(0) + f(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geqslant 0 \\ f(0) \leqslant 0 \end{cases}$$

hay $f(0) = 0$. Khi đó, ta có

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \geqslant f(x) + f(-x) \geqslant 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x) \equiv 0$.
Thử lại ta thấy hàm $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 31. *Cho trước hàm số $h(x) = ax$. Xác định hàm số f(x) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*
(i) $f(x) \geqslant ax, \ \forall x \in \mathbb{R}$,
(ii) $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Giải.
Trước hết ta nhận thấy rằng hàm số đã cho $h(x) = ax$ có tính chất sau

$$h(x+y) = h(x) + h(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - h(x)$. Từ các điều kiện (i) và (ii), ta suy ra $g(x) \geqslant 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} &g(x+y) = f(x+y) - h(x+y) \\ \geqslant &(f(x) - h(x)) + (f(y) - h(y)) = g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Thay $x = y = 0$ vào hệ thức này, ta thu được

$$\begin{cases} g(0) \geqslant 0 \\ g(0) \geqslant g(0) + g(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(0) \geqslant 0 \\ g(0) \leqslant 0, \end{cases}$$

hay $g(0) = 0$ Khi đó, ta có $g(0) = g(x + (-x)) \geqslant g(x) + g(-x) \geqslant 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Suy ra $g(x) \equiv 0$. Điều này kéo theo $f(x) = h(x) = ax$. Thử lại dễ thấy hàm $f(x) = ax$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Kết luận: hàm số cần tìm là $f(x) = ax \ (a \in \mathbb{R})$.

Bài toán 32. *Cho số $a > 0$. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau (i)* $f(x) \geqslant a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$,
(ii) $f(x+y) \geqslant f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Giải. Từ giả thiết (i), ta có $f(x) > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Vì vậy ta có thể logarit hóa các vế của (i) và (ii) để được

$$\begin{aligned}&\ln f(x) \geqslant (\ln a)x,\ \ \forall x \in \mathbb{R}\\&\ln f(x+y) \geqslant \ln f(x) + \ln f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Đặt $\varphi(x) = \ln f(x)$, ta thu được hàm số $\varphi(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\varphi(x) \geqslant (\ln a)x,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

và

$$\varphi(x+y) \geqslant \varphi(x) + \varphi(y),\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tiếp theo, xét tương tự như đối với Bài toán 2, ta thu được $\varphi(x) = (\ln a)x$.

Suy ra : $\ln f(x) = (\ln a)x$ và do đó $f(x) = a^x\ \ (a > 0)$.

Thử lại : Dễ thấy hàm $f(x) = a^x$ thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Kết luận: Hàm số cần tìm là $f(x) = a^x,\ \ (a > 0)$.

Bài toán 33. *Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$,

(ii) Tồn tại hằng số M sao cho: $f(x) \leqslant M,\ \ \forall x \in [0;1]$.

Giải. Từ giả thiết (i), ta có $f(0) = 2f(0)$ nên $f(0) = 0$ và $f(2x) = 2f(x)$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $f(nx) = nf(x),\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, với cặp số nguyên dương m, n, ta có

$$m.f(\frac{n}{m}x) = f(nx) = nf(x)$$

hay

$$f\Big(\frac{n}{m}x\Big) = \frac{n}{m}x,\ \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa,
$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)\ \ \Rightarrow f(-x) = -f(x)$. Như vậy, với mọi số hữu tỉ r ta luôn có $f(rx) = rf(x),\ \ \forall r \in \mathbb{Q}$ (3) Từ giả thiết (2) của bài toán ta có $f(1-x) \leqslant M\ \ \Leftrightarrow\ \ f(1) - f(x) \leqslant M$
hay$f(x) \geqslant f(1) - M,\ \ \forall x \in [0,1]$. Như vậy với mọi $x \in [0,1]$ ta có: $f(1) - M \leqslant f(x) \leqslant M$ Suy ra, với mọi số N đủ lớn ta luôn có: $-N \leqslant f(x) \leqslant N,\ \ \forall x \in [0,1]$ hay $|f(x)| \leqslant N,\ \ \forall x \in [0,1]$. Lại do $f(-x) = -f(x),\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên suy ra $|f(x)| \leqslant N,\ \ \forall x \in [-1,1]$ (4) Với x tùy ý, gọi r là số hữu tỉ dương sao cho $|x| \leqslant r$ thì $|\frac{x}{r}| \leqslant 1$ và theo (4) ta có $|f(\frac{x}{r})| \leqslant N \Leftrightarrow \frac{1}{r}.|f(x)| \leqslant N$ (do(3)) hay $|f(x)| \leqslant N.r,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ Khi $r \to |x|$ thì $|f(x)| \leqslant N.|x| \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ Đặt $f(1) = c$ thì $f(r) = r.c$, với mọi

r hữu tỉ. Xét x_0 tùy ý. Nếu $x \to x_0$ thì $x - x_0 \to 0$. Khi đó ta có $\lim\limits_{x \to x_0} f(x - x_0) = 0$ hay $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (5) Xét số thực x tùy ý, luôn tồn tại dãy$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ các số hữu tỉ sao cho $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = x$ Theo (5) ta có $\lim\limits_{r_n \to x} f(r_n) = f(x)$ Mặt khác $f(r_n) = c.r_n$ nên ta có:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} (c.r_n) = c. \lim_{n \to \infty} r_n = c.x$$

Thử lại, dễ thấy hàm $f(x) = c.x$ (với c là hằng số) thỏa mãn yêu cầu bài toán . Kết luận: hàm số cần tìm là $f(x) = c.x$

Bài toán 34. *Tồn tại hay không hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, không là hàm hằng thỏa mãn bất đẳng thức:*

$$[f(x) - f(y)]^2 \leqslant |x - y|^3; \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Giải. Từ bất đẳng thức $[f(x) - f(y)]^2 \leqslant |x - y|^3$, với $x \neq y$ ta suy ra:

$$\frac{[f(x) - f(y)]^2}{[x - y]^2} \leqslant |x - y| \text{ hay } \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant |x - y|^{\frac{1}{2}} \ (*)$$

Trong biểu thức $(*)$, cố định x và cho $y \to x$ ta được $f'(x) = 0$ hay $f(x)$ là hằng số. Vậy không tồn tại hàm $f(x)$ khác hằng số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 35. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[0, 1]$ và thỏa mãn*

$$f(0) = f(1) = 0 \ \text{ và } \ f(\frac{x + y}{2}) \leqslant f(x) + f(y), \ \forall x, y \in [0, 1] \ (1)$$

1. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm trên đoạn $[0, 1]$.

2. Tồn tại hay không hàm số xác định trên đoạn $[0, 1]$ thỏa mãn các điều kiện trên và không đồng thời bằng 0.

Giải.

1. Cho $x = y = 0$, từ giả thiết (1) ta có:

$$f(x) \leqslant 2f(x) \ \Rightarrow \ f(x) \geqslant 0, \ \forall x \in [0, 1]$$

Cũng theo (1) ta có

$$0 \leqslant f(\frac{1}{2}) \leqslant f(0) + f(1) = 0 \ \Rightarrow \ f(\frac{1}{2}) = 0$$

Vậy $x = \dfrac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên đoạn $[0, 1]$. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh rằng

$$f(\frac{1}{2^n}) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Giả sử

$$f\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ k \geqslant 1.$$

Khi đó ta có

$$f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = f\left(\frac{0 + \frac{1}{2^k}}{2}\right) \leqslant f(0) + f\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0.$$

Vậy $0 \leqslant f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \leqslant 0$ hay $f(\dfrac{1}{2^{k+1}}) = 0$.

Kết luận: $f\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = \dfrac{1}{2^n} \in [0, 1], \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Dễ thấy hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{khi } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bài toán 36. *Xác định tất cả cặp hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ 2f(x) - g(x) = f(y) - y,$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}: \ f(x).g(x) \geqslant x + 1.$

Giải. Từ giả thiết (1), thay $y = x$, ta có

$$2f(x) - g(x) = f(x) - x.$$

Suy ra

$$f(x) = g(x) - x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó giả thiết (i) trở thành:

$$2\left[g(x) - x\right] - g(x) = \left[g(y) - y\right] - y$$

hay

$$g(x) = 2x - 2y + g(y), \ \forall x, y.$$

Cho $y = 0$ và đặt $g(0) = b$, ta có: $g(x) = 2x + b$ và từ đó $f(x) = x + b$.

Thay biểu thức của $f(x)$ và $g(x)$ vào bất đẳng thức (ii), ta thu được

$$(x + b)(2x + b) \geqslant x + 1, \ \forall x$$

hay

$$2x^2 + (3b-1)x + b^2 - 1 \geqslant 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó, suy ra

$$\triangle = (3b-1)^2 - 8(b^2-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow \;\; (b-3)^2 \leqslant 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; b = 3.$$

Vậy cặp hàm $f(x) = x + 3$ và $g(x) = 2x + 3$ thỏa mãn điều kiện (ii).
Xét điều kiện (i), ta có

$$2f(x) - g(x) = 3 = f(y) - y.$$

Vậy (i) được thỏa mãn.
Kết luận: Cặp hàm cần tìm là: $f(x) = x + 3$ và $g(x) = 2x + 3$.

Bài toán 37. *Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên $[0,1]$ và thỏa mãn các điều kiện*
(i) $f(1) = 1$,
(ii) $f(x) \geqslant 0, \;\; \forall x \in [0,1]$,
(iii) Nếu $x, y, x+y \in [0,1]$ thì $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$.
Chứng minh rằng khi đó

$$f(x) \leqslant 2x, \;\; \forall x \in [0,1].$$

Giải. Trước hết ta chứng minh rằng

$$f\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \leqslant \frac{1}{2^n}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Với $n = 1$, ta có

$$1 = f(1) = f\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big) \geqslant 2f\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

nên

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Vậy khẳng định trên đúng với $n = 1$.
Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, nghĩa là

$$f\Big(\frac{1}{2^k}\Big) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Khi đó ta có

$$\frac{1}{2^k} \geqslant f\Big(\frac{1}{2^k}\Big) = f\Big(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}}\Big) \geqslant 2.f\Big(\frac{1}{2^{k+1}}\Big)$$

hay

$$f\Big(\frac{1}{2^{k+1}}\Big) \leqslant \frac{1}{2^{k+1}},$$

nghĩa là khẳng định đúng với $n = k + 1$. Vậy khẳng định đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Từ giả thiết ta có

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y), \ \ \forall x, y, x+y \in [0,1].$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số không giảm trên $[0,1]$.

Với mọi $x \in [0,1]$, ta chọn số $k = [log_2 \frac{1}{x}]$. Khi đó

$$k \leqslant log_2 \frac{1}{x} < k+1 \ \ \Rightarrow \ \ 2^k \leqslant \frac{1}{x} < 2^{k+1} \ \ \Rightarrow \ \ \frac{1}{2^{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^k}$$

và do hàm $f(x)$ không giảm trên $[0,1]$ nên

$$f(x) \leqslant f\Big(\frac{1}{2^k}\Big) \leqslant \frac{1}{2^k} = 2\frac{1}{2^{k+1}} < 2x.$$

Bài toán 38. *Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:*

Tồn tại số $a \neq 0$ sao cho (1) $f(x+a) = f(x) + g(x)$

(2) $f(x) = 1$ *nếu* $0 \leqslant x \leqslant a$,

$$g(x+na) = \begin{cases} g(x) \ \ \textit{khi } n \textit{ chẵn} \\ -g(x) \ \ \textit{khi } n \textit{ lẻ}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng khi $|g(x)| \leqslant 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 2, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Ta có

$$f(x+2a) = f((x+a)+a) = f(x+a) + g(x+a).$$

Mặt khác,

$$f(x+a) = f(x) + g(x), \ \ g(x+a) = -g(x)$$

nên

$$f(x+2a) = f(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Như vậy, $f(x)$ là hàm tuần hoàn. Vậy ta chỉ cần chứng minh bài toán cho trường hợp $0 \leqslant x \leqslant 2a$ là đủ.

Với $0 \leqslant x \leqslant a$ thì $f(x) = 1$ (hiển nhiên thỏa mãn)

Với $a < x \leqslant 2a$ thì ta có

$$f(x) = f((x-a)+a) = f(x-a) + g(x-a) = 1 + g(x-a)$$

(do $x - a \in (0, 2a]$).

Từ $|g(x)| \leqslant 1$, suy ra $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$, (đpcm).

Bài toán 39. *Cho các số dương M, a. Tìm các hàm số $f(x), g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:*

$$|f(y) - f(x) - g(x)(x-y)| \leqslant M.|x-y|^{2+a}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Giải. Giả sử tồn tại các hàm $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn bài toán. Thay đổi vai trò của x và y trong (3.5), ta thu được

$$|f(x) - f(y) - g(y)(y-x)| \leqslant M.|y-x|^{2+a}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (3.4) và (3.5), ta thu được

$$|(g(x) - g(y))(x-y)| \leqslant 2M.|x-y|^{2+a}.$$

Suy ra

$$\Big|\frac{g(x) - g(y)}{x-y}\Big| \leqslant 2M.|x-y|^{a}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ x \neq y. \tag{3.6}$$

Trong (3.6), ta cố định x và cho $y \to x$, ta được

$$g'(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

hay $g(x) = c = \text{const}$.

Thay $g(x) = c$ vào (3.4) ta có

$$|f(y) - f(x) - c(x-y)| \leqslant M.|x-y|^{2+a}$$

$$\Leftrightarrow \Big|\frac{f(x) - f(y)}{x-y} - c\Big| \leqslant M.|x-y|^{2+a}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ x \neq y.$$

Tiếp theo, cố định x và cho $y \to x$ ta được

$$f'(x) = c \ \ \Rightarrow \ \ f(x) = c.x + d, \ \ d = \text{const}.$$

Thử lại, dễ thấy cặp hàm $f(x) = cx + d$ $g(x) = c$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Kết luận: Cặp hàm cần tìm là: $f(x) = c.x + d, \ \ g(x) = c$, với c, d là các hằng số tuỳ ý.

7.5 Bài tập

Bài 1. *Xét hàm số*

$$f(t) = \begin{cases} \cos t \ \ khi \ \ 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ g(t) \ \ khi \ \ \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

Xác định các hàm số $g(t)$ xác định trong khoảng $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ và thỏa mãn điều kiện:

Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqslant 3f(\frac{\pi}{3}).$$

Bài 2. *Xét hàm số*

$$f(t) = \begin{cases} \sin t \ \ khi \ \ 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ g(t) \ \ khi \ \ \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

Xác định các hàm số $g(t)$ xác định trong khoảng $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ và thỏa mãn điều kiện:
Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqslant 3f(\frac{\pi}{3}).$$

Bài 3. *Xét hàm số*

$$f(t) = \begin{cases} g(t) \ \ khi \ \ 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \sin t \ \ khi \ \ \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

Xác định các hàm số $g(t)$ xác định trong khoảng $(0, \frac{\pi}{2}]$ và thỏa mãn điều kiện:
Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqslant 3f(\frac{\pi}{3}).$$

Bài 4. *Xét hàm số*

$$f(t) = \begin{cases} g(t) \ \ khi \ \ 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \cos t \ \ khi \ \ \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

Xác định các hàm số $g(t)$ xác định trong $(0, \frac{\pi}{2}]$ và thỏa mãn điều kiện:
Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqslant 3f(\frac{\pi}{3}).$$

Bài 5. *Cho hàm số $p(t)$ xác định và lõm (có đạo hàm bậc hai âm) trong $(0, \frac{\pi}{2}]$. Xét hàm số*

$$f(t) = \begin{cases} q(t) \ \ khi \ \ 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ g(t) \ \ khi \ \ \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

Xác định các hàm số $g(t)$ xác định trong khoảng $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ và thỏa mãn điều kiện:
Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + f(B) + f(C) \leqslant 3f(\frac{\pi}{3}).$$

Bài 6. *Cho hàm số $p(t)$ xác định trong $(\frac{\pi}{2},\pi)$. Xét hàm số*

$$f(t)=\begin{cases} g(t) \ \ khi \ \ 0<t\leqslant \frac{\pi}{2}\\ q(t) \ \ khi \ \ \frac{\pi}{2}<t<\pi\end{cases}$$

Xác định các hàm số $g(t)$ xác định trong khoảng $(0,\frac{\pi}{2}]$ và thỏa mãn điều kiện:
Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A)+f(B)+f(C)\leqslant 3f(\frac{\pi}{3}).$$

Bài 7. *Xác định các hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0,\pi)$ và thỏa mãn điều kiện:*
Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A)+\cos B+\cos C\leqslant \frac{3}{2}.$$

Bài 8. *Xác định các hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0,\pi)$ và thỏa mãn điều kiện:*
Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A)+\sin B+\sin C\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 9. *Xác định các hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0,\pi)$ và thỏa mãn điều kiện:*
Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A)+\tan\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 1.$$

Bài 10. *Xác định các hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0,\pi)$ và thỏa mãn điều kiện:*
Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A)+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\leqslant \sqrt{3}.$$

Bài 11. *Xác định các hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0,\pi)$ và thỏa mãn điều kiện:*
Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A)+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\geqslant 9.$$

Bài 12. *Xác định các hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0,\pi)$ và thỏa mãn điều kiện:*

Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \leqslant 3\sqrt{3}.$$

Bài 13. *Xác định các hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0,\pi)$ và thỏa mãn điều kiện:*

Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + f(B) \leqslant 2f(\frac{A+B}{2}).$$

Bài 14. *Xác định các hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0,\pi)$ và thỏa mãn điều kiện:*

Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + f(B) + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

Bài 15. *Xác định các hàm số $f(t)$ xác định trong khoảng $(0,\pi)$ và thỏa mãn điều kiện:*

Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$f(A) + f(B) + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Chương 8

Bất đẳng thức trong dãy số

8.1 Dãy sinh bởi hàm số

Trong phần này, ta đề cập tới một số bài toán liên quan đến dãy số và dãy hàm thường xuất hiện từ khai triển hàm số đã cho thành chuỗi [1] (không nhất thiết là chuỗi luỹ thừa hoặc chuỗi lượng giác). Tính toán và ước lương trên tập các phần tử này cần đến các phép tính giới hạn, vi phân và tích phân. Những bài toán gắn với đạo hàm bậc thấp như hàm đơn điệu (đạo hàm bậc nhất không đổi dấu), hàm lồi, lõm (đạo hàm bậc hai không đổi dấu) đã được khảo sát ở các chương trước. Những tính toán liên quan đến các biểu thức chứa tích phân được xét trong chương sau. Trong phần này, ta chỉ nêu một vài kỹ thuật chính thống gắn với ước lượng các biểu thức giải tích và đại số đơn giản.

Từ khai triển hàm số thành chuỗi luỹ thừa cho ta một số bất đẳng thức được kiểm chứng thông qua khảo sát hàm số.

Định lý 89. *Với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) và $f^{(2n+1)}(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a,b)$, đều tồn tại đa thức $P_{2n}(x)$ bậc không quá $2n$ sao cho hàm số*

$$h(x) := f(x) - P_{2n}(x)$$

đơn điệu trong khoảng (a,b).

Proof. Cách chứng minh dựa vào khai triển Taylor tới cấp $2n+1$ đối với hàm $f(x)$ tại $x_0 \in (a,b)$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(x_1)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1},$$

với $x_1 \in (a,b)$.

[1] Dành cho bạn đọc đã có kiến thức về toán cao cấp

Từ đây, ta chỉ cần chọn

$$P_{2n}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n}$$

là đủ.

Thật vậy, do $f^{(2n+1)}(x)$ liên tục và $f^{(2n+1)}(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, nên $f^{(2n+1)}(x)$ hoặc luôn luôn dương hoặc luôn luôn âm trong (a, b). Do đó hàm số

$$\frac{f^{(2n+1)}(x_1)}{(2n+1)!}(x - x_0)^{2n+1},$$

tương ứng, sẽ là đồng biến hoặc nghịch biến trong (a, b).

$\square$

Tương tự, ta cũng có kết luận sau đây.

Định lý 90. *Với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp $2n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) và $f^{(2n)}(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, đều tồn tại đa thức $P_{2n-1}(x)$ bậc không quá $2n - 1$ sao cho hàm số*

$$h(x) := f(x) - P_{2n}(x)$$

lồi hoặc lõm trong khoảng (a, b).

Proof. Cách chứng minh dựa vào công thức khai triển Taylor tới cấp $2n$ đối với hàm $f(x)$ tại $x_0 \in (a, b)$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(2n-1)}(x_0)}{(2n-1)!}(x - x_0)^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(x_1)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n},$$

với $x_1 \in (a, b)$.

Tiếp theo, ta chỉ cần chọn

$$P_{2n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(2n-1)}(x_0)}{(2n-1)!}(x - x_0)^{2n-1}$$

là đủ.

Thật vậy, do $f^{(2n)}(x)$ liên tục và $f^{(2n)}(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, nên $f^{(2n)}(x)$ hoặc luôn luôn dương hoặc luôn luôn âm trong (a, b). Do đó hàm số

$$\frac{f^{(2n)}(x_1)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n},$$

tương ứng, sẽ luôn luôn dương hoặc luôn luôn âm trong (a, b).

$\square$

Định lý 91. *Với mọi dãy số giảm* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *và với mọi hàm lồi* $f(x)$ *trong* $(-\infty, a_1]$, *ta đều có*

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_{i+1})a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(a_i)a_{i+1},$$

trong đó $a_{n+1} := a_1$.

Proof. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Với $n = 2$ ta thu được đẳng thức hiển nhiên.

Với $n > 2$, đặt

$$S_n = [f(a_n)a_1 - f(a_1)a_n] + \sum_{i=1}^{n}[f(a_i)a_{i+1} - f(a_{i+1})a_i].$$

Ta cần chứng minh $S_n \geqslant 0$ ứng với mọi dãy giảm $\{a_i\}$. Từ giả thiết $f(x)$ là hàm lồi, ta có

$$\begin{aligned} f(a_n) &= f\Big(\frac{a_n - a_{n+1}}{a_1 - a_{n+1}}a_1 + \frac{a_1 - a_n}{a_1 - a_{n+1}}a_{n+1}\Big) \\ &\leqslant \frac{a_n - a_{n+1}}{a_1 - a_{n+1}}f(a_1) + \frac{a_1 - a_n}{a_1 - a_{n+1}}f(a_{n+1}). \end{aligned}$$

Do vậy

$$(a_{n+1} - a_1)f(a_n) + (a_n - a_{n+1})f(a_1) + (a_1 - a_n)f(a_{n+1}) \geqslant 0.$$

Suy ra $S_{n+1} - S_n \geqslant 0$ và vì vậy

$$S_n \geqslant S_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant S_2 = 0.$$

□

Tiếp theo, ta xét một mở rộng phạm vi ứng dụng của bất đẳng thức Cauchy.

Định lý 92 (Bất đẳng thức Carlson). *Với mọi dãy số* $a_1, a_2, \dots, a_n$, *ta đều có*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^4 < \pi^2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}(ia_i)^2\Big).$$

Proof. Xét cặp dãy số khác 0

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \;\; c_1, c_2, \dots, c_n.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy,ta có.

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i \frac{1}{c_i}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 c_i^2\Big)^2\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i^2}\Big)^2.$$

Đặt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i^2} = C_n,$$

ta được

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 \leqslant C_n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 c_i^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các dãy $\{a_i c_i\}$ và $\Big\{\dfrac{1}{c_i}\Big\}$ là tỉ lệ.

C_n được gọi là hằng số bất đẳng thức, vì nó không đổi ứng với mọi $\{a_n\}$. Đặc biệt lý thú là khi $C_n \leqslant C \ \ \forall n$, tức là chuỗi sau hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n^2} < \infty.$$

Chọn $C_i = i$, ta thu được

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 \leqslant C_n(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + 3^2 a^3 + \cdots + n^2 a_n^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = \dfrac{\lambda}{i^2}$.

Do

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{,}$$

suy ra

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 < \frac{\pi^2}{6} \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i^2.$$

Lấy $C_i^2 = t + \dfrac{i^2}{t}$ và $t > 0$ tuỳ ý, ta được

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 c_i^2 = tP + \frac{1}{t} Q,$$

trong đó

$$P = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\,,\ Q = \sum_{i=1}^{n} i^2 a^2$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant C_n\Big(tP + \frac{Q}{t}\Big),$$

trong đó

$$C_n = \frac{1}{t+\frac{1}{t}} + \frac{1}{t+\frac{2^2}{t}} + \cdots + \frac{1}{t+\frac{n^2}{t}} = \frac{t}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+2^2} + \cdots + \frac{t}{t^2+n^2}.$$

Tiếp theo, xét tam giác vuông OM_0M_n với các cạnh góc vuông OM_0 có độ dài t và M_0M_n độ dài n. Các điểm $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ chia đoạn $[M_0M_n]$ thành n đoạn có cùng độ dài 1. Khi đó diện tích mỗi tam giác $OM_{i-1}M_i$ một mặt bằng $\dfrac{1}{2}t$, mặt khác bằng

$$\frac{1}{2}\Big|OM_{i-1}\Big|\Big|OM_i\Big|\sin\alpha_i = \frac{1}{2}\sqrt{t^2+(i-1)^2}\sqrt{t^2+i^2}\sin\alpha_i,$$

trong đó α_i là góc giữa OM_{i-1} và OM_i $\forall i = 1, 2, , \ldots, n.$

Như vậy, ta thu được đẳng thức.

$$t = \sqrt{t^2+(i-1)^2}\sqrt{t^2+i^2}\sin\alpha_i,$$

hay

$$\sin\alpha_i = \frac{t}{\sqrt{t^2+(i-1)^2}\sqrt{t^2+i^2}} > \frac{t}{t^2+i^2},$$

tức là

$$\frac{t}{t^2+i^2} < \sin\alpha_i < \alpha_i,\ i = 1, 2, , \cdots, n.$$

Bởi vậy nên

$$C_n = \frac{t}{t^2+1^2} + \frac{t}{t^2+2^2} + \cdots + \frac{t}{t^2+n^2} < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n < \frac{\pi}{2}.$$

Do vậy

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)^2 < \frac{\pi}{2}\Big(tP + \frac{1}{t}Q\Big)\ \ \forall t > 0.$$

Lấy $t = \sqrt{\dfrac{Q}{P}}$ thì $tP + \dfrac{1}{t}Q = 2\sqrt{PQ}$ và ta thu được bất đẳng thức Carlson:

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)^4 < \pi^2\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n (ia_i)^2\Big).$$

□

Tiếp theo, ta xét một số ví dụ áp dụng trong đại số và giải tích liên quan đến khai triển hàm số.

Bài toán 1. *Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n, ta đều có*

$$e^x \geqslant \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp thông thường, dựa vào bất đẳng thức quen biết

$$e^x \geqslant 1 + x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có bài toán ngược sau đây.

Bài toán 2. *Cho trước số tự nhiên n. Xác định số dương a sao cho*

$$a^x \geqslant \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!}, \ \forall x \in \mathbb{R}..$$

Giải.

Với $n = 0$, ta được bài toán:

Xác định số dương a sao cho

$$a^x \geqslant 1 + x, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Ta viết lại (1.1) dưới dạng

$$a \geqslant (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \ \forall x > 0,$$

và

$$a \leqslant (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \ \forall x \in (-1, 0).$$

Cho $x \to 0$, ta thu được

$$a \geqslant e \quad \text{và} \quad a \leqslant a,$$

tức $a = e$.

Tiếp theo, sử dụng phương pháp quy nạp thông thường, ta thu được $a = e$ ứng với mọi n tự nhiên cho trước.

Cũng bằng phương pháp tương tự, ta dễ dàng chứng minh

Bài toán 3. *Với mỗi số tự nhiên n cho trước, ta đều có*

$$\sin x \leqslant \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

và

$$\sin x \geqslant \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Bài toán 4. *Cho dãy số $\{a_i\}$ sao cho ứng với mỗi số tự nhiên k, ta đều có*

$$a_1^k + a_2^k + + \cdots + a_n^k > 0.$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{(1 - a_1x)(1 - a_2x)\cdots(1 - a_nx)}.$$

Chứng minh rằng khi đó

$$f^{(k)}(0) > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Giải.

Để ý rằng, tại lân cận đủ nhỏ của 0, hàm $f(x)$ dương. Vì vậy

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a_1}{1 - a_1x} + \frac{a_2}{1 - a_2x} + \cdots + \frac{a_n}{1 - a_nx} := g(x).$$

Suy ra

$$f'(x) = f(x)g(x)$$

và

$$f'(0) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 0.$$

Tiếp theo, dễ thấy rằng

$$g^{(i)}(x) = i!\Big(\frac{a_1^{i+1}}{(1 - a_1x)^{i+1}} + \frac{a_2^{i+1}}{(1 - a_2x)^{i+1}} + \cdots + \frac{a_n^{i+1}}{(1 - a_nx)^{i+1}}\Big).$$

Theo công thức Newton-Leibniz, thì

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k - 1i}{g}^{(i)}(x) f^{(k-1-i)}(x).$$

Từ đây, theo quy nạp, ta có ngay đpcm.

Bài toán 5. *Cho dãy số $\{a_n\}$ sao cho ứng với mỗi n cho trước thì đa thức sinh bởi n phần tử đầu tiên của dãy đó*

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

có các nghiệm đều thực và không âm. Chứng minh rằng khi đó

$$|a_{n-k}a_k| \geqslant (C_n^k)^2|a_0| \ \ (k = 1, \ldots , n).$$

Giải. Theo Định lý Viete thì

$$a_k = (-1)^k \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} \ \ (k = 1, \dots, n),$$

(tổng này có C_n^k số hạng và x_1, x_2, ... , x_n xuất hiện C_{n-1}^{k-1} lần).
Vậy nên

$$|a_k| = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} \geqslant \Big[\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{C_{n-1}^{k-1}}\Big)^{\frac{1}{C_n^k}}\Big] C_n^k.$$

Suy ra

$$|a_k| \geqslant \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\frac{k}{n}} C_n^k \ \ (k = 1, \dots, n).$$

Thay k bởi $n-k$, ta có

$$|a_{n-k}| \geqslant \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\frac{n-k}{n}} C_n^{n-k} \ \ (k = 1, \dots, n).$$

Từ đó suy ra

$$|a_k a_{n-k}| \geqslant \prod_{i=1}^{n} x_i C_n^k C_n^{n-k} \ \ (k = 1, \dots, n),$$

hay

$$|a_k a_{n-k}| \geqslant |a_0|(C_n^k)^2 \ \ (k = 1, \dots, n).$$

Bài toán 6. *Cho đa thức $P(x)$ bậc n và*

$$|P^{(k)}(0)| \leqslant 1, \ \ k = 0, 1, \dots, n.$$

Chứng minh rằng

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!} x^{k+1}\Big| \leqslant e^{|x|} - 1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải.

Bằng phương pháp quy nạp, ta dễ dàng chứng minh đẳng thức

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

Tiếp theo, sử dụng các bất đẳng thức

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1}\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} |x|^{k+1}$$

và

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}|x|^k \leqslant e^{|x|},$$

ta suy ra đpcm.

Bài toán 7. *Chứng minh rằng ứng với mỗi số nguyên dương n ($n > 1$) và bộ n số dương $x_1, x_2, ..., x_n$, ta đều có*

$$2\cos\Big(\frac{\pi}{n+2}\Big) \leqslant \max\Big\{x_1, \frac{1}{x_1} + x_2, ..., \frac{1}{x_{n-1}} + x_n, \frac{1}{x_n}\Big\}.$$

Giải.

Ta chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là bộ n số thực mà tại đó

$$\max\Big\{x_1, \frac{1}{x_1} + x_2, ..., \frac{1}{x_{n-1}} + x_n, \frac{1}{x_n}\Big\}$$

đạt giá trị nhỏ nhất thì phải xảy ra

$$x_1 = \frac{1}{x_1} + x_2 = \cdots = \frac{1}{x_{n-1}} + x_n = \frac{1}{x_n}.$$

Ta thu được bài toán về dãy số:

Với mỗi số nguyên dương n cho trước, xét dãy số x_k xác định như sau

$$x_1 = a, \;\; x_k = x_1 - \frac{1}{x_{k-1}}, \;\; k = 2, \dots, n.$$

Cần xác định a sao cho $\dfrac{1}{x_n} = x_1$.

Đặt $x_1 = 2\cos\varphi$. Khi đó

$$x_2 = 2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi} = \frac{4\cos^2\varphi - 1}{2\cos\varphi} = \frac{\sin^3\varphi}{\sin^2\varphi},$$

$$x_3 = 2\cos\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{\sin 3\varphi} = \frac{\sin 4\varphi}{\sin 3\varphi},$$

Tiếp tục như vậy, ta có

$$x_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi}.$$

Từ đó đẳng thức $\dfrac{1}{x_n} = x_1$ suy ra

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin(n+1)\varphi} = 2\cos\varphi sin(n+2)\varphi = 0.$$

Từ điều kiện x_k dương ta suy ra $\varphi = \pi/(n+2)$ và

$$\min\max\Big\{x_1, \frac{1}{x_1} + x_2, ..., \frac{1}{x_{n-1}} + x_n, \frac{1}{x_n}\Big\} = 2\cos(\pi/(n+2)).$$

8.2 Ước lượng tích và tổng của một số dãy số

Nội dung của phần này nhằm trình bày một số bài toán về ước lượng cũng như tính tổng và tích của một số dãy đặc biệt có liên quan đến các cấp số bằng các phương pháp truyền thống như quy nạp toán học, sử dụng đạo hàm, tích phân, biến đổi đại số, sử dụng tính chất của số phức,...

Ta nêu một dạng khác của bất đẳng thức Bernoulli.

Định lý 93 (Bất đẳng thức Bernoulli). *Với mọi bộ số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ cùng dấu và lớn hơn -1, ta đều có*

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geqslant 1+\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Proof. Để ý rằng

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) = (1+a_{n+1})\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$$

và

$$\Big(1+\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)(1+a_{n+1}) = \Big(1+\sum_{k=1}^{n+1} a_k\Big) + a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Vì vậy, ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức Bernoulli bằng phương pháp quy nạp thông thường. □

Từ đây, ta thu được bất đẳng thức Bernoulli (bậc nguyên) quen biết.

Hệ quả 26. *Với mọi số $a > -1$ và số tự nhiên n, ta đều có*

$$(1+a)^n \geqslant 1+na.$$

Bài toán 8. *Chứng minh rằng với mọi bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta đều có*

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{a_k^2}{a_{k+1}}\Big),$$

trong đó $a_{n+1} := a_1$.

Giải. Ta viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k+a_k^2) \leqslant \prod_{k=1}^{n}(a_k^2+a_{k+1}).$$

Do các tổng trong các ngoặc đơn đều dương nên bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức đối với tổng bằng cách logarit hoá hai vế.

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k^2 + a_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k^2 + a_{k+1}).$$

Tiếp theo, để ý rằng, bộ số

$$(a_1^2 + a_2, a_2^2 + a_3, \dots, a_n^2 + a_1)$$

gần đều hơn bộ số

$$(a_1^2 + a_1, a_2^2 + a_2, \dots, a_n^2 + a_n).$$

Vì vậy, ứng với hàm lõm $f(x) = \ln x$ trong $(0, +\infty)$, ta nhận lại được bất đẳng thức Karamata quen thuộc.

Bài toán 9. *Cho a, b là cặp số dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{ak + b^{k-1}}{ak + b^{n-k}} \leqslant 1.$$

Giải. Ta viết bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$\prod_{k=1}^{n} (ak + b^{k-1}) \leqslant \prod_{k=1}^{n} (ak + b^{n-k}).$$

Nhận xét rằng khi n lẻ thì thì cả hai vế đều chứa thừa số

$$\Big(\frac{n+1}{2}\Big)a + b^{\frac{n-1}{2}}.$$

Do vậy, ta có thể viết bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$\prod_{k=1}^{[n/2]} (ak + b^{k-1})[(n-k+1)a + b^{n-k}]$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{[n/2]} (ak + b^{n-k})[(n-k+1)a + b^{k-1}].$$

Vậy nên chỉ cần kiểm chứng rằng ứng với mọi $k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$, ta đều có

$$(ak + b^{k-1})[(n-k+1)a + b^{n-k}] \leqslant (ak + b^{n-k})[(n-k+1)a + b^{k-1}].$$

Điều này tương đương với

$$(n-2k+1)ab^{k-1} \leqslant (n-2k+1)ab^{n-k},$$

là hiển nhiên vì

$$n-2k+1 \geqslant n-2\Big(\frac{n}{2}\Big)+1 = 1 > 0.$$

Bài toán 10. *Cho p là một số nguyên dương, $q \in (0,1)$. Giả sử $x \in [q^{p+1}, 1)$và*

$$f(x) = \prod_{k=1}^{p} \frac{x-q^k}{x+q^k}.$$

Chứng minh rằng

$$|f(x)| \leqslant \prod_{k=1}^{p} \frac{1-q^k}{1+q^k}.$$

Giải. Ta có

$$0 < q^{p+1} < q^p < \cdots < q < 1.$$

Với $q^{j+1} \leqslant x \leqslant q^j$ thì khi $i \geqslant j+1$ ta có $x \geqslant q^i$. Vậy nên

$$\Big|\frac{x-q^i}{x+q^i}\Big| = \frac{x-q^i}{x+q^i}.$$

Để ý rằng

$$\frac{x-q^i}{x+q^i} - \frac{1-q^i}{1+q^i} = \frac{2q^i(x-1)}{(x+q^i)(1+q^i)} \leqslant 0.$$

Do đó

$$\prod_{k=j+1}^{p} \Big|\frac{x-q^k}{x+q^k}\Big| \leqslant \prod_{k=j+1}^{p} \frac{1-q^k}{1+q^k}. \tag{2.5}$$

Với $k = 1, \ldots, j$ thì ta có

$$\Big|\frac{x-q^{j-(k-1)}}{x+q^{j-(k-1)}}\Big| = \frac{q^{j-(k-1)}-x}{q^{j-(k-1)}+x}$$

và

$$\frac{q^{j-(k-1)}-x}{q^{j-(k-1)}+x} - \frac{1-q^k}{1+q^k} = \frac{2(q^{j+1}-x)}{(1+q^k)[x+q^{j-(k-1)}]} \leqslant 0.$$

Vậy nên

$$\prod_{k=1}^{j} \Big|\frac{x-q^k}{x+q^k}\Big| \leqslant \prod_{k=1}^{j} \frac{1-q^k}{1+q^k}. \tag{2.6}$$

Từ (2.5) và (2.6) ta thu được

$$\prod_{k=1}^{p}\Big|\frac{x-q^k}{x+q^k}\Big| \leqslant \prod_{k=1}^{p}\frac{1-q^k}{1+q^k},$$

hay

$$|f(x)| \leqslant \prod_{k=1}^{p}\frac{1-q^k}{1+q^k},$$

(điều phải chứng minh).

Bài toán 11 (APMO 1989). *Cho dãy số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$. Chứng minh rằng*

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{S_n^k}{k!},$$

trong đó

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức AG đối với vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \Big[\frac{(1+x_1)+(1+x_2)+\cdots+(1+x_n)}{n}\Big]^n,$$

hay

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \Big(1+\frac{S_n}{n}\Big)^n.$$

Sử dụng khai triển Newton, ta thu được

$$\Big(1+\frac{S_n}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{S-n}{n}\Big)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\Big(\frac{S-n}{n}\Big)^k.$$

Theo bất đẳng thức AG, thì

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) \leqslant n^k$$

nên

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\Big(\frac{S-n}{n}\Big)^k \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{S_n^k}{k!},$$

đpcm.

Bài toán 12 (Đề dự tuyển IMO 2001). *Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là dãy các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng*

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Giải.

Đặt vế trái của bất đẳng là S. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$S^2 \leqslant n\Big[\frac{x_1^2}{1+x_1^2)^2} + \frac{x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2)^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2)^2}\Big].$$

Để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{x_1^2}{1+x_1^2)^2} + \frac{x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2)^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2)^2} < 1.$$

Nhưng điều này là hiển nhiên vì

$$\frac{x_k^2}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2)^2} \leqslant \frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2} - \frac{1}{1+x_1^2+\cdots+x_k^2}.$$

Bài toán 13. *Cho $a, c > 0$. Xét dãy số $\{a_n\}$ được xác định theo công thức*

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = ca_n^2 + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} a_n > n\Big(na_1 - \frac{1}{c}\Big), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Nhận xét rằng, từ giả thiết đã cho ta có thể viết

$$\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1} + \dfrac{1}{c}}.$$

Vậy nên

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k + \dfrac{1}{c}}.$$

Suy ra, theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân thì

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \geqslant \frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \dfrac{n}{c}}.$$

Do đó
$$\frac{1}{a_1} \geqslant \frac{n^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \frac{n}{c}}$$
hay
$$\sum_{k=1}^{n} a_n > n\Big(na_1 - \frac{1}{c}\Big), \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài toán 14. *Cho dãy số thực* $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ *thoả mãn các điều kiện :*
$$a_0 = a_{n+1} = 0,$$
$$|a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}| \leqslant 1 \ \ (k = 1, \dots, n).$$
Chứng minh rằng
$$|a_k| \leqslant \frac{k(n+1-k)}{2} \ \ (k = 0, 1, \dots, n+1).$$

Giải. Đặt
$$b_k = \frac{k(n+1-k)}{2} \ \ (k = 0, 1, \dots, n+1).$$
Nhận xét rằng
$$b_0 = b_{n+1} = 0, \ \ b_{k-1} - 2b_k + b_{k+1} = -1 \ \ (k = 1, \dots, n). \tag{1.2}$$
Giả sử tồn tại chỉ số i sao cho $a_i > b_i$. Gọi $a_j - b_j$ là số lớn nhất của dãy
$$a_0 - b_0, a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n, a_{n+1} - b_{n+1}.$$
Khi đó
$$(a_{j-1} - b_{j-1}) + (a_{j+1} - b_{j+1}) < 2(a_j - b_j). \tag{1.3}$$
Mặt khác, từ giả thiết ta có
$$a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geqslant -1 \ \ (k = 1, \dots, n).$$
Kết hợp với (1), ta thu được
$$(a_{k-1} - b_{k-1}) - 2(a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1}) \geqslant 0, \ \ (k = 1, \dots, n).$$
Như vậy với $k = j$, ta nhận được
$$(a_{j-1} - b_{j-1}) + (a_{j+1} - b_{j+1}) \geqslant 2(a_j - b_j),$$

điều này trái với (1.3). Vậy, ta luôn có

$$a_k \leqslant b_k = \frac{k(n+1-k)}{2} \ \ (k = 0, 1, \dots, n+1).$$

Tương tự, ta cũng thu được kết quả

$$a_k \geqslant -b_k = -\frac{k(n+1-k)}{2} \ \ (k = 0, 1, \dots, n+1).$$

Từ đó, ta thu được

$$|a_k| \leqslant b_k = \frac{k(n+1-k)}{2} \ \ (k = 0, 1, \dots, n+1).$$

Bài toán 15. *Cho dãy số thực dương $\{a_n\}$ thoả mãn các điều kiện*

$$\sum_{i=n+1}^{2n} a_i \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \ \ \forall n = 1, 2, \dots .$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant 5a_1, \ \ \forall n = 2, 3, \dots .$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2^n} a_i &= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} a_i + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_i \\ &\leqslant \Big(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\Big)\sum_{i=1}^{2^{n-1}} a_i.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{i=1}^{2^n} a_i \leqslant \Big(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\Big)\Big(1 + \frac{1}{2^{n-2}}\Big)\cdots\Big(1 + \frac{1}{2}\Big)2a_1.$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, thì

$$\Big(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\Big)\Big(1 + \frac{1}{2^{n-2}}\Big)\cdots\Big(1 + \frac{1}{2}\Big) \leqslant \left(\frac{n-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{2^n} a_i \leqslant 2a_1 \left(\frac{n-1+\dfrac{1}{2}\times 2}{n-1} \right)^{n-1} = 2a_1\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{n-1}.$$

Để ý rằng

$$\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{n-1} < e < 3 \ \text{ với mọi } \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó, ta thu được

$$\sum_{i=1}^{2^n} a_i \leqslant 6a_1.$$

Suy ra

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant 5a_1, \ \ \forall n = 2, 3, \ldots .$$

Bài toán 16. *Cho số nguyên dương $n > 1$ và số thực $p > 0$. Xét các dãy số $\{x_1, \ldots, x_n\}$ không âm thoả mãn điều kiện*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = p.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

Giải. Đặt

$$x_k = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} &= \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} + \sum_{i=k}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &\leqslant x_k \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \sum_{i=k}^{n-1} x_{i+1} \\ &= x_k(p - x_k) \leqslant \frac{p^2}{4}.\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có hai số của dãy bằng $\dfrac{p}{2}$, các số khác đều bằng 0. Vậy

$$\max \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \frac{p^2}{4}.$$

8.3 Bất đẳng thức trong tập rời rạc

Trong phần này, ta đề cập tới một số bài toán liên quan đến tính toán và ước lương trên tập các số nguyên hoặc hữu tỷ. Do đặc thù của tập số đang xét, nhiều bài toán cực trị (trong tập rời rạc) cần đến sự điều chỉnh cách giải (tiếp cận phương pháp mới) thì mới giải quyết được. Chẳng hạn, khi ta có hai số tự nhiên có tổng bằng 7, thì tích của nó lớn nhất không thể xảy ra khi hai số nguyên đó bằng nhau được. Ta cần đến khái niệm và thuật toán điều chỉnh gần đều ở các chương trước để áp dụng.

Bài toán 17. *Chứng minh rằng với mọi số thực $x \geqslant 0$ và mọi số n nguyên dương, ta có*

$$[nx] \geqslant \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[nx]}{n}. \tag{1.1}$$

Giải. Ta có $x = [x] + \{x\} = m + \alpha$, với $m = [x]$, $\alpha = \{x\}$. Từ đó suy ra $[kx] = [km + k\alpha] = km + [k\alpha]$. Do đó, bất đẳng thức (1.1) trở thành

$$mn + [n\alpha] \geqslant \Big(m + \frac{[\alpha]}{1}\Big) + \Big(m + \frac{[\alpha]}{2}\Big) + \cdots + \Big(m + \frac{[\alpha]}{n}\Big),$$

hay

$$[n\alpha] \geqslant \frac{[\alpha]}{1} + \frac{[2\alpha]}{2} + \cdots + \frac{[n\alpha]}{n}.$$

Bài toán 18. *Cho a là một số thực, q là một số nguyên dương, $q > 1$ và ϵ là số thực dương tuỳ ý. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên m, n sao cho*

$$\frac{m}{q^n}a < \frac{m}{q^n} + \epsilon.$$

Giải. Với mỗi số nguyên dương n, đặt

$$m_n = [q^n a].$$

Khi đó ta có

$$m_n q^n a m_n + 1.$$

Suy ra

$$\frac{m_n}{q^n} a \frac{m_n}{q^n} + \frac{1}{q^n}.$$

Vì $q > 1$ nên chọn n đủ lớn, ta được $\dfrac{1}{q^n} < \epsilon$. Khi đó

$$\frac{m_n}{q^n}a < \frac{m_n}{q^n} + \epsilon.$$

Vậy với mọi số nguyên n, luôn tồn tại một số nguyên $m = m_n = [q^n a]$, sao cho

$$\frac{m}{q^n}a < \frac{m}{q^n} + \epsilon.$$

Bài toán 19. *Cho số nguyên dương N. Tìm giá trị lớn nhất trong dãy số C_N^n ($n = 0, 1, \dots, N$).*

Giải. Do $C_N^k = C_N^{N-k}$ nên ta chỉ cần xét dãy $\{C_N^n\}$ với $n = 0, 1, \dots, \left[\dfrac{N}{2}\right]$. Mặt khác thì với $n = 1, \dots, \left[\dfrac{N}{2}\right]$, ta có

$$C_N^{n-1} < C_N^n,$$

nên

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N}\{C_N^n\} = C_N^p,\ \ p = \left[\frac{N}{2}\right].$$

Bài toán 20. *Cho số nguyên dương n. Gọi s_n là trung bình cộng các ước của n. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{n} \leqslant s_n \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Giải. Sắp xếp các ước của n theo thứ tự tăng dần

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

Khi đó

$$d_1 d_k = d_2 d_{k-1} = \cdots = n.$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, thì

$$\begin{aligned} s_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} d_i}{k} &= \frac{(d_1+d_k)+(d_2+d_{k-1})+\cdots+(d_k+d_1)}{2k} \\ &= \frac{\dfrac{d_1+d_k}{2}+\dfrac{d_2+d_{k-1}}{2}+\cdots+\dfrac{d_k+d_1}{2}}{k} \\ &\geqslant \frac{\sqrt{d_1d_k}+\sqrt{d_2d_{k-1}}+\cdots+\sqrt{d_kd_1}}{k} = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta xét hiệu $m_{ik} = n + 1 - (d_i + d_{k-i+1})$. Ta có $m_{ik} = 0$ khi $d_i = 1$ và $m_{ik} > 0$ khi $1 < d_i \leqslant d_{k-i+1}$. Suy ra

$$2\sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{k}(d_i + d_{k-i+1}) \leqslant k(n+1),$$

tức là

$$s_n \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Từ đây, ta có kết luận

$$\sqrt{n} \leqslant s_n \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Bài toán 21. *Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng*

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Giải. Nhận xét rằng

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = C_n^0 + C_n^1\Big(\frac{1}{n}\Big) + C_n^2\Big(\frac{1}{n^2}\Big) + \cdots + C_n^n\Big(\frac{1}{n^n}\Big),$$

và

$$C_n^k\Big(\frac{1}{n^k}\Big) = \frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!n^k} < \frac{1}{k!}.$$

Từ đây, ta thu được bất đẳng thức

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Bài toán 22. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{2n+1}\Big)\frac{\pi^2}{6} \ < \ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \ < \Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)\Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big)\frac{\pi^2}{6}.$$

Giải. Với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, ta có bất đẳng thức $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$,
hay

$$\cot\alpha < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\sin\alpha}. \tag{1.4}$$

Các số

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1},\ \cot^2\frac{2\pi}{2n+1},\ \cot^2\frac{3\pi}{2n+1},\ldots,\ \cot^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

là n nghiệm của đa thức bậc n sau :

$$x^n - \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1}x^{n-1} + \frac{C_{2n+1}^5}{C_{2n+1}^1}x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{C_{2n+1}^{2n-1}}{C_{2n+1}^1}x + \frac{(-1)^n}{C_{2n+1}^1}.$$

Do đó, tổng các nghiệm này là

$$\begin{aligned}\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{3\pi}{2n+1}+\cdots+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}&=\\=\frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1}=\frac{n(2n-1)}{3}.\end{aligned}$$

Vậy

$$\sum_{k=1}^{n}\cot^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}. \tag{1.5}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{2\pi}{2n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sin^2\dfrac{n\pi}{2n+1}}\\=&\ \cot^2\frac{\pi}{2n+1}+1+\cot^2\frac{2\pi}{2n+1}+1+\cdots+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}+1\\=&\ \frac{n(2n-1)}{3}+n=\frac{2n(n+1)}{3}.\end{aligned}$$

Vậy nên

$$\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{2\pi}{2n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sin^2\dfrac{n\pi}{2n+1}}=\frac{2n(n+1)}{3}. \tag{1.6}$$

Từ (1.4), (1.5) và (1.6) ta có

$$\frac{n(2n-1)}{3}=\sum_{k=1}^{n}\cot^2\frac{k\pi}{2n+1}<\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{2n+1}{k\pi}\Big)^2<\frac{2n(n+1)}{3}.$$

Chia tất cả các số hạng của bất đẳng thức cho $\Big(\dfrac{2n+1}{\pi}\Big)^2$, ta được

$$\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{2n+1}\Big)\frac{\pi^2}{6}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)\Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big)\frac{\pi^2}{6}.$$

Nhận xét 28. *Từ bất đẳng thức trên, cho $n\to\infty$, ta thu được*

$$\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{2n+1}\Big)\frac{\pi^2}{6}\longrightarrow\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)\Big(1+\frac{2}{2n+1}\Big)\frac{\pi^2}{6}\longrightarrow\frac{\pi^2}{6}.$$

Vậy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Bài toán 23. *Cho* $0 < x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant 1$. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\frac{1}{1+n(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}.$$

Giải. Đặt $1-x_i=a_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Nhận xét rằng $0\leqslant a_i<1$ và bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(1-a_1)+(1-a_2)+\cdots+(1-a_n)}{n}\leqslant\frac{1}{1+na_1a_2\cdots a_n},$$

hay

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1+na_1a_2\cdots a_n)\geqslant n^2a_1a_2\cdots a_n.$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân thì

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

và

$$1+na_1a_2\cdots a_n\geqslant 1+(n-1)a_1a_2\cdots a_n\geqslant n\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^{n-1}}.$$

Từ đó ta có ngay điều phải chứng minh.

Nhận xét rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=1.$$

Bài toán 24 (MO Hàn Quốc 1999). *Cho hàm số* $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện*

$$|f(p+q)-f(p)|\leqslant\frac{p}{q},$$

ứng với mọi cặp số hữu tỷ dương p, q. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{n}|f(2^n)-f(2^k)|\leqslant\frac{n(n-1)}{2}.$$

Giải.

Từ giả thiết, ta thu được

$$|f(2^{k+1})-f(2^k)|\leqslant\frac{2^{k+1}-2^k}{2^k}=1.$$

Suy ra, ứng với $n > k$, ta thu được

$$|f(2^n) - f(2^k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |f(2^{k+1}) - f(2^k)| \leqslant n - k.$$

Do vậy

$$\sum_{k=1}^{n} |f(2^n) - f(2^k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Bài toán 25 (APMO 1990). *Cho dãy số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$. Gọi S_k là tổng tất cả các tích của k số lấy từ dãy đã cho. Chứng minh rằng*

$$S_k S_{n-k} \geqslant \left[\binom{n}{k}\right]^2 a_1 a_2 \cdots a_n, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức AG đối với bộ $\binom{n}{k}$ số

$$S_k = \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_n \leqslant n} a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k} \geqslant \binom{n}{k} \Big(\prod_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_n \leqslant n} a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k} \Big)^{1/\binom{n}{k}}.$$

Do

$$\Big(\prod_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_n \leqslant n} a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k} \Big)^{1/\binom{n}{k}} = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{k}{n}},$$

nên suy ra

$$S_k = \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_n \leqslant n} a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k} \geqslant \binom{n}{k} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{k}{n}}.$$

Tiếp theo, đổi vai trò k bởi $n - k$, ta thu được

$$S_{n-k} \geqslant \binom{n}{n-k} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{n-k}{n}}.$$

Do đó

$$S_k S_{n-k} \geqslant \left[\binom{n}{k}\right]^2 a_1 a_2 \cdots a_n,$$

đpcm.

Bài toán 26. *Cho x, y là các số nguyên không đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x, y) = |5x^2 + 11xy - 5y^2|.$$

Cách giải.

Đặt $\alpha = \min|f(x,y)|$ với $f(x,y) = 5x^2 + 11xy - 5y^2$. Vì $x,\ y \in Z \to \alpha \in \mathbb{N}$. Ta có : $f(1,0) = 5 \to \alpha \leqslant 5$. Xét $x = 2k,\ y = 2m$ thì :$f(2k,2m) = 4f(k,m)$ nên giá trị $f(2k,2m)$ không thể là giá trị nhỏ nhất, do đó $x,\ y$ không cùng chẵn nên α là số lẻ. Giả sử $\alpha = 1$ tức là tồn tại (x_0, y_0) sao cho :

$$|5x_0^2 + 11x_0y_0 - 5y_0^2| = 1$$

$$\to 20(5x_0^2 + 11x_0y - 5y_0^2) = \pm 20$$

$$\to (10x_0 + 11y_0)^2 - 211y_0^2 = \pm 20$$

Vì $211 = 13.17$ nên $(10x_0 + 11y_0) \pm 20$ là bội số 13 điều này vô lý. Lập luận tương tự ta cũng loại được giá trị $\alpha = 3$. Vậy $\min f(x,y) = 5$, giá trị này đạt được với chẳng hạn

$$x = 1, y = 0$$

.

Bài toán 27. *Cho n số $a_1, a_2, ..., a_n$ đôi một khác nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:*

$$y = |x - a_1| + |x - a_2| + ... + |x - a_n|.$$

Cách giải.

Để ý rằng với $a < b$, ta có :

$T = |x - a| + |x - b| \geqslant |(x - a) - (x - b)| = |b - a| = b - a$ dấu đẳng thức xảy ra khi $a \leqslant x \leqslant b$.

Giả sử $a_1 < a_2 < .... < a_n$.

* Nếu $n = 2m$:

$$y = |x - a_1| + |x - a_2| + ... + |x - a_n|$$

$$= (|x-a_1|+|x-a_{2m}|)+(|x-a_2|+|x-a_{2m-1}|)+..........+(|x-a_m|+|x-a_{m+1}|)$$

$$\geqslant (a_{2m} - a_1) + (a_{2m-1} - a_2) + ... + (a_{m+1} - a_m)$$

suy ra $y \geqslant -(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{2m})$.

Để ý $(a_m, a_{m+1}) \subset (a_{m-1}, a_{m+2}) \subset .... \subset (a_1, a_{2m})$ nên dấu bằng xảy ra khi $a_m \leqslant x \leqslant a_{m+1}$.

Như vậy, trong trường hợp $n = 2m$ thì :

$$\min y = -(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{2m})$$

* Nếu $n = 2m + 1$.

$$y = (|x-a_1|+|x-a_{2m+1}|)+(|x-a_2|+|x-a_{2m}|)+..........+(|x-a_m|+|x-a_{m+2}|)+|x-a_{m+1}|$$

$$\geqslant (a_{2m+1} - a_1) + (a_{2m} - a_2) + ... + (a_{m+2} - a_m) + |x - a_{m+1}|$$

$$\geq slant - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_m) + (a_{m+2} + a_{m+3} + ... + a_{2m+1}) + 0$$

Để ý $a_{m+1} \in (a_i, a_{2m+2-i})$ nên dấu đẳng thức xảy ra khi

$$x = a_{m+1}$$

Như vậy, trong trường hợp $n = 2m + 1$ thì :

$$\min y = -(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_m) + (a_{m+2} + a_{m+3} + ... + a_{2m+1})$$

8.4 Bài tập

Bài 1. *Cho hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0,1]$ và hàm số*

$$f(x) = \int\limits_0^1 g(t)e^{tx}dt.$$

Ký hiệu

$$a_{ij} = f^{(i+j-2}(x),\ \ i,j = 1,2,3.$$

Chứng minh rằng

$$\det(a_{ij}) \geqslant 0,\ \ \forall x \in (0,1).$$

Bài 2. *Cho hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0,1]$ và hàm số*

$$f(x) = \int\limits_0^1 g(t)e^{\lambda tx}dt,\ \ \lambda \geqslant 0.$$

Chứng minh rằng với mọi dãy số tự nhiên $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ gần đều hơn dãy $(m_1, m_2, \dots, m_k)$, ta đều có

$$f^{(n_1)}(x) \cdots f^{(n_k)}(x) \geqslant f^{(m_1)}(x) \cdots f^{(m_k)}(x),\ \ \forall x \in (0,1).$$

Bài 3. *Chứng minh rằng với mọi bộ số (a_k), ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} < \sqrt{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Bài 4. *Chứng minh rằng với mọi bộ số* (a_k), *ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{n+k}} < (\ln 2)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Bài 5. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Bài 6. *Chứng minh rằng*

$$\Big(1+\frac{1}{3}\Big)\Big(1+\frac{1}{8}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{n^2+2n}\Big) < 2.$$

Bài 7. *Chứng minh rằng*

$$\Big(1+\frac{1}{2}\Big)\Big(1+\frac{1}{5}\Big)\cdots\Big(1+\frac{2}{n^2+3n}\Big) < 3.$$

Bài 8. *Chứng minh rằng*

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

Bài 9. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Tổng quát hoá bài toán.

Bài 10 (Bất đẳng thức Carleman). *Chứng minh rằng với mọi dãy số dương* $a_1, a_2, \ldots,$ *ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant e \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Bài 11. *Xét dãy số dương* $\{a_n\}$ *được xác định như sau :*

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Đặt

$$u_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,\ k = 1, 2, \ldots .$$

Chứng minh rằng

$$18 < \frac{1}{u_k} < 24.$$

Bài 12. *Xét hai dãy số dương* $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *được xác định như sau :*

$$a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2,\ b_{n+1} = 2a_nb_n,\ n = 1, 2, \dots .$$

Chứng minh rằng

$$\frac{(\sqrt{2}+1)^{2^n}}{4\sqrt{2}} < b_n < a_n < (\sqrt{2}+1)^{2^n}.$$

Bài 13. *Cho k số dương* ($k \geqslant 2$) *thoả mãn điều kiện*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geqslant k.$$

Đặt

$$u_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n,\ n = 1, 2, \dots .$$

Tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$ *ứng với mỗi n cho trước.*

Bài 14. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *được xác định như sau :*

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^4},\ n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng không tồn tại hằng số c sao cho $x_n \leqslant c$ *với mọi* $n \geqslant 1$.

Bài 15. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *được xác định như sau :*

$$x_1 = 2,9;\ x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}},\ n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại số a sao cho

$$x_{2k} < a < x_{2k-1},\ k = 1, 2, \dots .$$

Bài 16. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *được xác định như sau :*

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} - 1,\ n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại số a sao cho

$$|x_{n+1} - a| < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n,\ n = 1, 2, \dots .$$

Bài 17. *Cho số dương m. Ứng với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, xét dãy số $\{a_{n,i}\}$ được xác định như sau :*

$$a_{n,0} = 1,\ a_{n,i+1} = a_{n,i}\Big(1 + \frac{1}{mn} - aa_{n,i}\Big),\ i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Chứng minh rằng

$$a_{nn} < \frac{m}{m-1},\ \forall n > 1.$$

Bài 18. *Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác diện tích S. Xét dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau :*

$$a_n = \frac{a^n + b^n + c^n}{(\sqrt{S})^n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng

$$a_n \geq \frac{2^n}{3^{\frac{n-4}{4}}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 19. *Cho h_a, h_b, h_c và m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường cao và trung tuyến của một tam giác diện tích S. Xét dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau :*

$$a_n = \frac{h_a m_b^{4n} + h_b m_c^{4n} + h_c m_a^{4n}}{(3\sqrt{S})^n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng

$$a_n \geqslant 3^{\frac{5}{4}} S,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 20. *Xét dãy số nguyên dương $\{a_n\}$ thoả mãn các điều kiện :*

$$a_0 = 1,\ a_n^2 > a_{n-1}a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt

$$u_n = \frac{1}{n^2}\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \cdots + \frac{n}{a_n}\Big).$$

Chứng minh rằng

$$0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

Bài 21. *Cho dãy số $\{x_k\}$ thoả mãn điều kiện $x_0 = 0$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=0}^{n-2} (x_i - x_{i+1})^2 \geqslant 4\sin^2 \frac{\pi}{2(2n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2.$$

Bài 22. *Cho dãy số* $\{x_k\}$ *thoả mãn điều kiện :*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,\ \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = 1,\ x_{n+1} = x_1.$$

Chứng minh rằng

$$J(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - x_{i+1}| = \begin{cases} \dfrac{4}{n}, & \text{khi } n \text{ chẵn,} \\ \dfrac{4n}{n^2-1}, & \text{khi } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Bài 23 (Z.Madevski). *Chứng minh rằng với mọi bộ ba dãy số thực* $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$ *và* $c = (c_1, \dots, c_n)$ *sao cho ma trận*

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & -c_n \end{bmatrix}$$

có hạng là ba, ta đều có

$$\Big(\sum a_i^2\Big)\Big(\sum b_i^2\Big) - \Big(\sum a_i b_i\Big)^2 \geqslant \Big(\sum c_i^2\Big)^{-1} \sum_j \Big(\sum_k (c_k(a_j b_k - a_k b_j))\Big)^2.$$

Chương 9

Bất đẳng thức tích phân

9.1 Ước lượng một số biểu thức chứa tích phân

Ta nhắc lại ý nghĩa hình học của tích phân :

Định lý 94. *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a, b]$ thì*

$$\int_a^b f(x)dx$$

là phần diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành x và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

Về sau, ta sử dụng các tính chất cơ bản sau đây liên quan đến ước lượng tích phân.

Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên khoảng $X \subset \mathbb{R}$ và $a, b, c \in X$. Khi đó

1) Nếu $f(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

2) Nếu $f(x) \geqslant g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx.$$

3) Nếu $m \leqslant f(x) \leqslant M$ với mọi $x \in [a, b]$ thì

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

4) Tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

5) Với mọi $f(x)$ xác định trên $[a, b]$, ta đều có

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

Định lý 95. . *Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm, đơn điệu tăng trên $[0, c)$ với $c > 0$. Gọi $f^{-1}(x)$ là hàm ngược của nó. Khi đó, $\forall a \in [0, c)$ và $b \in [f(0), f(c))$, ta luôn có*

$$\int_0^a f(x)dx + \int_{f(c)}^b f^{-1}(x)dx \geqslant ab.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = f(a)$.

Proof. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $x = 0, x = a, y = 0, y = f(x)$, thì

$$S_1 = \int_0^a f(x)dx.$$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(0), y = b, x = 0, x = f^{-1}(y)$ thì

$$S_2 = \int_{f(0)}^b f^{-1}(x)dx.$$

Gọi S là diện tích hình chữ nhật tạo bởi $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ thì $S = ab$. Trong cả hai trường hợp $f(a) \leqslant b$ và $f(a) > b$, ta đều có $S_1 + S_2 \geqslant S$, nên

$$\int_0^a f(x)dx + \int_{f(0)}^b f^{-1}(x)dx \geqslant ab.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(a) = b$. $\square$

Đặc biệt, nếu $f(0) = 0$ thì ta có

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geqslant ab.$$

Bài toán 1. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi x^m e^{2x}dx > \frac{\pi^{m+2}}{m+2} + \frac{\pi^{m+3}}{m+3},\ \ m \in \mathbb{N}.$$

Giải. Xét hàm số

$$f(x) = e^{2x} - 2(x^2 + x), x \geqslant 0.$$

Ta có

$$f'(x) = 2(e^{2x} - 2x - 1) \geqslant 0,\ \ \forall x \geqslant 0.$$

Do $f(0) = 1 > 0$ nên

$$e^{2x} > 2(x^2 + x),\ \ \forall x > 0.$$

Từ bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi x^m e^{2x}dx > \int_0^\pi x^m(x^2 + x)dx = \frac{\pi^{m+2}}{m+2} + \frac{\pi^{m+3}}{m+3}.$$

Bài toán 2. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\int_0^{1/n} \Big(\sum_{k=1}^n (\cos x)^{km} + n\sin x\Big)dx < \frac{5}{4},\ \ m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Với $m, n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\cos^{km} x \leqslant \cos^2 x = 1 - \sin^2 x,\ \ \forall x \in \Big[0; \frac{1}{n}\Big] \tag{1.1}$$

(Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$) và

$$1 - \sin^2 x + \sin x = \frac{5}{4} - \Big(\sin x - \frac{1}{2}\Big)^2 \leqslant \frac{5}{4},\ \ \forall x \in \Big[0; \frac{1}{n}\Big], \tag{1.2}$$

(Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin x = \dfrac{1}{2}$).

Từ (1.1) và (1.2), ta suy ra

$$(\cos x)^{km} + \sin x < \frac{5}{4}.$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{n} (\cos x)^{km} + n \sin x < \frac{5}{4} n.$$

Lấy tích phân từ 0 đến $\frac{1}{2}$, ta thu được

$$\int\limits_0^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{n} (\cos x)^{km} + n \sin x \Big) dx < \int\limits_0^{1/n} \frac{5}{4} n dx = \frac{5}{4}.$$

Bài toán 3. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^n x dx > \frac{1}{n+2} \Big(\frac{\pi}{4} \Big)^{n+2}, \ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Nhận xét rằng, với $0 \leqslant x \leqslant \alpha < \frac{\pi}{4}$, ta luôn có $0 \leqslant x \leqslant \tan x$, nên

$$x^{n+1} < x \tan^n x.$$

Với $\alpha \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, thì $0 < x < \tan x$, nên

$$x^{n+1} < x \tan^n x.$$

Từ đó, suy ra

$$\int\limits_0^{\alpha} x \tan^n x dx \geqslant \int\limits_0^{\alpha} x^{n+1} dx$$

và

$$\int\limits_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} x \tan^n x dx \geqslant \int\limits_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1} dx.$$

Vậy nên

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^n x dx > \frac{1}{n+2} \Big(\frac{\pi}{4} \Big)^{n+2}, \ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài toán 4. *Cho $b \geqslant a > 0$ và cho hàm số f liên tục trên $[a; +\infty]$ và thoả mãn điều kiện*

$$\int_a^t f^2(x)dx \leqslant \int_a^t x^2dx, \quad \forall t \geqslant a.$$

Chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b xdx.$$

Giải. Với $t > a$, ta có

$$\int_a^t \Big(mx - f(x)\Big)^2 dx =$$

$$= m^2 \int_a^t x^2dx - 2m \int_a^t xf(x)dx + \int_a^t f^2(x)dx \geqslant 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác, thì

$$\Big(\int_a^t xf(x)dx\Big)^2 \leqslant \int_a^t x^2dx. \int_a^t f^2(x)dx, \ \forall t > a.$$

Từ đó, suy ra

$$\Big(\int_a^t xf(x)dx\Big)^2 \leqslant \Big(\int_a^t x^2dx\Big)^2, \ \forall t > a$$

hay

$$\int_a^t xf(x)dx \leqslant \int_a^t x^2dx, \ \forall t > a.$$

Do đó

$$\int_a^t x[x - f(x)]dx \geqslant 0, \ \forall t > 0.$$

Xét hàm số

$$F(t) = \int_a^t x[x - f(x)]dx.$$

Ta có $F(t) \geqslant 0,\ \ \forall t > a$ và $F'(t) = t[t - f(t)]$. Do đó, với $b > a$, thì

$$\int\limits_a^b [x - f(x)]dx = \int\limits_a^b \frac{1}{x}[x(x - f(x))]dx$$

$$= \frac{1}{x}F(x)\Big|_a^b + \int\limits_a^b \frac{1}{x^2}F(x)dx = \frac{F(b)}{b} + \int\limits_a^b \frac{F(x)}{x^2}dx \geqslant 0.$$

Với $b = a$, thì

$$\int\limits_a^b \Big(x - f(x)\Big)dx = 0.$$

Vậy nên

$$\int\limits_a^b \Big(x - f(x)\Big)dx \geqslant 0,\ \ \forall b \geqslant a,$$

hay

$$\int\limits_a^b xdx \geqslant \int\limits_a^b f(x)dx,\ \ \forall b \geqslant a.$$

Bài toán 5. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên $[a, b]$. Chứng minh rằng, với mọi phép phân hoạch đoạn $[a, b]$ bởi các điểm*

$$x_0, x_1, \dots , x_n\ \ (a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b)$$

ta đều có

1) Nếu $f(x)$ đồng biến trên $[a, b]$ thì

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) < \int\limits_a^b f(x)dx < \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i),$$

2) Nếu giả thiết thêm rằng $f''(x) > 0\ \ \forall x \in [a, b]$ thì

$$\int\limits_a^b f(x)dx < \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}$$

Giải. Ký hiệu

$$C_i(x_i; f(x_{i+1})); B_i(x_{i+1}; f(x_i)); A_i(x_i; f(x_i)); A(a,0); B(b,0)$$

và S_1 là diện tích đa giác $AC_0A_1C_1 \ldots A_{n-1}C_{n-1}A_nB$ (là tổng diện tích các hình chữ nhật có các kích thước$f(x_i)$ và $x_i - x_{i-1}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$). Khi đó, ta có

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i).$$

Gọi S_2 là diện tích đa giác $AA_0B_1A_1...B_{n-1}A_{n-1}B_nB$ (là tổng diện tích các hình chữ nhật có kích thước$f(x_{i-1})$ và $x_i - x_{i-1}$ với i = 1, 2, . . . , n). Khi đó

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}).$$

Vậy nên, nếu $f(x)$ đồng biến trên $[a, b]$, thì $S_2 < S < S_1$, hay

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) < \int_a^b f(x)dx < \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i)$$

2) Gọi S_3 là diện tích đa giác $AA_0A_1...A_nB$. Khi đó

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}.$$

Vì $f''(x) > 0$ trong $[a, b]$, nên ta có

$$\int_a^b f(x)dx < \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}.$$

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự như Bài toán 8, ta có :

Nếu $f(x)$ nghịch biến trên $[a, b]$, thì

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) > \int_a^b f(x)dx > \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i)).$$

Nếu có thêm $f''(x) < 0$ trong đoạn $[a, b]$, thì

$$\int_a^b f(x)dx > \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}.$$

Ta nhắc lại bất đẳng thức Bunhiacowski.

Định lý 96 (Bất đẳng thức Bunhicowski). *Với mọi cặp hàm $f(x)$ và $g(x)$, liên tục trên $[a, b]$, ta đều có*

$$\Big(\int_a^b f(x).g(x)dx\Big)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx.$$

Proof. Từ hệ thức

$$[tf(x) + g(x)]^2 \geqslant 0,$$

áp dụng tính chất tích phân, ta suy ra

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geqslant 0.$$

Đến đây, coi bất đẳng thức trên là bất phương trình bậc hai theo t, ta có $\Delta' \leqslant 0$ và nhận được

$$\Big(\int_a^b f(x).g(x)dx\Big)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx.$$

□

Nhận xét 29. *Ta có*

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacowski, ta thu được

$$1 = \Big(\int_0^1 dx\Big)^2 = \Big(\int_0^1 \sqrt{x+1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx\Big)^2 < \int_0^1 (x+1)dx\int_0^1 \frac{dx}{x+1}.$$

Do

$$\int_0^1 (x+1)dx = \Big(\frac{x^2}{2} + x\Big)\Big|_0^1 = \frac{3}{2},$$

nên

$$\ln 2 > \frac{2}{3}.$$

Bài toán 6. *Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0,1]$ và $f(1)-f(0)=1$. Chứng minh rằng*

$$\int\limits_0^1 \Big(f'(x)\Big)^2 dx \geqslant 1.$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacowski với cặp hàm số $f(x)$ và $g(x)$ $(\equiv 1)$, ta có

$$\Big(\int\limits_0^1 f'(x)dx\Big)^2 \leqslant \int\limits_0^1 \Big(f'(x)\Big)^2 dx \int\limits_0^1 dx. \tag{1.3}$$

Theo công thức Newton - Leibnitz, thì

$$\int\limits_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1)-f(0) = 1.$$

Từ (1.3), suy ra

$$\int\limits_0^1 \Big(f'(x)\Big)^2 dx \geqslant 1.$$

Bài toán 7. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$e^x - 1 < \int\limits_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}dt < \sqrt{(e^x-1)\Big(e^x-\frac{1}{2}\Big)}\ \ x>0.$$

Giải. Ta có

$$\int\limits_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}dt = \int\limits_0^x e^{\frac{1}{2}}\sqrt{e^t+e^{2t}}dt. \tag{1.4}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacowski, thì

$$\Big(\int\limits_0^x e^{\frac{1}{2}}\sqrt{e^t+e^{-2t}}2t\Big)^2 \leqslant \int\limits_0^x e^t dt \int\limits_0^x (e^t+e^{-2t})dt.$$

Từ (1.4), ta có

$$\begin{aligned}\Big(\int\limits_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}dt\Big)^2 &\leqslant (e^x-1)\Big(e^x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big)\\ &< (e^x-1)\Big(e^x-\frac{1}{2}\Big).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Mặt khác, thì

$$\sqrt{e^{2t}+e^{-t}} > e^t,\ \ 0 < t < x,$$

nên

$$\int\limits_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}dt > \int\limits_0^x e^t dt = e^x - 1. \tag{1.6}$$

Từ (1.5) và (1.6), suy ra

$$e^x - 1 < \int\limits_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}dt < \sqrt{(e^x-1)\Big(e^x-\frac{1}{2}\Big)}.$$

Bài toán 8. *Cho $a > 0$ và cho f là hàm liên tục trên $[a, +\infty]$ và thoả mãn điều kiện*

$$\int\limits_a^t f^2(x)dx < \int\limits_a^t x^2 dx \text{ với } t > a.$$

Chứng minh rằng

$$\int\limits_a^b f(x)dx < \int\limits_a^b x dx \text{ với } b > a.$$

Giải. Theo bất đẳng thức Bunhiacowski cho tích phân, ta có

$$\Big(\int\limits_a^t xf(x)dx\Big)^2 \leqslant \int\limits_a^t x^2dx \int\limits_a^t f^2(x)dx.$$

Theo giả thiết, thì $0 \leqslant \int\limits_a^t f^2(x)dx < \int\limits_a^t x^2dx$. Từ đó, suy ra

$$\Big(\int\limits_a^t xf(x)dx\Big)^2 \leqslant \Big(\int\limits_a^t x^2dx\Big)^2.$$

Vậy nên

$$\int\limits_a^t xf(x)dx < \int\limits_a^t x^2dx.$$

Xét hàm số

$$F(t) = \int\limits_a^t x\Big(x - f(x)\Big)dx > 0.$$

Ta có $F'(t) = t\Big(t - f(t)\Big)$, $F(a) = 0$, $F(b) > 0$ và $F(t) > 0$ với $t \in (a, b)$. Suy ra

$$\int\limits_a^b \Big(t - f(t)\Big)dt = \int\limits_a^b \frac{1}{t}F'(t)dt.$$

Đặt

$$\begin{cases} u & = \frac{1}{t}, \\ dv & = F(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du & = \frac{-dt}{t^2} \\ v & = F(t). \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần, thì

$$\int\limits_a^b \Big(t - f(t)\Big)dt = \frac{1}{t}F(t)\Big|_a^b + \int\limits_a^b \frac{F(t)}{t^2}dt = \frac{F(b)}{b} + \int\limits_a^b \frac{F(t)}{t^2}dt. \qquad (1.7)$$

Từ (1.7), suy ra

$$\int\limits_a^b \Big(t - f(t)\Big)dt > 0,$$

hay

$$\int\limits_a^b xdx > \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Bài toán 9. *Cho hàm số liên tục* $f : [0, 1] \to [-1, 1]$. *Chứng minh rằng*

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)}dx \leqslant \sqrt{1 - \Big(\int\limits_0^1 f(x)dx\Big)^2}.$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacowski cho cặp hàm số

$$h(x) = \sqrt{1 - f^2(x)}, \;\; G(x) \equiv 1$$

trên $[0, 1]$, ta có

$$\Big(\int\limits_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)}dx\Big)^2 \leqslant \int\limits_0^1 \Big(1 - f^2(x)\Big)dx \int\limits_0^1 dx.$$

Suy ra

$$\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)}dx \leqslant \sqrt{1-\int_0^1 f^2(x)dx}.$$

Tiếp theo, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacowski cho cặp hàm

$$F(x)=f(x),\ \ G(x)\equiv 1$$

trên $[0,1]$, ta có

$$\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)dx\int_0^1 dx.$$

Từ đó, suy ra

$$1-\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2 \geqslant 1-\int_0^1 f^2(x)dx.$$

Vậy nên

$$\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)}dx \leqslant \sqrt{1-\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2}.$$

Bài toán 10. *Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$ và $f(a)=0$. Đặt $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$. Chứng minh rằng*

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b \Big(f'(x)\Big)^2 dx.$$

Giải. Vì $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a,b]$ nên tồn tại $x_0\in[a,b]$, sao cho

$$|f(x_0)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacowski với cặp hàm $f'(x)$ và $g(x)=1$, ta có

$$\Big(\int_a^{x_0} f'(x)dx\Big)^2 \leqslant \int_a^{x_0}\Big(f'(x)\Big)^2dx\int_a^{x_0}dx=(x_0-a)\int_a^{x_0}\Big(f'(x)\Big)^2dx.$$

Do $\int\limits_a^{x_0} f'(x)dx = f(x_0)$ nên

$$|f(x_0)| \leqslant \sqrt{x_0 - a}\sqrt{\int\limits_a^{x_0} \Big(f'(x)\Big)^2 dx}.$$

Từ đó, suy ra

$$M \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f'(x)dx.\sqrt{b-a}} \Rightarrow M^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b \Big(f'(x)\Big)^2 dx.$$

Bài toán 11. *Tính giá trị nhỏ nhất của*

$$I_n = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}} \Big(\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x}\Big)dx, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Giải. Nhận xét rằng trong đoạn $\Big[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{8}\Big]$ thì $\sin x, \cos x \neq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} - (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \Big(\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} - \sin^2 x\Big) + \Big(\frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} - \cos^2 x\Big) \\ &= (\tan^n x - 1)(\tan^{n+2} x - 1)\frac{\cos^2 x}{\tan^n x}. \end{aligned}$$

Với $x \in \Big[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{8}\Big]$ thì $\tan x > 1$ và $\tan^k x > 1 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Do

$$\frac{\cos^2 x}{\tan^n x} \geqslant 0, \ \ \tan^n x - 1 > 0, \ \ \tan^{n+2} x - 1 \geqslant 0,$$

nên $f(x) \geqslant 0$.

Vậy, ta có

$$\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geqslant 1, \ \ x \in \Big[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\Big].$$

Tích phân hai vế, ta thu được

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}} \Big(\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x}\Big)dx \geqslant \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}} dx = \frac{\pi}{8}.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của I_n bằng $\frac{\pi}{8}$ khi $n = 0$.

Bài toán 12. *Cho trước $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân*

$$I(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{x} \Big(\frac{\sin^{n+2} t}{\cos^n t} + \frac{\cos^{n+2} t}{\sin^n t}\Big) dt - x, \ \ x \in \Big[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\Big].$$

Giải. ta có

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{x} \Big(\frac{\sin^{n+2} t}{\cos^n t} + \frac{\cos^{n+2} t}{\sin^n t}\Big) dt \geqslant \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{x} dt = t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{x} = x - \frac{\pi}{4}\cdot$$

Suy ra

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{x} \Big(\frac{\sin^{n+2} t}{\cos^n t} + \frac{\cos^{n+2} t}{\sin^n t}\Big) dt - x \geqslant -\frac{\pi}{4}\cdot$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $I(x)$ bằng $-\frac{\pi}{4}$ khi $x = \frac{\pi}{4}\cdot$

Bài toán 13. *Cho trước $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$I(x) = \int\limits_{2}^{x} t^2 \arctan^n t dt - \frac{x^{n+3}}{n+3}, \ \ x \geqslant 2.$$

Giải. Xét hàm số $y = \arctan t$. Khi đó

$$y' = \frac{1}{1+t^2}, \ \ y'' = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Ta thấy $y'' \leqslant 0, \ \ \forall t \geq 0$, nên $0 \leqslant \arctan t \leqslant t$ và $t^2 \arctan^n t \leqslant t^{n+2}$.

Suy ra

$$\int\limits_{2}^{x} t^2 \arctan^n t dt \leqslant \int\limits_{2}^{x} t^{n+2} dt = \frac{t^{n+3}}{n+3}\Big|_{2}^{x} = \frac{x^{n+3}}{n+3} - \frac{2^{n+3}}{n+3}.$$

Vậy nên

$$I(x) = \int\limits_{2}^{x} t^2 \arctan^n t dt - \frac{x^{n+3}}{n+3} \leqslant -\frac{2^{n+3}}{n+3}\cdot$$

Vậy, giá trị lớn nhất của $I(x)$ bằng $-\dfrac{2^{n+3}}{n+3}$ khi $x = 2$.

Bài toán 14. *Cho trước $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = \int\limits_0^x t\tan^n t dt - \frac{x^{n+2}}{n+2}, \;\; x \geqslant 0.$$

Giải. Ta có $\tan t \geqslant t$ nên $t\tan^n t \geqslant t^{n+1}$. Suy ra

$$\int\limits_0^x t\tan^n t dt \geqslant \int\limits_0^x t^{n+1} dt = \frac{t^{n+2}}{n+2}\Big|_0^x = \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

Do đó

$$\int\limits_0^x t\tan^n t dt - \frac{x^{n+2}}{n+2} \geqslant 0.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0 khi $x = 0$.

Nhận xét. Nếu ta cố định cận $x = \dfrac{\pi}{4}$ và đặt

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^n x dx \;\; , n \in \mathbb{N}^*,$$

thì

$$I_n > \left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2}$$

(Tuyển tập 200 Bài thi Vô địch Toán)

Bài toán 15. *Cho trước $m \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = \int\limits_1^x t^m e^{2t} dt - 2\Big(\frac{x^{m+3}}{m+3} + \frac{x^{m+2}}{m+2}\Big), \;\; x > 0.$$

Giải. Xét hàm số $y = e^{2x} - 2(x^2 + x), \;\; x \geq 0$. Ta có $y' = 2e^{2x} - 2(2x+1)$ và $y' = 0$ khi $x = 0$.

Với $x > 0$ thì $e^{2x} > 2x + 1$ nên $y' \geqslant 0 \;\; x \geqslant 0$.

Từ đó suy ra y đồng biến khi $x \geqslant 0$ và vì vậy $f(x) \geqslant f(0)$ với $x \geqslant 0$. Suy ra

$$e^{2x} - 2(x^2 + x) > 1 \Rightarrow e^{2x} > 1 + 2(x^2 + x) > 2(x^2 + x).$$

Nhân hai vế với x^m, ta thu được

$$e^{2x}x^m \geqslant 2(x^2+x)x^m.$$

Từ đó, ta có

$$\int\limits_1^x t^m e^{2t}dt \geqslant 2\int\limits_1^x t^m(t^2+t)dt = 2\Big(\frac{t^{m+3}}{m+3}+\frac{t^{m+2}}{m+2}\Big)\Big|_1^x$$

$$= 2\Big(\frac{x^{m+3}}{m+3}+\frac{x^{m+2}}{m+2}\Big) - \frac{2(2m+5)}{(m+3)(m+2)}.$$

Suy ra

$$\int\limits_1^x t^m e^{2t}dt - 2\Big(\frac{x^{m+3}}{m+3}+\frac{x^{m+2}}{m+2}\Big) \geqslant -\frac{2(2m+5)}{(m+3)(m+2)}.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng $-\dfrac{2(2m+5)}{(m+3)(m+2)}$ khi $x=1$.

Nhận xét Nếu ta cho cận trên bằng π, cận dưới bằng 0, ta có bất đẳng thức :

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi x^m e^{2x}dx > \frac{\pi^{m+2}}{m+2}+\frac{\pi^{m+3}}{m+3},\ \ n\in\mathbb{N}^*.$$

9.2 Phương pháp tích phân trong bất đẳng thức

Bài toán 16. *Chứng minh rằng, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $0 < x \leqslant y$, ta đều có*

$$xy(\ arccotg\ y - \ arccotg\ x) \leqslant \ln\sqrt{\frac{(x^2+1)^y}{(y^2+1)^x}}. \tag{1.8}$$

Giải. Dễ thấy, bất đẳng thức (1.8) tương đương với

$$y\Big[x \text{ arccotg } x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big] \geqslant x\Big[y \text{ arccotg } y + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\Big].$$

Xét hàm số

$$v = \text{ arccotg } t\ \ (0\leqslant t\leqslant y).$$

Ta có

$$v'(t) = -\frac{1}{1+t^2} < 0$$

nên $v(t)$ nghịch biến trên $[0, y]$ và

$$\int_0^x \text{arccotg } dt = x.\text{ arccotg } x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Khi $0 < x \leqslant y$, thì

$$y\int_0^x \text{arccotg } dt \geqslant x\int_0^y \text{arccotg } dt$$

hay

$$y\Big[t.\text{ arccotg } t\Big|_0^x + \int_0^y \frac{tdt}{t^2+1}\Big] \geqslant x\Big[t.\text{ arccotg } t\Big|_0^y + \int_0^y \frac{tdt}{t^2+1}\Big].$$

Do đó

$$y[x\text{ arccotg } x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)] \geqslant x[y\text{ arccotg } y + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)],$$

và vì vậy

$$xy[\text{ arccotg } x - \text{ arccotg } y] \geqslant x\ln\sqrt{y^2+1} - y\ln\sqrt{x^2+1},$$

hay

$$xy[\text{ arccotg } x - \text{ arccotg } y] \geqslant \ln\sqrt{\frac{(y^2+1)^x}{(x^2+1)^y}}\cdot$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

Bài toán 17. *Cho $0 < a < b$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}\cdot$$

Giải. Nhận xét rằng, với mọi $x \in (a, b)$ thì $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{b}$ nên

$$\frac{1}{a}\int_a^b dx > \int_a^b \frac{dx}{x} > \frac{1}{b}\int_a^b dx,$$

hay

$$\frac{b-a}{a} > \ln|x|\Big|_a^b > \frac{b-a}{b}.$$

Do đó

$$\frac{b-a}{a} > \ln\frac{b}{a} > \frac{b-a}{b}\cdot$$

Bài toán 18. *Chứng minh rằng*

$$\Big|\arctan x - \arctan y\Big| \leqslant \Big|x - y\Big|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải. Ta luôn có $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ với mọi t. Suy ra, khi $x < t < y$, thì

$$\int\limits_x^y \frac{dt}{1+t^2} < \int\limits_x^y dt,$$

hay

$$\arctan y - \arctan x < y - x.$$

Vì hàm số $\arctan t$ là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên bất đẳng thức $x < y$ tương đương với $\arctan y - \arctan x > 0$. Do vậy, ta có thể viết

$$|\arctan y - \arctan x| < |y - x|.$$

Trường hợp $x > y$ cũng được xét hoàn toàn tương tự như trường hợp $x < y$ ở trên. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Bài toán 19. *Chứng minh rằng*

$$1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải. Xét hàm số

$$f(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Khi đó, với $0 \leqslant t \leqslant x$, ta có

$$\int\limits_0^x \ln(t + \sqrt{1+t^2})dt > 0.$$

Suy ra

$$t\ln(t + \sqrt{1+t^2})\Big|_0^x - \int\limits_0^x \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} > 0,$$

hay

$$x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+t^2}\Big|_0^x > 0.$$

Do đó

$$x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + 1 > 0.$$

Với $x < 0$, thì
$$\ln(t + \sqrt{1+t^2}) = -\ln(-t + \sqrt{1+t^2}) < 0,$$
nên khi $x \leqslant t \leqslant 0$, ta có
$$\int_x^0 \ln(t + \sqrt{1+t^2})dx < 0.$$
Với $x = 0$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Bài toán 20. *Chứng minh rằng với $x > y > 0$, thì*
$$(x-y)[2-(x+y)] < 2\ln\frac{1+x}{1+y}. \tag{1.9}$$

Giải. Ta viết lại (1.9) dưới dạng
$$2(x-y) - (x^2 - y^2) < 2[\ln(1+x) - \ln(1+y)].$$
Nhận xét rằng, với mọi $t \in \mathbb{R}^+$ thì
$$\frac{1}{1+t} > 1 - t.$$
Vậy nên, khi $0 < y \leqslant t \leqslant x$, ta có
$$\int_y^x \frac{dt}{1+t} > \int_y^x (1-t)dt$$
hay
$$(\ln|1+t|)\Big|_y^x > \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_y^x.$$
Vậy nên
$$\ln\frac{1+x}{1+y} > (x-y) - \frac{x^2-y^2}{2}.$$
Từ đó ta thu được
$$2\ln\frac{1+x}{1+y} > (x-y)[2-(x+y)].$$

Nhận xét rằng, ngoài việc áp dụng các kiến thức cơ bản đã trình bày ở trên, để sử dụng tích phân xác định trong việc chứng minh bất đẳng thức, ta còn sử dụng các quan trắc trực giác từ hình học.

Bài toán 21. *Chứng minh rằng*

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n},\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Ta có $y = \sqrt{x}$ là một hàm số liên tục và đơn điệu tăng trên đoạn $[0, n]$. Gọi S là diện tích tam giác cong tạo bởi các đường $y = 0, x = n, y = \sqrt{x}$.
Khi đó, ta có

$$S = \int\limits_0^n \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^n = \frac{2}{3}n\sqrt{n}. \tag{1.10}$$

Gọi A_i là các điểm với toạ độ $(i, \sqrt{i})$ $(i = 1, \ldots, n)$ và A là điểm có toạ độ $(n, 0)$. Khi đó diện tích đa giác $0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_nA$ bằng S_1 và ta có :

$$S_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n})$$

$$= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} - \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Do $S_1 < S$, nên :

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} - \frac{1}{2}\sqrt{n} < \frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

Suy ra

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{4n+3}{6}. \tag{1.11}$$

Gọi B_i là các điểm với toạ độ $(i, \sqrt{i+1})$ với $i = 0, \ldots, n-1$.

Khi đó nếu ký hiệu S_2 là diện tích của đa giác

$$0B_0A_1B_1A_2\ldots A_{n-1}B_{n-1}A_nB_n$$

thì

$$S_2 = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}.$$

Suy ra

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} > \frac{2}{3}n\sqrt{n} \qquad (1.12).$$

Từ (1.11) và (1.12), ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 22. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Xét hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ trong đoạn $[1, n+1]$. Gọi S là diện tích hình thang cong được giới hạn bởi các đường

$$x = 1,\ \ x = n+1,\ \ y = 0,\ \ y = \frac{1}{x}.$$

Khi đó

$$S = \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{n+1} = \ln(n+1). \tag{1.13}$$

Gọi A_i là các điểm với toạ độ $(i, \dfrac{1}{i})$ với $i = 2, 3, \dots, n$. Ký hiệu A_1 là điểm với toạ độ $(1, 0)$ và A_{n+1} là điểm $(n+1, 0)$. Gọi B_i là các điểm với toạ độ $(i, \dfrac{1}{i-1})$ với $i = 2, 3, \dots, n$ và B_1 là điểm với toạ độ $(1, 1)$. Gọi S_1 là diện tích của đa giác $A_1B_1B_2A_2B_3A_3 \dots A_nB_{n+1}A_{n+1}$. Khi đó, ta có

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \tag{1.14}$$

Do $S_1 > S$, nên từ (1.13) và (1.14), suy ra

$$d\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\cdot$$

Bài toán 23. *Chứng minh rằng*

$$n! < n^{n+\frac{1}{2}} e^{1-n},\ \ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Giải. Xét hàm số $y = \ln x$ với $1 \leqslant x \leqslant n$. Gọi S là diện tích hình tam giác cong giới hạn bởi các đường $y = 0, x = n, y = \ln x$. Khi đó, ta có

$$S = \int\limits_1^n \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_1^n = n\ln n - n + 1 \qquad (1.15).$$

Gọi A_i là các điểm với toạ độ $(i, \ln i), i = 1, 2, 3, \dots, n$ và A là điểm có toạ độ $(n, 0)$. Khi đó diện tích S_1 của đa giác $A_1A_2...A_{n-1}A_nA$ được xác định theo công thức

$$S_1 = \frac{1}{2}\Big[\ln 2 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n-2) + \ln(n-1) + \ln(n-1) + \ln n\Big]$$

$$= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n - \frac{1}{2}\ln n = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln n \tag{1.16}$$

Do $S_1 < S$, nên từ (1.15) và (1.16), ta thu được

$$\ln(n!) < (n+\frac{1}{2})\ln n + 1 - n,$$

hay

$$n! < e^{1-n}.e^{(n+\frac{1}{2})\ln n} \Leftrightarrow n! < e^{1-n}.n^{n+\frac{1}{2}}.$$

Định lý 97 (Bất đẳng thức Young). *Cho p, q thoả mãn điều kiện*

$$p > 1,\ q > 1,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Chứng minh rằng, với mọi a, b dương, ta đều có

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proof. Xét hàm số $y = x^{p-1}$ với $x > 0$. Khi đó, do $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nên $x = y^{q-1}$.

Nhận xét rằng, đường thẳng $x = a$ cắt đường $y = x^{p-1}$ tại M và đường thẳng $y = b$ cắt $y = x^{p-1}$ tại N (trong cả hai trường hợp, $a^{p-1} \leqslant b$ và $a^{p-1} > b$).

Ký hiệu S_1 là diện tích tam giác cong tạo bởi các đường $y = 0$, $x = a$, $y = x^{p-1}$ và S_2 là diện tích tam giác cong tạo bởi các đường $x = 0$, $y = b$, $x = y^{q-1}$.

Ta có

$$S_1 + S_2 \geqslant ab \tag{15}$$

(ở đây ab là diện tích hình chữ nhật tạo bởi các đường $y = 0, x = 0, x = a, y = b$).

Ta có

$$S_1 = \int\limits_0^a x^{p-1}dx = \frac{a^p}{p},\ \ S_2 = \int\limits_0^b y^{q-1}dy = \frac{b^q}{q}.$$

Thay S_1, S_2 vào (15), ta thu được

$$\frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q} \geqslant ab,$$

điều phải chứng minh.

□

Bài toán 24. *Cho $a \geqslant 1,\ \ b \geqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$ab \geqslant e^{q-1} + b\ln b.$$

Giải. Xét hàm số $y = \ln x$ với $x \geqslant 1$. Ta có $x = e^y$.
Gọi S_1 là diện tích hình giới hạn các đường $y = 0, x = 0, y = a-1, x = e^y$ và gọi S_2 là diện tích hình giới hạn các đường $y = 0, x = b, y = \ln x$. Khi đó, ta thấy $b(a-1)$ chính là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 0, x = b, y = a-1$.

Vậy nên (trong cả hai trường hợp $\ln b \geqslant a-1$ và $\ln b < a-1$)

$$S_1 + S_2 \geqslant b(a-1). \tag{16}$$

Ta có

$$S_1 = \int\limits_0^{a-1} e^y dy = e^y \Big|_0^{a-1} = e^{a-1} - 1$$

và

$$S_2 = \int\limits_1^b \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_1^b = b\ln b - b + 1.$$

Thay S_1 và S_2 vào (16), ta nhận được

$$e^{a-1} + b\ln b - b \geqslant b(a-1)$$

hay

$$e^{a-1} + b\ln b \geqslant ab.$$

9.3 Phương pháp tích phân trong các bài toán cực trị

Bài toán 25. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*

$$f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 11x \;\; x \in [0,1]$$

Giải. Ta có $g(t) = t^5 + t^3 + t$ là hàm liên tục và đồng biến trên $[0,1]$. Do đó, $\forall x \in [0,1]$, ta có

$$\int\limits_0^x (t^5 + t^3 + t)dt \leqslant x\int\limits_0^1 (t^5 + t^3 + t)dt,$$

hay

$$\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \leqslant x\Big(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big).$$

Suy ra

$$2x^6 + 3x^4 + 6x^2 - 11x \leqslant 0.$$

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) \;\; x \in [0,1]$ bằng 0, khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Bài toán 26. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*

$$g(x) = \sin^3 x + 3\sin x - 4\sqrt{\sin x}$$

với $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Giải. Đặt $\sqrt{\sin x} = t$ thì $0 \leqslant t \leqslant 1$. Xét hàm số

$$h(t) = t^5 + 3t^2 - 4\sqrt{t}.$$

Ta có $k(u) = u^5 + u$ là hàm liên tục và đồng biến trên $[0, 1]$. Khi đó, $\forall t \in [0, 1]$, thì

$$\int\limits_0^t (u^5 + u)du \leqslant t\int\limits_0^1 (u^5 + u)du$$

hay

$$\frac{t^6}{6} + \frac{t^2}{2} \leqslant t\Big(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\Big).$$

Suy ra

$$t^6 + 3t^2 - 4t \leqslant 0.$$

Từ đây, ta có $\sin^3 x + 3\sin x - 4\sqrt{\sin x} \leqslant 0$ và giá trị lớn nhất của $g(x)$ bằng 0 khi $x = k\pi$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Bài toán 27. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*

$$h(x) = \frac{\pi}{4}x^2 - (\frac{\pi^2}{8} + 1)x - \frac{\pi}{2}\cos x, \ \ x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Giải. Ta có $f(t) = t + \sin t$ là hàm liên tục và đồng biến trên $[0, \dfrac{\pi}{2}]$. Khi đó $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, thì

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_0^x (t + \sin t)dt \leqslant x\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (t + \sin t)dt,$$

hay

$$\frac{\pi}{2}\Big(\frac{t^2}{2} - \cos t\Big)\Big|_0^x \leqslant x\Big(\frac{t^2}{2} - \cos t\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Vậy nên

$$\frac{\pi}{2}\Big[\frac{x^2}{2} - \cos x + 1\Big] \leqslant x\Big(\frac{\pi^2}{8} + 1\Big),$$

hay

$$\frac{\pi x^2}{4} - \frac{\pi}{2}\cos x + \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{x\pi^2}{8} + x.$$

Suy ra

$$\frac{\pi x^2}{4} - \frac{\pi}{2}\cos x - x(\frac{\pi^2}{8} + 1) \leq -\frac{\pi}{2}\cdot$$

Vậy, giá trị lớn nhất của $h(x)$ bằng $-\dfrac{\pi}{2}$ khi $x = 0$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Bài toán 28. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*

$$f(x) = \pi x - 2\sqrt{2}\arcsin x \ \ x \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}].$$

Giải. Ta có $g(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ là hàm nghịch biến và liên tục trên $\left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, nên $\forall x \in \left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, thì

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^x -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \ &\geqslant \ x\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin t\Big|_0^x \ &\leqslant \ x\arcsin t\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x \ &\leqslant \ \frac{x\pi}{4}\cdot
\end{aligned}$$

Do đó

$$\pi x - 2\sqrt{2}\arcsin x \geq 0.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng 0 khi $x = 0$ hoặc $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Bài toán 29. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*

$$f(x) = \sqrt{3}x^3 - 3\sqrt{3}\arctan x + x(\pi - 3\sqrt{3})$$

trên đoạn $[0, \sqrt{3}]$.

Giải. Vì hàm $g(t) = t^2 - \dfrac{1}{1+t^2}$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $[0, \sqrt{3}]$, nên $\forall x \in [0, \sqrt{3}]$, thì

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\int_0^x \Big(t^2 - \frac{1}{1+t^2}\Big)dt &\leqslant x\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Big(t^2 - \frac{1}{1+t^2}\Big)dt\\
\Leftrightarrow \sqrt{3}\Big(\frac{t^3}{3} - \arctan t\Big)\Big|_0^x &\leqslant x\Big(\frac{t^3}{3} - \arctan t\Big)\Big|_0^{\sqrt{3}}\\
\Leftrightarrow \sqrt{3}\Big(\frac{x^3}{3} - \arctan x\Big) &\leqslant x(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})\\
\sqrt{3}x^3 - 3\sqrt{3}\arctan x &\leqslant 3x\sqrt{3} - \pi x\\
\Leftrightarrow \sqrt{3}x^3 - 3\sqrt{3}\arctan x + x(\pi - 3\sqrt{3}) &\leqslant 0
\end{aligned}$$

Vậy, giá trị lớn nhất của $f(x)$ bằng 0 khi $x = 0$ hoặc $x = \sqrt{3}$.

Bài toán 30. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*

$$f(x) = 3x^2 + 4x\sqrt{x} + 4(2-x)\sqrt{2-x} - 6x,\ \ x \in [0, 2].$$

Giải. Ta có $g(t) = t + \sqrt{t} - \sqrt{2-t}$ là hàm liên tục và đồng biến trên $[0, 2]$, nên $\forall x \in [0, 2]$, thì

$$\begin{aligned}
&2\int_0^x (t + \sqrt{t} - \sqrt{2-t})dt \leqslant x\int_0^2 (t + \sqrt{t} - \sqrt{2-t})dt\\
&\Leftrightarrow 2\Big[\frac{t^2}{2} + \frac{2t\sqrt{t}}{3} + \frac{2}{3}(2-t)\sqrt{2-t}\Big]\Big|_0^x\\
&\leqslant x\Big[\frac{t^2}{2} + \frac{2t\sqrt{t}}{3} + \frac{2}{3}(2-t)\sqrt{2-t}\Big]\Big|_0^2\\
&\Leftrightarrow 2\Big(\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\Big)\\
&\leqslant x\Big(2 + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\Big)3x^2 + 4x\sqrt{x} + 4(2-x)\sqrt{2-x} - 6x \qquad \leqslant 8\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Vậy, giá trị lớn nhất của $f(x)$ bằng $8\sqrt{2}$ khi $x = 0$, $x = 2$.

Bài toán 31. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = (3 + 2\ln 2)x - 2^{x+1} - \ln 2.x^2,\ \ x \in [0, 2]$$

Giải. Ta có $g(t) = -2^t - t$ là hàm số liên tục và nghịch biến trong $[0, 2]$, nên

$$\begin{aligned} -2\int\limits_0^x (2^t + t)dt &\geqslant -x\int\limits_0^2 (2^t + t)dt \\ \Leftrightarrow 2\int\limits_0^x (2^t + t)dt &\leqslant x\int\limits_0^2 (2^t + t)dt \\ \Leftrightarrow 2\Big(\frac{2^t}{\ln 2} + \frac{t^2}{2}\Big)\Big|_0^x &\leqslant x\Big(\frac{2^t}{\ln 2} + \frac{t^2}{2}\Big)\Big|_0^2 \\ \Leftrightarrow \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + x^2 - \frac{2}{\ln 2} &\leqslant \frac{4x}{\ln 2} + 2x - \frac{x}{\ln 2} \\ \Leftrightarrow 2^{x+1} + x^2\ln 2 - 2 &\leqslant 4x + 2x\ln 2 - x \\ (3 + 2\ln 2)x - 2^{x+1} - \ln 2.x^2 &\geqslant -2 \end{aligned}$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng -2 khi $x = 0, x = 2$.

Bài toán 32. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*

$$f(x) = \sqrt{2}x^5 - x\Big[4\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})\Big] - 5\sqrt{2}\ln(1 + x),\ \ x \in \Big[0, \sqrt{2}\Big].$$

Giải.

Ta thấy $g(t) = -t^4 + \dfrac{1}{t+1}$ là hàm liên tục và nghịch biến với mọi $t \in \Big[0, \sqrt{2}\Big]$, nên

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\int\limits_0^x \Big(-t^4 + \frac{1}{t+1}\Big)dt &\geqslant x\int\limits_0^{\sqrt{2}} \Big(-t^4 + \frac{1}{t+1}\Big)dt \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}\Big[-\frac{x^5}{5} + \ln(1 + x)\Big] &\geqslant x\Big[-\frac{4\sqrt{2}}{5} + \ln(1 + \sqrt{2})\Big] \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2}\frac{x^5}{5} + \sqrt{2}\ln(x + 1) &\geqslant -\frac{4\sqrt{2}x}{5} + x\ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Suy ra

$$\sqrt{2}x^5 - x\Big[4\sqrt{2} - 5\ln(1 + \sqrt{2})\Big] - 5\sqrt{2}\ln(1 + x) \leqslant 0.$$

Vậy, giá trị lớn nhất của $f(x)$ bằng 0 khi $x = 0, x = \sqrt{2}$.

Bài toán 33. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = x\arccos x - \sqrt{1 - x^2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x,\ \ x \in [0, 1].$$

Giải. Ta có hàm số $g(t) = \sqrt{t} - \arccos t$ là hàm liên tục và đồng biến trong $[0, 1]$. Vậy, $\forall x \in [0, 1]$, thì

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^x (\sqrt{t} - \arccos t)dt \leqslant x \int\limits_0^1 (\sqrt{t} - \arccos t)dt \\
\Leftrightarrow &\Big(\frac{2}{3}t\sqrt{t} - t\arccos t + \sqrt{1-t^2}\Big)\Big|_0^x \leqslant x\Big(\frac{2}{3}t\sqrt{t} - t\arccos t + \sqrt{1-t^2}\Big)\Big|_0^1 \\
\Leftrightarrow &\Big(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x\arccos x + \sqrt{1-x^2}\Big) - 1 \leqslant x\Big(\frac{2}{3} - 1\Big) \\
\Leftrightarrow &-\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x\arccos x - \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}x \geqslant -1
\end{aligned}
$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng -1 khi $x = 0, x = 1$.

Bài toán 34. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$f(x, y) = x\cos y - y\cos x + (x - y)(\frac{1}{2}xy - 1),\ \ 0 \leqslant x \leqslant y.$$

Giải. Ta có hàm $g(t) = \sin t + t$ là hàm số liên tục và đồng biến với mọi $t \in [0, y]$. Vậy khi $0 \leqslant x \leqslant y$, thì

$$
\begin{aligned}
y\int\limits_0^x (\sin t + t)dt &\leqslant x\int\limits_0^y (\sin t + t)dt \\
\Leftrightarrow y\Big(-\cos t + \frac{t^2}{2}\Big)\Big|_0^x &\leqslant x\Big(-\cos t + \frac{t^2}{2}\Big)\Big|_0^y \\
\Leftrightarrow y\Big(-\cos x + \frac{x^2}{2} + 1\Big) &\leqslant x\Big(-\cos y + \frac{y^2}{2} + 1\Big) \\
-y\cos x + \frac{x^2y}{2} + y &\leqslant -x\cos y + \frac{xy^2}{2} + x
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
x\cos y - y\cos x + \frac{x^2y}{2} - \frac{xy^2}{2} + y - x &\leqslant 0 \\
\Leftrightarrow x\cos y - y\cos x + (x - y)(\frac{1}{2}xy - 1) &\leqslant 0
\end{aligned}
$$

Vậy, giá trị lớn nhất của $f(x, y)$ bằng 0 khi $x = 0, x = y$.

Bài toán 35. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$f(x,y)=\ln\sqrt{\frac{(x^2+1)^y}{(y^2+1)^x}}-xy(\ arccotg\ y-\ arccotg\ x),\ \ 0\leqslant x\leqslant y.$$

Giải. Xét hàm số $g(t)=\ \text{arccotg}\ t\ (0\leqslant t\leqslant y)$. Ta có $g'(t)=-\dfrac{1}{1+t^2}<0$ nên $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $[0,y]$. Vậy

$$\begin{aligned}
y\int\limits_0^x \text{arccotg}\ t dt\ &\geqslant\ x\int\limits_0^y \text{arccotg}\ t dt\\
\Leftrightarrow y\Big(t\ \text{arccotg}\ t\Big|_0^x+\int\limits_0^x\frac{tdt}{t^2+1}\Big)\ &\geqslant\ x\Big(t\ \text{arccotg}\ t\Big|_0^y+\int\limits_0^y\frac{tdt}{t^2+1}\Big)\\
\Leftrightarrow y\Big[x\ \text{arccotg}\ x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]\ &\geqslant\ x\Big[y\ \text{arccotg}\ y+\frac{1}{2}\ln(y^2+1)\Big]
\end{aligned}$$

Suy ra

$$xy(\ \text{arccotg}\ x-\ \text{arccotg}\ y)+\ln\sqrt{(x^2+1)^y}-\ln\sqrt{(y^2+1)^x}\geq 0,$$

hay

$$\ln\sqrt{\frac{(x^2+1)^y}{(y^2+1)^x}}-xy(\ \text{arccotg}\ y-\ \text{arccotg}\ x)\geq 0.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x,y)$ bằng 0 khi $x=0$, $y\geqslant x$ hoặc $y=x$.

Bài toán 36. *Tìm giá trị lớn nhất của*

$$f(x,y)=y(x+1)\sqrt{x+1}-x(y+1)\sqrt{y+1}+xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})-y+x,\ \ 0\leqslant x\leqslant y.$$

Giải. Xét hàm số

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}.$$

Ta có

$$g'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+1}\sqrt{t}(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})}\geqslant 0,\ \ \forall t>0.$$

Suy ra $g(t)$ đồng biến trên đoạn $[0, y]$. Vậy nên

$$\begin{aligned}
y\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}} &\leqslant x\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}\\
\Leftrightarrow y\Big[\frac{2}{3}(t+1)\sqrt{t+1}+\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big]\Big|_0^x &\leqslant x\Big[\frac{2}{3}(t+1)\sqrt{t+1}+\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big]\Big|_0^y\\
\Leftrightarrow y\Big[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{3}\Big] &\leqslant x\Big[\frac{2}{3}(y+1)\sqrt{y+1}+\frac{2}{3}y\sqrt{y}-\frac{2}{3}\Big]\\
y(x+1)\sqrt{x+1}+xy\sqrt{x}-y &\leqslant x(y+1)\sqrt{y+1}+xy\sqrt{y}-x.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$y(x+1)\sqrt{x+1}-x(y+1)\sqrt{y+1}+xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})-y+x\leqslant 0.$$

Vậy, giá trị lớn nhất của $f(x, y)$ bằng 0 khi $x = 0, x = y$.

Bài toán 37. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$A=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin^2 y}+\frac{1}{\sin^2 z}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2},\ \ x,y,z\in\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big].$$

Giải. Từ một bất đẳng thức đúng $\cos t \leqslant 1\ \ \forall t \in \mathbb{R}$, thì $\forall x > 0$, ta có

$$\int_0^x \cos t dt < \int_0^x dt \Rightarrow \sin x < x \tag{2.1}$$

Tiếp theo, từ (2.1), khi $x > 0$, thì

$$\int_0^x \sin t dt < \int_0^x t dt \Rightarrow \cos x > 1-\frac{x^2}{2}. \tag{2.2}$$

Tiếp theo, từ (2.2), với $x > 0$, thì

$$\int_0^x \cos t dt > \int_0^x (1-\frac{1}{t^2})dt \Rightarrow \sin x > x-\frac{x^3}{3!} \tag{2.3}$$

Tiếp theo, từ (2.3), với $x > 0$, thì

$$\int_0^x \sin t dt > \int_0^x (t-\frac{t^3}{3!})dt \Rightarrow \cos x < 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

Mặt khác, từ (2.3), ta có

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216},$$

mà

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} > 1 - x^2 + \frac{x^4}{24},$$

nên

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \frac{\cos x}{x^3} > \frac{\cos x}{\sin^3 x}, \ \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Do vậy

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^3} dt > \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t^3} dt.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \leqslant 1 - \frac{4}{\pi^2}, \ \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Từ đây, ta có

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y} + \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \leqslant 3 - \frac{12}{\pi^2}.$$

Vậy, giá trị lớn nhất của A bằng $3 - \frac{12}{\pi^2}$ khi $x = y = z = \frac{\pi}{2}$.

Bài toán 38. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A = e^{\frac{e}{b}} + b(\ln b - 1), \ \ 1 < b < e.$$

Giải. Đặt $\frac{e}{b} = a$, thì $ab = e$ và $a > 1$. Hàm số $f(x) = e^x$ liên tục, không âm và đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$ có $f(0) = 1$ và có hàm ngược bằng $y = \ln x$, nên ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^a e^x dx + \int_1^b \ln x dx \ &\geqslant \ ab \\
\Leftrightarrow e^x\Big|_0^a + (x\ln x - x)\Big|_1^b \ &\geqslant \ ab \\
\Leftrightarrow e^a - 1 + b\ln b - b + 1 \ &\geqslant \ ab \\
\Leftrightarrow e^a + b(\ln b - 1) \ &\geqslant \ ab = e
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $b = f(a)$ hay $b = e^a$, từ đó, ta có $a = 1, b = e$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng e, khi $a = 1, b = e$.

Bài toán 39. *Giả sử a, b thoả mãn các điều kiện*

$$a \geq 0,\ \ b \geqslant 1,\ \ a + b = 1 + \sqrt{2}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = a\sqrt{a^2+1} + b\sqrt{b^2-1} + \ln\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{b+\sqrt{b^2-1}}.$$

Giải. Xét hàm số
$$f(x) = \sqrt{x^2+1},\quad x \in [0, +\infty).$$
Hàm số này liên tục và có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 0\ \ x \in [0, +\infty),$$

nên $f(x)$ đơn điệu tăng trên $[0, \infty)$. Ta có $f(0) = 1$ và hàm số ngược của $f(x)$ là $y = \sqrt{x^2-1}$.

Ta có
$$\int\limits_0^a \sqrt{x^2+1}dx + \int\limits_1^b \sqrt{x^2-1}dx \geqslant ab$$

mà
$$\int\limits_0^a \sqrt{x^2+1}dx = \frac{a}{2}\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{2}\ln(a+\sqrt{a^2+1})$$

và
$$\int\limits_1^b \sqrt{x^2-1}dx = \frac{b}{2}\sqrt{b^2-1} - \frac{1}{2}\ln(b+\sqrt{b^2-1}).$$

Suy ra

$$\frac{a}{2}\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{2}\ln(a+\sqrt{a^2+1}) + \frac{b}{2}\sqrt{b^2-1} - \frac{1}{2}\ln(b+\sqrt{b^2-1}) \geqslant ab$$

hay
$$a\sqrt{a^2+1} + b\sqrt{b^2-1} + \ln\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{b+\sqrt{b^2-1}} \geqslant ab$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $b = \sqrt{a^2+1}$. Kết hợp với điều kiện $a + b = 1 + \sqrt{2}$, ta có $a = 1$, $b = \sqrt{2}$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức M bằng $2\sqrt{2}$ khi $a = 1$, $b = \sqrt{2}$.

Bài toán 40. *Giả sử* a, b *thoả mãn các điều kiện*

$$a \in \Big(0, \frac{\pi}{4}\Big),\ b \in (0,1),\ ab = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\ .$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos 2a.$$

Giải. Hàm số $y = \sin 2x$ đồng biến và liên tục trong $\Big(0, \dfrac{\pi}{4}\Big)$, có hàm số ngược

$$y = \frac{1}{2}\arcsin x, \text{ với } \ 0 < y < 1,\ y(0) = 0\ .$$

Ta có, $\forall a \in (0, \dfrac{\pi}{4})$, $\forall b \in (0,1)$, thì

$$\int\limits_0^a \sin 2x dx + \int\limits_0^b \frac{1}{2}\arcsin x dx \geqslant ab,$$

hay

$$-\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^a + \frac{1}{2}(x\arcsin x + \sqrt{1-y^2})\Big|_0^b \geqslant ab.$$

Suy ra

$$b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos 2a \geqslant 2ab = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\cdot$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $b = \sin 2a$. Kết hợp với điều kiện $ab = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}$ ta có $a = \dfrac{\pi}{6}, b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức M bằng $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$ khi $a = \dfrac{\pi}{6}$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Bài toán 41. *Xét các số* a, b *thoả mãn các điều kiện*

$$x \in [0, \frac{\pi}{2}),\ y \in [0, +\infty),\ \frac{y}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\ .$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = y\arctan y - \ln(\cos x\sqrt{y^2+1}).$$

Giải. Hàm số $z = \tan t$, với $t \in [0, \frac{\pi}{2})$, là hàm liên tục và đồng biến trên khoảng $[0, \frac{\pi}{2})$ và có hàm ngược

$$t = \arctan z \ \ (z \geq 0),\ z(0) = 0.$$

Khi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in \left[0, +\infty\right)$, ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^x \tan t dt + \int\limits_0^y \arctan t dt &\geqslant xy\\
\Leftrightarrow (-\ln\left|\cos t\right|)\Big|_0^x + t\arctan t\Big|_0^y - \int\limits_0^y \frac{tdt}{1+t^2} &\geqslant xy\\
\Leftrightarrow -\ln cosx + y\arctan y - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|\Big|_0^y &\geqslant xy\\
y\arctan y - \left[\ln\cos x + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\right] &\geqslant xy\\
\Leftrightarrow y\arctan y - \ln(\cos x\sqrt{y^2+1}) &\geqslant xy
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $y = \tan x$. Kết hợp với điều kiện $\frac{y}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$, ta có $x = \frac{\pi}{3}$, $y = \sqrt{3}$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{3}$, $y = \sqrt{3}$.

Bài toán 42. *Xét các số a, b thoả mãn các điều kiện*

$$a \geqslant 2,\ b \geqslant 3,\ a - b = 3 - \sqrt{10}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = 2ab + 9\ln\frac{b + \sqrt{b^2-9}}{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a + 13}}.$$

Giải. Hàm số

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13} \ \ (= \sqrt{(x-2)^2 + 9})$$

là một hàm liên tục, không âm trên $[2, +\infty)$ và có

$$f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 13}} > 0,\ \forall x > 2,$$

nên nó đồng biến trên $[2, +\infty)$ và $f(2) = 3$. Để tìm hàm số ngược, ta xét phương trình

$$y = \sqrt{(x-2)^2 + 9} \ \ (x \geqslant 2,\ y \geqslant 3).$$

Suy ra

$$y^2 = (x-2)^2 + 9x = 2 + \sqrt{y^2 - 9}.$$

Vậy $f(x)$ có hàm ngược là

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x^2 - 9} \ \ (x \geqslant 3).$$

Ta có

$$\int_2^a \sqrt{(x-2)^2 + 9}\ dx + \int_3^b (2 + \sqrt{x^2 - 9}) dx \geqslant ab - 6.$$

Từ các đẳng thức

$$\int_2^a \sqrt{(x-2)^2+9}\ dx = \frac{x-2}{2}\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \frac{9}{2}\ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 13})\Big|_2^a$$

$$= \frac{a-2}{2}\sqrt{a^2 - 4a + 13} + \frac{9}{2}\ln(a - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 13}) - \frac{9}{2}\ln 3$$

và

$$\begin{aligned}\int_3^b (2 + \sqrt{x^2 - 9})\ dx &= \left[2x + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 9})\right]\Big|_3^b \\ &= 2b + \frac{b}{2}\sqrt{b^2 - 9} - \frac{9}{2}\ln(b + \sqrt{b^2 - 9}) - 6 + \frac{9}{2}\ln 3,\end{aligned}$$

suy ra

$$2ab + 9\ln\frac{b + \sqrt{b^2 - 9}}{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a + 13}} \leqslant (a-2)\sqrt{a^2 - 4a + 13} + b\sqrt{b^2 - 9} + 4b.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = \sqrt{(a-2)^2 + 9}$. Kết hợp với điều kiện $a - b = 3 - \sqrt{10}$, ta thu được $a = 3$, $b = \sqrt{10}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức M bằng $6\sqrt{10}$ khi $a = 3$, $b = \sqrt{10}$.

Bài toán 43. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - x\arctan 2, \ \ x \geqslant 0.$$

Giải. Xét hàm số $g(t) = \arctan t$ và $h(t) = t$. Ta thấy $g(t)$, $h(t)$ là những hàm số liên tục, không âm và đồng biến $\forall t \geqslant 0$. Ta có

$$x \arctan 2 \leqslant \int_0^2 t \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_0^x \arctan t\, dt.$$

Sử dụng các đẳng thức

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{t}{1+t^2}\, dt &= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\ln 5,\\
\int_0^x \arctan t\, dt &= t \arctan t\Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\, dt\\
&= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2),
\end{aligned}$$

ta thu được

$$x \arctan 2 \leqslant \frac{1}{2}\ln 5 + x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Do đó

$$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x\arctan 2 \geq -\frac{1}{2}\ln 5 = -\ln\sqrt{5}.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng $-\ln\sqrt{5}$ khi $x = 2$.

Bài toán 44. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = (x-b)\tan x + \ln|\cos x|,\ \ x \geqslant 0$$

Giải. Xét hai hàm số $g(t) = \tan t$ và $h(t) = t$. Ta thấy $g(t)$ và $h(t)$ là các hàm liên tục, không âm và đồng biến $\forall t \geqslant 0$. Ta có

$$b\tan x \leqslant \int_0^x \frac{t\, dt}{\cos^2 t} + \int_0^b \tan t\, dt.$$

Từ các đẳng thức

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t\, dt}{\cos^2 t} &= t\tan t\Big|_0^x + \ln\Big|\cos x\Big|\Big|_0^x\\
&= x\tan x + \ln\Big|\cos x\Big|\\
\int_0^b \tan t\, dt &= -\ln\Big|\cos t\Big|\Big|_0^b = -\ln\Big|\cos b\Big|,
\end{aligned}$$

ta thu được

$$b\tan x \leqslant x\tan x + \ln\Big|\cos x\Big| - \ln\Big|\cos b\Big|,$$

hay

$$x\tan x - b\tan x + \ln\Big|\cos x\Big| \geqslant \ln\Big|\cos b\Big|.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng $\ln\Big|\cos b\Big|$ khi $x = b$.

Bài toán 45. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = e^{x^2}(x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 7), \ \ x \geqslant 0.$$

Giải. Xét hai hàm số sau $g(t) = t^6$ Và $h(t) = e^{t^2}$. Ta thấy $g(t)$ và $h(t)$ là những hàm liên tục, không âm và đồng biến $\forall t \geqslant 0$. Ta có

$$e^{x^2} \leqslant \int\limits_0^1 e^{t^2} 6t^5\ dt + 2\int\limits_0^x t^6\ te^{t^2}\ dt = 6\int\limits_0^1 e^{t^2}t^5\ dt + 2\int\limits_0^x t^7 e^{t^2}\ dt.$$

Từ các đẳng thức

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 e^{t^2}t^5\ dt &= \frac{e^{t^2}}{2}(t^4 - 2t^2 + 2)\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1\\
\int\limits_0^x t^7 e^{t^2} dt &= \frac{e^{t^2}}{2}(t^6 - 3t^4 + 6t^2 - 6)\Big|_0^x\\
&= \frac{e^{x^2}}{2}(x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 6) + 3
\end{aligned}$$

ta suy ra

$$e^{x^2} \leqslant 6(\frac{e}{2} - 1) + e^{x^2}(x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 6) + 6,$$

hay

$$e^{x^2} \leqslant 3e + e^{x^2}(x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 6).$$

Do đó

$$e^{x^2}(x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 7) \geqslant -3e.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y)$ bằng $-3e$ khi $x = 1$.

Bài toán 46. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = (x^2 - 1)\ln(1 + x) - x^2(\frac{1}{2} + \ln 2) + x, \ \ x \geqslant 0$$

Giải. Xét hai hàm số sau $g(t) = t^6$ Và $h(t) = e^{t^2}$. Ta thấy $g(t)$ và $h(t)$ là những hàm liên tục, không âm và đồng biến $\forall t \geqslant 0$. Ta có

$$x^2 \ln 2 \leqslant \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt + 2\int_0^x t\ln(1+t)\,dt.$$

Từ các đẳng thức

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt &= \frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2} \\
\int_0^x t\ln(1+t)dt &= \frac{1}{2}\Big[t^2\ln(1+t) - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t)\Big]\Big|_0^x \\
&= \frac{1}{2}\Big[x^2\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x)\Big]
\end{aligned}$$

ta thu được

$$x^2\ln 2 \leqslant \ln 2 - \frac{1}{2} + x^2\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x),$$

hay

$$(x^2-1)\ln(1+x) - x^2(\frac{1}{2} + \ln 2) + x \geqslant \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng $\frac{1}{2} - \ln 2$ khi $x = 1$.

Bài toán 47. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}},\quad n \in \mathbb{N}.$$

Giải. Ký hiệu

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx.$$

Đặt

$$\begin{cases} u &= x^n \\ dv &= \sqrt{1-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du &= nx^{n-1}dx, \\ v &= -\dfrac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}. \end{cases}$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta nhận được

$$I_n = -\frac{2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}n\int_0^1 (1-x)x^{n-1}\sqrt{1-x}dx.$$

Suy ra

$$I_n = \frac{2}{3}n\Big[\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx\Big],$$

và từ đó, ta có

$$I_n = \frac{2}{3}n(I_{n-1} - I_n) \Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}.eqno(2.4)$$

Từ (2.4), ta có

$$I_n = \frac{2n.2(n-1).2(n-2)...2.2.2.1}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)...7.5}I_0.$$

Do

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \frac{2}{3},$$

nên

$$I_n = \frac{2^{n+1}n!}{1.3.5.7...(2n+3)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$2n+3 = (n+2)+(n+1) > 2\sqrt{(n+2)(n+1)},$$

$$2n+1 = (n+1)+n > 2\sqrt{n(n+1)}$$

$$2n-1 = n+(n-1) > 2\sqrt{n(n-1)}$$

$$\vdots$$

$$7 = 4+3 > 2\sqrt{4.3}$$

$$5 = 3+2 > 2\sqrt{3.2}$$

$$3 = 2+1 > 2\sqrt{2.1}.$$

Nhân các bất đẳng thức này, vế với vế, ta thu được

$$(2n+3)(2n+1)(2n-1)...7.5.3 > 2^{n+1}.n!(n+1)\sqrt{n+2}.$$

Suy ra

$$I_n < \frac{2^{n+1}n!}{2^{n+1}}n!(n+1)\sqrt{n+2},$$

hay

$$I_n < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}.$$

Bài toán 48. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\Big|\int\limits_0^\pi xe^{x^2}\cos nx dx\Big| \leqslant \frac{e^{\pi^2}-1}{2}.$$

Giải. Ký hiệu

$$J_n = \int\limits_0^\pi xe^{x^2}\cos nx dx.$$

Ta thấy

$$\Big|\int\limits_0^\pi xe^{x^2}\cos nx dx\Big| \leqslant \int\limits_0^\pi \Big|xe^{x^2}\cos nx\Big|dx.$$

Do $0 \leqslant x \leqslant \pi$, nên ta có

$$\Big|xe^{x^2}\cos nx\Big| = \Big|xe^{x^2}\Big||\cos nx| \leqslant \Big|xe^{x^2}\Big|.$$

Do đó

$$\int\limits_0^\pi \Big|xe^{x^2}\cos nx\Big|dx \leqslant \int\limits_0^\pi e^{x^2}d\Big(e^{x^2}\Big) = \frac{e^{\pi^2}-1}{2}.$$

Suy ra

$$|J_n| \leqslant \frac{e^{\pi^2}-1}{2}.$$

Bài toán 49. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\Big|\int\limits_0^\pi e^{x^2}\sin nx dx\Big| \leqslant \frac{2e^{\pi^2}}{n},\quad n \in \mathbb{N}.$$

Giải. Ký hiệu

$$I_n = \int\limits_0^\pi e^{x^2}\sin nx dx.$$

Đặt

$$\begin{cases} u &= e^{x^2}, \\ v &= \int \sin nx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du &= 2xe^{x^2} dx \\ v &= -\dfrac{1}{n} \cos nx. \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{n} e^{x^2} \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi x e^{x^2} \cos nx dx \\ &= -\frac{1}{n} \Big[(-1)^n e^{\pi^2} - 1 \Big] + \frac{2}{n} \int_0^\pi x e^{x^2} \cos nx dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Đặt $J_n = \int\limits_0^\pi x e^{x^2} \cos nx dx$, thì

$$\Big| \int_0^\pi x e^{x^2} \cos nx dx \Big| \leqslant \int_0^\pi \Big| x e^{x^2} \cos nx \Big| dx.$$

Do $0 \leqslant x \leqslant \pi$, nên ta có

$$\Big| x e^{x^2} \cos nx \Big| = \Big| x e^{x^2} \Big| |\cos nx| \leqslant \Big| x e^{x^2} \Big|.$$

Do đó

$$\int_0^\pi \Big| x e^{x^2} \cos nx \Big| dx \leqslant \int_0^\pi e^{x^2} d\Big(e^{x^2} \Big) = \frac{e^{\pi^2} - 1}{2}.$$

Suy ra

$$|J_n| \leqslant \frac{e^{\pi^2} - 1}{2}.$$

Theo từ (1), ta có

$$nI_n - 2J_n = 1 - (-1)^n e^{\pi^2}$$

hay

$$I_n = \frac{1 - (-1)^n e^{\pi^2} + 2J_n}{n}$$

và từ đó

$$\begin{aligned} I_n &= \Big| \frac{1 - (-1)^n e^{\pi^2} + 2J_n}{n} \Big| \\ &\leqslant \Big| \frac{1 - (-1)^n e^{\pi^2}}{n} \Big| + \Big| \frac{2J_n}{n} \Big| \\ &\leqslant \frac{1 + e^{\pi^2}}{n} + \frac{2}{n} |J_n|. \end{aligned} \tag{2}$$

Thay (3) vào (2), ta thu được
$$|I_n| \leqslant \frac{2e^{\pi^2}}{n}.$$

Bài toán 50. *Tìm số thực α lớn nhất thoả mãn bất đẳng thức:*
$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+\alpha} \leqslant e, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Cách giải. Gọi $f(n)$ là số thực thoả mãn đẳng thức :
$$(1+\frac{1}{n})^{n+f(n)} = e \Leftrightarrow [n+f(n)]\ln(1+\frac{1}{n}) = 1$$
$$\Leftrightarrow f(n) = \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} - n$$
Trên khoảng $(1,+\infty)$, ta xet hàm số :
$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{x})} - x$$
Ta có : $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)\ln^2(1+\frac{1}{x})} - 1$.Mặt khác : $\ln(1+t) < \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$ với $t>0$.
Thật vậy:
$$g(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t}} - \ln(1+t),$$
$$g'(t) = \frac{\sqrt{1+t} - \frac{t}{\sqrt{1+t}}}{1+t} - \frac{1}{1+t} = \frac{1}{\sqrt{1+t}.(1+t)} - \frac{1}{1+t} < 0$$
Nên ta suy ra hàm $g(t)$ nghịch biến, từ đó $g(t) < g(0), \forall t > 0$ hay $\ln(1+t) < \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$.
Do đó :
$$\ln^2(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x})} \Leftrightarrow x(x+1)\ln^2(1+\frac{1}{x}) < 1, \forall t > 0.$$
Suy ra $f'(x) > 0, \forall x > 0$. Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $[1,+\infty)$. Do đó ta suy ra $\alpha \leqslant f(n)$, từ đó $\alpha = f(1) = \dfrac{1}{\ln 2} - 1$ là giá trị cần tìm.

9.4 Bài tập

Bài 1. *Chứng minh rằng*

$$\frac{17}{18} < \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx < \frac{1703}{1800}.$$

Bài 2. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\int_0^1 x^n \sqrt{1-xdx} < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Bài 3. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\Big|\int_0^\pi xe^{x^2} \cos nxdx\Big| \leqslant \frac{e^{\pi^2}-1}{2}.$$

Bài 4. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\Big|\int_0^\pi e^{x^2} \sin nxdx\Big| \leqslant \frac{2e^{\pi^2}}{n}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Bài 5. *(Bất đẳng thức Diaz). Cho cặp hàm $f(x), g(x)$ là liên tục trên $[a,b]$ và thoả mãn các điều kiện*

$$f(x) \neq 0, \ \ n \leqslant \frac{g(x)}{f(x)} \leqslant M, \ \ \forall x \in [a,b].$$

Chứng minh rằng

$$\int_a^b f^2(x)dx + Mm\int_a^b g^2(x)dx \leqslant (M+m)\int_a^b f(x).g(x)dx,$$

Bài 6. *Cho cặp hàm $f(x), g(x)$ là liên tục trên $[a,b]$ $(0 < a < b)$ và thoả mãn các điều kiện*

$$a \leqslant f(x) \leqslant A; \ \ b \leqslant g(x) \leqslant B, \ \ \forall x \in [a,b].$$

Chứng minh rằng

$$\frac{(ab+AB)^2}{4aAbB} \geqslant \frac{\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2} \geqslant \frac{4aAbB}{(ab+AB)^2}.$$

Bài 7. *Cho cặp hàm số liên tục* $f, g: [0,1] \to [0,1]$. *Chứng minh rằng*

$$\Big(\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx\Big)^2 \leqslant \int\limits_0^1 f(x)dx.\int\limits_0^1 g(x)dx.$$

Bài 8. *Cho* $x > 0$ *và* $n \in \mathbb{N}^*$. *Chứng minh rằng*

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Bài 9. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)2^k} < 1 - \ln 2, \;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 10. *Chứng minh rằng*

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \cdots + \arctan n < \Big(n - \frac{1}{2}\Big) \arctan n - \ln\sqrt{1+n^2}, \;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 11. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = 5x^2 + 4x^2\sqrt{x} - 9x \;\; x \in [0,1]$$

Bài 12. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = 2\cos^3 x + 3\cos^2 x + 6\cos x - 11\sqrt{\cos x}$$

Bài 13. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*

$$f(x) = 2(x+1)\ln(x+1) - x^2 + x(2 - 3\ln 3) \;\; x \in [0,2]$$

Bài 14. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = x(\arccos x - 1) - \sqrt{1-x^2} \;\; x \in [0,1]$$

Bài 15. $\forall x > 0,\ y > 0$ *thoã* $xy = e - 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$B = e^x + (y+1)\ln(y+1)$$

Bài 16. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = \int\limits_1^x \sin^n t dt - \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad 1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Bài 17. *Cho* $I_n = \int\limits_1^2 x^2 \sin^n t\ dt$. *Chứng minh rằng*

$$I_n \geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left(\frac{2^{n+3} - 1}{n+3}\right)$$

Bài 18. *Cho* $I_n = \int\limits_{-1}^1 \Big[(1+x)^n + (1-x)^n\Big]\ dt$. *Chứng minh rằng*

$$I_n \leqslant 2^{n+1}$$

Bảng các bất đẳng thức liên quan

1. *Bất đẳng thức Cauchy*
   Với mọi bộ số (x_i), (y_i), ta luôn có bất đẳng thức sau
$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^2 \Big(\sum_{i=1}^{n} y_j^2\Big)^2.$$
   Dấu đẳng thức trong (2.1) xảy ra khi và chỉ khi hai bộ số (x_i) và (y_i) tỷ lệ với nhau, tức tồn tại cặp số thực α, β, không đồng thời bằng 0, sao cho
$$\alpha x_i + \beta y_j = 0,\ \ \forall i = 1, 2, \dots , n.$$

2. *Bất đẳng thức Cauchy (dạng phức)*
   Với mọi bộ số phức (a_j, b_j), ta luôn có đẳng thức sau
$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 - \Big|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big| = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |\overline{a_j} b_k - a_k \overline{b_j}|.$$

3. *Bất đẳng thức Cauchy (dạng đảo)*
   Giả sử ta có bộ các cặp số dương (a_k, b_k) sao cho
$$\frac{a_k}{b_k} \in [\alpha, \beta],\ \ \alpha > 0,\ \ k = 1, 2, \dots , n.$$
   Khi đó
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{A}{G} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$
   trong đó
$$A = \frac{\alpha + \beta}{2},\ \ G = \sqrt{\alpha\beta}.$$

4. *Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz*
   Đối với mọi không gian với tích trong (a,b), ta đều có bất đẳng thức
   $$(a,b) \leqslant (a,a)^{\frac{1}{2}} + (b,b)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.4}$$
   Dấu đẳng thức xảy ra đối với cặp véctơ a,b khác 0 khi và chỉ khi $b = \lambda a$ với $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

5. *Bất đẳng thức Bunhiacowski*
   Với mọi cặp hàm số $f(t), g(t)$ liên tục trên đoạn thẳng $[\alpha,\beta]$, ta đều có
   $$\Big(\int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt\Big)^2 \leqslant \int_\alpha^\beta [f(t)]^2 dt \int_\alpha^\beta [g(t)]^2 dt.$$

6. *Bất đẳng thức Ky Fan*
   Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số dương trong $\Big(0, \dfrac{1}{2}\Big]$. Khi đó
   $$\frac{\prod\limits_{k=1}^n x_k}{\Big(\sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)^n} \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^n (1-x_k)}{\Big[\sum\limits_{k=1}^n (1-x_k)\Big]^n}.$$
   Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

7. *Bất đẳng thức H.W.Mclaughlin*
   Với mọi bộ số thực $a = (a_1, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, \ldots, b_n)$, ta đều có
   $$\Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\Big) \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i)\Big)^2.$$
   Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
   $$a_i b_j - a_j b_i - a_{n+i} b_{n+j} + a_{n+j} b_{n+i} = 0$$
   và
   $$a_i b_{n+j} - a_j b_{n+i} + a_{n+i} b_j - a_{n+j} b_i = 0$$
   ứng với mọi $i, j = 1, \ldots, n$.

8. *Bất đẳng thức A.M.Ostrowski*
   Cho hai dãy không tỷ lệ $a = (a_1, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, \ldots, b_n)$ và dãy số thực $x = (x_1, \ldots, x_n)$ thoả mãn điều kiện
   $$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^n b_i x_i = 1.$$

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x_k = \frac{b_k \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 - a_k \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

9. *Bất đẳng thức K.Fan and J.Todd*
Với mọi dãy số thực $a = (a_1, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, \ldots, b_n)$ thoả mãn điều kiện $a_i b_j \neq a_j b_i$ ứng với $i \neq j$, ta đều có

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2} \leqslant \binom{n}{2}^{-2} \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1, j\neq i} \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j}\Big)^2$$

10. *Bất đẳng thức K.Fan and J.Todd*
Giả sử $p_{ij}(i, j = 1, \ldots, n; i \neq j)$ thoả mãn điều kiện

$$p_{ij} = pji, \quad P = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p_{ij} \neq 0.$$

Chứng minh rằng, khi đó với mọi cặp dãy số thực $a_1, \ldots, a_n$ và $b_1, \ldots, b_n$ sao cho $a_i b_j \neq a_j b_i (i \neq j)$, ta đều có

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2} \leqslant \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1, j\neq i} \frac{p_{ij} a_j}{a_j b_i - a_i b_j}\Big)^2.$$

11. *Bất đẳng thức Chebyshev I*
Cho hai dãy số $(a) := (a_1; a_2, \ldots, a_n)$ và $;(b) := (b_1; b_2, \ldots, b_n)$ thoả mãn điều kiện

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \quad ; \quad b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n.$$

Khi đó:

$$\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} \leqslant \Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\Big).\Big(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\Big)$$
$$\leqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}$$

(Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi một trong hai dãy $(a); (b)$ là dãy dừng)

12. *Bất đẳng thức thứ tự Chebyshev II*

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm đơn điệu tăng và (x_k) là một dãy đơn điệu tăng:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n.$$

Khi đó với mọi bộ trọng (p_j):

$$p_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ \ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1,$$

ta đều có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k g(x_k)\Big) \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) g(x_k)\Big).$$

13. *Bất đẳng thức Hölder*
Cho

$$a, b > 0\ ;\ p, q > 0\ ;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \text{Khi đó:}$$

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \quad (=: a = b)$$

14. *Bất đẳng thức Hölder mở rộng*

- Cho

$$x_i, y_i > 0\ \forall i \in \overline{1, n}\ ;\ p, q > 0\ ;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \text{Khi đó:}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

- Cho
$$x_i, y_i > 0\ \forall i \in \overline{1,n}\ ;\ p < 0\ \vee\ q < 0\ ;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Khi đó bất đẳng thức trên đổi chiều, tức là:
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

15. *Bất đẳng thức Mincowski*
Cho $x_i, y_i > 0\ \forall i \in \overline{1,n}\ ;\ n \in N^*$. Khi đó:
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i)} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i}$$

16. *Bất đẳng thức Minkowski mở rộng I*

- Cho $x_i, y_i > 0\ \forall i \in \overline{1,n}\ ;\ n \in N^*\ ;\ p > 1$. Khi đó:
$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

- Cho $x_i, y_i > 0\ \forall i \in \overline{1,n}\ ;\ n \in N^*\ ;\ p < 1$.
Khi đó bất đẳng thức trên đổi chiều, tức là:
$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

17. *Bất đẳng thức Minkowski mở rộng II*
Cho $x_{ij} > 0\ \forall i \in \overline{1,m}\ ; j \in \overline{1,n}\ ;\ n \in N^*\ ;\ p > 1$. Khi đó:
$$\Big(\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

18. *Bất đẳng thức Beckenbach*
Cho $x_i, y_i > 0\ \forall i \in \overline{1,n}\ ;\ n \in N^*\ ;\ p \in [1;2]$. Khi đó:
$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p-1}} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{p-1}} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{p-1}}$$

19. *Bất đẳng thức Abel*
Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$; $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0$. Gọi:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \ ; \ k \in \overline{1,n} \ ; \ m = Min\{S_k\} \ ; \ M = Max\{S_k\}$$

Khi đó, ta luôn có

$$mb_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant Mb_1$$

20. *Bất đẳng thức Abel*
Giả sử (z_j) là một dãy số (thực hoặc phức) tuỳ ý và

$$Z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_k, \ \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Khi đó với mọi dãy số dương đơn điệu giảm (α_k):

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n > 0,$$

ta đều có

$$|\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n| \leqslant \alpha_1 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |Z_k|.$$

21. *Bất đẳng thức Diaz*
Cho hai dãy: $a_1; a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^*$; $b_1; b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Đặt

$$M = Max\{\frac{b_k}{a_k}\} \ ; \ m = Min\{\frac{b_k}{a_k}\}.\ \text{Khi đó:}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + mM \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant (m+M) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

22. *Bất đẳng thức Polya*
Cho $0 < a \leqslant a_k \leqslant A$; $0 < b \leqslant b_k \leqslant B$ với mọi $k \in \overline{1,n}$. Khi đó

$$4\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big) \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \Big(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{AB}{ab}}\Big)^2$$

23. *Bất đẳng thức Kantorovich*
Cho hai dãy: $a_1; a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$; $b_1; b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$0 < m \leqslant b_k \leqslant M \text{với mọi } k \in \overline{1,n}.\text{Khi đó:}$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{b_k}\Big) \leqslant \frac{1}{4}\Big(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)$$

24. *Bất đẳng thức Bernoulli*
Với mọi bộ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cùng dấu và lớn hơn -1, ta đều có
$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

25. *Bất đẳng thức Bernoulli (dạng liên tục)*
Cho $x > 0$. Khi đó:
$$\begin{aligned} &x^\alpha + (1-x)\alpha \leqslant 1 && \text{khi } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \\ &x^\alpha + (1-x)\alpha \geqslant 1 && \text{khi } \alpha \leqslant 0 \vee \alpha \geqslant 1 \end{aligned}$$

26. *Bất đẳng thức Jensen*
Cho hàm số $y = f(x)$ lồi trên $[a; b]$ ($f(x)$ liên tục trên $[a; b]$; $f'(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in (a; b)$).
Cho các số $k_1; k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}^+$; $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 1$. Khi đó, với mọi $x_i \in [a; b]$; $i \in \overline{1, n}$, ta luôn có
$$\sum_{i=1}^{n} k_i f(x_i) \leqslant f\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\Big)$$
Nếu hàm số $y = f(x)$ lõm trên $[a; b]$ ($f(x)$ liên tục trên $[a; b]$; $f'(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in (a; b)$) thì bất đẳng thức trên đổi chiều, tức là:
$$\sum_{i=1}^{n} k_i f(x_i) \geqslant f\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\Big)$$

27. *Bất đẳng thức Petrovitch*
Cho hàm số $y = f(x)$ lồi trên $[0; a]$ với $a > 0$.
Lấy các số $x_k \in [0; a]$; $k \in \overline{1, n}$ sao cho
$$\sum_{k=1}^{n} x_k \in [0; a]. \text{ Khi đó: } \quad \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) + (n-1)f(0)$$

28. *Bất đẳng thức Petrovitch tổng quát*
Cho hàm số $y = f(x)$ lồi trên $[0; a]$ với $a > 0$.
Lấy các số $p_1, p_2, \ldots, p_n \geqslant 0$; $x_1, x_2, \cdots x_n \in [0; b)$ trong đó:
$$b = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k < a. \text{ Khi đó:}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) \leqslant f(b) + \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k - 1\Big) f(0)$$

29. *Bất đẳng thức Popoviciou*
Cho các số $a_i; b_i > 0\ \ ; i \in \overline{1, n}\ \ ;\ \ p; q \neq 0$ thoả mãn điều kiện

$$a_1^p - a_2^p - \cdots - a_n^p > 0\ ;\ b_1^q - b_2^q - \cdots - b_n^q > 0\ ;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Khi đó:

- Nếu $p > 1$ thì:

$$(a_1^p - a_2^p - \cdots - a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q - b_2^q - \cdots - b_n^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant a_1 b_1 - a_2 b_2 - \cdots - a_n b_n$$

- Nếu $p > 1$ thì bất đẳng thức trên đổi chiều, tức là:

$$(a_1^p - a_2^p - \cdots - a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q - b_2^q - \cdots - b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geqslant a_1 b_1 - a_2 b_2 - \cdots - a_n b_n$$

30. *Bất đẳng thức Karamata I*
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a; b)$ sao cho $f'(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in [a; b]$ và $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
Giả sử $a_1; a_2, \ldots, a_n$ và $x_1; x_2, \ldots, x_n$ là các số $\in [a; b]$, thoả mãn điều kiện

$$\begin{gathered} a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \\ x_1 \geqslant a_1 \\ x_1 + x_2 \geqslant a_1 + a_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{gathered}$$

Khi đó:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

31. *Bất đẳng thức Karamata II*
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a; b)$ sao cho $f'(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in [a; b]$ và $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
Giả sử $a_1; a_2, \ldots, a_n$ và $x_1; x_2, \ldots, x_n$ là các số $\in [a; b]$, thoả mãn điều kiện

$$\begin{aligned} a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \\ x_1 \leqslant a_1 \\ x_1 + x_2 \leqslant a_1 + a_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

32. *Bất đẳng thức Karamata III*
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a; b)$ sao cho $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
Giả sử $a_1; a_2, \ldots, a_n$ và $x_1; x_2, \ldots, x_n$ là các số $\in [a; b]$, thoả mãn điều kiện

$$\begin{aligned} a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \\ x_1 \geqslant a_1 \\ x_1 + x_2 \geqslant a_1 + a_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

33. *Bất đẳng thức Karamata IV*
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a; b)$ sao cho $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
Giả sử $a_1; a_2, \ldots, a_n$ và $x_1; x_2, \ldots, x_n$ là các số $\in [a; b]$, thoả mãn điều kiện

$$\begin{aligned} a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \\ x_1 \leqslant a_1 \\ x_1 + x_2 \leqslant a_1 + a_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

34. *Bất đẳng thức Carlson*
Với mọi dãy số $a_1, a_2, \ldots,$ ta đều có

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^4 < \pi^2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}(ia_i)^2\Big).$$

35. *Bất đẳng thức Carleman*
Với mọi dãy số dương $a_1, a_2, \ldots,$ ta đều có

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant e\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G., 1999, *Bất đẳng thức*, NXB ĐHQGHN.

[2] Beckenbach F., Bellman R., 1961, *Inequalities*, Spinger-Verlag, Bản tiếng Nga: "Moskva 1965".

[3] J. Michael Steele, 2004, *The Cauchy - Schwarz master class,* Cambridge University Press.

[4] V.Cirtoaje, 2002, *On Popoviciu's Inequality for Convex Function,* Gazeta Matematica A, 4(2002), 247-253.

[5] V.Cirtoaje, 1996, *Amer. Math. Monthly* 103 (1996) 427-428.

[6] M.S.Klamkin, 2000-2003, *On a "Problem of the Month", Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem.*

[7] Mitrinovic D.S., Pecaric J.E., Fink A.M., 1993, *Classical and New Inequalities in Analysis,* Cluwer Academic Publishers.

[8] A.Lupas, 1982, *On an Inequality for Convex Function,* Gazeta Matematica A, (1982), 1-2.

[9] T. Popoviciu, 1965, *Sur certaines inegalites qui caracterisent les functions convex,* Analele Stiintifice ale Univ, Iasi, Sectia Mat. 11B (1965), 155-164.

[10] Phan Đức Chính, 1993, *Bất đẳng thức*, NXB Giáo Dục.

[11] Nguyễn Văn Mậu, 1998, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo Dục.

[12] Nguyễn Văn Mậu, 2000, *Phương trình hàm*, NXB Giáo Dục.

[13] Nguyễn Văn Mậu, 2001, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ*, NXB Giáo Dục.

[14] Nguyễn Văn Mậu, 2002, *Một số bài toán chọn lọc về dãy số*, NXB Giáo Dục.

[15] Titu Andreescu and Zuming Feng, 2000, *Mathematical Olympiads, 1998-1999: Problems and Solutions From Around the World*, The Mathematical Association of America.

[16] *Tuyển tập tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm 2003-2004.*

[17] *Kỷ yếu: Hội Nghị Khoa Học "Các chuyên đề chọn lọc bồi dưỡng học sinh nănh khiếu Toán học Hệ THPT Chuyên", Hà Nội 20-21/03/2004.*

[18] *Kỷ yếu: Hội Nghị Khoa Học "Các chuyên đề chọn lọc trong Hệ THPT Chuyên", Hà Nội 2005.*

[19] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Bất đẳng thức và một số vấn đề liên quan, Hà Nội 2005.*

Prof.Dr.Hab. **Nguyen Van Mau**
Hanoi University of Science
Faculty of Maths-Mechs-Informatics
334 Nguyen Trai Str., Thanh Xuan, Hanoi
E-mail: *nvmau@hn.vnn.vn*