PHẦN 2 : CÁC VẤN ĐỀ GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1 : BÀI TOÁN SỬ DỤNG CÁC ĐỊNH LÍ TRUNG BÌNH

1. CÁC ĐỊNH HƯỚNG

ĐỊNH HƯỚNG 1 : DÙNG ĐỊNH LÍ ROLLE

Cho f là một hàm liên tục trên [a ; b], khả vi trên (a, b) và f(a) = f(b). Lúc đó tồn tại số $c \in (a ; b)$ để $f'(c) = 0$.

Như vậy, từ định lí Rolle, một hàm số f liên tục trên [a ; b], khả vi trên (a ; b) và nhận 2 giá trị bằng nhau tại x = a, x = b : f(a) = f(b). Lúc đó tồn tại $c \in (a ; b)$ để $f'(c) = 0$ tức là phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c \in (a ; b)$.

Vậy giữa hai nghiệm của hàm số thì có ít nhất một nghiệm của đạo hàm. Do đó, nếu f là một hàm liên tục trên [c ; d], khả vi trên (c ; d) và f có n nghiệm phân biệt trong khoảng (c ; d) thì f' có ít nhất $n - 1$ nghiệm trong khoảng (c ; d) đó.

ĐỊNH HƯỚNG 2 : DÙNG ĐỊNH LÍ CAUCHY

Cho φ và ψ là hai hàm liên tục trên [a ; b], khả vi trên (a ; b) và $\varphi'(x) \neq 0$ tại mỗi $x \in (a ; b)$. Lúc đó tồn tại $c \in (a ; b)$ để : $\dfrac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}$.

Như vậy, từ định lí Cauchy, nếu φ và ψ là hai hàm liên tục trên [a ; b], khả vi trên (a ; b) và $\varphi'(x) \neq 0$ tại mỗi $x \in (a ; b)$. Lúc đó tồn tại $c \in (a ; b)$ để

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}$$

tức là phương trình $\dfrac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ có ít nhất một nghiệm $c \in (a ; b)$.

Hoặc, viết cách khác, phương trình

$$\varphi'(x).(\psi(b)-\psi(a)) - \psi'(x).(\varphi(b)-\varphi(a)) = 0$$

có ít nhất một nghiệm $c \in (a ; b)$.

ĐỊNH HƯỚNG 3 : DÙNG ĐỊNH LÍ LAGRANGE

Cho f là một hàm liên tục trên [a ; b], khả vi trên (a ; b). Lúc đó tồn tại $c \in (a ; b)$ để $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ hay $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Như vậy, từ định lí Lagrange, nếu f là một hàm liên tục trên [a ; b], khả vi trên (a ; b). Lúc đó tồn tại $c \in (a ; b)$ để $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. Tức là phương trình $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x)$ có ít nhất một nghiệm $c \in (a ; b)$. Hoặc, viết cách khác phương trình $f'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ có ít nhất một nghiệm $c \in (a ; b)$.

2. BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Trên cơ sở các định hướng trên, ta giải các bài toán sau

BÀI TOÁN 1

Cho 3 số a, b, c thoả mãn $abc \neq 0$ và $\dfrac{a}{7}+\dfrac{b}{5}+\dfrac{c}{3}=0$.

Chứng minh phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có nghiệm.

Giải.

Xét hàm số $F(x) = \dfrac{a}{7}x^7 + \dfrac{b}{5}x^5 + \dfrac{c}{3}x^3$, khi đó F(x) liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Ta có $F'(x) = x^2.(ax^4 + bx^2 + c) = x^2.f(x)$. (Với $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$).

Áp dụng định lí Lagrange trên [0 ; 1] thì tồn tại $c \in (0 ; 1)$:

$$\frac{F(1)-F(0)}{1-0} = F'(c).$$

Mà $F(0) = 0$, $F(1) = \dfrac{a}{7} + \dfrac{b}{5} + \dfrac{c}{3} = 0$ nên $F'(c) = 0$ hay $c^2.f(c) = 0$.

Vì $c \in (0 ; 1)$ nên $c^2 \neq 0$ do đó $f(c) = 0$.

Vậy f(x) có nghiệm hay là phương trình : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có nghiệm.

BÀI TOÁN 2

Cho n + 1 số $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả : $\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{a_{n-1}}{n}+\ldots+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_0}{1}=0$.

Chứng minh phương trình $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ có nghiệm.

Giải.

Xét hàm số $Q(x) = \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dfrac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \dfrac{a_1}{2}x^2 + \dfrac{a_0}{1}x.$

Q(x) liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là

$$Q'(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

Ta có Q(0) = 0 và theo giả thiết thì

$$Q(1) = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{1} = 0.$$

Áp dụng định lí Rolle, Q(x) có ít nhất 2 nghiệm nên Q'(x) = 0 có nghiệm.

Vậy phương trình $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ có nghiệm.

BÀI TOÁN 3

Chứng minh phương trình có nghiệm

$$a \sin 3x + b \cos 2x + c \cos x + \sin x = 0 \text{ với } \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Giải.

Xét một nguyên hàm của hàm số vế trái

$$f(x) = -\frac{a}{3}\cos 3x + \frac{b}{2}\sin 2x + c \sin x - \cos x.$$

Hàm số f liên tục trên $[0 ; 2\pi]$ và có đạo hàm trên $(0 ; 2\pi)$ là :

$$f'(x) = a \sin 3x + b \cos 2x + c \cos x + \sin x.$$

Theo định lí Lagrăng thì : $\exists\, x_0 \in (0,2\pi) : f'(x_0) = \dfrac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0}$ mà

$$\left.\begin{aligned} f(2\pi) &= b + c \\ f(0) &= b + c \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{b + c - (b + c)}{2\pi} = 0.$$

Vậy x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$. (đpcm)

BÀI TOÁN 4

Cho hàm số f khả vi trên [0 ; 1] và thoả mãn :

$$f(0) = 0 ; f(1) = 1.$$

Chứng minh tồn tại 2 số phân biệt a, b thuộc (0 ; 1) sao cho

$$f'(a).f'(b) = 1.$$

Giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x - 1$, khi đó thì g(x) liên tục và khả vi trên [0 ; 1].

Ta có : g(0) = –1 < 0 và g(1) = 1 > 0 nên tồn tại số c thuộc (0 ; 1) sao cho g(c) = 0.

Do đó f(c) + c –1 = 0 hay f(c) = 1 – c.

Áp dụng định lí Lagrange cho f trên các đoạn [0 ; c] và [c ; 1] thì tồn tại a ∈ (0 ; c) sao cho $\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(a)$ và tồn tại b ∈ (c ; 1) sao cho $\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(b)$.

Nên $f'(a).f'(b)=\frac{f(c)}{c}\frac{1-f(c)}{1-c}=\frac{(1-c)c}{c(1-c)}=1$.

Vậy tồn tại 2 số phân biệt a, b thuộc (0 ; 1) sao cho f '(a).f '(b) = 1.

BÀI TOÁN 5

Cho hàm số f(x) khả vi trên đoạn [a ; b] và thoả mãn

$$f(a)=\frac{1}{2}(a-b)\ ;\ f(b)=\frac{1}{2}(b-a)\ ;\ f(\frac{a+b}{2})\neq 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại các số đôi một khác nhau $c_1,c_2,c_3\in(a;b)$ sao cho

$$f'(c_1).f'(c_2).f'(c_3)=1.$$

Giải.

Áp dụng định lí Lagrange thì tồn tại số c_1 thuộc (a ; b) sao cho

$$f'(c_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=1.$$

Xét hàm số $h(x)=f(x)+x-\frac{a+b}{2}$

Thì $h(a).h(b) = -(a-b)^2 < 0$.

Do đó tồn tại x_0 thuộc (a ; b) sao cho $h(x_0) = 0$

Theo định lí Lagrange thì tồn tại số c_2 thuộc (a ; x_0), $c_2 \neq c_1$ sao cho

$$f'(c_2)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}=\frac{b-x_0}{x_0-a}.$$

Tương tự, theo định lí Lagrange thì tồn tại số c_3 thuộc (x_0 ; b), $c_3 \neq c_1$ sao cho

$$f'(c_3) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = \frac{x_0 - a}{b - x_0}.$$

Rõ ràng c_1, c_2, c_3 đôi một khác nhau và thoả $f'(c_1).f'(c_2).f'(c_3) = 1$.

BÀI TOÁN 6

Chứng minh phương trình : $e^x.\cos x = 1$ (1) có 2 nghiệm và phương trình $e^x.\sin x = 1$ (2) có ít nhất một nghiệm ở giữa 2 nghiệm phương trình trên.

Giải.

Ta có $e^x \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$$\Leftrightarrow \cos x - e^{-x} = 0$$

Đặt $f(x) = \cos x - e^{-x}$ thì f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = 0$ nên $x = 0$ là 1 nghiệm của (1).

Và có $f\left(\frac{\pi}{2}\right). f(2\pi) < 0$ nên (1) có ít nhất một nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2} ; 2\pi\right)$.

Do đó phương trình (1) có ít nhất 2 nghiệm. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm đó ($x_1 < x_2$). Áp dụng định lí Rolle trên $[x_1 ; x_2]$ thì $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $x \in (x_1 ; x_2)$.

Mà $f'(x) = e^{-x} - \sin x$ và $\sin x.e^x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$$\Leftrightarrow e^{-x} - \sin x = 0.$$

Vậy phương trình $e^x.\sin x = 1$ có ít nhất 1 nghiệm $x \in (x_1 ; x_2)$.

BÀI TOÁN 7

Cho hàm số $f > 0$ có đạo hàm trên $[a ; b]$.

Chứng minh tồn tại số $c \in (a, b)$ sao cho $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a).\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Giải.

Xét hàm số : $g(x) = \ln [f(x)]$ trên $[a ; b]$.

Hàm số g(x) liên tục trên $[a ; b]$ và có đạo hàm $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Theo định lí Lagrăng thì $\exists\ c \in (a ; b)$ sao cho :

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow g'(c) = \frac{\ln[f(b)] - \ln[f(a)]}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{\ln[f(b)] - \ln[f(a)]}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a) = \ln\frac{f(b)}{f(a)}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}\right] = \ln\left[\frac{f(b)}{f(a)}\right].$$

Hay $e^{(b-a).\frac{f'(c)}{f(c)}} = \frac{f(b)}{f(a)}$. (đpcm)

BÀI TOÁN 8

Cho dãy số thực $\{u_n\}$ được xác định như sau

$$u_1 = a \in R, u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1+u_n^2) - 2002,\ n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ.

Giải.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - 2002$, khi đó thì f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ và $|f'(x)| = \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2}, \forall x.$

Mặt khác, đặt $g(x) = x + 2002 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = x - f(x)$ thì g(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $g'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2+1} > 0, \forall x.$

Do đó g(x) đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Mà $g(0).g(-2002) = -2002.\frac{1}{2}\ln(1+2002^2) < 0$

nên phương trình g(x) = 0 có một nghiệm duy nhất L.

Áp dụng định lí Lagrange thì tồn tại số c :

$$|u_{n+1} - L| = |f(u_n) - f(L)| = |f'(c)||u_n - L|$$

Suy ra $|u_{n+1} - L| \le \frac{1}{2}|u_n - L|, \forall n \ge 1$.

Do đó $$0 \le |u_{n+1} - L| \le \frac{1}{2}|u_n - L| \le (\frac{1}{2})^2 |u_{n-1} - L|$$

$$\le ... \le (\frac{1}{2})^n |u_1 - L|, \forall n \ge 1.$$

Chuyển qua giới hạn thì dãy $\{u_n\}$ hội tụ về L.

BÀI TOÁN 9

Cho n là số nguyên dương, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Chứng minh rằng phương trình $x + \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-\pi ; \pi)$.

Giải.

Xét hàm số $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(-\frac{a_k}{k}\cos kx + \frac{b_k}{k}\sin kx), x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $F'(x) = x + \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin kx + b_k \cos kx)$.

Ta có $F(-\pi) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} -\frac{a_k}{k}(-1)^k$

và $F(\pi) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} -\frac{a_k}{k}(-1)^k = F(-\pi)$.

Áp dụng định lí Rolle trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ thì tồn tại số c thuộc khoảng $(-\pi ; \pi)$:

$$\frac{F(\pi) - F(-\pi)}{\pi - (-\pi)} = F'(c)$$

Vậy phương trình $x + \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-\pi ; \pi)$.

BÀI TOÁN 10

Cho phương trình

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, $a_0 \neq 0$ có n nghiệm phân biệt.

Chứng minh $(n-1)a_1^2 > 2na_0a_2$.

Giải.

Đặt $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, khi đó thì f khả vi trên $\mathbb{R}$.

Vì f(x) có n nghiệm phân biệt nên theo định lí Rolle thì

$f'(x)$ có $n-1$ nghiệm phân biệt,

$f''(x)$ có $n-2$ nghiệm phân biệt,

...

$f^{(n-2)}(x) = \frac{n!}{2}a_0x^2 + (n-1)!a_1x + (n-2)!\,a_2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $\Delta > 0$ nên $((n-1)!\,a_1)^2 - 2n!\,a_0(n-2)!\,a_2 > 0$.

Vậy $(n-1)a_1^2 > 2na_0.a_2$.

BÀI TOÁN 11

Giải các phương trình

a) $2^x + 6^x = 3^x + 5^x$;

b) $2^x = x + 1$.

Giải.

a) Ta có $2^x + 6^x = 3^x + 5^x$ hay $6^x - 5^x = 3^x - 2^x$.

Gọi a là nghiệm của phương trình trên thì có $3^a - 2^a = 6^a - 5^a$.

Xét hàm số $f(t) = (t+1)^a - t^a$, khi đó f(t) liên tục trên [2 ; 5] và có

$f(2) = f(5)$

$f'(t) = a[(t+1)^{a-1} - t^{a-1}]$.

Áp dụng định lí Rolle trên [2 ; 5] thì tồn tại số c thuộc (2 ; 5) sao cho $f'(c) = 0$.

Do đó $a[(c+1)^{a-1} - c^{a-1}] = 0$.

Suy ra $a = 0$ hoặc $(c+1)^{a-1} = c^{a-1}$.

Vì c thuộc (2 ; 5) nên $a = 0$ hoặc $a = 1$.

Thử lại đúng, vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

b) Ta có $2^x = x + 1$ hay $2^x - x - 1 = 0$

Xét hàm số $f(x) = 2^x - x - 1$, $D = \mathbb{R}$.

Khi đó $f'(x) = 2^x\ln 2 - 1$, $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 > 0$.

Suy ra đồ thị f lõm, do đó $f(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm mà

$$f(0)=0,\ f(1)=0.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{0\ ;\ 1\}$.

BÀI TOÁN 12

Cho hàm số f(x) liên tục và có đạo hàm trên $(0\ ;\ +\infty)$ và không phải là hàm hằng. Với 2 số thực $0 < a < b$.

Chứng minh phương trình $xf'(x)-f(x)=\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}$ có ít nhất một nghiệm thuộc (a ; b).

Giải.

Xét 2 hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}; h(x)=\dfrac{1}{x}$, khi đó thì g(x), h(x) khả vi trên (a ; b).

Ta có $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$; $h'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$.

Theo định lí Cauchy thì tồn tại $x_0 \in (a\ ;\ b)$ sao cho

$\dfrac{h(b)-h(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{h'(x_0)}{g'(x_0)}$ hay $[h(b)-h(a)]g'(x_0)=[g(b)-g(a)]h'(x_0)$.

Nên $\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}=\left(\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}\right)\dfrac{-1}{x_0^2}$.

Do đó $\dfrac{(a-b)(x_0f'(x_0)-f(x_0))}{bax_0^2}=-\dfrac{af(b)-bf(a)}{abx_0^2}$.

Suy ra $x_0f'(x_0)-f(x_0)=\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}$.

Vậy phương trình $xf'(x)-f(x)=\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}$ có ít nhất một nghiệm thuộc (a ; b).

BÀI TOÁN 13

Cho $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$ có n nghiệm phân biệt. Chứng minh phương trình

$$f(x) - f'(x) = 0 \text{ cũng có n nghiệm phân biệt.}$$

Giải.

Đặt $g(x) = e^{-x} f(x)$.

Vì f(x) = 0 có n nghiệm $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$ nên $g(\alpha_i) = 0$ (i = 1, 2, ..., n).

Theo định lí Role trong mỗi khoảng $(\alpha_i ; \alpha_{i+1})$ (i = 1, 2, ..., n−1) đều tồn tại β_i để $g'(\beta_i) = 0$.

Mà $g'(x) = -e^{-x}[f(x) - f'(x)]$ và $e^{-x} > 0$ với mọi x.

Suy ra f(x) − f '(x) có n − 1 nghiệm $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}$

Vì đa thức f(x) − f '(x) bậc n nên f(x) − f '(x) có đủ n nghiệm

BÀI TOÁN 14

Cho hàm số f(x) có đạo hàm trên [0 ; 1] và nhận giá trị dương.

Chứng minh bất phương trình

$$f'(x) - f(x) \le \frac{2}{\pi}(f(1) - 2f(0)) \text{ có nghiệm.}$$

Giải.

Xét 2 hàm số $g(x) = \arctan x$; $h(x) = \dfrac{f(x)}{1+x^2}$ trên [0 ; 1], khi đó thì g(x), h(x) khả vi trên (0 ; 1).

Ta có $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $h'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}f(x) + \dfrac{1}{1+x^2}f'(x)$.

Theo định lí Cauchy thì tồn tại $c \in (0 ; 1)$ sao cho

$$\frac{h(1)-h(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{h'(c)}{g'(c)} \text{ hay } \frac{\frac{f(1)}{2} - f(0)}{\frac{\pi}{4} - 0} = f'(c) - \frac{2c}{1+c^2}f(c).$$

Nên $\dfrac{2}{\pi}(f(1) - 2f(0)) = f'(c) - \dfrac{2c}{1+c^2}f(c)$.

Vì $0 < c < 1$ nên $1 + c^2 \ge 2c$ và vì $f(c) > 0$ nên

$$f'(c) - \frac{2c}{1+c^2}f(c) \ge f'(c) - f(c).$$

Vậy bất phương trình $f'(x) - f(x) \le \dfrac{2}{\pi}(f(1) - 2f(0))$ có nghiệm x = c.

VẤN ĐỀ 2 : BÀI TOÁN SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỆU LỒI LÕM CỦA HÀM SỐ

1. CÁC ĐỊNH HƯỚNG

ĐỊNH HƯỚNG 1 : BÀI TOÁN SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỆU

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 1 không đổi dấu trên miền D tức là hàm số đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm thì có tối đa
một nghiệm trên miền D đó. Hơn nữa, nếu chỉ ra được một nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình.

Như vậy, việc phân chia các khoảng mà hàm số đơn điệu cũng cho phép ta đếm được số nghiệm của phương trình.

Đối với bài toán bất phương trình, khi hàm số f tương ứng đơn điệu trên khoảng (c ; d), nếu f(c) và f(d) cùng dấu thì bất phương trình hoặc có miền nghiệm là cả khoảng (c ; d) hoặc vô nghiệm trên miền đó, còn nếu f(c) và f(d) trái dấu thì tồn tại duy nhất nghiệm x_0 của phương trình nên bất phương trình sẽ có miền nghiệm là $(c ; x_0)$ hoặc $(x_0 ; d)$.

ĐỊNH HƯỚNG 2 : BÀI TOÁN SỬ DỤNG TÍNH CHẤT LỒI LÕM

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 không đổi dấu trên miền D tức là hàm số có đồ thị lồi hoặc đồ thị lõm thì có tối đa hai nghiệm trên miền D đó. Hơn nữa, nếu chỉ ra được hai nghiệm thì phương trình có đúng hai nghiệm đó.

ĐỊNH HƯỚNG 3 : BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình nói chung không thể giải được nghiệm cụ thể qua công cụ đạo hàm, tuy nhiên một số phương trình, bất phương trình, hệ phương trình mà khi lập hàm số liên quan thì đạo hàm có định lượng đặc biệt. Từ đó, ta ước lượng được số nghiệm lẫn các nghiệm đặc biệt của một hàm đơn điệu, của một hàm lồi, hay là miền nghiệm là miền xác định của bất phương trình, …

Chú ý rằng các bất đẳng thức đúng trên một miền của biến x đều có thể chuyển về bài toán bất phương trình, các bất phương trình loại này có tập nghiệm là miền của biến x đó. Nếu chuyển về bài toán giải phương trình thì nghiệm phương trình là dấu bằng xảy ra của bất đẳng thức tương ứng.

2.BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Trên cơ sở các định hướng trên, ta giải các bài toán sau

BÀI TOÁN 1

Chứng minh với mỗi số nguyên dương n thì phương trình

$$x + x^2 + x^3 + ... + x^{2n} + 2007x^{2n+1} = 1999$$

có nghiệm duy nhất.

Giải.

Đặt $f(x) = x + x^2 + x^3 + ... + x^{2n} + 2007x^{2n+1}$, khi đó thì f liên tục trên $D = \mathbb{R}$.

Xét $x \le -1$ thì $f(x) = x + x^2(1 + x) + ... + x^{2n}(1 + x) + 2006x^{2n+1} < 0$.

Xét $-1 < x \le 0$ thì $f(x) = x(1 + x) + x^3(1 + x) + ... + x^{2n-1}(1 + x) + 2007x^{2n+1} \le 0$.

Do đó $f(x) \le 1999$, $\forall x \le 0$ nên không có nghiệm $x \le 0$.

Xét $x > 0$ thì

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + 2nx^{2n-1} + 2007(2n + 1)x^{2n} > 0.$$

Nên f đồng biến mà ta có $f(0) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Suy ra phương trình $f(x) = 1999$ có nghiệm duy nhất $x > 0$.

Vậy phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

BÀI TOÁN 2

Cho 2 + 2n số a_i, b_i thoả: $0 < b_0 \le |a_0|$, $b_i \ge |a_i|$ với i = 1, ..., n.

Chứng minh các nghiệm nếu có của đa thức: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ có giá trị tuyệt đối không vượt quá nghiệm dương duy nhất x_0 của phương trình

$$b_0x^n - b_1x^{n-1} - ... - b_n = 0.$$

Giải.

Đặt $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, $g(x) = b_0x^n - b_1x^{n-1} - ... - b_n$

Ta có $g(x) = x^n(b_0 - \frac{b_1}{x} - \frac{b_2}{x^2} - ... - \frac{b_n}{x^n}) = x^n.h(x)$.

$$h'(x) = \frac{1.b_1}{x^2} + \frac{2.b_2}{x^3} + ... + \frac{n.b_n}{x^{n+1}} \ge 0, \forall x > 0,$$

do $b_i \ge |a_i| \ge 0$ với i = 1, ..., n.

Nên $h(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$ và nhận giá trị $(-\infty ; b_0)$.

Do đó $g(x)$ có 1 nghiệm dương duy nhất x_0. Khi $x > x_0 \Rightarrow g(x) > 0$.

Ta có $|f(x)| = |a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n| \geq |a_0x^n| - |a_1x^{n-1} + ... + a_n|$

$$\geq |a_0x^n| - |a_1x^{n-1}| - ... - |a_n|$$

$$= |a_0| . |x|^n - |a_1| . |x^{n-1}| - ... - |a_n|$$

$$\geq b_0. |x|^n - b_1. |x|^{n-1} - ... - |b_n| = g(|x|).$$

Nên với nghiệm x nếu có của $f(x)$ thì $x \leq x_0$.

BÀI TOÁN 3

Giải các phương trình

a) $2^x = 6 - x$;

b) $\ln x = 1 - x$.

Giải.

a) TXĐ : $D = \mathbb{R}$.

Đặt $f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x.\ln 2 > 0$, $\forall x \Rightarrow f$ tăng trên $\mathbb{R}$.

$g(x) = 6 - x \Rightarrow g'(x) = -1 < 0, \forall x \Rightarrow g$ giảm trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(2) = g(2)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) TXĐ : $D = (0; +\infty)$

Đặt $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ tăng trên $(0 ; +\infty)$.

$g(x) = 1 - x \Rightarrow g'(x) = -1 < 0 \Rightarrow g$ giảm trên $(0 ; +\infty)$.

Mặt khác $f(1) = g(1) \Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

BÀI TOÁN 4

Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8}$$

Giải.

Phương trình $\Leftrightarrow f(x) = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 15} = 0$ (*)

Nếu $x \leq \dfrac{2}{3}$ thì $f(x) < 0 \Rightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm.

Nếu $x > \frac{2}{3}$ thì $f'(x) = 3 + x\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+8}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+15}}\right] > 0, \forall x > \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow$ f đồng biến trên $\left(\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right)$.

Hơn nữa $f(1) = 0$ nên phương trình (*) có đúng 1 nghiệm $x = 1$.

BÀI TOÁN 5

Giải phương trình

$$\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} = 2\sqrt{3} + \sqrt{4-x}.$$

Giải.

Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2+6x+16 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(2x^2-x+8) \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4.$$

Phương trình tương đương $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{3}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x}, -2 \leq x \leq 4$.

Thì $f'(x) = \dfrac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}} + \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0$ nên f đồng biến.

Mà $f(1)=2\sqrt{3}$, do đó phương trình trở thành $f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

BÀI TOÁN 6

Giải phương trình $\log_3 \dfrac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5} = x^2+3x+2$.

Giải.

Ta biến đổi phương trình thành

$$\log_3 \frac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5} = (2x^2+4x+5) - (x^2+x+3)$$

hay $\log_3(x^2+x+3) + (x^2+x+3) = \log_3(2x^2+4x+5) + (2x^2+4x+5)$.

(Do $x^2 + x + 3 > 0$ và $2x^2 + 4x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$ thì $f'(t) = \dfrac{1}{t.\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Do đó f(t) đồng biến, nên phương trình

$$f(x^2+x+3)=f(2x^2+4x+5)$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+3=2x^2+4x+5 \text{ hay } x^2+3x+2=0$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm x = –1 và x = –2.

BÀI TOÁN 7

Giải các bất phương trình

a) $x + \ln x \leq 1$;

b) $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} > 2\sqrt{3}+\sqrt{4-x}$.

Giải.

a) Điều kiện xác định : $x > 0$

Xét hàm $f(x) = x + \ln x \Rightarrow f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0, \forall x > 0$.

Nên f đồng biến trên $(0 ; +\infty)$.

Mặt khác $f(1) = 1 + \ln 1 = 1$.

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình $S = (0 ; 1]$.

b) Điều kiện xác định : $-2 \leq x \leq 4$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x} > 2\sqrt{3}$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x}$ với $-2 \leq x \leq 4$

$$f'(x) = \frac{3x^2+3x+3}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0$$

$\Rightarrow$ f đồng biến trên $[-2 ; 4]$.

Mặt khác : $f(1) = 2\sqrt{3}$.

nên bất phương trình $\Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow 1 < x \leq 4$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình $S = (1 ; 4]$.

BÀI TOÁN 8

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3=y+\sqrt{y^2+1} \\ y+3=z+\sqrt{z^2+1} \\ z+3=x+\sqrt{x^2+1}. \end{cases}$

Giải.

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2+1} - 3, t \in \mathbb{R}$.

Khi đó $f'(t) = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}} > \dfrac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{t^2+1}} \geq 0\ \forall t$.

Suy ra f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$

Giả sử x > y thì f(x) > f(y) nên y > z do đó f(y) > f(z) tức là z > x : vô lí.

Giả sử x < y thì f(x) < f(y) nên y < z do đó f(y) < f(z) tức là z < x : vô lí.

Do đó x = y thì x = y = z. Thế vào hệ

$$x + 3 = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Thử lại $x = y = z = \pm 2\sqrt{2}$ thì hệ nghiệm đúng.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $x = y = z = \pm 2\sqrt{2}$.

BÀI TOÁN 9

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x. \end{cases}$$

Giải.

Xét hàm số : $f(t) = t^3 + 3t - 3 + \ln(t^2 - t + 1)$, $D = \mathbb{R}$.

Khi đó $f'(t) = 3t^2 + 3 + \dfrac{2t-1}{t^2-t+1} = 3t^2 + 1 + \dfrac{2t^2+1}{t^2-t+1} > 0, \forall t$.

Suy ra hàm số đồng biến.

Do hệ hoán vị vòng tròn nên ta giả sử x là số bé nhất.

Ta có $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \Rightarrow y \leq z \Rightarrow f(y) \leq f(z) \Rightarrow z \leq x$

nên phải có x = y = z.

Do đó $x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = x$

hay $x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = 0$ (*)

Xét hàm số $g(x) = x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1)$, $D = \mathbb{R}$.

Vì $g'(x) = 3x^2 + 2 + \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 1} = 3x^2 + \dfrac{2x^2+1}{x^2 - x + 1} > 0, \forall x$

nên g(x) đồng biến.

Mà ta có $g(1) = 0$ nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Do đó $x = y = z = 1$. Thử lại đúng.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = z = 1$.

BÀI TOÁN 10

Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 12x + 35 < 0 & (1) \\ x^3 - 3x^2 + 9x + \dfrac{1}{3} > 0 & (2) \end{cases}$$

Giải.

Giải (1) : $x^2 - 12x + 35 < 0 \Leftrightarrow 5 < x < 7$

Xét (2) : Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + \dfrac{1}{3}$, $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 9 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

nên f(x) đồng biến.

Vì $x > 5 \Rightarrow f(x) > \dfrac{286}{3}$.

Do đó $f(x) > 0, \forall x \in (5\,;\,7)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = (5\,;\,7)$.

BÀI TOÁN 11

Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \arcsin x - x \le \text{arctg}\,y - y \\ \arcsin y - y \le \text{arctg}\,x - x \\ x, y \in [0\,;\,1). \end{cases}$$

Giải.

Xét hàm số $f(t) = \arcsin t - t$, $t \in [0\,;\,1)$.

Thì có $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1 = \dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}} \ge 0$ nên f(t) đồng biến.

Vì $x \ge 0 \Rightarrow f(x) \ge f(0) = 0 \Rightarrow \arcsin x - x \ge 0$.

Xét hàm số $g(t) = \arctan t - t,\ t \in [0 ; 1)$.

Thì có $g'(t) = \dfrac{1}{t^2+1} - 1 = \dfrac{t^2}{t^2+1} \leq 0$ nên $g(t)$ nghịch biến.

Vì $y \geq 0 \Rightarrow g(y) \leq g(0) = 0 \Rightarrow \arctan y - y \leq 0$

Kết hợp với hệ phương trình ta suy ra

$$0 \leq \arcsin x - x \leq \arctan y - y \leq 0 \text{ nên } x = y = 0.$$

Thử lại đúng nên hệ phương trình có nghiệm $x = y = 0$.

BÀI TOÁN 12

Tìm điều kiện bất phương trình có nghiệm

$$m.\log_2 (2 + \sqrt{4-x}) \geq x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}. \qquad (*)$$

Giải.

Điều kiện xác định : $\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4.$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow m \geq \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}}{\log_2(2 + \sqrt{4-x})} = f(x)$

(Vì $\log_2(1 + \sqrt{4-x}) > 0,\ \forall x \in [0;4]$).

Đặt : $g(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x + 12}$.

$g'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+12}} > 0,\ \forall x \in [0 ; 4] \Rightarrow g(x)$ tăng trên $[0 ; 4]$.

$h(x) = \log_2 (2 + \sqrt{4 - x})$ thì $h(x) > 0$.

$$h'(x) = \frac{(2 + \sqrt{4-x})'}{(2 + \sqrt{4-x}) . \ln 2} = \frac{-1}{2(2 + \sqrt{4-x})\sqrt{4-x} . \ln 2} < 0$$

$\Rightarrow h'(x)$ giảm.

Do đó : $f(x)$ tăng trên $[0 ; 4]$.

Bảng biến thiên :

x	0	4
f(x)	$\sqrt{3}$	12

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m \geq \sqrt{3}$.

VẤN ĐỀ 3 : BÀI TOÁN SỬ DỤNG CỰC TRỊ, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1. CÁC ĐỊNH HƯỚNG

ĐỊNH HƯỚNG 1 : BÀI TOÁN SỬ DỤNG CỰC TRỊ

Khảo sát số nghiệm của phương trình bậc 3

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0.$$

Xét hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, khi đó thì f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x$ hay $f'(x) \leq 0, \forall x$ thì f(x) = 0 chỉ có 1 nghiệm.

Nếu $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thì đồ thị có 2 cực trị :

- Với $y_{CĐ} . y_{CT} > 0$: Phương trình f(x) = 0 chỉ có 1 nghiệm.
- Với $y_{CĐ} . y_{CT} = 0$: Phương trình f(x) = 0 có 2 nghiệm (1 đơn, 1 kép).
- Với $y_{CĐ} . y_{CT} < 0$: Phương trình f(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt.

ĐỊNH HƯỚNG 2 : BÀI TOÁN SỬ DỤNG BẢNG BIẾN THIÊN

Số nghiệm từ bảng biến thiên (BBT):

Dựa vào bảng biến thiên hàm số f(x) trên 1 miền chỉ định.

Nếu f giữ nguyên 1 dấu trên khoảng (a ; b) thì vô nghiệm trên khoảng đó.

Nếu f biến đổi dấu từ (–) sang (+) hay ngược lại trên khoảng (c ; d) thì có đúng 1 nghiệm trên đó.

Số lượng nghiệm f(x) = 0 là số giá trị y = 0 được mô tả qua BBT.

ĐỊNH HƯỚNG 3 : BÀI TOÁN SỬ DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

- Các mệnh đề đánh giá tham số g(m) trong bài toán về nghiệm khi tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất tương ứng :

Phương trình f(x, m) = 0 có nghiệm trên D, và nếu f(x,m) = 0 tương đương với g(m) = h(x) thì điều kiện : $\min\limits_{x \in D} h(x) \leq g(m) \leq \max\limits_{x \in D} h(x)$.

Phương trình f(x, m) = 0 vô nghiệm trên D, và nếu f(x, m) = 0 tương đương với g(m) = h(x) thì điều kiện : $g(m) < \min\limits_{x \in D} h(x)$ hay $g(m) > \max\limits_{x \in D} h(x)$.

Bất phương trình f(x, m) > 0 có nghiệm trên D, và nếu f(x, m) > 0 tương đương với g(m) > h(x) thì điều kiện : $g(m) > \min\limits_{x\in D} h(x)$

Bất phương trình f(x, m) > 0 có nghiệm trên D, và nếu f(x, m) > 0 tương đương với g(m) < h(x) thì điều kiện : $g(m) < \max\limits_{x\in D} h(x)$

Bất phương trình f(x, m) > 0 có nghiệm là mọi $x\in D$, và nếu f(x, m) > 0 tương đương với g(m) > h(x) thì điều kiện : $g(m) > \max\limits_{x\in D} h(x)$

Bất phương trình f(x, m) > 0 có nghiệm là mọi $x\in D$, và nếu f(x, m) > 0 tương đương với g(m) < h(x) thì điều kiện : $g(m) < \min\limits_{x\in D} h(x)$

Nếu bất phương trình dạng ≤ hoặc ≥ thì bổ sung thêm dấu "=" cho các điều kiện.

2. BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

BÀI TOÁN 1

Tìm tham số m để phương trình:

$x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^2 + 1 = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Giải.

Xét $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^2 + 1$, $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Cho $y' = 0 \Rightarrow x_1 = m - 1,\ x_2 = m + 1$ $(S = 2m,\ P = m^2 - 1)$

Do đó hàm số luôn luôn có cực đại, cực tiểu.

Ta có $y = \dfrac{1}{3}(x - m).\ y' - 2x + m^3 - m^2 - m + 1$.

$\Rightarrow y_{CT} . y_{CĐ} = (-2x_1 + m^3 - m^2 - m + 1)(-2x_2 + m^3 - m^2 - m + 1)$

$= (m^2 - 1)(m^2 - 3)(m^2 - 2m - 1)$.

Điều kiện có 3 nghiệm dương phân biệt :

$$\begin{cases} x_{CT} > 0 \ ;\ x_{CĐ} > 0 \\ y_{CT} . y_{CĐ} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0; m + 1 > 0 \\ (m^2 - 1)(m^2 - 3)(m^2 - 2m - 1) < 0 \end{cases}$$

Giải ra được $\sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$.

BÀI TOÁN 2

Cho $ab \neq 0$. Chứng minh phương trình

$x^3 - 3(a^2 + b^2)x + 2(a^3 + b^3) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 3(a^2 + b^2)x + 2(a^3 + b^3)$, $D = \mathbb{R}$.

Ta chứng minh hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}.\, y_{CT} < 0$

Thật vậy

$$y' = 3x^2 - 3(a^2 + b^2)$$

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$, $(S = 0, P = -(a^2 + b^2))$.

Vì y' bậc 2 có 2 nghiệm phân biệt nên có cực đại và cực tiểu.

Ta có :

$$y = \frac{1}{3}x \,.\, y' - 2(a^2 + b^2)x + 2(a^3 + b^3).$$

Nên $y_{CĐ}.y_{CT} = (-2(a^2 + b^2)x_1 + 2(a^3 + b^3))\,(-2(a^2 + b^2)x_2 + 2(a^3 + b^3))$

$$= 4(a^3 + b^3)^2 - 4(a^2 + b^2)^3$$

$$= -4a^2b^2(3a^2 + 3b^2 - 2ab)$$

$$= -4a^2b^2[2a^2 + 2b^2 + (a - b)^2] < 0$$

Vậy phương trình cho luôn có 3 nghiệm phân biệt.

BÀI TOÁN 3

Chứng minh phương trình

$x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

Giải.

Đặt $f(x) = x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1$, $D = \mathbb{R}$.

Xét $x \geq 1$ thì $f(x) = x^6(x^7 - 1) + 3x^2(x^2 - 1) + 1 > 0$: vô nghiệm

Xét $0 \leq x < 1$ thì $f(x) = x^{13} + (1 - x^2)^3 > 0$: vô nghiệm

Xét $x < 0$ thì :

$$f'(x) = 13x^{12} - 6x^5 + 12x^3 - 6x$$

$= 13x^{12} - 6x(x - 1)^2 > 0$ nên f đồng biến

Nên $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x < 0$.

Vậy phương trình cho có nghiệm duy nhất.

BÀI TOÁN 4

Chứng minh phương trình

$x^5 - x - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất và nghiệm đó lớn hơn $\sqrt[9]{8}$.

Giải.

Đặt $f(x) = x^5 - x - 2$, $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 5x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}} \Rightarrow f(x) = \dfrac{4}{5\sqrt[4]{5}} - 2 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}} \Rightarrow f(x) = -\dfrac{4}{5\sqrt[4]{5}} - 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$		$\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{4}{5\sqrt[4]{5}} - 2$	$\searrow$	$-\dfrac{4}{5\sqrt[4]{5}} - 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy đồ thị chỉ cắt trục hoành duy nhất tại 1 điểm nên phương trình có nghiệm duy nhất là x_0 và nghiệm đó là dương.

Do x_0 là nghiệm $x_0^5 - x_0 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x_0^5 = x_0 + 2 \overset{\text{Cosi}}{>} 2\sqrt{2x_0}$ (dấu "=" không xảy ra)

$\Leftrightarrow x_0^{10} > 8x_0$

$\Leftrightarrow x_0^9 > 8 \Leftrightarrow x_0 > \sqrt[9]{8}$ (đpcm).

BÀI TOÁN 5

Tìm k để phương trình

$x^4 + 4x^3 - 8x + 1 - k = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Giải.

Phương trình: $x^4 + 4x^3 - 8x + 1 = k$

Xét: $y = x^4 + 4x^3 - 8x + 1$, $D = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 + 12x^2 - 8 = 4(x + 1)(x^2 + 2x - 2)$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = -1 \pm \sqrt{3}$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		-1		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	6	↘	-3	↗	$+\infty$

Vậy điều kiện có 4 nghiệm phân biệt là $-3 < k < 6$.

BÀI TOÁN 6

Tìm m để phương trình :

$2|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + m$ có 4 nghiệm.

Giải.

Ta có : $2|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + m$

$$\Leftrightarrow 2|x^2 - 5x + 4| - x^2 + 5x = m$$

Xét $y = f(x) = 2|x^2 - 5x + 4| - x^2 + 5x$, $D = \mathbb{R}$.

$$= \begin{cases} -3x^2 + 15x - 8, & 1 \le x \le 4 \\ x^2 - 5x + 8, & x < 1 \cup x > 4. \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} -6x + 15 & \text{nếu } 1 \le x \le 4 \\ 2x - 5 & \text{nếu } x < 1 \cup x > 4. \end{cases}$$

Cho $y' = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$-6x + 15$				+	0	-			
$2x - 5$		-						+	
y'		-	‖	+	0	-	‖	+	
y	$-\infty$	↘	4	↗	43/4	↘	4	↗	$+\infty$

Vậy điều kiện có 4 nghiệm là $4 < m < \frac{43}{4}$.

• Chú ý ta cớ thể đặt $t = x^2 - 5x$

BÀI TOÁN 7

Biện luận theo tham số k về số nghiệm của phương trình

$$2x^4 - 17x^3 + 51x^2 - (36 + k)x + k = 0. \qquad (1)$$

Giải.

Rõ ràng với mọi k thì $x = 1$ luôn thoả mãn phương trình (1)

Phương trình (1) được phân tích thành :

$$(x - 1)(2x^3 - 15x^2 + 36x - k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2x^3 - 15x^2 + 36x - k = 0 \qquad (*) \end{array}\right.$$

- Trường hợp $x = 1$ là nghiệm của (*). Khi đó $k = 23$.

(*) trở thành $2x^3 - 15x^2 + 36x - 23 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 - 13x + 23) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } 2x^2 - 13x + 23 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy với $k = 23$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

- Với $k \neq 23$. Khi đó $x = 1$ không phải là nghiệm của (*) nên số nghiệm của (1) bằng 1 cộng với số nghiệm của phương trình (*).

Xét $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ thì

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hay } x = 3.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	28	↘	27	↗	$+\infty$

Qua bảng biến thiên ta có :

- Nếu $23 \neq k < 27$, $k > 28$ thì (*) có nghiệm duy nhất nên (1) có 2 nghiệm phân biệt.

- Nếu k = 27 hay k = 28 thì (*) có hai nghiệm phân biệt nên (1) có ba nghiệm phân biệt

- Nếu 27 < k < 28 thì (*) có ba nghiệm phân biệt nên (1) có bốn nghiệm phân biệt.

BÀI TOÁN 8

Tìm a để phương trình

$x^6 + 3x^5 + (6 - a)x^4 + (7 - 2a)x^3 + (6 - a)x^2 + 3x + 1 = 0$ vô nghiệm.

Giải.

Xét $x = 0 \Rightarrow 1 = 0$: loại.

Xét $x \neq 0$. Chia 2 vế cho x^3, phương trình trở thành :

$$x^3 + 3x^2 + (6 - a)x + (7 - 2a) + (6 - a) . \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0$$

$$(x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (6 - a)(x + \frac{1}{x}) + 7 - 2a = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, $|t| \geq 2 \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

và $t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x + \frac{1}{x})$ nên $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$.

Do đó phương trình : $t^3 - 3t + 3(t^2 - 2) + (6 - a)t + 7 - 2a = 0$

$$(t + 2)a = t^3 + 3t^2 + 3t + 1.$$

Khi $t = -2$ thì phương trình không thoả. Khi $t \neq -2$, phương trình là :

$$a = \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t + 2} = \frac{(t + 1)^3}{t + 2}$$

Đặt $f(t) = \frac{(t + 1)^3}{t + 2}$, $t < -2$ hay $t \geq 2$ thì $f'(t) = \frac{(2t + 5)(t + 1)^2}{(t + 2)^2}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-5/2		-2		2		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	‖		‖	+	
$f(t)$	$+\infty$	↘	27/4	↗	$+\infty$ ‖		‖ 27/4	↗	$+\infty$

Vì miền giá trị $f(t) \geq \dfrac{27}{4}$ nên điều kiện phương trình vô nghiệm là $a < \dfrac{27}{4}$.

BÀI TOÁN 9

Cho phương trình: $ax^3 + 27x^2 + 12x + 2001 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Hỏi phương trình

$$4(ax^3 + 27x^2 + 12x + 2001)(3ax + 27) = (3ax^2 + 54x + 12)^2$$

có bao nhiêu nghiệm ?

Giải.

Xét $f(x) = ax^3 + 27x^2 + 12x + 2001$, $D = \mathbb{R}$.

Theo giả thiết thì $f(x) = 0$ có 3 nghiệm α, β, γ.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 54x + 12$,

$f''(x) = 6ax + 54$, $f'''(x) = 6a$

Phương trình của đề bài viết lại : $2f(x) \cdot f''(x) = (f'(x))^2$

Xét $g(x) = 2f(x)\, f''(x) - (f'(x))^2$

$\Rightarrow g'(x) = 2f'(x).f''(x) + 2f(x).f'''(x) - 2f'(x)\, f''(x)$

$= 2f(x) \cdot f'''(x) = 12a^2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, $\alpha < \beta < \gamma$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		α		β		γ		$+\infty$
g'		-	0	+	0	-	0	+	
g	$+\infty$	↘	A	↗	B	↘	C	↗	$+\infty$

Vì $B = g(\beta) = -(f'(\beta))^2 < 0$ nên $A < 0$ và $C < 0$.

Vậy phương trình cho có đúng 2 nghiệm.

BÀI TOÁN 10

Chứng minh rằng với giá trị tuỳ ý $n \in \mathbb{Z}^+$, đa thức

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

không thể có nhiều hơn 1 nghiệm thực.

Giải.

Ta chứng minh quy nạp: nếu n chẵn thì $P_n(x)$ nhận giá trị dương $\forall x \in \mathbb{R}$ còn nếu n lẻ thì $P_n(x)$ có duy nhất 1 nghiệm thực khác 0.

Với n = 0 ta có $P_0(x) = 1 > 0, \forall x$

Giả sử khẳng định đúng với giá trị bé hơn n, ta chứng minh khẳng định đúng tới n.

- Xét n lẻ.

Ta có : $P'_n(x) = P_{n-1}(x) > 0, \forall x$ nên $P_n(x)$ là hàm tăng, do đó $P_n(x)$ có duy nhất 1 nghiệm thực khác 0.

- Xét n chẵn.

$P'_n(x) = P_{n-1}(x)$.

Đa thức P_{n-1} có đúng 1 nghiệm thực $x_0 \neq 0$ (vì n – 1 lẻ).

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P'_n(x) = P_{n-1}(x)$		-	0	+	
$P_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $P_n(x) \geq P_n(x_0) = P_{n-1}(x_0) + \dfrac{x_0^n}{n!} = \dfrac{x_0^n}{n!} > 0$.

Vậy khẳng định được chứng minh.

BÀI TOÁN 11

Tìm m để phương trình

$$1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x = m \text{ (1) có nghiệm.}$$

Giải.

$$VT = 1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$$

$$= 1 + \cos x + \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) + \frac{1}{3}(4\cos^3 x - 3\cos x)$$

$$= \frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{1}{2} \text{ với } t = \cos x,\ |t| \leq 1.$$

Xét $y = f(t) = \dfrac{4}{3}t^3 + t^2 + \dfrac{1}{2}$; $|t| \leq 1$.

$f'(t) = 4t^2 + 2t$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$ hoặc $t = 0$ (nhận nghiệm).

Ta có $f(1) = \dfrac{17}{6}$; $f(-1) = \dfrac{1}{6}$; $f(0) = \dfrac{1}{2}$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{12}$.

$\Rightarrow \text{Max } f(t) = \dfrac{17}{6}$; $\min f(t) = \dfrac{1}{6}$

Do đó pt (1) có nghiệm khi : $\dfrac{1}{6} \le m \le \dfrac{17}{6}$.

BÀI TOÁN 12

Biện luận số nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{x^4 + 4x + m} + \sqrt[4]{x^4 + 4x + m} = 6.$$

Giải.

Đặt $t = \sqrt[4]{x^4 + 4x + m}$, $t \ge 0$

$\Rightarrow t^2 = \sqrt{x^4 + 4x + m}$

Phương trình : $t^2 + t = 6 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$$t = 2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4 + 4x + m} = 2 \Leftrightarrow x^4 + 4x = 16 - m$$

Xét $f(x) = x^4 + 4x$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x^3 + 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y′		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có :

Nếu $16 - m < -3 \Leftrightarrow m > 19$: Phương trình vô nghiệm.

Nếu $16 - m = -3 \Leftrightarrow m = 19$: Phương trình có 1 nghiệm.

Nếu $16 - m > -3 \Leftrightarrow m < 19$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

BÀI TOÁN 13

Tìm a để phương trình

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = a \text{ có nghiệm.}$$

Giải.

Xét $f(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}$, D = $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} \quad (x \neq \pm 1)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2} - \sqrt[3]{(1+x)^2}}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}\,.\,\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{(1+x)}\right)^2 + \sqrt[3]{(x^2-1)} + \left(\sqrt[3]{(x-1)}\right)^2} = 0.$$

Tương tự $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	
$f(x)$	0	↗		↗	2	↘		↘	0

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $0 < a \leq 2$.

BÀI TOÁN 14

Tìm điều kiện để phương trình $x + \sqrt{12 - 3x^2} = m$ có nghiệm.

Giải.

Xét $f(x) = x + \sqrt{12 - 3x^2}$, D = [−2 ; 2].

$$f'(x) = 1 - \frac{3x}{\sqrt{12 - 3x^2}} = \frac{\sqrt{12 - 3x^2} - 3x}{\sqrt{12 - 3x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12 - 3x^2} - 3x = 0 \qquad (-2 < x < 2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{12 - 3x^2} = 3x \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 0 \\ 12 - 3x^2 = 9x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$f'(x)$		‖	$+$	0	$-$	‖	
$f(x)$		-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	

Do đó $-2 \leq f(x) \leq 4, \forall x \in [-2\ ;\ 2]$.

Vậy điều kiện có nghiệm là $-2 \leq m \leq 4$.

BÀI TOÁN 15

Tìm m để phương trình

$$x^4 - 6x^3 + mx^2 - 12x + 4 = 0 \text{ có nghiệm.}$$

Giải.

$$x^4 - 6x^3 + mx^2 - 12x + 4 = 0 \qquad (1)$$

Ta có $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Chia 2 vế của phương trình cho x^2, ta có :

$$x^2 - 6x + m - \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{2}{x}\right) + m = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{2}{x}\right) + m - 4 = 0$$

Đặt $t = x + \dfrac{2}{x} \Rightarrow |t| = |x| + \dfrac{2}{|x|} \geq 2\sqrt{2}$

Ta có $t^2 - 6t + m - 4 = 0 \qquad (2) \qquad (|t| \geq 2\sqrt{2})$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm thoả $|t| \geq 2\sqrt{2}$.

Xét (2) $\Leftrightarrow t^2 - 6t - 4 = -m$

Đặt $f(t) = t^2 - 6t - 4$

$f'(t) = 2t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3.$

Bảng biến thiên :

t	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$				$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$4+12\sqrt{2}$		$4-12\sqrt{2}$	$\searrow$	-13	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy phương trình có nghiệm khi $-m \geq -13 \Leftrightarrow m \leq 13$.

BÀI TOÁN 16

Tìm điều kiện để phương trình

$$2(1 + \sin 2x.\cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) = m \text{ có nghiệm.}$$

Giải.

Ta có $\quad 2(1 + \sin 2x.\cos 4x) - \dfrac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$

$$= 2 + 2.\sin 2x.\cos 4x - \sin 6x.\sin 2x$$

$$= 2 + \sin 2x(2\cos 4x - \sin 6x).$$

Đặt $t = \sin 2x (-1 \leq t \leq 1)$.

Xét $\quad y = f(t) = 4t^4 - 4t^3 - 3t^2 + 2t + 2.$

Ta có $f'(t) = 16t^3 - 12t^2 - 6t + 2 = (t - 1)(16t^2 + 4t - 2)$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 1, t = -\frac{1}{2}, t = \frac{1}{4}$$

Để tìm GTNN và GTLN của f(t) trên đoạn này ta chỉ cần tính các giá trị : $f(-1)$, $f(1)$, $f(-\frac{1}{2})$ và $f(\frac{1}{4})$ rồi so sánh.

Kết quả : max y = 5 ; miny = 1.

Vậy điều kiện có nghiệm $1 \le m \le 5$.

BÀI TOÁN 17

Tìm điều kiện để phương trình $\dfrac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x} = m$ có nghiệm.

Giải.

Đặt $t = \sin^2 x$, $0 \le t \le 1$ thì :

$$y = \frac{3t^2 - 2t + 3}{3t^2 - 2t + 2} = 1 + \frac{1}{3t^2 - 2t + 2}$$

Xét : $f(t) = 3t^2 - 2t + 2$, $0 \le t \le 1$.

$$f'(t) = 6t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên : *(Học sinh tự vẽ)*

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra : $\dfrac{5}{3} \le f(t) \le 3 \Rightarrow \dfrac{4}{3} \le y \le \dfrac{8}{5}$.

Nên miny $= \dfrac{4}{3}$, max y $= \dfrac{8}{5}$.

Vậy điều kiện có nghiệm $\dfrac{4}{3} \le m \le \dfrac{8}{5}$.

BÀI TOÁN 18

Xác định m sao cho phương trình

$t^4 - (m-1)t^3 + 3t^2 - (m-1)t + 1 = 0$ có nghiệm.

Giải.

Dễ thấy t = 0 không là nghiệm. Chia hai vế cho t^2

$$t^2 - (m-1)t + 3 - (m-1)\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - (m-1)\left(t + \frac{1}{t}\right) + 1 = 0.$$

Đặt $x = t + \dfrac{1}{t}$ thì $|x| \ge 2$ và phương trình trở thành :

$$x^2 - (m - 1)x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x} = m.$$

Đặt $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$.

Ta có : $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} > 0, \forall |x| \geq 2.$

Bảng biến thiên của hàm y : *(Học sinh tự vẽ)*

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $m \leq -\dfrac{3}{2}$ hay $m \geq \dfrac{7}{2}$.

BÀI TOÁN 19

Tìm m để phương trình $\dfrac{\lg(mx)}{\lg(x+1)} = 2$ có nghiệm duy nhất.

Giải.

Ta có $\dfrac{\lg(mx)}{\lg(x+1)} = 2 \Leftrightarrow \lg(mx) = 2\lg(x + 1)$ (Điều kiện : $x + 1 \neq 1$).

$$\Leftrightarrow mx = (x + 1)^2, x + 1 > 0, x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}, x > -1, x \neq 0.$$

Xét hàm số : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x}$ với $x > -1$ và $x \neq 0$, ta có :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm f(x) : *(Học sinh tự vẽ)*

Từ đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi $m < 0$ hay $m = 4$.

BÀI TOÁN 20

Tìm điều kiện để bất phương trình

$$a.9^x + (a - 1).3^{x+2} + a - 1 > 0 \text{ có nghiệm } \forall x.$$

Giải.

Đặt $t = 3^x > 0$.

Bất phương trình trở thành

$$at^2 + 9(a-1)t + a - 1 > 0 \Leftrightarrow a(t^2 + 9t + 1) > 9t + 1$$

$$\Leftrightarrow a > \frac{9t+1}{t^2+9t+1}$$

Xét $f(t) = \dfrac{9t+1}{t^2+9t+1}$ với $t > 0$.

BPT đã cho sẽ được nghiệm đúng $\forall x \Leftrightarrow a > \max f(t)$.

Ta có : $f'(t) = \dfrac{-9t^2-2t}{(t^2+9t+1)^2} < 0, \forall t > 0$.

Suy ra f nghịch biến.

Vậy điều kiện cần tìm : $a > 1$.

BÀI TOÁN 21

Tìm a để bất phương trình $a\sqrt{2x^2+9} < x + a$ có nghiệm với mọi x.

Giải.

Ta có : $a\sqrt{2x^2+9} < x + a \Leftrightarrow a(\sqrt{2x^2+9} - 1) < x$

$$\Leftrightarrow a < \frac{x}{\sqrt{2x^2+9}-1} \quad (1) \quad (\text{vì } \sqrt{2x^2+9} - 1 > 0, \forall x).$$

Xét hàm số : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+9}-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{9-\sqrt{2x^2+9}}{\sqrt{2x^2+9}\,.\,(\sqrt{2x^2+9}-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - \sqrt{2x^2+9} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 9 = 81$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$

Bảng biến thiên của hàm f(x) : *(Học sinh tự vẽ)*

Từ bảng biến thiên suy ra $\min f(x) = -\dfrac{3}{4}$.

Vậy (1) nghiệm đúng với mọi x khi $a < -\frac{3}{4}$.

BÀI TOÁN 22

Tìm điều kiện bất phương trình $\sqrt{4x-2} + 2\sqrt{4-x} < m$ (1) có nghiệm.

Giải.

a) Xét $f(x) = \sqrt{4x-2} + 2\sqrt{4-x}$, $D = [\frac{1}{2};4]$.

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-2}} - \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{2\sqrt{4-x} - \sqrt{4x-2}}{\sqrt{4x-2}\,.\,\sqrt{4-x}}$$

Ta có $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x} \geq \sqrt{4x-2}$ $(x \neq 4, x \neq \frac{1}{2})$

$$\Leftrightarrow 4(4-x) \geq 4x-2 \Leftrightarrow x \leq \frac{9}{4}.$$

Bảng biến thiên của hàm f(x) : *(Học sinh tự vẽ)*

Từ bảng biến thiên suy ra : bất phương trình có nghiệm khi m > min f(x).

Vậy $m > \sqrt{14}$.

BÀI TOÁN 23

Tìm điều kiện bất phương trình

$$\sin^3x + \cos^3x \geq m \text{ có nghiệm.}$$

Giải.

Xét $f(x) = \sin^3x + \cos^3x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x)$

Đặt $t = \sin x + \cos x$; $|t| \leq \sqrt{2}$

$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Ta có $h(t) = t\left[1 - \frac{(t^2-1)}{2}\right] = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$ với $|t| \leq \sqrt{2}$.

$$h'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Bảng biến thiên của hàm h(t) : *(Học sinh tự vẽ)*

Từ bảng biến thiên suy ra max f(x) = 1.

Do đó max f(x) = 1.

Bất phương trình có nghiệm khi $m \leq \max f(x)$.

Vậy $m \leq 1$.

BÀI TOÁN 24

Tìm điều kiện hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m \geq 0 \end{cases}$$ có nghiệm.

Giải.

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 & (1) \\ x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Xét (1) : $x^2 - 3x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$.

Ta tìm điều kiện ngược lại, tức là tìm m để :

$$f(x) = x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m < 0 \ ; \ \forall x \in [-1; 4]$$

$\Leftrightarrow \max\limits_{x\in[-1;4]} f(x) < 0$.

Vì $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - m^2 - 15m \ ; -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 - 3x^2 - m^2 - 15m \ ; 0 < x \leq 4 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x \ ; -1 \leq x \leq 0 \\ 3x^2 - 6x \ ; 0 < x \leq 4 \end{cases}$

Khi $-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f'(x) = 3x(x+2) \leq 0$

$0 < x \leq 2 \Rightarrow f'(x) = 3x(x-2) \leq 0$

$2 < x \leq 4 \Rightarrow f'(x) = 3x(x-2) > 0$.

Do đó $\mathop{\mathrm{Max}}\limits_{x\in[-1;4]} f(x) = \max\{f(-1), f(4)\} = f(4) = -m^2 - 15m + 16$.

Nên có $-m^2 - 15m + 16 < 0 \Leftrightarrow m < -16 \vee m > 1$.

Vậy điều kiện có nghiệm là $-16 \leq m \leq 1$.

VẤN ĐỀ 4 : BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. ĐỊNH HƯỚNG CHUNG

Bất đẳng thức có nhiều cách chứng minh, trong đó đạo hàm là một công cụ mạnh mẽ. Để sử dụng đạo hàm thì ta thường dùng các hướng chính:

- Dùng các định lí trung bình.

- Dùng tính chất đơn điệu, lồi lõm.

- Dùng cực trị, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Chú ý :

- Nếu đã có dạng hàm số nào đó thì ta xét hàm với tập xác định của biến, có khi ta phải mở rộng tập xác định, sau đó tính đạo hàm rồi xét dấu để đánh giá. Khi cần thiết ta nên tìm cách đặt ẩn phụ kèm điều kiện đầy đủ.

Khi chưa xác định được dấu y' thì ta có thể tiếp tục tính tiếp y'', y''',... hoặc xét tiếp hàm bộ phận.

- Nếu có nhiều biến thì có thể cố định biến, dồn biến

- Nếu chưa có dạng hàm số thuận lợi thì ta xem xét biến đổi về một dạng hàm số thuận lợi hơn, có khi phải kết hợp các phương pháp đánh giá khác làm trung gian, ...

2. BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

BÀI TOÁN 1

Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{a} \quad \text{với } a \neq b \text{ và } a > 0 \text{ ; } b > 0.$$

Giải.

Nếu $a > b > 0$

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{a-b} < \frac{1}{b}$

Xét hàm số $f(x) = \ln x$ trên $[b; a]$

thoả các điều kiện của định lí Lagrange nên $\exists\, c \in (b; a)$:

$$f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \text{ nên } \quad \frac{1}{c} = \frac{\ln a - \ln b}{a-b}$$

Vì $c \in (b\,;a)$ nên $0 < b < c < a$ do đó $\frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}$

Vậy $\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{a-b} < \frac{1}{b}$.

Nếu $0 < a < b$ thì giải tương tự.

BÀI TOÁN 2

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} < \tan\alpha - \tan\beta < \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha} \quad \text{với } 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Giải.

Xét hàm số : $y = f(x) = \tan x$ trên $[\beta ; \alpha]$.

f thoả các điều kiện của định lí Lagrange và $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

nên $\exists\, c \in (\beta; \alpha) : f'(c) = \dfrac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2 c} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\alpha - \beta}$

$\Rightarrow \tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\alpha - \beta}{\cos^2 c}$

Do $\beta < c < \alpha$ và $y = \cos x$ nghịch biến trên $(0 ; \dfrac{\pi}{2})$

nên $\dfrac{\alpha - \beta}{\cos^2\beta} < \dfrac{\alpha - \beta}{\cos^2 c} < \dfrac{\alpha - \beta}{\cos^2\alpha}$

Vậy : $\dfrac{\alpha - \beta}{\cos^2\beta} < \tan\alpha - \tan\beta < \dfrac{\alpha - \beta}{\cos^2\alpha}$.

BÀI TOÁN 3

Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x, \forall x > 0.$$

Giải.

Xét hàm số $f(t) = \ln t$ trên $[1 ; 1 + x]$ với $x > 0$ thoả các điều kiện định lí Lagrange nên $\exists\, c \in (1; 1 + x)$ sao cho :

$f'(c) = \dfrac{f(1 + x) - f(1)}{(1 + x) - 1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{c} = \dfrac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x}$

$$\Leftrightarrow \ln(1 + x) = \frac{x}{c}$$

Do $1 < c < 1 + x$ nên $\dfrac{1}{1 + x} < \dfrac{1}{c} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1 + x} < \dfrac{x}{c} < x$

Hay $\dfrac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$. (đpcm)

BÀI TOÁN 4

Chứng minh bất đẳng thức :

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} < \ln n < \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n - 1}$ với mọi số nguyên dương $n > 1$.

Giải.

Xét hàm số $f(x) = \ln x$ với $x \in [m ; m + 1]$ và $m \in \mathbb{Z}^+$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Theo định lí Lagrange : $\exists\, c \in (m ; m + 1)$:

$$f'(c) = \frac{f(m+1) - f(m)}{(m+1) - m} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln(m+1) - \ln m.$$

Vì $m < c < m + 1$ nên $\frac{1}{m+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{m}$.

Do đó $\frac{1}{m+1} < \ln(m+1) - \ln m < \frac{1}{m}$

Lần lượt thay $m = 1, 2, 3, ..., n - 1$ ta được :

Với $m = 1$: $\quad \frac{1}{2} < \ln 2 < \frac{1}{1}$

Với $m = 2$: $\quad \frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$

Với $m = 3$: $\quad \frac{1}{4} < \ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$

...

Với $m = n - 1$: $\quad \frac{1}{n} < \ln n - \ln(n-1) < \frac{1}{n-1}$

Cộng vế theo vế :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} < \ln n < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}.$$

BÀI TOÁN 5

Cho phương trình

$x^{2000} + a_1x^{1999} + ... + a_{1999}x + a_{2000} = 0$, $a_{1995} = 1995$, $a_{1997} = 1997$ có 2000 nghiệm khác nhau .

Chứng minh rằng $|a_{1996}| > 1996$.

Giải.

Đặt $f(x) = x^{2000} + a_1x^{1999} + ... + a_{1999}x + a_{2000}$

Vì f(x) có 2000 nghiệm phân biệt, nên f '(x) có 1999 nghiệm phân biệt nên f "(x) có 1998 nghiệm phân biệt, f "'(x) có 1997 nghiệm phân biệt

Mà $f'''(x) = 2000.1999.1998x^{1997} + ... + 4.3.2.a_{1996}x + 3.2.a_{1997}$.

Do $f'''(0) = 3.2.a_{1997} = 3.2.1997 \neq 0$ nên đa thức :

$$g(x) = x^{1997}.f'''(\frac{1}{x}) = 6.a_{1997}.x^{1997} + 24a_{1996}.x^{1996} + 60.a_{1995}a^{1995} + ... + b_1$$

cũng có 1997 nghiệm phân biệt, giả sử các nghiệm đó là $x_1, x_2, ..., x_{1997}$

Theo định lí Vi-ét ta có :

$$\sum_{i=1}^{1997} x_i = -\frac{24a_{1996}}{6a_{1997}}$$

$$\sum_{1 \le i < j \le 1997} x_i x_j = \frac{60.a_{1995}}{6.a_{1997}}$$

Mặc khác, ta có : $\left(\sum_{i=1}^{1997} x_i\right)^2 \geq 2 \sum_{1 \le i < j \le 1997} x_i x_j$

Nên $\left(-\frac{24a_{1996}}{6.a_{1997}}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{1997} x_i\right)^2 \geq 2 \sum_{1 \le i < j \le 1997} x_i x_j = 2.\frac{60.a_{1995}}{6.a_{1997}}$

$\Rightarrow \ |a_{1996}| \geq \frac{1}{2}\sqrt{5.a_{1995}.a_{1997}} > 2231 > 1996$ (đpcm).

BÀI TOÁN 6

Cho a, b, c, d > 0.

Chứng minh: $\sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + bc + cd + da + ac + bd}{6}}$.

Giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$

Xét đa thức:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a)(x - b)\,x - c)(x - d) \\ &= x^4 - (a + b + c + d)x^3 + (ab + bc + cd + da + ac + bd)x^2 \\ &\quad - (abc + bcd + cda + dab)x + abcd \end{aligned}$$

Vì f có 4 nghiệm nên f ' có 3 nghiệm $x_1, x_2, x_3 > 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 3(a + b + c + d)x^2 + 2(ab + bc + cd + da + ac + bd)x$$
$$- (abc + bcd + cda + dab)$$
$$\equiv 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Theo định lí Vi-ét, ta có :

$$x_1x_2x_3 = \frac{1}{4}(abc + bcd + cda + dab)$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{1}{2}(ab + bc + cd + da + ac + bd)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$\frac{1}{2}(ab + bc + cd + da + ac + bd)$$
$$= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$
$$\geq 3\sqrt[3]{(x_1x_2x_3)^2}$$
$$= 3\sqrt[3]{\frac{1}{16}(abc + bcd + cda + dab)^2}$$

Từ đó suy ra đpcm.

BÀI TOÁN 7

Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$. Đặt :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \; S_2 = \sum_{1\le i<j\le n}^{n} x_ix_j \; ; \; S_3 = \sum_{1\le i<j<k\le n}^{n} x_ix_jx_k \; ; \; ... \text{ và } S_n = x_1x_2...x_n.$$

là các hàm cơ bản của $x_1, x_2, ..., x_n$. Chứng minh :

$$\frac{S_1}{C_n^1} \geq \sqrt{\frac{S_2}{C_n^2}} \geq \sqrt[3]{\frac{S_3}{C_n^3}} \geq ... \geq \sqrt[n]{\frac{S_n}{C_n^n}}.$$

Giải.

Ta chứng minh bằng quy nạp :

Khi n = 1 thì bất đẳng thức đúng.

Giả bất đẳng thức đúng đến $n - 1$. Giả sử $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$.

Xét đa thức : $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$

$$= x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + ... + (-1)^n.S_n$$

Vì P(x) có n nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$. Theo định lí Rolle :

$P'(x) = n.x^{n-1} - (n-1)S_1x^{n-2} + (n-2)S_2.x^{n-3} - (n-3)S_3x^{n-4} + \ldots + (-1)^{n-1}.S_{n-1}$

có n−1 nghiệm xen kẽ :

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n.$$

$\Rightarrow \dfrac{n-1}{n}S_1; \quad \dfrac{n-2}{n}S_2 \; ; \; \dfrac{n-3}{n}S_3 ; \; :..; \; \dfrac{S_{n-1}}{n}$ là các hàm cơ bản của $y_1, y_2, .., y_{n-1}$

Theo giả thiết quy nạp thì

$$\frac{(n-1)}{nC_{n-1}^1}S_1 \geq \sqrt{\frac{(n-2)}{nC_{n-1}^2}S_2} \geq \ldots \geq \sqrt[n-1]{\frac{S_{n-1}}{nC_{n-1}^{n-1}}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{C_n^1} \geq \sqrt{\frac{S_2}{C_n^2}} \geq \ldots \geq \sqrt[n-1]{\frac{S_{n-1}}{C_n^{n-1}}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy : $\dfrac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}{n} \geq \dfrac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x_1.x_2 \ldots x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right)}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1x_2 \ldots x_n)^{n-1}}$$

Do đó: $\sqrt[n-1]{\dfrac{S_{n-1}}{C_n^{n-1}}} \geq \sqrt[n]{\dfrac{S_n}{C_n^n}} \Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

BÀI TOÁN 8

Cho a, b, c phân biệt. Chứng minh

$$\min\{a,b,c\} < \frac{a+b+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}$$

$$< \frac{a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}$$

$$< \max\{a, b, c\}.$$

Giải.

Giả sử a < b < c.

Xét đa thức f(x) = (x − a)(x − b)(x − c)

$$= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta' = (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$$

nên $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}$

Vì f có 3 nghiệm nên f ′ có 2 nghiệm xen kẽ

Mà : $a < b < c$ nên $a < x_1 < b < x_2 < c$.

Do đó : $$a < \frac{a+b+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}$$

$$< \frac{a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3} < c.$$

BÀI TOÁN 9

Cho a, b, c là 3 số mà phương trình : $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Chứng minh:

$$|27c + 2a^3 - 9ab| < 2\sqrt{(a^2-3b)^3}.$$

Giải.

Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

Vì $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$x_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-3b}}{3}, \; x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-3b}}{3} \text{ với } a^2 - 3b > 0$$

Và vì hệ số cao nhất của f dương nên :

$$y_{CĐ} = f(x_1) > 0 \text{ và } y_{CT} = f(x_2) < 0.$$

Ta có $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}a\right)f'(x) + \dfrac{2}{9}(3b-a^2)x + c - \dfrac{ab}{9}$

$$\Rightarrow \quad f(x_i) = \frac{2}{9}(3b-a^2)x_i + c - \frac{ab}{9} \quad \left(\forall i \in \{1;2\}\right).$$

Từ $f(x_1) > 0 \Rightarrow -2\sqrt{(a^2-3b)^3} < 2a^3 + 27c - 9ab$

$$f(x_2) < 0 \Rightarrow 2a^3 + 27c - 9ab < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$$

Do vậy: $|2a^3 + 27c - 9ab| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$

BÀI TOÁN 10

Chứng minh bất đẳng thức

a) $\sin x < x, \forall x > 0$.

b) $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}, \forall x > 0$.

Giải.

a) Ta có : $\sin x < x, \forall x > 0 \Leftrightarrow x - \sin x > 0, \forall x > 0$.

Xét $f(x) = x - \sin x$ với $x \geq 0$.

Ta có $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0, \forall x$ nên $f(x)$ tăng.

$$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0 - \sin 0 = 0.$$

Vậy $\sin x < x$ $(\forall x > 0)$.

b) Ta có $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ $(\forall x > 0) \Leftrightarrow \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0, \forall x > 0$

Xét $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ với $x \geq 0$

$f'(x) = -\sin x + x > 0, \forall x > 0$ nên $f(x)$ tăng

$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = \cos 0 - 1 + \dfrac{0^2}{2} = 0$

Vậy $\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0$ (đpcm).

BÀI TOÁN 11

Chứng minh bất đẳng thức

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, \forall x > 0.$$

Giải.

1) Chứng minh : $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x), \forall x > 0$

Xét $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(1 + x)$ với $x > 0$

$$f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1 + x} = \frac{1 - x^2 - 1}{1 + x} = \frac{-x^2}{1+x} < 0, \forall x > 0.$$

$\Rightarrow$ f(x) giảm trên $(0 ; +\infty)$ nên $x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0$.

Hay $x - \dfrac{x^2}{x} < \ln (1 + x)$.

2) Chứng minh : $\ln (1 + x) < x, \forall x > 0$.

Xét $f(x) = \ln (1 + x) - x$ với $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{-x}{1 + x} < 0, \ \forall x > 0.$$

$\Rightarrow$ f(x) giảm trên $(0 ; +\infty)$ nên $x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0$

Hay $\ln (1 + x) < x$.

Vậy $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln (1 + x) < x, \forall x > 0$.

BÀI TOÁN 12

Chứng minh các bất đẳng thức :

$$\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin b}{b} \quad \text{với } 0 < a < b < \frac{\pi}{2}.$$

Giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ với $x \in (0 ; \dfrac{\pi}{2})$

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

Xét $g(x) = x \cos x - \sin x$

$$g'(x) = -x . \sin x < 0, \forall x \in (0 ; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow g(x) \text{ giảm trong } (0 ; \frac{\pi}{2})$$

Mà $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ nên $g(x) < g(0) = 0$.

$\Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (0 ; \dfrac{\pi}{2}) \Rightarrow$ f(x) giảm trên $(0 ; \dfrac{\pi}{2})$.

Mà : $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ nên $f(a) > f(b)$.

Vậy $\dfrac{\sin a}{a} > \dfrac{\sin b}{b}$ (đpcm).

BÀI TOÁN 13

Chứng minh bất đẳng thức

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > e^{\frac{2}{3}\left(\tan^3 x + 3\tan x\right)} \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{4}.$$

Giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} > e^{\frac{2}{3}(\tan^3 x + 3\tan x)} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right).$$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow 0 < t < 1$.

Bất đẳng thức trở thành : $\dfrac{1 + t}{1 - t} > e^{\frac{2}{3}(t^3 + 3t)}$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{1 + t}{1 - t} > \frac{2}{3}(t^3 + 3t)$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{1 + t}{1 - t} - \frac{2}{3}(t^3 + 3t) > 0$$

Xét : $f(t) = \ln\dfrac{1 + t}{1 - t} - \dfrac{2}{3}(t^3 + 3t)$ (với $0 < t < 1$).

$f'(t) = \dfrac{2}{1 - t^2} - 2t^2 - 2 = \dfrac{2t^4}{1 - t^2} > 0, \forall t \in (0 ; 1) \Rightarrow f(t)$ tăng trên $(0 ; 1)$.

Mà $0 < t < 1 \Rightarrow f(t) > f(0) = 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

BÀI TOÁN 14

Chứng minh bất đẳng thức

a) $2^{\sin x} + 2^{\tan x} > 2.2^x$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. (1)

b) $\sin A + \sin B + \sin C + \tan A + \tan B + \tan C > 2\pi$ với ΔABC nhọn. (2)

Giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$$2^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x} \cdot 2^{\tan x}} = 2^{\frac{\sin x + \tan x + 2}{2}}$$

Để chứng minh (1) ta cần chứng minh :

$$2^{\frac{\sin x + \tan x + 2}{2}} > 2 \cdot 2^x, \forall x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin x + \tan x + 2}{2} > x + 1, \forall x \in (0 ; \frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x + \tan x - 2x > 0, \forall x \in (0 ; \frac{\pi}{2})$$

Đặt $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ với $x \in [0 ; \frac{\pi}{2})$

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < \cos x < 1 \Rightarrow \cos x > \cos^2 x$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0, \forall x \in (0 ; \frac{\pi}{2}).$$

Nên f(x) tăng trên $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$.

Hay $\sin x + \tan x - 2x > 0$ (đpcm).

b) (2) $\Leftrightarrow (\sin A + \tan A - 2A) + (\sin B + \tan B - 2B) + (\sin C + \tan C - 2C) > 0$.

Theo câu a) : $\sin x + \tan x - 2x > 0, \forall x \in (0 ; \frac{\pi}{2})$.

Lần lượt thay x bởi A, B, C và cộng vế các bất đẳng thức ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

BÀI TOÁN 15

Cho $m > 1$. Chứng minh : $x^m + m - 1 \geq mx$ với mọi $x \geq 0$.

Từ đó chứng minh rằng với ba số dương a, b, c bất kì thì :

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Giải.

Xét $f(x) = x^m - mx + m - 1 \ (x \geq 0)$

$$f'(x) = m(x^{m-1} - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$m-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó với $m > 1$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$

Áp dụng bất đẳng thức với $m = \dfrac{3}{2}$, ta có :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{c}{a}\right).$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy thì :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \geq \frac{3}{2}.$$

Cộng 4 bất đẳng thức trên :

$$\frac{3}{2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}\left[\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right] + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}. \text{ (Đpcm)}$$

BÀI TOÁN 16

Chứng minh bất đẳng thức

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \qquad (x > 0)$$

Giải.

Ta chứng minh bằng quy nạp toán học :

Khi n = 1: cần chứng minh : $e^x > 1 + x \Leftrightarrow e^x - x - 1 > 0$ $(x > 0)$

Đặt $f(x) = e^x - x - 1$ với $x \geq 0$ thì

$f'(x) = e^x - 1 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f(x)$ tăng trên $(0 ; +\infty)$;

Do đó $x > 0$ thì $f(x) > f(0) = 0$.

Giả sử bất đẳng thức đúng đến n = k :

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^k}{k!} \quad (x > 0)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng khi n = k + 1, tức là phải chứng minh :

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

Đặt $g(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$ với $x > 0$.

$$g'(x) = e^x - \left(0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^k}{k!}\right) > 0$$

$\Rightarrow g(x)$ tăng trên $(0 ; +\infty)$, mà $x > 0$ nên $g(x) > g(0) = 0$.

Vậy theo nguyên lí quy nạp toán học thì bất đẳng thức đúng $\forall n$.

BÀI TOÁN 17

Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh :

$$\log_2 3 > \log_3 4.$$

Giải.

Xét hàm $f(x) = \log_x (x + 1)$ với $x > 1$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng : $f(2) > f(3)$

Dùng công thức đổi cơ số thì có : $f(x) = \dfrac{\ln (x + 1)}{\ln x}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{x \ln x - (x + 1) . \ln (x + 1)}{x (x + 1) . \ln^2 x} < 0, \forall x > 1 \Rightarrow f(x)$ giảm

Vậy có $f(2) > f(3)$. (Đpcm)

BÀI TOÁN 18

Chứng minh với mọi $\alpha \leq 3$, ta đều có

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha} \geq \cos x,\ \forall x \in (0;\frac{\pi}{2}).$$

Giải.

Khi $x \in (0;\frac{\pi}{2})$ thì có $0 < \sin x < x$ nên $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Suy ra $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha} \geq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3}, \forall \alpha \leq 3$ do đó ta chỉ cần chứng minh khi $\alpha = 3$.

Xét $F(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x,\ x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì

$$F'(x) = \frac{2\cos^2 x - 3\cos x.\sqrt[3]{\cos x} + 1}{3\cos x.\sqrt[3]{\cos x}}.$$

Ta sẽ chứng minh $F'(x) \geq 0,\ \forall x \in [0;\frac{\pi}{2})$.

Thật vậy, lại xét hàm số $G(t) = 2t^2 - 3t\sqrt[3]{t} + 1,\ t \in (0;1]$.

Khi đó $G'(t) = 4(t - \sqrt[3]{t}) \leq 0, \forall t \in (0;1]$.

Nên $G(t)$ nghịch biến. Do đó $G(t) \geq G(1) = 0, \forall t \in (0;1]$.

Suy ra $F'(x) \geq 0,\ \forall x \in [0;\frac{\pi}{2})$ nên $F(x)$ đồng biến trên $[0;\frac{\pi}{2})$.

Do đó $F(x) \geq F(0) = 0, \forall x \in [0;\frac{\pi}{2})$. Bài toán được chứng minh.

BÀI TOÁN 19

Cho a, b, c > 0 thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Chứng minh $\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Giải.

Bất đẳng thức tương đương với $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Xét $f(x) = x(1-x^2)$ với $x \in (0\,;1)$

$$f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0\,;1)$$

Bảng biến thiên của hàm f(x) : *(Học sinh tự vẽ)*

Dựa vào bảng biến thiên : $f(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\forall x \in (0\,;1)$.

Suy ra :

$$\frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

BÀI TOÁN 20

Cho $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

Chứng minh rằng nếu hàm số có 2 cực trị thì :

$$\frac{y'''}{y'} < \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 \ (1)$$

Giải.

Ta có $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y'' = 6ax + 2b$

$y''' = 6a$.

Thay vào (1) thì (1) $\Leftrightarrow$ $b^2 - 3ac > 0$.

Vì hàm số có 2 cực trị nên $\Delta'_{y'} > 0$ do đó $b^2 - 3ac > 0$.

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

BÀI TOÁN 21

Chứng minh với n nguyên dương thì

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^i\frac{x^i}{i!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} > 0,\ \forall x.$$

Giải.

Xét $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^i\frac{x^i}{i!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

– Với $x < 0$ thì $f(x) \geq 1 \geq 0$: đúng.

– Với $x > 2n$ thì :

$$f(x) = 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - x\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^3}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)$$

$$= 1 + \frac{x}{2!}(x-2) + \frac{x^3}{4!}(x-4) + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}(x-2n)$$

$\geq 1 \geq 0$: đúng.

– Với $0 \leq x \leq 2n$, do f liên tục trên đoạn $[0 ; 2n]$ nên tồn tại giá trị bé nhất tại x_0.

Nếu $x_0 = 0$ hay $x_0 = 2n$ thì $f(x) \geq f(x_0) \geq 1 \geq 0$.

Nếu $x_0 \in (0 ; 2n)$ thì f đạt cực tiểu tại đó.

$$f'(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{x^{2n}}{(2n)!} - f(x).$$

Vì $f'(x_0) = 0$ nên $f(x_0) = \dfrac{x_0^{2n}}{(2n)!} > 0$.

Vậy $f(x) \geq f(x_0) > 0$: đúng$\forall x$.

BÀI TOÁN 22

Chứng minh rằng với mọi bộ số phân biệt $a_1, a_2, .., a_n \in \mathbb{R}$ ta luôn có

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0.$$

Giải.

Xét đa thức: $Q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j}x^{i+j}$

Ta có: $Q'(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i a_j x^{i+j} = \frac{1}{x}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i x^i\right)^2$

Suy ra $Q'(x) \geq 0$ với mọi $x > 0$.

Do đó hàm số Q(x) đồng biến trong $(0 ; +\infty)$ nên $Q(1) \geq \lim\limits_{x\to 0} Q(x) = 0$.

Vậy $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j} = Q(1) \geq 0.$

BÀI TOÁN 23

Chứng minh nếu f lồi trên D thì mọi a, b, c ∈ D :

a) $\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$;

b) $\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \leq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$.

Áp dụng trong ΔABC thì có :

a) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$ với A, B, C nhọn.

Giải.

a) Xét $x \in [a ; b]$

Đặt $g(x) = \frac{f(x)+f(b)}{2} - f\left(\frac{x+b}{2}\right)$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left[f'(x) - f'\left(\frac{x+b}{2}\right)\right]$$

Vì f là hàm lồi ⇒ $f'' < 0$ ⇒ f' giảm trên [a ; b]

Mà $x \leq \frac{x+b}{2}$ $\Rightarrow f'(x) \geq f'\left(\frac{x+b}{2}\right)$

$$\Rightarrow g'(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \text{ tăng.}$$

Vì $a \leq b$ nên $g(a) \leq g(b)$

$$\Rightarrow \frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(b)+f(b)}{2} - f(b)$$

$$\Rightarrow \frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ (đpcm).}$$

b) Theo câu a) ta có : $f(a) + f(b) \leq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (1)

$$f(c) + f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \le 2f\left(\frac{c}{2} + \frac{a+b+c}{6}\right) \quad (2)$$

Lấy (1) + (2) :

$$f(a) + f(b) + f(c) + f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \le 4f\left(\frac{a+b+c}{4} + \frac{a+b+c}{12}\right)$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) + f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \le 4f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \le f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \text{ (đpcm).}$$

Áp dụng trong tam giác ABC.

Xét $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$.

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x < 0$ nên đồ thị lồi trên $(0 ; \pi)$.

Xét $g(x) = -\cot x$, $0 < x < \pi/2$.

$g'(x) = 1 + \cot^2 x$, $g''(x) = -2.\cot x\,(1 + \cot^2 x) < 0$ nên đồ thị lồi trên $(0 ; \pi/2)$.

Từ đó có $\sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ và $\cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3}$.

VẤN ĐỀ 5 : BÀI TOÁN TỔNG HỢP SỬ DỤNG ĐẠO HÀM

Trong phần này, ngoài các bài toán tổng hợp ta xét thêm bài toán nghiệm bội của phương trình.

Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi đến cấp $n + 1$, $x = a$ là nghiệm bội n của phương trình $f(x) = 0$, điều kiện cần và đủ là :

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ và } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

BÀI TOÁN 1

Tìm tham số a, b, c để phương trình :

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

nhận $x = 1$ làm nghiệm bội 3. Tìm các nghiệm còn lại.

Giải.

Đặt $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$

Ta có $f(x) = 0$ nhận $x=1$ làm nghiệm bội 3 khi và chỉ khi

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = 0 \text{ và } f'''(1) \neq 0.$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \\ f'''(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ 4 + 2a + b = 0 \\ 12 + 2a = 0 \\ 24 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 8 \\ c = -3 \end{cases}$$

Do đó $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x - 1)^3 (x + 3)$.

Suy ra nghiệm còn lại là $x = -3$.

BÀI TOÁN 2

Tìm a, b để $f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + ax - b$ chia hết cho $(x - 1)^2$.

Chứng minh khi đó thì f(x) không chia hết cho $(x - 1)^3$.

Giải.

Ta có : $f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + ax - b$

$f'(x) = 8x^3 + 3ax^2 + 2bx + a$

Vì $f(x) \vdots (x - 1)^2$ nên f nhận $x = 1$ làm nghiệm bội $k \geq 2$.

Từ đó $f(1) = 0$ và $f'(1) = 0$

$\Leftrightarrow 2 + a + b + a - b = 0$ và $8 + 3a + 2b + a = 0$.

Do đó $a = -1$ và $b = -2$.

Suy ra $f(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2$

$f'(x) = 8x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

$f''(x) = 24x^2 - 6x - 4$.

Vì $f''(1) = 14 \neq 0$ nên f(x) không chia hết cho $(x - 1)^3$.

BÀI TOÁN 3

Chứng minh rằng với mọi số a nguyên, phương trình :

$$x^4 - 2001x^3 + (2000 + a)x^2 - 1999x + a = 0$$

không thể có hai nghiệm nguyên phân biệt hay trùng nhau.

Giải.

Đặt $f(x) = x^4 - 2001x^3 + (2000 + a)x^2 - 1999x + a$.

Trước hết ta chứng minh rằng nếu x_0 là một nghiệm nguyên của f(x) thì x_0 phải là số chẵn

Thật vậy : $f(x_0) = 0$

$f(1) = 2a - 1999$ là số lẻ

Nên $f(x_0) - f(1)$ là số lẻ.

Nhưng $f(x_0) - f(1)$ chia hết cho $x_0 - 1$ nên $x_0 - 1$ là một số lẻ, do đó x_0 chẵn. Ta xét 2 trường hợp :

1) Giả sử f(x) có hai nghiệm nguyên x_1, x_2 phân biệt, thế thì :

$$0 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = (x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3) - 2001(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

$$+ (2000 + a)(x_1 + x_2) - 1999$$

Đẳng thức không thể xảy ra vì x_1, x_2 chẵn.

2) Giả sử f(x) có nghiệm x_0 bội 2 (nghiệm kép) là số chẵn. Khi đó x_0 cũng là nghiệm của đạo hàm $f'(x)$.

$$f'(x_0) = 0 \text{ nên } 4x_0^3 - 6003x_0^2 + 2(2000 + a)x_0 - 1999 = 0.$$

Đẳng thức này không thể xảy ra vì x_0 là số chẵn.

BÀI TOÁN 4

Giả sử với các đa thức P(x), Q(x) bậc lớn hơn 0, kí hiệu

$$P_a = \{z \in \mathbf{C} / P(z) = a\},\ Q_a = \{z \in \mathbf{C} / Q(z) = a\}.$$

Chứng minh rằng nếu $P_0 = Q_0$ và $P_1 = Q_1$ thì $P(x) = Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Giải.

Nếu đa thức P(x) có các nghiệm $\alpha_1, ..., \alpha_s$ với các bội tương ứng là $k_1, ..., k_s$ thì đa thức Q(x) cũng có các nghiệm này (nhưng có thể với bội khác) vì $P_0 = Q_0$.

Tương tự nếu đa thức $P(x) - 1$ có các nghiệm $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ với các bội tương ứng là $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_r$ thì đa thức $Q(x) - 1$ cũng có các nghiệm này, vì $Q_1 = P_1$.

Do đó mỗi số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta_1, ..., \beta_r$ (đôi một khác nhau) là một nghiệm của đa thức $P(x) - Q(x)$.

Giả sử rằng $P(x) - Q(x) \neq 0$, khi đó $\deg (P(x) - Q(x)) \geq s + r$ không mất tính tổng quát giả sử $\deg P(x) \geq \deg Q(x) \geq 1$

Khi đó $\deg P(x) = \deg [P(x) - 1] \geq \deg (P(x) - Q(x))$.

Mặt khác nếu bội của nghiệm γ của đa thức $P(x) - a$ là $m > 1$ thì đa thức $P'(x)$ có nghiệm γ bội $m-1$, do đó ta có :

$$\deg P'(x) \geq (k_1 - 1) + ... + (ks - 1) + (\ell_1 - 1) + ... (\ell_r - 1)$$

$$= (k_1 + k_2 + ... + ks) + (\ell_1 + ... + \ell_r) - (s + r)$$

$$\geq \deg P(x) + \deg(P(x) - 1) - \deg (P(x) - Q(x))$$

$\geq \deg P(x)$; điều này mâu thuẫn

Vậy : $P(x) = Q(x)$

BÀI TOÁN 5

Cho phương trình : $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm.

Tìm giá trị bé nhất của $a^2 + b^2$.

Giải.

Gọi x_0 là nghiệm :

$$x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 \neq 0$$

Chia 2 vế cho x_0^2 : $\qquad x_0^2 + ax_0 + b + \dfrac{a}{x_0} + \dfrac{1}{x_0^2} = 0$

$$\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right) + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b = 0 \qquad (*)$$

Đặt : $y = x_0 + \dfrac{1}{x_0}$. Điều kiện $|y| = |x_0| + \left|\dfrac{1}{x_0}\right| \geq 2$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow$ $(y^2 - 2) + ay + b = 0$

$$\Rightarrow \quad |2 - y^2| = |ay + b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 \geq \frac{(2 - y^2)^2}{1 + y^2}$$

Đặt : $t = y^2$, $t \geq 4$. Ta chứng minh $\dfrac{(2-t)^2}{1+t} \geq \dfrac{4}{5}$

Xét $f(t) = \dfrac{(2-t)^2}{1+t}$, $t \geq 4$ thì $f'(t) = \dfrac{(t-2)(t+4)}{(1+t)^2} > 0 \Rightarrow$ f đồng biến.

Vì $t \geq 4 \Rightarrow f(t) \geq f(4) = \dfrac{4}{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $t = 4 \Rightarrow y = \pm 2$ và $\dfrac{a}{y} = \dfrac{b}{1}$.

Chọn $b = \dfrac{-2}{5}$, $a = \dfrac{-4}{5}$.

Phương trình $x^4 - \dfrac{4}{5}x^3 - \dfrac{2}{5}x^2 - \dfrac{4}{5}x + 1 = 0$ có nghiệm $x = 1$.

Vậy : $\min(a^2 + b^2) = \dfrac{4}{5}$.

BÀI TOÁN 6

Cho 2 đa thức $f(x) = x^4 - (1 + e^2)x^2 + e^2$

$g(x) = x^4 - 1$.

Chứng minh với các số dương a, b phân biệt mà $a^b = b^a$ thì

$$f(a).f(b) < 0 \text{ và } g(a).g(b) > 0.$$

Giải.

Giả sử $a > b$.

Ta có $a^b = b^a \Rightarrow a^{1/a} = b^{1/b}$.

Với $x > 0$ xét $h(x) = x^{1/x} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$

$$\Rightarrow h'(x) = h(x).\frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Cho $h'(x) = 0 \Rightarrow x = e$.

Bảng biến thiên :

x	0		1		e		$+\infty$
h'	‖	+		+	0	−	
h	‖	↗	1	↗	$e^{1/e}$	↘	1

Từ $h(a) = h(b)$, $a > b$ thì có $1 < b < e < a$.

Mà $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - e^2)$,

nên suy ra $f(b) < 0$, $f(a) > 0$ do đó $f(a).\ f(b) < 0$;

$g(b) > 0$, $g(a) > 0$ do đó $g(a).\ g(b) > 0$.

BÀI TOÁN 7

Chứng minh rằng không tồn tại đa thức P(x) để với $\forall x \in \mathbb{R}$ có các bất đẳng thức :

$$(1) : P'(x) > P''(x) \text{ và } (2) : P(x) > P''(x).$$

Giải.

Nếu P(x) là hằng số thì $P'(x) = P''(x) = 0$, và bất đẳng thức (1) không thoả mãn.

Giả sử $\deg P(x) = n \geq 1$, khi đó :

Nếu n lẻ thì $\deg (P(x) - P''(x)) = n$ là số lẻ, và vì hàm số liên tục nên $P(x) - P''(x) \leq 0$ với ít nhất 1 điểm $x \in \mathbb{R}$.

Nếu n chẵn thì $\deg (P'(x) - P''(x)) = n - 1$ là số lẻ, tương tự : $P'(x) - P''(x) \leq 0$ với ít nhất 1 điểm $x \in \mathbb{R}$.

Như vậy đối với đa thức P(x) không thoả mãn hoặc bất đẳng thức (2) hoặc bất đẳng thức (1).

Vậy bài toán được chứng minh.

BÀI TOÁN 8

Cho f(x) là một đa thức với hệ số hữu tỉ, α là một số thực sao cho :

$$\alpha^3 - \alpha = (f(\alpha))^3 - f(\alpha) = 33^{1992} \ (*).$$

Chứng minh rằng :

$$(f_n(\alpha))^3 - f_n(\alpha) = 33^{1992},$$

trong đó n là số nguyên dương và $f_n(x) = f(f(...(f(x)...))$ là hàm hợp n lần.

Giải.

Xét phương trình $x^3 - x = 33^{1992}$ (1)

Từ (*) thì α và $f(\alpha)$ là các nghiệm thực của (1).

Xét hàm số $g(x) = x^3 - x$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 1$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra (1) có đúng một nghiệm thực (vì $33^{1992} > \frac{2}{3\sqrt{3}}$).

Do đó $f(\alpha) = \alpha$.

Vậy $f_n(\alpha) = \alpha, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

BÀI TOÁN 9

Cho $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$.

Biểu diễn các tổng sau theo f(x) và f '(x) :

a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}$; b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x - x_i}$; c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3 - x_i}$.

Giải.

a) Ta có : $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$

$$f'(x) = (x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n) + \ldots$$
$$\ldots + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Do đó :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x - x_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{x - x_i} - 1\right) = x\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} - n = x\frac{f'(x)}{f(x)} - n.$$

c) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3 - x_i} = -n + 3\frac{f'(3)}{f(3)}.$$

BÀI TOÁN 10

Cho x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình :

$$x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Tính : $S = \dfrac{1}{x_1^2 - 3x_1 + 2} + \dfrac{1}{x_2^2 - 3x_2 + 2} + \dfrac{1}{x_3^2 - 3x_3 + 2}$.

Giải.

Ta có $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 2x - 4.$

Vì : $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{2-x}$

Do đó : $S = \dfrac{1}{1-x_1} + \dfrac{1}{1-x_2} + \dfrac{1}{1-x_3} - \left(\dfrac{1}{2-x_1} + \dfrac{1}{2-x_2} + \dfrac{1}{2-x_3}\right)$

$$= \frac{f'(1)}{f(1)} - \frac{f'(2)}{f(2)} = -\frac{17}{5}.$$

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG PHÁP DÙNG PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN ĐỂ KHẢO SÁT NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

PHẦN 1 : LÍ THUYẾT

3.1. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

3.1.1. Nguyên hàm

Hàm F được gọi là một nguyên hàm của f trên (a ; b) nếu :

$F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a\,;b)$.

Định lí 3.1

Nếu hàm f(x) có một nguyên hàm F(x) trên một khoảng nào đó thì trên khoảng đó hàm f(x) có vô số nguyên hàm và tất cả các nguyên hàm của f(x) có dạng F(x) + C, trong đó C là một hằng số bất kì.

3.1.2. Tích phân không xác định

Tập hợp tất cả các nguyên hàm của một hàm f(x) trên một khoảng nào đó được gọi là tích phân không xác định của f(x) và được kí hiệu là $\int f(x)dx$.

Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì :

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (1)$$

3.1.3. Các tính chất của tích phân không xác định

Từ định nghĩa trên và công thức đạo hàm ta suy ra các tính chất sau:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; (2)

và $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; (3)

2. $\int dF(x) = F(x) + C$; (4)

3. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$, C là hằng số bất kì ; (5)

4. Nếu f và g là hai nguyên hàm trên một khoảng nào đó thì :

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx; \quad (6)$$

5. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = \varphi(x)$ thì

$$\int f(u)du = F(u) + C. \quad (7)$$

3.1.4. Bảng các tích phân cơ bản

1. $\int adx = ax + C$ (a là hằng số) ;

2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$;

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4. $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$ $(0 < \alpha \neq 1)$; $\int e^{x}dx = e^{x} + C$;

5. $\int \cos xdx = \sin x + C$;

6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$;

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$;

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$;

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$;

11. $\int \tan xdx = -\ln|\cos x| + C$;

12. $\int \cot xdx = \ln|\sin x| + C$;

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$;

14. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$;

15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$;

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

3.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

3.2.1. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử $u = u(x)$, $v = v(x)$ là hai hàm khả vi liên tục trên một khoảng nào đó.

Lúc đó : $\int udv = uv - \int vdu.$ (8)

Thật vậy, $d(uv) = udv + vdu$ nên $udv = d(uv) - vdu$.

Lấy tích phân hai vế đẳng thức này thì có (8).

Phương pháp tích phân từng phần thường áp dụng để tính những tích phân có dạng sau đây :

$\int P(x)\ln xdx$; $\int P(x)e^{ax}dx$; $\int P(x)\sin axdx$;

$\int P(x)\cos axdx$; $\int P(x)\arcsin xdx$; $\int P(x)\arccos xdx$.

$\int P(x)\arctan xdx$; $\int x^k \ln^m xdx$, với $k \neq -1$, $m \in \mathbb{N}$;

$\int e^{ax}\cos bxdx$; $\int e^{ax}\sin bxdx$;

trong đó $P(x)$ là một đa thức

3.2.2. Phương pháp đổi biến số

Nếu $x = \varphi(t)$ là một hàm số khả vi liên tục đối với t thì

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (9)$$

Kết quả : Tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân.

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$.

3.3. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3.3.1. Các bài toán dẫn đến khái niệm tích phân xác định

3.3.1.1. Diện tích của một hình thang cong

Việc tính diện tích của một hình phẳng bất kì là một trong những bài toán dẫn đến khái niệm tích phân xác định. Trong hình học sơ cấp ta tính được diện tích của những hình phẳng giới hạn bởi những đoạn thẳng và những cung tròn. Ở đây ta sẽ tìm cách tính diện tích của một hình phẳng giới hạn bởi một đường cong Jordan kín.

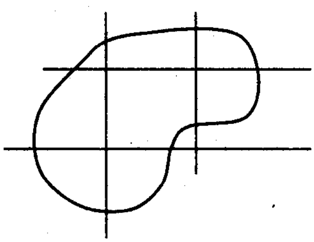
Ta định nghĩa một vài khái niệm :

- Một đường cong liên tục là một tập hợp những điểm M(x ; y) thoả mãn của hệ phương trình $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ với φ, ψ là hai hàm liên tục trên một đoạn $[\alpha ; \beta]$ nào đó

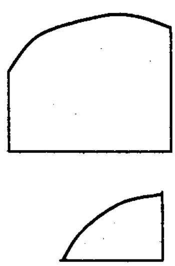
- Đường cong liên tục (C) được gọi là một đường cong Jordan nếu với hai điểm bất kì $t_1, t_2 \in [\alpha ; \beta]$ mà $t_1 < t_2$ thì $M_1(\varphi(t_1) ; \psi(t_1)) \neq M_2(\varphi(t_2) ; \psi(t_2))$ trừ 2 biên.

- Đường cong Jordan (C) được gọi là kín nếu $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ và $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$.

Giả sử F là một hình phẳng được giới hạn bởi một đường cong kín Jordan. Chia hình phẳng này thành nhiều hình nhỏ bởi những đường thẳng theo phương vuông góc với nhau. Mỗi hình nhỏ này được giới hạn bởi những đường thẳng và một cung cong. Ta gọi mỗi hình như thế là một hình thang cong (hình 3.1a, 3.1b).



Hình 3.1a



Hình 3.1b

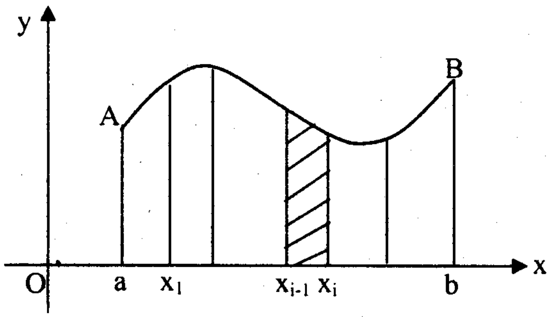
Do đó việc tính diện tích của hình F được đưa về việc tính diện tích của những hình thang cong.

Ta chọn một hệ trục toạ độ vuông góc sao cho hình thang cong đang xét có dạng ở hình 3.2. Nó được giới hạn bởi trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ và cung AB có phương trình $y = f(x)$, trong đó f là một hàm không âm và liên tục trên $[a ; b]$. Gọi π là một phân hoạch tuỳ ý của đoạn $[a ; b]$ với những điểm chia $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Trên mỗi đoạn $\Delta_i = [x_{i-1} ; x_i]$ $(i = 1, 2,...,n)$ ta lấy một điểm tuỳ ý ξ_i. Như vậy ta đã chia hình thang cong thành những hình thang cong nhỏ có "đáy dưới" là các đoạn Δ_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Đặt $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$.

Nếu hàm f không đổi trên đoạn Δ_i thì diện tích của hình thang cong nhỏ tương ứng là $f(\xi_i)\Delta x_i$. Do đó nếu Δx_i khá bé ta có thể xem diện tích của hình thang cong nhỏ là $S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$. Lúc đó diện tích của hình thang cong aABb sẽ là

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (10)$$



Hình 3.2

Khi chọn phân hoạch π mà $d(\pi) = \max\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$ càng nhỏ thì diện tích của hình thang cong aABb càng gần với tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

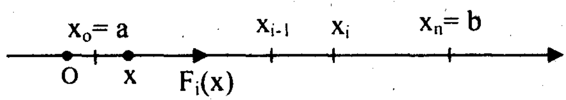
Định nghĩa : Diện tích S của hình thang cong aABb là giới hạn của tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ khi $d(\pi) \to 0$:

$$S = \lim_{d(\pi) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (11)$$

3.3.1.2. Công của một lực biến thiên

Cho một lực, hướng theo trục Ox (hình 3.3) và có cường độ phụ thuộc vào vị trí của điểm đặt $F = F(x)$. Giả sử $F(x)$ liên tục trên [a ; b].

Chia đoạn [a ; b] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ và phân hoạch tương ứng gọi là π. Khi các điểm chia x_{i-1}, x_i liên tiếp khá gần nhau thì do hàm F liên tục trên $[x_{i-1}, x_i]$ nên hàm thay đổi không đáng kể trên đoạn đó.



Hình 3.3

Vì vậy công của lực trên $[x_{i-1} ; x_i]$ xấp xỉ bằng $F(\xi_i)\Delta x_i$ với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và $\xi_i \in [x_{i-1} ; x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ta có thể xem công của lực trên [a ; b] xấp xỉ bằng

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i \tag{12}$$

với độ chính xác càng lớn thì n càng lớn và các Δx_i càng nhỏ. Do đó nên tổng (12) dần đến một giới hạn xác định A khi $n \to \infty$ sao cho $d(\pi) \to 0$ thì ta định nghĩa giới hạn đó chính là công của lực F khi điểm đặt di chuyển từ $x = a$ đến $x = b$.

$$A = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i .$$

3.3.2. Định nghĩa tích phân xác định

Cho f là một hàm số xác định trên [a ; b] (a < b). Chia đoạn [a ; b] thành n đoạn nhỏ những điểm chia $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Một phép chia như vậy được gọi là một phân hoạch của đoạn [a ; b] và được kí hiệu là π. Trên mỗi đoạn $[x_{i-1} ; x_i]$ ta lấy một điểm ξ_i và lập tổng

$$\sigma_\pi = \sum_{1=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{13}$$

Tổng (13) được gọi là tổng tích phân của hàm ứng với phân hoạch π. Kí hiệu $d(\pi) = \max\limits_{1\le i\le n} (x_i - x_{i-1})$ và gọi là đường kính của phân hoạch π.

Tổng (13) không chỉ phụ thuộc vào hàm f và phép phân hoạch π mà còn phụ thuộc vào cách chọn các điểm ξ_i trên các đoạn $[x_{i-1} ; x_i]$.

Ta nói tổng σ_π có giới hạn là I khi $d(\pi) \to 0$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi phép phân hoạch π mà $d(\pi) < b$ và với cách chọn tuỳ ý những điểm ξ_i, ta đều có $|\sigma_\pi - I| < \varepsilon$. Lúc đó ta kí hiệu :

$$I = \lim_{d(\pi)\to 0} \sigma_\pi .$$

Rõ ràng số I như vậy chỉ phụ thuộc vào hàm f và đoạn [a ; b].

Định nghĩa : Nếu tồn tại giới hạn $I = \lim\limits_{d(\pi)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân xác định của hàm f trên đoạn [a ; b] và được kí hiệu là $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Lúc đó f được gọi là khả tích trên [a ; b]. Trong đẳng thức trên, f được gọi là hàm dưới dấu tích phân, các số a, b được gọi là các cận của tích phân, a là cận dưới, b là cận trên.

Nếu a = b thì ta định nghĩa $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

Nếu a > b ta định nghĩa $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Định lí 3.2

Nếu f là một hàm khả tích trên [a ; b] thì f phải bị chặn ở trên đoạn đó.

Chứng minh. Gọi π là một phân hoạch bất kì của đoạn [a ; b] và lập tổng tích phân tương ứng : $\sigma_\pi = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Nếu f không bị chặn ở trên [a ; b] thì phải có một khoảng con $\left[x_{i_0-1}; x_{i_0}\right]$ của phân hoạch π để cho f không bị chặn ở trên khoảng đó.

Lúc đó : $\sigma_\pi = f(\xi_{i_0})(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Chọn các ξ_i ($i \neq i_0$) cố định. Lúc đó

$$|\sigma_\pi| \geq |f(\xi_{i_0})|(x_{i_0} - x_{i_0-1}) - |\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})|.$$

Đặt $A = \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ và xét N là một số tự nhiên bất kì. Do f không bị chặn ở trên đoạn $[x_{i_0-1}; x_0]$ nên bao giờ cũng chọn được ξ_{i_0} thuộc đoạn đó để : $|f(\xi_{i_0})| > \dfrac{|A| + N}{(x_{i_0} - x_{i_0-1})}$ được nghiệm đúng. Với ξ_{i_0} như vậy thì

$$|f(\xi_{i_0})|(x_{i_0} - x_{i_0-1}) - |A| > N \text{ nên } |\sigma_n| > N.$$

Do đó với mọi số tự nhiên N và với phân hoạch π bất kì bao giờ cũng chọn được những điểm ξ_i để tổng tích phân tương ứng cho f vượt quá N về trị tuyệt đối. Điều này có nghĩa là f không khả tích trên [a ; b].

Mâu thuẫn này chứng tỏ f phải bị chặn.

3.3.3. Các tổng Darboux

Cho f là một hàm bị chặn ở trên [a ; b] và π là một phân hoạch bất kì của [a ; b]. Kí hiệu $\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$ và cũng là độ dài của đoạn $[x_{i-1}; x_i]$.

Đặt $m_i = \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$.

Hai tổng : $s_\pi = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta_i$ và $S_\pi = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta_i$

lần lượt được gọi là tổng dưới và tổng trên Darboux của hàm f tương ứng với phân hoạch π. Đây là các số xác định, chỉ phụ thuộc vào hàm f và phân hoạch π. Rõ ràng ta có $s_\pi \leq S_\pi$.

Dưới đây là một số tính chất của tổng Darboux.

1) Một tổng tích phân bất kì của f ứng với phân hoạch π thì bao gồm giữa tổng trên và tổng dưới của phân hoạch đó.

2) Tổng trên (tổng dưới) ứng với phân hoạch π là supremum (infimum) của tập hợp mọi tổng tích phân ứng với phân hoạch đó.

3) Tổng dưới ứng với phân hoạch bất kì π thì không vượt quá một tổng trên bất kì ứng với phân hoạch π' tuỳ ý của đoạn [a ; b].

Tính chất 4 cho ta thấy rằng tập hợp mọi tổng dưới thì bị chặn trên và tập hợp mọi tổng trên thì bị chặn dưới.

Do đó tồn tại $I_* = \sup\limits_{\pi} s_\pi$ và $I^* = \inf\limits_{\pi} S_\pi$.

Rõ ràng ta có : $s_\pi \le I_* \le I^* \le S_\pi$, I_* và I^* lần lượt được gọi là tích phân dưới và tích phân trên của hàm f trên đoạn [a ; b].

3.3.4. Tiêu chuẩn khả tích

Định lí 3.3

Cho f là một hàm bị chặn ở trên [a ; b]. Điều kiện cần và đủ để f khả tích trên [a ; b] là $\lim\limits_{d(\pi)\to 0}(S_\pi - s_\pi) = 0$ (14)

Chứng minh.

Điều kiện cần : Giả sử f khả tích trên đoạn [a ; b].

Gọi $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Lúc đó với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi phân hoạch π của [a ; b] mà $d(\pi) < \delta$ và với mọi cách chọn $\xi_i \in \Delta_i$, ta có :

$$|\alpha_\pi - I| < \varepsilon \text{ hay } I - \varepsilon < \alpha_\pi < I + \varepsilon$$

Mà $S_\pi \le I + \varepsilon$ và $I - \varepsilon \le s_\pi$. Do đó :

$$I - \varepsilon \le s_\pi \le S_\pi \le I + \varepsilon$$

Ta suy ra : $\lim\limits_{d(\pi)\to 0} s_\pi = I$ và $\lim\limits_{d(\pi)\to 0} S_\pi = I$ nên $\lim\limits_{d(\pi)\to 0}(S_\pi - s_\pi) = 0.$

Điều kiện đủ : Giả sử ta có $\lim\limits_{d(\pi)\to 0}(S_\pi - s_\pi) = 0$, ta suy ra $I_* = I^*$.

Gọi giá trị này là I thì $s_\pi \le I \le S_\pi$.

Ta cũng có $s_\pi \le \sigma_\pi \le S_\pi$.

Vì $\lim\limits_{d(\pi)\to 0}(S_\pi - s_\pi) = 0$ nên có mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ để

$$S_\pi - s_\pi < \varepsilon \text{ với mọi } \pi \text{ mà } d(\pi) < \delta.$$

Do đó : $|\sigma_\pi - I| \le S_\pi - s_\pi < \varepsilon$.

Điều này chứng tỏ f khả tích trên [a ; b] và $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Chú ý :

1. Qua chứng minh trên ta nhận thấy rằng f khả tích trên đoạn [a ; b] khi và chỉ khi $I_* = I^*$. Lúc đó : $\int\limits_a^b f(x)dx = I_* = I^*$.

2. Nếu đặt $\omega_i = M_i - m_i$ và gọi là dao động của hàm f trên Δ_i thì ta có :

$$S_\pi - s_\pi = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta_i.$$

Tiêu chuẩn khả tích của hàm f bị chặn ở trên [a ; b] trở thành

$$\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta_i = 0. \tag{15}$$

3.3.5. Một số lớp hàm khả tích

Định lí 3.4

Một hàm liên tục trên [a ; b] đều khả tích trên đoạn đó.

Định lí 3.5

Giả sử f là một hàm bị chặn ở trên [a ; b]. Nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số hữu hạn khoảng đóng chứa tất cả các điểm gián đoạn của f và các khoảng đó có tổng độ dài nhỏ hơn ε thì hàm f khả tích trên [a ; b].

Chứng minh. Đặt $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ và $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Với $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại hữu hạn khoảng có tổng độ dài nhỏ hơn $\dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$.

Các điểm của đoạn [a ; b] mà không thuộc về các khoảng đóng trên tạo thành một tập hợp gồm những khoảng đóng không giao nhau. Trên mỗi khoảng đóng này hàm f liên tục và do đó f liên tục đều. Chia mỗi khoảng đóng đó thành những đoạn nhỏ sao cho trên mỗi đoạn nhỏ đó thì dao động ω_i của hàm f đều nhỏ hơn $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Kết hợp các đoạn nhỏ đó và các đoạn chứa các điểm gián đoạn của hàm f ta thu được một phân hoạch π của đoạn [a ; b]. Đối với phân hoạch này, các số hạng của tổng

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta_i = S_\pi - s_\pi$$

Được chia thành hai nhóm $\Sigma'\omega_i\Delta_i$ và $\Sigma''\omega_i\Delta_i$. Nhóm thứ nhất gồm những số hạng tương ứng với các đoạn chứa các điểm gián đoạn của f và nhóm thứ hai gồm tất cả các số hạng còn lại. Vì dao động $\omega_i = M_i - m_i$ trong các số hạng của nhóm thứ nhất đều thoả mãn bất đẳng thức $\omega_i \le M - m$ nên ta có :

$$\Sigma'\omega_i\Delta_i \le (M-m)\Sigma'\Delta_i < (M-m)\frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đối với các số hạng của nhóm thứ hai ta có $\omega_i < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ nên

$$\Sigma''\omega_i\Delta_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Sigma''\Delta_i \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do đó : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta_i = \sum{}'\omega_i\Delta_i + \sum{}''\omega_i\Delta_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Vậy f khả tích trên đoạn [a ; b].

Hệ quả

Nếu f là hàm bị chặn và chỉ có một số hữu hạn những điểm gián đoạn trên đoạn [a ; b] thì f khả tích trên [a ; b]. Đặc biệt mọi hàm liên tục từng khúc trên [a ; b] đều khả tích (Hàm f được gọi là liên tục từng khúc trên [a ; b] nếu [a ; b] được chia thành một số hữu hạn đoạn sao cho trên mỗi khoảng tương ứng f liên tục).

Định lí 3.6

Nếu f là một hàm bị chặn và đơn điệu trên [a ; b] thì f khả tích trên đoạn đó.

3.3.6. Các tính chất của tích phân xác định

Định lí 3.7

Nếu f và g là hai hàm khả tích trên [a ; b] thì các hàm $f \pm g$ cũng khả tích trên [a ; b] và

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Định lí 3.8

Nếu f là một hàm khả tích trên [a ; b] thì hàm số cf (c là hằng số) cũng khả tích trên [a ; b] và $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$

Định lí 3.9

Nếu f khả tích trên [a ; b] thì f cũng khả tích trên mọi đoạn [c, d] được chứa trong [a ; b].

Định lí 3.10

Nếu f là hàm khả tích trên hai đoạn [a ; c], và [c ; b] thì f khả tích trên [a ; b] và $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

3.4. ĐÁNH GIÁ TÍCH PHÂN VÀ ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

3.4.1. Đánh giá tích phân

Trong phần này ta có một số đánh giá về tích phân xác định khi hàm số dưới dấu tích phân thoả một vài điều kiện nào đó.

Mệnh đề 3.1

Giả sử f là một hàm không âm và khả tích trên [a ; b]. Lúc đó

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Mệnh đề 3.2

Nếu f khả tích trên [a ; b] và $f(x) \geq m$ với mọi $x \in [a ; b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a).$$

Thật vậy, vì $f(x) - m \geq 0$ trên [a ; b] nên theo tính chất trên thì $\int_a^b [f(x)-m]dx \geq 0.$

Do đó $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b mdx = m(b-a).$

Mệnh đề 3.3

Nếu f liên tục, không âm và không đồng nhất bằng 0 trên [a ; b] thì $\int_a^b f(x)dx > 0.$

Theo giả thiết có $x_0 \in [a ; b]$ để $f(x_0) > 0$. Do f liên tục nên có khoảng $[\alpha,\beta]$ chứa x_0 và $[\alpha,\beta] \subset [a ; b]$ sao cho $f(x) > 0$ trên $[\alpha ; \beta]$. Cũng do f liên tục nên trên $[\alpha ; \beta]$, f tồn tại giá trị nhỏ nhất.

Giả sử $\min\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) = c$ thì $c > 0$. Như vậy $f(x) \geq c$ với mọi $x \in [\alpha ; \beta]$.

Theo mệnh đề 3.2 thì $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq c(\beta-\alpha) > 0.$

Ta có : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx.$

Vì $f \geq 0$ nên $\int_a^\alpha f(x)dx \geq 0$ và $\int_\beta^b f(x)dx \geq 0.$

Vậy $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Nhờ vào mệnh đề 3.1, ta dễ dàng suy ra mệnh đề sau :

Mệnh đề 3.4

Nếu f và g là hai hàm khả tích trên [a ; b] và $f(x) \leq g(x)$, với mọi $x \in [a ; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

Mệnh đề 3.5

Nếu f là hàm khả tích trên [a ; b] thì $|f|$ cũng khả tích trên [a ; b] và ta có $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$ (18)

3.4.2. Định lí giá trị trung bình

Định lí 3.11 (Định lí giá trị trung bình)

Cho f là một hàm khả tích trên [a ; b] và m, M là infimum và supremum của hàm f trên [a ; b]. Lúc đó tồn tại $\mu \in [m ; M]$ để cho $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$ (19)

Chứng minh. Vì $m \leq f(x) \leq M$ với mọi $x \in [a ; b]$ nên

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Đặt $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ta suy ra công thức (19) và rõ ràng $\mu \in [m ; M]$.

Nếu f là hàm liên tục trên [a ; b] thì sẽ có $\xi \in [a ; b]$ để $f(\xi) = \mu$. Đẳng thức (19) trở thành $\int_a^b f(x)dx = (b-a) f(\xi).$ (20)

$f(\xi)$ được gọi là giá trị trung bình của hàm f trên [a ; b].

3.5. MỐI LIÊN HỆ GIỮA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH VÀ NGUYÊN HÀM

3.5.1. Sự tồn tại nguyên hàm của một hàm liên tục

Cho f là một hàm liên tục trên đoạn [a ; b]. Lúc đó f khả tích trên [a ; b] và do đó f cũng khả tích trên mọi đoạn [a ; x] với x ∈ [a ; b].

Như vậy nếu đặt $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (21)

thì F là một hàm xác định trên [a ; b]. Ta có định lý sau:

Định lí 3.12

Nếu f là một hàm liên tục trên [a ; b] thì hàm số F xây dựng bởi công thức (21) là một nguyên hàm của f trên [a ; b]. Nói cách khác F khả vi trên [a ; b] và F'(x) = f(x) với mọi x ∈ [a ; b]

Chứng minh. Xét x ∈ [a ; b] và h đủ bé để x + h ∈ [a ; b] ta có:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Nhưng theo (19) thì có ξ nằm giữa x và x + h để

$\int_x^{x+h} f(t)dt = hf(\xi)$. Như vậy $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi)$.

Khi $h \to 0$ thì $\xi \to x$ và do f liên tục nên ta có $f(\xi) \to f(x)$.

Do đó F'(x) = f(x).

Tương tự ta chứng minh được $F'_+(a) = f(a)$ và $F'_-(b) = f(b)$.

Lưu ý rằng đẳng thức F'(x) = f(x) còn được viết lại là :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x) \qquad (22)$$

(22) được gọi là công thức tính đạo hàm của tích phân theo cận trên.

3.5.2. Công thức Newton – Leibnitz

Nếu f(x) liên tục trên [a ; b] và có nguyên hàm là F(x) thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b . \qquad (23)$$

Công thức (23) được gọi là công thức Newton – Leibnitz.

Công thức Newton - Leibnitz cho ta cách tính tích phân xác định vì vấn đề tính tích phân xác định qui về việc tính nguyên hàm của một hàm số.

PHẦN 2 : CÁC VẤN ĐỀ GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1 : BÀI TOÁN CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

1. CÁC ĐỊNH HƯỚNG

ĐỊNH HƯỚNG 1 : BÀI TOÁN CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH
F(X) = G(X) CÓ NGHIỆM

Ta có thể xét hàm số F(x) = f(x) – g(x), kiểm tra tính khả tích.

Dựa vào giả thiết để chứng minh tích phân xác định trên đoạn [a ; b] nhận giá trị bằng 0 hoặc nhận dấu dương hoặc dấu âm :

- Nếu $\int_a^b F(x)dx = 0$ thì theo công thức trung bình :

$$\exists c \in [a;b], \int_a^b F(x)dx = (b-a)F(c)$$

sẽ cho kết quả $\exists c \in [a;b], F(c) = 0$.

Do đó phương trình f(x) = g(x) có nghiệm x = c.

- Nếu $\int_a^b F(x)dx > 0$ thì theo công thức trung bình :

$$\exists c \in [a;b], \int_a^b F(x)dx = (b-a)F(c).$$

sẽ cho kết quả $\exists c \in [a;b], F(c) > 0$.

Trong trường hợp này, ta phải sử dụng giả thiết hoặc chứng minh thêm để có

$$\exists d, F(d) < 0.$$

Do đó F(c).F(d) < 0.

Mà hàm số F(x) liên tục trên đoạn [c ; d] thì phương trình F(x) = 0 có nghiệm do đó phương trình f(x) = g(x) có nghiệm x = m thuộc đoạn [c ; d].

- Nếu $\int_a^b F(x)dx < 0$ thì theo công thức trung bình :

$$\exists c \in [a;b], \int_a^b F(x)dx = (b-a)F(c).$$

Sau đó giải tiếp như trường hợp trên.

ĐỊNH HƯỚNG 2 : BÀI TOÁN CHỨNG MINH TỒN TẠI SỐ C THOẢ MÃN MỘT ĐẲNG THỨC

Thay số c bởi biến x và chuyển đẳng thức của đề bài thành phương trình ẩn x.

Bài toán đưa về bài toán định hướng 1.

ĐỊNH HƯỚNG 3 : BÀI TOÁN CHỨNG MINH PHỐI HỢP

Do thứ tự của kiến thức và phương pháp nên một số bài toán chứng minh phương trình f(x) = g(x) có nghiệm hoặc chứng minh tồn tại số c thoả mãn một đẳng thức, ngoài việc sử dụng phép tính tích phân, định lí giá trị trung bình của tích phân, ta còn phối hợp sử dụng tính chất hàm số liên tục hay các định lí Rolle, Lagrange, tính đơn điệu, ... để chứng minh.

2. BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Trên cơ sở các định hướng trên, ta giải các bài toán sau :

BÀI TOÁN 1

Giả sử f(x) liên tục trên $[0;\frac{\pi}{2}]$ và thoả mãn: $f(0) > 0$, $\int_0^{\pi/2} f(x)dx < 1$.

Chứng minh rằng phương trình f(x) – sinx = 0 có ít nhất một nghiệm trên đoạn $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Giải.

Xét F(x) =f(x) – sinx, khi đó F(x) liên tục trên $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Theo giả thiết : $\int_0^{\pi/2} f(x)dx < 1$ hay $\int_0^{\pi/2} f(x)dx - 1 < 0$.

Mà $\int_0^{\pi/2} [f(x) - \sin x]dx = \int_0^{\pi/2} f(x)dx - 1$

Suy ra : $\int_0^{\pi/2} [f(x) - \sin x\ ]dx = \int_0^{\pi/2} F(x)dx < 0.$

Do đó tồn tại $c \in [0\,; \frac{\pi}{2}]$ để $F(c) < 0$.

Mà $F(0) = f(0) > 0$ nên tồn tại $c_0 \in [0\,; \frac{\pi}{2}]$ để $F(c_0) = 0$ tức là $F(x) = 0$ có nghiệm.

Vậy $f(x) - \sin x = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $[0\,; \frac{\pi}{2}]$.

BÀI TOÁN 2

Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [0 ; 1], f(0) > 0 và :

$$\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{1998}, \forall x > 0$$

Chứng minh phương trình $x^{1997} - f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0 ; 1).

Giải.

Xét hàm số $F(x) = x^{1997} - f(x)$, khi đó $F(x)$ liên tục trên [0 ; 1].

Theo giả thiết thì $F(0) < 0$ và

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 (x^{1997} - f(x))dx = \frac{1}{1998} - \int_0^1 f(x)dx > 0.$$

Suy ra tồn tại x_1 thuộc (0 ; 1) sao cho $F(x_1) > 0$.

Mà F(x) liên tục nên tồn tại a thuộc $(0\,; x_1)$ để $F(a) = 0$.

Do đó $a^{1997} - f(a) = 0$, nên phương trình $x^{1997} - f(x) = 0$ luôn luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0 ; 1).

BÀI TOÁN 3

Chứng minh rằng tồn tại số thực x thuộc khoảng (0 ; 1) sao cho

$$\int_x^1 \frac{t^{2000}dt}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{2001})} = \frac{x^{2000}}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2001})}.$$

Giải.

Xét hàm số

$$F(x)=\int_x^1 \frac{t^{2000}dt}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{2001})}-\frac{x^{2000}}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2001})}$$ với x thuộc [0 ; 1].

Ta có F(x) liên tục trên [0 ; 1] và

$$F(0)=\int_0^1 \frac{t^{2000}dt}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{2001})}\geq\int_0^1\frac{t^{2000}}{2^{2001}}dt=\frac{1}{2001.2^{2001}}>0.$$

$$F(1)=\int_1^1 \frac{t^{2000}dt}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{2001})}-\frac{1^{2000}}{(1+1)(1+1^2)...(1+1^{2001})}=-\frac{1}{2^{2001}}<0$$

Từ đó suy ra tồn tại x thuộc khoảng (0 ; 1) để F(x) = 0.

Hay tồn tại x thuộc khoảng (0 ; 1) thoả mãn :

$$\int_x^1 \frac{t^{2000}dt}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{2001})}=\frac{x^{2000}}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2001})}.$$

BÀI TOÁN 4

Cho hàm số f(x) xác định và liên tục trên đoạn [a ; b] và thoả mãn điều kiện $\int_a^b f(x)dx=0$.

Chứng minh rằng tồn tại c thuộc khoảng (a ; b) sao cho

$$f(c)=2005\int_a^c f(x)dx.$$

Giải.

Xét hàm số $F(t)=e^{-2005t}\int_a^t f(x)dx$.

Khi đó F(a) = F(b) = 0 và

$$F'(t)=-2005e^{-2005t}\int_a^t f(x)dx+e^{-2005t}f(t).$$

Theo định lí Rolle thì tồn tại c thuộc khoảng (a ; b) sao cho

F'(c) =0 nên :

$$F'(c) = -2005e^{-2005c}\int_a^c f(x)dx + e^{-2005c}f(c) = 0.$$

Do đó $e^{-2005c}f(c) = 2005e^{-2005c}\int_a^c f(x)dx$.

Hay tồn tại c thuộc khoảng (a ; b) để

$$f(c) = 2005\int_a^c f(x)dx.$$

BÀI TOÁN 5

Cho số a > 0 và hàm số f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x) \geq a, \forall x \in \mathbb{R}$.

Biết rằng $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sinxdx < a$.

Chứng minh rằng khi đó trên đoạn $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, phương trình f(x) = 0 có nghiệm duy nhất.

Giải.

Ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)d(\cos x) = -\cos x f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x dx$$

$$= f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos x dx \geq f(0) + a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = f(0) + a.$$

Suy ra $f(0) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sinxdx - a < 0$. Giả sử $f(\pi/2) \leq 0$.

Từ giả thiết $f'(x) \geq a > 0$ nên f(x) đồng biến trên đoạn $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

Vậy $f(x) \leq f(\pi/2) \leq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ do đó $f(x)\sin x \leq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)sinxdx \le 0$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy $f(\pi/2) > 0$ nên phương trình f(x) = 0 có nghiệm và là nghiệm duy nhất, vì f đồng biến trên đoạn $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

BÀI TOÁN 6

Cho hàm số f(x) liên tục dương trên miền $[0 ; +\infty)$.

Chứng minh rằng phương trình $\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} = m$ có tối đa một nghiệm với mọi m.

Giải.

Xét $F(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$. Ta chứng minh F(x) là hàm đơn điệu trên $[0 ; +\infty)$.

Thật vậy, $F'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}$.

Hay $F'(x) = \frac{f(x).(x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt)}{(\int_0^x f(t)dt)^2}$.

Theo giả thiết thì $f(x) > 0$.

Và vì $t < x$ nên $x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt > 0$.

Do đó F'(x) > 0 với mọi x > 0.

Vậy F(x) là hàm đơn điệu trên [0 ;+∞) nên phương trình $F(x) = m$ có tối đa một nghiệm với mọi m.

VẤN ĐỀ 2 : BÀI TOÁN TỔNG HỢP SỬ DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI TOÁN 1

Cho a ∈ (0 ; 1). Giả sử f(x) liên tục trên đoạn [0 ; 1] thoả điều kiện :

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Chứng minh tồn tại b ∈ [0 ; 1] sao cho

hoặc f(b) = f(b – a) hoặc f(b) = f(b + a – 1).

Giải.

Ta mở rộng hàm f trên $\mathbb{R}$ để được hàm tuần hoàn chu kỳ T = 1.

Do f(0) = f(1) = 0 nên hàm mới, vẫn kí hiệu f, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Xét hàm số g(x)= f(x+a) – f(x) , khi đó g(x) liên tục và khả tích trên $\mathbb{R}$.

Ta có :

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x+a)dx - \int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_a^{1+a} f(x+a)dx - \int_0^1 f(x)dx = 0$$

Mặt khác, tồn tại c∈[0 ; 1] sao cho :

$$\int_0^1 g(x)dx = (1-0)g(c) = g(c)$$

nên g(c) = 0. Do đó 0 = f(c+a) – f(c).

Suy ra 0 = f(c + a) – f(c) = f(c + a + n) – f(c) với n nguyên.

Vậy, nếu c + a ∈[0 ; 1] thì chọn b = c + a ∈ [0 ; 1].

Còn nếu c + a > 1 thì chọn b = c ∈ [0 ; 1].

BÀI TOÁN 2

Cho $P(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + ... + a_n\cos nx$ nhận giá trị dương $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $a_0 > 0$.

Giải.

Xét nguyên hàm

$$F(x) = a_0x + \frac{a_1}{1}.\sin x + \frac{a_2}{2}.\sin 2x + ... + \frac{a_n}{n}.\sin nx \text{ trên } \mathbb{R}.$$

Ta có : $F'(x) = P(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow F(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $F(\pi) > F(0) \Rightarrow a_0.\pi > 0$.

Vậy : $a_0 > 0$.

BÀI TOÁN 3

Cho đa thức lượng giác :

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

trong đó các số thực $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $a_i^2 + b_i^2 = 1$ ($i = 1, 2, ..., n$).

Chứng minh nếu $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì :

$$\frac{f(x) - n}{a_0} \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải.

Ta có : $f(x) \leq a_0 + \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2 + b_i^2} = a_0 + n$ (*)

Xét một nguyên hàm của $f(x)$ là

$$F(x) = a_0x + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{i}\sin ix - \frac{b_i}{i}\cos ix\right).$$

Vì $F'(x) = f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $F(x)$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $F(2\pi) > F(0)$ tức $a_0 > 0$.

Kết hợp với (*) ta thu được : $\dfrac{f(x)-n}{a_0} \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

BÀI TOÁN 4

Cho các số a, b, c, m thoả $\dfrac{a}{m+2} + \dfrac{b}{m+1} + \dfrac{c}{m} = 0$, $m > 0$.

Chứng minh phương trình :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ có nghiệm.}$$

Giải.

Ta xét một hàm số liên quan đến nguyên hàm của vế trái hàm số :

$$f(x) = \frac{ax^{m+2}}{m+2} + \frac{bx^{m+1}}{m+1} + \frac{cx^m}{m} \text{ trên } [0 ; 1].$$

Hàm số f liên tục trên [0 ; 1] và có đạo hàm trên (0 ; 1) là :

$$f'(x) = ax^{m+1} + bx^m + c\,x^{m-1}$$
$$= x^{m-1}(ax^2 + bx + c).$$

Theo định lí Lagrăng thì $\exists x_0 \in (0 ; 1) : f'(x_0) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$

$$\Leftrightarrow x_0^{m-1}(ax_0^2 + bx_0 + c) = \frac{\dfrac{a}{m+2} + \dfrac{b}{m+1} + \dfrac{c}{m}}{1-0} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^{m-1}(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0 \text{ (vì } x_0^{m-1} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow ax_0^2 + bx_0 + c = 0.$$

Suy ra phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x_0 \in (0 ; 1)$.

BÀI TOÁN 5

Chứng minh nếu $\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx = 0, \forall x \in [0 ; 2\pi]$ thì phương trình

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1 = 0 \text{ có vô số nghiệm.}$$

Giải.

Với các số nguyên p, q.

Ta có : $I = \int_0^{2\pi} \cos px.\cos qx.dx = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(p+q)x + \cos(p-q)x]dx$.

Nếu p = q thì I = π.

Nếu p $\neq$ q thì I = 0.

Vì f(x) = $\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx = 0, \forall x \in [0 ; 2\pi]$

nên $0 = \int_0^{2\pi} f(x).\cos px.dx = a_p.\pi, \ \forall p = 1, 2, ..., n.$

Do đó các hệ số $a_k = 0$.

Vậy phương trình $a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1 = 0$ có vô số nghiệm.

BÀI TOÁN 6

Cho hàm số f(x) xác định và liên tục trên đoạn [1 ; 2] và thoả mãn điều kiện

$$\int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx \leq \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} \text{ với mọi } x_1, x_2 \in [1; 2], x_1 \leq x_2.$$

Chứng minh rằng $\int_1^2 f(x)dx \leq \frac{3}{2}$.

Giải.

Ta có $\int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{x_2^3 - x_1^3}{3}$ nên từ giả thiết thì có

$$\int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx \leq \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx \text{ hay } \int_{x_1}^{x_2} \left[x^2 - (f(x))^2 \right] dx \geq 0, x_1 \leq x_2.$$

Suy ra tồn tại $c \in [x_1; x_2]$ sao cho $(f(c))^2 - c^2 \leq 0$ với mọi $x_1, x_2 \in [1 ; 2]$.

Do hàm số $h(x) = x^2 - (f(x))^2$ liên tục trên [1 ; 2] nên

$$(f(x))^2 - x^2 \leq 0, \forall x \in [1; 2].$$

Suy ra $|f(x)| \leq x, \forall x \in [1; 2]$.

Từ đó suy ra $\int_1^2 f(x)dx \leq \int_1^2 |f(x)|dx \leq \int_1^2 xdx = \frac{3}{2}$.

BÀI TOÁN 7

Giải phương trình $\int_0^x \frac{dt}{4-t^2} = 0$.

Giải.

Ta có $\int_0^x \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\int_0^x \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|_0^x = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$

Nên phương trình $\int_0^x \frac{dt}{4-t^2} = 0$ tương đương với

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$