Phần I. ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa đạo hàm: Cho hàm số y=f(x) xác định trên (a;b) và $x_0 \in (a;b)$.

a) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ là đạo hàm của f(x) tại x_0.

b) $f'(x_0^+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ là đạo hàm bên phải của f(x) tại x_0.

c) $f'(x_0^-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ là đạo hàm bên trái của f(x) tại x_0.

Sự có đạo hàm: $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = A \Leftrightarrow f'(x_0) = A$

d) f(x) có đạo hàm trên khoảng (a;b) $\Leftrightarrow$ f(x) có đạo hàm tại $\forall x_0 \in (a;b)$.

e) f(x) có đạo hàm trên [a;b] $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ có đạo hàm trên } (a;b) \\ \exists\, f'(a^+) \\ \exists\, f'(b^-) \end{cases}$

2. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số y=f(x) tại $x \in (a;b) \subset \mathbb{D}$ (Tập xác định của hàm số):

- Cho x số gia Δx, tìm $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.
- Lập tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Tìm $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, nếu giới hạn tồn tại.

3. Tiếp tuyến của đường cong phẳng (C): y = f(x):

A. *Ý nghĩa hình học của đạo hàm:*

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C): y = f (x) tại tiếp điểm $M_0(x_0;y_0)$ là $k = f'(x_0)$.

B. *Phương trình tiếp tuyến: Của (C): y = f(x) tại $M_0(x_0;y_0)$ có dạng:*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1).$$

Viết được (1) là phải tìm x_0; y_0 và $f'(x_0)$.

4. Bảng quy tắc tính đạo hàm:

Cho u,v,w...là các hàm số có biến số x, lần lượt có đạo hàm theo x là u',v',w'....Ta có:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Mở rộng : $(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w'$.

2) $(u.v)' = u'v + u\,v'$.

Hệ quả : $(ku)' = k.u'$, k: hằng số.

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$.

Hệ quả : $\left(\frac{k}{v}\right)' = -\frac{kv'}{v^2}$, $v \neq 0$, k: hằng số.

4) $(y[u(x)])' = y'_u.u'_x$ (đạo hàm của hàm số hợp)

5. Bảng các đạo hàm :

Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản	*Đạo hàm của các hàm số hợp*
(C)' = 0 với C là hằng số (x)' = 1 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
(sinx)' = cosx (cosx)' = – sinx $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2x$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z)$ $(\cot gx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + cotg^2x)$ $(x \neq k\pi,\ k \in Z)$	(sinu)' = u'.cosu (cosu)' = – u'.sinu $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + tg^2u)$ $(\cot gu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot g^2u)$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x.\ln a$ $(0 < a \neq 1)$	$(e^u)' = u'.e^u$ $(a^u)' = u'.a^u.\ln a$
$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ $(\log_a\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x\ln a}$ $(0 < a \neq 1,\ x \neq 0)$	$(\ln\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u\ln a}$

6. Đạo hàm cấp cao – vi phân :

a) Đạo hàm của đạo hàm cấp n – 1 của hàm số f(x), nếu có, là đạo hàm cấp n của hàm số f(x).

Ký hiệu : $[f^{(n-1)}(x)]' = f^{(n)}(x) = y^{(n)}(x)$

b) Giả thiết y = f(x) có đạo hàm trong khoảng (a;b). Vi phân của hàm số y = f(x) tại điểm x bất kỳ thuộc khoảng (a;b) là :

$$dy = f'(x).dx.$$

c) Tính gần đúng:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$$

Phần II. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

I.SỰ ĐỒNG BIẾN VÀ NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

1) Kiến thức lớp 10 :

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a;b) và $x_1 < x_2$ với $x_1, x_2 \in (a;b)$

a) Nếu $f(x_1) < f(x_2)$ thì f(x) đồng biến trên khoảng (a;b).

b) Nếu $f(x_1) > f(x_2)$ thì f(x) nghịch biến trên khoảng (a;b).

2) Định lý LaGrăng:

Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và có đạo hàm trên khoảng (a;b) thì tồn tại một điểm $c \in (a;b)$ sao cho :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \text{ hay } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3) Điều kiện đủ của tính đơn điệu :

a) *Định lý 2 :*

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm trên khoảng (a;b) .

1. Nếu f'(x) > 0 với $\forall x \in (a;b)$ thì hàm số y = f(x) đồng biến trên khoảng đó.
2. Nếu f'(x) < 0 với $\forall x \in (a;b)$ thì hàm số y = f(x) nghịch biến trên khoảng đó.

b) *Định lý 3 (Mở rộng định lý 2) :*

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm trên khoảng (a;b) .

Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) với $\forall x \in (a;b)$ và f'(x) = 0 tại một số hữu hạn điểm trên khoảng (a;b) thì hàm số y = f(x) đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng đó.

Tóm tắt:

Bảng biến thiên

x	a		b
y'		+	
y		↗	

Hàm số đồng biến trên (a;b)

x	a		b
y'		–	
y		↘	

Hàm số nghịch biến trên (a;b)

4) Điểm tới hạn :

a) Định nghĩa: Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a;b) và $x_0 \in (a;b)$. Điểm x_0 được gọi là 1 điểm tới hạn của hàm số y = f(x) nếu tại x_0 đạo hàm f'(x) không xác định hoặc bằng 0.

b) Tính chất : Đối với các hàm số sơ cấp (Tổng, hiệu, tích, thương, hàm số hợp của một số các hàm số sơ cấp cơ bản): Nếu f'(x) liên tục trên khoảng (a;b) và x_1; x_2 ($x_1 < x_2$) là hai điểm tới hạn kề nhau thuộc khoảng (a;b) thì trên khoảng (x_1; x_2) đạo hàm f'(x) giữ nguyên dấu.

5) Cách tìm các khoảng đơn điệu của hàm số y = f(x):

a) Tìm tập xác định **D** của hàm số y = f(x).

b) Tìm f'(x) và tìm các điểm $x_i \in$ **D** (i = 1,...,n) (các điểm tới hạn của f(x)).

c) Lập bảng biến thiên, xét dấu của f'(x) trên từng khoảng xác định bởi các điểm tới hạn và dựa vào định lý 2, 3 để xét tính đơn điệu của hàm số y = f(x) trên khoảng xác định **D** của nó.

II.CỰC ĐẠI VÀ CỰC TIỂU

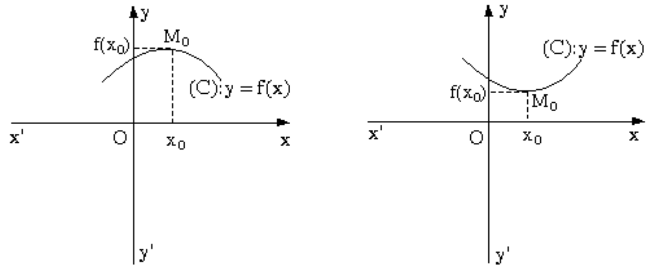
1. Định nghĩa :

Cho hàm số y = f(x) liên tục trên khoảng (a; b) và điểm $x_0 \in (a; b)$; có đồ thị (C).

a) $V(\delta) = (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ với $\delta > 0$ là một lân cận của điểm x_0.

b) Nếu với $\forall x \in V(\delta) \subset (a; b)$ của điểm x_0 và $x \neq x_0$ ta đều có $f(x) < f(x_0)$ thì x_0 là 1 một điểm cực đại của hàm số y = f(x), $f(x_0)$ là giá trị cực đại của hàm số y = f(x), còn điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của (C).

c) Nếu với $\forall x \in V(\delta) \subset (a; b)$ của điểm x_0 và $x \neq x_0$ ta đều có $f(x) > f(x_0)$ thì x_0 là 1 một điểm cực tiểu của hàm số y = f(x), $f(x_0)$ là giá trị cực tiểu của hàm số y = f(x), còn điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của (C).



Điểm cực đại của (C): y = f(x) Điểm cực tiểu của (C) : y = f(x)

d) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là các điểm cực trị. Giá trị của hàm số y = f(x) tại điểm cực trị gọi là *cực trị* của hàm số đã cho.

2.*Điều kiện cần để hàm số có cực trị :*

a) Định lý Fermat : Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'(x_0) = 0$.

Ý nghĩa hình học : Tại điểm cực trị x_0, nếu f(x) có đạo hàm thì tiếp tuyến của đồ thị là song song hoặc trùng (cùng phương) với Ox.

b) Hệ quả: Mọi điểm cực trị của hàm số y = f(x) đều là điểm tới hạn của nó.

3. Các dấu hiệu (điều kiện đủ) để hàm số có cực trị :

a) Dấu hiệu 1: Nếu đi qua điểm x_0 mà f'(x) đổi dấu thì x_0 là điểm cực trị của hàm số y=f(x).

Cụ thể :

x	$x_0 - \delta$	x_0	$x_0 + \delta$
y'	+		–
y	↗	y_0 cực đại	↘

x	$x_0 - \delta$	x_0	$x_0 + \delta$
y'	–		+
y	↘	y_0 cực tiểu	↗

b) Dấu hiệu 2: Giả sử hàm số y = f(x) có đạo hàm liên tục tới cấp 2 tại x_0 và $f'(x_0)=0$ và $f''(x_0)\neq 0$ thì x_0 là một điểm cực trị của hàm số y = f(x).

Cụ thể :

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực tiểu của hàm số } y=f(x)$$

$$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ là điểm cực đại của hàm số } y=f(x)$$

4. Các quy tắc tìm cực trị của hàm số y = f(x) :

Quy tắc I	Quy tắc II
Phương pháp: • Tìm tập xác định **D** của hàm số • Tìm f'(x) và tìm các điểm tới hạn $x_0\in$ **D**. • Xét dấu của f'(x) trên bảng biến thiên. • Dựa vào dấu hiệu I suy ra các điểm cực trị.	***Phương pháp:*** • Tìm tập xác định **D** của hàm số • Tính f'(x) và giải phương trình f'(x)= 0 để tìm các nghiệm x_i (i=1,2....) • Tính f''(x) • Từ dấu của $f''(x_i)$, dựa vào dấu hiệu II, suy ra tính chất cực trị của f(x).

5. Một số vấn đề có liên quan đến cực trị :

- Đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$ và $b^2-3ac>0$) được thực hiện theo các bước :
  - Tìm y'. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị $\Leftrightarrow a\neq 0$ và $\Delta' = b^2-3ac>0$
  - Chia y cho y' ta được dư là $\alpha x+\beta$.
  - Khi đó hàm số $y = f(x) = ax^3+bx^2+cx+d = (Ax+B)y' +\alpha x+\beta$
  - Gọi x_0 là điểm cực trị của hàm số y = f(x). Theo định lý Fermat:

$\Rightarrow y'(x_0) = 0 \Rightarrow y(x_0) = (Ax_0+B)y'(x_0) +\alpha x_0+\beta = \alpha x_0+\beta$

Vậy đường thẳng qua cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$ và $b^2-3ac>0$) là d: $y = \alpha x+\beta$

❖ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm bậc 3 trên là :

$$\boxed{y=\frac{2}{3}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}}$$

❖ Đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu (nếu có) của đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ có phương trình :

$$\boxed{y=\frac{(ax^2+bx+c)'}{(a'x+b')'}=\frac{2ax+b}{a'}}$$

III. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1.Định nghĩa : Cho hàm số y = f(x) xác định trên tập D. Định nghĩa:

$$\underset{D}{\mathrm{Max}}\, f(x)=M \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in D: f(x)\le M \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=M \end{cases}$$

$$\underset{D}{\mathrm{Min}}\, f(x)=m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in D: f(x)\ge m \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=m \end{cases}$$

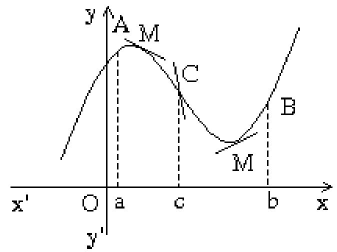
Hẳn nhiên là : Nếu D=[a;b] thì M và m đồng thời tồn tại và m ≤ f(x) ≤ M với $\forall x\in[a;b]$

2. Cách tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

- Xác định tập D
- Tìm các điểm tới hạn $x_i\in D$ (i = 1,2,...) (nếu có)
- Tìm:
  - Giá trị $f(x_i)$ tương ứng (nếu có);
  - Giá trị ở các mút (nếu D = [a;b] thì tìm f(a) và f(b));
  - Tìm các giới hạn 1 bên (nếu D=(a;b) thì tìm $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$);
  - Tìm các giới hạn ở vô tận (nếu D = $(-\infty ; a]$ thì tìm $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ còn nếu D = $[a;+\infty)$ thì tìm $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$).
  - Lập bảng biến thiên (hoặc so sánh các giá trị của hàm số trên một đoạn), dựa vào đó mà kết luận.

IV. TÍNH LỒI LÕM VÀ ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1)Khái niệm về tính lồi, lõm và điểm uốn :



Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp 2 trong khoảng (a;b), có đồ thị (C). Giả thiết tại mọi điểm thuộc khoảng (a;b) đồ thị (C) đều có tiếp tuyến. Xét cung ACB với A(a;f(a)); B(b;f(b)) và C(c;f(c)).

- Cung $\overset{\frown}{AC}$ là một cung lồi của (C) nếu tại mọi điểm của cung $\overset{\frown}{AC}$ tiếp tuyến đều nằm phía trên (C). Khoảng (a;c) gọi là khoảng lồi của đồ thị.
- Cung $\overset{\frown}{CB}$ là một cung lõm của (C) nếu tại mọi điểm của cung $\overset{\frown}{CB}$ tiếp tuyến đều nằm phía dưới (C). Khoảng (c;b) gọi là khoảng lõm của đồ thị.

Điểm C phân cách giữa cung lồi và cung lõm được gọi là điểm uốn của đồ thị. Tại điểm uốn tiếp tuyến xuyên qua đồ thị.

2) Dấu hiệu lồi, lõm và điểm uốn :

1) Định lý 1 : *Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm đến cấp hai trên khoảng (a;b).*

a. *Nếu f"(x) < 0 với mọi x∈(a;b) thì đồ thị của hàm số lồi trên khoảng đó.*

b. *Nếu f"(x) > 0 với mọi x∈(a;b) thì đồ thị của hàm số lõm trên khoảng đó.*

2) Định lý 2 : *Cho hàm số y = f(x) liên tục trên một lân cận nào đó của điểm x_0 và có đạo hàm tới cấp hai trong lân cận đó. Nếu đạo hàm cấp hai đổi dấu khi x đi qua x_0 thì điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho.*

3) Tóm tắt :

a) Tính lồi, lõm của đồ thị:

x	a b
y"	−
Đồ thị của hàm số	lồi

X	a b
y"	+
Đồ thị của hàm số	lõm

b) Điểm uốn của đồ thị:

x	x_0	
y"	+ (−)	− (+)
Đồ thị của hàm số	Điểm uốn $M_0(x_0;f(x_0))$	

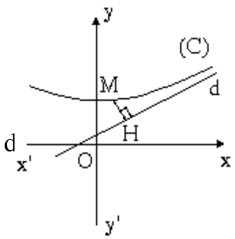
V. TIỆM CẬN

1) Định nghĩa :

a) Giả sử M(x;y)∈(C):y = f(x). Ta nói (C) có một nhánh vô cực nếu ít nhất một trong hai tọa độ x, y của điểm M(x;y) dần tới ∞. Khi đó ta cũng nói điểm M(x;y) dần tới ∞ (vì OM= $\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty$). Ký hiệu M→ ∞.

b) Giả sử đồ thị (C) có nhánh vô cực. Cho đường thẳng d.

Kí hiệu MH là khoảng cách từ điểm M(x;y)∈(C) đến đường thẳng d



d là tiệm cận của (C)⇔ $\lim\limits_{\substack{M\to\infty\\(M\in(C))}} MH=0$

2) Cách xác định tiệm cận của** (C): y = f(x) **:

1.Tiệm cận đứng :

Định lý :

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ thì d: x = x_0 là một tiệm cận đứng của (C)

Mở rộng :

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$) thì d: x = x_0 là một tiệm cận đứng bên trái (bên phải) của (C):y = f(x)

2.Tiệm cận ngang :

Định lý : Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=y_0$ thì d: y = y_0 là một tiệm cận ngang của (C)

Mở rộng : Nếu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$ (hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$) thì d: y = y_0 là một tiệm cận ngang bên trái (bên phải) của (C):y = f(x).

3.Tiệm cận xiên :

Định lý : Điều kiện ắt có và đủ để đường thẳng d:y = ax+b (a≠0) là một tiệm cận xiên của đồ thị (C) là :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

hoặc $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

Mở rộng :

- Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ thì d:y=ax+b (a≠0) là tiệm cận xiên bên phải của (C):y=f(x).
- Nếu $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ thì d:y=ax+b (a≠0) là tiệm cận xiên bên trái của (C):y=f(x).
- Nếu $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ thì d:y=ax+b (a≠0) là tiệm cận xiên hai bên của (C):y=f(x).

Cách tìm các hệ số a và b của đường tiệm cận xiên y = ax+b:

Tìm các giới hạn : a= $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ và b= $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$

Chú ý :

- Nếu a= $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ và b= $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$ thì d:y = ax+b (a≠0) là tiệm cận xiên bên trái của (C):y = f(x).
- Nếu a= $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ và b= $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$ thì d:y = ax+b (a≠0) là tiệm cận xiên bên phải của (C):y = f(x).

VI. KHẢO SÁT HÀM SỐ

A.Đường lối chung :

1.Tập xác định. Tính chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có) của hàm số.

2.Đạo hàm y': Để khảo sát tính đơn điệu, cực trị của hàm số.

3.Đạo hàm y'' : Để tìm các khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị.

4.Các giới hạn, tiệm cận của đồ thị (nếu có) hàm số.

5.Bảng biến thiên: Ghi chiều biến thiên và các kết quả của y', y.

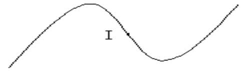
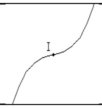
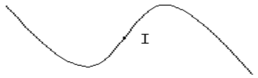
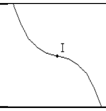
6.Giá trị đặc biệt : Thường cho x = 0 để tìm giao điểm của đồ thị với Oy (nếu có). Cho *y=0 để tìm các giao điểm của đồ thị với trục Ox (nếu có). ta có thể tìm thêm một vài điểm khác nữa.*

7.Vẽ đồ thị và nhận xét đồ thị : Nét vẽ mảnh, đẹp và đúng, đủ. Thể hiện đúng cực trị, điểm uốn , lồi, lõm, tiệm cận (nếu có) của đồ thị. Nhận xét tính chất đặc trưng của đồ thị.

B.Khảo sát và vẽ đồ thị :

I.Hàm số $y = f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq 0$) :

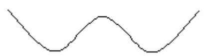
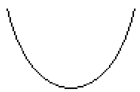
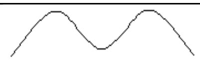
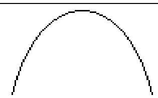
Dạng cơ bản của đồ thị :

Stt	Tính chất		Dạng
1	a>0	$y' = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2$	
2		$y' > 0$ (hoặc $y' \geq 0$)	
3	a<0	$y' = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2$	
4		$y' < 0$ (hoặc $y' \leq 0$)	

II. Hàm số $y = f(x) = ax^4+bx^2+c$ ($a\neq 0$) :

Dạng cơ bản của đồ thị :

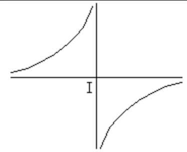
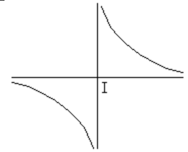
Đồ thị của hàm số $y = f(x) = ax^4+bx^2+c$ ($a\neq 0$) nhận Oy làm trục đối xứng và có 1 trong 4 dạng :

Stt	Hệ số		Tính chất	Dạng
1	a>0	b<0	3 cực trị, 2 điểm uốn	
2		b>0	1 cực trị, 0 điểm uốn	
3	a<0	b>0	3 cực trị, 2 điểm uốn	
		b<0	1 cực trị, 0 điểm uốn	

III.Hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (*Điều kiện: $ad-bc\neq 0$ và $c\neq 0$*) :

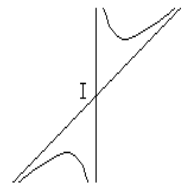
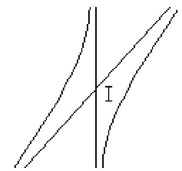
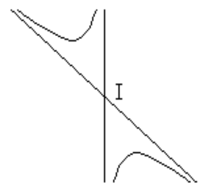
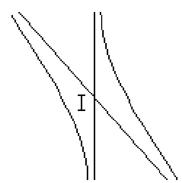
Dạng cơ bản của đồ thị :

Đồ thị của hàm số hữu tỉ 1/1 nhận giao điểm I của hai tiệm cận $x = -\dfrac{d}{c}$ và $y = \dfrac{a}{c}$ làm tâm đối xứng và có một trong hai dạng:

Stt	Hệ số	Tính chất	Dạng
1	$ad-bc > 0$	Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$ Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$	
2	$ad-bc < 0$		

IV. Hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$ (*Điều kiện:* $ax_0^2+bx_0+c\neq 0$ *với* $x_0 = -\dfrac{b'}{a'}$ *và* $a'\neq 0$)

Dạng cơ bản của đồ thị : Đồ thị của hàm số hữu tỉ 2/1 nhận giao điểm I của hai tiệm cận $x = -\dfrac{b'}{a'}$ và $y = \dfrac{a}{a'}x + p$ làm tâm đối xứng và có một trong bốn dạng:

Stt	Tính chất		Dạng
1	aa'>0	$y' = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2$	
2		$y' > 0$	
3	aa'<0	$y' = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2$	
4		$y' < 0$	

VII.CÁC BÀI TOÁN LIÊN HỆ ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ

1) **Bài toán 1:BIỆN LUẬN SỰ TƯƠNG GIAO CỦA 2 ĐƯỜNG.**

Cho hàm số y=f(x) có đồ thị là (C), hàm số y=g(x) có đồ thị là (C_1). Tìm số giao điểm của (C) và (C_1)

❖ Phương pháp:

- Viết phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C_1): f(x)=g(x) (1)
- Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của (C) và (C_1).
- Biện luận số nghiệm phương trình (1) suy ra số giao điểm của (C) và (C_1).

2) **Bài toán 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA (C) : y=f(x)**

A. *Phương trình tiếp tuyến: Của (C): y = f(x) tại $M_0(x_0;y_0)$ có dạng:*

$$y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1).$$

Viết được (1) là phải tìm x_0; y_0 và $f'(x_0)$.

Có 2 dạng tiếp tuyến tại điểm:

Dạng 1: Cho hoành độ x_0 (hoặc tung độ y_0) của tiếp điểm, từ phương trình $y_0 = f(x_0)$ tìm y_0 (hoặc x_0). Tìm $f'(x) \Rightarrow f'(x_0)$ rồi thay vào (1) để có phương trình tiếp tuyến.

Dạng 2: Cho hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0) = k$, từ đó tìm hoành độ x_0 của tiếp điểm từ phương trình $f'(x_0) = k \Rightarrow y_0 = f(x_0)$ rồi thay vào (1) để có phương trình tiếp tuyến.

Một số kiến thức cần nhớ:

- Nếu cho k là hệ số góc của tiếp tuyến thì $f'(x_0) = k$.
- Nếu tiếp tuyến song song (d): y = ax+b thì $f'(x_0) = k = a$.
- Nếu tiếp tuyến vuông góc (d): y = ax+b thì $f'(x_0) = k = -\frac{1}{a}$, $a\neq 0$
- Nếu tiếp tuyến tạo với Ox góc $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ thì $f'(x_0) = k = \pm \tan\alpha$.

B. Tiếp tuyến của (C) : y = f(x) di qua điểm $M_1(x_1; y_1)$:

1) Với (C): y = f(x) = ax^2+bx+c ($a\neq 0$) có đồ thị là 1 parabol:

Phương pháp :

- Gọi d là đường thẳng đi qua $M_1(x_1; y_1)$ và có hệ số góc k, phương trình d : $y = k(x - x_1)+ y_1$ (1).
- Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) : $ax^2+bx+c = k(x - x_1)+ y_1$
  Ta biến đổi phương trình này về phương trình bậc 2 ẩn x dạng :
  $$a_1x^2+b_1x+c_1 = 0 \qquad (2).$$
- d tiếp xúc (C) ⇔ phương trình (2) có nghiệm số kép :
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq 0 \\ \Delta = b_1^2 - 4a_1c_1 = 0 \end{cases}.$$
- Từ hệ điều kiện này ta tìm được k.
- Thay k tìm được vào (1) để có phương trình tiếp tuyến.

2) Với (C) : y = f(x) bất kỳ:

Phương pháp :

- Gọi d là đường thẳng đi qua $M_1(x_1; y_1)$ và có hệ số góc k, phương trình d : $y = k(x - x_1)+ y_1$ (1).
- d tiếp xúc (C) khi hệ sau có nghiệm : $\boxed{\begin{cases} f(x) = k(x - x_1) + y_1 \\ f'(x) = k \end{cases}}$

  Từ đây khử k ⇒ $f(x) = f'(x)(x-x_1)+y_1$ (phương trình hoành độ tiếp điểm)

  ⇒ các nghiệm $x = x_0$ (nếu có) và tính được k theo x_0.
- Thay k tìm được vào (1) để có phương trình tiếp tuyến tương ứng.

***Chú ý rằng**: Số tiếp tuyến phụ thuộc vào k (chứ không phụ thuộc vào x_0)*

3) **Bài toán 3: HỌ ĐƯỜNG CONG. BIỆN LUẬN SỐ ĐƯỜNG CONG ĐI QUA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH.**

a) Khái niệm : Cho hàm số y=f(x) trong đó ngoài biến x, có thêm chữ m ở các hệ số. Ký hiệu (C_m):y=f(x,m) với m là tham số. Khi m thay đổi ta có vô số đồ thị (C_m) và gọi chung là họ (C_m).

b) Có bao nhiêu đồ thị (C_m) đi qua $M_0(x_0;y_0)$ cho trước ?

❖ *Phương pháp:* Ta thực hiện các bước :

1) Thay tọa độ của $M_0(x_0;y_0)$ vào hàm số y=f(x,m) đưa đến một phương trình g(m)=0 (1).

2) Biện luận theo m số nghiệm của (1) : số nghiệm của (1) chính là số đồ thị (C_m) đi qua $M_0(x_0;y_0)$.

3) Nếu (1) có vô số nghiệm đối với m thì $M_0(x_0;y_0)$ trở thành một điểm cố định trong các điểm cố định (nếu có) mà (C_m) đi qua.

c) Tìm điểm cố định của (C_m):y=f(x,m):

❖ Phương pháp:

1) Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà (C_m):y=f(x,m) đi qua với mọi m .

2) Ta có $M_0(x_0;y_0)\in(C_m) \Leftrightarrow y_0=f(x_0,m) \Rightarrow g(m)=0$ (1).

3) Định các hệ số của (1) đồng thời bằng 0 để (1) có vô số nghiệm. Từ đó giải hệ phương trình tìm được x_0 và y_0 và kết luận về điểm cố định của (C_m).

4) **Bài toán 4: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM M(x;y)** (quỹ tích đại số) , trong đó x hoặc y có chứa tham số m.

❖ Phương pháp :

1) Tìm điều kiện của m để điểm M tồn tại.

2) Từ giả thiết bài toán, ta tìm tọa độ của điểm M(x;y) từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = g(m) \\ y = h(m) \end{cases} \quad (1)$$

- Từ điều kiện tồn tại điểm M và khử tham số m từ hệ (1) ta tìm được tập hợp (C) chứa M từ đó đi đến kết luận quỹ tích của M.