

Kì thi Olympic NĂM HỌC 2009 - 2010

Môn thi: TOÁN LỚP 11 Chuyên.

Ngày thi: 27/03/2010

Thời gian làm bài: 150 phút.

Bài số 1. Biết rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos 3x = a \sin 2x \\ \sin 3x = b \cos 4x \end{cases}$$

(với a, b là hai số hữu tỷ) có nghiệm.

Chứng minh khi đó $\sin 3x$ là số hữu tỷ.

Bài số 2. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B} + \frac{\cos B}{\cos C} + \frac{\cos C}{\cos A} \right)^2 \geq 8 \cos A \cos B \cos C$$

Bài số 3. Cho dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $u_n = \sqrt{\frac{1}{2^{2^1-1}}} \sqrt{\frac{1}{2^{2^2-1}}} \cdots \sqrt{\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}}} \sqrt{\frac{1}{2^{2^n-1}}}$.

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_1 u_2 \cdots u_n)$.

Bài số 4. Cho hình chóp S.ABCD có A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Các đoạn thẳng AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 có độ dài bằng nhau và cùng đi qua một điểm. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

Bài số 5. Phương trình $x + y + z + t = 98$ (với x, y, z, t là các số nguyên dương lẻ) có bao nhiêu nghiệm?

Giám thị không giải thích gì thêm.