Chú thích cho cuốn sách:

1. $a \not\equiv b$: a không đồng dư b
2. VT: vế trái của phương trình
3. VP: vế phải của phương trình.
4. $a = 8t - 1$: a có dạng $8t - 1$.
5. $a \neq 8t - 1$: a không có dạng $8t - 1$.
6. $2 \nmid a$: a không chia hết cho 2 hay 2 không là ước của a
7. $2|a$: a chia hết cho 2 hay 2 là ước của a.
8. $a \vdots 2$: a chia hết cho 2 hay 2 là ước của a.
9. $ƯCLN(a, b) = d$: d là ước chung lớn nhất của a và b
10. $(a, b) = 1$: a, b nguyên tố cùng nhau.
11. $(a_1; a_2; \dots; a_n) = 1$: $a_1; a_2; \dots; a_n$ nguyên tố cùng nhau

Chương 1: SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Đầu tiên, chúng ta sẽ nói một chút về một vài tính chất của số chính phương:

1.Những tính chất căn bản:

- Một vài điều về đồng dư:
  1. Nếu $a \equiv b, c \equiv d (mod\ m)$ thì $a \pm c \equiv b \pm d (mod\ m), ac \equiv bd\ (mod\ m)$.
  2. Nếu $a_1 \equiv b_1$(mod m), $a_2 \equiv b_2$(mod m), . ., $a_i \equiv b_i$ (mod m), …, $a_n b_n$(mod m) thì $a_1 a_2 \dots a_i \dots a_n \equiv b_1 b_2 \dots b_i \dots b_n (mod\ m)$.
  3. Nếu $a \equiv b$ (mod m) thì với mọi số nguyên không âm n, chúng ta có:$a^n \equiv b^n$(mod m).
  4. Nếu $ac \equiv bc\ (mod\ m), ƯCLN(c, m) = 1$ thì $a \equiv b\ (mod\ m)$.
  5. Nếu $ac \equiv bc\ (mod\ cm), c \neq 0$ thì $a \equiv b\ (mod\ m)$.

     Chứng minh:

     5. Từ $ac \equiv bc\ (mod\ cm)$, chúng ta được:$ac - bc \equiv 0$(mod cm) nên tồn tại số nguyên $k \neq 0$ sao cho $ac - bc = kcm$, hay $a - b = km$ hoặc $a \equiv b\ (mod\ m)$.
- Một vài đồng dư căn bản:

Cho bậc hai: Giả sử $n \in N$ và $n = x^2$ thì:

$$n = x^2 \equiv a \in \{0; 1\}\ (mod\ 3);$$
$$n = x^2 \equiv a \in \{0; 1\}\ (mod\ 4);$$
$$n = x^2 \equiv a \in \{0; 1; 4\}\ (mod\ 5);$$
$$n = x^2 \equiv a \in \{0; 1; 3; 4\}\ (mod\ 6);$$
$$n = x^2 \equiv a \in \{0; 1; 2; 4\}\ (mod\ 7);$$
$$n = x^2 \equiv a \in \{0; 1; 4\}\ (mod\ 8);$$

$n = x^2 \equiv a \in \{0; 1; 3; 4; 7\} \ (mod\ 9);$

$n = x^2 \equiv a \in \{0; 2; 3; 7; 8\} \ (mod\ 10);$

$n = x^2 \equiv a \in \{0; 1; 3; 4; 5; 9\} \ (mod\ 11);$

$n = x^2 \equiv a \in \{0; 1; 4; 9\} \ (mod\ 16);$

....

Cho bậc ba: Giả sử m $\in N$ và $m = b^3$ thì:
$m = b^3 \equiv \beta \in \{0; 1; 6\} \ (mod\ 7)$
$m = b^3 \equiv \beta \in \{0; 1; 3; 5; 7\} \ (mod\ 8)$
$m = b^3 \equiv \beta \in \{0; 1; 8\} \ (mod\ 9)$
$m = b^3 \equiv \beta \in \{0; 1; 5; 8; 12\} \ (mod\ 13)$

....

- *Giả sử $n \in N, n = x^2$ và n là chia hết cho số nguyên tố a thì n là chia hết cho a^2 hoặc:*
  Cho n là số chính phương, a nguyên tố: $a \mid n \Leftrightarrow a^2 \mid n$.
  Ngoài ra, ta cũng chú ý tới tính chất sau:
  Nếu $x^2 \equiv 1(mod\ p)$ với p nguyên tố thì $x \equiv \pm 1(mod\ p)$.
  Chứng minh:
  Điều này đúng cho $p = 2$. Xét trường hợp $p \neq 2$:
  Từ $x^2 \equiv 1(mod\ p)$ ta có: $(x+1)(x-1) \vdots p$ mà $\gcd(x+1; x-1) = d$ với $d|2, \gcd(p; 2) = 1$ nên phải có $(x+1) \vdots p$ hoặc $(x-1) \vdots p$ hay nói khác $x \equiv \pm 1(mod\ p)$.
  Ví dụ áp dụng: chứng minh hệ sau vô nghiệm với $x, y, z \in Z$: $\begin{cases} y^4 + 5 = 2x^3 \\ x^2 = 5z^2 + 1 \end{cases}$.
  Chứng minh: Từ $x^2 = 5z^2 + 1$ ta được $(x+1)(x-1) = 5z^2$ mà $\gcd(x+1; x-1) = d, d|2$. Do đó $x \equiv \alpha \in \{1; 4\}(mod\ 5) \Rightarrow 2x^3 \equiv \beta \in \{2; 3\}(mod\ 5)$ mà $y^4 \equiv \varepsilon \in \{0; 1\}(mod 5)$. Do đó, $y^4 + 5 = 2x^3$ không thể xảy ra. Do đó, hệ phương trình vô nghiệm.

Bài tập áp dụng:

1/ Chứng minh rằng $A = 7^{2n} + 5$ không thể là một số chính phương cho mọi số nguyên dương m.

Huớng dẫn: Giả sử $A = 7^{2n} + 5 = k^2$ thì $k^2 \equiv a \in \{0,1; 2; 4\} \ (mod\ 7\}$, mà $A = 7^{2n} + 5 \equiv 5 \ (mod\ 7)$. Vô lí!

2/Tồn tại hay không số chính phương rằng có tổng của các đơn vị là 537?

Huớng dẫn: Câu trả lời là không, chứng minh:

Giả sử n là số chính phương, n có tổng các đơn vị là 537.

Giả sử S(n) là tổng các đơn vị thì $S(n) = 537 = 59.9 + 6$

- ⇨ $n \equiv 6\ (mod\ 9)$ nên n không thể là số chính phương, trái với giả thiết rằng n là số chính phương và chúng ta có điều phải chứng minh.

3/ Tìm tất cả số nguyên dương x sao cho $x^2 + 4$ là tổng của hai số lẻ liên tiếp

Hướng dẫn: Giả sử $x^2 + 4 = n.(n+2)$ với n lẻ thì:

$$x^2 + 5 = (n + 1)^2$$

n lẻ nên $(n+1)^2$ là chia hết cho 4 => x lẻ => $x^2 \equiv 1$ (mod 4) , mà 5 ≡ 1(mod 4) => $(x^2 + 5) \equiv 2\ (mod\ 4)$, mà $(n + 1)^2 \equiv 0\ (mod\ 4)$.VL!

Nói tóm lại, chúng ta ko có số nguyên dương x để $x^2 + 4$ là tổng của hai số lẻ liên tiếp .

2.Một vài tính chất đặc biệt khác:

1: Với mọi số nguyên n:

- Không tồn tại số nguyên x thỏa mãn $n^2 < x^2 < (n + 1)^2$.
- Nếu $n^2 < x^2 < (n + 2)^2$ thì $x = n + 1$.

Ví dụ:

2: Nếu $xy = z^2$ và $(x, y) = 1$ thì x, y là số chính phương.

Chúng ta dùng tính chất này để chứng minh rằng:

3: không tồn tại hai số nguyên dương liên tiếp để tổng của chúng là số chính phương.

Chứng minh: Giả sử tồn tại hai số nguyên dương liên tiếp x và $x+1$ sao cho $x(x+1) = n^2$, thì:

x và $x+1$ nguyên tố cùng nhau, nên: $x = x'^2$; $x + 1 = y^2$ => $x'^2 + 1 = y^2$

- ⇨ $(y + x').(y - x') = 1$
- ⇨ $y + x' = y - x' = 1$
- ⇨ $x' = 0$
- ⇨ $x = x'^2 = 0$

Trái với giả thiết: x là số nguyên dương!

Ví dụ: Tìm 3 số tự nhiên liên tiếp số mà tổng của chúng là một số chính phương.

Hướng dẫn: Giả sử 3 số liên tiếp đó là $x - 1;\ x;\ x + 1$

Thì $(x - 1).x.(x + 1) = y^2$ (1)

Và: $(x;\ x - 1) = (x;\ x + 1) = 1.$ (2)

Giả sử ƯCLN$(x - 1; x + 1) = d$ thì $d \mid [(x - 1) + (x + 1)]$ => $d \mid 2$ => $d = 1$ $hay\ d = 2$.

- $d = 2$: $2|(x - 1)$ và $2|(x + 1)$ .Kết hợp với (1) và (2) chúng ta có: $x = a^2$; $x - 1 = 2b^2$; $x + 1 = 2c^2$với $a, b, c \in Z$, a, b, c nguyên tố cùng nhau => $2c^2 - 2b^2 = 2$ => $(c + b).(c - b) = 1$

⇨ $c = 1$; $b = 0$ => $x - 1 = 0$.

⇨ 3 số cần tìm là 0; 1 ;2.

- d = 1 nên $(x - 1) = u^2$; $x = v^2$; $x + 1 = t^2$. tương tự d = 2, chúng ta tìm được 3 số là 0; 1; 2.
  Nói tóm lại, 3 số cần tìm là 0; 1 ;2.

Bài tập:

Đặt x, y, z là the số nguyên dương.Chứng minh: $(xy + 1).(yz + 1).(zx + 1)$ là a số chính phương nếu và chỉ nếu$(xy + 1)$; $(yz + 1)$; $(zx + 1)$ là số chính phương.

Chương 2: TỔNG CỦA HAI SỐ CHÍNH PHƯƠNG.

1) Sơ lược:

Trong chương này, chúng ta sẽ học cách biểu diễn một số nguyên dương dưới dạng tổng của hai số chính phương (nếu có thể).

Trước hết, chúng ta sẽ nói về tìm hiểu xem: những số nguyên dương nào có thể được viết thành dạng tổng hai bình phương hay nói cách khác là tìm n để phương trình $x^2 + y^2 = n$ *với* $n \in N$ có nghiệm nguyên .

Định lý 2.1:

"Nếu p nguyên tố thì p là tổng của hai nguyên số chính phương khi và chỉ khi $p \neq 4k+3$ (k$\in Z$)."

<u>*Chứng minh*</u>: giả sử phương trình $x^2 + y^2 = p$ có nghiệm nguyên $(x;\ y)$. Chúng ta biết rằng $g \equiv a \in \{0;1\}(mod\ 40) \Rightarrow (x^2 + y^2) \equiv b \in \{0;1;2\}(mod\ 4)$, nên $p \neq 4k + 3, k \in Z$.

Bây giờ, chúng ta giả sử $p \neq 4k+3, k \in Z$. Nếu $p = 2$ thì $(1;\ 1)$ là 1 nghiệm. Bây giờ, xét $p = 4k+1, k \in Z$. Vì -1 không là một số chính phương (mod p) nên tồn tại a $\in Z$ để $a^2 \equiv -1\ (mod\ p)$. Đặt $q = |\sqrt{p}|$. Xét $(q+1)^2$ số $\{x+ay\}, x = 0,1,\dots,q;\ y = 0,1,\dots,q$. Vì $(q+1)^2 > p$ nên tồn tại $x_1 + ay_1 \equiv x_2 + ay_2\ (mod\ p)$

⇨ $(x_1 - x_2) \equiv a(y_2 - y_1)$ (mod p) => u² $\equiv a^2v^2 \equiv -v^2(mod\ p)$

⇨ $u^2 + v^2 \equiv 0(mod\ p)$ với u = $|x_1 - x_2| \leq q < \sqrt{p}$;

v = $|y_2 - y_1| \leq q < \sqrt{p}$. Nên $p|\ u^2 + v^2$. Vì 0 < u² $+v^2 < p + p = 2p$ thì u² $+v^2 = p^2$

<u>Một vài điều cần biết:</u>

Với $m = a^2 + b^2, n = c^2 + d^2$:

$$mn = (a^2 + b^2).(c^2 + d^2) = (ac+bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

- ✓ Nếu p là một số nguyên tố dạng $p = 4k + 3$ và (a,b) = 1 thì $a^2 + b^2$ không chia hết cho p, nên: Nếu một số nguyên dương rằng có phân tích dạng chuẩn tắc là $p_1^{a_1}.p_2^{a_2}\dots.p_k^{a_k}$ với $p_1, p_2,\dots, p_k$ là số nguyên tố và $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các số nguyên dương thì phương trình $p = x^2 + y^2$ không có nghiệm nguyên nếu phân tích chuẩn tắc của số nguyên đó có chứa nhân tử $q = (4t+3)^{2r+1}$ với $4t + 3$ là số nguyên tố.

Định lý 2.2:

Giả sử x, y, z, t là các số nguyên dương thỏa $xy = z^2 + t^2, \gcd(z,t) = 1$. Khi đó tồn tại các số a, b, c, d sao cho $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2$ và $z = ac + bd, t = ad - bc$. (*)

Chứng minh:

Giả sử mệnh đề trên đúng với mọi $z^2 + t^2 < z_0^2 + t_0^2$, và chúng ta cần chứng minh MĐ cho $(x,y,z,t) = (x_0,y_0,z_0,t_0)$ với $x_0y_0 = z_0^2 + t_0^2$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_0 \leq y_0; t_0 \leq z_0$. Xét bộ ba $(x_1,y_1,z_1,t_1) = (x_0, x_0 + y_0 - 2z_0, z_0 - x_0; t_0) \Rightarrow (x_0,y_0,z_0,t_0) = (x_1; x_1 + y_1 + 2z_1; x_1 + z_1; t_1)$.

Trước hết, ta thấy $x_0y_0 = z_0^2 + t_0^2$, dễ kiểm tra được rằng x_1, y_1, z_1, t_1 thỏa $xy = z^2 + t^2$.

Tiếp theo, ta chứng minh $x_1, y_1, > 0$.

Điều này là hiển nhiên đúng cho x_1. Ta chú ý $y_1 = x_0 + y_0 - 2z_0 \geq 2\sqrt{x_0y_0} - 2z_0 > 2z_0 - 2z_0 = 0$.

Lại có: $x_0y_0 = z_0^2 + t_0^2$ mà $x_0 \leq y_0; t_0 \leq z_0$. Do đó: $x_0^2 \leq 2z_0^2 \Longrightarrow x_0^2 \leq 4z_0^2 \Longrightarrow x_0 \leq 2z_0$.

Từ $x_0 \leq 2z_0$, ta chứng minh được $z_1^2 + t_1^2 \leq z_0^2 + t_0^2$ mà theo giả thiết thì mệnh đề (*) đúng với mọi $z^2 + t^2 < z_0^2 + t_0^2$. Do đó, tồn tại a, b, c, d sao cho:

$$x_1 = a^2 + b^2; y_1 = c^2 + d^2; z_1 = ac + bd; t_1 = ad - bc.$$

Từ đó có: $x_0 = a^2 + b^2; y_0 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd;$

$$z_0 = a^2 + b^2 + ac + bd; t_0 = ad - bc.$$

Suy ra: $x_0 = a^2 + b^2; y_0 = (a + c)^2 + (b + d)^2$

$$z_0 = a(a + c) + b(b + d); t_0 = a(b + d) - b(a + c).$$

Tức là $x_0; y_0; z_0; t_0$ cũng có dạng $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2$ và $z = ac + bd, t = ad - bc$ hay nói cách khác, mệnh đề (*) đúng với $x_0; y_0; z_0; t_0$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. ☺

Ta chú ý: Trong định lí trên, ta chưa bắt buộc a, b, c, d phải nguyên dương. Do đó, nếu muốn bắt buộc là chúng phải nguyên dương thì ta phải viết lại bài toán trên như sau: Định lý 2.2:

Giả sử x, y, z, t là các số nguyên dương thỏa $xy = z^2 + t^2, \gcd(z, t) = 1$. Khi đó tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d sao cho $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2$ và $z = ac + bd, t = ad - bc$ hoặc $z = ac - bd; t = ad + bc$.

định lí trên cũng có thể hiểu như sau:

Nếu x, y là hai số nguyên sao cho

$$x = a^2 + b^2; y = c^2 + d^2$$

thì tất cả các cách biểu diễn tích x, y thành tổng hai bình phương có thể được tìm bởi công thức:

$$xy = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2;$$

$$xy = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2;$$

Từ những nhận định trên, chúng ta rút ra cách phân tích một số nguyên dương thành tổng của hai bình phương (nếu có thể).

1) Nếu p là số nguyên tố:

Dĩ nhiên , ở đây , phương trình $p = x^2 + y^2$ có nghiệm Khi và chỉ khi $p = 4k + 1$, k ∈ Z. Chúng ta sẽ giải phương trình này bằng đồng dư thức, giới hạn miền nghiệm,....

Ví dụ: giải phương trình : $x^2 + y^2 = 881$

Hướng dẫn: Giả sử x, y đều không chia hết cho 5 thì $t^2\ (t = x \vee y) \equiv a \in \{1; 4\}$ (mod 5) nên $x^2 + y^2 \equiv b \in \{0; 2; 3\}\ (mod\ 5)$, mà $881 \equiv 1 (mod\ 5)$. Vô lí! Do đó , ở đây, ta phải có x hoặc y chia hết cho 5, giả sử $x \vdots 5$ thì $0 \leq x < 30$ (vì $30^2 > 881$). Do đó, $x \in \{0; 5; \ldots; 25\}$. Bằng cách thử, chúng ta có một nghiệm $(x; y) = (25; 16)$.

Nói tóm lại, phương trình có hai nghiệm: $(x, y) = (25; 16); (16; 25)$.

Định lý 2.2: Phương trình $p = x^2 + y^2$ với p là số nguyên tố, $p = 4k + 1, k \in Z$ có một và chỉ một nghiệm trên N (không tính đảo vị của nó).

Chú ý: *Từ định lý này, chúng ta rút ra một kinh nghiệm: khi chúng ta đã tìm thấy một nghiệm của phương trình* $p = x^2 + y^2$ *, chúng ta không cần thử các trường hợp khác vì phương trình chỉ có duy nhất một nghiệm.*

Chúng ta sẽ trở lại chứng minh định lý này trong chương tiếp theo.

2)Nếu p không nguyên tố:

Chúng ta có 3 bước:

1. Viết số nguyên đó dưới dạng : p = $(q_1^{2a_1}.q_2^{2a_2} \ldots .q_h^{2a_h}).(p_1.p_2 \ldots p_k)$ với $q_1, q_2, \ldots, q_h$ là các số nguyên tố có dạng $4d + 3$ và $p_1, p_2, \ldots, p_k$ nguyên tố rằng có dạng $4d + 1$.
2. Biểu diễn $p_1, p_2, \ldots, p_k$ dưới dạng của tổng của hai số chính phương.
3. Dùng đẳng thức $mn = (a^2 + b^2).(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

Ví dụ: Biểu diễn những số thành tổng 2 số chính phương:

∗ 392

$392 = 7.56$ nhưng 7 nguyên tố và $7 = 4.1 + 3$ nên 392 không thể biểu diễn được dưới dạng tổng 2 số chính phương

∗ 221

$$221 = 17.13 = (1^2 + 4^2).(2^2 + 3^2)$$

$$= (1.2 + 4.3)^2 + (1.3 - 2.4)^2 = 14^2 + 5^2$$

$$= (1.3 + 4.2)^2 + (1.2 - 3.4)^2 = 11^2 + 10^2.$$

Nói tóm lại, $221 = 14^2 + 5^2 = 11^2 + 10^2$.

∗ 1225

$1225 = 7^2.5.5$

Mà, 7 nguyên tố có dạng $4t + 3$ và

$5.5 = (1^2 + 2^2).(1^2 + 2^2)$

$$= (1.1 + 2.2)^2 + (1.2 - 2.1)^2 = 5^2 + 0^2$$

$$= (1.2 + 2.1)^2 + (1.1 - 2.2)^2 = 4^2 + 3^2.$$

do đó, $1225 = 7^2.5.5 = 35^2 + 0^2 = 28^2 + 21^2$.

4. **Định lý 2.3**:(Định lý về số cách biểu diễn một số nguyên không âm thành tổng của hai bình phương (nếu có thể) :Nếu p là một số nguyên dương có thể biểu diễn thành dạng tổng của hai bình phương ; $p = (q_1^{2a_1}.q_2^{2a_2} \dots . q_h^{2a_h}).(2^m p_1.p_2.\dots.p_n)$ với $q_1, q_2, \dots, q_h$ là các số nguyên tố có dạng $4d+3$ và $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các số nguyên tố có dạng $4d+1$, $p_1, p_2, \dots, p_n$ là các số nguyên tố có dạng $4d+1; p_1, p_2, \dots, p_n$ khác 2; $\delta(p)$ là số của cách để biểu diễn p dưới dạng của tổng của hai số chính phương thì: $\delta(p) = 2^n$.

Chứng minh:

Thứ nhất, ta thấy với $q_i, i = 1,2,\dots,n,$ q_i nguyên tố dạng $4d+3$ thì chỉ có một cách để biểu diễn số $j = gq_i^{2a_i}$ với g là số nguyên tố có dạng của $4d+1, g = g_1^2 + g_2^2$ thành tổng 2 số chính phương là $j = (q_i^{a_i} g_1)^2 + (q_i^{a_i} g_2)^2$.

Tiếp theo, ta biết rằng $z = u^2 + v^2$ với z nguyên tố , $(u; v) = 1$ có $u = v$ nếu $u = v = 1$; $z = 2$ hoặc $2 = 1^2 + 1^2$. Thì tích gz với $g = c^2 + d^2; (c, d) = 1$ là $g = (c^2 + d^2).(1^2 + 1^2) = (c+d)^2 + (c-d)^2$

⇨ Chỉ có một cách để biểu diễn $k = gz$ thành tổng 2 số chính phương hay nói cách khác: $\delta(2^m p_1.p_2.\dots.p_n) = \delta(p_1.p_2.\dots.p_n)$ (2.3.1)

Bây giờ, chúng ta đitính $\delta(p_1.p_2.\dots.p_n)$.

Đặt $p_i = a_i^2 + b_i^2;\ i = 1, 2, 3, \dots, n$
từ the định lý 2.2, chúng ta có: vì p_i nguyên tố nên sự tồn tại của a_i và b_i là duy nhất.
Chúng ta có: $p_i = a_i^2 + b_i^2;\ p_{i+1} = a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2$

⇨ $p_i.p_{i+1} = (a_i^2 + b_i^2).(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)$

$$= (a_1a_2 + b_1b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$= (a_1b_2 + a_2b_1)^2 + (a_1a_2 - b_1b_2)^2$$

⇨ Nếu $n = 2$ thì $\delta(p) = 4 = 2^2$
⇨ $p_i.p_{i+1}.p_{i+2}$ có $4.2 = 2^3$ cách cho n = 3
⇨ $p_i.p_{i+1}.p_{i+2}.p_{i+3}$ có $2^3.2 = 2^4$ cách.
⇨ ...
⇨ Cho $n = k$, chúng ta có 2^n cách. (2.3.2)
Từ (2.3.1) và (2.3.2) chúng ta điều phải chứng minh.

4) Bài:

1.Viết những số sau dưới dạng của tổng của hai số chính phương:

52; 2378; 1105; 5066;

40009; 170; 1993;

Hướng dẫn:

- $52 = 4^2 + 6^2$

• $170 = 13^2 + 1^2 = 7^2 + 11^2$

• $1105 = 5.13.17 = 23^2 + 24^2 = 32^2 + 9^2 = 33^2 + 4^2 = 31^2 + 12^2$

• $2378 = 43^2 + 23^2 = 47^2 + 13^2$

• $5066 = 71^2 + 5^2 = 65^2 + 29^2$

• $1961 = 40^2 + 19^2 = 44^2 + 5^2$

2.Giải:

$a)\ x^2 + y^2 = 18818$

$b)\ x^2 + y^2 = 5825$

Hướng dẫn:

a) $18818 = 97^2.2 = (4^2 + 9^2).(4^2 + 9^2).2 = 97^2 + 97^2 = 7^2 + 137^2$.

b) $5825 = 25.233$

mà $25 = (1^2 + 2^2).(1^2 + 2^2) = 5^2 + 0^2 = 3^2 + 4^2$

nên $5825 = (5^2 + 0^2).(3^2 + 4^2).(13^2 + 8^2) = 65^2 + 40^2 = 28^2 + 71^2 = 7^2 + 76^2$.

3. Giải phương trình với positive nghiệm nguyên:

$a)\ 10x^2 + 53y^2 + 38xy = 1765$

$b)\ 97x^2 + 29y^2 - 106xy = 1481$

$c) x^2 + 2xy + 2y^2 = 241$

*Hướng dẫn:*a) $10x^2 + 53y^2 + 38xy = 1765$ (1)

Chú ý rằng $10 = 1^2 + 3^2$; $53 = 7^2 + 2^2$; $38 = 2(7.3 - 2.1)$ và chúng ta cũng có equality: $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = (a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy$. Nên:

(1)⇔ $(3x + 7y)^2 + (x - 2y)^2 = 1765 = 5.353 = (1^2 + 2^2)(8^2 + 17^2)$

$$= 1^2 + 42^2 = 26^2 + 33^2.$$

$x, y > 0 \Rightarrow 3x + 7y > x - 2y$. Nên:

$\begin{cases} 3x + 7y = 42 \\ x - 2y = \pm 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 3x + 7y = 33 \\ x - 2y = \pm 26 \end{cases}$

By nênlving những systems của phương trình, chúng ta tìm out the only nghiệm của (1) là $(x;\ y)\ =\ (7;\ 3)$.

$b)\ 97x^2\ +\ 29y^2\ -\ 106xy\ =\ 1481$

$\Leftrightarrow\ (4x-2y)^2+(9x-5y)^2=1481$

mà, 1481 nguyên tố, $1481\ =\ 35^2+16^2$

$c)x^2+2xy+2y^2=241$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2+y^2=241$$

Mà, $241\ =\ 15^2+4^2$

4.Giải: $n.(n+1).(n+2).(n+3)\ +\ m(m+2m)=17520$ in Z.

Huóng dẫn: phương trình $\Leftrightarrow\ (n^2\ +3n\ +1)^2\ +\ (m+1)^2\ =\ 17522\ =\ 2.8761\ =\ 2.(56^2\ +75^2)\ =\ 19^2\ +\ 131^2$.

phương trình có 8 bộ nghiệm :
$(n;m)=$
$(3;\ 130);\ (-6;\ 130);\ (3;\ -132);\ (-6;-132);\ (10;\ 18);\ (-13;\ 18);\ (10;\ -20);\ (-13;\ -20)$.

5. Giải: $A\ =\ 1.2.3\ +2.3.4+\ldots.+k.(k+1).(k+2)\ +\ (m^2+2).(m^2+4).(m^2+6).(m^2+8)\ =\ 54\,629\,835$ trên Z.

Huóng dẫn: Đặt $S\ =\ 1.2.3\ +2.3.4+\ldots.+k.(k+1).(k+2)$

thì $4S\ +1\ =\ k.(k\ +1).(k+2).(k+3)\ +1\ =\ (k^2\ +\ 3k\ +1)^{\ 2}$

Đặt $P\ =\ (m^2+2).(m^2+4).(m^2+6).(m^2+8)$

thì $P\ +\ 2^4\ =\ (m^4\ +\ 5m^2.2\ +\ 5.2^2)^2\ =\ (m^4\ +\ 10m^2\ +\ 20)^2$

Do đó: $4A\ =\ 4S\ +\ 1\ +\ 4.(P\ +\ 2^4)\ -\ 65$

$=\ 54\,629\,835$

$$\Leftrightarrow (k^2\ +\ 3k\ +1)^{\ 2}\ +\ 4.(m^4\ +\ 10m^2\ +\ 20)^2\ =\ 218\,519\,405$$

6. Giải: $x^2\ +\ y^2+z^2\ -\ 2yz\ =\ 12\,322$ on N

Huóng dẫn: phương trình $\Leftrightarrow$ $(\ x-\ y\ +z)^{\ 2}\ +\ (x+y-\ z)^{\ 2}\ =12322\,.\,2$

Mà, $12322\,.\,2\ \ =\ 61.101.4\ =\ (5^2+6^2).(1^2\ +10^2).2^2$

$$=\ 130^2\ +\ 88^2\ =\ 110^2\ +\ 112^2$$

7. Giải: $x^2\ =\ 2y^3\ +21$ on Z.

Huớng dẫn: phương trình ⇔ $x^2 + (y^3 - 1)^2 = y^6 + 22$

Chúng ta consider rằng: x là alcách lẻ, thì: $x^2 \equiv 1 \ (mod\ 8)$

Nếu y chẵn thì $y^3 - 1$ lẻ => $(y^3 - 1)^2 \equiv 1(mod\ 8)$. Do đó:

$x^2 + (y^3 - 1)^2 \equiv x^2 + (y^3 - 1)^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2\ (mod\ 8)$

Trong khi đó $y^6 + 22 \equiv y^6 + 22 \equiv 6\ (mod\ 8)$ .VL!

Thì y lẻ => $y^6 \equiv 1\ (mod\ 4)$ => $y^6 + 22$ có the dạng của 4k +3 nên it không thể be biểu diễned thành tổng 2 số chính phương trong khi đó the left –hvà side của phương trình có the dạng của tổng của hai số chính phương. VL!

Do đó, phương trình trên có no nghiệm nguyên.

8. Chứng minh rằng phương trình $(y^2 - 1)^3 = b^2 + 1$ không có nghiệm nguyên dương.

Huớng dẫn:

Chúng ta xem rằng Nếu b lẻ thì $(y^2 - 1)^3 \vdots 2\ then\ (y^2 - 1)^3 \vdots 8\ while\ b^2 + 1 \equiv 2(\ mod\ 8)$

$\Rightarrow VT \not\equiv VP\ , VL.$

Nên b chẵn $\Rightarrow y$ chẵn .

$(y^2 - 1)|(b^2 + 1)$ nên theo nhưĐịnh lý 2.4, tở đây 's exlàt c, d sao cho $y^2 - 1 = c^2 + d^2 or\ y^2 = c^2 + d^2 + 1.$

$c^2 \equiv \alpha \in \{0; 1\}(mod\ 4), d^2 \equiv \beta \in \{0; 1\}(mod\ 4) \Rightarrow c^2 + d^2 + 1 \equiv \gamma \in \{1; 2; 3\}(mod\ 4)$

trong khi đó y chẵn nên $y^2 \equiv 0(mod\ 4) \Rightarrow VT \not\equiv VP\ , VL.$

Chú ý: Chúng ta có thể cũng chứng minh như sau:

Tương tự để the trên, chúng ta có b và y chẵn .

Thì $y^2 \equiv 0(mod\ 4) \Rightarrow y^2 - 1 \equiv 3(mod\ 8) \Rightarrow (y^2 - 1)^3 \equiv 3^3 \equiv 3(mod\ 8)\ while\ b^2 + 1 \equiv \delta \in \{1; 5\}(mod\ 8)$

$\Rightarrow VT \not\equiv VP\ , VL.$

9. Chứng minh rằng phương trình $y^3 = b^2 - 7$ không có nghiệm nguyên dương.

Huớng dẫn: Chú ý rằng Nếu y chẵn thì b lẻ nên $y^3 \vdots 8\ while\ b^2 - 7 \equiv 1 - 7 \equiv -6 \equiv 2(mod\ 8)$, vô lí.

Nên y chẵn .

Viết lại phương trình as: $(y + 2)(y^2 - 2y + 4) = b^2 + 1.$ (*)

Thì, $(y + 2)|(b^2 + 1)$, từ Định lý 2.4, chúng ta được rằng: tồn tại $c, d \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$y+2=c^2+d^2.$ $Check\ that\ c^2+d^2 \equiv \alpha \in \{1,5\}(mod\ 8) \Rightarrow y \equiv \beta \in \{3,7\}(mod\ 8) \Rightarrow y^2 \equiv 1(mod\ 8)v$à $2y \equiv 6(mod\ 8) \Rightarrow y^2-2y+4 \equiv -1 \equiv 7(mod 8).$ (**)

Nhưng, từ $(*)$, chúng ta cũng được: $(y^2-2y+4)|(b^2+1)$, nên tồn tại $e, f \ \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $y^2-2y+4=e^2+f^2$ và check rằng $e^2 \equiv \gamma \in \{0;1;4\}(mod\ 8); d^2 \equiv \delta \in \{0;1;4\}(mod\ 8) \Rightarrow e^2+f^2 \equiv \varepsilon \in \{0;2;5\}\ (mod\ 8)$, trái với (**).

Do đó, phương trình $y^3=b^2-7$ không có nghiệm nguyên dương.

10/(Bài toán Euler)

Giả sử x, y, z là các số nguyên dương thỏa $xy = z^2 + 1$. Chứng minh rằng : tồn tại các số a, b, c, d sao cho $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2$ và $z = ac + bd$.

Chứng minh:

Giả sử mệnh đề trên đúng với mọi $z < z_0$, và chúng ta cần chứng minh MĐ cho $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ với $x_0y_0 = z_0^2 + 1$. Giả sử $x_0 \leq y_0$. Xét bộ ba $(x_1, y_1, z_1) = (x_0, x_0 + y_0 - 2z_0, z_0 - x_0)$ $\Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (x_1; x_1 + y_1 + 2z_1; x_1 + z_1)$.

Trước hết, ta thấy $x_0y_0 = z_0^2 + 1$, dễ ktr được rằng x_1, y_1, z_1 thỏa $xy = z^2 + 1$.

Tiếp theo, ta chứng minh $x_1, y_1, z_1 > 0$.

Điều này là hiển nhiên đúng cho x_1. Ta chú ý $y_1 = x_0 + y_0 - 2z_0 \geq 2\sqrt{x_0y_0} - 2z_0 > 2z_0 - 2z_0 = 0$. Lại có $x_0 \leq y_0$ và $x_0y_0 = z_0^2 + 1$ nên $x_0 \leq \sqrt{z_0^2 + 1} \Rightarrow x_0 < z_0$.

Do đó, (x_1, y_1, z_1) thỏa $xy = z^2 + 1$ với $z < z_0$. Theo giả thiết , có thể viết $x_1 = a^2 + b^2$; $y_1 = c^2 + d^2$; $z_1 = ac + bd$ thì :

$$(ac + bd)^2 = z_1^2 = x_1y_1 - 1$$
$$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - 1$$
$$(ac + bd)^2(ad - bc)^2 - 1$$

Suy ra $|ad - bc| = 1$

Ta lại chú ý $x_0 = x_1 = a^2 + b^2$, $y_0 = x_1 + y_1 + 2z_1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) = (a + c)^2 + (b^2 + d^2)$. Nói cách khác, ta có thể viết: $x_0 = a'^2 + b'^2$ và $y_0 = c'^2 + d'^2$ với $(a', b', c', d') = (a, b, a + c, b + d)$. Khi đó, $|a'd' - b'c'| = |ad - bc| = 1$. Điều này chứng tỏ $z_0 = a'c' + b'd'$ và ta thu được điều phải chứng minh . ☺

Bài 11:

Nếu số nguyên dương biểu diễn được dưới dạng tổng hai bình phương $x = a^2 + b^2$ với $(a, b) = 1$ thì tồn tại các số nguyên y, z sch $xy = z^2 + 1$.

Hướng dẫn :

Bổ đề 2.1:(The Định lý về sự tồn tại nghiệm nguyên của phương trình bậc một hai ẩn) Phương trình $ax + by = c$ $(a \neq 0, b \neq 0;\ a, b, c\ \in Z$ có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $ƯCLN(a;\ b)|c$.

Chứng minh: Giả sử $(x_0;\ y_0)$ là bộ nghiệm của phương trình, thì $ax_0 +\ by_0 = c$. Nếu $ƯCLN(a;\ b)\ = d$ thì $d \mid ax_0 +\ by_0 = c$. Mặt khác, giả sử $d\ =\ (a;\ b) \mid c$ thì $c = dc_1$ và chúng ta có hai số nguyên $x_1;\ y_1$thỏa mãn $d = ax_1 +\ by_1 \Rightarrow dc_1 = a(a_1c_1) + b(y_1c_1) = c$ và phương trình có nghiệm nguyên. ☺

Chứng minh:

Xét phương trình bậc nhất 2 ẩn với nghiệm nguyên $bm - an = 1$ với hai ẩn m, n. Theo giả thiết, $(a, b) = 1$ nên theo định lí về sự tồn tại phương trình này luôn có nghiệm nguyên . Do vậy, luôn tồn tại 2 số nguyên m, n sch $bm - an = 1$.

Khi đó, $(bm - an)^2 = 1$

$$\Rightarrow b^2m^2 + a^2n^2 - 2abmn = 1$$

$$\Rightarrow a^2m^2 + b^2n^2 + b^2m^2 + a^2n^2 - 2abmn = a^2m^2 + b^2n^2 + 1$$

$$\Rightarrow a^2m^2 + b^2n^2 + b^2m^2 + a^2n^2 = 2abmn + a^2m^2 + b^2n^2 + 1$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)(m^2 + n^2) = (am + bn)^2 + 1$$

Đặt $y = m^2 + n^2; z = am + bn$ thì: $(a^2 + b^2)y = z^2 + 1$ hay :

$$xy = z^2 + 1$$

Và ta có điều phải chứng minh. ☺

Chương 3:

BIỂU DIỄN SỐ NGUYÊN THÀNH TỔNG CỦA N BÌNH PHƯƠNG (N≥ 3).

A. TỔNG CỦA BA BÌNH PHƯƠNG:

Sau khi xét việc tách một số nguyên dương thành tổng của hai bình phương nguyên dương, ta đi xét cho 3 số, tức phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = n$ có nghiệm $x, y, z \in N$.

Định lí 3.1: Nếu n có dạng $n = 4^m(8k+7)$ với $m,k \in N$ thì n không biểu diễn được thành tổng của ba bình phương.

Cm: Giả sử ngược lại, $n = 4^m(8k+7) = x^2 + y^2 + z^2$.

$x^2 \equiv a \in \{0;1;4\} \pmod 8 \Rightarrow n = x^2 + y^2 + z^2 \equiv a \in \{0;1;2;3;4;5;6\} \pmod 8$. Nếu $m > 0$ thì $n \equiv 0 \pmod 4$, do đó $x^2 + y^2 + z^2 \equiv a \in \{0;4\} \pmod 8$ $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod 4$. Vì $x^2 \equiv a \in \{0;1\} \pmod 4$ nên $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 0 \pmod 4$ suy ra $x = 2x_1$; $y = 2y_1$; $z = 2z_1 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \equiv 4^{m-1}(8k+7)$. Tiếp tục như vậy sẽ dẫn đến $x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = 8k+7 \equiv 7 \pmod 8$.

Mâu thuẫn.

Định lí 3.2 : Số nguyên dương n biểu diễn được thành tổng của ba bình phương khi và chỉ khi $n \neq 4^m(8k+7)$ với $m,k \in N$

Định lí 3.3: Giả sử n = p là số nguyên tố. Khi đó,p biểu diễn được thành tổng của ba bình phương khi và chỉ khi p = 2 hoặc $p \equiv 1, 3 \pmod 3$.

- Cách tách 1 số nguyên dương thành tổng 3 bình phương (nếu được):
  - Dùng đồng dư, biện luận để xét 3 số x, y, z có tính chia hết như thế nào.

- Tách, lấy ra một số chính phương (trừ ra) từ số n cho trước.
- Tách số còn lại thành tổng của hai bình phương.

Ví dụ: Tách 515 thành tổng của ba bình phương

Ta có: nếu x, y, z đều không chia hết cho 5 thì $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv a \in \{1; 4\}$ (mod 5) suy ra $x^2 + y^2 + z^2 \equiv a \in \{1; 4\}$ (mod 5) mà 515 chia hết cho 5. Vô lí! Vậy trong 3số, phải có ít nhất 1 số chia hết cho 5. Giả sử đó là x thì $0 \le x \le 20$ vì $25^2 > 515$. Ta lần lượt xét các giá trị x chia hết cho 5 trong khoảng đó:

- $515 = 0 + 515 = 0 + 5.103$: 103 *nguyên tố dạng* $4t + 3$ (*loại*).
- $515 = 5^2 + 490 = 5^2 + (1^2 + 3^2).7^2 = 5^2 + 7^2 + 21^2$.
- $515 = 15^2 + 290 = 15^2 + (1^2 + 3^2).(2^2 + 5^2)$
  $= 15^2 + 13^2 + 11^2 = 15^2 + 17^2 + 1^2$
- $515 = 20^2 + 115 = 20^2 + 5.23$: 23 *nguyên tố dạng* $4k + 3$ (*loại*).
  Vậy $515 = 5^2 + 7^2 + 21^2 = 15^2 + 13^2 + 11^2 = 15^2 + 17^2 + 1^2$

Bài tập:

1. Giải phương trình:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 701$

HD: Xét đồng dư mod 4 và mod 3 ta chứng minh được: trong 3 số trên, có ít nhất 2 số chia hết cho 2, 2 số chia hết cho 3 suy ra có ít nhất 1 số chia hết cho 6. Giả sử đó là x:

- $701 = 6^2 + 665 = 6^2 + 5.7.19$ (loại).

- $701 = 12^2 + 557 = 12^2 + 14^2 + 19^2$

- $701 = 18^2 + 377 = 18^2 + 4^2 + 19^2$

- $701 = 24^2 + 125 = 24^2 + 5^2 + 10^2$

2. Giải phương trình:

a) $3x^2 + 5y^2 = 18\,572$

b) $3x^2 + 42y^2 = 9\,668\,979$

HD:

a) Pt ⇔ $(x+2y)^2 + 2.(x - y)^2 = 18572$

- $(x+2y)^2$ chẵn. Ta đi giải phương trình: $a^2 + 2b^2 = 4643$ với $a = (x+2y)/2$; $b = (x - y)/2$.
  Xét đồng dư mod 7 ta được a hoặc b chia hết cho 7. Bằng phương pháp thử, ta được phương trình $a^2 + 2b^2 = 4643$ vô nghiệm suy ra pt ban đầu vn.

  b) Pt ⇔ $(x - 5y)^2 + (x + y)^2 + (x + 4y)^2 = 9\,668\,979$
  *V*à $9\,668\,979 = 9.59.131.139$.

3. Tìm x, y, z sao cho:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2007$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 7002$

(mathlinks.ro)

Hướng dẫn:

a) Áp dụng đính lí 3.1 ta được pt vn.

b) Xét đồng dư mod 4:

Rõ ràng luôn tồn tại trong 3 số ít nhất một số chia hết cho 2, giả sử đó là x.

Khi đó, y, z có cùng tính chẵn lẻ.

Nếu y, z cùng chẵn thì $x^2 + y^2 + z^2$ chia hết cho 4 mà 7002 không chia hết cho 4.

Vô lí!

Vậy y, z cùng lẻ.

Đặt x = 2x' ; y =2y' +1 ; z = 2z' + 1, ta có:

$4x'^2 + (2y'+1)^2 + (2z'+1)^2 = 7002$

$\Leftrightarrow 4x'^2 + (2y'+2).2y' + (2z'+2).2z' = 7000$

$\Leftrightarrow x'^2 + (y'+1).y' + (z'+1).z' = 1750$

(y'+1).y'; (z'+1).z' đều chẵn (tích hai số tự nhiên liên tiếp) suy ra x' chẵn. Do đó, x= 2x' chia hết cho 4.

Ta có: $0 \le x \le 76$ vì $80^2 > 7002$.

Ta xét:

- $7002 = 0^2 + 2.3501 = 0^2 + 2.3^2.389$
  $= 0^2 + 3^2.(1^2 + 1^2).(10^2 + 17^2) = 0^2 + 81^2 + 21^2$
- $7002 = 4^2 + 7.998$ (*loại*)
- $7002 = 8^2 + 2.3469 = 8^2 + 7^2 + 83^2$
- $7002 = 12^2 + 2.3^3.127$ (loại vì số mũ của 3 là số lẻ).
- $7002 = 16^2 + 2.3373 = 16^2 + 55^2 + 61^2$.
- $7002 = 20^2 + 2.3301 = 20^2 + (1^2 + 1^2).(49^2 + 30^2)$
  $= 20^2 + 19^2 + 79^2$.
- $7002 = 24^2 + 2.3^3.119$ (*loại*).
- $7002 = 28^2 + 2.3109 = 28^2 + 17^2 + 77^2$
- $7002 = 32^2 + 2.7.427$ (*loại*).
- $7002 = 36^2 + 3^2.2.317 = 36^2 + 3^2.(1^2 + 1^2).(11^2 + 14^2)$
  $= 36^2 + 75^2 + 9^2$
- $7002 = 40^2 + 2.2701 = 40^2 + 19^2 + 71^2$
- $7002 = 44^2 + 2.17.149 = 44^2 + 65^2 + 29^2 = 44^2 + 71^2 + 5^2$
- $7002 = 48^2 + 2.3^3.87$ (*loại*).
- $7002 = 52^2 + 2.7.307$ (*loại*).
- $7002 = 56^2 + 2.1933 = 56^2 + 13^2 + 42^2$.
- $7002 = 60^2 + 2.7.243$ (*loại*).
- $7002 = 64^2 + 2.1453 = 64^2 + 35^2 + 41^2$
- $7002 = 68^2 + 2.29.41 = 68^2 + 43^2 + 23^2 = 68^2 + 47^2 + 13^2$
- $7002 = 72^2 + 101.2.3^2 = 72^2 + 27^2 + 33^2$.
- $7002 = 76^2 + 2.613 = 76^2 + 1^2 + 35^2$

4. Gpt: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 844\,443$

HD: pt ⇔ $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 844\,443\,.2$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 844\,443\,.2$$

mà $844\,443\,.2 = 9.$

5. Cmr pt sau vô nghiệm:

$$x^2 + 153y^2 = 8010101007$$

HD: pt $\Leftrightarrow x^2 + (12y)^2 + (3y)^2 = 8010101007$

Vế trái là tổng của ba bình phương nguyên dương mà vế phải = $8010101007 = 8010101000 + 7 = 8.1001262625 + 7$ *có dạng* $8k + 7$, *không thể tách* được *thành tổng ba số chính phương*. Vô lí!

Vậy, pt trên không có nghiệm nguyên dương!

B. Tổng của bốn bình phương và hơn:

Đối với tổng của bốn bình phương thì ở đây, tôi chỉ nêu đôi điều về định lí :

Chúng ta cũng có đẳng thức:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).(e^2 + f^2 + g^2 + h^2)$$
$$= (ae + bf + cg + dh)^2 + (af - be + ch - dg)^2$$
$$+ (ag - bh - ce + df)^2 + (ah + bg - cf - de)^2$$

- Ta xét tiếp một bài toán nhỏ được đặt ra từ bài toán Waring: phương trình vô định $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = y^2$ với $n \geq 2$: pt này luôn có vô số nghiệm, ta có thể chứng minh điều này bằng phương pháp chọn nghiệm. VD:
  - Với n = 3 thì ta có pt: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y^2$:

Đặt $\frac{x_1}{y} = p$; $\frac{x_2}{y} = q$; $\frac{x_3}{y} = s$ thì:

$p^2 + q^2 + s^2 = 1 \Rightarrow p = 1;\ q = s = 0$ là một nghiệm.

Đặt $p' = p + 1$ thì:

$$p' + q + s + 2p' = 0.$$

Giả sử $\frac{p'}{s} = \frac{m}{n}$; $\frac{q}{s} = \frac{r}{n}$ thì :

$$x_1 = (r^2 + n^2 - m^2).t$$

$$x_2 = 2mrt$$

$$x_3 = 2mnt$$

$$y = (r^2 + n^2 + m^2).t \qquad với\ t \in Z.$$

∗ Với các trường hợp khác, ta cũng có thể tính theo cách tương tự, ví dụ như: với n = 4 thì pt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y^2$ có nghiệm nguyên dương được tính theo công thức:

$$x_1 = (p^2 + q^2 + r^2 - s^2)t;$$
$$x_2 = 2qst;$$
$$x_3 = 2rst;$$
$$x_4 = 2pst;$$
$$y = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 \quad với\ t \in Z.$$

Chương 3: MỘT VÀI PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANTINE CĂN BẢN

A: Phương trình Pytagorean:

Phương trình Pytagorean, là một phương trình có nhiều ứn dụng quan trọng trong cả toán học lẫn thực tiễn. Tên của nó được đặt theo tên của nhà toán học và triết gia Hy Lạp Pythagoras. Tuy nhiên, có những bằng chứng cho thấy phương trình này đã được biết đến ít nhất là 1000 năm trước Pytagoras.

Trong số học, đó là một định lý quan trọng, giúp giải nhiều phương trình Diophantine và chứng minh nhiều định lý quan trong khác như định lý cuối cùng của Fermat cho n=4, phương trình kiểu Fermat,...

a) Phương trình Pytagorean:

Phương trình Pytagorean là phương trình có dạng của:

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

với $x, y,\ z$ nguyên dương . những bộ ba thỏa mãn điều kiện trên thì được gọi là bộ ba số Pytagorean. Và ở đây ,dĩ nhiên , chúng ta hầu hết chỉ quan tâm đến bộ nghiệm nguyên thủy của phương trình này, tức là những bộ số thỏa ƯCLN$(x, y, z) = 1$.

Bây giờ, chúng ta sẽ đi tìm công thứcnghiệm tổng quát của phương trình trên.

1. *Thứ nhất, chúng ta có bổ đề: Nếu (x, y, z) là một bộ ba Pytagorean nguyên thủy thì x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau; x, y khác chẵn lẻ và z lẻ.*

Thật vậy, giả sử Ư$CLN(x;\ y) > 1$. *Nếu p là một số nguyên tố với* $p \mid x;\ p \mid y$ *thì* $p^2 \mid x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow p \mid z$, *trái với giả thiết* ƯCLN$(x, y, z) = 1$. *Do đó* Ư$CLN(x; y) = 1$. *Tương tự cho* Ư$CLN(x;\ z) = 1$; Ư$CLN(y, z) = 1$.

Vì Ư$CLN(x;\ y) = 1$ *thì x, y không thể cùng chẵn . nếu x, y cùng lẻ thì* $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 (\mod 4) \Rightarrow z^2 \equiv 2 \ (\mod 4)$ *và điều này là không thể nên x, y khác chẵn lẻ và z lẻ.*

Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử x chẵn .

2. *tiếp theo , chúng ta sẽ chứng minh rằng (x, y, z) là một bộ ba Pytagorean nguyên thủy khi và chỉ khi:*
$x = 2mn$
$y = m^2 - n^2$

$z = m^2 + n^2$

với $ƯCLN\ (m, n) = 1;\ m, n$ *có khác chẵn lẻ.*

Chứng minh: Chúng ta có:

$x^2 = (z + y)(z - y)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z+y}{2} \cdot \frac{z-y}{2}$ (2)

Vì z, y lẻ và nguyên tố cùng nhau nên $\frac{(z+y)}{2}; \frac{(z-y)}{2}$ *nguyên tố cùng nhau. (Bạn đọc tự chứng minh(). Kết hợp với (2), chúng ta có* $\frac{(z+y)}{2}; \frac{(z-y)}{2}$ *đều là số chính phương.*

Đặt $\frac{(z+y)}{2} = m^2;\ \frac{(z-y)}{2} = n^2$ *với m, n nguyên tố cùng nhau thì:*

$$z = m^2 + n^2 \ ;\ y = m^2 - n^2$$

Vì y, z lẻ nên m, n khác chẵn lẻ.

Vì $ƯCLN(m^2, n^2) = 1$ *nên* $ƯCLN(m, n) = 1.$

Nói tóm lại:

$$x = 2mn$$

$$y = m^2 - n^2$$

$$z = m^2 + n^2$$

với $ƯCLN(m, n) = 1;\ m > n; m, n$ *khác chẵn lẻ .*

đảo lại, ta cũng có bộ ba (x, y, z) *thỏa mãn (1).*

b) Ứng dụng của Phương trình Pytagorean:

Bây giờ, chúng ta sẽ come back để chứng minh the Định lý rằng I've mentimộtd at chương 2: *Chứng minh rằng phương trình* $p = x^2 + y^2$ *với p nguyên tố,* $p = 4k + 1, k \in Z$ *có một và only một nghiệm duy nhất trên N (không tính đảo vị).*

Chứng minh: Giả sử phương trình $p = x^2 + y^2$ có hai nghiệm phân biệt trên N: $(x;\ y) = (x_1; y_1)$ và $(x;\ y) = (x_2;\ y_2)$ thì: $ƯCLN(x_1; y_1) = ƯCLN(x_2;\ y_2) = 1$; $p = {x_1}^2 + {y_1}^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2$.

Vì p nguyên tố và $p = x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ nên phải có một số trong ($x_1; y_1$) và một số trong $(x_2;\ y_2)$ lẻ và số còn lại chẵn . Giả sử x_1 và x_2 chẵn và $y_1;\ y_2$ lẻ.

$$p^2 = ({x_1}^2 + {y_1}^2).(x_2^2 + y_2^2) = (x_2.y_1 - x_1.y_2)^2 + (x_1.x_2 + y_1.y_2)^2 \quad (*)$$

Rõ ràng $(x_2.y_1 - x_1.y_2)$ $và$ $(x_2.x_2 + y_1.y_2)$ nguyên tố cùng nhau, vì nếu ƯCLN$[(x_2.y_1 - x_1.y_2); (x_2.x_2 + y_1.y_2)] > 1$ thì giả sử d là một số nguyên tố sao cho p | $(x_2.y_1 - x_1.y_2)$ và $p|(x_2.x_2 + y_1.y_2)$ thì từ (*), chúng ta có $d \mid p^2$ và vì d, p nguyên tố nên $d = p$.

Nếu $d = p$ thì: $\left(\frac{x_2.y_1 - x_1.y_2}{p}\right) \in Z; \left(\frac{x_1.x_2 + y_1.y_2}{p}\right) \in Z$ và:

$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{x_2.y_1 - x_1.y_2}{p}\right)^2 + \left(\frac{x_1.x_2 + y_1.y_2}{p}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{x_2.y_1 - x_1.y_2}{p} = 0 \ \ (1) \ \ ; \frac{x_1.x_2 + y_1.y_2}{p} = 1 \ \ (2)$

(1)$\Rightarrow x_2.y_1 - x_1.y_2 = 0 \Rightarrow x_2.y_1 = x_1.y_2$. Kết hợp với $ƯCLN(x_1; y_1) =$ ƯCLN$(x_2; y_2) = 1$ chúng ta có điều vô lí.

Do đó, ƯCLN$[(x_2.y_1 - x_1.y_2); (x_2.x_2 + y_1.y_2)] = 1$. Thì (*) là Phương trình Pytagorean với nghiệm nguyên thủy. Nên:

$x_2.y_1 - x_1.y_2 = 2x_3.y_3$ (vì x_1 $và$ x_2 chẵn) (3)

$x_1.x_2 + y_1.y_2 = |{x_3}^2 - {y_3}^2|$

$p = {x_3}^2 + {y_3}^2$

Với $(x_3, y_3) = 1$ và x_3, y_3 khác chẵn lẻ.

Không mất tính tổng quát, chúng ta có nếu $x_3 = x_1$ thì $y_3 = y_1$

(3) $\Leftrightarrow x_2.y_1 - x_1.y_2 = 2x_1y_1 \Leftrightarrow y_1|(x_1.y_2)$ và vì $(x_1; y_1) = 1$ thì $y_1|y_2$, nên $y_1 < y_2$ (4). Chúng ta cũng có $x_1|x_2.y_1$ và vì $(x_1; y_1) = 1$ thì $x_1|x_2$ hoặc $x_1 < x_2$ (5).

Từ (4) và (5), chúng ta có $({x_1}^2 + {y_1}^2) < ({x_2}^2 + {y_2}^2)$. Vô lí!

Nên, $x_3 \neq x_1$, $y_3 \neq y_1$phương trình có một nghiệm khác là (x; y) = $(x_3; y_3)$.

Vấn đề lại quay trở lại việc chứng minh : $p = {x_1}^2 + {y_1}^2 = {x_3}^2 + {y_3}^2$

Tiếp tuc chứng minh như vậy, chúng ta có phương trình có vố số nghiệm nguyên. Vô lí vì ở đây số các số nguyên dương nhỏ hơn p luôn là giới hạn

Do đó : $x_1 = x_2 = \cdots = x_n;\ y_1 = y_2 = \cdots = y_n\ (n \in N)$

Hay nói cách khác, phương trình có một nghiệm duy nhất trên N (không tính đạo vị) và bài toán được chứng minh.■

Excercise 1: For which integer k is $8k^4 - 4r^2 + 1$ a perfect square?
Solution:
Suppose that $8k^4 - 8k^2 + 1 = r^2$ with r

is an integer then:

$$16k^4 - 8k^2 + 2 = 2r^2$$
$$\Rightarrow (4k^2 - 1)^2 + 1 = 2r^2.$$

This is kind of Fermat equation so:

$$4k^2 - 1 = m^2 - n^2 + 2mn;\ (1)$$
$$1 = n^2 - m^2 + 2mn;\ (2)$$
$$r = n^2 + m^2.\ (3)$$

With m, n are integers; m, n are relatively primes; m, n are different about odd-even parity.
From (1) and (2), we got:

$$4k^2 - n^2 + m^2 - 2mn = m^2 - n^2 + 2mn$$
$$\Leftrightarrow k^2 = mn$$

And because $gcd(m\ ;\ n) = 1$ so :
Let $n = n_0^2$ and $m = m_0^2$ then $gcd(n_0\ ;\ m_0)$
$= 1;\ k = m_0 n_0$ and

$$n_0^4 - m_0^4 + 2\,m_0^2 n_0^2 = 1$$
$$2\,m_0^4 + 1 = (n_0^2 - m_0^2)^2$$

This equation doesn't has integral root, so $m_0 = 0 \Rightarrow n_0 = 1$

$$m = 0\ ;\ k = 0;\ r = \pm 1$$

Thus, $(k;\ r) = (0;\ \pm 1)$

B. Phương trình Fermat:

Phương trình Fermat hay còn gọi là định lý cuối cùng của Fermat là một định lý nổi tiếng không chỉ vì đô khó của nó mà còn vì trong quá trình chứng minh định lý nay, đã có rất nhiều khám phá mới trong cả lĩnh vực đại số và giải tích

Khi đang đọc một cuốn sách của nhà toná học Hy Lạp thời cổ đại Diophantus, Fermat đã dùng bút chì viết vòa lề cuonb61 sách đó câu "phương trình $a^n + b^n = c^n$ không có nghiệm nguyên dương với mọi $n \geq 3$. Tôi đã tìm ra cách chứng minh nhưng lề sách quá nhỏ để ghi." Phương trình này được gọi là phương trình Fermat.

Trải qua hơn 350 năm, rất nhiều nhà toán học trên toàn thế giới đã có những cố gắng không ít để chứng minh định lý nay và chỉ tới tháng 5 năm 1993, Andrew Wiles-một nhà toán học ở đại hốc Princetion công bố chứng minh của định lý này. tuy nhiên; ngay vào tháng 12 năm đó, nghiệmười ta lại tìm thấy lỗ hổng trong cách chứng minh của ông. Vào ngày 6 tháng 10 năm 1994, Wiles gửi lời chứng minh đã được sửa lại tới 3 người bạn đồng nghiệp. Vào ngày 25 tháng 10 năm đó, đồng nghiệp của ông đánh giá hoàn tất và Wiles xuất bản chứng minh của mình.

Định lý 3.1:

Phương trình: $x^4 + y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương. Từ đó, chứng minh định lý Fermat cho $n = 4$.

Chứng minh: Giả sử phương trình trên có nghiệm nguyên. Giả sử $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ là bộ nghiệm với z_0 nhỏ nhất thì:
Thứ nhất, chúng ta có $(x_0;\ y_0) = 1$. Thật vậy, nếu $ƯCLN(x_0;\ y_0) > 1$ thì giả sử p là một số nguyên tố sao cho $p|x_0;\ p|y_0$. Chúng ta có $p^4|x_0^4 + y_0^4 = z_0^2 \Rightarrow p^2|z_0 \Rightarrow x_0 = px_1;\ y_0 =$

$py_1;\ z_0 = pz_1 \Rightarrow x_1^4 + y_1^4 = z_1^2$. Do đó $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ là một nghiệm với $z_1 < z_0$. trái với giả thiết rằng z_0 là nhỏ nhất.

Do đó, $({x_0}^2;\ {y_0}^2;\ z_0)$ là một bộ ba Pythagorean nguyên thủy. Giả sử x_0 chẵn và y_0 lẻ thì :

$${x_0}^2 = 2mn$$

$${y_0}^2 = m^2 - n^2 \quad (*)$$

$$z_0 = m^2 + n^2$$

với $ƯCLN(m, n) = 1;\ m > n;\ m, n$ nguyên dương ;m, n khác chẵn lẻ.

Từ ${y_0}^2 = m^2 - n^2$, chúng ta có $(y_0; m; n)$ là một bộ ba Pythagorean nguyên thủy, nên:

$$y_0 = a^2 - b^2$$

$$n = 2ab$$

$$m = a^2 + b^2 \qquad (*)$$

với $(a;\ b) = 1;\ a > b; a, b$ nguyên dương; a, b khác chẵn lẻ.

Giả sử $x_0 = 2x_1$. Kết hợp với (*), chúng ta có ${x_0}^2 = 4{x_1}^2 = 2mn = 4ab(a^2 + b^2) \Rightarrow {x_1}^2 = ab(a^2 + b^2) = abm$. Mà, $(a;\ b) = 1 \Rightarrow (a;\ m) = (b;\ m) = 1. \Rightarrow a = {a_1}^2, b = {b_1}^2, m = {m_1}^2$. Kết hợp (**), chúng ta có ${m_1}^2 = a_1^4 + b_1^4$. Nên, $(a_1; b_1; c_1)$ là bộ nghiệm của phương trình với $m_1 < m_1^2 = m < m^2 + n^2 = z_0$, trái với giả thiết rằng z_0 nhỏ nhất.■

Từ đây, chúng ta có hệ quả: định lý Fermat đúng cho mọi $n = 2^k, k \geq 2$ vì:

$x^{2^k} + y^{2^k} = z^{2^k} \Leftrightarrow (x^{2^{k-1}})^4 + (y^{2^{k-1}})^4 = (z^{2^{k-1}})^4$

Định lý 3.2:

Phương trình: $x^4 - y^4 = z^2 \qquad (5)$

Không có nghiệm nguyên dương.

Chứng minh: Giả sử phương trình trên có nghiệm nguyên. Thì đặt $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ là bộ nghiệm với z_0 nhỏ nhất. Thì:

Thứ nhất, chúng ta có $(x_0;\ y_0) = 1$. Thật vậy, Nếu ƯCLN$(x_0;\ y_0) > 1$ thì giả sử p là một số nguyên tố sao cho $p|x_0;\ p|y_0$. Chúng ta có $p^4|x_0^4 - y_0^4 = z_0^2 \Rightarrow p^2|z_0 \Rightarrow x_0 = px_1;\ y_0 = py_1;\ z_0 = pz_1 \Rightarrow x_1^4 - y_1^4 = z_1^2$. Nên $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ là bộ nghiệm với $z_1 < z_0$ trái với giả thiết rằng x_0 là nhỏ nhất.

Do đó, $({y_0}^2;\ z_0; {x_0}^2)$ là một bộ nghiệm nguyên thủy.

Nếu x_0 chẵn và y_0 lẻ thì tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho $(m,n) = 1;\ m > n$; m,n khác chẵn lẻ và ${y_0}^2 = m^2 - n^2;\ {x_0}^2 = m^2 + n^2$. Khi đó , $m^4 - n^4 = (x_0y_0) =>$ (m,n,x_0y_0) là bộ nghiệm của (5) nhưng $m^2 < m^2 + n^2 = {x_0}^2 => m < x_0$ trái với giả thiết rằng z_0 là nhỏ nhất

Nếu $y_0 = 2y_1$ chẵn thì tồn tại các số nguyên dương m,n sao cho $(m,n) = 1;\ m > n$; m,n khác chẵn lẻ và $y_0^2 = 2mn;\ {x_0}^2 = m^2 + n^2$. Do đó, $(m;\ n;x_0)$ là bộ ba Pythagorean nguyên thủy nên tồn tại các số nguyên dương a,b sao cho $(a,b) = 1;\ a > b$; a,b khác chẵn lẻ và ${x_0}^2 = a^2 + b^2$; và $m = a^2 - b^2, n = 2ab$ hoặc $n = a^2 - b^2, m = 2ab$. Trong mọi trường hợp, chúng ta đều có $mn = 2ab(a^2 - b^2) => y_0^2 = 2mn = 4ab(a^2 - b^2) => y_1^2 = ab(a^2 - b^2)$. Vì (a, b) = 1 thì $(a; a^2 - b^2) = 1$; $(b; a^2 - b^2) = 1$. Do đó $a = a_1^2; b = b_1^2; a^2 - b^2 = r^2 => a_1^4 - b_1^4 = r^2$. Do đó, $(a_1; b_1; r)$ là bộ nghiệm của (5) nhưng $a_1 < a_1^2 + b_1^2 = a + b \leq a^2 + b^2 = x_0$, trái với giả thiết rằng x_0 là nhỏ nhất.■

Định lý 3.3:
Chứng minh rằng phương trình $x^4 - 4y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương:

Chứng minh: Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương. Đặt (x_0, y_0, z_0) là bộ nghiệm với z_0 là nhỏ nhất, tương tự như chứng minh của định lý 3.2, chúng ta được ƯCLN$(x_0, y_0) = 1$. Giả sử x_0 chẵn , đặt $x_0 = 2k\ thì\ 16k^4 - 4y_0^4 = z_0^2 \Rightarrow z_0 = 2h, 4k^4 - y_0^4 = h^2$. Vì Ư$CLN\ (x_0, y_0) = 1$ nên y_0 lẻ. Chúng ta được: $(x_0^2)^2 = z_0^2 + (2y_0^2)^2$. Vì x_0 lẻ và ƯCLN$(x_0, y_0) = 1$ nên Ư$CLN(x_0^2, 2y_0^2) = 1$.Do đó, $(z^2, 2y_0^2, x_0^2)$ là một bộ ba Pythagorean nguyên thủy. Do đó, tồn tại các số nguyên dươnga, b sao cho a> b, ƯCLN$(a, b) = 1$ và a, b khác chẵn lẻ sao cho $2y_0^2 = 2ab, x_0^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = r^2, b = s^2 \Rightarrow x_0^2 = r^4 + s^4$, trái với Định lý 3.1 .

Định lý 3.4:
Chứng minh rằng phương trình $x^4 + 4y^4 = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

Chứng minh: Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương. Giả sử (x_0, y_0, z_0) là bộ nghiệm với z_0 là nhỏ nhất, tương tự chứng minh của định lý trước, chúng ta được ƯCLN$(x_0, y_0) = 1$. Giả sử x_0 chẵn , đặt $x_0 = 2k\ thì\ 16k^4 + 4y_0^4 = z_0^2 \Rightarrow z_0 = 2h, 4k^4 + y_0^4 = h^2$. nên, chúng ta được (y_0, k, h) là một nghiệm với $h < 2h = z_0$, vô lí. Do đó, x_0 lẻ. Chúng ta được: $(x_0^2)^2 + (2y_0^2)^2 = z_0^2$. Vì x_0 lẻ và ƯCLN$(x_0, y_0) = 1$ nên Ư$CLN(x_0^2, 2y_0^2) = 1$.Do đó, $(x_0^2\ ,2y_0^2, z_0)$ là một bộ ba Pythagorean nguyên thủy. Do đó, tồn tại the các số nguyên dương a, b sao cho a> b, ƯCLN$(a, b) = 1$ và a, b khác chẵn lẻ sao cho $2y_0^2 = 2ab, x_0^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a = r^2, b = s^2 \Rightarrow x_0^2 = r^4 - s^4$, trái với Định lý 3.2 .

Bài tập:

Chúng ta chú ý rằng the Định lý 3.1 và 3.2 không chỉ đúng cho x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau nhưng cũng cho trương hợp ƯCLN$(x;\ y;\ z) > 1$.

Chúng ta có một vài bài tập luyện tập:

- Ứng dụng của Định lý 3.1:

Bài 1: Giải những phương trình **on N**:

a) $15y^4 - z^2 - 2y^2z + 1 = 0$
b) $x^4 + y^4 - x^2y^2 - z^2 - 2xyz = 0$
c) $x^4y^4 - 2x^2y^2 + 1 = x^4 + y^4$

d) $x^8 + y^8 - 3x^4y^4 = 625$

e) $y^4 = 168x^4 + 338x^2y + y^2$

Hướng dẫn: a) $15y^4 - z^2 - 2y^2z + 1 = 0$

⇔ $1 + (2y)^4 = (z + y^2)^2$

Theo như Định lý 3.1, chúng ta có: phương trình không có nghiệm nguyên dương nên: $2y = 0; z + y^2 = 1$

Do đó, $y = 0$; $z = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình trên N.

b) $x^4 + y^4 - x^2y^2 - z^2 - 2xyz = 0$

⇔ $x^4 + y^4 = (xy + z)^2$

Từ Định lý 3.1, chúng ta có: phương trình không có nghiệm nguyên dương nên: $x = 0 \vee y = 0;$

- Nếu $x = 0$ thì $y^2 = xy + z = z$.Đặt $y = t$ thì công thức:

$$x = 0;\ y = t;\ z = t^2$$

cho ta công thứcnghiệm của phương trình.

- Nếu $y = 0$ thì $x^2 = xy + z = z$. Đặt $x = v$ thì công thức:

$$x = v;\ y = 0;\ z = v^2$$

là công thứcnghiệm thứ 2 của phương trình.

c) $x^4y^4 - 2x^2y^2 + 1 = x^4 + y^4$

⇔ $x^4y^4 + 1 = (x^2 + y^2)^2$

nên $xy = 0 => x = 0 \vee y = 0;\ x^2 + y^2 = 1$

Phương trình có hai nghiệm trên N: $(x;\ y) = (0;\ 1) \vee (x;\ y) = (1;\ 0)$

d) $x^8 + y^8 - 3x^4y^4 = 625$

⇔ $625 + x^4y^4 = (x^4 - y^4)^2$

Nên $xy = 0;\ |x^4 - y^4| = 25.$

Nghiệm: $(x;\ y) = (0;\ 5) \vee (x;\ y) = (5;\ 0)$

e) $y^4 = 168x^4 + 338x^2y + y^2$

⇔ $x^4 + y^4 = 169(x^2 + y)^2 = [13(x^2 + y)]^2$

⇔ $x = 0 \vee y = 0$

Nghiệm: $(x;\ y) = (0;\ 13) \vee (x;\ y) = (0;\ 0)$

Ứng dụng của Định lý 3.2:

Bài 2: Giải những phương trình sau trên **N**:

a) $2x^4 + 2x^2 + 1 = z^4$

b) $-14x^2 + y^4 = 49$

c) $3x^4 + y^4 - 102x^2 + 2061 = 0$

d) $3x^4 - 4x^2 + 1 = y^4$

e) $x^4 + 4x^3 + 297x^2 + 4x + 1 = y^4$

Hướng dẫn: a) $2x^4 + 2x^2 + 1 = z^4$

⇔ $x^4 + (x^2 + 1)^2 = z^4$

Theo như định lý 3.2, chúng ta có: phương trình không có nghiệm nguyên dương , mà $x^2 + 1 > 0$ nên: $x = 0 => z = x^2 + 1 = 1$

Do đó, $x = 0$; $z = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình trên N.

b) $-14x^2 + y^4 = 49$

⇔ $(x^2 - 7)^2 + y^4 = x^4$

⇔$x^4 - y^4 = (x^2 - 7)^2$
Từ Định lý 3.1, chúng ta có: phương trình không có nghiệm nguyên dương nên:
$x = 0 \vee y = 0$;
Trong cả hai trường hợp, chúng ta đều có phương trình không có nghiệm trên N.
c) $3x^4 + y^4 - 102x^2 + 2061 = 0$
⇔ $(2x^2 - 51)^2 + y^4 = x^4$
⇔ $x^4 - y^4 = (2x^2 - 51)^2$
Nên $x = 0 \vee y = 0$;
Nhưng trong cả hai trường hợp, chúng ta đều có phương trình không có nghiệm trên N.
d) $3x^4 - 4x^2 + 1 = y^4$
⇔$x^4 - y^4 = (2x^2 - 1)^2$
Nên $x \vee y = 0$
Nghiệm: $(x;\ y) = (0;\ 1) \vee (x;\ y) = (1;\ 0)$

e) $x^4 + 4x^3 + 297x^2 + 4x + 1 = y^4$

⇔ $y^4 - (x+1)^4 = (17x)^2$
Từ Định lý 3.1, chúng ta có: phương trình không có nghiệm nguyên dương, mà $x + 1 > 0$ nên: $y = 0$, thì:

$$(x+1)^4 + (17x)^2 = 0$$

Vô lí! do đó phương trình không có nghiệm trên N.

C. Fermat - like phương trình:

Lấy ý tưởng từ định lý cuối cùng của Fermat, một vấn đề khác được đặt ra: giả sử n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Tìm tất cả các số nguyên dương(a, b, c) phân biệt sao cho a^n, b^n, c^n) lập thành một cấp số cộng.

Vấn đề này tương đương với:

Tìm tất cả nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^n + y^n = 2z^n$ hay còn gọi là phương trình kiểu Fermat.

Ở đây , chúng ta chỉ nói về phương trình với nghiệm nguyên thủy và chủ yếu là cho n = 2, thì:

$$x^2 + y^2 = 2z^2$$

Dễ thấy: x, y không chia hết cho 2. Giả sử x lẻ, y lẻ. Thì $VT \equiv 2 \ (mod\ 4) \Rightarrow z$ lẻ. Nếu $p\,|\,x, p\,|\,y$ thì $p\,|z \ \Rightarrow p = 1$. Do đó ƯCLN$(x, y) = 1$ nên $x \neq y\ hay\ x = y = 1$.

Nếu $x = y = 1$ thì hiển nhiên , $(x; y; z) = (1; 1; 1)$ là bộ nghiệm thỏa mãn yêu cầu.

Nếu $x \neq y$ thì giả sử $x > y$. Đặt u = $\frac{x+y}{2}$; v = $\frac{x-y}{2}$ thì: $u^2 + v^2 = z^2$. Từ $(x, y) = 1, x = u + v, y = u - v \Rightarrow (u, v) = 1$. Nên (u, v, z) là một bộ ba Pythagorean nguyên thủy nên:

$$u = m^2 - n^2 \,(= 2mn)$$

$$v = 2mn \,(= m^2 - n^2)$$

$$z = m^2 + n^2$$

với $(m, n) = 1;\ m > n$; m, n nguyên dương ;m, n là khác chẵn lẻ nên :

$$x = m^2 - n^2 + 2mn$$

$$z = m^2 + n^2$$

x, y có vai trò ngang nhau trong phương trình nên chúng ta có bộ nghiệm tổng quát là:

$$x = m^2 - n^2 + 2mn$$

$$y = n^2 - m^2 + 2mn$$

$$z = n^2 + m^2$$

với $(m, n) = 1;\ m, n$ nguyên dương ;m, n khác chẵn lẻ.

Ví dụ: với $m = 5, n = 4\ thì\ (49^2;\ 31^2;\ 41^2)$ tạo thành một cấp số cộng hoặc $49^2 + 31^2 = 41^2$.

Bài tập:

Giải phương trình: $49k^4 - 14k^2 + 2 = r^2$

Hướng dẫn:

Phương trình $\Leftrightarrow (7k^2 - 1)^2 + 1 = r^2$.

Đây là phương trình Fermat nên:

$$7k^2 - 1 = 2mn;\ (1)$$
$$1 = m^2 - n^2;\ (2)$$
$$r = n^2 + m^2. (3)$$

với m, n *nguyên* ; $(m, n) = 1;\ m, n$ *khác tính chẵn lẻ.*

Từ (1) và (2), ta có:

$$7k^2 - m^2 + n^2 = 2mn$$
$$\Leftrightarrow 7k^2 = m^2 - n^2 + 2\,mn$$
$$\Leftrightarrow 7k^2 = (m - n)^2 - 2n^2$$
$$\Leftrightarrow 7k^2 + 2n^2 = (m - n)^2$$

$$\Leftrightarrow (k', n') = (1; 1)$$

Chương 4: ỨNG DỤNG CỦA HÌNH HỌC TRONG SỐ HỌC

Có khá nhiều cách để giải phương trình vô định với nghiệm nguyên như đồng dư, bất đẳng thức, ... nhưng đôi khi những cách giải này có thể cho ta những lời giải khá dài và rắc rối, phức tạp. Trong khi đó, việc sử dụng phương pháp hình học lại đem lại cho chúng ta lời giải hay và ngắn gọn. Trong chương này, chúng ta sẽ bàn về một số ứng dụng của hình học trong số học.

1) Ví dụ:

Chẳng hạn, định lý Minkovsky: "Cho a, b, và c là các số nguyên a > 0 và ac - b^2 = 1 . Khi đó phương trình $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ có nghiệm nguyên" đã được chứng minh như sau:

Xét hệ toạ độ Descartes vuông góc và cho trên đó tích vô hướng bằng công thức
((x, y), (x', y')) = axx' + bxy' + bx'y + cyy'
Tích vô hướng này cho ta "khỏang cách" từ gốc toạ độ đến điểm (x, y)
D((0,0); (x,y)) = $\sqrt{((x,y);(x,y))} = \sqrt{ax^2 + 2bxy + cy^2}$
Ta tìm "khỏang cách" ngắn nhất từ gốc toạ độ đến một điểm khác (0, 0) nào đó của lưới nguyên (m,n) (m và n là những số nguyên). Ta gọi khỏang cách này là d và đạt tại điểm (m*, n*), như vậy,*
$am^{*2} + 2bm^*n^* + cn^{*2} = d^{*2}$ *(4)*
Tập hợp những điểm (x, y) của mặt phẳng thoả mãn bất đẳng thức
$ax^2 + 2bxy + cy^2 \le d^{*2}$
là một ellipse. Từ cách xây dựng của ta suy ra rằng nếu vị tự ellipse này theo tỷ số 1/2 rồi đưa ellipse "co" này đến các tâm nằm trên các điểm nguyên (tịnh tiến) thì tất cả các ellipse thu được nếu có cắt nhau thì chỉ cắt theo những điểm biên.
Dễ dàng thấy rằng diện tích phần giao của các ellipse với tam giác có đỉnh ở (0, 0), (1, 0) và (1, 1) bằng 1 nửa diện tích của toàn ellipse. Mà diện tích này thì bằng
Như vậy, diện tích phần mà các ellipse chiếm trong tam giác bằng $\pi d^{*2}/8$ *và đây chỉ là một phần của diện tích tam giác, bằng 1/2, nghĩa là* $\pi d^{*2}/8 < ½ \Rightarrow d^{*2} < 4/\pi$
Nhưng d^{*2} *nguyên dương. Nghĩa là* d^{*2} *và từ đó d* = 1! Vậy là định lý Minkowsky đã được chứng minh.*

Ví dụ 1:Tìm tất cả nghiệm rằng khác (0,0,0) của phương trình:

$$x^2 + 3y^2 = z^2 \quad (1)$$

Hướng dẫn: đầu tiên, chúng ta biến đổi phương trình thành: $(\frac{x}{z})^2 + 3(\frac{y}{z})^2 = 1$

Đặt $u = x/z$; $v = y/z$ thì $u^2 + 3v^2 = 1$.

Với u, v là số hữu tỷ. Bài toán trở thành việc tìm tất cả các điểm hữu tỷ trên đường cong (C): $u^2 + 3v^2 = 1$. Dễ thấy, (½; ½) là một điểm hữu tỷ của đường cong. Nên nếu $(u_0; v_0)$ là một điểm hữu tỷ khác của đường cong thì hệ số góc của đường thẳng qua (½; ½) và $(u_0; v_0)$ sẽ có hệ số góc hữu tỷ. Mặt khác, Nếu $v = k(u - ½) + ½$ là đường thẳng qua (½; ½) với hệ số góc k hữu tỷ thì áp dụng định lý Viéte cho phương trình hoành độ giao điểm, chúng ta sẽ có giao điểm thứ hai của đường thẳng với (E) sẽ có tọa độ hữu tỷ hay:

$$u^2 + 3.[k.(u - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}]^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (3k^2 + 1).u^2 - 3.2.ku..(\frac{k-1}{2}) + 3.(\frac{k-1}{2})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (3k^2 + 1).u^2 - 3.(k^2 - k).u + 3.(\frac{k-1}{2})^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3k^2 + 1).u^2 - 3.(k^2 - k).u + \frac{3k^2 - 6k - 1}{4} = 0$$

Sử dụng định lý Viéte, chúng ta có:

$$u.u_0 = \frac{\frac{3k^2 - 6k - 1}{4}}{3k^2 + 1} = \frac{3k^2 - 6k - 1}{4.(3k^2 + 1)}$$

mà $u_0 = ½$ nên chúng ta có:

$$u = \frac{3k^2 - 6k - 1}{6k^2 + 2};$$

$$v = k.(u - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} => v = \frac{-3k^2 - 2k + 1}{6k^2 + 2}$$

Chúng ta có thể cũng tìm được công thứcnghiệm của (1) từ đó .

Cho một ví dụ: với $k = 3$ chúng ta có: $u = 1/7$; $v = -4/7$ và chúng ta có $(1;\ 4;\ 7)$ là một nghiệm của (1).

Và bây giờ, chúng ta sẽ nói về một vài ứng dụng của nó trong:

2) Định lý IloVi:

a) Định lý IloVi:

Định lý bàn về the bộ nghiệm của phương trình có dạng của $ax^2 + y^2 = z^2$ với a không có ước chính phương lớn hơn 1.

Dĩ nhiên , khuôn khổ cuốn sách này, chúng ta chỉ bàn về bộ nghiệm nguyên thủy của phương trình nói trên hay nói cách khác là x, y, z nguyên tố cùng nhau. Chúng ta sẽ tìm công thứcđó bằng cách sử dụng phương pháp cát tuyến.

Chúng ta biến đổi phương trình thành:

$$ax^2 + y^2 = z^2$$

$$\Leftrightarrow a.(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 = 1.$$

Đặt $u = \frac{x}{z}; v = \frac{y}{z}$ với u, v hữu tỷ thì:

$$au^2 + v^2 = 1$$

rõ ràng rằng phương trình luôn nhận một nghiệm hữu tỷ là $(u_0;\ v_0) = (0;\ -1)$.

Làm tương tự bài tập trước, chúng ta có:

$v = ku - 1$ với k hữu tỷ

$$au^2 + (k.u - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (k^2 + a).u^2 - 2.ku = 0$$

Sử dụng định lý Viéte, chúng ta có:

$$u + u_0 = -\frac{-2k}{k^2 + a} = \frac{2k}{k^2 + a}$$

mà $u_0 = 0$ nên:

$$u = \frac{2k}{k^2 + a}$$

$$v = k.u + 1 \Rightarrow v = \frac{k^2 - a}{k^2 + a}$$

Vì k hữu tỉ nên: tồn tại 2 số nguyên e, f sao cho $(e, f) = 1$ và $k = \frac{e}{f}$

Khi đó : $u = \frac{2k}{k^2 + a} = \frac{2.(\frac{e}{f})}{(\frac{e}{f})^2 + a} = \frac{2ef}{af^2 + e^2} = \frac{x}{z}$ (*)

$$v = \frac{k^2 - a}{k^2 + a} = \frac{(\frac{e}{f})^2 - a}{(\frac{e}{f})^2 + a} = \frac{-af^2 + e^2}{af^2 + e^2} = \frac{y}{z} \quad (**)$$

Giả sử $ƯCLN(-af^2 + e^2; af^2 + e^2) = d$

Thì $(-af^2 + e^2) \vdots d$ và $(af^2 + e^2) \vdots d$

nên $-af^2 + e^2 + af^2 + e^2 = 2e^2 \vdots d$

$$af^2 + e^2 + af^2 - e^2 = 2af^2 \vdots d$$

mà $ƯCLN(e,f) = 1$ nên $d \mid 2a$, kết hợp với (*); (**) và $ƯCLN(x,z) = ƯCLN(y,z) = ƯCLN(x,z) = 1$, chúng ta có:

$$x = \frac{2ef}{d}; \quad y = \frac{-af^2 + e^2}{d}; \quad z = \frac{af^2 + e^2}{d} \quad (*)$$

nhưng chúng ta chỉ lấy nghiệm nguyên nên công thứccũng có thể được viết như sau:

$$x = \frac{2ef}{d};$$

$$y = \frac{|-af^2 + e^2|}{d};$$

$$z = \frac{af^2 + e^2}{d}.$$

với $d \mid 2a$.

Ta gọi đây là công thức(I).

Tiếp tục khai triển (*),chúng ta sẽ có công thức(II), cụ thể :

- Trường hợp 1: a chẵn :
  - Nếu z chẵn thì $z^2 \equiv 0 \ (mod\ 4)$ và y chẵn => $y^2 \equiv 0 \ (mod\ 4)$ => $ax^2 \equiv 0 \ (mod\ 4)$ nhưng a không có ước chính phương rằng lớn hơn một, điều đó có nghĩa là a không là chia hết cho 4. Nên, $x \vdots 2$,trái với giả thiết $(x, y, z) = 1$.
  Nên, z lẻ ⇒ y lẻ.
  - Nếu d chẵn thì $z = \frac{af^2 + e^2}{d} \in Z \Rightarrow e$ chẵn $\Rightarrow e^2 \equiv 0 \ (mod\ 4)$ => Nếu $d \vdots 4$ thì $af^2 \vdots 4$, mà a chẵn nhưng a không có ước chính phương lớn hơn 1 nên $f \vdots 2$ => $ƯCLN(e,f) = 2$, trái với giả thiết $ƯCLN(e,f) = 1$.
  Nên d không là chia hết cho 4, $d \mid a$.

$z = \frac{af^2 + e^2}{d} \in Z$ => d | e. Đặt $v = d$; $m = f$; $a = u.v$; $e = nv$ thì

$$z = um^2 + vn^2$$

$$x = 2mn$$

$$y = -um^2 + vn^2$$

- Trường hợp 2: $a \equiv 3 \ (mod\ 4)$:
  - Nếu z lẻ thì: x, y khác chẵn lẻ .

$z^2 \equiv 1$ (mod 4) => Nếu y chẵn thì $ax^2 \equiv 3 \equiv z^2$ (mod 4). Vô lí!

⇨ x chẵn và y lẻ.

Nếu d ⋮ 2 thì, từ $x = \frac{2ef}{d}$, chúng ta có e, f khác chẵn lẻ.

⇨ $(-af^2 + e^2)$ lẻ, mà $y = \frac{|-af^2 + e^2|}{d} \vdots 2$. Vô lí!

Nên, d lẻ, mà $d \mid 2a$ => $d \mid a$.

Đặt $a = ud$; $e = dn$; $m = f$ thì:

$$x = 2nm ; \quad y = -um^2 + dn^2; \quad z = um^2 + dn^2$$

Đặt $d = v$ chúng ta có:

$$x = 2nm ; \quad y = -um^2 + vn^2; \quad z = um^2 + vn^2$$

- Nếu z chẵn thì: x, y, e, f tất cả lẻ

⇨ $d \vdots 2$. Đặt $d = 2v$ thì $v \mid a$.

⇨ $x = \frac{ef}{v}$; $y = \frac{|-af^2 + e^2|}{2v}$; $z = \frac{af^2 + e^2}{2v}$.

Đặt $a = uv$; $e = v.n$; $m = f$ thì:

$$x = nm ; \quad y = \frac{|-um^2 + vn^2|}{2} ; \quad z = \frac{um^2 + vn^2}{2}.$$

u, v có vai trò ngang nhau nên, chúng ta có thể cũng viết như sau:

$$x = nm ; \quad y = \frac{-um^2 + vn^2}{2} ; \quad z = \frac{um^2 + vn^2}{2}.$$

- Trường hợp 3: $a \equiv 1 \ (mod\ 4)$: Rõ ràng z lẻ.
  - Nếu d lẻ thì: e, f khác nhau về tính chẵn - lẻ ⇒ y lẻ.
    $d \mid 2a$, mà d lẻ ⇒ $d \mid a$.

Đặt $a = ud$; $e = dn$; $m = f$ thì:

$$x = 2nm ; \quad y = -um^2 + dn^2; \quad z = um^2 + dn^2$$

Đặt $d = v$ thì chúng ta có:

$$x = 2nm\,; \quad y = -um^2 + vn^2; \quad z = um^2 + vn^2$$

- Nếu d chẵn thì: e, f tất cả lẻ

Kết hợp với $a \equiv 1\ (mod\ 4)$, chúng ta có $(-af^2 + e^2) \vdots 4$

⇨ y ⋮ 2. Đặt $d = 2v$ thì $v \mid a$.

⇨ $x = \frac{ef}{v}\,; \quad y = \frac{|-af^2 + e^2|}{2v}; \quad z = \frac{af^2 + e^2}{2v}$.

Đặt $a = uv;\ e = v.n\,;\ m = f$ thì:

$$x = nm\,; \quad y = \frac{|-um^2 + vn^2|}{2}\,; \quad z = \frac{um^2 + vn^2}{2}.$$

vì u và v có vai trò ngang nhau nên, chúng ta có thể cũng viết như sau:

$$x = nm\,; \quad y = \frac{-um^2 + vn^2}{2}\,; \quad z = \frac{um^2 + vn^2}{2}.$$

2) Công thứcIloVi:

Tổng quát: Nói tóm lại, chúng ta có hai công thức cho the dạng của phương trình $ax^2 + y^2 = z^2$ với x, y, z là the số nguyên dương như sau:

Công thức**(I):** $x = \frac{2ef}{d}\,;$

$$y = \frac{|-af^2 + e^2|}{d}.;$$

$$z = \frac{af^2 + e^2}{d}.$$

với $\boldsymbol{d \mid 2a}$ Nếu a lẻ và $\boldsymbol{d \mid a}$ Nếu a chẵn .

Công thức(II):

- Với a chẵn :

Tất cả các nghiệm nguyên của phương trình có thể được xác định bởi công thức:

$$x = 2mn\,;$$
$$y = um^2 - vn^2;$$
$$z = um^2 + vn^2.$$

Với $uv = a;\ u, v, m, n$ nguyên; $ƯCLN(m;\ n) = 1$.

- Với a lẻ:
  Tất cả nghiệm nguyên của phương trình có thể được xác định bởi một trong hai công thức:

$$x = mn\,; \quad y = \frac{um^2 - vn^2}{2}; \quad z = \frac{um^2 + vn^2}{2}.$$

với $uv = a$; u, v, m, n lẻ; $ƯCLN(m; n) = 1$.

và $x = 2nm$; $y = -um^2 + vn^2$; $z = um^2 + vn^2$

với $uv = a$; u, v, m, n nguyên; $ƯCLN(m; n) = 1$.

3) Ứng dụng của Định lý IloVi:

Chúng ta sẽ nói nhiều về ứng dụng của nó trong những chương sau, nhưng bây giờ chúng ta sẽ có một vài bài đơn giản để luyện tập.

Ví dụ 1: giải phương trình :$5x^2 + 6y^2 + 10xy = z^2$ (*)

trên tập số nguyên, giả sử x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn **:** (*) ⇔ $5(x + y)^2 + y^2 = z^2$

Rõ ràng $(x + y)$; y; z đôi một nguyên tố cùng nhau.

Áp dụng Công thứcIloVi (II),kết hợp với vai trò ngang nhau của m và n,chúng ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: $x + y = mn$; $y = \frac{|5m^2 - n^2|}{2}$; $z = \frac{5m^2 + n^2}{2}$.

⇨ $x = mn - y = mn - \frac{|5m^2 - n^2|}{2}$ $(x > 0)$;

Trường hợp 2: $x + y = 2mn$; $y = |5m^2 - n^2|$; $z = 5m^2 + n^2$

⇨ $x = 2mn - y = 2mn - |5m^2 - n^2|$ $(x > 0)$.

Bài: Tìm tất cả the các số nguyên dương x, y sao cho:

a) $15x^4 + y^2 = 289$

b) $1043x^2 + y^4 = 177^2$

c) $17x^2 + y^2 = 213^2$

d) $51x^2 + y^2 = 900$

e) $73x^2 + y^2 = 49969^2$

f) $11x^2 + 371y^2 = 5929$

g)$39x^2 + 13y^2 = 5476$

h) $68445x^2 + 469y^2 = 1463^2$

i) $117x^2 + y^4 = 361^2$

j)$112x^2 + 111y^2 + 222xy + 22x = 4503$

k) $4x^2 + 14y^2 - 3x + 14xy = 26904$

m)$332x^2+331y^2+662xy-2x=2839224$

l)$11x^2+22x+11+2xy+2y=494198$

n) $8x^2+56y^2+2x+14y=29583$

p) $2x^4+1=y^2$

q) $26.(2x^2+1)^2+(x^2+19^2)^2=z^2$

h) $15x^2+y^2=z^4$

Huớng dẫn:

a) $11x^2+371y^2=5929$

$\Leftrightarrow 10(x+y)^2+(x-19y)^2=491^2$

b) $39x^2+13y^2=5476$

$\Leftrightarrow 3(x+2y)^2+(6x-y)^2=74^2$

c) $68445x^2+469y^2=1463^2$

$\Leftrightarrow 117(x+2y)^2+(234x-y)^2=1463^2$

j)$112x^2+111y^2+222xy+22x=4503$

$\Leftrightarrow 111(x+y)^2+(x+11)^2=68^2$

k) $4x^2+14y^2-3x+14xy=26904$

$\Leftrightarrow 7(x+2y)^2+(x-4)^2=232^2$

m) $332x^2+331y^2+662xy-2x=2839224$

$\Leftrightarrow 331(x+y)^2+(x-1)^2=1685$

l) $11x^2+22x+11+2xy+2y=494198$

$\Leftrightarrow 10(x+1)^2+(x+y+1)^2=703^2$

n) $8x^2+56y^2+2x+14y=29583$

$\Leftrightarrow 7(x-y)^2+(x+7y+1)^2=172^2$

CHƯƠNG 5: PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

A: Định lý:

Định lý 5.1: Chứng minh rằng phương trình:

$2ap^4 + q^4 = t^2$ với a nguyên tố, $a \neq 8k+7, a \neq 8k+1$ không có nguyên dương.

Hướng dẫn: Nếu $ƯCLN(q,t) > 1$ thì giả sử $1 < b|ƯCLN(q,t)$ và $b^2 \nmid ƯCLN(q,t)$e được $b^2|q^4, b^2|t^2$ nên $b^4|q^4, b^2|2ap^4$ trong khi đó với a nguyên tố nên $b^2|p^4$ hoặc $b|p$. Từ đó, chúng ta được $b^4|p^4, b^4|q^4 \Rightarrow b^4|t^2$ hoặc $b^2|ƯCLN(q,t)$, trái với giả thiết là $b^2 \nmid ƯCLN(q,t)$.

Nên, ƯCLN(q, t) =1; p, q, là đôi một nguyên tố cùng nhau.

Bây giờ, giả sử (x, y, z) là bộ nghiệm của phương trình với z có giá trị nhỏ nhất thì $2ax^4 + y^4 = z^2$. Sử dụng công thức IloVi, chúng ta được:

$x^2 = \frac{2ef}{d}; y^2 = \frac{|2af^2-e^2|}{d}$; z = $\frac{2af^2+e^2}{d}$ với $d|4a, ƯCLN(e,f) = 1$

- Nếu $d = 4a$ thì $4|\,\boldsymbol{e}^2 \Rightarrow 4|2af^2 \Rightarrow 2|f$ trong khi đó 2|e và $ƯCLN(e,f) = 1$, vô lí.
- Nếu $d = 2a$ thì chúng ta được $2a|\boldsymbol{e}^2$ và từ $x^2 = \frac{2ef}{2a} = \frac{ef}{a}$ và $ƯCLN(e,f) = 1$, chúng ta được: tồn tại $e_1, f_1 \in \mathbb{N}^*$ $ƯCLN(e_1,f_1) = 1$ sao cho $e = 4ae_1^2, f = f_1^2$ thì:

$$y^2 = |f_1^4 - 8ae_1^2|$$
$$\Leftrightarrow y^2 = f_1^4 - 8ae_1^2 \; or \; y^2 = -f_1^4 + 8ae_1^2$$
$$\Leftrightarrow 8ae_1^2 + y^2 = f_1^4 \; or \; y^2 + f_1^4 = 8ae_1^2$$

  Nhưng f_1 và y đều lẻ, nên Nếu $y^2 + f_1^4 = 8ae_1^2$ thì $y^2 + f_1^4 \equiv 2 \equiv 8ae_1^2 \equiv 0 (mod\ 4)$, vô lí.

  Do đó $8ae_1^2 + y^2 = f_1^4$ hoặc $2a(2e_1)^2 + y^2 = f_1^4$.

  rõ ràng e_1, f_1, y là đôi một nguyên tố cùng nhau. Áp dụng công thức IloVi chúng ta được:

  $2e_1^2 = \frac{2e_2f_2}{d_1}$; $f_1^2 = \frac{2af_2^2+e_2^2}{d_1}$ *với* $d_1|4a$, $e_2, f_2 \in \mathbb{N}^*$, ƯCLN$(e_2,f_2) = 1$.

- Nếu $d_1 = 4a$ thì $f_1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2|e_2 \Rightarrow 4|e_2^2 \Rightarrow 4|2af_2^2 \Rightarrow 2|f_2$ trong khi đó $2|e_2$ và ƯCLN$(e_2,f_2) = 1$, vô lí.
- Nếu $d_1 = 2a$ thì $e_1^2 = \frac{e_2f_2}{2a}$; $f_1^2 = f_2^2 + \frac{e_2^2}{2a}$ nên $2a|e_2^2$, kết hợp với $e_1^2 = \frac{e_2f_2}{2a}$, ƯCLN$(e_2,f_2) =$ 1, chúng ta có thể đặt: $e_2 = 2ae_3^2$; $f_2 = f_3^2$ thì $f_1^2 = f_3^4 + 2ae_3^4$ với f_1, f_3, e_3 đôi một nguyên tố cùng nhau, hay nói cách khác $(p,q,t) = (e_3, f_3, f_1)$ là của bộ nghiệm của $2ap^4 + q^4 = t^2$ trên $\mathbb{N}^*$.

Chúng ta cũng được rằng z = $\frac{2af^2+e^2}{d} = \frac{2af^2+e^2}{2a} = f^2 + 8ae_1^4 > f \geq f_1$, trái với giả thiết là z là nhỏ nhất.

- Nếu $d_1 = a$ thì $e_1^2 = \frac{e_2f_2}{a}$; $f_1^2 = 2f_2^2 + \frac{e_2^2}{a} \Rightarrow a|e_3$. Vì ƯCLN$(e_2,f_2) = 1$, chúng ta có thể đặt $e_2 = ae_4^2, f_2 = f_4^2$ với ƯCLN$(e_4,f_4) = 1$ thì $f_1^2 = 2f_4^4 + ae_4^4$.
  Nếu $2|f_4$ thì $f_1^2 \equiv ae_4^4 \equiv 1 (mod\ 8)$ trong khi đó $a \neq 8k+1$, vô lý.
  Nếu $2|e_4$ thì $2|f_1 \Rightarrow 4|f_1^2 \Rightarrow 4|2f_4^4 \Rightarrow 2|f_4^4$ trong khi đó f_4lẻ , vô lý.
- Nếu $d_1 = 1$ thì $e_1^2 = e_2f_2$; $f_1^2 = 2af_2^2 + e_2^2$. Đặt $e_2 = e_5^2, f_2 = f_5^2$ thì

$$f_1^2 = 2af_5^4 + e_5^4$$

Nghĩa là $(p,q,t) = (f_5, e_5, f_1)$ là của bộ nghiệm của $2ap^4 + q^4 = t^2$ on $\mathbb{N}^*$ với z = $\frac{2af^2+e^2}{d} = f^2 + 8ae_1^4 > f \geq f_1$, trái với giả thiết là z là nhỏ nhất.

- Nếu d = a thì $x^2 = \frac{2ef}{a}; y^2 = \frac{|2af^2-e^2|}{a}$.
  Vì y lẻ, a lẻ, chúng ta được e lẻ, $a|e^2$. Kết hợp với $x^2 = \frac{2ef}{a}$ chúng ta được : tồn tại các số nguyên dương e_6, f_6 với $ƯCLN(e_6, f_6) = 1$ sao cho
  $e = ae_6^2, f = 2f_6^2 \Rightarrow y^2 = |8f_6^4 - ae_6^4|$
  $\Rightarrow y^2 = 8f_6^4 - ae_6^4$ hoặc $y^2 = -8f_6^4 + ae_6^4$
  Nếu $y^2 = 8f_6^4 - ae_6^4$ thì $y^2 \equiv 1 \equiv -ae_6^4 \equiv -1 (mod\ 8)$, vô lí.

Nếu $y^2 = -8f_6^4 + ae_6^4$ thì $ae_6^4 \equiv y^2 \equiv 1 (mod\ 8)$ trong khi đó $a \neq 8k + 1$, vô lí.

- Nếu d=1 thì $x^2 =$ 2ef; $y^2 = |2af^2 - \boldsymbol{e}^2|$
  Đặt $e = e_7^2; f = 2f_7^2$ thì $y^2 = |8af_7^4 - e_7^2|$.
  Đến đây, ta làm tương tự trường hợp $d = 2a$.

Tổng quát ta có phương trình:

$2ap^4 + q^4 = t^2$ với a nguyên tố, $a \neq 8k + 7, a \neq 8k + 1$ không có nghiệm nguyên dương.

Từ bài trênbài tập, chúng ta cũng thu được:

$8ap^4 + q^4 = t^2$ với a nguyên tố, $a \neq 8k + 7, a \neq 8k + 1$ không có nghiệm nguyên dương .

Nên:

Định lý:

Hai phương trình: $2ap^4 + q^4 = t^2$ và $8ap^4 + q^4 = t^2$ với a nguyên tố, $a \neq 8k + 7, a \neq 8k + 1$ không có nghiệm nguyên dương.

B: Phương trình bậc bốn:

Ví dụ 1*:*
Chứng minh rằng phương trình $867a^4 + 51a^2 + 1 = b^2$ không có nghiệm nguyên dương.

Hướng dẫn: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$3(34\,a^2 + 1)^2 + 1 = (2b)^2 .$$

Bây giờ, áp dụng định lý IloVi, chúng ta được:

$$34a^2 + 1 = m_1 n_1$$

và $1 = \frac{3m_1^2 - n_1^2}{2}$ hoặc $1 = \frac{m_1^2 - 3n_1^2}{2}$ với m_1, n_1 lẻ và ƯCLN$(m_1, n_1) = 1$.

- Nếu $1 = \frac{m_1^2 - 3n_1^2}{2}$ thì $3{n_1}^2 + 2 = {m_1}^2$ hay ${m_1}^2 \equiv 3{n_1}^2 + 2 \equiv 2 (mod\ 3)$, vô lí.

- Nếu $1 = \frac{3m_1^2 - n_1^2}{2}$ thì kết hợp với $34a^2 + 1 = m_1 n_1$, chúng ta được $34a^2 + \frac{3m_1^2 - n_1^2}{2} = m_1 n_1$

hoặc $17a^2 + {m_1}^2 = \left(\frac{m_1 + n_1}{2}\right)^2$. Vì m_1, n_1 lẻ, chúng ta được $\frac{m_1 + n_1}{2} \in \mathbb{N}^*$. Chúng ta có $17a^2 + {m_1}^2 \equiv 2(mod\ 4)$ mà $\left(\frac{m_1 + n_1}{2}\right)^2 \equiv \rho \in \{0,1\}(mod\ 4)$, vô lí.

Nói tóm lại, phương trình trên không có nghiệm nguyên dương.

Ví dụ 2:
Chứng minh rằng phương trình $x^4 + 9x^2y^2 + 27y^4 = z^2$ không là không có nghiệm nguyên dương

Hướng dẫn: Ở đây , ta chỉ bàn về the trường hợp x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau, phần còn lại là dnàh cho bạn đọc tự giải.

Chúng ta thấy rằng nếu x chẵn thì y, z lẻ, thì từ $x^4 + 9x^2y^2 + 27y^4 = z^2$, chúng ta được $27y^4 \equiv 3y^4 \equiv z^2(mod\ 4)$ mà $3y^4 \equiv 3(mod\ 4); z^2 \equiv 1(mod\ 4)$, vô lí.

Nên, x lẻ.

Nếu y lẻ thì $x^4 \equiv 1(mod\ 8); 9x^2y^2 \equiv 9 \equiv 1(mod\ 8); 27y^4 \equiv 27 \equiv 3\ (mod\ 8) \Rightarrow x^4 + 9x^2y^2 + 27y^4 \equiv 5\ (mod\ 8)$ mà $z^2 \equiv$ צ $\in \{0; 1; 4\}(mod\ 8)$, vô lí.

Viết lại phương trình as $4x^4 + 36x^2y^2 + 4.27y^4 = 4z^2$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 9y^2)^2 + 27y^4 = 4z^2$$

Nên y chẵn. Rõ ràng $2x^2 + 9y^2; 3y^2; 2z$ là đôi một nguyên tố cùng nhau. Sử dụng định lý IloVi, chúng ta được rằng:

- $3y^2 = 2mn;\ 2x^2 + 9y^2 = -3m^2 + n^2$: lấy đồng dư modulo 3 cho $2x^2 + 9y^2 = 3m^2 - n^2$, chúng ta loại trường hợp này.
- $3y^2 = 2mn;\ 2x^2 + 9y^2 = 3m^2 - n^2$: Từ $3y^2 = 2mn$, chúng ta được $2|m$ hoặc $2|n \Rightarrow 3m^2 - n^2 = 4m^2 - (m^2 + n^2) \equiv -(m^2 + n^2) \equiv -1 \equiv 3(mod\ 4)\ mà\ 2x^2 + 9y^2 \equiv 2(mod\ 4)$(vì x lẻ, y chẵn), vô lí.
  Và chúng ta có điều phải chứng minh.

Chú ý: Các bạn có thể tham khảo một chứng minh của bài này qua cuốn sách: elementary theory of numbers-PWN-Polish Scientific Publishers, 1998" (trang 75).

Ví dụ 3:

Chứng minh rằng phương trình: $8a^4 + 1 = b^4$ không có nghiệm nguyên dương.

Hướng dẫn:

Bây giờ, giả sử phương trình trên có nghiệm nguyên dương. Giả sử $(a, b) = (n, m)$ là bộ nghiệm với b có giá trị nhỏ nhất thì b lẻ và:

$8n^4 + 1 = m^4 \Leftrightarrow 2(2n^2)^2 + 1 = (m^2)^2$

Sử dụng công thức IloVi, chúng ta được:

$2n^2 = \frac{2ef}{d}; 1 = \frac{|2f^2-e^2|}{d}; m^2 = \frac{|2f^2+e^2|}{d}$ với $d|4$.

- Nếu d=4: $|2f^2 - e^2| = 4 \Rightarrow 2|e^2 \Rightarrow 4|e^2 \Rightarrow 4|2f^2 \Rightarrow 2|f \Rightarrow e, f$ đều chia hết cho 2 trong khi đó ƯCLN(e, f)=1, vô lí.
- Nếu d=2: $m^2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2|e$. Kết hợp với $n^2 = \frac{ef}{d} = \frac{ef}{2}$ và ƯCLN(e, f) $= 1$ chúng ta được : tồn tại các số nguyên dương g, h sao cho ƯCLN(g, h) $= 1$ và $e = 2g^2; f = h^2$. Thì:
$$|2h^4 - 4g^4| = 2 \text{ và } 2\,h^4 + 4g^4 = 2m^2$$
$$\Rightarrow |h^4 - 2g^4| = 1 \text{ và } h^4 = -2g^4 + m^2$$
$$\Rightarrow |-2g^4 + m^2 - 2g^4| = 1$$
$$\Rightarrow |m^2 - 4g^4| = 1$$
$$\Rightarrow m^2 - 4g^4 = 1 \text{ or } 4g^4 - m^2 = 1$$
Theo như Định lý 3.4:, chúng ta được phương trình $m^2 - 4g^4 = 1$ hay $m^2 = 4g^4 + 1$ không có nghiệm nguyên dương, nên $4g^4 - m^2 = 1$.
$$4g^4 - m^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow (2g^2 - m)(2g^2 + m) = 1$$
$\Leftrightarrow 2g^2 - m = 1 = 2g^2 + m\ (since\ m, g > 0) \Leftrightarrow m = 0$, vô lí.
- Nếu d=1: m^2 lẻ, nên $2f^2 + e^2$ lẻ tức e lẻ.
Tương tự, tồn tại các số nguyên dương g, h sao cho ƯCLN(p, q) $= 1$ và $e = p^2; f = q^2$. Thì: $|2q^4 - p^4| = 1$ và $2q^4 + p^4 = m^2$ nên $2q^4 - (m^2 - 2q^4)| = 1 \Leftrightarrow |m^2 - 4q^4| = 1$. Tương tự như d=2, chúng ta được $|m^2 - 4q^4| = 1$ không có nghiệm nguyên dương.
Và chúng ta có điều phải chứng minh. ☺

Ví dụ 4:

Chứng minh thạt phương trình: $2a^4 + 1 = b^4$ không có nghiệm nguyên dương.

Huớng dẫn:

Bây giờ, giả sử phương trình trên có nghiệm nguyên dương. Đặt $(a, b) = (n, m)$ là bộ nghiệm với b là có giá trị nhỏ nhất thì b lẻ và:

$$2n^4 + 1 = m^4$$

Sử dụng công thức IloVi, chúng ta được:

$n^2 = \frac{2ef}{d}; 1 = \frac{|2f^2-e^2|}{d}; m^2 = \frac{|2f^2+e^2|}{d}$ với $d|4, e, f$ là các số nguyên, ƯCLN$(e, f) = 1$.

- Nếu d=4: $|2f^2 - e^2| = 4 \Rightarrow 2|e^2 \Rightarrow 4|e^2 \Rightarrow 4|2f^2 \Rightarrow 2|f \Rightarrow e, f$ đều chia hết cho 2 trong khi đó ƯCLN(e, f)=1, vô lí.
- Nếu d=2: $m^2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2|e$. Kết hợp với $n^2 = \frac{2ef}{d} = ef$ và ƯCLN(e, f) $= 1$ chúng ta được : tồn tại các số nguyên dương g, h sao cho ƯCLN(g, h) $= 1$ và $e = 4g^2; f = h^2$. Thì:
$$|2h^4 - 16g^4| = 2$$
$$\Rightarrow |h^4 - 8g^4| = 1$$
$$\Rightarrow h^4 - 8g^4 = 1 \text{ or } 8g^4 - h^4 = 1$$
Như chúng ta đã chứng minh trước đó ở ví dụ 3, phương trình $h^4 - 8g^4 = 1$ không có nghiệm nguyên dương.
$8g^4 - h^4 = 1 \Leftrightarrow 8g^4 = h^4 + 1 \Leftrightarrow h^4 \equiv 7 (mod\ 8)$, vô lí.

Nếu $d = 1$: $n^2 = 2ef$ *while* ƯCLN$(e, f) = 1$, nên $m^2 = 2f^2 + e^2$ lẻ $\Rightarrow e$ lẻ, f chẵn . Tồn tại các số nguyên dương p, q sao cho ƯCLN(p, q) $= 1$ và $e = p^2; f = 2q^2$. Thì $|8q^4 - p^4| = 1$.
Tương tự như d=2, chúng ta được $|8q^4 - p^4| = 1$ không có nghiệm nguyên dương.
Và chúng ta điều phải chứng minh.☺

Ví dụ 5:
Tìm tất cả nguyên dương nghiệm của phương trình: $y^2 = 8x^4 + 1$

Hướng dẫn: Rõ ràng $ƯCLN(x, y) = 1$ và y lẻ.

Viết lại phương trình như sau: $(y + 1).(y - 1) = 8x^4$

Vì y lẻ, chúng ta được: ƯCLN$(y + 1; y - 1) = 2$

Kết hợp với $(y + 1).(y - 1) = 8x^4$ chúng ta được: tồn tại các số nguyên a, b sao cho ƯCLN$(a, b) = 1$ và :

$$y + 1 = 2a^4 \text{ và } y - 1 = 4b^4$$

Hoặc

$$y + 1 = 4a^4 \text{ và } y - 1 = 2b^4$$

Nếu $y + 1 = 2a^4$ *và* $y - 1 = 4b^4$ thì $2a^4 - 4b^4 = 2 \Leftrightarrow a^4 = 2b^4 + 1$ và như chúng ta đã chứng minh ở ví dụ 4, phương trình này không co nghiệm nguyên dương.

C: Phương trình bậc ba:

Ví dụ 2.1:

Giải phương trình $y^2 = x^3 - 17^3$ với x, y là the các số nguyên dương và ƯCLN$(x, y) = 1$.
Hướng dẫn:
Viết lại phương trình như sau :

$$y^2 = (x-17)(x^2+17x+17^2)$$

Bây giờ, giả sử ƯCLN$\left((x-17); (x^2+17x+17^2)\right) = d_1$ thì
$d_1|[-(x-17)^2 + (x^2+17x+17^2)]$ hoặc $d_1|3.17x$.
$d_1|[3.17x - 3(x-17)] \Rightarrow d_1|51$. Nhưng vì ƯCLN$(x, y) = 1$, chúng ta được $17 \nmid d \Rightarrow d|3$

- Trường hợp 1.1: Nếu $d_1 = 1$ thì tồn tại các số nguyên m_0, n_0 với ƯCLN$(m_0, n_0) = 1$ sao cho

$$\mathrm{x} - 17 = m_0^2;\ x^2 + 17x + 17^2 = n_0^2$$

$$\Rightarrow (m_0^2 + 17)^2 + 17.(m_0^2 + 17) + 17^2 = n_0^2$$

$$\Leftrightarrow m_0^4 + 3.17m_0^2 + 3.17^2 = n_0^2$$

$$\Leftrightarrow (2m_0^2 + 51)^2 + 3.17^2 = 4n_0^2$$

Sử dụng công thức IloVi chúng ta được những trường hợp sau với $e, f \in \mathbb{N}^*$ và ƯCLN$(e, f) = 1$:

- $2m_0^2 + 3.17 = ef$ và $17 = \frac{3e^2-f^2}{2} \Rightarrow 34 + f^2 = 3e^2 \Rightarrow 3e^2 \equiv 34 + f^2 \equiv 2 (mod\ 3)$, vô lí.
- $2m_0^2 + 3.17 = ef$ và $17 = \frac{e^2-3f^2}{2} \Rightarrow 3f^2 + 34 = e^2$ nhưng $2 \nmid$ vì ƯCLN$(e, f) = 1$ nên $e^2 \equiv 3f^2 + 34 \equiv 3 + 34 \equiv 5 (mod\ 8)$, vô lí.
- $17 = ef$ và $2m_0^2 + 3.17 = \frac{3e^2-f^2}{2}$. Bằng cách thử tất cả các giá trị nguyên của e, f thỏa $17 = ef$, chúng ta được phương trình vô nghiệm.
- $17 = ef$ và $2m_0^2 + 3.17 = \frac{e^2-3f^2}{2}$. Bằng cách thử tất cả các giá trị nguyên của e, f thỏa $17 = ef$, chúng ta được phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 1.2: Nếu $d_1 = 3$ thì tồn tại các số nguyên m_1, n_1 với ƯCLN$(m_1, n_1) = 1$ sao cho

$x - 17 = 3m_1^2;\ x^2 + 17x + 17^2 = 3n_1^2$

$$\Rightarrow (3m_1^2 + 17)^2 + 17.(3m_1^2 + 17) + 17^2 = 3n_1^2$$

$$\Rightarrow 3m_1^4 + 3.17m_1^2 + 17^2 = n_1^2$$

ƯCLN$(m_1, n_1) = 1 \Rightarrow 17 \nmid m_1 n_1$.

Vế trái của phương trình$\equiv 3m_1^4 \equiv \alpha \in \{3,12,10,14,7,6,11,5\} (mod\ 17)$ trong khi đó vế phải của phương trình $\equiv n_1^2 \equiv \beta \in \{1,4,9,16,8,2,15,13\} (mod\ 17)$, vô lí.

Ví dụ 2.2:

Chứng minh rằng phương trình $17y^2 = x^3 - 1$ không có nghiệm nguyên dương.

Hướng dẫn: Rõ ràng ƯCLN$(x, y) = 1$ và x chẵn

Viết lại phương trình như sau:

$$y^2 = (x-1)(x^2+x+1)$$

Bây giờ, giả sử ƯCLN$\big((x-1); (x^2+x+1)\big) = d$ thì

$$d | [-(x-1)^2 + (x^2+x+1)] \text{ hoặc } d | 3x.$$

thì $d | [3x - 3(x - 1)] \Rightarrow d | 3 \Rightarrow d | 3$

- Trường hợp 1: Nếu d = 1 thì tồn tại các số nguyên m_0, n_0 với ƯCLN$(m_0, n_0) = 1$ sao cho

$$x - 1 = 17m_0^2 \text{ và } x^2 + x + 1 = n_0^2$$

hoặc

$$x - 1 = m_0^2 \text{ và } x^2 + x + 1 = 17n_0^2$$

- Nếu $x - 1 = 17m_0^2$ và $x^2 + x + 1 = n_0^2$
  thì: $(17m_0^2 + 1)^2 + (17m_0^2 + 1) + 1 = n_0^2$
  Nếu và chỉ nếu$(34m_0^2 + 3)^2 + 3 = (2b)^2$ (*)

Vế trái của (*) $\equiv 3^2 + 3 \equiv 12 (mod\ 17)$ trong khi đó vế phải của phương trình $= (2b)^2 \equiv \beta \in \{1,4,9,16,8,2,15,13\} (mod\ 17)$, vô lí.

- Nếu $x - 1 = m_0^2$ và $x^2 + x + 1 = 17n_0^2$
  thì: $(m_0^2 + 1)^2 + (m_0^2 + 1) + 1 = 17n_0^2$
  Nếu và chỉ nếu$(2m_0^2 + 3)^2 + 3 = 17.(2n_0)^2$

Vì $d = 1$, chúng ta được $3 \nmid x - 1 \Rightarrow 3 \nmid m_0 n_0 \Rightarrow (2m_0^2 + 3)^2 + 3 \equiv 1(mod\ 3)$ trong khi đó $17.(2n_0)^2 \equiv 2(\ mod\ 3)$, vô lí.

- Trường hợp 2: Nếu $\mathrm{d} = 3$ thì tồn tại các số nguyên a, b với $\mathrm{ƯCLN(a, b)} = 1$ sao cho

$$\mathrm{x} - 1 = 3.17a^2 \text{ và } x^2 + x + 1 = 3b^2$$

hoặc

$$\mathrm{x} - 1 = 3a^2 \text{ và } x^2 + x + 1 = 3.17b^2$$

- Nếu $\mathrm{x} - 1 = 3.17a^2$ và $x^2 + x + 1 = 3b^2$
  thì: $(51a^2 + 1)^2 + (51a^2 + 1) + 1 = 3b^2$
  Nếu và chỉ nếu $867a^4 + 51a^2 + 1 = b^2$ và như chúng ta đã chứng minh ở phần trước, phương trình không có nghiệm nguyên dương.
- Nếu $\mathrm{x} - 1 = 3a^2$ và $x^2 + x + 1 = 3.17b^2$ thì

$$(3a^2 + 1)^2 + (3a^2 + 1) + 1 = 3.17b^2$$

$$\Leftrightarrow 3(2a^2 + 1)^2 + 1 = 4.17b^2$$

Chúng ta có $(2a^2 + 1)^2 \equiv \gamma \in \{0,1,4,9,16,8,2,15,13\}(mod\ 17)$

$$\Rightarrow\ 3(2a^2 + 1)^2 + 1 \equiv \alpha \in \{1,4,13,11,15,8,7,12,6\}(mod\ 17)$$

Trong khi đó $4.17b^2 \equiv 0(mod\ 17)$, vô lí.

Nói tóm lại, phương trình $17y^2 = x^3 - 1$ không có nghiệm nguyên dương.

Ví dụ 2.3:
Chứng minh rằng phương trình $y^2 = x^3 - 17^3$ không có nghiệm nguyên dương.

Huớng dẫn: Đây là phương trình Mordell cho $k = 17^3$.

Rõ ràng $ƯCLN(x, y)\ |17^3$ nên tở đây ta có hai trường hợp:

- Nếu $\mathrm{ƯCLN}(x, y) = 1$ thì chúng ta trở về Ví dụ 1.
- Nếu $\mathrm{ƯCLN}(x, y) > 1$ thì $ƯCLN(x, y)|17^3 \Rightarrow 17|x^3 \Rightarrow 17^3|x^3 \Rightarrow 17^3|y^2 \Rightarrow 17^4|y^2$.

Đặt $y = 17^2p, x = 17q$ thì $17p^2 = q^3 - 1$ và vấn đề quay trở lại Ví dụ 2.

Chương :Một phương pháp sơ cấp giải phương trình Diophantine:

Ở đây, tôi xin giới thiệu một phương pháp đơn giản và cũng khá hiệu quả để giải một lớp phương trình Diophantine bậc cao:

Phương trình $(a^2 - 3b^2)ae + (3a^2 - b^2)bf = q$ với $e, f, q \in \mathbb{Z}$:

Viết lại phương trình dưới dạng: $a^3e - b^3f - 3b^2ae + 3a^2bf = q$.

Ta đặt :$a = kb + p$ với $k \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}$ thì:

$$(kb + p)^3e - b^3f - 3b^2(kb + p)e + 3(kb + p)^2bf = q$$

Đơn giản ta được: $\Leftrightarrow (k^3e + 3k^2f - 3ke - f)b^3 + (\dots.)pb^2 + (\dots)pb + (p^3e - q) = 0$

Ta tìm $k \in \mathbb{Q}$ thỏa $k^3e + 3k^2f - 3ke - f = 0$ thì ta được$(\dots.)pb^2 + (\dots)pb + (p^3e - q) = 0$

Khi đó $p|q$ mà q là một hằng số.

Và ta coi $(\dots.)pb^2 + (\dots)pb + (p^3e - q) = 0$ như một phương trình bậc hai với ẩn b để làm nốt phần còn lại.

Ví dụ 1: giải phương trình $11(a^2 - 3b^2)a + 2(3a^2 - b^2)b = 44$

Hướng dẫn: Viết lại phương trình dưới dạng: $11a^3 - 2b^3 - 33b^2a + 6a^2b = 44$.

ta đặt:$a = kb + p$ với $k \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z}$ thì:

$$11(kb + p)^3 - 2b^3 - 33b^2(kb + p) + 6(kb + p)^2b = 44$$

Đơn giản ta được: $\Leftrightarrow (11k^3 + 6k^2 - 33k - 2)b^3 + (\dots.)pb^2 + (\dots)pb + (p^3e - q) = 0$

Ta tìm $k \in \mathbb{Q}$ thỏa $k^3e + 3k^2f - 3ke - f = 0$. Thấy rằng $k = -2$ thỏa mãn và do đó bài toán có thể được giải như sau:

Viết lại phương trình dưới dạng $11a^3 - 2b^3 - 33b^2a + 6a^2b = 44$.

Đặt $a = -2b + p$ thì: $11a^3 - 33ab^2 + 6a^2b - 2b^3 = 44$

$$\Leftrightarrow 11(p - 2b)^3 - 33(p - 2b)b^2 + 6(p - 2b)^2b - 2b^3 = 44$$

$$\Leftrightarrow 11(p^3 - 6p^2b + 12pb^2 - 8b^3) - 33pb^2 + 66b^3 + 6p^2b - 24pb^2 + 24b^3 - 2b^3 = 44$$

$\Leftrightarrow 75pb^2 - 60p^2b + 11p^3 - 44 = 0$.

Rõ ràng $p|44, p \in \mathbb{Z}$.

Và ta cũng có: $\Delta'_b = 30^2p^4 - 75p(11p^3 - 44)$

$= 75(p^4 + 44p)$.

Bằng cách thử tất cả các giá trị của p thỏa mãn $p|44, p \in \mathbb{Z}$, ta được: với $p = 4$ thì $\Delta'_b = 180^2$ thỏa mãn. Do đó: $b = \frac{30.4^2 \pm 180}{75.4}$. Ta được $b = 1 \Rightarrow a = 2$.

Tóm lại, nghiệm nguyên duy nhất của phương trình là $(a; b) = (2; 1)$.

Chú ý:Nếu $k \in \mathbb{Q}$ an $k = \frac{m}{n}$ thì ta đặt $na = mb + p$

ví dụ: Giải phương trình $9(a^2-3b^2)a+46(3a^2-b^2)b=524$.

Hướng dẫn:

ở đây, $e=9, f=46$. Do đó, cần tìm $k\in Q$ thỏa $k^3e+3k^2f-3ke-f=0$ hoặc $9k^3+138k^2-27k-46=0$. Tìm được $k=\frac{2}{3}$. Do đó, ta đặt $3a=2b+p, p\in Z$ và lời giải cho vấn đề có thể dc trình bày như sau:

Viết lại phương trình dưới dạng $9a^3-46b^3-27ab^2+138a^2b=524$.

Đặt $p=3a-2b \Rightarrow 3a=2b+p$. Ta được:

$$(3a)^3-138b^3-27.(3a)b^2+46(3a)^2b=1572$$

$$\Leftrightarrow (2b+p)^3-138b^3-27(2b+p)b^2+46(2b+p)^2b=1572$$

$$\Leftrightarrow 169pb^2+52p^2b+p^3-1572=0$$

Do đó, $p|1572$. Coi phương trình như một phương trình bậc hai ẩn b thì $\Delta'=(26p^2)^2-169p(p^3-1572)=507p^4+169.1572p$.

Các bước tiếp theo xin dành cho bạn đọc.

Bài tập:

1. $65(a^2-3b^2)a+142(3a^2-b^2)b=29223$
2. $2a(a^2-3b^2)+11(3a^2-b^2)=455$.
3. $142(a^2-3b^2)a+65(3a^2-b^2)b+98982=0$.
4. $11(a^2-3b^2)a+2(3a^2-b^2)b=25234$

Dĩ nhiên, ngoài loại phương trình trên, phương pháp này cũng có thể được ap dụng cho nhiều kiểu phương trình khác. Ta đi thêm vào một số ví dụ:

Ví dụ 1: Giải phương trình với nghiệm nguyên:

$114b^3+17a^2b-91ab^2+a-2b+21=0$.

Hướng dẫn: đặt $a=kb+p$ với $k\in Z$ thì

$$114b^3+17(kb+p)^2b-91(kb+p)b^2+(kb+p)-2b+21=0.$$

$\Leftrightarrow (114+17k^2-91k)b^3+\cdots=0$.

Ta tìm $k\in Z$ thỏa $17k^2-91k+114=0$. Dễ thấy $k=2$ thỏa. Do đó, ta có lời giải như sau:

Đặt $a=2b+p$ thì

$$114b^3+17(2b+p)^2b-91(2b+p)b^2+(2b+p)-2b+21=0.$$

$\Leftrightarrow 23pb^2-17p^2b-p-21=0$.

Coi phương trình trn như một phương trình bậc hai ẩn b thì $\Delta=17p^4+4.23.(p+21)$.

Các bước tiếp theo xin dành cho bạn đọc.

Bài tập đề nghị: Giải phương trình trên tập số nguyên:

1/ $28b^3 + 2a^2b - 15ab^2 - a + 4b = 0$.

2/$558b^3 + 7a^2b + 125ab^2 = 17$.

Phương pháp này đôi khi cũng hữu dụng cho phương trình bậc bốn:

phương trình $(a^4 + b^4 - 6a^2b^2)e + 4ab(a^2 - b^2)f = p, p \in Z$.

Tương tự, nếu ta đặt $a = kb + \delta$ thì thế vào phương trình trên rồi đơn giản biểu thức có được ta sẽ có:

$$\begin{aligned} p = (a^4 + b^4 - 6a^2b^2)e + 4ab(a^2 - b^2) \\ = (ek^4 + 4fk^3 - 6ek^2 - 4fk + e)b^4 + (4k^3e - 12ke + 12k^2f - 4f)\delta b^3 \\ + (6k^2e - 6e + 12 + 12kf)\delta^2b^2 + (4ke + 4f)\delta^3b + \delta^4e. \end{aligned}$$

Nếu ta tìm được $k \in Q$ sao cho $(ek^4 + 4fk^3 - 6ek^2 - 4fk + e) = 0$ thì rõ ràng $\delta|k$ và vấn đề sẽ được giải quyết:

Bài tập đề nghị:

$$(a^4 + b^4 - 6a^2b^2)6 + 7ab(a^2 - b^2) + 924 = 0$$

$$-42(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + 217ab(a^2 - b^2) = 858$$

$$-150(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + 595ab(a^2 - b^2) = 0$$

$$-30(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + 35ab(a^2 - b^2) = 2520$$

$$252(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + 1581ab(a^2 - b^2) + 22083 = 0$$

Chương 9:bài tập tổng hợp:

Bài 1:

Chứng minh rằng phương trình: $3(12b^2 + 1)^2 + 1 = a^2$ không có nghiệm nguyên dương.

Giải: Viết lại phương trình như sau:

$$3(12b^2 + 1)^2 + 1 = a^2$$

$$\Leftrightarrow (9b^2 + 1)^2 + 3(3b^2)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Cần phải có a chẵn, khi đó, $\frac{a}{2} \in \mathbb{Z}$.

Rõ ràng $9b^2 + 1$, $3b^2$,$\frac{a}{2}$ đôi một nguyên tố cùng nhau. Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $3b^2$ chẵn, khi đó, tiếp tục xét 2 trường hợp :

i. $3b^2 = 2e_1f_1$; $9b^2 + 1 = 3e_1^2 - f_1^2$: $3b^2 ⋮ 2$ nên $9b^2 + 1 \equiv 1(mod\ 4)$ mà $3e_1^2 - f_1^2 \equiv \alpha \in \{0; 3; 2\}(mod 4)$. Vô lí!
ii. $3b^2 = 2e_1f_1$; $9b^2 + 1 = -3e_1^2 + f_1^2$: $3b^2 ⋮ 2$ nên $9b^2 + 1 \equiv 1(mod\ 4)$ mà $3e_1^2 - f_1^2 \equiv \alpha \in \{0; 3; 2\}(mod 4)$.

Dễ dàng chứng minh được f_1 chẵn và f_1 không chia hết cho 3. Từ $3b^2 = 2e_1f_1$, ta có thể đặt $e_1 = 3e_2^2, f_1 = 2f_2^2 (e_2, f_2 \in Z)$ thì $b = 2e_2f_2$ và:

$$9b^2 + 1 = -3e_1^2 + f_1^2$$

$$\Leftrightarrow 36e_2f_2 + 1 + 27e_1^4 = 4f_2^2 \quad (*)$$

Nếu $2|f_2$ thì $36e_2^2f_2^2 \equiv 0(mod\ 16)$; $1 + 27e_2^4 \equiv 12(mod 16) \Rightarrow VT(2) \equiv 12(mod\ 16)$ mà $VP(*) = 4f_2^2 \equiv 0(mod\ 16)$. Vô lí!

Nếu $2 \nmid f_2$ thì $36e_2^2f_2^2 \equiv 4(mod\ 16)$; $1 + 27e_2^4 \equiv 12(mod 16) \Rightarrow VT(2) \equiv 0(mod\ 16)$ mà $VP(*) = 4f_2^2 \equiv 4(mod\ 16)$. Vô lí!

Trường hợp 2: $3b^2$ lẻ, khi đó, tiếp tục xét 2 trường hợp :

$3b^2 = mn$; $9b^2 + 1 = \frac{|3m^2 - n^2|}{2}$ $(**), m, n \in Z$ và cùng lẻ .

Ta có: $3b^2$ lẻ nên $VT(**) \equiv 9 + 1 \equiv 2(mod\ 4)$. Trong khi đó, m, n cùng lẻ nên $3m^2 - n^2 \equiv 3 - 1 \equiv 2(mod\ 4) \Rightarrow VP(**) = \frac{|3m^2 - n^2|}{2} \equiv 1(mod\ 4) \Rightarrow VT(**) \neq VT(**)$. Vô lí!

Bài 2:

Giải phương trình :$y^2 = x^3 + 859^2$ với $(x, y) = 1$ trên tập số nguyên.

Hướng dẫn:

Do $(x, y) = 1$ nên $(y, 859) = 1; (x; 859) = 1$.. Xét 2 trường hợp:

- Nếu y lẻ thì x chẵn,chứng minh được $ƯCLN(y + 859; y - 859) = 2$. . Đặt $x = 2x_1$, khi đó:
$$(y + 859)(y - 859) = x^3 = 8x_1^3$$
$ƯCLN(y + 859; y - 859) = 1$ nên tồn tại $a, b \in Z, (a, b) = 1$ sao cho:
$$y + 859 = 4a^3 \text{ và } y - 859 = 2b^3 \quad (I)$$

Hoặc $y + 859 = 2a^3$ và $y - 859 = 4b^3$ (II).

Ở trường hợp (I), ta suy ra được: $2a^3 - b^3 = 859$ mà $2a^3 \equiv \alpha \in \{0, 2, 7\}(mod\ 9), b^3 \equiv \beta \in \{0,1,8\}(mod\ 9) \Rightarrow VT = 2a^3 - b^3 \equiv \gamma \in \{0,2,7,8,1,6\}(mod\ 9)$mà $VP = 859 \equiv 4(mod\ 9)$. Vô lí!

Ở trường hợp (II), ta suy ra được: $a^3 - 2b^3 = 859$ mà $a^3 \equiv \delta \in \{0,1,8\}(mod\ 9), 2b^3 \equiv \varepsilon \in \{0,2,7\}(mod\ 9) \Rightarrow VT = a^3 - 2b^3 \equiv \theta \in \{0,2,3,8,1,6\}(mod\ 9)$mà $VP = 859 \equiv 4(mod\ 9)$. Vô lí!

- Nếu $y ⋮ 2$ thì x lẻ. Chứng minh được $ƯCLN(y + 859; y - 859) = 1$
Do đó , tồn tại $c, d \in Z, (c, d) = 1$ sao cho $y + 859 = c^3; y - 859 = d^3$.
Từ đó có $c^3 - d^3 = 2.859$

Suy ra $(c-d)[(c-d)^2+3cd] = 2.859$
Phần tiếp theo : bạn đọc tự xử.

Bài 3:

Giải các phương trình sau trên tập hợp các số nguyên:

1) $4x^4+y^2=5z^2$ 2) $x^2+y^2=5z^4$ 3) $x^4+y^2=10z^2$

4) $5x^4+y^2=z^2$

5) $x^4+7y^2=2z^2$

Hướng dẫn:

Ta có thể sử dụng phương pháp đã được giới thiệu ở chương trước hoặc sử dụng định lí IloVi để giải những bài tập này.

Bài 4:

Tìm tất cả số nguyên không âm k sao cho $8k^4 - 4k^2 + 1$ là một số chính phương?
Hướng dẫn**:**
Giả sử $8k^4 - 8k^2 + 1 = r^2$ với r
là an số nguyên thì:

$$16k^4 - 8k^2 + 2 = 2r^2$$
$$\Leftrightarrow (4k^2 - 1)^2 + 1 = 2r^2.$$

là kind của Phương trình kiểu Fermat nên, chúng ta có hai instance:

- $|4k^2-1| = 1; r = 1 \Rightarrow k = 0. So\ (k;r) = (0;1)$ là a nghiệm
- $4k^2 - 1 = m^2 - n^2 + 2mn;\ (1)$
  $1 = n^2 - m^2 + 2mn;\ (2)$
  $r = n^2 + m^2. (3)$

Với m, n là số nguyên; m, n là relative nguyên tố; và một củam chẵn , một là lẻ.
Từ (1) và (2), chúng ta có:

$$4k^2 - n^2 + m^2 - 2mn = m^2 - n^2 + 2mn$$
$$\Leftrightarrow k^2 = mn$$

Và vì $ƯCLN(m\,;\,n) = 1$ nên :
Tồn tại the positve số nguyên $n_0; m_0$ sao cho $n = {n_0}^2$; $m = {m_0}^2$ và ƯCLN$(n_0\,;\,m_0) = 1$ thì $k = m_0 n_0$ và

$$n_0^4 - m_0^4 + 2\,m_0^2{n_0}^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow 2\,m_0^4 + 1 = ({n_0}^2 - {m_0}^2)^2$$

phương trình không có nguyên root, nên $m_0 = 0$, trái với giả thiết là m_0 là positive.
Nói tóm lại, the only nghiệm của phương trình là:

$$(k;\ r) = (0;\ 1)$$

Bài 5:

Tìm số nguyên không âm k sao cho $32k^4 - 8k^2 + 1$ là một số chính phương?

<u>Nghiệm</u>**:**

Giả sử $32k^4 - 8k^2 + 1 = r^2$ với r là một số nguyên dương thì:

$$64k^4 - 16k^2 + 2 = 2r^2$$

$$=> (8k^2 - 1)^2 + 1 = 2r^2.$$

Đây là phương trình kiểu Fermat nên ta có hai trường hợp:

- $|8k^2 - 1| = 1$ và $r = 1$ thì $k = 0.$
- $8k^2 - 1 = m^2 - n^2 + 2mn;$ (1)

  $1 = n^2 - m^2 + 2mn;$ (2)

  $r = n^2 + m^2.$ (3)

Với m, n là số nguyên; m, n nguyên tố cùng nhau; m, n khác chẵn lẻ.

Từ (1) và (2), chúng ta có:

$$8k^2 - n^2 + m^2 - 2mn = m^2 - n^2 + 2mn$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 = mn$$

Và vì ƯCLN$(m\,;\,n) = 1$ nên chúng ta có hai trường hợp:

- **m lẻ và n chẵn :**

Đặt $n = 2{n_0}^2$ và $m = {m_0}^2$ thì ƯCLN$(n_0\,;\,m_0) = 1;\ k = m_0 n_0$ và

$$4n_0^4 - m_0^4 + 4m_0^2{n_0}^2 = 1$$

$\Rightarrow (m_0^4 + 1) \equiv 0\ (mod\ 4)$ nhưng $m_0^4 = ({m_0}^2)^2$ là a số chính phương và m_0 lẻ nên $m_0^4 \equiv 1\ (mod\ 4)$

$=> (m_0^4 + 1) \equiv 2\ (mod\ 4).$ VL !

- **m chẵn và n lẻ:**

Đặt $m = 2{m_0}^2$ và $n = {n_0}^2$ thì ƯCLN$(n_0\,;\,m_0) = 1;\ k = m_0 n_0$ và

$$n_0^4 - 4m_0^4 + 4m_0^2{n_0}^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow ({n_0}^2 + 2{m_0}^2)^2 - 8({m_0}^2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(2m_0^2)^2 + 1 = (n_0^2 + 2m_0^2)^2$$

Sử dụng định lý IloVi, chúng ta được:

Tồn tại $m_1, n_1 \in \mathbb{N}^*$, ƯCLN$(m_1, n_1) = 1$ sao cho:

$$2m_0^2 = 2m_1n_1 \quad (4)$$

Và $1 = 2m_1^2 - n_1^2$ hoặc $1 = m_1^2 - 2n_1^2$

Từ (4) và ƯCLN$(m_1, n_1) = 1$ chúng ta được: tồn tại $m_2, n_2 \in \mathbb{N}^*$, ƯCLN$(m_2, n_2) = 1$ và $m_1 = m_2^2; n_1 = n_2^2$, nên:

- Nếu $1 = 2m_1^2 - n_1^2$ thì $2m_2^4 - n_2^4 = 1 \Leftrightarrow (m_2^4 - 1)^2 + n_2^4 = m_2^8$ nhưng như chúng ta đã chứng minh trước đó, phương trình $a^4 + b^4 = c^2$ không có nghiệm nguyên dương. Nên ở đây phải có $m_2^4 - 1 = 0\ or\ n_2^4 = 0$ mà $n_2 > 0\ nên\ m_2^4 - 1 = 0$ cho thấy $m_2 = 1; n_2 = 1$. Từ đó, chúng ta được: $m_1 = 1; n_1 = 1 \Rightarrow m_0 = 1; n_0 = 1 \Rightarrow m = 2; n = 1 \Rightarrow k = 1; r = 5$.
- Nếu $1 = m_1^2 - 2n_1^2\ thì\ m_1^4 - 2n_2^4 = 1 \Leftrightarrow (n_2^4 + 1)^2 = n_2^8 + m_1^4$. Tương tự trường hợp trên, phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Nói tóm lại, chúng ta được, tất cả các nghiệm không âm của phương trình là:

$$(k;\ r) = (0; 1);\ (1; 5).$$

Tài liệu tham khảo:

1. Một số vấn đề số học chọn lọc: Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng, Đặng Huy Ruận_NXB Giáo dục, 2008.
2. “Phương trình với nghiệm nguyên” :Vũ Hữu Bình_NXB Giáo dục
3. Giải phương trình vô định nghiem nguyên: Nguyễn Hữu Điển_NXB Giáo Dục 2004.
4. Số học:Nguyễn Vũ Thanh_NXB Giáo dục 2005.
5. Elementary Number theory: Waclaw Sierpinski.
6. Mathscope.org; Mathlinks.ro; diendantoanhoc.net