

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Đề thi tuyển chọn hệ Kỹ sư tài năng và Chất lượng cao năm 2005

Môn thi : **Toán**  
*Thời gian làm bài : 120 phút<sup>1</sup>*

**Bài 1:**

Cho dãy số  $\{u_n\}$  xác định như sau:

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}, \quad n \geq 0, u_0 = 1.$$

1/ Chứng minh rằng dãy số ấy không dẫn tới một giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow \infty$ .

2/ Chứng minh rằng :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

**Bài 2:**

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, đơn điệu giảm trên đoạn  $[0, b]$  và  $a \in [0, b]$ .  
 Chứng minh rằng :

$$b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^b f(x) dx$$

**Bài 3:**

$f(x)$  là một hàm số liên tục trên đoạn  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , thỏa mãn

$$f(x) > 0, \quad \int_0^{\pi} 2f(x) dx < 1$$

Chứng tỏ rằng phương trình

$$f(x) = \sin x$$

có ít nhất một nghiệm trong khoảng  $(0, \frac{\pi}{2})$

**Bài 4:**

Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}) & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

$\alpha$  là hằng số dương. Với giá trị nào của  $\alpha$ , hàm số  $f(x)$  có đạo hàm tại mọi  $x$ .

**Bài 5:**

Tìm tất cả các hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn hệ thức

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

---

<sup>1</sup>Tài liệu được soạn thảo lại bằng L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub> bởi **Phạm duy Hiệp**