

# ĐỀ THI TOÁN QUỐC GIA CỦA TRUNG QUỐC NĂM 2011

*Đề thi này được dịch bởi Sharing*

**Bài 1.** Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor (M - m)^2.$$

ở đây  $a_{n+1} = a_1, M = \max_{1 \leq i \leq n} a_i, m = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$ .

**Bài 2.** Trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác nhọn  $ABC$ ,  $D$  là điểm chính giữa của  $\widehat{BC}$ , gọi  $X$  là một điểm trên  $\widehat{BD}$ ,  $E$  là điểm chính giữa của  $\widehat{AX}$ ,  $S$  nằm trên  $\widehat{AX}$ , đường thẳng  $SD$  và  $BC$  giao nhau tại  $R$ , các đường thẳng  $SE$  và  $AX$  giao nhau tại  $T$ . Nếu  $RT \parallel DE$ . Chứng minh rằng tâm nội tiếp của tam giác  $ABC$  nằm trên  $RT$ .

**Bài 3.** Cho  $A$  là tập hữu hạn các số thực,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các tập con khác rỗng của  $A$  sao cho

(a) Tổng các phần tử của  $A$  bằng 0,

(b) Với mỗi  $x_i \in A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , ta có  $x_1 + x_2 + \dots + x_n > 0$ .

Chứng minh rằng tồn tại  $1 \leq k \leq n$ , và  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , sao cho

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}| < \frac{k}{n} |A|.$$

**Bài 4.** Cho  $n$  là một số nguyên dương, tập  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ . Với mỗi hai tập khác rỗng  $A$  và  $B$ , tìm giá trị bé nhất của  $|A \Delta S| + |B \Delta S| + |C \Delta S|$ , ở đây  $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}, X \Delta Y = X \cup Y - X \cap Y$ .

**Bài 5.** Cho  $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$  là các số thực không âm và  $n > 3$  sao cho  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n > 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)}$ .

**Bài 6.** Cho  $m, n$  là các số nguyên dương. Chứng minh rằng có vô hạn cặp  $(a, b)$  các số nguyên dương sao cho  $a + b | am^a + bn^b$  và  $\gcd(a, b) = 1$ .