CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM

A/NỘI DUNG NGHIÊN CỨU:

A.1)Ý tưởng giải phương trình hàm, bất phương trình hàm:

Phương trình hàm và bất phương trình hàm là một trong những chuyên đề giảng dạy và bồi dưỡng học sinh năng khiếu toán. Nghiên cứu phương trình hàm là một việc làm thiết thực, góp phần làm phong phú thêm kiến thức toán. Đặc biệt với "tư tưởng" của Thầy Nguyễn Văn Mậu, nghiên cứu phương trình hàm còn giúp chúng ta giải quyết được những hàm "tựa" như: "tựa lồi", "tựa lõm", ...; các đặc trưng hàm cơ bản của một số hàm số sinh bởi các phép biến hình sơ cấp, "sáng tác" các kết quả mới trong tam giác, các "kỹ thuật" giải phương trinh hàm, mối quan hệ giữa phương trình hàm và bất phương trình hàm,…

A.2)Một số đặc trưng cơ bản của hàm số:

A.1.1/Đặc trưng của một số hàm sơ cấp:

Trong phần này ta nêu những đặc trưng của một sồ hàm số sơ cấp thường gặp trong chương trình phổ thông. Nhờ các đặc trưng hàm này mà ta có thể dự đoán kết quả của các phương trình hàm tương ứng cũng như có thể đề xuất những dạng bài tập tương ứng với các đặc trưng hàm đó.

Các hàm số được xét trong phần này thoả mãn điều kiện liên tục trên toàn miền xác định của hàm số. Nếu hàm số thoả mãn các đặc trưng hàm đã cho mà không có tính liên tục hoặc được xác định trên các tập rời rạc thì nghiệm của phương trình hàm có thể là một biểu thức hoàn toàn khác.

1/Hàm bậc nhất: $f(x) = ax + b; (a, b \neq 0)$.

Đặc trưng hàm: $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}; \quad \forall x, y$ (Phương trình Jensen)

2/Hàm tuyến tính: $f(x) = ax; (a \neq 0)$.

Đặc trưng hàm: $f(x+y) = f(x) + f(y); \quad \forall x, y$ (Phương trình Cauchy)

3/Hàm mũ: $f(x) = a^x; (a > 0, a \neq 1)$.

Đặc trưng hàm: $f(x+y) = f(x).f(y); \quad \forall x, y$ (Phương trình Cauchy)

4/Hàm logarit: $f(x) = \log_a |x|; (a > 0.a \neq 1)$.

Đặc trưng hàm: $f(x.y) = f(x) + f(y); \quad \forall x, y \in R^*$ (Phương trình Cauchy)

5/Hàm sin: $f(x) = \sin x$.

Đặc trưng hàm: $f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x); \quad \forall x$

6/Hàm cosin: $f(x) = \cos x$.

Đặc trưng hàm: $f(2x) = 2f^2(x) - 1; \quad \forall x$

7/Hàm tang: $f(x) = tgx$.

Đặc trưng hàm: $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}; \quad \forall x, y \in R,\ x+y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z)$

8/Hàm cotang: $f(x) = \cot gx$.

Đặc trưng hàm: $f(x+y) = \dfrac{f(x)f(y)-1}{f(x)+f(y)}; \quad \forall x, y \in R,\ x+y \neq k\pi (k \in Z)$

9/Hàm luỹ thừa: $f(x) = x^{\alpha}; x \in R^{+}$.

Đặc trưng hàm: $f(x.y) = f(x).f(y); \quad \forall x, y$

A.1.2/Hàm số chuyển đổi phép tính số học và đại số:

Trong phần này, ta khảo sát một số tính chất cơ bản của một số dạng hàm số thông qua các hệ thức hàm đơn giản và các hàm bảo toàn và chuyển đổi các tính chất cơ bản của phép tính đại số như giao hoán, phân phối, kết hợp.

Bài toán 1: Xác định các hàm số f(x) xác định và liên tục trên R thoả: f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y); $\forall$ x,y (1)

- ***Phân tích: f(x+1)=2f(x)+f(1), c=2c+1*** $\Rightarrow$ **c=-1**
- ***Lời giải: Đặt f(x)=g(x)-1,***

Ta có g(x+y)-1=g(x)-1+g(y)-1+[g(x)-1][g(y)-1]

hay g(x+y)=g(x)g(y) ; $\forall$ x,y (2). Do f(x) liên tục trên R nên g(x) cũng là hàm liên tục trên R. Suy (2) có nghiệm là g(x)=eax. (1) có nghiệm là f(x)=eax-1.

Bài toán 2: Cho hàm số F(u,v) (u, v là số thực). Giả sử phương trình hàm: f(x+y)=F[f(x),f(y)] (x, y là số thực) (1) có nghiệm f(x) xác định và liên tục trên R. Chứng minh rằng F(u,v) là hàm đối xứng (F(u,v)=F(v,u)) và có tính kết hợp (F[F(u,v),w]=F[u,F(v,w)])(2)

- ***Lời giải:*** $\forall$ u,v,w$\in$D-1f(tập giá trị của hàm số f)

  F(u,v)=F[f(x),f(y)]=f(x+y)=f(y+x)=F[f(y),f(x)]=F(v,u)

  F[F(u,v),w]=f[(x+y)+z]=f[x+(y+z)]=F[f(x),f(y+z)]=F[u,F(v,w)]

Bài toán 3: Giả sử phương trình hàm f(x+y)=F[f(x),f(y)], $\forall$ x,y$\in$R; với F(u,v)($\forall$ u,v,w$\in$ D-1f) là một đa thức khác hằng, có nghiệm là f(x) xác định và liên tục trên R. Chứng minh F(u,v) có dạng F(u,v)=auv+bu+bv+c.

- ***Lời giải: Giả sử F(u.v) là đa thức bậc n theo u và bậc m theo v. Khi đó, do F(u,v) đối xứng nên m=n. Từ bài toán 2, ta có F[F(u,v),w]=F[u,F(v,w)], vế trái là đa thức bậc n theo w và vế phải là đa thức bậc n2 theo w. Suy ra n2=n, hay n=1. Vậy F(u,v)=auv+b1u+b2v+c. Mà F(u,v) đối xứng nên b1=b2 và F(u,v)=auv+bu+bv+c. Theo bài toán 2, ta có ac=b2-b.***

Bài toán 4: Cho đa thức F(u,v)=bu+bv+c (b $\neq 0$). Xác định các hàm số f(x) xác định và liên tục trên R thoả f(x+y)=F[f(x),f(y)] (x, y là số thực) (Tức là f(x+y)=bf(x)+bf(y)+c (4))

- ***Lời giải:***

Nếu b $\neq 1$ thì từ (4) với y=0, ta có f(x)=const

Khi b=$\frac{1}{2}$ và c=0 thì mọi hàm hằng đều thoả (4)

Khi b=$\frac{1}{2}$ và c $\neq 0$ thì (4) vô nghiệm

Khi b $\neq 1$ và b $\neq \frac{1}{2}$ thì nghiệm của (4) là f(x)=$\frac{c}{1-2b}$

Nếu b=1 thì (4) có dạng là f(x+y)=f(x)+f(y)+c và phương trình hàm này có nghiệm f(x)=ax+c

Bài toán 5: Cho đa thức $F(u,v)=auv+bu+bv+c$ ($a \neq 0$, c=$\frac{b^2-b}{a}$). Xác định các hàm số f(x) xác định và liên tục trên R thoả $f(x+y)=F[f(x), f(y)], x, y \in R$

(Tức là $f(x+y)=af(x)f(y)+bf(x)+bf(y)+c$ (5))

- ***Lời giải: Đặt*** $f(x)=\frac{h(x)-b}{a}$, từ (5) ta có

$h(x+y)=h(x)h(y); \forall x, y \in R$ và phương trình này có nghiệm

$h(x)=e^{ax}$. Suy ra nghiệm của (5) có dạng $f(x)=\frac{e^{ax}-b}{a}$

Bài toán 6: Giả sử $f(x)$ là nghiệm của phương trình hàm:

$f(ax+by+c)=Af(x)+Bf(y)+C\ (abAB \neq 0), \forall x, y \in R \quad (6)$.

Chứng minh hàm số $g(x)=f(x)-f(0)$ thoả mãn phương trình Cauchy: $g(x+y)=g(x)+g(y), \forall x, y \in R$

- ***Lời giải: Lần lượt đặt:***

$$\left| \begin{array}{l} x=\frac{u}{a},\ y=\frac{v-c}{b} \\ x=\frac{u}{a},\ y=\frac{-c}{b} \\ x=0,\ y=\frac{v-c}{b} \\ x=0,\ y=\frac{-c}{b} \end{array} \right.$$ và thế vào (5), ta thu được các đẳng thức:

$$\begin{cases} f(u+v) = Af(\frac{u}{a}) + Bf(-\frac{v-c}{b}) + C \\ f(u) = Af(\frac{u}{a}) + Bf(-\frac{c}{b}) + C \\ f(v) = Af(0) + Bf(\frac{v-c}{b}) + C \\ f(0) = Af(0) + Bf(-\frac{c}{b}) + C \end{cases}$$

Suy ra: $f(u+v) = f(u) + f(v) - f(0)$

Và $g(x+y) = f(x+y) - f(0) = f(x) + f(y) - f(0) - f(0) = g(x) + g(y), \forall x, y \in R$

Vậy: $g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in R$

Bài toán 7: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên R là nghiệm của phương trình hàm: $f(ax+by+c) = Af(x) + Bf(y) + C\ (abAB \neq 0), \forall x, y \in R \quad (7)$.

Chứng minh: khi đó $A = a, B = b$

- ***Lời giải: Nghiệm của*** $g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in R$ trong lớp hàm liên tục là hàm tuyến tính $g(x) = \alpha x$. Do đó $f(x) = \alpha x + \beta$, thế vào (7), ta được: $A = a, B = b;\quad \alpha c - C = (a+b-1)\beta\,(7')$

Bài toán 8: Giải và biện luận phương trình hàm:

$f(ax+by+c) = Af(x) + Bf(y) + C\ (abAB \neq 0), \forall x, y \in R \quad (8)$ trong lớp các hàm liên tục trên R.

- ***Lời giải:***

Theo bài toán 7: điều kiện cần để (8) có nghiệm là $A = a, B = b$. Giả sử điều kiện này thoả mãn. Theo (7’), ta chia ra các trường hợp sau:

+T/h: $a+b=1, c=0$. Khi đó (8) trở thành:

$f(ax+(1-a)y) = af(x) + (1-b)f(y)\ (abAB \neq 0), \forall x, y \in R\,(8')$ thuộc lớp hàm chuyển tiếp các đại lượng trung bình cộng. Vậy (8’) có nghiệm là $f(x) = \alpha x + \beta; \alpha, \beta \in R$

+T/h: $a+b=1, c \neq 0$ Khi đó (8) trở thành:

$f(ax+(1-a)y+c) = af(x) + (1-b)f(y) + C\ (abAB \neq 0), \forall x, y \in R\,(8'')$. Đặt: $f(x) = \frac{C}{c}x + h(x)$. Vậy (8”) có dạng:

$h(ax+(1-a)y+c) = ah(x) + (1-b)h(y)\ (abAB \neq 0), \forall x, y \in R\,(8''')$. Do đó (8’’’) chỉ có nghiệm hằng tuỳ ý (Xem (7)), vì vậy (8) có nghiệm $f(x) = \frac{C}{c}x + \beta; \beta \in R$

+T/h: $a+b \neq 1$. Theo bài toán 6 thì nghiệm của (8) có dạng $f(x) = \alpha x + \beta; \beta \in R$. Từ (7’) suy ra $\alpha c - C = (a+b-1)\beta$. Nếu cho $\alpha \in R$ tuỳ ý thì $\beta = \frac{\alpha c - C}{a+b-1}$

Bài toán 9: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên R là nghiệm của phương trình hàm: $f(x+y)+f(z)=f(x)+f(y+z);\forall x,y,z\in R\quad(9)$.

- ***Lời giải:***

+Đặt $f(0)=a,\quad z=0$ thế vào (9) ta có:

$f(x+y)+a=f(x)+f(y);\forall x,y\in R\quad(9')$

+Đặt $f(x)=g(x)+a$. Từ (9'), ta có:

$g(x+y)=g(x)+g(y);\forall x,y\in R\quad(9'')$. Suy ra $g(x)=\alpha x;\alpha\in R$

Vậy (9) có nghiệm $f(x)=ax+\beta;\alpha,\beta\in R$. Thử lại thấy (9) thoả.

Bài toán 10: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên R là nghiệm của phương trình hàm: $f(x+y)f(z)=f(x)[f(y)+f(z)];\forall x,y,z\in R\quad(10)$.

- ***Lời giải:***

Thay $y=z=0$ vào (10), ta được $f(0)f(x)=0$. Vậy $f(0)=0$. Với $z=0$ thì $f(x+y)f(0)=f(x)[f(y)+f(0)];\forall x,y\in R\quad(10')$ hay $f(x)f(y)=0;\forall x,y\in R\quad(10')$.

A.3)Bất phương trình hàm cơ bản.

Bài toán 1: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên R thoả đồng thời các điều kiện sau: $\begin{cases} f(x)\ge 0;\forall x\in R\ (1.1)\\ f(x+y)\ge f(x)+f(y);\forall x,y\in R\quad(1.2)\end{cases}$

- ***Lời giải:***

Thay $x=y=0$, ta có $\begin{cases} f(0)\ge 0\\ f(0)\ge 2f(0)\end{cases}$ *hay* $f(0)=0$

Vậy nên $f(0)=f(x+(-x))\ge f(x)+f(-x)\ge 0$. Suy ra $f(x)=0$. Thử lại (1) thoả

Bài toán 2: Cho trước hàm số $h(x)=ax;a\in R$. Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên R thoả đồng thời các điều kiện sau: $\begin{cases} f(x)\ge ax;\forall x\in R\ (2.1)\\ f(x+y)\ge f(x)+f(y);\forall x,y\in R\quad(2.2)\end{cases}$

- ***Lời giải:***

$h(x+y)=h(x)+h(y)$. Đặt $f(x)=h(x)+g(x)$. Khi đó ta có $g(x)\ge 0;\quad\forall x\in R$ và $g(x+y)\ge g(x)+g(y);\forall x,y\in R$. Theo bài toán 1, ta có: $g(x)=0;\forall x\in R$. Vậy $f(x)=h(x)=ax;a\in R$. Thử lại thấy thoả điều kiện (2.1) và (2.2)

Bài toán 3: Cho $a>0$. Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên R thoả đồng thời các điều kiện sau: $\begin{cases} f(x)\ge a^x;\forall x\in R\ (3.1)\\ f(x+y)\ge f(x)f(y);\forall x,y\in R\quad(3.2)\end{cases}$

- ***Lời giải:***

Ta có $f(x)>0; \forall x\in R$. Khi đó logarit hoá hai vế (3.1), (3.2), ta có $\begin{cases} \ln f(x)\ge (\ln a)x; \forall x\in R \; (3.1') \\ \ln f(x+y)\ge \ln f(x)+\ln f(y); \forall x,y\in R \quad (3.2') \end{cases}$ Đặt $\ln f(x)=\varphi(x)$, ta có: $\begin{cases} \varphi(x)\ge (\ln a)x; \forall x\in R \; (3.1'') \\ \varphi(x+y)\ge \varphi(x)+\varphi(y); \forall x,y\in R \quad (3.2'') \end{cases}$ Đặt $\varphi(x)=g(x)+(\ln a)x$, ta có: hàm $g(x)$ thoả điều kiện bài toán 2 nên $g(x)=0; \forall x\in R$ và $\varphi(x)=(\ln a)x$. Vậy $f(x)=a^x; \forall x\in R \; (3.1)$ thoả điều kiện bài toán.

Bài toán 4: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trên R thoả đồng thời các điều kiện sau: $\begin{cases} f(x)\ge 0; \forall x\in R \; (4.1) \\ f(\frac{x+y}{2})\ge \frac{f(x)+f(y)}{2}; \forall x,y\in R \quad (4.2) \end{cases}$

- ***Lời giải:***

Đặt $f(0)=a,\ f(x)-a=g(x)$. Khi đó ta có $\begin{cases} g(x)\ge 0; \forall x\in R \; (4.1') \\ g(\frac{x+y}{2})\ge \frac{g(x)+g(y)}{2}; \forall x,y\in R \quad (4.2') \end{cases}$ với $g(0)=0$ Thay $y=0$ vào (4.1') và (4.2') $\begin{cases} g(\frac{x}{2})\ge \frac{g(x)}{2}; \forall x\in R \\ g(0)=0 \end{cases}$. Suy ra $g(\frac{x+y}{2})\ge \frac{g(x)}{2}+\frac{g(y)}{2}; \forall x,y\in R$ hay $\begin{cases} g(0)=0, \quad g(x)\ge 0; \forall x\in R \\ g(x+y)\ge g(x)+g(y); \forall x,y\in R \end{cases}$ theo bài toán 1 thì $g(x)=0; \forall x\in R$ và f(x) là const. Thử lại $f(x)=c$ thoả điều kiện bài toán.

Bài toán 5: Xác định các hàm số $f(t)$ liên tục trên R thoả điều kiện sau: $f(x)=\max\limits_{y\in R}\{2xy-f(y)\}; \forall x\in R$ (5)

- ***Lời giải:***

Từ (5) ta có $f(x)\ge 2xy-f(y); \forall x,y\in R$ (5')

Thay $x=y=t$ vào (5'), ta có $f(x)\ge x^2; \forall x\in R$ (5")

Suy ra $2xy-f(y)\le 2xy-y^2=x^2-(x-y)^2; \forall x,y\in R$ mà $\max\limits_{y\in R}\{2xy-f(y)\}=\max\limits_{y\in R}\{x^2-(x-y)^2\}=x^2$ *suy ra* $f(x)\le x^2; \forall x\in R$. Vậy $f(x)=x^2; \forall x\in R$ (kết hợp với (5")). Thử lại thấy thoả điều kiện.

Bài toán 6: Xác định các hàm số $f(t)$ liên tục trên R+ thoả điều kiện sau: $f(x)=\max\limits_{y\in R^+}\{x^2y+xy^2-f(y)\}; \forall x\in R^+$ (6)

- ***Lời giải:***

Tương tự bài toán 5, ta có $f(x)\ge x^2y+xy^2-f(y); \forall x,y\in R^+$

Thay $x=y=t$ vào (6'), ta có $f(x)\ge x^3; \forall x\in R^+$ (6")

Suy ra: $x^2y+xy^2-f(y)\le x^2y+xy^2-y^3=x^3-(x+y)(x-y)^2\le x^3; \forall x,y\in R^+$ mà

$\max\limits_{y\in R^+}\left\{x^2y+xy^2-f(y)\right\}=\max\limits_{y\in R^+}\left\{x^3-(x+y)(x-y)^2\right\}=x^3;\ \forall x\in R^+$ *suy ra*
$f(x)\le x^3;\ \forall x\in R^+$. Kết hợp với (6”), ta có $f(x)=x^3;\ \forall x\in R^+$. Thử lại thấy thoả điều kiện bài toán.

- ***Nhận xét: Điều khẳng định trên cho ta một kết luận tương ứng sau:***

Nếu có một bất đẳng thức cổ điển cho cặp số x,y; chẳng hạn như $x^3\ge x^2y+xy^2-y^3;\ \ \forall x,y\in R$ thì từ điều kiện $f(x)=\max\limits_{y\in R^+}\left\{x^2y+xy^2-f(y)\right\};\ \forall x\in R^+$ ta có ngay hàm cần tìm là $f(x)=x^3;\ \forall x\in R^+$

Từ đây ta có thể “sáng tác” ra những bài toán tương tự

Bài toán 7: Chứng minh rằng nếu:

Hoặc $\mathrm{f'(x)>0}$ và $\mathrm{h(x)\ge 0\ \forall x\in\Omega\subset D_f}$

Hoặc $\mathrm{f'(x)\ge 0}$ và $\mathrm{h(x)>0\ \forall x\in\Omega\subset D_f}$

thì trong Ω ta có: $\mathrm{f(g(x))+g(x).h(x)\ge f(0)\Leftrightarrow g(x)\ge 0}$

- ***Lời giải:***

Sử dụng định lý Lagrange, ta có:

$\mathrm{f(g(x))+g(x).h(x)\ge f(0)}$

$\Leftrightarrow \mathrm{f(g(x))-f(0)+g(x).h(x)\ge 0}$

$\Leftrightarrow \mathrm{[f'(c)+h(x)]g(x)\ge 0};\quad c$ nằm giữa 0 và g(x)

$\Leftrightarrow \mathrm{g(x)\ge 0}\quad do\,[f'(c)+h(x)]>0$

Bài toán 8: Giải bất phương trình $3^{x^2-4}+(x^2-4)3^{x-2}\ge 1\ (7)$

- ***Lời giải:***

Xét hàm số $f(x)=3^x$, ta có $f'(x)=3^x.\ln x$

(7): $f(x^2-4)-f(0)+(x^2-4)3^{x-2}\ge 0\quad do\ 1=f(0)$

Sử dụng định lý Lagrange, ta có:

$f'(c)[(x^2-4)-0]+(x^2-4)3^{x-2}\ge 0\quad c$ nằm giữa 0 và (x^2-4)

$(x^2-4)[f'(c)+3^{x-2}]\ge 0$

$(x^2-4)[3^c\ln 3+3^{x-2}]\ge 0$

$(x^2-4)\ge 0$

$x\ge 2\vee x\le -2$

Bài toán 9: Cho các số dương M,a. Tìm các hàm số $f(x),g(x):R\to R$ thoả mãn điều kiện $\left|f(y)-f(x)-g(x)(x-y)\right|\le M\left|x-y\right|^{2+a};\ \forall x,y\in R\quad (8)$

- ***Lời giải:***

Giả sử có các hàm số $f(x),g(x):R\to R$ thoả điều kiện. Thay đổi vai trò của x,y ta có:

$\left|f(x)-f(y)-g(y)(y-x)\right|\le M\left|y-x\right|^{2+a};\forall x,y\in R$ (8'). Cộng vế (8) và (8'), ta có $\left|[g(x)-g(y)](x-y)\right|\le\left|f(y)-f(x)-g(x)(x-y)\right|+\left|f(x)-f(y)-g(y)(y-x)\right|$

$\left|[g(x)-g(y)](x-y)\right|\le 2M\left|x-y\right|^{2+a};\forall x,y\in R$ (8")

$\left|\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}\right|\le 2M\left|x-y\right|^{a};\quad \forall x,y\in R,x\ne y$. Cố định x cho $y\to x$, ta có

$g'(x)=0;\forall x\in R$ suy ra $g(x)=c(const);\forall x\in R$

Thay $g(x)=c$ vào (8) và làm tương tự như trên, ta có: $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}-c\right|\le 2M\left|x-y\right|^{a};\quad \forall x,y\in R,x\ne y$ và

$f'(x)=c\Rightarrow f(x)=cx+d$.

Thử lại $g(x)=c$; $f(x)=cx+d$ thấy đúng.

Bài toán 10: Chứng minh: $|x|=\max\limits_{|a|\le 1}(ax)$ (9)

- ***Lời giải:***

Ta có $-|x|\le(ax)\le|x|;\quad\forall a\in[-1;1]$, suy ra điều phải chứng minh

A.4)Phương trình hàm liên quan đến tam giác.

Phép tịnh tiến sinh ra hàm tuần hoàn cộng tính, phép đồng dạng sinh ra hàm tuần hoàn nhân tính, phép phản xạ sinh ra hàm số chẵn, lẻ.

Tính chất 1: Điều kiện cần và đủ để 3 số dương A, B, C là 3 góc của một tam giác là A+B+C=π

Tính chất 2: Điều kiện cần và đủ để 3 số dương a, b, c là 3 cạnh của một tam giác là a+b>c, b+c>a, c+a>b (hay /b-c/<a<b+c)

Bài toán 1: Xác định số α để hàm số $f(x)=x+\alpha$ có tính chất $f(a),f(b),f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC.

- ***Lời giải:***

Để $f(a),f(b),f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết phải có $f(a)>0,f(b)>0,f(c)>0$.

Suy ra $a+\alpha>0,b+\alpha>0,c+\alpha>0;\forall\Delta ABC$

Hay $\alpha>-a,\alpha>-b,\alpha>-c;\forall\Delta ABC$ tương đương $\alpha>\max\{-a,-b,-c\};\forall\Delta ABC$ hay $\alpha\ge 0$. Ngược lại, với $\alpha\ge 0$ thì $f(a),f(b),f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác. Vậy với $\alpha\ge 0$ thì hàm số $f(x)=x+\alpha$ có tính chất $f(a),f(b),f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC.

Bài toán 2: Xác định số α để hàm số $f(x)=\alpha x$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC.

- ***Lời giải:***

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết phải có $f(a)>0, f(b)>0, f(c)>0$.

Suy ra $\alpha a>0, \alpha b>0, \alpha c>0; \forall \Delta ABC$

Hay $\alpha>0$. Vậy với $\alpha>0$ thì hàm số $f(x)=\alpha x$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC.

Bài toán 3: Xác định số α, β để hàm số $f(x)=\alpha x+\beta$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC.

- ***Lời giải:***

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết phải có $f(a)>0, f(b)>0, f(c)>0$.

Suy ra $\alpha a+\beta>0, \alpha b+\beta>0, \alpha c+\beta>0; \forall \Delta ABC$ (3)

Từ (3), ta có $\alpha \geq 0$(Vì nếu $\alpha<0$, β tuỳ ý thì ta chọn tam giác ABC có a đủ lớn thì $\alpha a+\beta<0$)

Tương tự $\beta \geq 0$ (Vì nếu $\beta<0$ chọn tam giác ABC có a đủ nhỏ thì $\alpha a+\beta<0$)

Trường hợp $\alpha=\beta=0$ không thoả.

Vậy $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha+\beta>0$ thì hàm số $f(x)=\alpha x+\beta$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC.

Bài toán 4: Xác định số α, β để hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\alpha x+\beta}$ có tính chất $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC.

- ***Lời giải:***

Giả sử $a \geq b \geq c$. Phép nghịch đảo $g(x)=\dfrac{1}{x}$ không có tính chất $g(a), g(b), g(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC.(Phản ví dụ $a=b=2, c=1$; ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$)

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết phải có $f(a)>0, f(b)>0, f(c)>0$.

Suy ra $\alpha a+\beta>0, \alpha b+\beta>0, \alpha c+\beta>0; \forall \Delta ABC$ (4)

Suy ra $\alpha \geq 0; \beta \geq 0$ (bài toán 3)

+Trường hợp $\alpha = \beta = 0$: không thoả.

+Trường hợp $\alpha > 0, \beta = 0$: không thoả ($a = b = 2, c = 1$)

+Trường hợp $\alpha = 0, \beta > 0$: $f(a) = f(b) = f(c) = \frac{1}{\beta} > 0$; $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác đều.

+ Trường hợp $\alpha > 0, \beta > 0$: ta có $f(a) \geq f(b) \geq f(c)$

Ta cần xác định các số dương α, β sao cho: $f(a) + f(b) > f(c);\quad \forall ABC, a \geq b \geq c$

Hay $\frac{1}{\alpha a + \beta} + \frac{1}{\alpha b + \beta} > \frac{1}{\alpha c + \beta};\quad \forall ABC, a \geq b \geq c$ (4')

Phản ví dụ: $a = b = 3d > 0, c = d > 0$ thế vào (4'), ta có: $\frac{2}{3\alpha d + \beta} > \frac{1}{\alpha d + \beta}$. Suy ra $\beta > 2d\alpha$, điều này không xảy ra với d đủ lớn.

Vậy với $\alpha = 0, \beta > 0$: $f(a) = f(b) = f(c) = \frac{1}{\beta} > 0$; $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC.

Bài toán 5: Xác định hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0;\pi]$, $f(0) = 0$ và có đạo hàm trong $(0;\pi)$ sao cho $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

- ***Lời giải:***

Ta cần xác định hàm khả vi $f(x)$ sao cho: $\begin{cases} f(x) > 0; \forall x \in (0;\pi) \\ f(0) = 0 \\ f(A) + f(B) + f(C) = \pi \end{cases}$

$f(0) = 0 \Rightarrow f(\pi) = \pi$ và $C = \pi - (A + B)$

Suy ra $f(A) + f(B) + f(\pi - A - B) = \pi; \forall A, B, A + B \in [0;\pi]$

Hay $f(x) + f(y) + f(\pi - x - y) = \pi; \forall x, y, x + y \in [0;\pi]$

Lấy đạo hàm theo biến x: $f'(x) + f'(\pi - x - y) = 0; \forall x, y, x + y \in [0;\pi]$

Suy ra x: $f'(x) = c; \forall x \in (0;\pi)$.

Vậy $f(x) = px + q.\quad Do\ f(0) = 0\quad suy\ ra\quad q = 0$. Do $f(\pi) = \pi$ nên $p = 1$

Kết luận: hàm số $f(x) = x$ liên tục trong $[0;\pi]$, $f(0) = 0$ và có đạo hàm trong $(0;\pi)$ sao cho $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Bài toán 6: Xác định hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0;\pi]$, $f(0) = 0, f(x) > 0; \forall x \in (0;\pi)$ sao cho $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

- ***Lời giải:***

Ta cần xác định hàm $f(x)$ liên tục trong $[0;\pi]$ sao cho:
$$\begin{cases} f(x)>0;\ \forall x\in(0;\pi) \\ f(0)=0 \\ f(x)+f(y)+f(\pi-x-y)=\pi;\ \forall x,y,x+y\in(0;\pi) \end{cases} \quad (6)$$
$f(x)+f(0)+f(\pi-x)=\pi;\ \forall x,\in[0;\pi]\quad (y=0)$ (6')

Đặt $f(x)=x+g(x)$ thì $g(0)=0,\quad g(x)$ liên tục trong $[0;\pi]$

Ta có $x+g(x)+(\pi-x)+g(\pi-x)=\pi$

$g(x)=-g(\pi-x)$ (6"). Thế $f(x)=x+g(x)$ vào (6) và sử dụng (6"), ta có:

$x+g(x)+y+g(y)+\pi-(x+y)+g[\pi-(x+y)]=\pi$

Hay $g(x)+g(y)=g(x+y);\quad \forall x,y\in[0;\pi], x+y\le\pi$ (6'''). Do $f(x)$ liên tục trong $[0;\pi]$, nên (6''') là phương trình hàm Cauchy và $g(x)=ax;\quad f(x)=(1+a)x$. $f(x)>0;\ \forall x\in(0;\pi)$ nên $1+a>0$ và để $f(A)+f(B)+f(C)=\pi$ ta cần có $1+a=1$ *suy ra* $a=0;\quad f(x)=x$

Bài toán 7: Xác định hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0;\pi]$, sao cho $f(A), f(B), f(C)$ tạo thành số đo các góc của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

- ***Lời giải:***

*Ta thấy có hai hàm số hiển nhiên thoả điều kiện là $f(x)=x;\quad f(x)=\dfrac{\pi}{3}$

*Ta xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0;\pi]$ và
$$\begin{cases} f(x)>0;\ \forall x\in(0;\pi) \\ f(x)+f(y)+f(\pi-x-y)=\pi;\ \forall x,y,x+y\in(0;\pi) \end{cases} \quad (7)$$
Cho $y\to 0$, ta có: $f(x)+f(0)+f(\pi-x)=\pi;\ \forall x,\in(0;\pi)$ (7')

Hay $f(\pi-x)=\pi-f(x)-f(0);\ \forall x,\in[0;\pi]$. Đặt $f(x)=f(0)+g(x)$ thế vào (7) và sử dụng (7'), ta có:

$f(x)+f(y)+\pi-f(x+y)-f(0)=\pi\quad hay\quad f(x+y)+f(0)=f(x)+f(y)$

$f(x+y)-f(0)=f(x)-f(0)+f(y)-f(0)$

Hay $g(x)+g(y)=g(x+y);\quad \forall x,y\in[0;\pi], x+y\le\pi$ (7'') là phương trình hàm Cauchy và $g(x)=\alpha x;\ f(x)=\alpha x+\beta$. Ta cần xác định α,β để
$$\begin{cases} f(x)>0;\quad \forall x\in(0;\pi) \\ f(A)+f(B)+f(C)=\pi \end{cases}$$
Hay $\begin{cases} \alpha x+\beta>0;\quad \forall x\in(0;\pi) \\ \alpha(A+B+C)+3\beta=\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} \alpha x+\beta>0;\quad \forall x\in(0;\pi) \\ \alpha\pi+3\beta=\pi\quad (\beta=\dfrac{(1-\alpha)\pi}{3}) \end{cases}$

Hay $f(x)=\alpha x+\frac{(1-\alpha)\pi}{3}>0;\ \forall x\in(0;\pi)$ (7'''). Cho $x\to 0;\quad x\to\pi$, ta có: $-\frac{1}{2}\le\alpha\le 1$

Kiểm tra các trường hợp:

$+-\frac{1}{2}<\alpha<1$: (7''') thoả

$+\alpha=-\frac{1}{2}$: (7''') thoả $\left(f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$

$+\alpha=1$: (7''') thoả $\left(f(x)=x\right)$

Vậy các hàm cần tìm có dạng: $f(x)=\alpha x+\frac{(1-\alpha)\pi}{3};\quad -\frac{1}{2}\le\alpha\le 1$

Bài toán 8: Xác định hàm số $f(x)$ liên tục trong $[0;\pi]$, sao cho: $f(a), f(b), f(c)$ tạo thành số đo các cạnh của một tam giác nội tiếp trong đường tròn đường kính bằng 1 ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

- ***Lời giải:***

Ta có nhận xét sau: Xét đường tròn (O) có đường kính 2R=1. $M(\Delta)$ là tập hợp tất cả các tam giác nội tiếp trong đường tròn (O) nói trên. Khi đó điều kiện cần và đủ để ba số dương α,β,γ là ba góc của một tam giác thuộc $M(\Delta)$ là $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ tạo thành độ dài các cạnh của một tam giác thuộc $M(\Delta)$ ($a=2R\sin\alpha=\sin\alpha, b=2R\sin\beta=\sin\beta, c=2R\sin\gamma=\sin\gamma$). Theo bài toán 7 thì $f(x)=\sin\left[\alpha x+\frac{(1-\alpha)\pi}{3}\right];\quad -\frac{1}{2}\le\alpha\le 1$.

*Nhận xét: nghiệm của phương trình vô định $x^2+y^2=z^2$ có thể mô tả dưới dạng $\begin{cases}x=u.\cos v\\ y=u.\sin v\\ z=u\end{cases};\quad u\in R^+, v\in(0;\frac{\pi}{2})$. Ta suy ra các kết luận sau:

Bài toán 9: Chứng minh $\forall(u;v); u\in R^+, v\in(0;\frac{\pi}{2})$ đều tồn tại một tam giác mà độ dài các cạnh là những số $\begin{cases}P_1(u,v)=u.\cos v\\ P_2(u,v)=u.\sin v\\ P_3(u,v)=u.v\end{cases};\quad u\in R^+, v\in(0;\frac{\pi}{2})$ đều là các tam giác vuông.

- ***Lời giải:***

$$\begin{cases}P_1(u,v)=u.\cos v\\ P_2(u,v)=u.\sin v\\ P_3(u,v)=u.v\end{cases};\quad u\in R^+, v\in(0;\frac{\pi}{2}).$$

Ta thấy $\begin{cases} P_1(u;v) > 0 \\ P_2(u;v) > 0 \\ P_3(u;v) > 0 \\ [P_1(u;v)]^2 + [P_2(u;v)]^2 = [P_3(u;v)]^2 \end{cases}$. Từ đó suy ra $P_1(u;v), P_2(u;v), P_3(u;v)$ là độ dài các cạnh của một tam giác vuông có canh huyền $P_3(u;v)$.

Bài toán 10: Chứng minh rằng $\forall x > 1$ đều tồn tại một tam giác mà độ dài các cạnh là những số $\begin{cases} P_1(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ P_2(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1 \\ P_3(x) = x^4 - 1 \end{cases}$ và các tam giác đó có góc lớn nhất như nhau ($\forall x > 1$ cho trước).

- ***Lời giải:***

$\begin{cases} P_1(x) = (x^2+1)(x^2+x+1) \\ P_2(x) = (x^2+1)(2x+1) \\ P_3(x) = (x^2-1)(x^2+1) \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} a = (x^2+x+1) > 0 \\ b = (2x+1) > 0 \\ c = (x^2-1) > 0 \end{cases}$. Ta có $|b-c| = |x^2 - 2x - 2| < a = x^2 + x + 1 < |b+c| = x^2 + 2x$. Vậy a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Cạnh lớn nhất của tám giác ứng với $P_1(x)$ *hay* a.

Khi đó gọi α là góc lớn nhất, $\cos\alpha = \dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = ... = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

A.5)Bất phương trình hàm liên quan đến tam giác.

Một số hàm số không phải là hàm lồi nhưng có tính chất của hàm lồi được gọi là hàm "tựa lồi", hàm số không phải là hàm lõm nhưng có tính chất của hàm lõm được gọi là hàm "tựa lõm" ,... (theo Thầy Nguyễn Văn Mậu)

Bài toán 1: Trong tam giác ABC, nếu A<B thì sinA<sinB (Chứng minh đơn giản: tương ứng với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn).

- ***Nhận xét:***

Hàm số $f(x) = \sin x$ không đồng biến trong $(0;\pi)$ nhưng ta cũng có hệ thức kiểu "đồng biến" cho cặp góc của một tam giác.

Bài toán 2: Trong tam giác ABC, ta có $\cos A + \cos B \le 2\cos\dfrac{A+B}{2}$.

- ***Nhận xét:***

Hàm số $f(x) = \cos x$ không là hàm lõm trong $(0;\pi)\left(f''(x) < 0\right)$ nhưng ta vẫn có hệ thức kiểu hàm lõm cho cặp góc của một tam giác.

Bài toán 3: Trong tam giác ABC, ta có:

3.1) $\sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

3.2) $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

3.3) $tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$

3.4) $\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$

- ***Nhận xét:***

Từ kết quả 3.2) ta nhận thấy rằng tính chất của hàm lõm không còn được sử dụng như một công cụ cơ bản để kiểm chứng tính đúng đắn của bất đẳng thức. Vậy vấn đề đặt ra là: Về tổng thể, ta có thể mô tả được hay không lớp các hàm tổng quát thoả mãn điều kiện $\left[\begin{array}{l} f(A)+f(B)+f(C)\le 3f(\frac{\pi}{3}) \\ f(A)+f(B)+f(C)\ge 3f(\frac{\pi}{3}) \end{array}\right.$ với mọi tam giác ABC?

Bài toán 1: Cho hàm số $f(t); t\in(0;\pi)$. Chứng minh các điều kiện (1.1) và (1.2) sau đây là tương đương:

$$f(x)+f(y)\le 2f(\frac{x+y}{2});\quad \forall x,y,x+y\in(0;\pi)\quad (1.1)$$

$$f(x)+f(y)+f(z)\le 3f(\frac{x+y+z}{3});\quad \forall x,y,z,x+y+z\in(0;\pi]\quad (1.2)$$

- ***Lời giải:***

+Giả sử: $x\ge y\ge z$, ta có $f(z)+f(\frac{x+y+z}{3})\le 2f\left(\frac{z+\frac{x+y+z}{z}}{2}\right)$ (1.3)

Từ (1.1) và (1.3), ta có:

$$f(x)+f(y)+f(z)+f(\frac{x+y+z}{3})\le 2\left[f(\frac{x+y}{2})+f\left(\frac{z+\frac{x+y+z}{3}}{2}\right)\right]$$

$\le 4f\left(\frac{x+y+z}{3}\right);\quad \forall x,y,z,x+y+z\in(0;\pi]$. Suy ra (1.2)

+Từ (1.2), giả sử $x\le z\le y$, đặt $z=\frac{x+y}{2}$ ta được (1.1).

Bài toán 2: Xác định hàm số $f(t); t\in(0;\pi)$ thoả mãn điều kiện: $A<B\quad\Leftrightarrow\quad f(A)<f(B)$ (2).

- ***Lời giải:***

+(2) thoả với mọi cặp góc nhọn A,B tương đương với $f(t)=f_0(t)$ là một hàm đồng biến trong $(0;\frac{\pi}{2}]$

+Xét hàm số $g_0(t)=\begin{cases} f_0(t) & khi\quad 0<t\le\dfrac{\pi}{2} \\ f_0(\pi-t) & khi\quad \dfrac{\pi}{2}<t<\pi \end{cases}$. Ta chứng minh $g_0(t)$ thoả điều kiện bài toán. Thật vậy:

- A, B nhọn thì (2) thoả
- Xét $0<A<\dfrac{\pi}{2}<B<\pi;\quad A+B<\pi$

$\Rightarrow \pi-B>A,\ g_0(B)=f_0(\pi-B)>f_0(A)=g_0(A)$

+Ta chứng minh mọi hàm số $f(t); t\in(0;\pi)$ thoả điều kiện bài toán đều có dạng: $f(t)=\begin{cases} g_0(t), & khi\ 0<t\le\dfrac{\pi}{2} \\ \ge g_0(t), & khi\ \dfrac{\pi}{2}<t<\pi \end{cases}$. Thật vậy, từ $g_0(B)\le f(B)$ với B tù, ta có $0<A<\dfrac{\pi}{2}<B<\pi, A+B<\pi$ thì $\pi-B>A,\ f(B)\ge g_0(B)=f_0(\pi-B)>f_0(A)=g_0(A)=f(A)$

Bài toán 3: Xét hàm số $f(t)=\begin{cases} \sin t, & khi\ 0<t\le\dfrac{\pi}{2} \\ 1+\cos t, & khi\ \dfrac{\pi}{2}<t<\pi \end{cases}$. Chứng minh với mọi tam giác ABC ta đều có $f(A)+f(B)+f(C)\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (3)

- ***Lời giải:***

+Tam giác ABC nhọn (hay vuông) thì (3) có dạng quen thuộc $\sin A+\sin B+\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

+Tam giác ABC tù: $C>\dfrac{\pi}{2}$ thì (3) có dạng $\sin A+\sin B+1+\cos C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (3') đúng

Do $\sin A+\sin B+1+\cos C\le\sin A+\sin B+\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

A.6)Các đề thi học sinh giỏi.

I.Tính giá trị hàm số:

Bài toán 1: Cho hàm số $f(x), x\in Z$, thoả:

$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(m+n)=f(m)+f(n)+3(4mn-1); \quad \forall m,n\in Z \end{cases}$. Tính $f(19)$

Lời giải: Ta có 19=10+9

$f(1) = 0$

$f(2) = 2f(1) + 9 = 9$

$f(4) = 2f(2) + 45 = 63$

$f(5) = f(4) + f(1) + 45 = 108$

$f(9) = f(5) + f(4) + 237 = 408$

$f(10) = 2f(5) + 297 = 513$

Suy ra $f(19) = f(10) + f(9) + 1077 = 513 + 408 + 1077 = 1998$

Bài toán 2: (Dự tuyển IMO) Cho hàm số $f(x)$:

$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1;\ \forall x, y \in R \end{cases}$. Tìm các số $n \in Z : f(n) = n$

Lời giải: Cho $y = 1 \Rightarrow f(x) + f(1) = f(x+1) - x - 1 \Rightarrow f(x+1) = f(x) + 2$

$f(n) = f(n-1) + (n+1);\quad \forall n \in Z,$

$f(n-1) = f(n-2) + (n)$

$f(n-2) = f(n-3) + (n-1)$

......

$f(2) = f(1) + (3)$

Suy ra $f(n) = (n+1) + (n) + (n-1) + ... + (3) + 2 + 1 - 2 = \sum_{1}^{n+1} i - 2$

$f(n) = n \Leftrightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2 = n \Leftrightarrow n^2 + n - 2 = 0 \Leftrightarrow n = 1, n = -2$

Bài toán 3: Cho hàm số f xác định trên tập các số nguyên thoả:

$f(0) \neq 0$

$f(1) = 3$. Tính $f(7)$

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y);\quad \forall x, y \in Z$

Lời giải:

+Ta chứng minh $f(n) = 3f(n-1) - f(n-2)$.

Ta có $f(1)f(0) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(0) = 2$

$f(n)f(1) = f(n+1) + f(n-1) \Rightarrow 3f(n) = f(n+1) + f(n-1)$

$f(n+1) = 3f(n) - f(n-1) \Rightarrow f(n) = 3f(n-1) - f(n-2)$

+ Suy ra: $f(7) = 3f(6) - f(5)$

$f(2) = 3f(1) - f(0) = 7$

$f(3) = 3f(2) - f(1) = 18$

$f(4) = 3f(3) - f(2) = 47$

$f(5) = 3f(4) - f(3) = 123$

$f(6) = 3f(5) - f(4) = 322$

$f(7) = 3f(6) - f(5) = 843$

Bài toán 4: Cho hàm số f xác định trên tập N* thoả:

$f(1)=5$
$f\left(f(n)\right)=4n+9$. Tính $f(1789)$
$f(2^n)=2^{n+1}+3;\quad \forall n\in N^*$

Lời giải:

Ta có 1789=4.445+9, 445=4.109+9, 109=4.25+9, 25=4.4+9

Ta tính các giá trị:

$f(4)=f(2^2)=2^3+3=11$
$f(11)=f\left(f(4)\right)=4.4+9=25$
$f(25)=f\left(f(11)\right)=4.11+9=53$
$f(53)=f\left(f(25)\right)=4.25+9=109$
$f(109)=f\left(f(53)\right)=4.53+9=221$
$f(221)=f\left(f(109)\right)=4.109+9=445$
$f(445)=f\left(f(221)\right)=4.221+9=893$
$f(893)=f\left(f(445)\right)=4.445+9=1789$
$f(1789)=f\left(f(893)\right)=4.893+9=3581$

Bài toán 5: Cho hàm số f xác định trên R thoả:

$\dfrac{f(x)f(y)-f(xy)}{3}=x+y+2;\ \forall x,y\in R$ (5). Tính $f(36)$

Lời giải:

$\dfrac{f(0)f(0)-f(0)}{3}=2\Rightarrow f(0)=-2\quad hay\ f(0)=3$

+T/h $f(0)=-2$, ta có $\dfrac{f(x)f(0)-f(0)}{3}=x+2;\ \forall x\in R, y=0\Rightarrow f(x)=-\dfrac{3}{2}x-2$ không thoả (5)

+T/h $f(0)=3$, ta có $\dfrac{f(x)f(0)-f(0)}{3}=x+2;\ \forall x\in R, y=0\Rightarrow f(x)=x+3$ thoả (5). Suy ra: $f(36)=36+3=39$

Bài toán 6:

Đặt $f_1(x)=-\dfrac{2x+7}{x+3},\quad f_{n+1}(x)=f_1\left(f_n(x)\right);\quad n\geq 1$. Tính $f_{2001}(2002)$

Lời giải:

$$f_1(x)=-2-\frac{1}{x+3}$$

$$f_2(x)=f_2(f_1(x))=-2-\frac{1}{f_1(x)+3}=-2-\frac{1}{-2-\frac{1}{x+3}+3}=-3-\frac{1}{x+2}$$

$$f_3(x)=f_1(f_2(x))=-2-\frac{1}{f_2(x)+3}=-2-\frac{1}{-3-\frac{1}{x+2}+3}=x$$

Chứng minh bằng quy nạp: $f_{3n}(x)=x;\ \forall x\in N\setminus\{-2,-3\}$

Suy ra $f_{2001}(2002) = 2002$

Bài toán 7: Cho hàm số f xác định trên tập các số thực và thoả điều kiện: $\begin{cases} f(xy) = xf(y) + yf(x) & (1) \\ f(x+y) = f(x^{1993}) + f(y^{1993}) & (2) \end{cases}$ $\forall x, y \in R$. Tính $f(\sqrt{5753})$

Lời giải:

$(1): thay\ x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$(1): thay\ x = y = 1 \Rightarrow f(1) = 0$

$(2): thay\ y = 0 \Rightarrow f(x) = f(x^{1993})$

$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y); \quad \forall x, y \in R\ (2')$

Vậy hàm số f cộng tính trên R

$f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x)$

$(1): f(x^2) = 2xf(x)$

$\Rightarrow f(x^n) = nx^{n-1}f(x) \quad (x \neq 0, n \in N)$(C/m bằng quy nạp)

Suy ra $f(x) = 1993x^{1992}f(x)$. Nếu $f(x) \neq 0$ thì $1993x^{1992} = 1, \forall x \neq 0$ (!)

Vậy: $f(x) \equiv 0$. Kết luận $f(\sqrt{5753}) = 0$

Bài toán 8: Cho hai hàm số $f, g; \quad f: K \to K, g: K \to K \quad (K = (2;4))$ thoả điều kiện: $\begin{cases} f(g(x)) = g(f(x)) & (1) \\ f(x)g(x) = x^2 & (2) \end{cases}$ $\forall x \in K$. Chứng minh $f(3) = g(3)$

Lời giải:

Lấy $x_0 \in K, a = \dfrac{f(x_0)}{x_0} > 0$

Chứng minh bằng quy nạp: $f(a^n x_0) = a^{n+1}x_0; \quad \forall n \in N$

$+ a > 1, a^n x_0 \in K; \quad \forall n\ (!)\ (do\ a^n x_0 \to +\infty)$

$+ 0 < a < 1, (!) \quad (do\ a^n x_0 \to 0)$

+Vậy $a = 1 \Rightarrow f(x_0) = x_0 \Rightarrow f(x) = x; \forall x \in K$; tương tự $g(x) = x; \forall x \in K$

Kết luận: $f(x) = g(x); \forall x \in K \Rightarrow f(3) = g(3)$

Bài toán 9: (IMO) Cho hàm số $f: N \to N$ thoả điều kiện:

$\begin{cases} f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0;1\} & (1) \\ f(2) = 0,\ f(3) > 0,\ f(9999) = 3333 & (2) \end{cases}$. Tính $f(1982)$

Lời giải:

(1): $f(m+n) \geq f(m) + f(n)$

$m = n = 1 \Rightarrow 0 = f(2) \geq 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$m = 2, n = 1 \Rightarrow f(3) = f(2) + f(1) + 0 = 0(!) \vee f(3) = f(2) + f(1) + 1 = 1 \Rightarrow f(3) = 1$

$f(3.2) = f(3+3) \geq f(3) + f(3) = 2f(3) = 2$

$f(3.n) \geq n; \quad \forall n \in N$ (C/m bằng quy nạp)

+Nếu $f(3.n) = n$ thì $m > n$ ta có $f(3m) > m$. Thật vậy, $f(3(n+1)) > f(3n) + f(3) = n+1$

$+3333 = f(9999) = f(3.3333) \Rightarrow f(3n) = n$ với $n \le 3333$

Vậy $f(3.1982) = 1982$

Mặt khác $1982 = f(3.1982) \ge f(2.1982) + f(1982) \ge 3f(1982)$

$\Rightarrow f(1982) \le \dfrac{1982}{3} < 661$

$f(1982) \ge f(1980) + f(2) = f(3.660) + f(2) = 660$

Do đó $660 \le f(1982) < 661 \Rightarrow f(1982) = 660$

Bài toán 10: Cho hàm số f liên tục trên R thoả điều kiện:

$\begin{cases} f(f(x))f(x) = 1; \quad \forall x \quad (1) \\ f(1000) = 999 \quad (2) \end{cases}$. Tính $f(500)$

Lời giải:

$f(f(1000))f(1000) = 1 \Rightarrow f(999) = \dfrac{1}{999}$

Do hàm số f liên tục trên R và $f(999) = \dfrac{1}{999} < 500 < 999 = f(1000)$ nên tồn tại $x_0 \in (999;1000):\ \ f(x_0) = 500$

(1) $f(f(x_0))f(x_0) = 1 \Rightarrow f(500) = \dfrac{1}{500}$

II.Ước lượng giá trị hàm số:

Bài toán 1: Cho hàm số f xác định trên đoạn $[0;1]$, thoả:

$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0 \quad (1) \\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \le f(x) + f(y); \quad \forall x, y \in [0;1] \quad (2) \end{cases}$

1)Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm trên [0;1]

2)Tồn tại hay không hàm số xác định trên [0;1] thoả mãn điều kiện (1), (2) và không đồng nhất bằng 0?

Lời giải:

1) $x = y \Rightarrow f(x) \le 2f(x) \Rightarrow f(x) \ge 0; \quad \forall x \in [0;1]$

$x = 1,\ y = 0 \Rightarrow 0 \le f\left(\dfrac{1}{2}\right) \le f(0) + f(1) = 0 \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$

Dễ dàng chứng minh $f\left(\dfrac{1}{2^k}\right) = 0; \quad \forall k \in N$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm trên [0;1]

2)Hàm số $f(x) = \begin{cases} 0, & khi\ x \in Q \cap [0;1] \\ 1; & khi\ x \in [0;1] \setminus Q \end{cases}$ thoả mãn điều kiện bài toán

Bài toán 2: Cho hàm số f xác định trên R, thoả:

$\begin{cases} f(0) = 0 \quad (1) \\ f(x) = f(4-x) + f(14-x); \quad \forall x \quad (2) \end{cases}$

Hãy tìm số các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên đoạn [-1000;1000]

Lời giải:

$f(0)=f(4)=f(14)=0; \quad f(x)=f(10+x); \quad \forall x$

Vì vậy với mọi $x_1=10k, x_2=10k+4; \quad k\in Z$ đều là nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

Trên [-1000;1000] số điểm dạng x_1 (không kể điểm bội) là $\frac{1000+1000}{10}+1=201$

Trên [-1000;1000] số điểm dạng x_2 (không kể điểm bội) là $\frac{994+996}{10}+1=200$

Vậy số các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên đoạn [-1000;1000] không ít hơn 401.

Xét hàm số $f(x)=\begin{cases} 0, & khi \text{ x có dạng } x_1 \text{ hoặc } x_2 \\ 1, & \text{trong các trường hợp còn lại} \end{cases}$ thỏa điều kiện bài toán

+Nếu x có dạng x_1 thì $f(x)=0$; hơn nữa $4-x, 14-x$ có dạng x_2 nên $f(4-x)=f(14-x)=0$.

+Nếu x có dạng x_2 thì $f(x)=0$; hơn nữa $4-x, 14-x$ có dạng x_1 nên $f(4-x)=f(14-x)=0$.

+Nếu x không có dạng x_1, x_2 thì $f(x)=f(4-x)=f(14-x)=1$.

Vậy số các nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên đoạn [-1000;1000] là 401.

<u>Bài toán 3: Cho hàm số</u> f xác định trên K; $\mathrm{K}=[0;1]$, thoả:

$$\begin{cases} f(1)=1 \quad (1) \\ f(x)\geq 0 \quad (2) \\ f(x+y)\geq f(x)+f(y); \quad \forall x,y,x+y\in K \quad (3) \end{cases}$$

Chứng minh $f(x)\leq 2x; \quad \forall x\in K$

Lời giải:

1)Chứng minh $f\left(\frac{1}{2^n}\right)\leq \frac{1}{2^n}; \quad \forall n\in N^*$ bằng quy nạp.

2) $f(x+y)\geq f(x)+f(y)\geq f(x); \quad \forall x,y,x+y\in K$; suy ra f không giảm trên K.

3) $\forall x\in K$, chọn $k=\left[\log_2\frac{1}{x}\right], \quad k\leq \log_2\frac{1}{x}<k+1 \Rightarrow 2^k\leq \frac{1}{x}<2^{k+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^{k+1}}<x\leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow f(x)\leq f\left(\frac{1}{2^k}\right)=2.\frac{1}{2^{k+1}}<2x$

Bài toán 4: Cho hai hàm số liên tục trên K: $f,g:K\to K;\quad K=[0;1]$,

thoả: $\begin{cases} f(g(x))=g(f(x)) & (1)\\ f \text{ là hàm số tăng} & (2)\end{cases}$

Chứng minh $\exists a\in K: f(a)=g(a)=a$

Lời giải:

Đặt $h(x)=g(x)-x,\ h(x)$ là hàm số liên tục trên K và $h(0)=g(0)-0\ge 0, h(1)=g(1)-1\le 0$. Vậy $\exists x_0\in K: h(x_0)=0\quad hay\ g(x_0)=x_0$

+Nếu $f(x_0)=x_0$ thì ta có điều phải chứng minh.

+ Nếu $f(x_0)\ne x_0$. Khi đó ta xây dựng dãy số (x_n): $\begin{cases} x_1=f(x_0)\\ x_{n+1}=f(x_n), n\in N^*\end{cases}$

Chứng minh $g(x_n)=x_n;\quad n\in N^*$ bằng quy nạp.

Dãy (x_n) đơn điệu (tăng nếu $x_0<x_1$, giảm nếu $x_0>x_1$) và bị chặn nên (x_n) hội tụ: $\lim x_n=a\in K$. Do f,g liên tục trên K, nên:

$$\begin{cases} f(a)=f(\lim x_n)=\lim(f(x_n))=\lim x_{n+1}=a\\ g(a)=g(\lim x_n)=\lim(g(x_n))=\lim x_n=a\end{cases}$$

Vậy $\exists a\in K: f(a)=g(a)=a$

III.Tính tổng các giá trị hàm số:

Bài toán 1: (CaMO) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$, tính $S=\sum_{1}^{1995} f\left(\dfrac{i}{1996}\right)$

Lời giải:

Ta có $f(1-x)=\dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\dfrac{3}{9^x+3}\Rightarrow f(x)+f(1-x)=1$

$$S=\sum_{1}^{1995} f\left(\frac{i}{1996}\right)$$

$$=\left[f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{1995}{1996}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{1996}\right)+f\left(\frac{1994}{1996}\right)\right]+\dots+\left[f\left(\frac{997}{1996}\right)+f\left(\frac{999}{1996}\right)\right]+f\left(\frac{998}{1996}\right)$$

$$=997+f\left(\frac{1}{2}\right)=997+\frac{1}{2}=\frac{1995}{2}$$

Bài toán 2: Cho hàm số f xác định trên N^* và thỏa điều kiện: $\begin{cases} f(n+1)=n(-1)^{n+1}-2f(n)\\ f(1)=f(2005)\end{cases}$. Tính $S=\sum_{1}^{2004} f(i)$

Lời giải: Ta có

$f(2) = 1 - 2f(1)$
$f(3) = -2 - 2f(2)$
$f(4) = 3 - 2f(3)$
....
$f(2004) = 2003 - 2f(2003)$
$f(2005) = -2004 - 2f(2004)$

$\Rightarrow \sum_{2}^{2005} f(i) = 1 - 2 + 3 - 4 + ... + 2003 - 2004 - 2S$, thay $f(2005) = f(1)$.Ta có: 3S=-1002. Suy ra S=-334.

Bài toán 3: Cho hàm số $f : Q^+ \to R$ và thỏa điều kiện:

$\left| f(x+y) - f(x) \right| \le \frac{y}{x}; \quad \forall x, y \in Q^+$.

Chứng minh: $\sum_{1}^{n} \left| f(2^n) - f(2^i) \right| \le \frac{n(n-1)}{2}; \quad \forall n \in N$

Lời giải:

Cho $x = y = 2^i \Rightarrow \left| f\left(2^i + 2^i\right) - f(2^i) \right| \le \frac{2^i}{2^i} \Rightarrow \left| f\left(2^{i+1}\right) - f(2^i) \right| \le 1$

Do đó:

$\left| f\left(2^n\right) - f(2^i) \right| \le \left| f\left(2^n\right) - f(2^{n-1}) \right| + \left| f\left(2^{n-1}\right) - f(2^{n-2}) \right| + ... + \left| f\left(2^{i+1}\right) - f(2^i) \right| \le n - i$

$\sum_{1}^{n} \left| f(2^n) - f(2^i) \right| \le \sum_{1}^{n} (n-i) = \sum_{0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$

Bài toán 4: Cho hàm số f liên tục trên đoạn [0;1] thỏa mãn f(0) = f(1) .

Chứng minh $\forall n \in N^*, \exists c \in [0;1] \quad \textit{sao cho} \quad f(c) = f\left(c + \frac{1}{n}\right)$

Lời giải:

Xét hàm số $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \Rightarrow g(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{n-1}{n}\right]$. Ta có

$g(0) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)$

$g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$

....

$g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f\left(\frac{n}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

Suy ra: $\sum_{0}^{n-1} g\left(\frac{i}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0 \Rightarrow \exists i, j: \quad g\left(\frac{i}{n}\right) \le 0, g\left(\frac{j}{n}\right) \ge 0$

Do g liên tục nên $\exists$c nằm giữa $\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}$ và $\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{n}}$ sao cho $\mathrm{g(c)}=0$ hay $f\left(\mathrm{c}+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)=f(c)$

IV.Hàm tuần hoàn:

<u>Bài toán 1:</u>

Cho hàm số f : f xác định trên R thỏa $f(x)=f(x+4)+f(x-4), \forall x$

Chứng minh f là hàm số tuần hoàn.

Lời giải:

$f(x+4)+f(x-4)=f(x)$

$f(x+8)+f(x)=f(x+4)$

Suy ra

$f(x+8)=-f(x-4)\Rightarrow f(x+12)=-f(x)\Rightarrow f(x+24)=-f(x+12)=f(x)$

Vậy $f(x+24)=f(x);\forall x$ hay f là hàm số tuần hoàn.

<u>Bài toán 2: Cho hàm số</u> $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y); \quad \forall x,y\in R \quad (1) \\ \exists x_0 : f(x_0)=-1 \quad (2) \end{cases}$$

Chứng minh f là hàm số tuần hoàn.

Lời giải:

Ta có $x=y=0\Rightarrow 2f(0)=2[f(0)]^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) \\ f(0)=1 \end{array}\right.$

+ $f(0)=0\Rightarrow 2f(x_0)=2f(0)=0(!)$

+ $f(0)=1\Rightarrow f(2x)+f(0)=2[f(x)]^2 \Rightarrow f(2x)=2[f(x)]^2-1$

$\Rightarrow f(2x_0)+f(0)=2[f(x_0)]^2 \Rightarrow f(2x_0)=1$

(1)$\Rightarrow f(2x)+f(4x_0)=2f(x+2x_0)f(x-2x_0)$ (1')

$f(2x_0)=2[f(x_0)]^2-1=2.1-1=1, \; f(4x_0)=2[f(2x_0)]^2-1=2.1-1=1$

$\Rightarrow f(2x)+f(4x_0)=f(2x)+1=2[f(x)]^2$

(1'): $2[f(x)]^2=2f(x+2x_0)f(x-2x_0)\Rightarrow f(x+2x_0)f(x-2x_0)=[f(x)]^2$

(1): $f(x+2x_0)f(x-2x_0)=2f(x)f(2x_0)=2f(x)$

Suy ra $f(x+2x_0)=f(x-2x_0)=f(x); \quad \forall x$

Vậy f là hàm số tuần hoàn.

<u>Bài toán 3:</u>

Cho hàm số $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ thỏa mãn: $\begin{cases} f(x+3)\le f(x)+3 \quad (1) \\ f(x+2)\ge f(x)+2 \quad (2) \end{cases} \quad \forall x$

Chứng minh $g(x)=f(x)-x$ là hàm số tuần hoàn.

Lời giải:

$g(x+6)=f(x+6)-x-6=f\big((x+3)+3\big)-x-6\le f(x+3)-x-3\le f(x)-x=g(x)$

$g(x+6)=f(x+6)-x-6=f\big((x+4)+2\big)-x-6\ge f(x+4)-x-4\ge f(x)-x=g(x)$

Suy ra $g(x+6)=g(x); \quad \forall x$

Vậy $g(x) = f(x) - x$ là hàm số tuần hoàn.

(Nhận xétù: 6=BCNN(3;2); có thể tổng quát bài toán từ nhận xét trên)

Bài toán 4:

Cho hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} f(x); \quad \forall x$

Chứng minh $f(x)$ là hàm số tuần hoàn.

Lời giải:

$f(x+2) + f(x) = \sqrt{2} f(x+1)$

$f(x+1) = \sqrt{2} f(x) - f(x-1)$

$\Rightarrow f(x+2) + f(x) = \sqrt{2}\left[\sqrt{2} f(x) - f(x-1)\right] \Rightarrow f(x+2) - f(x) = -\sqrt{2} f(x-1)$

$\Rightarrow f(x+3) - f(x+1) = -\sqrt{2} f(x) \ (1')$

Từ (1) và (1’), ta có: $\Rightarrow f(x+3) + f(x-1) = 0 \Rightarrow f(x+3) = -f(x-1)$

$\Rightarrow f(x+4) = -f(x) \Rightarrow f(x+8) = -f(x+4) = f(x)$

Vậy $f(x)$ là hàm số tuần hoàn.

V.Hàm hằng:

Bài toán 1:

Cho hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f(xy) = \dfrac{f(x) + f(y)}{x+y}, \forall x, y : x + y \neq 0$

Chứng minh f là hàm hằng.

Lời giải:

$f(x) = \dfrac{f(x) + f(1)}{x+1} \Rightarrow (x+1) f(x) = f(x) + f(1) \Rightarrow xf(x) = f(1), \forall x \neq -1$

$x = 0 \Rightarrow f(1) = 0$

$(x+1) f(x) = f(x), x \notin \{-1;0\}$

$+ x \notin \{-1;0\}, f(x) = 0$

$+ \ f(0) = \dfrac{f(x) + f(0)}{x}, \forall x \neq 0 \Rightarrow xf(0) = f(x) + f(0)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2f(0) = f(2) + f(0) \Rightarrow f(0) = f(2) = 0 \\ -1f(0) = f(-1) + f(0) \Rightarrow f(-1) = -2f(0) = 0 \end{array}\right.$$

Vậy $f(x) \equiv 0$

Bài toán 2:

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f\left(f(x) + y\right) = yf\left(x - f(y)\right); \forall x, y$

Lời giải:

$f\left(f(x)\right) = 0; \forall x$. Đặt $f(0) = a$. $f\left(f\left(f(y)\right) + y\right) = yf\left(f(y) - f(y)\right) \Rightarrow f(y) = y.a$

Suy ra $f(x) = ax$. Ta có $f\left(ax + y\right) = yf\left(x - ay\right) \Rightarrow a(ax+y) = ya(x - ay)$

$\Rightarrow a^2(x^2 + y^2) + a(y - xy) = 0; \quad \forall x, y \Rightarrow a = 0$

Vậy $f(x) \equiv 0$

Bài toán 3: Cho hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa:

$$\begin{cases} f(0) = \dfrac{1}{2} & (1) \\ \exists a: f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x); \quad \forall x, y & (2) \end{cases}$$

Chứng minh f là hàm hằng.

Lời giải:

$$f(0) = f(0)f(a) + f(0)f(a) \Rightarrow f(a) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = f(x)f(a) + f(0)f(a-x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(a-x)\right] \Rightarrow f(x) = f(a-x)$$

$$f(x+a-x) = f(x)f(a-a+x) + f(a-x)f(a-x)$$

$$\Rightarrow f(a) = \left[f(x)\right]^2 + \left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{2} \\ f(x) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$+\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = 2f\left(\dfrac{x}{2}\right)f\left(a - \dfrac{x}{2}\right) = 2\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0; \quad \forall x$, nên $f(x) = \dfrac{1}{2}; \quad \forall x$

là hàm hằng thỏa điều kiện bài toán.

<u>Bài toán 4: Tìm tất cả các hàm số</u> $f: \mathrm{Z} \to \mathrm{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}; \quad x, y \in Z \wedge (x+y) \vdots 3$$

Lời giải:

$$f(n) = f\left(\frac{0+3n}{3}\right) = \frac{f(0) + f(3n)}{2} \Rightarrow 2f(n) = f(0) + f(3n)$$

$$f(n) = f\left(\frac{n+2n}{3}\right) = \frac{f(n) + f(2n)}{2} \Rightarrow 2f(n) = f(n) + f(2n) \Rightarrow f(n) = f(2n)$$

$$f(n) = f(2n) = f\left(\frac{3n+3n}{3}\right) = \frac{f(3n) + f(3n)}{2} \Rightarrow f(n) = f(3n)$$

$$\Rightarrow f(n) = f(2n) = f(3n),\ f(n) = f(0)$$

Vậy $f(x) \equiv c$ (c tùy ý) là hàm hằng thỏa điều kiện bài toán.

<u>Bài toán 5: Tìm tất cả các hàm số</u> $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ thỏa mãn:

$$3f(n) - 2f\left(f(n)\right) = n; \quad \forall n \in N \ (1)$$

Lời giải:

Đặt $g(n) = f(n) - n$

(1): $2f\left(f(n)\right) - 2f(n) = f(n) - n;$

Suy ra $2g\left(f(n)\right) = g(n)$

$$g(n) = 2g\left(f(n)\right) = \ldots = 2^m g\Big[\underbrace{f\big(f(\ldots f(n)\big)}_{m \text{ lần}}\Big] \Rightarrow g(n) \vdots 2^m; \forall m \in N$$

Vậy $g(n) \equiv 0 \Rightarrow f(n) = n$ thỏa điều kiện bài toán.

<u>Bài toán 6: Tìm tất cả các hàm số</u> $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ thỏa mãn:

$f(x+y)=f(x)e^{f(y)-1};\quad \forall x,y \quad (1)$

Lời giải:

(1) $f(x)=f(x)e^{f(0)-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(0)=1 \end{array}\right.$

+ $f(x)=0$ thỏa mãn điều kiện

+ $f(x)\neq 0$, khi đó $\exists x_0 : f(x_0)\neq 0 \Rightarrow f(0)=1$

$f(y)=f(0)e^{f(y)-1} \Rightarrow f(x)=e^{f(x)-1}$. Đặt $g(t)=e^{t-1}-t$

Ta có:

$g'(t)=e^{t-1}-1;\quad g'(t)=0 \Leftrightarrow t=1;\quad \min g(t)=g(1)=0 \Rightarrow g(t)\geq 0, \forall t$

$g(t)=0 \Leftrightarrow t=1$. Do đó $e^{f(x)-1}-f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=e^{f(x)-1} \Leftrightarrow f(x)=1$

Vậy có hai hàm thỏa mãn điều kiện bài toán là: $f(x)=0 \vee f(x)=1;\quad \forall x$

<u>Bài toán 7: Tìm tất cả các hàm số</u> $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ thỏa mãn:

$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2);\quad \forall x,y \quad (1)$

Lời giải:

$\begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases}$. Thế vào (1), ta có: $vf(u)-uf(v)=(u^2-v^2)uv$

$\Rightarrow \dfrac{f(u)}{u}-u^2=\dfrac{f(v)}{v}-v^2 \Rightarrow g(x)=\dfrac{f(x)}{x}-x^2=a\ (x\neq 0)$ là hàm hằng.

Vậy $f(x)=x^3+ax\ (\forall x\neq 0)$. (1): $2xf(0)=0 \quad (x=y\neq 0)\Rightarrow f(0)=0$

Kết luận $f(x)=x^3+ax;\quad \forall x,\quad a$ tùy ý thỏa điều kiện.

<u>Bài toán 8: Cho hàm số không giảm</u> $f:\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+$ thỏa mãn:

$f(ax)=f(x);\quad (0<a\neq 1) \quad (1)$

Lời giải:

Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp $f(a^n x)=f(x)$

$+a>1$. Xét $0<x<y;\quad n=\left[\log_a \dfrac{y}{x}\right] \Rightarrow n\leq \log_a \dfrac{y}{x}<n+1$

$\Rightarrow a^n\leq \dfrac{y}{x}<a^{n+1} \Rightarrow a^n x\leq y<a^{n+1}x \Rightarrow f(a^n x)\leq f(y)\leq f(a^{n+1}x)$

$\Rightarrow f(x)\leq f(y)\leq f(x)\Rightarrow f(x)=f(y)$. Vậy $f(x)$ là hàm hằng.

$+0<a<1$ Xét $0<x<y;\quad n=\left[\log_a \dfrac{y}{x}\right] \Rightarrow n\leq \log_a \dfrac{y}{x}<n+1$

$\Rightarrow a^n\geq \dfrac{y}{x}>a^{n+1} \Rightarrow a^n x\geq y>a^{n+1}x \Rightarrow f(a^n x)\geq f(y)\geq f(a^{n+1}x)$

$\Rightarrow f(x)\geq f(y)\geq f(x)\Rightarrow f(x)=f(y)$. Vậy $f(x)$ là hàm hằng.

Kết luận $f(x)$ là hàm hằng thỏa điều kiện.

<u>Bài toán 9: Cho hàm số</u> $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ thỏa mãn:

$f(x^3+2y)=f(y^3+2x);\quad \forall x,y \quad (1)$. Chứng minh $f(x)$ là hàm hằng.

Lời giải:

$$\begin{cases} x^3+2y=u \\ y^3+2x=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{u-x^3}{2} \\ y^3+2x=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\dfrac{u-x^3}{2}\right]^3+2x-v=0(1') \\ y^3+2x=v(1'') \end{cases}$$

(1') là phương trình bậc lẻ (bậc 9) theo x nên (1') có ít nhất 1 nghiệm. (1") là phương trình bậc lẻ (bậc 3) theo y nên (1") có ít nhất 1 nghiệm. Vậy $\forall u,v$ ta luôn có $(x;y)$, mà (1) *suy ra* $f(u)=f(v)$ là hàm hằng.

Kết luận $f(x)$ là hàm hằng.

<u>Bài toán 10: (Dự tuyển IMO) Tìm tất cả các hàm số liên tục</u> $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ thỏa mãn $f\left(x^2\right)+f(x)=x^2+x;\quad \forall x \quad (1)$.

Lời giải:

Đặt $g(x)=f(x)-x$. Ta có $g(x)$ liên tục và $g\left(x^2\right)+g(x)=f\left(x^2\right)-x^2+f(x)-x=-x^2-x+x^2+x=0;\quad \forall x \quad (1')$

$\Rightarrow g(0)=0,\ g(1)=0$

$(1')\Rightarrow g\left((-x)^2\right)+g(-x)=0\Rightarrow g\left(x^2\right)+g(-x)=0\Rightarrow g(x)=g(-x);\quad \forall x$. Suy ra $g(x)$ là hàm số chẵn. Ta chứng minh $g(x)$ là hàm hằng với $x>0$

$x>0\Rightarrow g(x)=-g(x^2)=g(x^4)\Rightarrow g(x)=g(x^{\frac{1}{4}})$. Lấy $a>0$ tùy ý. Xét dãy số $(x_n):\begin{cases} x_0=a \\ x_{n+1}=(x_n)^{\frac{1}{4}} \end{cases}$. Ta có $\lim x_n=1$

$g(x_{n+1})=g(x_n^{\frac{1}{4}})=g(x_n)=...=g(x_0)=g(a)$. Do $g(x)$ liên tục nên: $g(a)=\lim g(a)=\lim g(x_n)=g\left(\lim x_n\right)=g(1)=0$. Vậy $g(x)=0;\quad \forall x$

Kết luận $f(x)=x$ thỏa điều kiện.

<u>Bài toán 11: Tìm tất cả các hàm số liên tục</u> $f:\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+$ thỏa mãn $f(x)=f\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right);\quad \forall x \quad (1)$.

Lời giải:

Nhận xét: hàm số f là hàm số chẵn.

Lấy $a\ge 0$ bất kỳ.

$+\ 0\le a\le \dfrac{1}{2}$. Xét dãy số $(x_n):\begin{cases} x_0=a \\ x_{n+1}=x_n^2+\dfrac{1}{4} \end{cases}$

$f(x_n)=f\left(x_{n-1}^2+\dfrac{1}{4}\right)=f(x_{n-1})=...=f(x_0)=f(a)$.

Ta có $x_1 = x_0^2 + \frac{1}{4} = a^2 + \frac{1}{4} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Bằng quy nạp ta chứng minh $x_n \le \frac{1}{2}$. (x_n) bị chặn trên và (x_n) tăng $\left(x_{n+1} - x_n = x_n^2 + \frac{1}{4} - x_n = \left[x_n - \frac{1}{2}\right]^2\right)$ nên (x_n) hội tụ. $b = \lim x_n$, ta có $\lim x_{n+1} = \lim\left(x_n^2 + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow b = b^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$. Vì hàm số f liên tục nên $f(a) = \lim f(a) = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ là hằng số.

$+ a > \frac{1}{2}$. Xét dãy số (x_n): $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}} \end{cases} \Rightarrow x_n = x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}$

$f(x_{n+1}) = f\left(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}\right) = f(x_n) = ... = f(x_0) = f(a)$.Dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới nên (x_n) hội tụ. $b = \lim x_n$, ta có $\lim x_n = \lim\left(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow b = b^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$. Vì hàm số f liên tục nên $f(a) = \lim f(a) = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ là hằng số.

Hàm số f là hàm hằng với $x \ge 0$, mà hàm số f là hàm chẵn nên hàm số f là hàm hằng trên R

A.7)Một số kỹ thuật giải phương trình hàm.

A.7.1/Giải phương trình hàm bằng phép thế

Bài toán 1: (Chọn HS Giỏi Tiền Giang Vòng 2-2004-2005) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa điều kiện $P(a+b) = P(a) + 7P(b); \quad a,b \in R : ab(a+b) = 2b^3$.

Lời giải:

Phân tích:

$$ab(a+b) = 2b^3 \ (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ a = b \\ a = -2b \end{array}\right.$$. Vậy $(x;x); \quad \forall x$ thỏa (1)

Trình bày:

Ta có $(x;x); \quad \forall x$ thỏa (1), nên $P(x+x) = P(x) + 7P(x); \quad \forall x \in R$. Suy ra $P(2x) = 8P(x); \quad \forall x \in R \quad (1'')$. Đa thức $P(x) = \sum_0^n a_i x^i; \quad \forall x\,(1''')$. Từ (1”) và (1’”), ta có:

$$\sum_0^n a_i (2x)^i = \sum_0^n 8a_i x^i; \quad \forall x \Leftrightarrow 2^i a_i = 8a_i \Leftrightarrow (2^i - 8)a_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, \forall i \ne 3$$

Vậy $P(x) = a_3x^3; \quad \forall x$ thỏa điều kiện bài toán.

Bài toán 2: (AusMO) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{2} \\ f(xy) = f(x)f\left(\dfrac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\dfrac{3}{x}\right); \quad \forall x, y \in R \end{cases} \quad (1).$$

Lời giải:

(1): $\begin{cases} f(1.3) = f(1)f\left(\dfrac{3}{3}\right) + f(3)f\left(\dfrac{3}{1}\right) \\ f(1.y) = f(1)f\left(\dfrac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\dfrac{3}{1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(3) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} + \left(f(3)\right)^2 \Rightarrow f(3) = \dfrac{1}{2} \\ f\left(\dfrac{3}{y}\right) = f(y) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{2} \\ f(xy) = 2f(x)f(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{2} \\ f(x.\dfrac{3}{x}) = 2f(x)f(\dfrac{3}{x}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{2} \\ f(3) = 2f(x)f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{2} \\ f(x) = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Với $x > o, \; f(x^2) = 2\left[f(x)\right]^2 = \dfrac{1}{2}$

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2}; \quad \forall x > 0$ thỏa điều kiện.

Bài toán 3: (BalMO) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$f\left[xf(x) + f(y)\right] = \left(f(x)\right)^2 + y; \quad \forall x, y \in R \quad (1).$

Lời giải:

(1): $f\left[0.f(0) + f(y)\right] = \left(f(0)\right)^2 + y \Rightarrow f\left[f(y)\right] = \left(f(0)\right)^2 + y$

$f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow \left(f(0)\right)^2 + y_1 = \left(f(0)\right)^2 + y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$. Vậy là f một đơn ánh.Vế phải của (1) là hàm nhất biến theo y nên có tập giá trị là R. Vậy $\exists a : f(a) = 0$. (1) $\Rightarrow f\left[af(a) + f(a)\right] = \left(f(a)\right)^2 + a \Rightarrow f(0) = a$. Do f là đơn ánh nên $a = 0$. Suy ra $x = 0 \Rightarrow f\left(f(y)\right) = y \Rightarrow f\left(f(x)\right) = x; \quad \forall x$.

(1): $y = 0 \Rightarrow f\left(f(x)\right) = \left(f(x)\right)^2 \Rightarrow f\left(f(x)f\left(f(x)\right)\right) = \left(f(f(x))\right)^2 \Rightarrow f\left(xf(x)\right) = x^2$

$\Rightarrow \left(f(x)\right)^2 = x^2 \Rightarrow$ với mỗi x, ta có $f(x) = x \vee f(x) = -x$. Giả sử có $a, b \neq 0 : f(a) = -a, \; f(b) = -b \Rightarrow f\left[a.(-a) + b\right] = a^2 + b \neq \pm\left[-a^2 + b\right] \quad (!)$.

Vậy $f(x) = x, \forall x \quad \vee f(x) = -x, \quad \forall x$ thỏa điều kiện.

Bài toán 4: (VMO) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4; \quad \forall x \in R \quad (1).$

Lời giải:

(1): $(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4$

$\Rightarrow (1-x)^2\left[2x-x^4-x^2f(x)\right]+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$

$\Rightarrow (1-x)^2(2x-x^4)+\left[1-(1-x^2)x^2\right]f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$

$\Rightarrow (x^2-x-1)(x^2-x+1)f(x)=(x^2-x-1)(1-x)(1+x^3)$

$\Rightarrow (x^2-x-1)f(x)=(x^2-x-1)(1-x)(1+x)$

$\Rightarrow f(x)=1-x)(1+x);\ \forall x\neq a,b.\ a,b$ là nghiệm của pt $x^2-x-1=0$. Tìm $f(a),f(b)$. ta có $\begin{cases}a+b=1\\ ab=1\end{cases}$. (1) $\begin{cases}a^2f(a)+f(b)=2a-a^4\\ b^2f(b)+f(a)=2b-b^4\end{cases}$. Đặt $f(a)=c;c\in R$

Vậy $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\neq a,b\\ c, & x=a\\ -a^4-a^2c+2a, & x=b\end{cases}$; a,b là nghiệm của pt : $x^2-x-1=0$ thỏa điều kiện.

<u>Bài toán 5: (Dự tuyển IMO) Tìm tất cả các hàm số</u> $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ thỏa mãn $f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x);\quad \forall x,y\in R\quad (1)$.

Lời giải:

(1): $x\in R,\quad \alpha=\dfrac{f(0)-x}{2}\Rightarrow x=f(0)-2\alpha$. Chọn $\beta=-f(-\alpha),\gamma=f(\beta)-\alpha$.

Khi đó $f(\gamma)=f(f(\beta)-\alpha)=2(-\alpha)+f(f(-\alpha)+\beta)=-2\alpha+f(0)=x$. Vậy f là một toàn ánh, suy ra $\exists a: f(a)=0$.

$\forall y\quad f(y)=f(0+y)=f(f(a)+y)=2a+f(f(y)-a)$.

$\forall x,\exists y: f(y)=x+a\Rightarrow x=f(y)-a$

$x=2a+f(f(y)-a)-a=f(x)+a\Rightarrow f(x)=x-a$ thỏa điều kiện bài toán.

Vậy $f(x)+c;\quad \forall x,c:const$

<u>Bài toán 6: (CaMO) Tìm tất cả các hàm số</u> $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ thỏa mãn $f((x-y)^2)=x^2-2yf(x)+(f(y))^2;\quad \forall x,y\in R\quad (1)$.

Lời giải:

(1): $f((0-0)^2)=0^2-20f(0)+(f(0))^2\Rightarrow f(0)=(f(0))^2\Rightarrow f(0)=0\vee f(0)=1$.

+T/h: $f(0)=1,\ y=0.\quad (1)\Rightarrow f(x^2)=x^2+1;\quad suy\ ra\quad f(x)=x+1;\quad x\geq 0$

$x=0.(1)\Rightarrow f(y^2)=-2y+(f(y))^2\Rightarrow (f(y))^2=y^2+1+2y=(y+1)^2$

$\Rightarrow f(y)=y+1\vee f(y)=-y-1$

$x=y.(1): f(0)=x^2-2xf(x)+(f(x))^2\Rightarrow 1=(x-f(x))^2\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x-f(x)=1\\ x-f(x)=-1\end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=x-1\\ f(x)=x+1\end{array}\right.$. Thử lại $f(x)=x+1$ thỏa điều kiện bài toán.

+T/h: $f(0)=0,\ y=0.\quad (1)\Rightarrow f(x^2)=x^2;\quad suy\ ra\quad f(x)=x;\quad x\geq 0$

$x=y.(1): f(0)=x^2-2xf(x)+(f(x))^2\Rightarrow 0=(x-f(x))^2\Rightarrow f(x)=x$, thỏa điều kiện.

Vậy có hai hàm thỏa mãn điều kiện là $f(x)=x+1;\forall x\vee f(x)=x;\forall x$

A.7.2/Giải phương trình dựa vào giá trị của đối số, của hàm số

Bài toán 1: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ thỏa mãn

$f(x+f(y))=x+f(y)+xf(y);\quad \forall x,y\in R\quad (1)$.

Lời giải:

(1): $f(0+f(y))=0+f(y)+0f(y)\Rightarrow f(f(y))=f(y)$ *hay* $f(f(x)=f(x);\forall x$.

Vậy $\forall u$ thuộc tập giá trị, ta có $f(u)=u$

+T/h: $\exists y_0: f(y_0)\neq -1,\quad (1): f(x+f(y_0))=(1+f(y_0))x+f(y_0)$. Ta có vế phải là hàm bậc nhất theo x có tập giá trị là R, nên vế trái cũng có tập giá trị là R. Vì vậy, $\forall t\in R,\exists u: f(u)=t$.

Suy ra $f(t)=f(f(u))=f(u)=t\quad hay\quad f(x)=x;\forall x$: thử lại thấy không thỏa điều kiện.

+T/h: $\forall y: f(y)=-1\quad hay\quad f(x)=-1;\forall x$: thử lại thấy thỏa điều kiện.

Vậy hàm thỏa mãn điều kiện là $f(x)=-1;\quad \forall x$

Bài toán 2: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ thỏa mãn

$f(x-f(y))=2f(x)+x+f(y);\quad \forall x,y\in R\quad (1)$.

Lời giải:

(1): $f(f(y)-f(y))=2f(f(y))+f(y)+f(y)\Rightarrow f(f(y))=-f(y)+\frac{a}{2}[a=f(0)]$.

$\Rightarrow f(x)=-x+\frac{a}{2};\forall x\,(1')$

(1): $f(f(x)-f(y))=2f(f(x))+f(x)+f(y)$

$\Rightarrow f(f(x)-f(y))=-[f(x)-f(y)]+a$

(1): $f(f(x)-f(y)-f(y))=2f(f(x)-f(y))+f(x)-f(y)+f(y)$

$\Rightarrow f(f(x)-2f(y))=-2[f(x)-f(y)]+2a+f(x)=-[f(x)-2f(y)]+2a$

$(1): f(x-f(y))-2f(x)=x+f(y),\ y=0\Rightarrow f(x-a)-2f(x)=x+a$. Ta thấy vế phải có tập giá trị là R nên vế trái cũng có tập giá trị là R. $\forall t,\quad t=f(u)-2f(v)\Rightarrow f(t)=f(f(u)-2f(v))=-(f(u)-2f(v))+2a=-t+2a$.

Hay $f(x)=-x+2a;\quad \forall x\,(1'')$. Từ (1') và (1''), ta có $a=0$. Thử lại thấy thỏa điều kiện.

Vậy hàm thỏa mãn điều kiện là $f(x)=-x;\quad \forall x$

Bài toán 3: (IMO) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ thỏa mãn

$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1;\quad \forall x,y\in R\quad (1)$.

Lời giải:

(1): $f(f(y)-f(y))=f(f(y))+f(y)f(y)+f(f(y))-1$

$\Rightarrow f(f(y))=-\frac{1}{2}(f(y))^2+\frac{a+1}{2}[a=f(0)]\Rightarrow f(f(x))=-\frac{1}{2}(f(x))^2+\frac{a+1}{2}(1')$

(1): $f(f(x)-f(y))=f(f(y))+f(x)f(y)+f(f(x))-1$

$\Rightarrow f(f(x)-f(y)) = -\frac{(f(y))^2}{2} + \frac{a+1}{2} + f(x)f(y) - \frac{(f(x))^2}{2} + \frac{a+1}{2} - 1$

$\Rightarrow f(f(x)-f(y)) = -\frac{((f(x)-f(y))^2}{2} + a$. Nhận xét $f(x) \equiv 0$ không thỏa (1) nên $\exists y_0 : f(y_0) \neq 0$. Từ (1), ta có $f(x - f(y_0)) - f(x) = f(f(y_0)) + xf(y_0) - 1$. Vế trái là một hàm bậc nhất theo x nên có tập giá trị là R. Suy ra vế phải cũng có tập giá trị là R.

$\forall x, \exists u, v : x = f(u) - f(v) \Rightarrow f(x) = f(f(u) - f(v)) = -\frac{1}{2}(f(u) - f(v))^2 + a, \forall x$

$f(f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x))^2 + a, \forall x \ (1'')$. Từ (1') và (1''), ta có $a = \frac{a+1}{2} \Rightarrow a = 1$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1; \quad \forall x$. Thử lại thấy thỏa điều kiện.

Vậy hàm thỏa mãn điều kiện là $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1; \quad \forall x$

A.7.3/Giải phương trình dựa vào tính đơn điệu

Bài toán 1: Tìm tất cả các hàm đơn điệu $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ thỏa mãn

$f(x + f(y)) = f(x) + y; \quad \forall x, y \in R \quad (1)$.

Lời giải:

$f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow f(x + f(y_1)) = f(x + f(y_2)) \Rightarrow f(x) + y_1 = f(x) + y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$.

Vậy f là đơn ánh. $(1) : f(0 + f(y)) = f(0) + y \Rightarrow f(f(x)) = f(0) + x; \forall x$

$(1) : f(f(x) + f(y)) = f(f(x)) + y = f(0) + x + y = f(f(x+y))$. Vì f là đơn ánh nên $f(x+y) = f(x) + f(y); \forall x, y$. Suy ra f là đơn ánh và cộng tính trên R. Ta có $f(x) = ax; \forall x \ [a \neq 0]$, thay vào (1):

$f(x + f(y)) = a(x + f(y)) = a[x + ay]$, $f(x) + y = ax + y$

$\Rightarrow ax + a^2 y = ax + ay, \forall y \Rightarrow a = \pm 1$. Thử lại thấy thỏa điều kiện.

Vậy có hai hàm thỏa mãn điều kiện là $f(x) = x; \forall x \vee f(x) = -x; \forall x$

Bài toán 2: Tìm tất cả các hàm tăng thật sự $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ thỏa mãn

$f(f(x) + y) = f(x+y) + 1; \quad \forall x, y \in R \quad (1)$.

Lời giải:

$(1) : f(f(x) + 0) = f(x + 0) + 1 \Rightarrow f(f(x)) = f(x) + 1$.

$(1) : f(f(f(x)) + y) = f(f(x) + y) + 1 \Rightarrow f(f(x) + 1 + y) = f(x+y) + 1 + 1$

$(1) : f(f(x) + f(y)) = f(x + f(y)) + 1 = f(x+y) + 1 + 1$

$\Rightarrow f(f(x) + y + 1) = f(f(x) + f(y))$. Vì hàm f đơn điệu nên $\Rightarrow f(x) + y + 1 = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x) = x + 1; \quad \forall x$. Thử lại thấy thỏa điều kiện.

Vậy hàm thỏa mãn điều kiện là $f(x) = x + 1; \forall x$

Bài toán 3: (IMO) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ thỏa mãn

$f(x^2 + f(y)) = (f(x))^2 + y; \quad \forall x, y \in R \quad (1)$.

Lời giải:

$f(y_1)=f(y_2)\Rightarrow f(x^2+f(y_1))=f(x^2+f(y_2))\Rightarrow (f(x))^2+y_1=(f(x))^2+y_2$

$\Rightarrow y_1=y_2$. Vậy f là đơn ánh. Vế trái là một hàm bậc nhất theo y nên có tập xác định là R, suy ra vế phải có tập xác định là R. $\exists! a: f(a)=0$.

Đặt $f(0)=b$

$(1): f(0^2+f(y))=(f(0))^2+y\Rightarrow f(f(y))=y+b^2 \Rightarrow f(f(x))=x+b^2$

$(1): f(0^2+f(a))=(f(0))^2+a\Rightarrow b=b^2+a$

$(1): f(a^2+f(a))=(f(a))^2+a\Rightarrow f(a^2+0)=0^2+a\Rightarrow f(a^2)=a$

$\Rightarrow f(a)=f(f(a^2))=a^2+b^2\Rightarrow 0=a^2+b^2\Rightarrow a=b=0$.

Suy ra $f(f(x))=x;\quad \forall x$

$(1): f(x^2+f(0))=(f(x))^2+0\Rightarrow f(x^2)=(f(x))^2;\quad \forall x\quad (1')$

Suy ra $x\ge 0\Rightarrow f(x)\ge 0\wedge f(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

$x\ge 0,\ y\in R: f(x+y)=f\left[(\sqrt{x})^2+f(f(y))\right]=\left(f(\sqrt{x})\right)^2+f(y)=\left(f(\sqrt{x})^2\right)+f(y)$

$\Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)$. Vậy f cộng tính.

$x>y\Rightarrow x-y>0\Rightarrow f(x-y)>0.\ f(x)=f((x-y)+y)=f(x-y)+f(y)>f(y)$.

$x>y\Rightarrow f(x)>f(y)$. Vậy f tăng thật sự. Suy ra $f(x)=kx;\ k>0,\quad \forall x\in R$.

Từ ø $(1')\Rightarrow k=1$. Thử lại thấy thỏa điều kiện.

Vậy hàm thỏa mãn điều kiện là $f(x)=x;\forall x$

A.7.4/Giải phương trình dựa vào tính liên tục

Bài toán 1: Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên R thỏa mãn

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right);\quad \forall x\in R\quad (1).$$

Lời giải:

Bằng quy nạp, ta có: $f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right);\quad \forall x\in R,\forall n\in N$. Do f liên tục trên R nên $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0);\quad \forall x\in R$.

Vậy hàm thỏa mãn điều kiện là $f(x)=c;\forall x\quad (c:const)$

Bài toán 2: Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:R\to R$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy;\quad \forall x,y \end{cases}(1)$$

Lời giải:

$(1): f(x+0)=f(x)+f(0)+2.0\Rightarrow f(0)=0$

$(1): f(x+y)-(x+y)^2-2(x+y)=f(x)-x^2-2x+f(y)-y^2-2y (1')$.

Đặt $g(x)=f(x)-x^2-2x$ liên tục trên R. $(1')\Rightarrow g(x+y)=g(x)+g(y)$. Hàm $g(x)$ liên tục và cộng tính nên $g(x)=ax\wedge g(1)=f(1)-1-2=-4$. Suy ra $g(x)=-4$

Vậy hàm thỏa mãn điều kiện là $f(x)=x^2-2x;\forall x$

Bài toán 3: Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: R^+ \to R^+$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(2006) < f(2007)\ (1.1) \\ f(f(x)) = \dfrac{1}{x};\quad \forall x \neq 0\ (1.2) \end{cases}$$

Lời giải:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Vậy f đơn ánh.

Suy ra f đơn điệu (do đơn ánh và liên tục), mà do (1.1) nên f đồng biến trên R+. Khi đó $f(f(x)) = \dfrac{1}{x}$ cũng đồng biến trên R+ (!)

Vậy không có hàm f thỏa mãn điều kiện.

A.7.5/Giải phương trình dựa vào các cấu trúc đại số,ø nghiệm của phương trình đại số, phương pháp tổng hợp

Bài toán 1: (Chọn HS Giỏi Tiền Giang Vòng 1-2004-2005) Xác định hàm số sao cho $f\left(-\dfrac{1}{x}\right) + f(x) = 2004;\quad \forall x \neq 0 \quad (1)$.

Lời giải:

Phân tích:

$$(1):\quad f\left(-\frac{1}{x}\right) + f(x) = 2004$$

$$c \quad + \quad c \quad = \quad 2004$$

$\Rightarrow c = 1002$

Trình bày:

Đặt $f(x) = g(x) + 1002\ (1')$. Thế (1’) vào (1), ta có:

$$g\left(-\frac{1}{x}\right) + 1002 + g(x) + 1002 = 2004 \Rightarrow g\left(-\frac{1}{x}\right) + g(x) = 0;\quad \forall x \neq 0 \quad (1'')$$

$$(1'') \Rightarrow g(x) = -g\left(-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) - g\left(-\frac{1}{x}\right)\right]$$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{1}{2}\left[h(x) - h\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right];\quad h(x)$ là một hàm số tùy ý xác định trên $\mathrm{R} \setminus \{0\}$

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[h(x) - h\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right] + 1002;\quad \forall x \neq 0$ thỏa điều kiện bài toán.

Bài toán 2: Xác định hàm số $f: [0;1] \to R$ sao cho:

$f(x) + f(1-x) = 1;\quad \forall x \in [0;1] \quad (1)$.

Lời giải:

Phân tích:

$$f(x) + f(1-x) = 1;\quad \forall x \in [0;1] \quad (1)$$

$$c \quad + \quad c \quad = 1$$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

Trình bày:

Đặt $f(x) = g(x) + \frac{1}{2}\,(1')$. Thế (1') vào (1), ta có:

$$g(x) + \frac{1}{2} + g(1-x) + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow g(x) + g(1-x) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) - g(1-x)\right]$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) - h(1-x)\right]; \quad h(x) \text{ là một hàm tùy ý xác định trên } [0;1]$$

Vậy $\quad f(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) - h(1-x)\right] + \frac{1}{2}; \quad h(x)$ là một hàm tùy ý xác định trên $[0;1]$

thỏa điều kiện bài toán.

<u>Bài toán 3: Xác định hàm số</u> $f : [0;1] \to R$ sao cho:

$f(x) + f(1-x) \geq 1; \quad \forall x \in [0;1] \quad (1)$.

Lời giải:

Trình bày:

Đặt $f(x) = g(x) + \frac{1}{2}\,(1')$. Thế (1') vào (1), ta có:

$$\begin{cases} g(x) + \frac{1}{2} + g(1-x) + \frac{1}{2} = 1 + h(x) \Rightarrow g(x) + g(1-x) = h(x) \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$$

(Ta đã chuyển bất phương trình hàm về phương trình hàm)

Cấu trúc đại số của $h(x)$ là:

$$h(1-x) = h(x); \text{ đối xứng qua } x = \frac{1}{2} \left(\text{điểm bất động : } x = \frac{1}{2}\right)$$

$$h(1-x) = h(x),\ x = \frac{1}{2} + t \Rightarrow h\left(\frac{1}{2} - t\right) = h\left(\frac{1}{2} + t\right)$$

$$\Rightarrow \varphi(-t) = \varphi(t),\ \forall t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]; \quad \varphi(t) = h\left(\frac{1}{2} + t\right)$$

$$\left[g(x) - \frac{1}{2}h(x)\right] + \left[g(1-x) - \frac{1}{2}h(1-x)\right] = 0$$

$$g(x) = \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \varphi(1-x)\right]$$

Vậy:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) + \varphi(x) - \varphi(1-x)\right] + \frac{1}{2}; \quad \text{với} \begin{cases} h(x) \geq 0,\ h(1-x) = h(x);\ x \in [0;1] \\ \varphi(x) \text{ là một hàm tùy ý xác định trên } [0;1] \end{cases}$$

thỏa điều kiện bài toán.

Bài toán 4: Xác định hàm số $f: R \to R$ sao cho:

$f(x+1) = f(x) + 2; \quad \forall x \quad (1)$.

Lời giải:

Nháp:

$f(x+1) = f(x) + 2$

$c \;=\; c+2$

$c = \infty$

$f(x+1) = f(x) + 1$

$\Rightarrow f(x) = ax$

$\Rightarrow a(x+1) = ax + 2$

$\Rightarrow a = 2$

Trình bày:

Đặt $f(x) = 2x + g(x)\ (1')$. Thế (1') vào (1), ta có:

$2(x+1) + g(x+1) = 2x + g(x) + 2 \Rightarrow g(x+1) = g(x); \forall x$.

Vậy: $f(x) = 2x + g(x); \forall x$ ($g(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ T=1) thỏa điều kiện bài toán.

Bài toán 5: Xác định hàm số $f: R \to R$ sao cho:

$f(x+1) = -f(x) + 2; \quad \forall x \quad (1)$.

Lời giải:

Nháp:

$f(x+1) = -f(x) + 2$

$c \;=\; -c+2$

$c = 1$

Trình bày:

Đặt $f(x) = 1 + g(x)\ (1')$. Thế (1') vào (1), ta có:

$1 + g(x+1) = -1 - g(x) + 2 \Rightarrow g(x+1) = -g(x); \forall x$.

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x+1) = -g(x) \\ g(x+2) = g(x) \end{cases}; \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(x+1)] \\ g(x+2) = g(x) \end{cases}; \quad \forall x$$

$g(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(x+1)]$; h(x) là hàm tuần hoàn (tùy ý), $T = 2$

Vậy: $f(x) = 1 + \frac{1}{2}[h(x) - h(x+1)]$; h(x) là hàm tuần hoàn (tùy ý), $T = 2$ thỏa điều kiện bài toán.

B/KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU:

Qua quá trình nghiên cứu và vận dụng đề tài "PHƯƠNG TRÌNH HÀM", tôi nhận thấy vấn đề này giúp ích nhiều cho học sinh trong việc học toán, giúp các em không còn "ngán ngại" phần phương trình hàm nữa, các em đã giải khá tốt những phần liên quan đến phương trình hàm; một số em đã bước đầu sáng tạo được những bài toán mới (tuy là những bài toán còn "đơn giản"). Riêng bản thân tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu sâu hơn nữa về Phương trình hàm và Bất phương trình hàm hy vọng sẽ "sáng tác" (Từ hay dùng của GS-TS Nguyễn Văn Mậu) được nhiều bài toán mới.

III.PHẦN KẾT LUẬN:

1/Kết luận:

Tôi viết đề tài nhằm mục đích cùng trao đổi với Quý Thầy Cô dạy bộ môn toán về việc "hệ thống" các kiến thức, một vài kỹ năng về Phương trình hàm và một phần Bất phương trình hàm. Vì kiến thức và thời gian còn nhiều hạn chế nên chắc rằng tài liệu có thiếu sót, tôi chân thành đón nhận sự góp ý của Quý Thầy Cô. Xin chân thành cảm ơn.

2/Tài liệu tham khảo:

1)"BÀI GIẢNG CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM " (của GS-TS NGUYỄN VĂN MẬU)
2)CÁC CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC BỒI DƯỠNG HỌC SINH NĂNG KHIẾU TOÁN (Tài liệu Hội nghị Khoa học)
3)BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
4)CÁC ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH.
5)CÁC ĐỀ THI HS GIỎI TOÁN ĐB SÔNG CỬU LONG.
6)CÁC ĐỀ THI OLYMPIC 30/4.
7)CÁC ĐỀ THI TOÁN QUỐC GIA (VMO).
8)CÁC ĐỀ THI TOÁN QUỐC TẾ (IMO) VÀ CÁC NƯỚC.

Hết