レポート (応用数学)

ログイン ID: studyai0029950　氏名: 吉田　晋

要点まとめ

線形代数

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

の形の連立 1 次方程式を解くことを考える。A は係数の行列、$\vec{x}$ は未知数のベクトルである。

通常の 1 次方程式 $ax = b$ を解くならば、両辺を a で割って $x = b/a$ と解くことができる。一方 (1) では行列 A で両辺を割ることができないので、代わりに**逆行列** A^{-1} を用いる。
(1) の両辺に A^{-1} を左からかけることにより

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

と解くことができる。

このように逆数の行列版とも言える逆行列 A^{-1} であるが、2 つ注意しておくべきことがある。

(1) 正方行列 A が逆行列を持つ場合と持たない場合がある。どのような条件下で逆行列を持つか、持たないか。

(2) A が A^{-1} を持つとして、具体的にどのように求めればよいか。

(1) について、行列式 $|A|$ を計算し、$|A| = 0$ が逆行列を持たない必要十分条件であることが知られている。
(2) について、A^{-1} の求め方は種々あるが、そのうちの 1 つにガウスの掃き出し法がある。

さて $A\vec{x} = \lambda\vec{b}$ を満たす λ を**固有値**、$\vec{x}$ を λ に属する**固有ベクトル**という。この固有値、固有ベクトルを用いると行列を分解することができる。正方行列に適用できる分解として**固有値分解**、長方形型の行列に適用できる分解として**特異値分解**がある。特異値分解は画像の圧縮に応用できるなど、コンピュータサイエンス分野でも重要な定理である。

確率・統計 確率については、**ベイズの定理**

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

が重要である。これを用いて、事象 A が起こったとき B が起こる確率は

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

のように求めることができる。コンピュータサイエンスでの応用例として、スパムメールの判定などをあげることができる。

統計について、**母集団**と**標本**を意識しなければならない。母集団の性質を知りたいが、そのすべての要素を調べることができないとき、母集団から少数の標本を取り出して調べ、そこから母集団の性質を推測するという手法を取る。これは**推測統計学**と呼ばれるものである。

母集団の性質として、**期待値**や**分散**、**共分散**を考えることが多い。期待値は平均、分散はデータの散らばり具合、共分散は2つの確率変数の関係を表す指標である。
標本平均は一致性と不偏性をともに満たすが、標本分散は一致性があるものの、不偏性を持たない。そこで、標本分散に代えて、不偏分散を用いることが多い。

確率分布として重要なものに、**二項分布**や**正規分布** (ガウス分布) がある。

情報理論 人間にとって、情報量の大小は比率で決まる。つまり、情報量を w で表すと $\Delta w/w$ が重要となる。
これを積分すると

$$\int \frac{dw}{w} = \log w + C$$

となるので、情報量の大小を論じる際には log が登場することが多い。

具体的には**自己情報量**、**シャノンエントロピー**、**カルバック・ライブラーダイバージェンス**といった指標がある。

自己情報量は

$$I(x) = -\log(P(x)) = \log(W(x))$$

で表され、統計物理のエントロピーに相当するものである。

シャノンエントロピーは、「自己情報量の期待値」とも言える指標であり、以下で定義される。

$$H(x) = E(I(x)) = -E(\log(P(x))) = -\sum P(x)\log(P(x))$$

カルバック・ライブラーダイバージェンスは「距離」に近い概念で、以下で定義される。

$$D_{KL}(P||Q) = \mathbb{E}_{x\sim P}\left[\log\frac{P(x)}{Q(x)}\right] = \mathbb{E}_{x\sim P}[\log P(x) - \log Q(x)]$$

実際には「距離の公理」を満たさない (対称性がない) ため、数学に「距離」ということはできない。