

なぜ context なのか

hora-algebra

2020 年 5 月 29 日

この文章は Emily Riehl 著『Category Theory in Context』という圏論の入門書、通称 Context を勧めるための文章である。私が圏論の基本的な内容を勉強したのはこの本で、あまりにも良かったのでこの文章を書く。

目次

1	Context とは	1
2	豊富な具体例	2
3	現代的な内容	3
4	著者 Emily Riehl について	3
5	細々としたこと	3

1 Context とは

Dover 社から出版されている著者 Emily Riehl^{*1}の圏論入門書である。全体で 6 章 + Epilogue 構成である。

1 章は基礎概念の章である。圏論の基礎的な概念である圏, 関手, 自然変換が準備される。この時点で圏論の言葉としての有用性をアピールしてくる^{*2}。1 章の最初から我々を楽しませようという強い意志を感じる。それもこれもそれも圏論的に書けるんだ！という驚きと、書いてどうすんの？という疑問が湧くはず。その疑問は本を読むうちに驚きに変わるはず！！Context はフラグ回収の意味で芸術品までである。

2 章は普遍性の章である。圏論唯一の定理とも (冗談で) 言われる Yoneda の補題が示され、各種の普遍性が Yoneda のもとに統一的かつ簡潔に記述される。Category of elements という概念が直感的理解の中心的な役割を果たしてくれるのだが、他の本を見てみたところ、これは Context の特徴らしい。最高。ここで圏論の思想に触れる。

3 章は極限の章である。既存の数学的対象から新しい対象を作る手段である極限を学ぶ。圏の中で行う工作と言っていい。我々の持っている数学的概念の構成方法、例えば直積や直和、が統一的に表現される。そして圏論の基本的かつ便利な定理の典型例である「hogehoge な関手は hugahuga な極限を piyopiyo する」と言っ

^{*1} マジカッコいい

^{*2} 例えば関手を定義して具体例を見た後最初にすることはブラウアーの不動点定理の証明である！

た定理を述べる準備が整う。diagram chase(可換図式で証明するやつ) も本格化してきてうおおお圏論してるぜええええって気持ちになれる。

4 章は随伴の章である。4 章までの内容が書いてある本は圏論の入門書と言っていいだろう*³関手のある種の双対性である随伴について学ぶ。「随伴は至るところに現れる」と圏論の創始者の一人 Mac Lane は言ったそうだが、我々の知っている実に多くの概念が随伴によって統一的なイメージを与えられていくのは楽しい。圏論で便利な定理と言えば LAPC,RAPL(左随伴は余極限を保ち、右随伴は極限を保つ) はここで示される。私もこれを示すために (テンソルと直和の交換の話聞いていた)Context を読み始めたのだが、この時点で完全に魅了されていた。

5 章はモナドの章である。別の言い方をすれば普遍代数学の章である。Context を読み始めた段階では 4 章までしか読む気がなかった自分だが、4 章までを読み 5 章も面白いに違いないと思い (建てられたフラグの回収が楽しみだったのもあるが) 読んでみたら想像を超えていた。一番好きな章と言ってもいいかもしれない。モナドについて computer science で使われるという話だけは聞いていたが、Context では普遍代数学に注目していた。モナドに関する自然な議論から代数学に関する強力な一般論が吐き出されていく様は感動的ですらある。

6 章は Kan 拡張の章である。有名な「すべての概念は Kan 拡張である」という言葉が章のタイトルであり、Context 最終章最終節である 6.5 All Concepts で今まで勉強してきた概念が Kan 拡張として統一的に記述される。語るまでもない激アツ最終話である!!

Epilogue では、「圏論の最先端はこの入門書から遥か先にある。今から述べるものも基本的な定理であるが...」(意識) と言ってから、高度な圏論の入り口をいくつか紹介してくれる。最後までワクワクさせてくれるわけである。

2 豊富な具体例

Context の良い点といえば具体例の豊富さがまず最初に挙がるだろう。例えば、圏が定義された直後には 11 個の例が挙がる。それらの例を学んでお腹いっぱいになっていたら、その直後にさらに 7 個の例が与えられる。圏論の典型的な教科書として圏論の基礎やベーシック圏論や壺大整域や Awodey の圏論なんかが挙がるだろうが*⁴、これらより圧倒的に具体例が豊富だと言っていい。

具体例は圏論を学ぶ上での最重要項目だと言って良いだろう。(言葉としての) 圏は諸々の数学的対象に普遍的な構造を記述するわけだから、圏論に対する直感的理解はその具体例に対して持つ直感的理解から構成されていく。豊富な具体例を見ることで初めて、数学的対象の持つ構造の本質的な共通点に気づき圏論が生きた言葉になってくるのだと思う。圏論を学ぶ前は、圏論は無機質で形式的だが強力な道具なのだと思っていたし、具体例が少ない文献で勉強していたときでさえそう思っていた。圏論の定理の証明を追って他の理論に適用できるようになるのは (少なくとも基本的な話 (LAPC とか) なら簡単だろう。圏論が数学的対象へのイメージや直感をうまく表現する*⁵直感的な言語であるからして強力なのだと思えるには具体例なしに圏論を学んではならないと思う。

*³ ベーシック圏論の扱う対象は Context4 章まで (のうち一部) と言ってほぼ間違い無いだろう。Awodey 本は Context5 章まで (のうち一部) に Awodey 本最大の特徴である Awodey 本 6 章を付け加えたものと言っておおよそ正しそうである。Awodey 本は Logic や Computer science のための圏論という側面を持つ

*⁴ これら全てにお世話になっているのだが、今回は Context 最高!!! って文章なので許してください。守備範囲や目的や想定読者が違うはずなので

*⁵ そして学ぶ前には想像もできなかったほど豊かな表現力を持つ!

Context の具体例はただ多いだけではない。まず、初等的な例を分野をまたいで紹介している。初等的な代数学、位相空間論、グラフ理論、線形代数に解析、基礎論、多様体、順序構造 (、そして圏論自体!)、何を学んでいる人にも理解できる例がある。具体例が多いということは理解できる例も多くなるわけだから敷居はかなり低くなる。また、高度な例も提供してくれる。これは Context 全体に関わる話だが、高度な圏論を思わせる話が至るところに散りばめられている。Context を読み終わってからいくらか文章を読んでいるが、「Context の例でやったやつだ!」を何度もしている。そしてこれも Context 全体に関わる話だが、現代的な例も紹介してくれる。2010 年以降の参考文献もいくつもある。

3 現代的な内容

Context は 2016 年の本であってかなり新しい部類に入る。そしてその新しさは魅力である。具体例のところでも言ったが Riehl はかなり現代的な書き方をしているし、Riehl 自身の知見が生かされているのだと感じる。例えば導来関手の間の随伴に関する演習 Exercise 6.4.iv は 2007 年の論文の主定理であるらしい^{*6}!圏論の基礎の現代版と呼ぶ人もいる^{*7*8}。参考文献は、出版年である 2016 年のものも含めて 2010 年以降のものが 17 個以上ある。

新しい本ってことはまだ誤植が多いんでしょ?と思った皆さん、異様に少ないです。

4 著者 Emily Riehl について

私は Emily Riehl のファンなのかもしれない。Emily Riehl は 2020 年 5 月現在 Johns Hopkins 大学の准教授なのだが、そのホームページ <http://www.math.jhu.edu/~eriehl/> には 3 つの写真が並んでいる。一つは数学者としての Riehl であって、数式が書かれた黒板の前で腕を組んでいる写真である^{*9}。一つはフットボール選手としての Riehl である。AFL インターナショナルカップ (3 年に 1 回オーストラリアで開催されるオーストラリアンフットボールの世界一決定戦)2017 年大会にアメリカ女子チームの副キャプテンとして参加したらしい^{*10}。さらに、ベースを弾いている Riehl である。弦は 5 本である^{*11}。wikipedia 情報。Twitter や YouTube もやっていて、見にくくと圏論的な学びもある。

5 細々としたこと

細かいメリットを挙げていく。この中のどれかが読むきっかけになる人も多いのではないと思う。

- 英語が読みやすい。洋書であることに抵抗がある人も多いかもしれないが、前書きをのぞいて英語が簡潔で大変読みやすい。ネイティブでない人が読むことを想定して書かれていると至る所で感じる。
- 読んでて超楽しい。フラグ回収も綺麗だし、文章もうまいし。記憶を消してもう一回読みたいと数学書に対して初めて思えた。

^{*6} 1997 年に第二版が出た圏論の基礎には当然載っていない

^{*7} 尊敬するびあのん先輩

^{*8} ただ、圏論の基礎に載っていて Context に載っていない内容もたくさんあって、例えばアーベル圏やモノイダル圏は Context では Epilogue で触れられる程度である

^{*9} かっこいい

^{*10} かっこいい

^{*11} かっこいい

- Context の全文章が (数少ない誤植も訂正された状態で) 著者 Emily Riehl 本人のホームページ <http://www.math.jhu.edu/~eriehl/> で得られる。Riehl の他の文章も公開されていてありがたい。
- いくつかの章や節の最初に、圏論に関する名言の引用がされている。これが毎度新しいものを学ぶ興奮を引き出してくれる。
- 短い文章やエッセイを紹介し、参考文献に入れている。例えば Tom Leinster(ベシ圏の著者) の “Doing without diagrams” <https://www.maths.ed.ac.uk/~tl/elements.pdf> や Barry Mazur の “When is one thing equal to some other thing?” http://people.math.harvard.edu/~mazur/preprints/when_is_one.pdf なんかである。
- 具体例が豊富なので、知らない分野に興味を持つきっかけとしても使える。知らない分野の例が出てきてもすぐには諦めずその分野の基本的な内容を勉強してみると言った多少無茶な読み方をした結果読むのに時間がかかったがいろんな分野の人の話が聞けるようになった気がする。
- 本が安い。前述した通り、pdf は無料なのだが本自体も 29.95 ドルである。アマゾンでは 2000 円ちょっとで売っているのもよくみる。Dover 社さんすごい。
- 記述が丁寧で行間は少なく、形式的な前提知識はほぼないと言っていい。もちろんいろんな数学的対象を知っている方が楽しめると思う。
- これは読んでからでないと実感できないメリットかもしれないが、高度な圏論、例えば 2 圏やトポスやアーベル圏やモノイダル圏を意識した記述が多い。またホモトピー論を意識した記述も多い*¹²。私に見える範囲だけでも、2 圏は 1.7 や 4.4 や 6.1 で言及されるし、トポスは Prop5.5.9 や E.4 など、アーベル圏は 4.5 や E.5、モノイダル圏は 4.3 や 5.1 や E.2、ホモトピー論は simplicial set は至る所で、ホモトピー圏は 6.4 で言及される。

*¹² これが前者の分類に入るのかについてはまだ知らない