

生成の一般論と反映的部分圏

hora-algebra

2020 年 5 月 6 日

この文章の目的は、数学の様々な分野で登場する生成という概念に関して一般論を与え、さらに随伴を通じた解釈を与えることである。群論では部分群の生成をし、位相空間論では閉包の存在を示し、測度論では σ -加法族の生成をし、可換環論ではイデアルの生成をした。これらは共通の性質を持っているにも関わらず (それほど手間がかからないことも理由だろうが) 統一的に記述されているようには思われない。生成に関する一般論は数学の基礎的な原理の一つとして、集合や写像を勉強する時に習っても良いとすら考えている。この文章の前半はこれら生成について一般的に成立することを述べる。定理はひとつだが、しつこいほどに定理の気持ちを書いた*¹。前半には圏論を知らなくても一部の具体例を除いて全く問題ない。

後半はこの文章を書くに至った経緯であって、内容よりむしろ感情によって書かずにはいられなかった類である。まず反映的部分圏を導入し、関手圏の反映的部分圏の性質を証明なしに述べる。層の圏や小圏の圏などが関手圏の反映的部分圏の例である。その後関手圏の反映的部分圏の小さな例を探し、その結果として冪集合の反映的部分圏と生成可能な部分集合族が同一の概念であることを示す。圏、関手、自然変換、極限、随伴の基本的な知識を仮定する。

目次

1	生成の一般論	1
2	反映的部分圏	6
2.1	関手圏の反映的部分圏	6
2.2	冪集合の反映的部分圏	7

1 生成の一般論

まず、生成可能な部分集合族の概念を導入する。 2^X は集合 X の冪集合を表す。

Definiton 1.1 (生成可能). 集合 X の部分集合族 $\Sigma \subset 2^X$ が生成可能であるとは、任意の $A \subset X$ について $\{S \in \Sigma \mid A \subset S\}$ が包含関係に関して最小元を持つことをいう。

つまり、任意の部分集合がそれを含む最小の Σ の元を持つとき生成可能というわけである。位相空間における閉包とは部分集合に対してそれを含む最小の閉集合をいうのであった。

Example 1.1 (閉集合). 位相空間 X について、閉集合全体の集合 Σ は生成可能である。

*¹ 下書きを友人に見せたとき、この文章の唯一の本質である Theorem 1.1 の使い方が伝わらなかったのが理由で 1 章全体に渡って気持ちを大幅に書き足した。

実は閉集合は生成可能な部分集合族としては特殊な例である。この文章で挙げられる閉集合以外の^{*2}全ての例は「ある操作で閉じている」という形の定義を持つものである。この形の定義を持つ部分集合族は実は全て生成可能である。この主張は Theorem 1.1 で定式化され証明される。

Example 1.2 (部分群). 群 X について、部分群全体の集合 Σ は生成可能である。

Example 1.3 (正規部分群). 群 X について、正規部分群全体の集合 Σ は生成可能である。

Example 1.4 (部分環). 環 X について、部分環全体の集合 Σ は生成可能である。

Example 1.5 (イデアル). 可換環 X について、イデアル全体の集合 Σ は生成可能である。

Example 1.6 (部分体). 体 X について、部分体全体の集合 Σ は生成可能である。

Example 1.7 (部分空間). 線形空間 X について、部分空間全体の集合 Σ は生成可能である。

Example 1.8 (部分加群). 環 R と左 R -加群 X について、部分加群全体の集合 Σ は生成可能である。

Example 1.9 (部分圏). 小圏 \mathcal{C} とその射集合 $X := \text{Mor } \mathcal{C}$ について、部分圏を為す部分集合全体の集合 Σ は生成可能である^{*3}。

Example 1.10 (部分束). 束 X について、部分束全体の集合 Σ は生成可能である。

さらに、集合 Y について $X = Y^2$ ととれば X の部分集合とは Y 上の二項関係のこととなる。

Example 1.11 (同値関係). 集合 Y について、 $X = Y^2$ とすると同値関係全体の集合 Σ は生成可能である。

Example 1.12 (前順序). 集合 Y について、 $X = Y^2$ とすると前順序全体の集合 Σ は生成可能である。

さらに、集合 Y について $X = 2^Y$ ととれば X の部分集合とは Y の部分集合族のこととなる。

Example 1.13 (開集合族). 集合 Y について、 $X = 2^Y$ とすると Y 上の位相の開集合族全体の集合 Σ は生成可能である。

Example 1.14 (閉集合族). 集合 Y について、 $X = 2^Y$ とすると Y 上の位相の閉集合族全体の集合 Σ は生成可能である。

Example 1.15 (σ -加法族). 集合 Y について、 $X = 2^Y$ とすると Y 上の σ -加法族全体の集合 Σ は生成可能である。

一般には生成可能でない部分集合族の例を挙げておく。

Example 1.16 (開集合). 位相空間 X について、開集合全体の集合 Σ は一般には生成可能でない^{*4}。例えば実数集合 \mathbb{R} に通常の位相を入れると $\{0\}$ を含む最小の開集合は存在しない。

^{*2} もちろん、明示的には違うという話であって、定義され得ないという意味ではない。実際、生成可能な部分集合族は操作で閉じているという形で (ほぼナンセンスだが) 再定義できることを Theorem 1.1 は含意している。

^{*3} object とその identity を同一視している。

^{*4} 後半で正当化されるが、生成可能の双対な条件を満たす。

Example 1.17 (半順序). 集合 Y について、 $X = Y^2$ とすると半順序全体の集合 Σ は一般には生成可能でない*⁵. 例えば $|Y| \geq 2$ なる集合 Y について、 Y^2 は半順序ではなく、したがって Y^2 を含む最小の半順序は存在しない。

Theorem 1.1 の主張に入る前に気持ちの説明をしておく。Theorem 1.1 では生成可能であるための簡潔 (Theorem 1.1 の条件 3)、もしくは便利 (Theorem 1.1 の条件 2) な必要十分条件を求める。そのために、これまで述べてきた具体例がなぜ生成可能なのかを考える。

閉集合全体の集合 (Example 1.1) が生成可能であることは閉集合の共通部分が再び閉集合になることから容易にわかる。部分集合 A について A を含む最小の閉集合が欲しければ、 A を含む閉集合全体の共通部分をとれば良い*⁶。これは次の定理の 3 番目の条件である。

部分群全体の集合 (Example 1.2) が生成可能であることを示すときはどうしたかを考える。生成される部分群を明示的に構成してもよいが、より一般的な手法で示すことができる。その手法とは、部分群の共通部分が再び部分群になることを示すことである。部分群の共通部分が部分群であることが分かれば、部分集合に対してそれを含む部分群全体の共通部分として生成される部分群を取り出せるわけである。部分群の共通部分が部分群であることの証明を思い出す。群 G とその部分群の族 $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を任意に取る。 G の単位元を e と書く。 $H := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ が G の部分群であることを示す。まず、任意の $\lambda \in \Lambda$ について H_λ は G の部分群なので $e \in H_\lambda$ である。従って $e \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda = H$ である。 $x \in H$ を任意にとると、任意の $\lambda \in \Lambda$ について H_λ は G の部分群なので、 $x^{-1} \in H_\lambda$ である。従って $x^{-1} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda = H$ である。 $x, y \in H$ を任意にとると、任意の $\lambda \in \Lambda$ について H_λ は G の部分群なので、 $xy \in H_\lambda$ である。従って $xy \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda = H$ である。以上より、 H は G の部分群である。これで、部分群の共通部分は部分群であることがわかり、部分群全体の集合は生成可能であることがわかった。

これと全く同様の議論が Example 1.2 から Example 1.15 まで適用できる。この議論*⁷を抽象化したい。この議論が行える本質的な理由を考えてみると、部分集合族の定義が「ある操作で閉じている」という形をしていることが重要だとわかる。部分群の場合は単位元を取る操作*⁸と逆元を取る操作と演算結果を取る操作である。別の表現をするなら、「ある元*⁹を含むならば (別の) ある元*¹⁰を含む」という形などと言えるだろうし、短く表現するなら「存在 \Rightarrow 存在」という形とも言える。部分群の場合で見たように、「存在 \Rightarrow 存在」という性質は、共通部分をとっても失われない。部分群全体の集合が生成可能であることの証明をこのアイデアに従って抽象化したものが次の Theorem 1.1 の (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1) である。

では、「存在 \Rightarrow 存在」という条件で定義されている」という直感はどう定式化すればよいだろうか。 $A \subset X$ が $A \in \Sigma$ なるための条件が「存在 \Rightarrow 存在」という条件で定義されている」とは、 A が $U \subset X$ を含むなら (別の) 部分集合 $V \subset X$ を含むという条件を部分集合 $U \subset X$ の数だけ羅列して定義されていることと言ってよいだろう。「操作で閉じている」という視点からは V は U (の元) に操作を行なって作られるもの全体の集合とすればいい。今の記法において、 U に対して V を返す写像を $f : 2^X \rightarrow 2^X$ とすれば、 $A \in \Sigma \Leftrightarrow \forall U \subset A, f(U) \subset A$ となる。

Theorem 1.1 の気持ちの説明は以上である。これらの気持ちを定理の形で書き下せば次の Theorem 1.1

*⁵ 半順序の条件のうち反対称律が原因であることがすぐ後の定理でわかる。

*⁶ 後半でこの方法と一般随伴関手定理の関係を見る。

*⁷ おそらく飽きるほどやったであろう。

*⁸ 空集合に対して単位元を取る操作と言える。この操作だけ特殊に見えるかもしれない。

*⁹ 部分集合と呼ぶ方が正確である。

*¹⁰ 部分集合と呼ぶ方が正確である。

(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1) になる。つまらないこと^{*11}だが (1) \Rightarrow (2) も成立するので定理は次の形になる。

Theorem 1.1 (生成可能条件). 集合 X とその部分集合族 $\Sigma \subset 2^X$ について以下は同値である。

1. Σ は生成可能である。
2. 写像 $f: 2^X \rightarrow 2^X$ であって、任意の $A \subset X$ について「 $A \in \Sigma \Leftrightarrow \forall U \subset A, f(U) \subset A$ 」なるものが存在する。
3. 任意の $\Sigma' \subset \Sigma$ について $\bigcap_{S \in \Sigma'} S \in \Sigma$ である。 $(\Sigma' = \emptyset$ のときに特に $X \in \Sigma$ を含む)

Proof. (1) \Rightarrow (2) 写像 f を $A \subset X$ に対して A を含む最小の Σ の元に移す写像^{*12}とすれば良い。

(2) \Rightarrow (3) $(U \subset \bigcap_{S \in \Sigma'} S) \Leftrightarrow (\forall S \in \Sigma', U \subset S) \Rightarrow (\forall S \in \Sigma', f(U) \subset S) \Leftrightarrow (f(U) \subset \bigcap_{S \in \Sigma'} S)$ である。

(3) \Rightarrow (1) $A \subset X$ について、 $\Sigma' = \{S \in \Sigma \mid A \subset S\}$ の (元) の 共通部分は A を含む最小の Σ の元である。□

Example 1.2 から Example 1.15 の 14 個の例については、それぞれの定義を写像 f の形にそのまま言い換えることで Theorem 1.1 (2) \Rightarrow (1) より生成可能性が直ちに示される。

Example 1.18. Example 1.2(部分群) なら単位元をもち逆元をもち演算で閉じているという定義をそのまま写像 f に言い換え、

$$f(A) = \{e\} \cup \{x^{-1} \mid x \in A\} \cup \{xy \mid x, y \in A\}$$

などと f を取ればいい^{*13}。また、 f はもちろん一通りではないので、これ以外の (不自然な?) f を取ることもできる。 f を小さくしようと思えば、空集合と一点集合と二点集合とその他で場合分けをして、

$$f(A) = \begin{cases} \{e\} & (A = \emptyset) \\ \{x^{-1}, x^2\} & (A = \{x\}) \\ \{xy, yx\} & (A = \{x, y\}) \\ \emptyset & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

などと取ることもできる。

どちらにせよ、 $f(A)$ として A を含む最小の Σ の元を取る必要はなく^{*14}、定義で直接的に要求されていることを書けばよい。確かに Theorem 1.1 の (1) \Rightarrow (2) の証明では $f(A)$ として A を含む最小の Σ の元を取ったし、もちろん条件を満たすのだが、想定する使い方はむしろ生成可能性がわかっていないときの (2) \Rightarrow (1) である。「存在 \Rightarrow 存在」の形の条件で定義されているというだけで直ちに生成可能性が従うのがこの定理の便利な点である。

他のいくつかの例についても f を明示的に書いておく。

Example 1.19 (正規部分群). 正規部分群の定義は教科書によっては一見「存在 \Rightarrow 存在」という形に見えないかもしれない。しかし、正規部分群は共役をとる操作で閉じている部分群なのでれっきとした「操作で閉じ

^{*11} 下書きのときに起きた誤解を避けるために気持ちを強調している。つまらないと言っているが (1) \Rightarrow (3) は後で使う。

^{*12} 閉包作用素などと呼ぶべきもの。全く違う気持ちで定義した f であるが、結局生成可能ならこのつまらない f によって再定義できるということ。

^{*13} この例における単位元のように必ずふくむ元も f で表現できる。

^{*14} そんなことができればもう生成可能性はわかっている。

ている」形の定義であり、「存在 \Rightarrow 存在」の形をしている。群 X について、

$$f(A) = \{e\} \cup \{x^{-1} \mid x \in A\} \cup \{xy \mid x, y \in A\} \cup \{gxg^{-1} \mid x \in A, g \in X\}$$

などとすればよい。

Example 1.20 (イデアル). 可換環 X について、 X のイデアルとは和と定数倍で閉じた空でない ($\Leftrightarrow 0$ を含む) 部分集合であったので

$$f(A) = \{0\} \cup \{i + j \mid i, j \in A\} \cup \{ri \mid r \in X, i \in A\}$$

などとすればよい。

Example 1.21 (同値関係). 集合 Y について、 $X = Y^2$ とする。同値関係とは反射的かつ対称的かつ推移的な二項関係であったので、

$$f(A) = \{(a, a) \mid a \in Y\} \cup \{(b, a) \mid (a, b) \in A\} \cup \{(a, c) \mid (a, b), (b, c) \in A\}$$

などとすればよい。

Example 1.22 (開集合族). 集合 Y について、 $X = 2^Y$ とすると、 Y 上の位相の開集合族とは \emptyset と Y を含み有限個の共通部分で閉じていて任意個数の和集合で閉じている Y の部分集合族 (つまり X の部分集合) であった。

$$f(A) = \{\emptyset, Y\} \cup \{\cap_{i=1}^n U_i \mid n \in \mathbb{N}, U_1, \dots, U_n \in A\} \cup \{\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \mid \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} : A \text{ の元の族}\}$$

などとすればよい。

このように、 f は定義を書き起こすという全く同様の方法で構成できる。少し慣れれば「存在 \Rightarrow 存在」の形の定義をみた瞬間に生成可能であることがわかるようになる。

Theorem 1.1 の系として生成可能な部分集合族の生成可能性が直ちに従う。

Corollary 1.1 (生成可能な部分集合族は生成可能). 集合 Y について、 $X = 2^Y$ とすると Y 上の生成可能な部分集合族全体の集合は (X の部分集合族として) 生成可能である。従って、 Y 上の生成可能な部分集合族の族 $\{\Sigma_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、その共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \Sigma_\lambda$ も生成可能である。

Proof. 前半を示すには、写像 $f : 2^X \rightarrow 2^X$ を $f(\Sigma') := \{\bigcap_{S \in \Sigma'} S\}$ (一点集合に送る) と定めて Theorem 1.1 を適用すれば良い。後半を示すには Theorem 1.1 の条件 3 を適用すれば良い。□

この系は単に例であるだけでなく有用である。例えばこの系によって、定義で連立された条件を一つ一つに分解して考えられるようになる。正規部分群の生成可能性を調べるときは部分群の生成可能性と共役で閉じた部分集合の生成可能性をそれぞれ示せば十分であるし、同値関係の生成可能性を調べるときは反射律を満たす二項関係の生成可能性と対称律を満たす二項関係の生成可能性と推移律を満たす二項関係の生成可能性をそれぞれ示せば十分である^{*15}。

^{*15} 上であげた例 (Example 1.18 から Example 1.22) では n 個の条件に対して $f(A) = f_1(A) \cup \dots \cup f_n(A)$ と書いていた。このことを思い出せば、Corollary 1.1 は f を $f_1 \dots f_n$ に分解したと言える。

2 反映的部分圏

Abstract でも述べた通り、ここからはこの文章を書くに至った経緯であって、若干の蛇足感は否めない。後半では 2.1 節で関手圏の反映的部分圏は偉いと宣言してから、2.2 節で生成可能な部分集合族がその例になっていることを紹介する。

2.1 関手圏の反映的部分圏

反映的部分圏 (reflective subcategory) という概念を勉強した時にこの文章の内容を考えた。反映的部分圏を導入する。この節 (2.1) は読み物として読まれることを想定していて^{*16}、証明は全て略した。仮に主張が分からなかったとしても流れを読み取って欲しい。

Definiton 2.1 (反映的部分圏). 圏 \mathcal{C} の充満部分圏 (full subcategory) \mathcal{D} が反映的であるとは、埋め込み関手 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ が左随伴を持つことを言う。

まずは代表的な例を挙げる。

Example 2.1 (可換群 \rightarrow 群). 可換群の圏 \mathbf{Ab} は群の圏 \mathbf{Group} の反映的部分圏である。左随伴は交換子群で割る関手 (abelianization) である。

Example 2.2 (コンパクトハウスドルフ空間 \rightarrow 位相空間). コンパクトハウスドルフ空間の圏 \mathbf{cHaus} は位相空間の圏 \mathbf{Top} の反映的部分圏である。左随伴はストーン・チェックのコンパクト化 (Stone-Čech compactification) である。

また、節の名前にもなっている関手圏の反映的部分圏の例も二つ挙げる。

Example 2.3 (層 \rightarrow 前層). 位相空間 X について、 X の開集合が為す順序集合 $\mathcal{O}(X)$ を圏とみなすと、 X 上の (集合の) 層の圏 $\mathbf{Sh}(X)$ は X 上の (集合の) 前層の圏 $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\text{op}}}$ の反映的部分圏である。左随伴は層化 (sheafification) である。

Example 2.4 (圏 \rightarrow simplicial set). Δ を空でない有限順序数からなる \mathbf{Cat} の充満部分圏とする。小圏の圏 \mathbf{Cat} は simplicial set の圏 $\mathbf{Set}^{\Delta^{\text{op}}}$ の反映的部分圏である^{*17}。左随伴の一般的な名前は知らないが、density theorem によって得られる一般的な随伴のクラス^{*18}の一例である。

反映的部分圏に注目する理由の一つは次の定理である。

Theorem 2.1 (反映的部分圏の極限). \mathcal{D} が \mathcal{C} の反映的部分圏なら、

- 埋め込み関手 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ は \mathcal{C} のもつ全ての極限を創出し、

^{*16} そのため、お気持ち語彙 (分かる、よく分かる、とてもよく分かる) が多めである。

^{*17} fully faithful な関手 $\mathbf{Nerve} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}^{\Delta^{\text{op}}}$ によって充満部分圏とみなしている。

^{*18} 参考文献にのせた nLab では <https://ncatlab.org/nlab/show/nerve+and+realization> にあるように Nerve and Realization と呼ばれていて、同じく参考文献にのせた壺大整域を含む日本の一部の界限では http://alg-d.com/math/kan_extension/kan_extension.pdf にあるように普遍随伴と呼ばれている。

- \mathcal{D} は \mathcal{C} の持つ全ての余極限を持つ^{*19}。

特に \mathcal{C} が完備かつ余完備ならば \mathcal{D} も完備かつ余完備である。

つまり、反映的部分圏の極限が知りたければ外側の圏の極限を見ればよく、余極限が知りたければ外側の圏から左随伴で送れば良い。知りたい圏があれば、それをよく分かる圏の反映的部分圏と見ることで性質を調べられるわけである。よく分かる圏の典型例が関手圏である^{*20}。

Theorem 2.2 (関手圏の極限は対象ごとに計算できる). \mathcal{C} を (局所小) 圏、 \mathcal{A} を小圏とする。 \mathcal{A} の対象のみからなる離散圏を $\text{ob}(\mathcal{A})$ と書くことにする。この時、射の作用を忘却する関手 $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{ob}(\mathcal{A})}$ は \mathcal{C} に存在する全ての極限と余極限を (strict に) 創出する。特に \mathcal{C} が完備かつ余完備ならば $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ も完備かつ余完備である。

つまり、関手圏の極限や余極限は \mathcal{A} の対象ごとに極限や余極限を作れば得られる。今述べた二つの定理を合わせれば、完備かつ余完備な圏への関手圏の反映的部分圏は完備かつ余完備であることがわかり、さらにこの時余極限はわかって極限はとてもよくわかる。例えば Set は完備かつ余完備なので Theorem 2.2 より Set への (小圏からの) 関手圏は完備かつ余完備で、その反映的部分圏である層の圏や小圏の圏は Theorem 2.1 より完備かつ余完備であることがわかる。さらにこの過程を辿ることで余極限はわかって極限はとてもよく分かる。例えば、層の直積が欲しければ開集合ごとに直積を取れば良いし、直和が欲しければ開集合ごとに直和をとってから層化をすれば良い。関手圏の反映的部分圏は偉い。

2.2 冪集合の反映的部分圏

関手圏の反映的部分圏はどのくらいレアなのかを考えていた。部分圏をとってきたときにどのくらいの頻度で^{*21}反映的になるのかを知るのは感覚を養う上でも重要だと考えた。そのためには、ある関手圏の反映的部分圏を全て決定してみたかったのだが Set への関手圏なんかを考えるとそれはかなり絶望的に思えたので、小さな例を作ることにした。小さい関手圏の例を考えていると、冪集合を包含関係による順序で圏とみなすと関手圏になることに気がついた。 2^X は冪集合の元々の表記であったが、次の命題以降では圏 2 への圏 X からの関手圏としての表記を意図的に重ねる。

Proposition 2.1 (冪集合は関手圏). 任意の集合 X について、 X を離散圏とみなしたもののから二元の順序数 2 を順序で圏とみなしたものの^{*22}への関手圏 2^X は、 X の冪集合 2^X を包含関係による順序で圏とみなしたものと自然な対応によって圏同型となる。さらに 2 は完備かつ余完備な圏なので 2^X も完備かつ余完備である。

これで冪集合が関手圏であることは確認できた。 2^X の完備性と余完備性については完全にオーバーキルである。 2^X の極限は共通部分だし余極限は和集合であるのだから、完備かつ余完備な圏への関手圏であるなどと言わなくてもすぐにわかることである^{*23}。

^{*19} 形までわかる。図式を \mathcal{C} に埋め込んで余極限をとって左随伴で送れば、counit が自然同型を与えて元の図式の余極限となる。

^{*20} よく分かる、は以下に述べるように特定の状況における極限の話をしていて、本当に関手圏がよく分かるのかについては私は全く知らない。

^{*21} もちろん数学的に厳密な主張ではない。

^{*22} 図で書けば $\cdot \rightarrow \cdot$ である。

^{*23} ただ、共通部分や和集合が各点における極限や余極限であると言う事実は私にとっては少し面白いと思える再発見だった。

一般に圏の充満部分圏は対象の集合^{*24}の部分集合^{*25}と対応するので、関手圏 2^X の充満部分圏は冪集合 2^X の部分集合と対応する。関手圏 2^X の反映的部分圏を全て決定しようと少し考えると、生成可能な部分集合族の概念とちょうど一致することがわかる。

Theorem 2.3 (生成可能 \Leftrightarrow 反映的). 集合 X とその部分集合族 $\Sigma \subset 2^X$ について Σ が生成可能であることと、 Σ が 2^X の反映的部分圏であることは同値である。

Proof. 射の対応としての随伴の定義を見れば確かめるだけである。強いてそれっぽく書くなら、埋め込み写像を $\iota: \Sigma \rightarrow 2^X$ と書くことにして、生成可能 $\Leftrightarrow \forall A \in 2^X, A$ を含む最小の Σ の元が存在する $\Leftrightarrow \forall A \in 2^X, A \downarrow \iota$ が始対象を持つ \Leftrightarrow ^{*26} ι が左随伴を持つ \Leftrightarrow 反映的部分圏である。□

生成可能性と反映的であることとの同値性を示すのは、随伴に関する各種定理の簡単な例として扱えて楽しい^{*27}。例えば、反映的 \Rightarrow 共通部分で閉じている、は反映的部分圏の埋め込みが極限を創出するという Theorem 2.1 の一例であるし、その逆は一般随伴関手定理の一例^{*28}になっている。

ちなみに、2.2 節では層の圏や小圏の圏が完備かつ余完備なことを示すのに関手圏の反映的部分圏であることを使ったのだが、それに対応する生成可能な部分集合族の性質は次である。

Corollary 2.1 (生成可能なら完備束). 集合 X の部分集合族 Σ が生成可能なら Σ は包含関係によって完備束である。

Proof. 順序集合が完備束であるのは圏として完備かつ余完備なときなので、Theorem 2.3 と Theorem 2.1 (と Proposition 2.1) から従う。□

参考文献

- [1] Emily Riehl, CATEGORY THEORY IN CONTEXT, DOVER, 2016.
- [2] Mac Lane, S. (1971) Categories for the Working Mathematician, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2nd ed. 1998. (S. マックレーン 著, 三好 博之・高木 理 訳, 『圏論の基礎』, 丸善出版, 2005.)
- [3] nLab. <https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage>
- [4] 壺大整域. <http://alg-d.com>

^{*24} クラスだが。

^{*25} クラスだが。

^{*26} 有名な随伴の存在条件。随伴は各対象に関する関手の表現であるという主張。

^{*27} Theorem 1.1 の条件 2 は反映的部分圏の文脈でどう解釈できるのかはわかっていないが。

^{*28} 左随伴を limit を用いて構成する一般随伴関手定理の手法は、生成される部分集合を共通部分 (limit) で表す点に現れている。一般随伴関手定理の例としてはおもちゃのようなものではあるが、これを理由に結構好きな例になっている。