

なぜ context ののか

hora-algebra

2020 年 10 月 26 日

この文章は Emily Riehl 著『Category Theory in Context』という圏論の入門書、通称 Context を勧めるための文章である。私が圏論の基本的な内容を勉強したのはこの本で、あまりにも良かったので勢いだけでこの文章を書く。赤字は 10/26 の追記である。黒字を書いた当時 (5/29) の勢いは保ちつつ、言い過ぎな部分を訂正したい。訂正しても、この文章は多くの誤りを含む文章であることは残念ながら変わらない事実かもしれない。私はこの文章の中で圏論を学ぶメリットと圏論を context で学ぶメリットを十分に区別できていない可能性がある。

目次

1	Context とは	1
2	豊富な具体例	2
3	現代的な内容	3
4	著者 Emily Riehl について	3
5	細々としたこと	4

1 Context とは

Dover 社から出版されている著者 Emily Riehl^{*1}の圏論入門書である。全体で 6 章 +Epilogue 構成である。1 章は基礎概念の章である。圏論の基礎的な概念である圏、関手、自然変換が準備される。この時点での言葉としての有用性をアピールしてくる^{*2}。1 章の最初から我々を楽しませようという強い意志を感じる。それもそれも圏論的に書けるんだ！という驚きと、書いてどうすんの？という疑問が湧くはず。その疑問は本を読むうちに驚きに変わるはず!!Context はフラグ回収の意味で芸術品まである。

2 章は普遍性の章である。圏論唯一の定理とも (ジョークで) 言われる Yoneda の補題が示され、各種の普遍性が Yoneda のもとに統一的かつ簡潔に記述される。Category of elements という概念が直感的理解の中心的な役割を果たしてくれるのだが、他の本を見てみたところ、これは Context の特徴らしい。最高。ここで圏論の思想のうちの（重要な）ひとつに触れる。

^{*1} マジかっこいい

^{*2} 例えば関手を定義して具体例を見た後最初にすることはブラウラーの不動点定理の証明である！

3 章は極限の章である。既存の数学的対象から新しい対象を作る手段である極限を学ぶ。圏の中で行う工作と言つていい。我々の持つている数学的概念の構成方法、例えば直積や直和、が統一的に表現される。そして圏論の基本的かつ便利な定理の典型例である「hogehoge な関手は hugahuga な極限を piyopiyo する」と言つた定理を述べる準備が整う。**そして実際にいくつかは示される。** diagram chase(可換図式で証明するやつ)も本格化してきてうおおお圏論してゐるぜええええって気持ちになれる。

4 章は随伴の章である。4 章までの内容が書いてある本は圏論の入門書と言つていいだろう^{*3}関手のある種の双対性である随伴について学ぶ。「随伴は至るところに現れる」と圏論の創始者の一人 Mac Lane は言ったそうだが、我々の知つている実に多くの概念が随伴によって統一的なイメージを与えられていくのは楽しい。圏論の便利な定理と言えば LAPC,RAPL(左随伴は余極限を保ち、右随伴は極限を保つ)が挙がるだろう。これらは 4 章で示される。私もこれを示すために(テンソルと直和の交換の話を聞いていた)Context を読み始めたのだが、この時点では完全に魅了されていた。

5 章はモナドの章である。別の言い方をすれば普遍代数学の章である。**これは言い過ぎで、代数以外の話もたくさんある。** Context を読み始めた段階では 4 章までしか読む気がなかった自分が、4 章までを読み 5 章も面白いに違いないと思つた(建てられたフラグの回収が楽しみだったのもあるが)読んでみたら想像を超えていた。一番好きな章と言つてもいいかもしれない。モナドについて computer science で使われるという話だけは聞いていたが、Context では普遍代数学に注目していた。モナドに関する**圏論的に自然なモチベーションによる議論**から代数学に関する強力な一般論が吐き出されていく様は感動的ですらある。

6 章は Kan 拡張の章である。有名な「すべての概念は Kan 拡張である」という言葉が章のタイトルであり、Context 最終章最終節である 6.5 All Concepts で今まで勉強してきた概念が Kan 拡張として統一的に記述される。語るまでもない激アツ最終話である!!いわゆる普遍随伴はここで扱われる。

Epilogue では、「圏論の最先端はこの入門書から遙か先にある。今から述べるものも基本的な定理であるが...」(意訳)と言つてから、高度な圏論の入り口をいくつか紹介してくれる。最後までワクワクさせてくるわけである。

2 豊富な具体例

Context の良い点といえば具体例の豊富さがまず最初に挙がるだろう。例えば、圏が定義された直後には 11 個の例が挙がる。それらの例を学んでお腹いっぱいになつたら、その直後にさらに 7 個の例が与えられる。圏論の典型的な教科書として圏論の基礎やベーシック圏論や巨大整域や Awodey の圏論なんかが挙がるだろうが^{*4}、これらより圧倒的に**学部生にわかる**具体例が豊富だと言つていい。**実際に具体例の数を数えたわけではないから、これは言い過ぎかもしれない。**他の本との相対的な主張ではなく絶対的な主張に変化させたい。

具体例は圏論を学ぶ上での**最重要項目**重要項目だと言って良いだろう。(言葉としての) 圏は諸々の数学的対象に普遍的な構造を記述するわけだから、圏論に対する直感的理解はその具体例に対して持つ直感的理解から構成されていく。豊富な具体例を見ることで初めて、数学的対象の持つ構造の本質的な共通点に気づき圏論

^{*3} ベーシック圏論の扱う対象は Context4 章まで(のうち一部)と言つてほぼ間違ひ無いだろう。Awodey 本は Context5 章まで(のうち一部)に Awodey 本最大の特徴である Awodey 本 6 章を付け加えたものと言つておおよそ正しそうである。Awodey 本は Logic や Computer science のための圏論という側面を持つ

^{*4} これら全てにお世話になっているのだが、今回は Context 最高!!!って文章なので許してください。守備範囲や目的や想定読者が違うはずなので

が生きた言葉になってくるのだとこの時点の私は思う。圏論を学ぶ前は、圏論は無機質で形式的だが強力な道具なのだとと思っていたし、具体例があまりない文献で勉強していたときでさえそう思っていた。圏論の定理の証明を追って他の理論に適用できるようになるのは(少なくとも基本的な話(LAPCとか)なら)簡単だろう。圏論が数学的対象へのイメージや直感をうまく表現する⁵直感的な言語であるからして強力なのだと見えるには、具体例なしに圏論を学んではならない学ぶのはあまり良い戦略とは言えないと思う。

Context の具体例はただ多いだけではない。まず、初等的な例を分野をまたいで紹介している。初等的な代数学、位相空間論、グラフ理論、線形代数、解析、ロジック、多様体、順序構造(、そして圏論自体!)、何を学んでいる人にも理解できる例がある。具体例が多いということは理解できる例も多くなるわけだから敷居はかなり低くなる。また、高度な例も提供してくれる。これは Context 全体に関わる話だが、高度な圏論を思わせる話が至るところに散りばめられている。Context を読み終わってからいくらか文章を読んでいるが、「Context の例でやったやつだ!」を何度もしている。これは 10/26 の私が強調したい点でもある。高度な圏論に限らず、数学をしていると思われるところで context の具体例や Remark が役に立つ。そしてこれも Context 全体に関わる話だが、現代的な例も紹介してくれる。2010 年以降の参考文献もいくつもある。

3 現代的な内容

Context は 2016 年の本であってかなり新しい部類に入る。そしてその新しさは魅力である。具体例のところでも言ったが Riehl はかなり現代的な書き方をしているし、Riehl 自身の知見が生かされているのだと感じる。例えば導来関手の間の随伴に関する演習 Exercise 6.4.iv は 2007 年の論文の主定理であるらしい⁶! 圏論の基礎の現代版と呼ぶ人もいる^{7*8}。参考文献は、出版年である 2016 年のものも含めて 2010 年以降のものが 17 個以上ある。

新しい本ってことはまだ誤植が多いんじょ?と思った皆さん、異様に少ないです。

4 著者 Emily Riehl について

私は Emily Riehl のファンなのかもしれない。Emily Riehl は 2020 年 5 月現在 Johns Hopkins 大学の准教授なのだが、そのホームページ <http://www.math.jhu.edu/~eriehl/> には 3 つの写真が並んでいる。一つは数学者としての Riehl であって、数式が書かれた黒板の前で腕を組んでいる写真である⁹。一つはフットボール選手としての Riehl である。AFL インターナショナルカップ(3 年に 1 回オーストラリアで開催されるオーストラリアンフットボールの世界一決定戦)2017 年大会にアメリカ女子チームの副キャプテンとして参加したらしい¹⁰。さらに、ベースを弾いている Riehl である。弦は 5 本である¹¹。 wikipedia 情報。Twitter や YouTube もやっていて、見にいくと圏論的な学びもある。

*5 そして学ぶ前には想像もできなかったほど豊かな表現力を持つ!

*6 1997 年に第二版が出た圏論の基礎には当然載っていない

*7 尊敬するびあのん先輩

*8 ただ、圏論の基礎に載っていて Context に載っていない内容もたくさんあって、例えばアーベル圏やモノイダル圏は Context では Epilogue で触れられる程度である

*9 かっこいい

*10 かっこいい

*11 かっこいい

5 細々としたこと

細かいメリットを挙げていく。この中のどれかが読むきっかけになる人も多いのではないかと思う。

- 英語が読みやすい。洋書であることに抵抗がある人も多いかもしれないが、前書きを除いて英語が簡潔で大変読みやすい。ネイティブでない人が読むことを想定して書かれていると至る所で感じる。
- 読んでて超楽しい。フラグ回収も綺麗だし、文章もうまいし。記憶を消してもう一回読みたいと数学書に対して初めて思った。
- Context の全文章が(数少ない誤植も訂正された状態で)著者 Emily Riehl 本人のホームページ <http://www.math.jhu.edu/~eriehl/> で公開されている。Riehl の他の文章も公開されていてありがたい。
- いくつかの章や節の最初に、圏論に関する名言の引用がされている。これが毎度新しいものを学ぶ興奮を引き出してくれる。
- 短い文章やエッセイを紹介し、参考文献に入れている。例えば Tom Leinster(ベシ圏の著者)の“Doing without diagrams”<https://www.maths.ed.ac.uk/~tl/elements.pdf> や Barry Mazur の“When is one thing equal to some other thing?”http://people.math.harvard.edu/~mazur/preprints/when_is_one.pdf なんかである。
- 具体例が豊富なので、知らない分野に興味を持つきっかけとしても使える。知らない分野の例が出てきてもすぐには諦めずその分野の基本的な内容を勉強してみると言った多少無茶な読み方をした結果読むのに時間がかかったがいろんな分野の人の話が聞けるようになった気がする。これは後のメリットだが、全ての具体例に少しばかり目を通したことで、(未知の) 数学をしていると既視感を感じ context に戻れるようになった。新しく学ぶ数学とすでに勉強した数学の(多くの場合数学的に記述された!)類似を得られるのは数学の勉強一般に良い影響を与えてくれていると実感している。
- 本が安い。前述した通り、pdf は無料なのだが本自体も 29.95 ドルである。アマゾンでは 2000 円ちょっとで売っているのもよく見る。Dover 社さんすごい。
- 記述が丁寧で行間は少なく、形式的な前提知識はほぼないと言っていい。もちろんいろんな数学的対象を知っている方が楽しめると思う。
- これは読んでからでないと実感できないメリットかもしれないが、高度な圏論、例えば 2 圏やトポスやアーベル圏やモノイダル圏を意識した記述が多い。またホモトピー論を意識した記述も多い^{*12}。私に見える範囲だけでも、2 圏は 1.7 や 4.4 や 6.1 で言及されるし、トポスは Prop5.5.9 や E.4 など、アーベル圏は 4.5 や E.5、モノイダル圏は 4.3 や 5.1 や E.2、ホモトピー論は simplicial set は至る所で、ホモトピー圏は 6.4 で言及される。

^{*12} これが前者の分類に入るのかについてはまだ知らない