

石の問題

hora-algebra

2020年9月9日

問題「 n, m は正整数とする。正 n 角形の頂点に全部で m 個の石が置かれている状況を考える。操作とは、正 n 角形の (n 個の) 頂点から一つを選び、その頂点においてある石を全て取り、選んだ頂点の隣から反時計回りに石を一つずつ置いていくことを指す。どんな石の配置からどんな石の配置へも有限回の操作で移れるか。」について考える。考えた時系列順に書いていく。結果的には section6 で他の節とは関係なく解決されるのでそこだけ読んで構わない。それ以外の章は記録として残しておく。特に石の個数を ∞ に飛ばした連続版についての section5 はそれ自体一つの話題として面白がってくれる人もいると思う。

目次

1	元の問題	1
2	元の問題との類似から分かること	2
3	n が小さい時の考察	2
4	コンピュータによる実験	3
5	連続版についての考察 ($m \rightarrow \infty$)	5
5.1	問題設定	5
5.2	愚直な解法	6
5.3	マシな解法とより強い結果	10
5.4	逆操作によるカオス力学系	15
6	グラフ理論的解決	18

$0 \in \mathbb{N}$ として書く。

1 元の問題

J.Koizumi さんが Twitter にあげていた次の問題がきっかけである。

Question 1.1 (元の問題 (答え:Yes)). n, k は正整数とする。正 n 角形の頂点に全部で $n * k$ 個の石が置かれている状況を考える。操作とは、正 n 角形の (n 個の) 頂点から一つを選び、その頂点においてある石を全て

取り、選んだ頂点の隣から反時計回りに石を一つずつ置いていくことを指す。どんな石の配置からでも、全ての頂点に k 個の石が置かれた配置へ有限回の操作で移れるか。

答えは Yes である。石を一か所に集めることができれば、集めた場所を選んで操作することで目的の状態へ移れる。石を一か所に集めるには、集めたい頂点を一つ（何でもいいから）選んで、その頂点以外で石があるところに操作を繰り返せば良い（集めたい頂点以外にある石の数は増えないことに注目すると示せる）。

今回考える問題

Question 1.2 (今回考える問題 (答え:Yes)). n, m は正整数とする。正 n 角形の頂点に全部で m 個の石が置かれている状況を考える。操作とは、正 n 角形の (n 個の) 頂点から一つを選び、その頂点においてある石を全て取り、選んだ頂点の隣から反時計回りに石を一つずつ置いていくことを指す。どんな石の配置からどんな石の配置へも有限回の操作で移れるか。

は元の問題の単純な拡張である。少し考えてみても今回考える問題は解決できなくて、元の問題よりかなり難しそうな予感がしている。

2 元の問題との類似から分かること

元の問題と全く同じ考察で次がわかる。

Proposition 2.1. どんな石の配置からでも、石が一か所に集まった配置へ有限回の操作で移れる。

この proposition からわかるることはいくつかある。

Corollary 2.1. n, m を fix した時、状態を頂点にして一回の操作による遷移を (有向) 辺にする (有向) グラフは連結である。

有向グラフの連結成分に数 (学的対象) を対応付ける考察を安直な不变量による考察というなら、安直な不变量による考察でこの問題に No ということはできない¹。

Corollary 2.2. 今回考える問題の答えが Yes であることと、石が一か所に集まった配置からどんな石の配置へも有限回の操作で移れるることは同値である。

後者が前者より従うことは明らかで、前者が後者から従うことは proposition から石が一か所に集まった配置を経由すればいい。

3 n が小さい時の考察

ここで、よくわからない時は特別な時にに関して実験しろという原則に従って n が小さい時について考えてみる。 $n = 1$ の時はそもそも状態が 1 つしかないから trivial である。非自明な最初の n は $n = 2$ である。 $n = 2$ についてしばらく考えても次のようなかなり限定的な結果しか得られなかった。

Proposition 3.1. $n = 2$ かつ m が 2 のベキのとき Question1.2 は正しい。

¹もちろん違う有向グラフを考えるとかいう可能性にまで言及しているわけではない

Proof. 石の配置について、二つの頂点のうち石の個数が少ない方の石の個数 k を用いて状態 k と呼ぶことにする。ここでは二つの頂点の石の個数を入れ替えたものを同じ名前で呼んでいる。状態 k へは状態 $\min(2k, m - 2k)$ からうつることができる。 $\min(2k, m - 2k)$ が 0 でないなら $\min(2k, m - 2k)$ を 2 が割り切る回数は、 k を 2 が割り切る回数より 1 大きい。よって、 k を $\min(2k, m - 2k)$ にする操作を繰り返すといつか 0 になる。 \square

しかし、元の問題を投げていた J.Koizumi さんが $n = 2$ の時に正しいことを証明してくださった。次の証明は J.Koizumi さんの証明である^{*2}。

Proposition 3.2. $n = 2$ のとき Question1.2 は正しい。

Proof. 頂点に石がそれぞれ k 個、 $n - k$ 個ある状態を $\langle k \rangle$ と書くことにする。 $S = \{\langle k \rangle \mid 0 \leq k \leq m\}$ 、 $S^+ = \{\langle k \rangle \mid 0 \leq k < m/2\}$ 、 $S^- = \{\langle k \rangle \mid m/2 < k\}$ とする。 $f : S \rightarrow 2^S$ を

$$f(\langle k \rangle) = (\text{1 回の操作で } \langle k \rangle \text{ へ移れる状態全体})$$

と定める。具体的には

$$f(\langle k \rangle) = \begin{cases} \{\langle 2k \rangle, \langle 2k + 1 \rangle\} & (\langle k \rangle \in S^-) \\ \{0, m\} & (m : \text{偶数}, k = m/2) \\ \{\langle 2k - m \rangle, \langle 2k - m - 1 \rangle\} & (\langle k \rangle \in S^+) \end{cases}$$

となる。 $F : 2^S \rightarrow 2^S$ を

$$F(T) = \bigcup_{x \in T} f(x)$$

と定める。 f の表示から T : 区間かつ ($T \subset S^-$ or S^+) なら $F(T)$ も区間で $\#F(T) = 2\#T$ である。

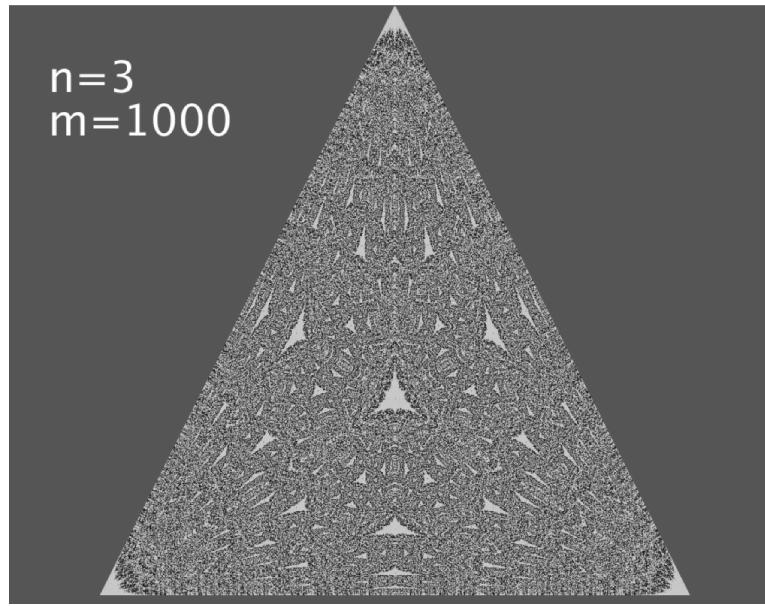
以上のことから、任意の $\langle k \rangle \in S$ について $N \in \mathbb{N}$ が存在し $F^N(\{\langle k \rangle\})$ は区間でありかつ S^- にも S^+ にも含まれない。この N について、 m の偶奇によって $\langle m/2 \rangle$ か $\langle (m+1)/2 \rangle$ が $F^N(\{\langle k \rangle\})$ の元になっている。 $\langle 0 \rangle$ から m の偶奇によって $\langle m/2 \rangle$ か $\langle (m+1)/2 \rangle$ へ一回の操作で移れるのでこれで示された。 \square

$n = 1, 2$ について正しいことがわかった。次に考えるべきは $n = 3$ である。 $n = 3$ からは石を配る回転方向も意味を持ってきて考えるのが大変だった。いよいよ複雑になってきたのでコンピュータに投げることにした。

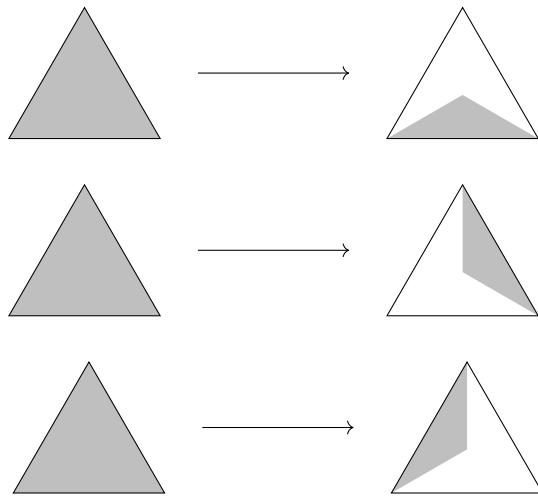
4 コンピュータによる実験

$n = 3$ のケースについて、プログラムに嘘がなければ $1 \leq m \leq 300$ までコンピュータで確かめられた。コンピュータによる実験では視覚的なイメージを得ることを重視した。 $n = 3$ のとき、3 つの頂点に a, b, c 個 ($a, b, c \in \mathbb{N}, a + b + c = m$) の石がある状態を $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \subset \mathbb{R}^3$ という点と対応させる。すると、 n, m を fix したとき状態全体は正三角形状に並ぶ。与えられた初期状態から与えられた手数 k 以内で移れる状態を黒く表示させるプログラムを書いた。 $m = 1000$ のとき、適当な手数について表示させたものが次の画像である。

^{*2} 打つの樂にするためにいくつか略したり書き換えたりしたし、ここに嘘があつたら私の責任です

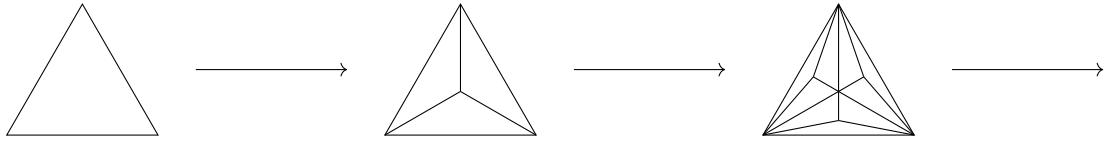


若干のフラクタル感^{*3}を感じたので理由を考えてみると、 m が大きい時には次のような線形近似があるからだとわかった。 (a, b, c) という配置から一つ目の頂点に関して操作をすると $(\lfloor a/3 \rfloor, b + \lfloor (a+2)/3 \rfloor, c + \lfloor (a+1)/3 \rfloor)$ へ移る。 m がとても大きいとき、これは $(a, b, c) \mapsto (a/3, b+a/3, c+a/3)$ という線形な変換で近似できる。他の頂点についても同様に $(a, b, c) \mapsto (a+b/3, b/3, c+b/3)$, $(a, b, c) \mapsto (a+c/3, b+c/3, c/3)$ で近似される。この線形な変換は正三角形で図形的に書けば



となる。この操作を繰り返すと三角形を重心で 3 つに分けていくことになり、

^{*3} 私はフラクタルの定義も知らないから適当な発言



と移っていく。先ほど感じたフラクタル感はここからきているものだろう。 $m \rightarrow \infty$ のとき(連続版)の考察をすることで今回考える問題に関するアイデアが得られるかもしれない。

5 連続版についての考察 ($m \rightarrow \infty$)

5.1 問題設定

石の個数 m が多いとき、線形に近似できるという話を前の section で書いた。石の総数に対する割合を考えることで次の問題を今回の問題の $m \rightarrow \infty$ の安直な理想極限として考えられる。

Question 5.1 (安直連続版 (答え:No)). n は正整数とする。正 n 角形の各頂点に総和が 1 になるように非負実数が与えられている状況を考える。操作とは、正 n 角形の (n 個の) 頂点から一つを選び、選んだ頂点 (に対応する非負実数) は $1/n$ 倍し他の頂点に関しては選んだ頂点 (に対応する非負実数) の $1/n$ 倍を足すことを指す。どんな非負実数の配置からどんな非負実数の配置へも有限回の操作で移れるか。

この問題の答えは明らかに No である。例えばある状態から有限回の操作で移れる状態は高々可算個だし、もっと具体的に言えば初期状態で有理数しか現れていないならどれだけ操作しても有理数しか現れない。ぴったり一致するのは石の個数が有限個のときの話で、連続版ならいくらでも近くなることを言うべきだろう。

少し記号を準備する。

$$\Delta_n = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i = 1, a_i \geq 0 (1 \leq i \leq n) \right\}$$

$$T_{n,i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1 + \frac{a_i}{n}, \dots, a_{i-1} + \frac{a_i}{n}, \frac{a_i}{n}, a_{i+1} + \frac{a_i}{n}, a_n + \frac{a_i}{n}) (1 \leq i \leq n)$$

$n = 3$ なら Δ_n は前の section から言及していた正三角形である。 Δ_n の点と Question 5.1 の非負実数の配置を対応させて考える。 $T_{n,i}(\Delta_n) \subset \Delta_n$ であり、 $T_{n,i}$ は i 番目の頂点を選ぶ操作に対応する \mathbb{R} -線形写像である。今後、 Δ_n に $T_{n,i}$ を i を変えながら操作していく。繰り返しの操作は $\{1, 2, \dots, n\}$ の元の有限文字列で書けるから、 $\{1, 2, \dots, n\}$ の有限文字列に関しても記号を準備しておく。

$$W_{n,k} = \{1, 2, \dots, n\}^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$W_n = \coprod_{k=0}^{\infty} W_k$$

とする^{*4}。

^{*4} いわゆる自由モノイドである。集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ が作用している気持ち。

そして、 $w = (i_k, \dots, i_2, i_1) \in W_n$ について⁵、

$$T_{n,w} = T_{n,i_k} \circ \dots \circ T_{n,i_2} \circ T_{n,i_1} : \Delta \rightarrow \Delta$$

と書くことにする。 w が空文字列のときは $T_{n,w} = \text{id}_{\Delta_n}$ とする⁶。そして、作用の表記でよくあるように、 $W' \subset W_n$ と $S \subset \Delta_n$ について

$$W'S = \{T_{n,w}(x) \mid w \in W', x \in S\}$$

と定める。また S が一元集合 $\{x\}$ なら $W'S$ を $W'x$ ともかくこととする⁷。

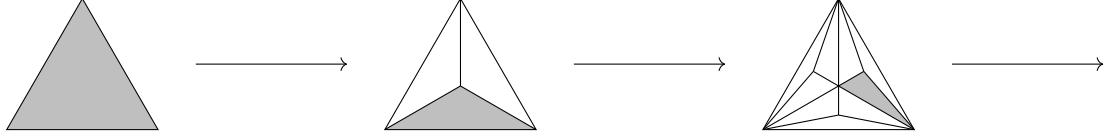
以上の記号のもと、Question1.2 の連続版は次のようにするのが自然だろう。

Question 5.2 (連続版 (答え:Yes)). n は正整数とする。任意の $x \in \Delta_n$ について $W_n x$ は Δ_n で dense か

Δ_n は \mathbb{R}^n の部分 (距離) 空間である。ぴったり一致するのではなく、いくらでも近づけることを主張すべきだろう。Question5.1 の言葉で言えば、「どんな状態からどんな状態へも有限回の操作でいくらでも近づける」という主張になる。この連続版の解決をすることで、そこで生まれたアイデアを利用して Question1.2 に繋げようという魂胆である⁸。

5.2 愚直な解法

連続版の最初の考察は操作すればするほど結果として得る状態は小さくなっていくということである。



もう少し具体的に述べておくなら、 $w \in W_{n,k}$ について $T_{n,w}(\Delta_n)$ の体積は Δ_n の体積の n^{-k} 倍である⁹。 Δ_n を小さいもので埋め尽くすんだから小さいものたちの境界は Dense になりそうだ。これを主張するためには $\partial\Delta_n$ (Δ_n の境界) と $\text{Int } \Delta_n$ (Δ_n の内部) について言及しておく。 $\partial\Delta_n$ と $\text{Int } \Delta_n$ は \mathbb{R}^n の中で考える。つまり、明示的に書けば

$$\begin{aligned}\partial\Delta_n &= \{(a_1, \dots, a_n) \in \Delta_n \mid a_1 = 0 \text{ or } a_2 = 0 \text{ or } \dots \text{ or } a_n = 0\} \\ \text{Int } \Delta_n &= \Delta_n - \partial\Delta_n\end{aligned}$$

とする。このとき、 W_n の作用による Δ_n の境界 ($\partial\Delta_n$) の像は Δ_n で Dense であることがわかる。

Proposition 5.1. $W_n \partial\Delta_n$ は Δ_n で dense である。

⁵ 添字の順番が逆になっているのは写像の合成と整合性を取るために

⁶ こちら辺ややこしく見えるかもしれないが癖。集合から End への写像があれば対応 (随伴) する自由モノイドから End へのモノイド準同型によってモノイド作用ができると言う一般的な話

⁷ なんかそこまで書く必要ないし整理する必要もないんだけど慣れとかもやもやとかそんな理由

⁸ 有限性から来る難しさとそうでない難しさを分けて考えようとしているとも言える

⁹ 体積という言葉は危うい。ちゃんと書くなら \mathbb{R}^{n-1} と $\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$ の対応を作って $n-1$ 次元 Lebesgue 測度を考えるべき。そして、Affine 変換によって Lebesgue 測度は (線形部分の \det の絶対値) 倍されることを用いて計算できるはず。正直に言えば私はちゃんとこれを書いていない。

Proof. $x \in \text{Int } \Delta_n$ と $\epsilon > 0$ を任意に取る。距離空間 Δ_n で中心 x 半径 ϵ の(開)球 $B_{x,\epsilon}$ が Δ_n に入るとして良い。このとき $k \in \mathbb{N}$ があって任意の $w \in W_{n,k}$ について $T_{n,w}(\Delta_n)$ の体積が $B_{x,\epsilon}$ の体積未満になる。もし $W_{n,k} \partial \Delta_n \cap B_{x,\epsilon} = \emptyset$ なら $w \in W_{n,k}$ があり $B_{x,\epsilon} \subset T_{n,w}(\Delta_n)$ となるので矛盾。 \square

境界は Δ_n のどんな点へも近づけることがわかった。ちなみに頂点の像がどんな点へも近づくことは(それが示せたら後は簡単なのだが)、 $T_{n,w}(\Delta_n)$ がとても長細くなることがあって同じ方法で示すのは難しそうである。示したいのはどんな点からどんな点へも近づけることだが、今の Proposition が示したいことにどう役立つか。作用に関して無心で計算できるように少し計算規則を用意する。

$S \subset \Delta_n$ について、 S の Δ_n での閉包^{*10}を \overline{S} と書く。また、 $W', W'' \subset W_n$ に関して、

$$W'W'' = \{w' \text{ と } w'' \text{ の文字列の結合} \mid w' \in W', w'' \in W''\}$$

とする^{*11*12}。すると、(モノイドの作用で一般に成り立つように) $W', W'' \subset W$ と $S \subset \Delta_n$ に関して $W'(W''S) = (W'W'')S$ となる。だからカッコを略して $W'W''S$ と書く。

Claim 5.1. 任意の $W' \subset W_n$ と $S \subset \Delta_n$ について $\overline{W'\overline{S}} = \overline{W'\overline{S}}$ である。

Proof. まず、 $\overline{S} \supset S$ より $\overline{W'\overline{S}} \supset \overline{W'\overline{S}}$ はすぐわかる。逆は

$$W'\overline{S} = \overline{\bigcup_{w \in W'} T_{n,w}(\overline{S})} \subset \overline{\bigcup_{w \in W'} T_{n,w}(S)} \subset \overline{\bigcup_{w \in W'} T_{n,w}(S)} = \overline{W'\overline{S}}$$

で閉包を取ればわかる。 \square

ここから、次がわかる。

Claim 5.2. $\overline{W_n}$ は幂等である。つまり、任意の $S \subset \Delta_n$ について $\overline{W_n \overline{W_n S}} = \overline{W_n S}$ である。さらに 2^{Δ_n} 上の二項関係 \prec_n を $S, S' \subset \Delta_n$ について $S \prec_n S' \Leftrightarrow \overline{W_n S} \supset S'$ と定めると \prec_n ^{*13} は推移的である^{*14}。

Proof. 幂等であることは $\overline{W_n \overline{W_n S}} = \overline{W_n(W_n S)} = \overline{(W_n W_n)S} = \overline{W_n S}$ から ok。推移的であることは、 $S \prec_n S'$ かつ $S' \prec_n S''$ なら $\overline{W_n S} = \overline{W_n \overline{W_n S}} \supset \overline{W_n S'} \supset S''$ なので ok。 \square

記号 \prec_n のもとにこの section で考えていることを整理する。一元集合にいちいち $\{ \}$ をつけるのが面倒なので \prec_n の左右にある時(そんなときは Δ_n の部分集合なときしかあり得ない)は一元集合 $\{x\} \subset \Delta_n$ を x と書いてしまうことにする。Question5.2 は任意の $x \in \Delta$ について $x \prec_n \Delta$ かを聞いている。この subsection の最初に示した proposition は $\partial \Delta_n \prec_n \Delta_n$ である。

$x \in \Delta$ の任意性は次のように消せる。ここで、 $g_n = (1/n, \dots, 1/n) \in \Delta_n$ とする^{*15}。

Claim 5.3. 任意の $x \in \Delta_n$ について $x \prec_n g_n$

^{*10} Δ_n は \mathbb{R}^n の閉集合だから \mathbb{R}^n の閉包としても同じこと

^{*11} 文字列の結合とは自由モノイドとしての演算のこと。例えば $(2, 1, 4, 3, 4)(5, 1, 4, 2, 4, 3) = (2, 1, 4, 3, 4, 5, 1, 4, 2, 4, 3)$ である

^{*12} こういうモノイドの基本的な話ってどのくらい共有されているんですかね。もっと授業とかでやっていいと思うんですけどね

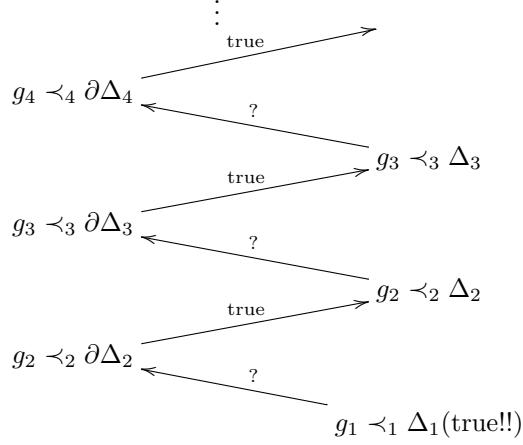
^{*13} $S \prec_n S'$ は S' のどんな元へも S の元からいくらでも近づけるという意味。なんか広がって覆っていくイメージで \prec とかいう記号を選んだ。大小関係のイメージから逆に見えたならごめんなさい。

^{*14} 前順序ですね。ここまで書いてもこの文章では多分得はなくて記号も増えるだけだけど、構造っぽいものとか一般論(圈の話!)ありそうな雰囲気あるところはこんな感じで書きたくなる。頭もスッキリする(かもしれない)し(?) 今言った一般論とは違う意味だけど、この話はモノイドの位相空間への作用に関して一般に成り立つ話(のはず。よね)

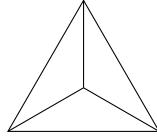
^{*15} こちらが楽をするため)

Proof. $T_n((0, 0, \dots, 0, 1)) = g_n$ だから $(0, 0, \dots, 0, 1) \prec_n g_n$ 。よって $x \prec_n (0, 0, \dots, 0, 1)$ を示せばいい。 $\sum_{i=1}^{n-1} (T_{(1, 2, \dots, n-1)}(x)$ の第 i 成分) は $\sum_{i=1}^{n-1} (x$ の第 i 成分) の $(n-1)/n$ 倍以下である^{*16}。よって $\lim_{k \rightarrow \infty} T_{(1, 2, \dots, n-1)}^k(x) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ となるので、 $x \prec_n (0, 0, \dots, 0, 1)$ が従う。□

あと示さなくてはならないのは $g_n \prec_n \partial\Delta_n$ である。 $\partial\Delta_n$ の次元は Δ_n の次元より一つ小さいことを考えると次のような帰納法が回りそうである^{*17}



上の図の?に当たる場所、つまり「正整数 n について $g_n \prec_n \Delta_n \Rightarrow g_{n+1} \prec_{n+1} \partial\Delta_{n+1}$ となる」を示せば Question 5.2 は肯定的に解決されることになる。証明のアイデアは、 Δ_3 を分割した



が正四面体 Δ_4 を上から見た図になっていることである。 Δ_3 を Δ_4 の面だと思うと、 $n = 3$ での操作は実は $n = 4$ での射影で実現される。このことをちゃんと述べるために記号を準備する。正整数 n と $1 \leq i \leq n+1$ について、 \mathbb{R} -線型写像 $P_{n+1,i} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を

$$P_{n+1,i}(a_1, \dots, a_{n+1}) = (a_1 + \frac{a_i}{n}, \dots, a_{i-1} + \frac{a_i}{n}, 0, a_{i+1} + \frac{a_i}{n}, \dots, a_{n+1} + \frac{a_i}{n})$$

で定義する。この写像(射影と呼びたい!)は $P_{n+1,i}(\Delta_{n+1}) \subset \partial\Delta_{n+1}$ を満たす。そして次の claim のように操作の極限として実現される。

Claim 5.4. 任意の $x \in \Delta_{n+1}$ と $1 \leq i \leq n+1$ について $x \prec_{n+1} P_{n+1,i}(x)$

Proof. $P_{n+1,i}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{n+1,i}^k(x)$ より従う。□

^{*16} 各成分が $(n-1)/n$ 倍以下になるとは言っていない。一回一回の操作で減る量をしたから抑える

^{*17} このためにわざわざ n を明記していた。

Δ_n を Δ_{n+1} の面と思いたい。そこで次の写像で埋め込む。

$$\iota_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1} : (a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n, 0)$$

この埋め込みは Δ_{n+1} の面を一つ選んでいるので対称性の観点から少し気持ち悪い。 Δ_n に成分の置換で移りあうという同値関係 \sim_n を考える^{*18}。 g_n は成分の置換で不变なので次が成り立つ^{*19}。

Claim 5.5. 正整数 n と $x, y \in \Delta_n$ について、 $g_n \prec x$ かつ $x \sim y$ なら $g_n \prec y$ となる。

Proof. n 個の頂点に関する対称性より。具体的には、 x に近づく操作の添字を変換する。 \square

これで射影と埋め込みと同値関係 \sim が揃ったので、今回の帰納法の中心的なアイデアとなる次の claim を述べる準備が整った。

Claim 5.6 (n での操作は $n+1$ での射影). 正整数 n と $1 \leq i \leq n$ と $x \in \Delta_n$ について、 $\iota_n(T_{n,i}(x)) \sim P_{n+1,i}(\iota_n(x))$

Proof. $x = (a_1, \dots, a_n)$ とすると、

$$\begin{aligned} \iota_n(T_{n,i}(x)) &= \iota_n\left(a_1 + \frac{a_i}{n}, \dots, a_{i-1} + \frac{a_i}{n}, \frac{a_i}{n}, a_{i+1} + \frac{a_i}{n}, a_n + \frac{a_i}{n}\right) \\ &= \left(a_1 + \frac{a_i}{n}, \dots, a_{i-1} + \frac{a_i}{n}, \frac{a_i}{n}, a_{i+1} + \frac{a_i}{n}, a_n + \frac{a_i}{n}, 0\right) \\ P_{n+1,i}(\iota_n(x)) &= P_{n+1,i}(a_1, \dots, a_n, 0) \\ &= \left(a_1 + \frac{a_i}{n}, \dots, a_{i-1} + \frac{a_i}{n}, 0, a_{i+1} + \frac{a_i}{n}, \dots, a_{n+1} + \frac{a_i}{n}, 0 + \frac{a_i}{n}\right) \end{aligned}$$

となる。第 i 成分と第 $n+1$ 成分を入れ替えればよい。 \square

これでもう証明に入る。

Proposition 5.2. 正整数 n について $g_n \prec_n \Delta_n \Rightarrow g_{n+1} \prec_{n+1} \partial\Delta_{n+1}$ となる。

Proof. $x \in \Delta_n$ が $g_{n+1} \prec_{n+1} \iota_n(x)$ を満たすとする。このとき、任意の $1 \leq i \leq n$ に関して $g_{n+1} \prec_{n+1} \iota_n(x) \prec_{n+1} P_{n+1,i}\iota_n(x) \sim \iota_n(T_{n,i}(x))$ なので $g_{n+1} \prec_{n+1} \iota_n(T_{n,i}(x))$ となる。これを繰り返すことで任意の $w \in W_n$ について $g_{n+1} \prec_{n+1} \iota_n(T_{n,w}(x))$ となり、したがって $g_{n+1} \prec_{n+1} \iota_n(W_n x)$ がわかる。 $g_{n+1} \prec_{n+1} P_{n+1,n+1}(g_{n+1}) = \iota_n(g_n)$ より、 x として g_n を取れるので、 $g_{n+1} \prec_{n+1} \iota_n(W_n g_n)$ が得られた。

ι_n の像を取る操作と閉包を取る操作は可換なので $g_{n+1} \prec_{n+1} \iota_n(W_n g_n) \prec_{n+1} \overline{\iota_n(W_n g_n)} = \iota_n(\overline{W_n g_n}) = \iota_n(\Delta_n)$ となる。最後の等式で仮定 $g_n \prec_n \Delta_n$ を用いた。 $\partial\Delta_{n+1}$ の元は $\iota_n(\Delta_n)$ の元のどれかとは同値関係 \sim で同じ同値類に属すので、 $g_{n+1} \prec_{n+1} \partial\Delta_{n+1}$ となる。 \square

この subsection で示したことまとめ次の結果を得る。

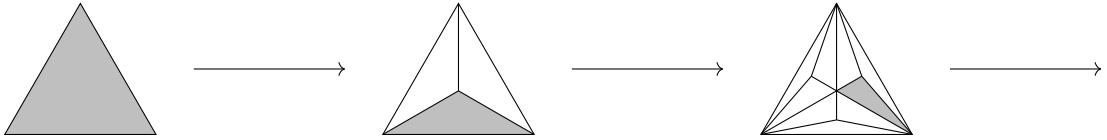
Theorem 5.1 (連続版の肯定的解決). Question5.2 の答えは Yes である。

^{*18} 対称群作用させたりしてちゃんと書いてもいいが、伝わると思った。 $n = 4$ なら例えば $(0.42, 0.13, 0.27, 0.18) \sim (0.27, 0.42, 0.18, 0.13)$ は正しくて $(0.42, 0.13, 0.27, 0.18) \sim (0.27, 0.42, 0.19, 0.12)$ は正しくない。

^{*19} 始点の不定性を消すのに g_n を選んだ理由はここにある

5.3 マシな解法とより強い結果

前の subsection の解法はステップをいくつも積み重ねたものだし、連続版特有の頂点の置換に関する対称性を使ったものだから、Question1.2 に対してそこまで大きな示唆を与えるものには(少なくとも示した直後の私には)思えない。前の subsection の解法のスタートとなるアイデアは操作をすればするほど結果としてありえる状態は小さくなっていくこと



であった。これをもっと素直に、「操作をすればするほど初期値の影響が少なくなっていく」と解釈してみると。すると Question5.2 より強い次の主張が成立するのではないかと思えてくる。 $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ は \mathbb{R}^n の距離で距離空間とみなす。 $x \in \Delta_n$ を中心とする半径 $\epsilon > 0$ の開球 ($\subset \Delta_n$) を $B_n(x, \epsilon)$ と書くことにする。

Question 5.3 (より強い主張(答え:Yes)). n を正整数とする。任意の $x \in \Delta_n$ と $\epsilon > 0$ について $w \in W_n$ が存在し $T_{n,w}(\Delta_n) \subset B_n(x, \epsilon)$ となるか。

これが示されれば Question5.2 は(体積とかいう怪しい言葉を使わずに!)系として従うし、Question1.2 にも重要な示唆を与えそうだ。 $T_{n,w}(\Delta_n)$ が小さくなるためには $T_{n,w}$ のリプシツ定数を見ればいい。一応定義を書いておく。リプシツ定数をとる写像 $L_n : \Delta_n^{\Delta_n} \rightarrow [0, +\infty]$ を $f \in \Delta_n^{\Delta_n}$ について

$$L_n(f) = \sup_{x,y \in \Delta_n, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

と定める。 $f, g \in \Delta_n^{\Delta_n}$ について $L_n(g \circ f) \leq L_n(g)L_n(f)$ である。文字列 $w, w' \in W_n$ の結合を ww' と書くことにすると、 $L_n(T_{n,ww'}) \leq L_n(T_{n,w})L_n(T_{n,w'})$ となる。 $T_{n,w}$ は距離をのばさないこと(次の claim)がわかる。

Claim 5.7. 正整数 n と任意の $w \in W_n$ について $L_n(T_{n,w}) \leq 1$ である。

Proof. w の長さが 1 の時に示せば十分。 $1 \leq i \leq n$ について $L_n(T_{n,i}) \leq 1$ を示す。 $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$ と具体的に座標をとって計算すると $|a - b|^2 - |T_{n,i}(a) - T_{n,i}(b)|^2 = \frac{n+1}{n}(a_i - b_i)^2 \geq 0$ となり ok^{*20}。□

厄介なのは等号が成り立つケースがあることである。1 未満と 1 では縮小の議論においては大違いである。単に操作の回数を増やし(つまり w の長さを大きくし)てもリプシツ定数は小さくなるわけではない。出てくる文字の種類が偏っているときがその典型である。例えば $T_{n,1}$ を何回か合成したもののリプシツ定数は 1 である。さらに一般に、出てくる文字の種類が $n - 2$ 文字以下なら Δ_n の頂点で動かないものが 2 つ以上あ

*20 計算しなくとも線形なことと $T_{n,w}(\Delta_n) \subset \Delta_n$ から分からんのかと言われそうだけど。

るからリップシツ定数は 1 である。次の proposition は逆に $n - 1$ 種類以上の文字を含むなら 1 未満のリップシツ定数を持つと主張する。それだけではなく、リップシツ定数が w に依らない定数 $c_n < 1$ で抑えられることも示す^{*21}。

Proposition 5.3. n を正整数とする。実数 $c_n < 1$ が存在し、 $n - 1$ 種類以上の文字を含む任意の $w \in W_n$ について $L_n(T_{n,w}) \leq c_n$ となる。

Proof. $n \leq 2$ のときを考える。

まず、(本当の) 線形写像の話に移す。 $M_n = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$ なる \mathbb{R}^n の部分空間を考える。任意の $x, y \in \Delta_n$ について $x - y \in M_n$ であり、 $T_{n,w}(M_n) \subset M_n$ なので線型写像 $T_{n,w} : M_n \rightarrow M_n$ のリップシツ定数は $L_n(T_{n,w})$ 以下である。さらに (論理的には今述べた大小関係だけで十分なのだが) $\text{Int } \Delta_n$ の元の近傍を見て線形性を使えば $T_{n,w} : M_n \rightarrow M_n$ のリップシツ定数と $L_n(T_{n,w})$ は実は一致することがわかる。だから $T_{n,w} : M_n \rightarrow M_n$ のリップシツ定数を調べれば良い。

$1 \leq i \leq n$ について、線型写像 $T_{n,i} : M_n \rightarrow M_n$ を調べておく。 \mathbb{R}^n の標準基底を e_1, \dots, e_n と書くことにする。 $f_i := e_i - \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} e_j$ は $T_{n,i} : M_n \rightarrow M_n$ の固有値 $\frac{1}{n}$ の固有ベクトルである。さらに、 $\langle f_i \rangle$ (生成する部分空間) の直交 (\mathbb{R}^n ゆずりの内積) 補空間 $N_i = \langle e_j - e_{j'}, j, j' \neq i \rangle = \langle e_j \rangle_{j \neq i} \cap M_n$ は固有値 1 の $n - 2$ 次元固有空間である。^{*22} $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ に関して、 $\bigcap_{s \in S} N_s = \bigcap_{s \in S} (\langle e_j \rangle_{j \neq s} \cap M_n) = \langle e_j \rangle_{j \notin S} \cap M_n$ なので $\bigcap_{s \in S} N_s$ の次元は $n - (\#S) - 1$ である。

次に、球面に注目する。半径 1 の球面を $S_n = \{x \in M_n \mid |x| = 1\}$ と書くことにする。 M_n の相異なる元 x, y について $x - y$ は S_n のある元と平行だから (正規化する)、 $T_{n,w}(S_n)$ の元の大きさの上限は $T_{n,w} : M_n \rightarrow M_n$ のリップシツ定数に等しく、したがって $L_n(T_{n,w})$ に等しい^{*23}。

文字列 w を末尾 (右) から見て、最初に現れる文字 (つまり末端の文字) を i_1 とかき、その後同様に $1 \leq k \leq n - 1$ 番目に現れる文字を i_k と書くことにする。このとき、 i_1, \dots, i_{n-1} の取り方から各 $1 \leq k \leq n - 2$ について i_1, \dots, i_k の k 種類の文字のみからなる文字列 w_k と (特に制約のない) $w' \in W_n$ を用いて $w = w' i_{n-1} w_{n-2} i_{n-2} \dots w_2 i_2 w_1 i_1$ とかける。 i_1, \dots, i_{n-1} としてあり得るパターンは $n \times (n - 1) \times \dots \times 2$ 通りで特に有限個なので、同じ i_1, \dots, i_{n-1} のパターンを持つ w らに関して一様にリップシツ定数を抑えることができれば良い。

今後の方針は、 i_1, \dots, i_{n-1} に関して次の三つの条件を満たすコンパクト集合の族 $K_1, \dots, K_{n-1} \subset M_n$ を構成することである。

- (i) $S_n \subset K_1 \cup \dots \cup K_{n-1}$
- (ii) 任意の $1 \leq k \leq n - 1$ と $1 \leq j \leq n - 1 - k$ について、 $T_{n,i_j}(K_k) \subset K_k$
- (iii) 任意の $1 \leq k \leq n - 1$ について、 $T_{n,i_{n-k}}(K_k) \subset \{x \in M_n \mid |x| < 1\}$

このような $K_1, \dots, K_{n-1} \subset M_n$ を構成できたとして proposition を示しておく。

$$c := \max_{1 \leq k \leq n-1} \sup_{x \in K_k} |T_{n,i_{n-k}}(x)|$$

^{*21} 直感的には簡単に示せそうなのに安直な方法がなんだかんだうまくいかなくて複雑な証明になってしまった。簡潔な証明募集中

^{*22} つまり、ある軸について潰しているだけ。その軸が斜めに交差しているとこ、要は同時対角化できないとこがめんどくささの要因

^{*23} $T_{n,w}(S_n)$ が $\{x \in M_n \mid |x| < 1\}$ に入ることを示し、そこからコンパクト性を使い $L_n(T_{n,w}) < 1$ を示すのは難しくないが、今回 w に依らない定数 $c_n < 1$ で抑えられることを示したいのでもうひと工夫必要である。

とすると K_1, \dots, K_{n-1} らのコンパクト性と (iii) から $c < 1$ である。 $x \in S_n$ を任意に取る。(i) より $x \in K_k$ なる $1 \leq k \leq n-1$ が存在する。この k に関して、 $|T_{n,w}(x)| \leq |T_{n,i_{n-k}w_{n-1-k}i_{n-1-k}\dots w_2i_2w_1i_1}(x)| = |T_{n,i_{n-k}}(T_{n,w_{n-1-k}i_{n-1-k}\dots w_2i_2w_1i_1}(x))| \leq c$ となる。最初の不等式では $T_{n,w' i_{n-1} w_{n-2} i_{n-2} \dots w_{n-k}}$ のリプシツ定数が 1 以下、特に原点との距離をのばさないことを使った。最後の不等式で $w_{n-1-k}i_{n-1-k}\dots w_2i_2w_1i_1$ は i_1, \dots, i_{n-1-k} の $n-1-k$ 種類の文字からなることと (ii) を使った。

それでは、 $K_1 \dots K_n$ の構成にかかる。別の集合族 X_1, \dots, X_{n-1} の帰納的定義の副産物として構成する。まず、 $N_{i_{n-1}}$ は空でない閉集合なので、 $N_{i_{n-1}}$ からの距離をとる M_n 上の連続関数 Φ_1 が定まる²⁴。 $N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-1}}$ は $n - (n-1) - 1 = 0$ 次元空間ゆえ $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-1}} = \emptyset$ である。よって Φ_1 は $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-2}}$ 上では正の値を取る。 $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-2}}$ は空でない有界閉集合²⁵なので $\Phi_1(S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-2}})$ は(正の)最小値 $d_1 > 0$ を持つ。 $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-2}}$ は空でない閉集合なので $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-2}}$ からの距離を取る M_n 上の連続関数が定まり、したがって

$$X_1 := \{x \in M_n \mid S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-2}} \text{からの距離が } d_1/2 \text{ 未満}\}$$

$$K_1 := \{x \in M_n \mid |x| \leq 1, S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-2}} \text{からの距離が } d_1/2 \text{ 以下}\}$$

は well-defined でさらに X_1 が open で K_1 が閉なことがわかる。 K_1 の有界性から K_1 はコンパクトである。

$2 \leq k \leq n-1$ について、「 $1 \leq j < k$ について X_j (と K_j) が定まった」として X_k, K_k を ($k=1$ の時とほぼ同様な次の方法で) 定める。まず、 $N_{i_{n-k}}$ は空でない閉集合なので、 $N_{i_{n-k}}$ からの距離をとる M_n 上の連続関数 Φ_k が定まる²⁶。 $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c$ が空でないと仮定すると、 $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c$ の元 x は $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-2}^c$ の元でもあるから、($k > 2$ なら後に記述される) X_{k-1} の取り方より $x \in X_{k-1}$ となり矛盾する。よって $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c$ は空であり Φ_k は $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c$ 上では正の値を取る。 $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c$ は空でない²⁷コンパクト集合²⁸なので $\Phi_k(S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c)$ は(正の)最小値 $d_k > 0$ を持つ。 $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c$ は空でない閉集合なので $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c$ からの距離を取る M_n 上の連続関数が定まり、したがって

$$X_k := \{x \in M_n \mid S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c \text{からの距離が } d_k/2 \text{ 未満}\}$$

$$K_k := \{x \in M_n \mid |x| \leq 1, S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c \text{からの距離が } d_k/2 \text{ 以下}\}$$

は well-defined でさらに X_k が open で K_k が閉なことがわかる。 K_k の有界性から K_1 はコンパクトである。 X_k, K_k は定まった。

これらの K_1, \dots, K_{n-1} が望む三つの条件 (i),(ii),(iii) を満たすことを示そう。

まず (i)、つまり $S_n \subset K_1 \cup \dots \cup K_{n-1}$ を示す。

$$X_{n-1} = \{x \in M_n \mid S_n \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{n-2}^c \text{からの距離が } d_{n-1}/2 \text{ 以下}\}$$

²⁴ 線形代数的に explicit にかけるから名前付けるようなもんでもないけど。

²⁵ 今は 2 点

²⁶ 線形代数的に explicit にかけるから名前付けるようなもんでもないけど。

²⁷ あんま本質じゃないけど元を一つ挙げておく。 $N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}}$ の元で $N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k}}$ に直交し長さ 1 のもの x をとれる。 d_1, \dots, d_{k-1} らは N_{n-j} が原点を通ることに注意すれば 1 以下なので、 $X_1 \cup \dots \cup X_{k-1}$ の元の $N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k}}$ からの距離は $1/2$ 未満である。よって x は $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c$ の元である。

²⁸ コンパクト集合 S_n といくつかの閉集合の intersection

なので $S_n \subset X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{n-1}$ である。よって $S_n \subset (X_1 \cap S_n) \cup (X_2 \cap S_n) \cup \dots \cup (X_{n-1} \cap S_n) \subset K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{n-1}$ となる。

次に (ii)、つまり任意の $1 \leq k \leq n-1$ と $1 \leq j \leq n-1-k$ について $T_{n,i_j}(K_k) \subset K_k$ となることを示す。任意に $1 \leq k \leq n-1$ と $1 \leq j \leq n-1-k$ と $x \in K_k$ をとる。 $T_{n,j}$ が 0 との距離をのばさないことから $|T_{n,i_j}(x)| \leq 1$ はわかる。 $x \in K_k$ より、 $y \in S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c$ が存在して $|x-y| \leq d_k/2$ となる。 $y \in S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c \subset N_j$ より $T_{n,i_j}(y) = y$ なので $T_{n,j}$ は距離を伸ばさないことと合わせて $|T_{n,j}(x) - y| = |T_{n,j}(x) - T_{n,j}(y)| \leq |x-y| \leq d_k/2$ となる。よって $x \in K_k$ となる。

最後に (iii)、つまり任意の $1 \leq k \leq n-1$ について $T_{n,i_{n-k}}(K_k) \subset \{x \in M_n \mid |x| < 1\}$ となることを示す。 $T_{n,i_{n-k}}$ で大きさが真に小さくならないのは N_{n-k} の元のみなので $N_{n-k} \cap K_k = \emptyset$ を示せばいい。 K_k の元は $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c$ からの距離が $d_k/2$ 以下だが、 $S_n \cap N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_{n-k-1}} \cap X_1^c \cap \dots \cap X_{k-1}^c$ と N_{n-k} の距離が d_k だったので $N_{n-k} \cap K_k = \emptyset$ が分かった。□

この proposition で c_n を w に依らずとれるようにしたのは、文字列の中で文字がまんべんなくたくさん出てくるときにリップシツ定数が小さくなることを主張するためである。ちゃんと述べるために、文字がまんべんなくたくさん出てくることの指標として巡回度を定義する。 $w \in W_n$ が巡回文字列であるとは $\{1, 2, \dots, n\}$ の n 種類全ての文字が出てくることを言う^{*29}。 $w \in W_n$ の巡回度とは、 w を k 個の巡回文字列の結合で書くけるような最大の k を言う。ただし、 w が巡回文字列の結合で書けないと（つまり w 自体が巡回文字列でないとき）は巡回度は 0 であるとする。このとき、proposition5.3 の系として次が従う。diam は直径、つまり二元の距離の sup を意味する。

Corollary 5.1. n を正の整数とする。任意の ϵ に対し $N \in \mathbb{N}$ が存在し、 $z(w) \geq N$ なる任意の $w \in W_n$ について $L_n(T_{n,w}) < \epsilon$ となる。したがって、任意の ϵ に対し $N \in \mathbb{N}$ が存在し、 $z(w) \geq N$ なる任意の $w \in W_n$ について $\text{diam}(T_{n,w}(\Delta_n)) < \epsilon$ となる。

Proof. 任意に ϵ を取ると proposition5.3 の $c_n < 1$ について $c_n^N < \epsilon$ なる $N \in \mathbb{N}$ がとれる。 $z(w) \geq N$ なる $w \in W_n$ を任意に取る。巡回度の定義より巡回文字列 $w_1, \dots, w_{z(w)}$ が取れて $w = w_1 \dots w_{z(w)}$ となる。 $1 \leq j \leq z(w)$ について、 w_j は巡回文字列であり n 種類の文字を含むので $n-1$ 種類の文字を含む。よって proposition5.3 より $L_n(T_{n,w_j}) < c_n$ である。したがって $L_n(T_{n,w}) \leq L_n(T_{n,w_1}) \dots L_n(T_{n,w_{z(w)}}) \leq c_n^{z(w)} < c_n^N < \epsilon$ となる。後半は、 $\text{diam}(T_{n,w}(\Delta_n)) \leq L_n(T_{n,w}) \text{diam}(\Delta_n)$ と前半から従う。□

この corollary を象徴的に書くなら

$$\lim_{z(w) \rightarrow \infty} L_n(T_{n,w}) = 0$$

$$\lim_{z(w) \rightarrow \infty} \text{diam}(T_{n,w}(\Delta_n)) = 0$$

となる。石の問題の連続版について言えば、頂点に偏りなく操作していくと初期値の影響はいくらでも小さくなると言っている。では、これが Question5.3 や Question5.2 にどう関わるのか。仮に Δ_n の任意の点がいくらでも大きい巡回度の文字列に対応する操作で実現されるなら、それで解決する。しかし残念ながらそれは正しくない。例えば $n = 3$ で $(1/2, 1/2, 0)$ という点へ一回の操作で移るには $(1/2, 1/2, 0)$ から T_3 で移るしかなく、したがって有限回で $(1/2, 1/2, 0)$ に移るには $(1/2, 1/2, 0)$ から T_3 を繰り返して移るしかない。このよ

^{*29} $n-1$ 種類で同じ議論は回るけど後の話的に n 種類で書きたい気持ちになった

うにどこかの頂点が 0 になるとき、つまり境界が厄介である。境界から移るものも全て Δ_n から除いた集合を考える。

$$\Lambda_n := \Delta_n \setminus W_n \partial \Delta$$

とする。 Λ_n でだけ考えても良いことは次の claim が保証する。

Claim 5.8. 正整数 n について Λ_n は Δ_n で dense である。

Proof. $\Lambda_n = \bigcap_{w \in W_n} (\Delta_n \setminus T_{n,w}(\partial \Delta_n))$ である。 Δ_n は完備距離空間であり、 $\Delta_n \setminus T_{n,w}(\partial \Delta_n)$ は open dense で $|W_n| = \aleph_0$ なのでベールの範疇定理より従う。 \square

Λ_n の何が良いかというと、逆操作を考えられることである。

Claim 5.9. 任意の $a \in \Lambda_n$ について、 $(b, i) \in \Delta_n \times \{1, 2, \dots, n\}$ であって $T_{n,i}(b) = a$ なるものが一意的に存在する。さらにこのとき $b \in \Lambda_n$ である。

Proof. $a = (a_1, \dots, a_n)$ と成分表示する。 a_1, \dots, a_n の n つの数のうち、最小のものはただ一つである。なぜなら対称性から仮に $a_1 = a_2$ が最小であったと仮定すると、 $a = T_{n,1}((na_1, 0, a_3 - a_1, \dots, a_n - a_1)) \in W_n \partial \Delta$ となって矛盾するからである。 a_1, \dots, a_n の n つの数のうち、最小のものを a_i とする。 $b = (a_1 - a_i, \dots, a_{i-1} - a_i, na_i, a_{i+1} - a_i, \dots, a_n - a_i)$ とすれば (b, i) は条件を満たす。一意性は、まず $1 \leq j \leq n$ について $T_{n,j}$ の像の第 j 成分は他の成分以下であることから i の一意性が分かり、次に $T_{n,i}$ の単射性から b の一意性がわかる。さらに、もし $b \notin \Lambda_n$ なら、 $b \in W_n \partial \Delta_n$ となり、 $a \in iW_n \partial \Delta_n \subset W_n \partial \Delta_n$ となり $a \in \Lambda_n$ に矛盾するので $b \in \Lambda_n$ もわかる。 \square

この claim より、次の二つの写像が(不定性なく)定まる。

$$\begin{aligned}\Phi_n : \Lambda_n &\rightarrow \Lambda_n : a \mapsto (\text{ある } 1 \leq i \leq n \text{ が存在して } T_{n,i}(b) = a \text{ となるような } b) \\ \Psi_n : \Lambda_n &\rightarrow \{1, 2, \dots, n\} : a \mapsto (\text{ある } b \in \Lambda_n \text{ が存在して } T_{n,i}(b) = a \text{ となるような } i)\end{aligned}$$

$\{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ の元 $a_- : i \mapsto a_i$ を右に続く無限文字列 $a_0 a_1 a_2 \dots$ のように表記することにする。このとき、 $x \in \Lambda_n$ について $v_x = \Psi_n(\Phi_n^0(x))\Psi_n(\Phi_n^1(x))\Psi_n(\Phi_n^2(x)) \dots \in \{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ が定まる。直感的には x へ至る操作の列を遡っている。このとき v_x の任意の有限長先頭文字列 $w \in W_n$ について $x \in T_{n,w}(\Delta_n)$ となる。 v_x の有限長先頭文字列であって巡回度がいくらでも大きいものが存在することを示したい。次の proposition を示せば十分である。

Proposition 5.4. 正整数 n と $x \in \Lambda_n$ について、 v_x には n 種類の文字全てが無限回現れる。

Proof. 背理法で示す。有限回しか現れない文字が存在したとする。有限回しか現れない文字が k 種類 ($1 \leq k < n$) だったとする。 i_1, \dots, i_k は有限回しか現れず、 i_{k+1}, \dots, i_n は無限回現れるように $\{1, 2, \dots, n\}$ の元に添字をつける。 i_1, \dots, i_k は有限回しか現れないで有限文字列 $w \in W_n$ と i_1, \dots, i_k を含まない無限文字列 $v'_x \in \{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ を使って $v_x = wv'_x$ と書ける^{*30}。

$m \in \mathbb{N}$ について $\Phi_n^m(x) = (a_{m,1}, \dots, a_{m,n})$ と書くことにする。 w の長さを $|w|$ とかく。このときもし $\sum_{j=k+1}^n a_{|w|, i_j} > 0$ だったら $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=k+1}^n a_{|w|+m, i_j} = \infty$ となり^{*31}矛盾する^{*32}。よって

^{*30} 右に続く無限文字列の左に有限文字列を結合している。形式的には index をずらして実現しますね

^{*31} v'_x で i_{k+1}, \dots, i_n が全て現れるたびに少なくとも $\frac{n}{n-1}$ 倍以上になる

^{*32} 背理法 in 背理法なので混乱しないで

$\sum_{j=k+1}^n a_{|w|,i_j} = 0$ 、つまり $a_{|w|,i_{k+1}}, \dots, a_{|w|,i_n} = 0$ となる。したがって $\Phi_n^{|w|}(x) \in \partial\Delta_n$ となる。 $x = T_{n,w}(\Phi_n^{|w|}(x)) \in W_n \partial\Delta_n$ となり $x \in \Lambda_n$ に矛盾する。□

ここまで示したことと組み合わせれば Question5.3 は肯定的に解決する。

Theorem 5.2. Question5.3 の答えは Yes である。つまり、正整数 n と任意の $x \in \Delta_n$ と $\epsilon > 0$ について $w \in W_n$ が存在し $T_{n,w}(\Delta_n) \subset B_n(x, \epsilon)$ となる。

Proof. $x \in \Delta_n$ と $\epsilon > 0$ を任意に取る。 Λ_n は Δ_n で dense だったので $y \in \Lambda_n$ であって $|x - y| < \epsilon/2$ なるものが取れる。すると正整数 N であって巡回度 N 以上の任意の文字列 w' について $L_n(T_{n,w'}) < \frac{\epsilon}{2 \operatorname{diam}(\Delta_n)}$ となるものが取れる。 $v_y = \Psi_n(\Phi_n^0(y))\Psi_n(\Phi_n^1(y))\Psi_n(\Phi_n^2(y)) \dots \in \{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ には n 種類の全ての文字が無限回現れるので先頭文字列 w であって巡回度が N 以上のものが取れる。すると $\operatorname{diam}(T_{n,w}(\Delta_n)) < \frac{\epsilon}{2 \operatorname{diam}(\Delta_n)} \operatorname{diam}(\Delta_n) = \epsilon/2$ となる。 $|x - y| < \epsilon/2$ と合わせて $T_{n,w}(\Delta_n) \subset B_n(x, \epsilon)$ を得る。□

石の問題の連続版では、目的状態を決めて誤差を設定すればある特定の操作をすることで初期状態に依らず誤差範囲に収まることが示せた。特にどの状態からどの状態へもいくらでも近づける。

5.4 逆操作によるカオス力学系

連続版に関する考察が長くなってしまったが、この subsection はさらに横道にそれる。前の subsection で作った写像 $\Phi_n : \Lambda_n \rightarrow \Lambda_n$ に自分は既視感があった。カオス力学系の授業で習ったロジスティック写像 [1] である^{*33}。思えば、石の問題を考え始めてから逆操作による解法は何度か試みた。状態をさかのぼっていくのだが、どの頂点が操作可能なのかはなかなかセンシティブで初期状態に強く依存していることを実感していた。連続版にすることでこの複雑さに数学的に言及できるならやってみたい。石の問題の本質が何か出てくるかもしれないという期待も込めて、力学系 $(\Lambda_n, \Phi_n; \Lambda_n \rightarrow \Lambda_n)$ の性質をみていこう。

まずは $(\Lambda_n, \Phi_n; \Lambda_n \rightarrow \Lambda_n)$ の記号的な表現を考える。 $\{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ のことを Σ_n と書くことにする。 Λ_n の元と記号を対応づける方法は $x \mapsto v_x$ 、つまり

$$F_n : \Lambda_n \rightarrow \Sigma_n : x \mapsto v_x = \Psi_n(\Phi_n^0(x))\Psi_n(\Phi_n^1(x))\Psi_n(\Phi_n^2(x)) \dots$$

である。 Σ_n にはシフトにより離散力学系の構造が入る。つまり、

$$\sigma_n : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n : a_0 a_1 a_2 \dots \mapsto a_1 a_2 a_3 \dots$$

によって離散力学系 (Σ_n, σ_n) を考えられる。

Claim 5.10. F_n は(集合上)離散力学系の射である。つまり

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n & \xrightarrow{F_n} & \Sigma_n \\ \Phi_n \downarrow & & \downarrow \sigma_n \\ \Lambda_n & \xrightarrow{F_n} & \Sigma_n \end{array}$$

は可換である。

^{*33} 調べると色々出てくる

Proof. $x \in \Lambda_n$ を任意に取る。このとき

$$\begin{aligned}\sigma_n(F_n(x)) &= \sigma_n(\Psi_n(\Phi_n^0(x))\Psi_n(\Phi_n^1(x))\Psi_n(\Phi_n^2(x))\dots) \\ &= \Psi_n(\Phi_n^1(x))\Psi_n(\Phi_n^2(x))\Psi_n(\Phi_n^3(x))\dots \\ &= \Psi_n(\Phi_n^0(\Phi_n(x)))\Psi_n(\Phi_n^1(\Phi_n(x)))\Psi_n(\Phi_n^2(\Phi_n(x)))\dots \\ &= F_n(\Phi_n(x))\end{aligned}$$

となり ok。 \square

ところで Proposition5.4 より、 F_n の像は

$$\Sigma'_n := \{v \in \{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{N}} \mid v \text{ には } n \text{ 種類全ての文字が無限回現れる }\}$$

に入っている。 Σ'_n の元をシフトしても Σ'_n の元なので離散力学系 (Σ'_n, σ_n) が定まる^{*34}。 F_n は実は (Σ'_n, σ_n) への同型を与えていた。

Proposition 5.5. F_n は単射でありその像は Σ'_n である。したがって $F_n : \Lambda_n \rightarrow \Sigma'_n$ は離散力学系の同型を与える。

Proof. まず、proposition5.4 より F_n の像は Σ'_n に入っている。 $F_n : \Lambda_n \rightarrow \Sigma'_n$ の逆写像 $G_n : \Lambda_n \rightarrow \Sigma'_n$ を構成する。 $w \in \Sigma'_n$ について、 w の長さ k の先頭文字列を w_k と書くこととする。空でない(点列)コンパクト集合の減少列

$$\Delta_n = T_{n,w_0}(\Delta_n) \supset T_{n,w_1}(\Delta_n) \supset T_{n,w_2}(\Delta_n) \dots$$

を考えると corollary5.1 より diam は 0 へ収束する。このことと $T_{n,w_k}(\Delta_n)$ ($k \in \mathbb{N}$) らが(点列)コンパクトであることから $\bigcap_{k=0}^{\infty} T_{n,w_k}(\Delta_n)$ は一点集合であることがわかる。 $\bigcap_{k=0}^{\infty} T_{n,w_k}(\Delta_n)$ の(一意的な)元を $G_n(w)$ と定めることで $G_n : \Sigma'_n \rightarrow \Delta_n$ が定まる。

$G_n(w) \in \Delta_n$ を確かめる。各成分(頂点)に関して non-zero であることは操作で保たれるので、任意の巡回文字列 $w' \in W_n$ について $T_{n,w'}(\Delta_n) \cap \partial\Delta_n = \emptyset$ となる。したがって $G_n(w) \in \text{Int } \Delta_n$ となる。仮に $G_n(w) \in W_n \partial\Delta_n$ であったと仮定しよう。このとき定義より文字列 $u \in W_n$ と $x \in \partial\Delta_n$ があり $T_{n,u}(x) = G_n(w)$ となる。このような u のうち長さ最小のものを取っておく。 $G_n(w) \notin \partial\Delta_n$ より u の長さは 1 以上であるから、 $u = u'i$ と $u' \in W_n, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ で分解しておく。proposition5.4 の証明でもみたように、 $\text{Int } \Delta_n$ の元は n 成分の最小値が一つだけの時操作前の状態は一意的であり操作前の状態は $\text{Int } \Delta_n$ の元である。さらに n 成分の最小値が複数ある時操作前の状態は(複数あるが) $\partial\Delta_n$ の元である。したがって、 $G_n(w) \in \text{Int } \Delta_n$ の操作を遡ることで u の長さの最小性と合わせて u' は w の先頭文字列であることがわかる。 w から長さ $|u|$ 文字の先頭文字列 $w_{|u|}$ を除いた文字列を \tilde{w} とする($w = w_{|u|}\tilde{w}$)。すると $G_n(\tilde{w}) \in \partial\Delta_n$ となり $G_n(\Sigma'_n) \subset \text{Int } \Delta_n$ に矛盾する。よって $G_n(w) \in \Delta_n$ である。

ここまで写像 $G_n : \Sigma'_n \rightarrow \Delta_n$ が作れた。 $P : \Lambda_n \times \Sigma'_n \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$ を

$$P(x, w) = \text{true} :\Leftrightarrow w \text{ の任意の先頭文字列 } w' \text{ について } x \in T_{n,w'}(\Delta_n)$$

と定める。すると $x \in \Lambda_n$ に対して $F_n(x)$ は $P(x, w) = \text{true}$ なる唯一の $w \in \Sigma'_n$ であり、 $w \in \Sigma'_n$ に対して $G_n(w)$ は $P(x, w) = \text{true}$ なる唯一の $x \in \Lambda_n$ である。よって F_n と G_n は互いの逆写像である。 \square

^{*34} あまり良くないが、制限や codomain の変化を同じ記号で書いている

これで離散力学系 (Λ_n, Φ_n) は(点に対してそこへ至る操作の列を対応させることで)記号的な表現を得た。離散力学系 (Λ_n, Φ_n) は位相構造も持っていて、この section では位相的な議論をしてきた。集合としての離散力学系でなく位相構造も含めた同型を主張したい。今後(離散)位相力学系^{*35}といったときは位相空間とその自己連続写像の組のことを指し、位相力学系の同型と言ったときは自己連続写像と可換な同相写像のことを指す^{*36}。 $\Phi_n : \Lambda_n \rightarrow \Lambda_n$ は連続なので^{*37} (Λ_n, Φ_n) は位相力学系である。 Σ_n に次の距離を入れる。 $a = a_0 a_1 a_2 \dots, b = b_0 b_1 b_2 \dots \in \Sigma_n$ について

$$a \text{ と } b \text{ の距離} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_{a_k, b_k}}{2^k}$$

と定める。 δ_{a_k, b_k} はクロネッカーのデルタである。これは実際距離を定め、 $\{\{a \in \Sigma_n \mid a \text{ は } w \text{ を先頭文字列にもつ}\}\}_{w \in W_n}$ は開基を為す。さらにこの距離に関して σ_n は連続である。よって (Σ_n, σ_n) は位相力学系である。したがって部分空間として (Σ'_n, σ_n) も位相力学系である。

Proposition 5.6. $F_n : \Lambda_n \rightarrow \Sigma'_n$ は同相写像である。したがって F_n は位相力学系の同型を与える。

Proof. F_n が全単射なことは既に示した。基本開近傍系の対応を見る。 $x \in \Lambda_n$ について $F_n(x)$ の長さ $k \in \mathbb{N}$ の先頭文字列を w_k とかく。このとき $\{T_{n, w_k}(\Lambda_n)\}_{k=0}^{\infty}$ は (T_{n, w_k} が open なことと Corollary 5.1 より) x の基本開近傍系をなす。 $T_{n, w_k}(\Lambda_n)$ は F_n によって w_k を先頭文字列に持つ Σ'_n の元全体の集合へ移る。(距離空間の位相の定義から) $F_n(x)$ の基本開近傍系として $\{F_n(x) \text{ と先頭 } k \text{ 文字が一致している } \Sigma'_n \text{ の元全体の集合} (= w_k \text{ を先頭文字列に持つ } \Sigma'_n \text{ の元全体の集合})\}_{k=0}^{\infty}$ が取れるので ok。□

したがって、離散力学系 (Λ_n, Φ_n) はその位相構造も含めて記号列のシフトで表現できた。

この subsection の目標は逆操作の予測不可能性を数学的に主張することである。私はカオス力学系についてほとんど無知なのでカオス力学系のある定義を満たしていることしか今は示せない。その意味や価値を知らないままに示す。まずは Devaney の意味でのカオス力学系の定義 [1] を紹介する。

Definiton 5.1 (カオス力学系). 距離空間 X と自己連続^{*38}写像 $f : X \rightarrow X$ が (Devaney の意味で) chaotic であるとは次の 3 つの条件

初期値鋭敏性 ある $\delta > 0$ が存在し、任意の $x \in X$ と任意の x の近傍 N について、ある $y \in N$ と $k \in \mathbb{N}$ が存在し、 $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$ となる。

位相的推移性 任意の空でない開集合の組 $U, V \subset X$ について、 $k \in \mathbb{N}$ が存在し $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ となる。

周期点の稠密性 周期点全体の集合は X で dense である。

を満たすことをいう。

初期値鋭敏性は、どんな点 (x) のどれだけ近く (N) にもいつか (k) (ある基準 (δ) より) 遠くに行ってしまう点 (y) がいると言っている^{*39}。位相的推移性と周期点の稠密性は距離に依存しない位相力学系としての性質

*35 離散力学系というときの離散は離散時間の方の離散

*36 加法に関するモノイド \mathbb{N} (一元集合から生成される自由モノイド!)を圈とみなすと圈 \mathcal{C} が与えられるたびに $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ を \mathcal{C} の離散力学系の圈だと(今回は)言っている。 $\mathcal{C} = \text{Set}, \text{Top}$ のときが出てきている。特に同型の概念も自然に定まる

*37 最小の成分がどこかで場合わけのある写像だが、第 i 成分が最小であるような集合は open になっている。 Λ_n はバラバラ (totally disconnected)!

*38 単に写像と書いてあるものもあったが今回は位相力学系に限定した

*39 悲しい

なので proposition5.6 より (Λ_n, Φ_n) について調べるかわりに (Σ'_n, σ_n) について調べても良い。記号的に記述することで特に周期点の稠密性は劇的にわかりやすくなる^{*40}。

Proposition 5.7 (逆操作はカオス). (Λ_n, Φ_n) は (Devaney の意味で)chaotic である。

Proof. 初期値鋭敏性と位相的推移性と周期点の稠密性を順に示す。

(初期値鋭敏性) $0 < \delta < \frac{\text{diam}(\Lambda_n)}{2}$ となるように δ をとる。任意に x と x' の近傍 N を取る。このとき、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し、 $F_n(x)$ の長さ k の先頭文字列 w_k について $T_{n,w_k}(\Lambda_n) \subset N$ となる^{*41}。よって $\Lambda_n \supset \Phi_n^k(N) \supset \Phi_n^k(T_{n,w_k}(\Lambda_n)) = \Lambda_n$ となり $\Phi_n^k(N) = \Lambda_n$ がわかる。 δ の取り方より、 $y' \in \Lambda_n$ で $|\Phi_n^k(x) - y'|$ なるものが取れる。 $\Phi_n^k(N) = \Lambda_n$ より $y \in N$ で $\Phi_n^k(y) = y'$ なるものが取れて ok。

(位相的推移性) 位相的推移性は位相力学系としての性質なので proposition5.6 より (Σ'_n, σ_n) について示せば良い。空でない開集合 $U, V \subset \Sigma'_n$ を任意に取る。 U は空でない開集合なので、 $w \in W_n$ が存在し $\{a \in \Sigma'_n \mid a \text{ は } w \text{ を先頭文字列にもつ}\} \subset U$ となる。 $v \in V$ を何でもいいので取る。 $wu \in U$ かつ $\sigma_n^{|w|}(wu) = v \in V$ なのでこれで示された。

(周期点の稠密性) 任意に $a \in \Sigma'_n$ を取る。 a の先頭文字列 $w \in W_n$ が巡回文字列であれば $www\dots$ ^{*42} は Σ'_n の元でありさらに周期 $|w|$ を持つ^{*43}周期点である。十分大きい k について a の長さ k の先頭文字列は巡回文字列であり、さらに k を大きくすれば $www\dots$ はいくらでも a に近づくのでこれで ok。□

この subsubsection の内容の一般論(か似た話)とフラクタル(っぽき)との関連が [2] の Chapter 12 にありそうというメモを書いておく。

6 グラフ理論的解決

連続版についてうだうだと考えていたら、Twitter でふいる (5thRussian) さん (@FifthRussian) が今回考える問題 Question1.2 についての解答を与えてくださった。この節に書く解法はふいる (5thRussian) さん (@FifthRussian) によるものである。ただ、私がいくらか書き換えていて誤りがあれば私の責任である。その解法はグラフ理論的な考察によるものだった。使うグラフ理論的な主張は次である。証明は例えば [3] の 8.3 にのっている。

Proposition 6.1 (オイラー有向グラフ). 有限有向グラフ^{*44} G について、 G がオイラー閉路をもつことと、 G が(向きを忘れた無向グラフとして)連結でありかつ G の任意の頂点についてその入次数と出次数が一致していることは同値である。

無向グラフの時の一筆書き可能条件はグラフ理論の入門の例として有名である(ケーニヒスベルクの橋など)。一筆書き可能条件の問題は(始点と終点が一致するような例に帰着できて)本質的に無向グラフがオイラー閉路を持つ条件を求める問題になる。今回の proposition はちょうどその有向グラフ版にあたり、証明も同様に為される。

^{*40} コンピュータで実験してたときに周期点をこうやって見つけた

^{*41} 前の subsubsection の内容

^{*42} w を繰り返す無限文字列

^{*43} $|w|$ の約数も周期に持つかもしれない。素周期とは言ってない。

^{*44} 有向グラフは集合 E, V と二つの写像 $s, t : E \rightarrow V$ の組 (E, V, s, t) としての定義を採用する。 E, V はそれぞれ辺と頂点の集合だと思い、 s, t はそれぞれ始点と終点をとる写像だと思っている。したがってここでは自己射や始点終点を共有する相異なる辺も許されている。有限有向グラフとは有向グラフであって辺も頂点も有限個である ($|E|, |V| < \infty$) ものを指す。

さて、石の問題で考える有向グラフはもちろん石の配置を頂点とし、操作による遷移を辺とする有向グラフである。この有向グラフを頂点の個数 n と石の個数 m を明記して $G_{n,m}$ と書くことにする。 $G_{n,m}$ がオイラー閉路を持つことを示せば Question1.2 は肯定的に解決される。Corollary2.1 でも言及したように $G_{n,m}$ は連結であるから、proposition6.1 より全ての頂点について入次数と出次数が等しいことを言えば良い。 $G_{n,m}$ の定義から（どんな状態からでも可能な操作は n 個の頂点に対応し n 通りある）どの頂点についても出次数は n である。よって、どの頂点についても入次数が n であることを示せば解決する。

Lemma 6.1. $G_{n,m}$ の任意の頂点 v について、 v の入次数は n である。

Proof. ここでは逆向きの操作に言及することで証明とする。この証明を式でかくことも大変ではないがわかりにくくなると考えた^{*45}。

正 n 角形の頂点に合計 m 個の石が置かれている状態に関して、(Question1.2 で考えている操作とは別の) 操作'を考える。操作'とは、 n 個の頂点から一つの頂点を選びその頂点から時計回りに石を一つずつ取っていく石が取れなくなったら持っている石を全て置くことを指す。ちゃんと言えば、操作'とは n 個の頂点から一つの頂点を選びその頂点に注目し

- 注目している頂点に石が（1つ以上）ある場合、石を一つとて注目する頂点を時計回り^{*46}で隣に移る。
- 注目している頂点に石がない場合、その頂点に取った石を全て置き操作'を終了する。

を終了するまで繰り返すことを指す。

この時、操作'は操作の逆になっている。つまり、 $G'_{n,m}$ を石の配置を頂点にもち操作'による遷移を辺にもつ有向グラフだとすると、 $G'_{n,m}$ における v から w への辺は（それを逆再生することで!） w から v への辺と一対一に対応している^{*47}。 $G'_{n,m}$ の頂点の出次数は n なので $G_{n,m}$ の頂点の入次数は n になる。□

この証明では、操作が終了する頂点に注目することで逆むきの操作を操作'として頂点の選択の形で記述した。その結果として $G_{n,m}$ と $G'_{n,m}$ の間の“反変同型”を構成して示した訳である。

この日本語で書かれた証明が気に入らないなら、与えられた石の配置がどのような操作で実現されるかを場合分けして考えても良い。具体例として $n = 10, m = 24$ の時操作の結果 $(1, 2, 3, 2, 4, 1, 5, 2, 1, 3)$ へ移ったとしよう。この時、操作された頂点では最小値をとるはずなので 1, 6, 9 番目の頂点のいずれかが操作された頂点である。そして、1 番目の頂点に操作した場合元々一つ目の頂点にあった石の個数は 10, 11, 12, 13, 14 の 5 つである。なぜなら次に現れる最小値をとる頂点、6 番目の頂点に関する制約がかかるからである（10 未満だったら操作後の 1 番目の頂点の値が 0 になってしまうし、15 以上だったら操作後の 6 番目の頂点の値が 2 以上になってしまう）。これと同じ考察から、6 番目の頂点に操作した場合は元々の石の個数として $9 - 6 = 3$ 通り（実際、10, 11, 12）があり得ることになる。一般に、操作された頂点の操作前の石の個数は次の最小値をとる頂点までの間隔と同じだけ可能性がある訳である。このようにして Lemma6.1 を示しても良い^{*48}。

Lemma6.1 の直前で言及したように、これで Question1.2 は肯定的に解決された。

Theorem 6.1. 任意の正整数 n, m について $G_{n,m}$ はオイラー閉路を持つ。特に Question1.2 の答えは Yes

^{*45} 本音は打つのがめんどくさかった

^{*46} (Question1.2 で考えている操作と逆向きである

^{*47} これを示すときには石の個数が 0 個の頂点に注意すること

^{*48} このことは $(1, 2, 3, 2, 4, 1, 5, 2, 1, 3)$ を $(1, 2, 3, 2, 4)(1, 5, 2)(1, 3)$ と分割させるアイデアを与えて、結局操作が終了する頂点に着目させる操作'のアイデアに繋がる

である。

参考文献

- [1] Robert L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical System Second Edition, Addison-Wesley, 1989.
- [2] Marat Akhmet, Mehmet Onur Fen, Ejaily Milad Alejaily, Dynamics with Chaos and Fractals, Springer, 2020.
- [3] Md. Saidur Rahman, Basic Graph Theory, Springer, 2017.