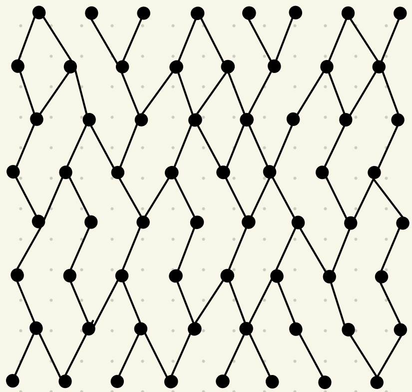
$\boxed{1}$ 平面的な poset の Euler 数

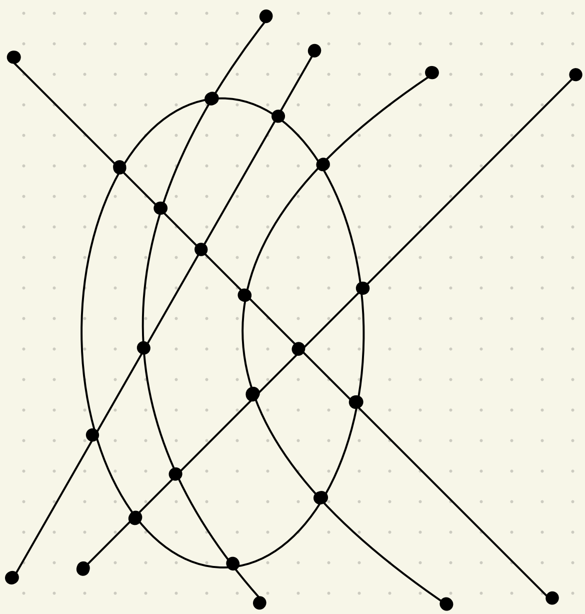
$\boxed{2}$ graphical language of monoidal category.

平面的な poset の Euler 数.

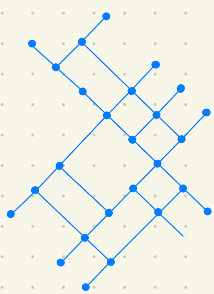
Q



とか

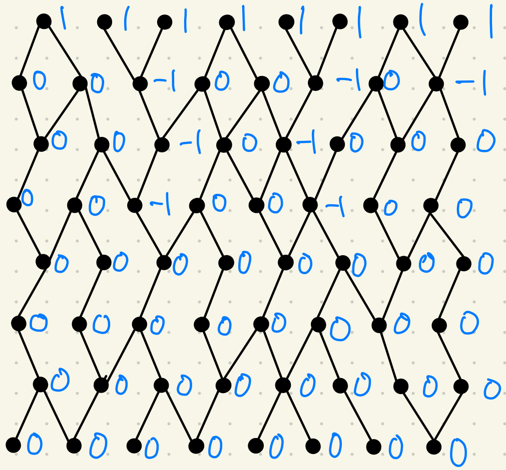


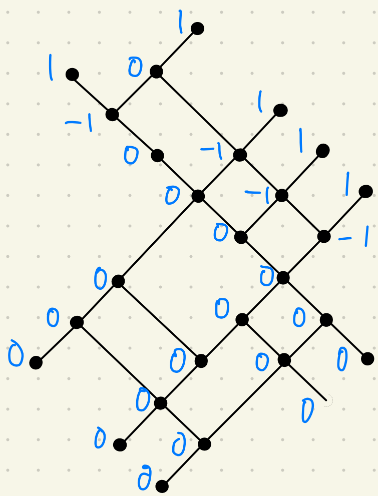
≃

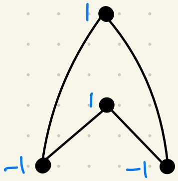


の Euler 数は 1. なんで?

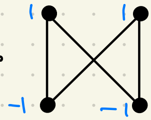
Weighting







や



はダメ。

⇝ Hasse diagram が $\mathbb{R}^2$ にうめこめて,

各面の Boundary が max と min をもつとき Euler 数は

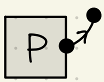
Connected component の数になるか？

⇝ たぶん Yes
(組み合わせ論のとこっぽい)

愚直に induction で示す。

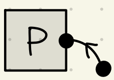
Prop (induction step)

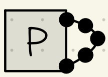
P: finite poset について、

() 任意の $q \in P$ について、P に極大元 q^+ をつけ加えた

$$P_q^+ := P \sqcup \{q^+\} \quad \left(p < q^+ \overset{\text{def}}{\iff} p \leq q \right)$$

の Euler 数は P のそれと等しい。

() の dual

() 任意の $q < q' \in P$ と $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ について、

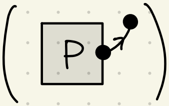
$$P_{q,q',n} := P \sqcup \{q_1, \dots, q_n\}$$

$$\left(\begin{array}{l} q_k \leq p \overset{\text{def}}{\iff} q' \leq p \text{ or } p = q_k, \dots, q_n \\ p \leq q_k \overset{\text{def}}{\iff} p \leq q \text{ or } p = q_1, \dots, q_k \end{array} \right)$$

の Euler 数は P のそれと等しい。

(すごいやつ)

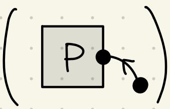
(proof)



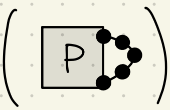
$q^+\downarrow = q\downarrow \cup \{q^+\}$ より、

P上の coweighting に、$k_{q^+} := 0$

とすると、$P^+_{q^+}$ 上の coweighting になる。



上の dual



任意の $r \in P$ について、

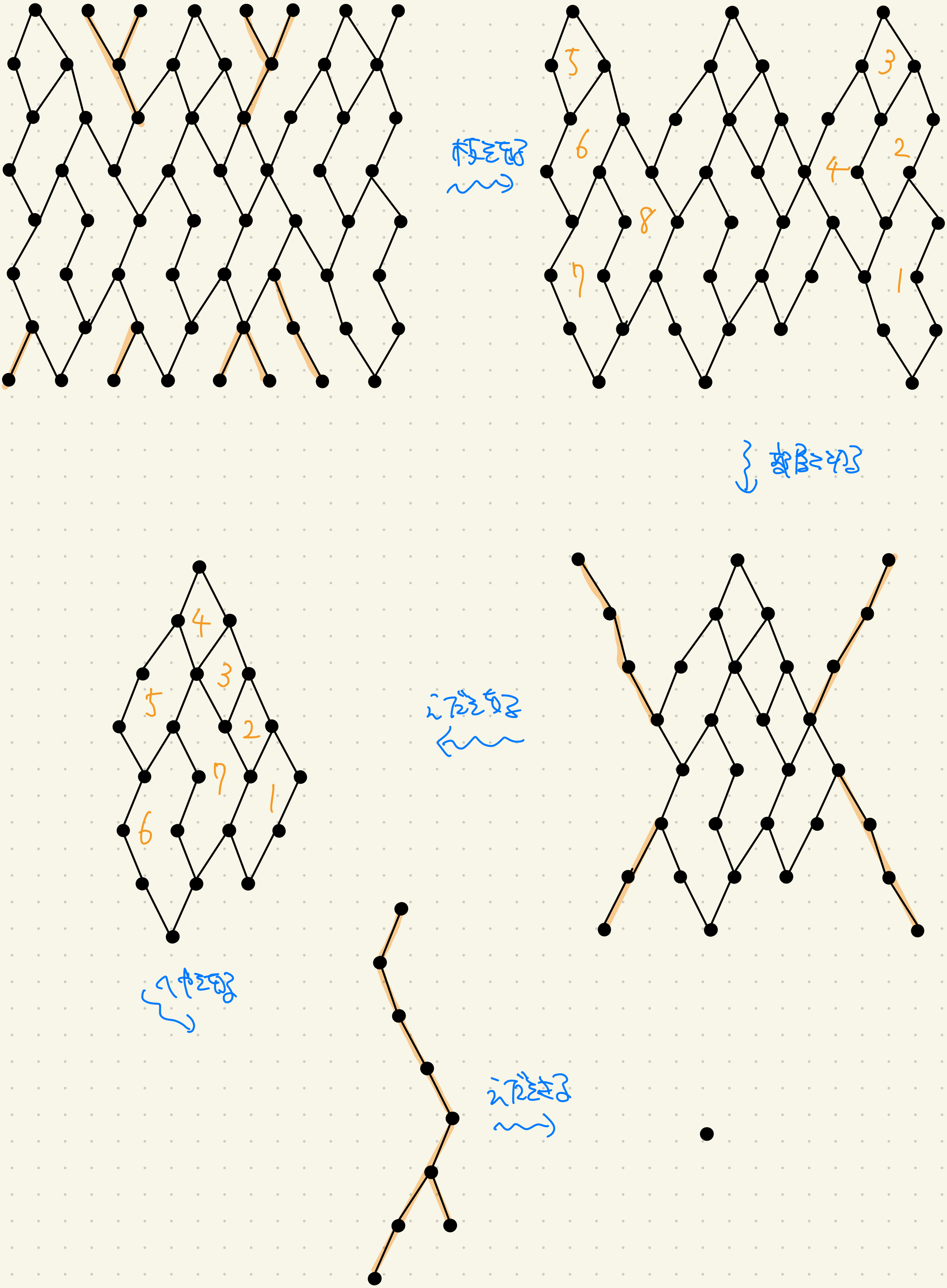
$$\{z \in P_{q,q',n} \mid z \le r\} \cap P = \{z \in P \mid z \le r\}$$

と成る。($\because$ $q < q'$)

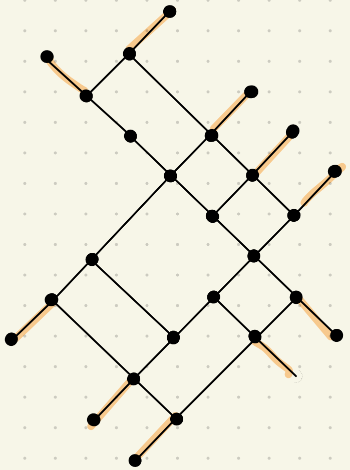
よって $\{q_1, \dots, q_n\}$ 上で 0 をとるようにして

P上の (co) weighting を拡張できる。

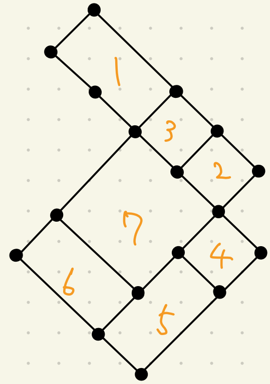
e.g.)



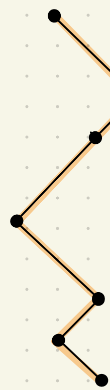
e.g.)



枝を切る



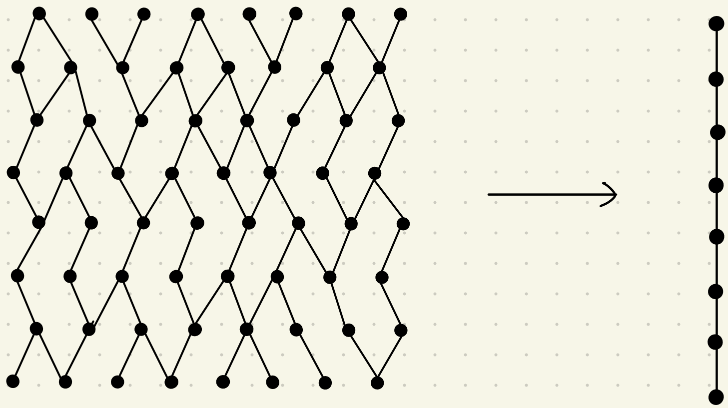
葉を切る

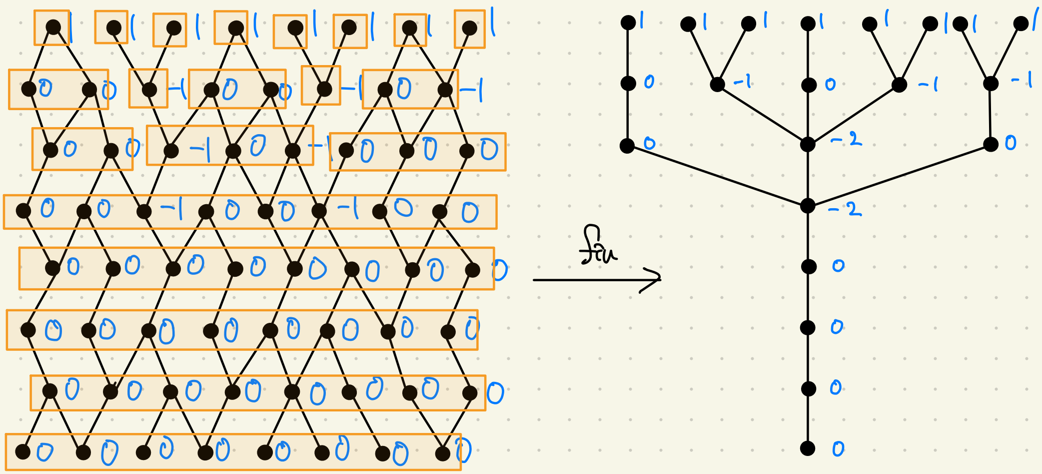


枝を切る

2つ目のアプローチ.

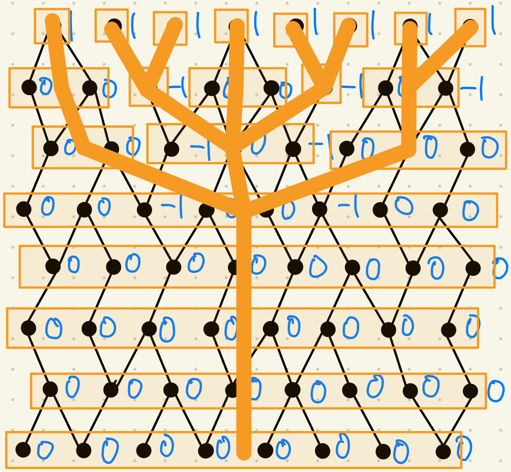
⇝ 森を対応させる.



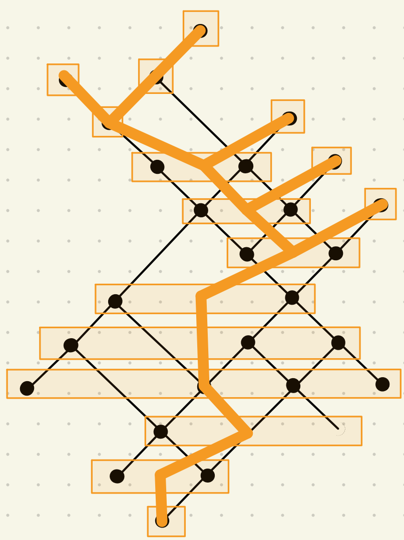


(discrete fibration ∘ final)

e.g. 1


1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 -1 0 0 -1 0 -1
0 0 -1 0 -1 0 0 0
0 0 -1 0 0 -1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0

e.g. 2



$\boxed{2}$ graphical language.

monoidal category の直感的計算のため.

というモチベーション.

$(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$: monoidal category

例えば, $A \xrightarrow{f} I$

$I \xrightarrow{g} B$ があると,

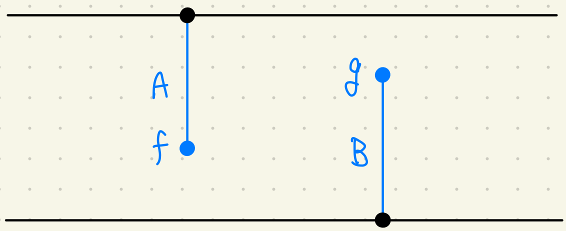
$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes I \arrow[rr, "f \otimes g"] & & I \otimes B \arrow[dr, "\lambda_B"] & \\
A \arrow[ur, "\rho_A"] \arrow[dr, "\lambda_A"'] & & & & B \\
 & I \otimes A \arrow[rr, "g \otimes f"'] & & B \otimes I \arrow[ur, "\rho_B"'] &
\end{tikzcd}$$

と2つ射がある. これは一致するか?

@ diagram chase 를 통한 proof

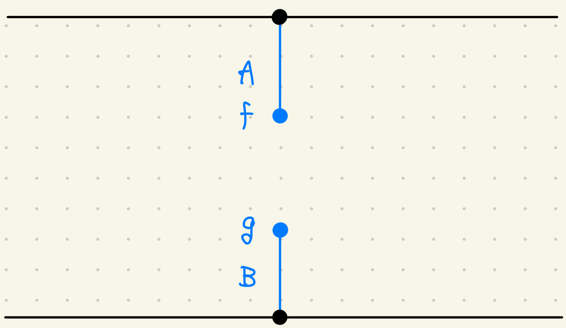
$$
\begin{tikzcd}
 & A \otimes I \arrow[rr, bend left, "f \otimes g"] \arrow[dr, "f \otimes 1_I"] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft\ \text{functoriality of } \otimes"'] & & I \otimes B \arrow[ddr, "\lambda_B"] & \\
 & & I \otimes I \arrow[ur, "1_I \otimes g"] \arrow[d, dash, "\rho_I = \lambda_I"', "\cong"] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft\ \text{naturality of } \lambda"] & & \\
A \arrow[uur, "\rho_A"] \arrow[rr, "f"] \arrow[ddr, "\lambda_A"'] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft\ \text{naturality of } \rho"] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft\ \text{naturality of } \lambda"'] & & I \arrow[rr, "g"] & & B \\
 & & I \otimes I \arrow[u, dash, "\rho_I = \lambda_I", "\cong"'] \arrow[dr, "g \otimes 1_I"] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft\ \text{naturality of } \rho"'] & & \\
 & I \otimes A \arrow[ur, "1_I \otimes f"] \arrow[rr, bend right, "g \otimes f"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft\ \text{functoriality of } \otimes"] & & B \otimes I \arrow[uur, "\rho_B"'] &
\end{tikzcd}
$$

@ graphical language (連続的にうつりあうと同じ射を表す)



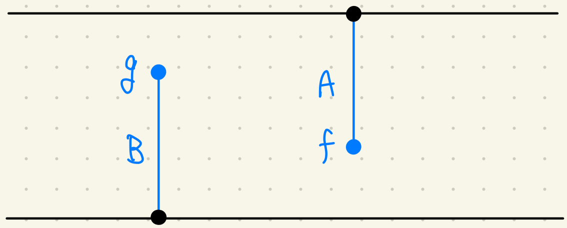
$\rightsquigarrow$ $\quad A\otimes I \xrightarrow{f\otimes g} I\otimes B$

$\shortparallel$

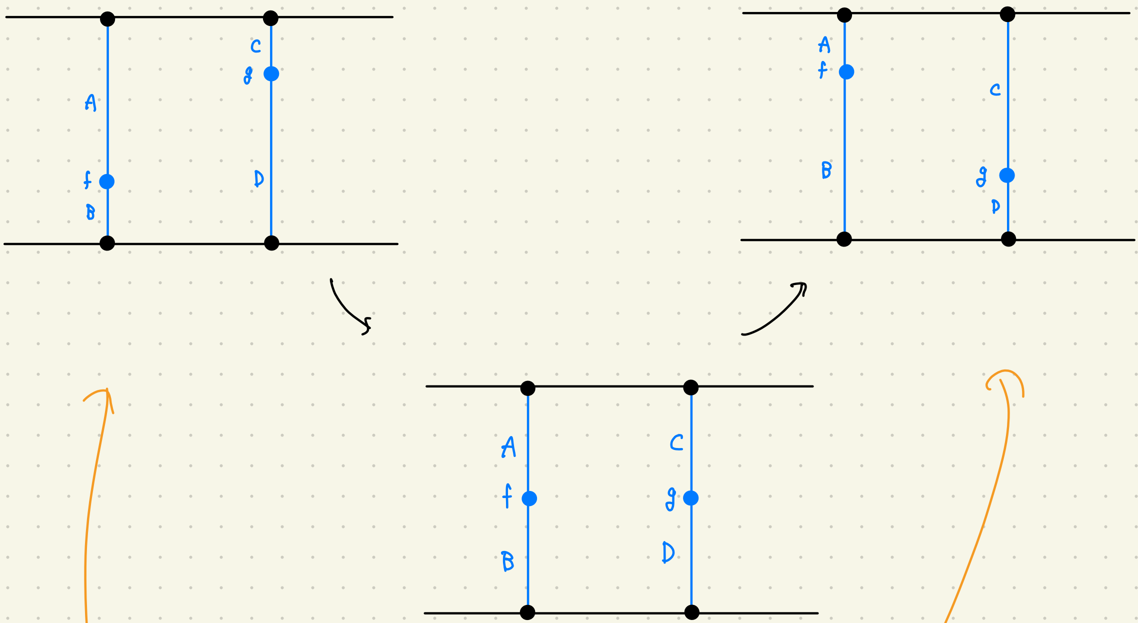


$\rightsquigarrow$ $\quad A \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} B$

$\shortparallel$



$\rightsquigarrow$ $\quad I\otimes A \xrightarrow{g\otimes f} B\otimes I$



$$\begin{tikzcd}
A \otimes C \arrow[r, "f \otimes 1_C"] \arrow[d, "1_A \otimes g"'] \arrow[dr, "f \otimes g"] & B \otimes C \arrow[d, "1_B \otimes g"] \\
A \otimes D \arrow[r, "f \otimes 1_D"'] & B \otimes D
\end{tikzcd}$$

($\otimes$ a functoriality)

定式化する。

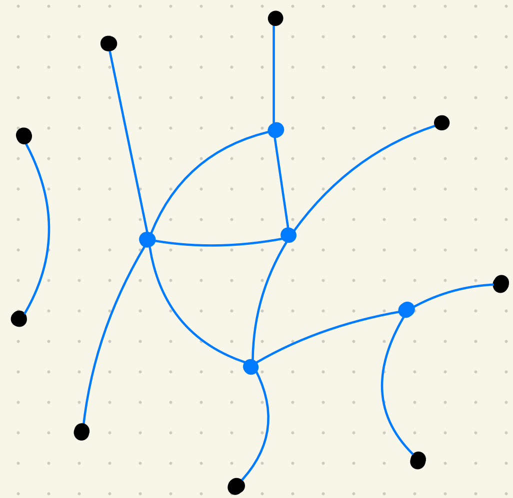
Def (graph space)

◎ graph spaceとは、cpt Hausdorff space G とその finite subset $G_0 \subseteq G$ とその subset $\partial G \subseteq G_0$ の組 $\Gamma = (\partial G, G_0, G)$ であって、

- $G \setminus G_0$ は $(0,1)$ の有限直和と同相。

(有限有向グラフの geometric realization)

- ∂G の"次数"は 1.



Def (progressive plane graph)

progressive plane graph (between the level a and b) とは,

graph space $\Gamma = (G, G_0, \partial G)$ と,

$a < b$ なる実数 と

$$g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \times [a, b] \quad : \text{embedding}$$

であって.

◎ $G \setminus G_0$ の各 connected component e

ごとに.

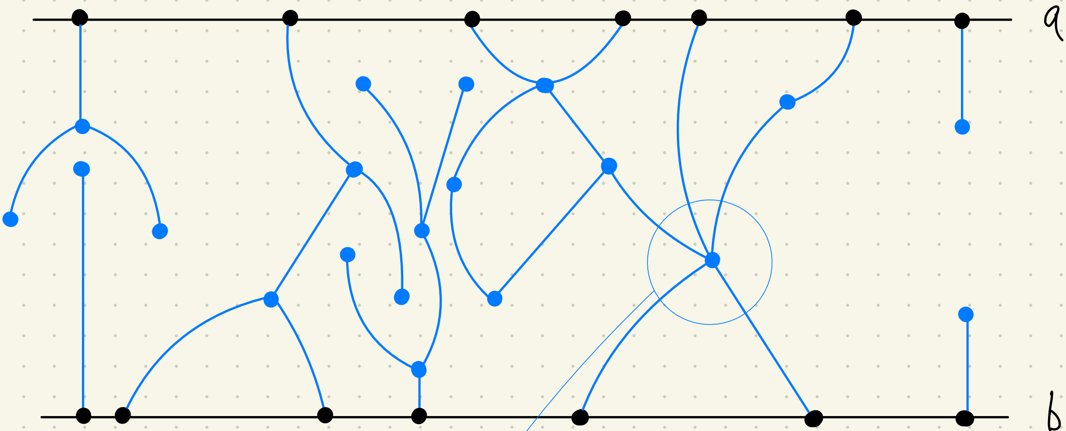
$$e \xhookrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{g} \mathbb{R} \times [a, b] \xrightarrow{pr_2} [a, b]$$

は injective

◎ $g(\partial G) = \mathbb{R} \times \{a, b\}$.

なるものをいう。

e.g.)



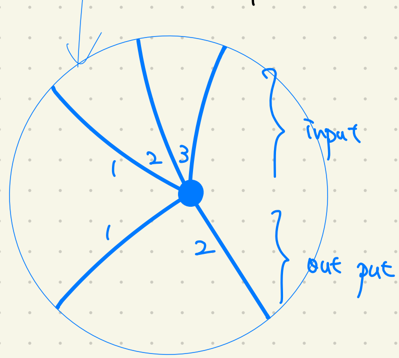
付与されるデータ

⇝ domain … $\mathbb{R}\times\{a\}$ 上の node
codomain … $\mathbb{R}\times\{b\}$ 上の node

| それぞれ liner order

各 path 上の向き

各 inner node の input, output と、それぞれの order



Def (valuation)

$g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}\times[a,b]$: progressive plane graph

長い! ppg で!

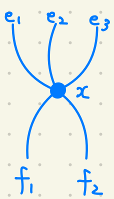
の monoidal category $\mathcal{C}$ での valuation とは,

各 edge e ごとに, $\mathcal{C}$ の object $v_0(e)$ を対応させ,

各 inner node x : input $e_1,\cdots,e_k$, output $f_1,\cdots,f_l$ ごとに,

$$v_0(e_1)\otimes\cdots\otimes v_0(e_k) \xrightarrow{v_1(x)} v_0(f_1)\otimes\cdots\otimes v_0(f_l)$$

を対応させるものとする, (要は2つの function の組)



$\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{c} v_0(e_1)\otimes v_0(e_2)\otimes v_0(e_3) \\ \downarrow{\scriptstyle v_1(x)} \\ v_0(f_1)\otimes v_0(f_2) \end{array}$$

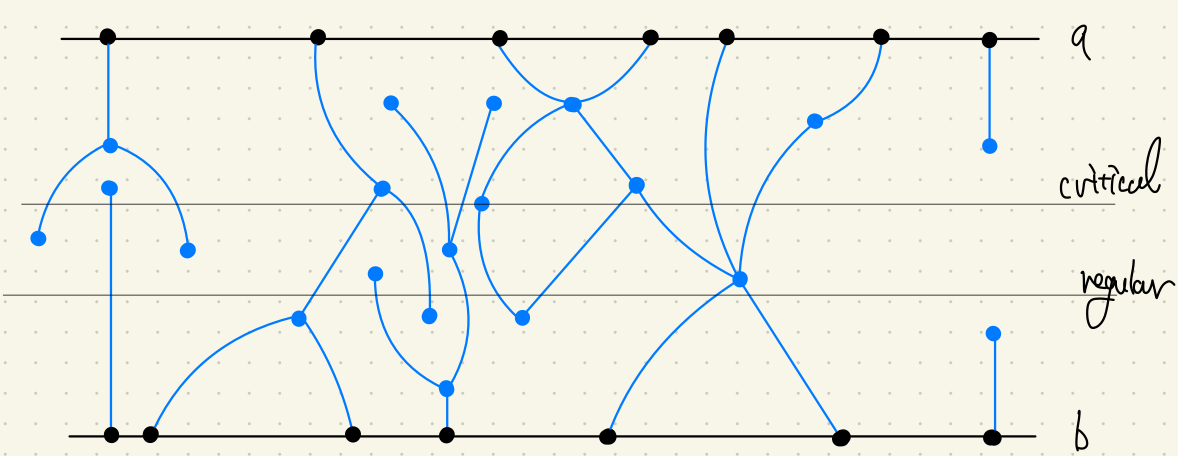
ここから "ppg 全体が射" をきめるため,

ppg の細分をする.

$r \in [a,b]$ を level と呼ぶ。

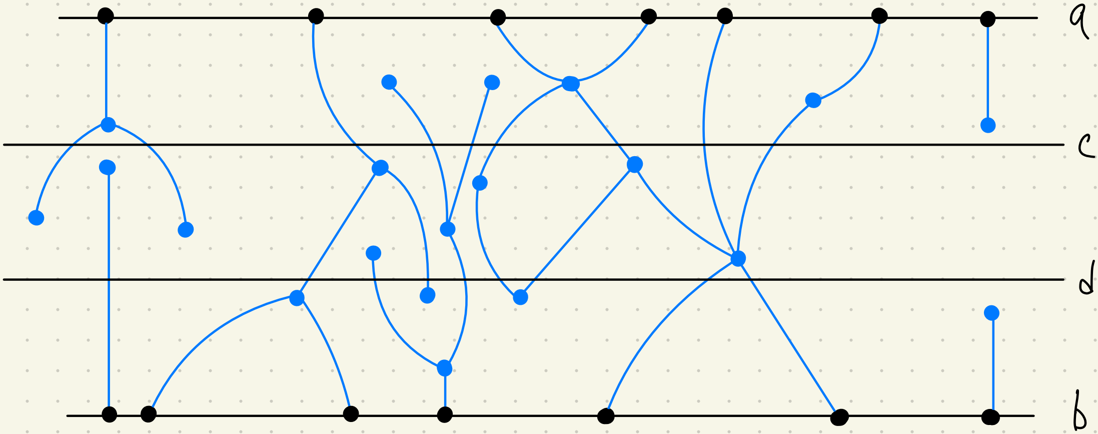
$\mathbb{R}\times\{r\}$ 上に inner node があれば r を critical level といい、

―――――― 〃 ―――――― なければ r を regular level という。

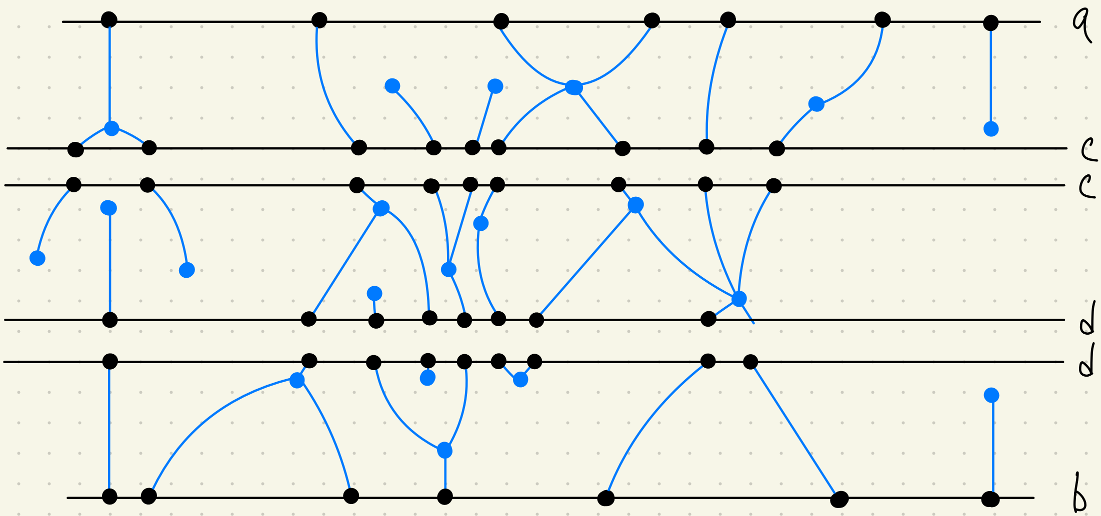


regular level $c<d$ があると、$c\sim d$ への制限

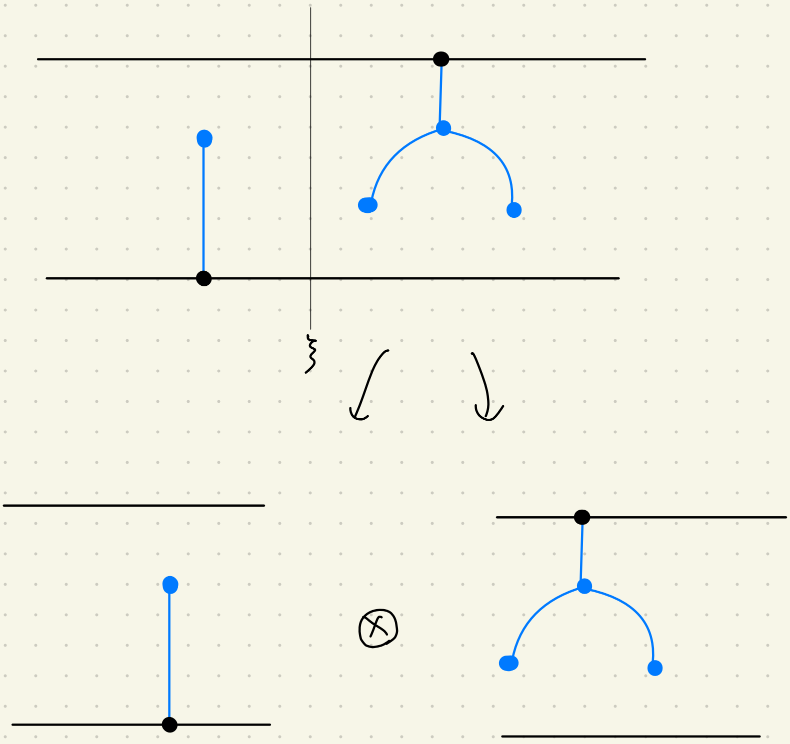
$\Gamma[c,d]$ が得られる。



分解

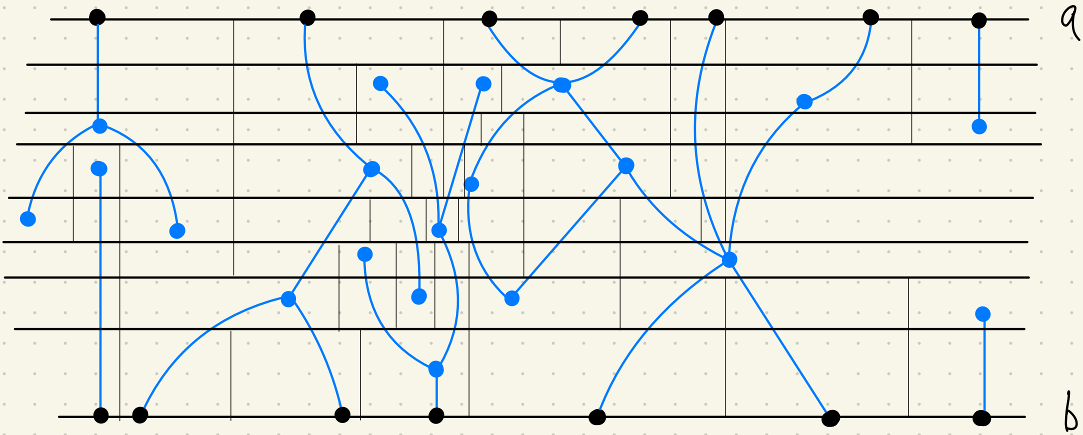


別の向きへの分解もある.

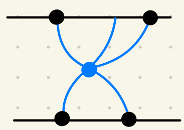
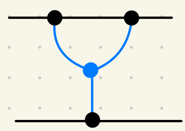
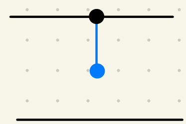


$(-\infty, \xi) \times [a,b]$ $\qquad$ $(\xi, +\infty) \times [a,b]$

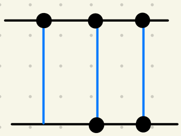
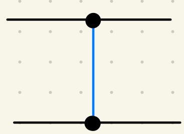
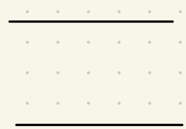
十分細分すると 各マスは単純な形になる.



単純な形 1 --- prime : inner node がちょうど1つの
連結な progressive plane graph.

 や  や  など

単純な形 2 --- invertible : inner node が1つもない

 や  や  など

細分についての定式化.

<u>Def</u> (elementary ppg)

ppgは, prime と invertible の $\otimes$ で書けるとき elementary ppg であるという.

<u>Lemma</u> どんな ppg Γ between the level a and b についても, regular level の列 $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$ が存在し, ($u_0 := a$, $u_{n+1} := b$ として)

$\Gamma[u_k, u_{k+1}]$: elementary ppg $(k = 0, \cdots, n)$

となる.

☺ critical level の $\pm\varepsilon$ で切る.
εを小さくする

PPG Γ with valuation (v_0, v_1) について、

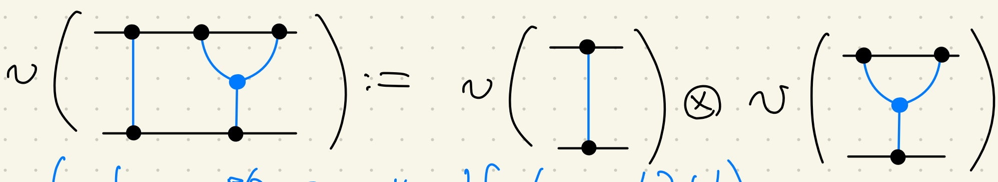
$v(\Gamma) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ を　(本当は、$\mathrm{dg}(\mathcal{C})$ --- coherence の あいまいさを 含むよ)

◎ Γ: prime なら、unique な inner node x の value $v_1(x)$ と定める。

◎ Γ: invertible なら、出ている edge $e_1, \cdots, e_k$ について、

$v_0(e_1) \otimes \cdots \otimes v_0(e_k)$ の Identity.

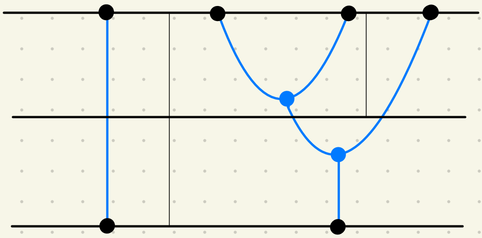
◎ Γ: elementary なら、prime と invertible の tensor に分解して、その value の tensor と定める。



(coherence 除いて well-defined に注意!!)

(本当は、すべての 結合パターンについて 解釈すると 言うべき)

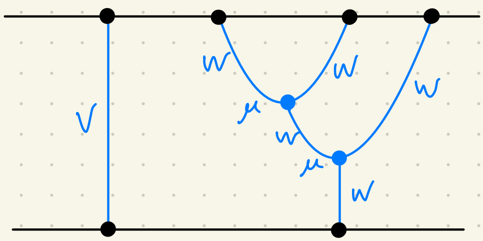
@ 一般の ppg Π については、elementary ppg の value の合成で定める。



elementary

elementary

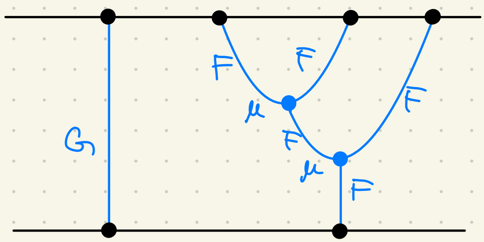
$\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$



とする.

$$
\begin{array}{c}
V \otimes W \otimes W \otimes W \\
\Big\downarrow 1_V \otimes \mu \otimes 1_V \\
V \otimes W \otimes W \\
\Big\downarrow 1_V \otimes \mu \\
V \otimes W
\end{array}
$$

$\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$



とする

$$
\begin{array}{c}
G \circ F \circ F \circ F \\
\Downarrow G\mu_F \\
G \circ F \circ F \\
\Downarrow G\mu \\
G \circ F
\end{array}
$$

(elementary ppg への分解を2つとると、その共通細分がある。細分で変わらないことをみる ～～>

Prop (細分で不変なこと) ← 要は ⊗ の関手性

Γ : elementary ppg between the level a and b

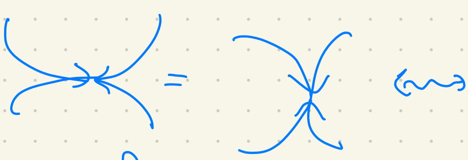
$a < u < b$: regular とする.

$$v(\Gamma) = v(\Gamma[u,b]) \circ v(\Gamma[a,u])$$

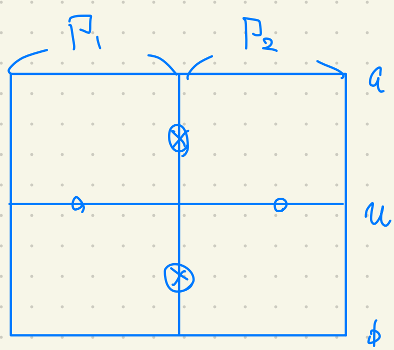
(proof) Γ を prime, invertible に分解するのに必要な テンソルの個数に関して induction。

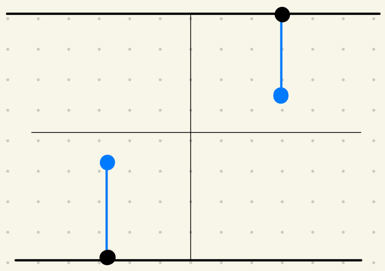
$\Gamma = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ とする,

$$
\begin{aligned}
v(\Gamma) &= v(\Gamma_1) \otimes v(\Gamma_2) \\
&= \big(v(\Gamma_1[u,b]) \circ v(\Gamma_1[a,u])\big) \otimes \big(v(\Gamma_2[u,b]) \circ v(\Gamma_2[a,u])\big) \\
&= \big(v(\Gamma_1[u,b]) \otimes v(\Gamma_2[u,b])\big) \circ \big(v(\Gamma_1[a,u]) \otimes v(\Gamma_2[a,u])\big) \\
&= v(\Gamma[u,b]) \circ v(\Gamma[a,u])
\end{aligned}
$$



functoriality





どっちを先にする?

Def (deformation of progressive plane graph)

Γ : graph space の deformation of progressive plane graph

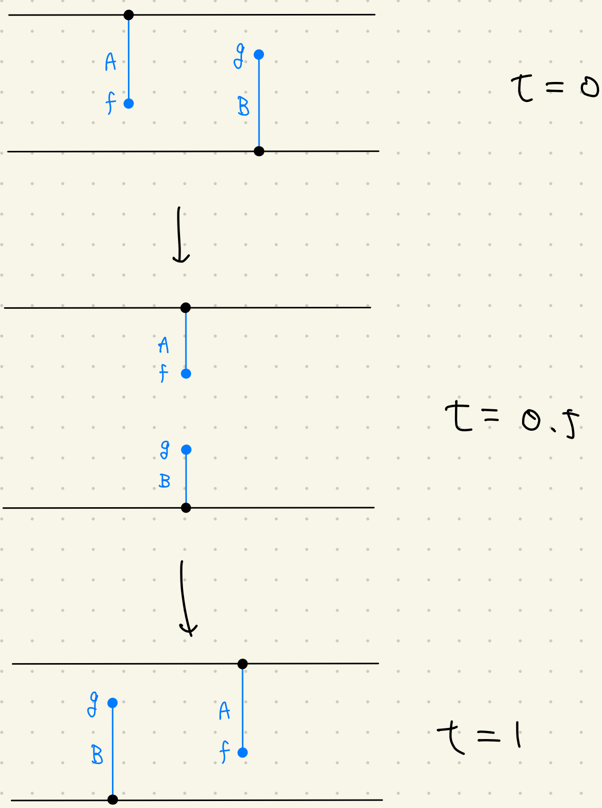
とは、$h : \Gamma \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \times [a,b]$: conti

であって、$\forall t \in [0,1]$ $\quad h(-,t) : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \times [a,b]$

: progressive plane graph.

---

e.g.)



Thm (deformation による value の不変性)

$$h : \Gamma \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \times [a,b]$$

: deformation of ppg

とすると、 $v(h(-,0)) = v(h(-,1))$

(proof) $[0,1]$: connected ゆえ、

$v(h(-,t))$ が $[0,1]$ 上 locally constant な

ことを示せばよい。

任意に $t \in [0,1]$ をとると、

$h(-,t)$ の prime と invertible への分解 は

十分小さな $\varepsilon > 0$ について $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap [0,1]$

上でも prime と invertible は 変わらない。