補間多項式列の極限とその係数

洞　龍弥

2017 年 6 月 7 日

要旨

最初の目的は補間多項式の考え方を用い数列を級数展開することとする。第二の目的はその展開から自然に定義される「係数」について調べることである。

目次

1　準備

1.1　差分

差分を定義する。

定義 1　$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f と非負整数 k について、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 $d^k f$ を以下の式で定義する。

$$d^0 f = f$$
$$d^{k+1} f(x) = d^k f(x+1) - d^k f(x)$$

$d^1 f$ は df とも書く。f から df を得る操作を差分と言う。

差分は以下のように線形性を持つ。

定理 1　任意の $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f, g と任意の実数 a と任意の非負整数 k について

$$d^k(f \pm g) = d^k f \pm d^k g$$
$$d^k(af) = a(d^k)$$

が成立する。ただし、$f \pm g$ や af は関数としての和、定数倍である。

$Proof$　微分の場合と同様なので略す。□

1.2　下降階乗冪

定義 2　非負整数 k と実数 x について $x^{\underline{k}}$ を、以下のように定義する。

$$x^{\underline{0}} = 1$$
$$x^{\underline{k}} = \prod_{m=0}^{k-1}(x - m) \qquad (k \neq 0)$$

定理 2　非負整数 k について、$f_k(x) = x^{\underline{k}}$ とおくと、$df_{k+1} = (k+1)f_k$ が成り立つ。

Proof

$$\begin{aligned} df_{k+1}(x) &= (x+1)^{\underline{k+1}} - x^{\underline{k+1}} \\ &= \prod_{m=0}^{k}(x-(m-1)) - \prod_{m=0}^{k}(x-m) \\ &= \prod_{m=-1}^{k-1}(x-m) - \prod_{m=0}^{k}(x-m) \\ &= ((x+1)-(x-k))x^{\underline{k}} \\ &= (k+1)x^{\underline{k}} \end{aligned}$$

□

1.3 n 階差分の一般式

非負整数 n, k について、$\binom{n}{k}$ を $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$ で定義する。

定理 3 任意の $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f と任意の非負整数 n について以下の等式が成立する。

$$d^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

Proof n についての帰納法で示す。$n = 0$ のとき

$$\begin{aligned} d^0 f(x) &= f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} (-1)^{0-k} f(x+k) \end{aligned}$$

より成り立つ。つぎに n のとき成立すると仮定する。任意の非負整数 a と a 以下の非負整数 b について $\binom{a}{b-1} + \binom{a}{b} = \binom{a+1}{b}$ であるので、

$$\begin{aligned} d^{n+1} f(x) &= d^n f(x+1) - d^n f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f((x+1)+k) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k+1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-(k-1)} f(x+k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{n-(k-1)} f(x+k) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-(k-1)} f(x+k) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{(n+1)-k} f(x+k) \end{aligned}$$

が成立する。□

2　級数展開

2.1　一意存在性

定理 4　　任意の実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と非負整数 x について $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\underline{k}}$ は収束する。

Proof　十分大きな整数 k について $x^{\underline{k}}$ は 0 であることからこの級数は実質有限和である。□

定理 5　　任意の実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と任意の非負整数 n について、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f を $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\underline{k}}$ で定めると、以下の等式が成立する。

$$d^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} x^{\underline{k}}$$

Proof

$$\begin{aligned}
df(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+1)^{\underline{k}} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k ((x+1)^{\underline{k}} - x^{\underline{k}}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{\underline{k-1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

であるのでこれを繰り返せば示される。□

定理 6　　任意の $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f について、実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がただ一つ存在し、$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\underline{k}}$ が成立する。

Proof　条件を満たす実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の存在と一意性は、具体的な非負整数 x について $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\underline{k}}$ が実質 $x+1$ 項の有限和であることから明らかである。□

2.2 一般式

定理 7 任意の $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f について、$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n f(0)}{n!} x^{\underline{k}}$ が成り立つ。

Proof $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を、$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\underline{k}}$ を満たす実数列とする。このような実数列が存在することはひとつ前の定理で示された。

$$d^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_{k+n} x^{\underline{k}}$$

に $x = 0$ を代入すれば、

$$\begin{aligned} d^n f(0) &= \frac{(0+n)!}{0!} a_{0+n} \\ &= n! a_n \end{aligned}$$

となる。両辺を $n!$ で割れば $a_n = \frac{d^n f(0)}{n!}$ を得る。□

3 推定係数

3.1 定義

第一種スターリング数 $S_k^{(n)}$ が必要となるので定義する。

定義 3 非負整数 n, k について、$S_k^{(n)}$ を $x^{\underline{k}}$ の x の多項式としての x^n の係数とする。

つまり、$x^{\underline{k}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_k^{(n)} x^n$ となる実定数として定義している。

定義 4 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f と非負整数 n について、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f(0)}{k!} S_k^{(n)}$$

が収束するときその値を f の n 次の推定係数といい、$C(f, n)$ と書く。

3.2 スターリング数

スターリング数について、いくつかの定理を示す。

定義 5　非負整数 n, k について $A_n(k)$ を以下のように定義する。

- $n = 0$ のとき、$A_n(k) = 1$
- $1 \leq n \leq k$ のとき、$A_n(k) = \displaystyle\sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_n \leq k} \frac{1}{m_1 \ldots m_n}$
- $n > k$ のとき、$A_n(k) = 0$

ただし $\sum$ は、$1 \leq m_1 < \cdots < m_n \leq k$ を満たす正整数列 $m_1, \ldots, m_n$ の組すべてについての和を表す。

定理 8　正整数 n, k について、$S_k^{(n)} = (-1)^{n+k}(k-1)!A_{n-1}(k-1)$ が成り立つ。

Proof　$2 \leq n < k$ のときのみ示す。このとき、$S_k^{(n)}$ は $(-1), \ldots, (-(k-1))$ の $k-n$ 次の基本対称式になる。よって、

$$\begin{aligned} S_k^{(n)} &= \sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_{n-1} \leq k-1} \frac{(-1)\ldots(-(k-1))}{(-m_1)\ldots(-m_{n-1})} \\ &= \sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_{n-1} \leq k-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(-1)^{n-1}m_1 \ldots m_{n-1}} \\ &= (-1)^{n+k}(k-1)!A_{n-1}(k-1) \end{aligned}$$

□

定理 9　任意の非負整数 n, k について、

$$A_{n+1}(k+1) - A_{n+1}(k) = \frac{1}{k+1}A_n(k)$$

が成立する。

Proof　$A_{n+1}(k+1)$ にあって $A_{n+1}(k)$ にない項は $\dfrac{1}{k+1}$ を因数にもつ項のみである。□

定理 10　任意の非負整数 n について、$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{A_n(k)}{k} = 0$ が成立する。

帰納法で示す。$n = 0$ のときは明らかに成立する。証明は容易なので省略するが、任意の $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f について、

$$\lim_{k\to\infty} df(k) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{k} = 0$$

が成立することを使う。

$$A_n(k+1) - A_n(k) = \frac{1}{k+1}A_{n-1}(k)$$

で、左辺は $dA_n(k)$ とかけ、右辺の絶対値は $\dfrac{A_{n-1}(k)}{k}$ より小さい。

3.3 収束条件

$C(f,1)$ の定義級数が収束するための f についての必要条件を考える。

定理 11 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f について、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k f(0)}{k!}S_k^{(1)}$$

が収束するならば、

$$\lim_{k\to\infty}\frac{d^k f(0)}{k}=0$$

が成立する。

Proof

$$\left|\frac{d^k f(0)}{k!}S_k^{(1)}\right|=\left|\frac{d^k f(0)}{k}\right|$$

より明らか。□

4 具体例

4.1 2^x の推定係数

$f(x)=2^x(x\in\mathbb{N})$ とすると任意の非負整数 k について $d^k f=f$ が成立する。$S_0^{(1)}=0$ より

$$\begin{aligned}C(f,1)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^k f(0)}{k!}S_k^{(1)}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\\&=\log 2\end{aligned}$$

が成り立つ。よって $C(f,1)$ は $2^x(x\in\mathbb{R})$ のマクローリン展開の一次の係数と一致する。

4.2　階乗の推定係数

$f(x) = x!(x \in \mathbb{N})$ とすると、n 階差分の一般式より、

$$\begin{aligned} d^{2n} f(0) &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} k! \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (2n)^{\underline{k}} \\ &= (2n)^{\underline{0}} + \sum_{k=1}^{n} ((2n)^{\underline{2k}} - (2n)^{\underline{2k-1}}) \\ &\geq n \end{aligned}$$

が分かる。よって、任意の正の整数 n について

$$\frac{d^{2n} f(0)}{2n} \geq \frac{1}{2}$$

となり、f の推定係数の定義級数は収束しない。

4.3　sin の推定係数

$f(x) = \sin x (x \in \mathbb{N})$ とすると、積和公式を繰り返し使うことで

$$d^k f(0) = 2^n \sin^n(\frac{1}{2}) \sin\left(\frac{\pi+1}{2} k\right)$$

がわかる。

$$\begin{aligned} C(f,1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n(\frac{1}{2}) \sin\left(\frac{\pi+1}{2} k\right)}{k!} (-1)^{k-1} (k-1)! \\ &= \mathrm{Im}(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{\frac{\pi+1}{2}\mathrm{i}})^k}{k}) \\ &= \mathrm{Im}(\log\left(2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{\frac{\pi+1}{2}\mathrm{i}} + 1\right)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり $\sin x (x \in \mathbb{R})$ のマクローリン展開の一次の係数と一致する。

4.4　$\frac{1}{1+x}$ の推定係数

$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ とする。

定理 12　　この節における f と非負整数 k について、

$$d^k f(0) = \frac{(-1)^k}{x+1}$$

が成り立つ。

Proof より一般に

$$d^k f(x) = (-1)^k \frac{k!}{\prod_{m=1}^{k+1}(x+m)}$$

が成立することを k についての帰納法で示す。

$$\begin{aligned} d^{k+1} f(x) &= d^k f(x+1) - d^k f(x) \\ &= (-1)^k \frac{k!}{\prod_{m=2}^{k+2}(x+m)} - (-1)^k \frac{k!}{\prod_{m=1}^{k+1}(x+m)} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{\prod_{m=1}^{k+2}(x+m)} \end{aligned}$$

□

定理 13 この節における f と任意の非負整数 n について、

$$C(f,n) = (-1)^n$$

が成立する。

Proof $n = 0$ の時は明らかなので、$n \geq 1$ とする。

$$\begin{aligned} C(f,n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^k}{k+1}}{k!}(-1)^{k+n}(k-1)!A_{n-1}(k-1) \\ &= (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_{n-1}(k-1)}{k} - \frac{A_{n-1}(k-1)}{k+1}\right) \end{aligned}$$

であるので、任意の n について $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_{n-1}(k-1)}{k} - \frac{A_{n-1}(k-1)}{k+1}\right)$ が 1 に等しいことを示せばよい。$\lim_{k\to\infty} \frac{A_{n-1}(k-1)}{k} = 0$ を用いて式変形し、帰納法で示す。$n = 1$ のときは明らか。$n \geq 2$ のとき、$A_{n-1}(0) = 0$ より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_{n-1}(k-1)}{k} - \frac{A_{n-1}(k-1)}{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_{n-1}(k)}{k+1} - \frac{A_{n-1}(k-1)}{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{n-2}(k-1)}{k(k+1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

が成立する。□

よって、$\frac{1}{1+x}(x \in (-1,1))$ のマクローリン展開の各係数と一致する。

4.5 調和級数とゼータ関数

$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f を

$$f(0) = 0$$
$$f(x+1) = f(x) + \frac{1}{x+1}$$

で定義する。

定理 14 この節における f と正の整数 k について、

$$d^k f(0) = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

が成り立つ。

Proof より一般に

$$d^k f(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{\prod_{m=1}^{k}(x+m)}$$

が成立する。□

一次の推定係数を計算する。ζ はリーマンのゼータ関数とする。

$$\begin{aligned} C(f,1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^{k-1}}{k}}{k!}(-1)^{k-1}(k-1)! \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \zeta(2) \end{aligned}$$

二次以上の推定係数もゼータ関数で表されることを示し、以下の定理にまとめる。

定理 15 この節における f と正の整数 n について、

$$C(f,n) = (-1)^{n+1}\zeta(n+1)$$

が成り立つ。

Proof $n = 1$ の時は示したので、$n > 1$ を仮定する。

$$\begin{aligned} C(f,n) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{(-1)^{k-1}}{k}}{k!}(-1)^{n+k}(k-1)!A_{n-1}(k-1)\right) \\ &= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{1\le m_1<\cdots<m_{n-1}\le k-1}\frac{1}{k^2\cdot m_1\ldots m_{n-1}} \\ &= (-1)^{n+1}\zeta(n+1) \end{aligned}$$

最後の等式は多重ゼータの Duality Theorem から示される。□

これは、ディガンマ関数 + オイラーの定数のマクローリン展開の各係数と一致している。