集合とその自己写像について

hora-algebra

友人から出される数学パズルやらペアノの公理やらコラッツ予想やら、集合とその自己写像を考えることは多い。何かを勉強するべきなのは確かだが、今まで勉強してきたものを自分なりに活用し、それらのモチベーションの理解をすると言う目的で考えられそうなところまで考えることにした。今回は、できる限り一般的な状況で集合とその自己写像の構造決定の道具を考えていこうと思う。圏論や普遍代数がどうやら役立ちそうなので、勉強しながら書き加えていく。内容だが、ここに打ち込むのは面倒なので証明はだいぶ省略されている上に、主張もところどころ定義を推測してもらう箇所がある (推測できる範囲だとは考えているが、私に聞いてくれれば定義を話す)。具体例も地獄のように少ない。時間がある時に追記していく。

目次

1 力学系

まず、考える対象を力学系と呼ぶことを宣言し、その射を定義する。普通力学系というと幾何的な構造が入った必ずしも離散力学系とは限らない (連続的な時間変化も考える) ものを指すそうだがそんなことは気にしない。

Definiton 1.1 (力学系)**.** 力学系 X_f とは集合 X とその自己写像 $f : X \to X$ の組 $(X, f : X \to X)$ のことである。力学系 X_f から Y_g への射 ϕ とは、写像 $\phi : X \to Y$ であって次の図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & Y \end{tikzcd}$$

が可換になるものを言う。

これは圏になる。この力学系の圏を Dyn と書き、モノイド M を圏とみなしたものを $\mathbf{B}M$ と書くことにする。$\mathbb{N}$ を非不整数と加法によるモノイドとすると、

Theorem 1.1 (Dyn の構造)**.** $\mathrm{Dyn} \simeq \mathrm{Set}^{\mathbf{B}\mathbb{N}}$

が成立する。系として

Corollary 1.1 (Dyn の基本性質)**.** 忘却 $U : \mathrm{Dyn} \to \mathrm{Set}$ は (co)lim を strictly create する。特に Dyn は bicomplete である。

ここからは詳しい性質を見ていく。まずは連結性についてである。連結性を次の三つの等しい同値関係の同値類として定義する。先に述べておくが、力学系 X_f は X を頂点集合として、$x \in X$ から $f(x) \in X$ に辺を伸ばすことで有向グラフとみなせる[*1]。

Definiton 1.2 (連結性)**.** 力学系 X_f について、集合 X 上の同値関係 $\sim$ を等しい以下の三つの同値関係

- $x \sim y \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}\ s.t.\ f^n(x) = f^m(y)$
- 関係 $x \sim f(x)$ $(x \in X)$ で生成される同値関係
- 有向グラフとしての連結性

で定義する。X_f の連結成分とはこの同値関係による同値類のことを言い、X_f が連結であるとは連結成分を高々 1 つだけ持つことを言う。

しばらくは連結成分の形を探ることにする。その正当化のために力学系は連結成分の直和でかけることを示そう。そのためにまずは部分力学系を定義する。

Definiton 1.3 (部分力学系)**.** 力学系 X_f と X の部分集合 $S \subset X$ が次の同値な条件

- 力学系 Y_g と力学系の射 $\phi : Y_g \to X_f$ が存在して $S = \mathrm{Im}\,\phi$ となる
- $f(S) \subset S$

を満たすとき力学系 $S_{f|_S}$ は well-defined でこれを X_f の部分力学系と言う。

あまり良くないがめんどくさいのでこれを S_f とも書くことにする。このとき、次が成立する。

Proposition 1.1 (連結成分は連結な力学系)**.** 力学系 X_f とその連結成分 $U \subset X$ に関して、U_f は部分力学系を定め、さらに U_f は連結である。

これによって、次のように任意の力学系は連結な力学系の直和で書けることがわかる。直和は圏 Dyn での直和のことを指している。

Theorem 1.2 (任意の力学系は連結力学系の直和)**.** 任意の力学系 X_f について、連結な力学系の族 $\{U_{\lambda f_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在し、$X_f \simeq \coprod_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda f_\lambda}$ となる[*2]。

Proof. 連結成分をとってくれば良い。直和になっていることは、忘却して直和になっていることと忘却が colim、特に直和を strictly create することからわかる。 □

これで安心して連結な力学系だけを見ればよくなる[*3]。力学系の中身を見るためには、まず力学系の中の一

[*1] full か確かめる。随伴を確かめる
[*2] 各成分の濃度についての一意性は?
[*3] 射の決定がまだ。直和と直積が違う場合にも既約から復元できるか

点の挙動、例えばループするかしないか、に注目すると良さそうだ。そこで $\mathbb{N}$ と $\mathrm{suc}: x \to x+1$ で定まる力学系 $\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ を考える。なぜならこの力学系は

Proposition 1.2 ($\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ の普遍性)**.** $\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ は忘却 $U : \mathrm{Dyn} \to \mathrm{Set}$ を表現する。

と言う普遍性をもつからである。これは言い換えれば、点つき力学系の圏 $\mathrm{Dyn}_* \simeq \int U$ において $(\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}, 0)$ が initial であることであり、$0 \in \mathbb{N}$ の行き先を好きに選ぶと一意的に力学系の射に拡張できることである。挙動を見たい点へ $\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ からの射を飛ばして、その像を見れば点の挙動がわかるはずと言う考えである。像、つまり軌跡が見たいだけなのになぜ $\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ からの射を考えるのかといえば、準同型定理の類似が成立して $\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ の剰余を調べるだけで済むようになるからである[*4]。そのためにまず剰余を定義する。

Definiton 1.4 (剰余)**.** 力学系 X_f について、X 上の同値関係 $\sim$ が正規同値関係であるとは以下の同値な二つの条件

- 力学系 Y_g と力学系の射 $\phi : X_f \to Y_g$ が存在して $\sim$ が ϕ から定まる。つまり $a \sim b \Leftrightarrow \phi(a) = \phi(b)$ となる。
- $a \sim b \Rightarrow f(a) \sim f(b)$

なることを言う。同値関係で割った集合 $X/\sim$ と代表元を送る f で送る写像 $[a] \to [f(a)]$ で力学系を定めるとこれは well-defined でありこれを X_f の正規同値関係 $\sim$ による剰余力学系 $X_f/\sim$ と言う。$\sim$ が力学系の射 ϕ で定まっているとき、X_f/ϕ とも書く。

このとき、次が成立する。

Theorem 1.3 (準同型定理)**.** $\phi : X_f \to Y_g$ が力学系の射なら $\tilde{\phi}([a]) = \phi(a)$ で定まる力学系の射 $\tilde{\phi} : X_f/\phi \to (\mathrm{Im}\,\phi)_g$ は同型射である。

これで、$\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ の剰余を決定するモチベーションが生まれるわけである。なぜなら、任意の力学系の任意の点の挙動は (その点以外の情報を無視すれば)$\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ の剰余で書けることが宣言されたからである。これは気持ちの話である。厳密に言えば X_f と $x \in X$ について $\{f^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ が X_f の部分力学系を定め、それが $\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ のある剰余力学系と同型であることを示したことになる。では、$\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ の剰余、つまり正規同値関係を決定する。直感通り、$\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ そのものか “O” 型か “6” 型である。

Lemma 1.1 ($\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ の剰余の決定)**.** $\mathbb{N}$ の正規同値関係 $\sim$ は自明であるか、$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ を用いて $a \sim b \Leftrightarrow (a, b \geq n) \wedge (a \equiv b \mod m)$ と書ける。

ここで二つの整数 n, m の表記に依存する定義を終わらせておく。

Definiton 1.5 (点の型)**.** 力学系 X_f とその点 $x \in X$ について、$\phi_x : \mathbb{N}_{\mathrm{suc}} \to X_f$ で $\phi_x(0) = x$ なるもので定まる正規同値関係を $x \in X_f$ が自明なとき $x \in X_f$ は直線型であるといい、$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ を用いて $a \sim b \Leftrightarrow (a, b \geq n) \wedge (a \equiv b \mod m)$ と書けるとき、ポテンシャルが n で周期が m のループ型と言うことにする。

実はポテンシャルを除き型は連結成分ごとに定まっている。

[*4] 普遍代数勉強する

Proposition 1.3 (型は連結成分で決まる)**.** X_f を力学系とする。このとき任意の $a, b \in X$ について a が周期 m のループ型であることと b が周期 m のループ型であることは同値である。

良い日本語が思いつかなかったのでこのように書いたが、直線型かループ型かは連結成分のどの元を取っても変わらず、さらにループなときはその周期も変わらないと主張している。ここまで来て、周期 m のループ型をしている連結成分は部分力学系として $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_{\mathrm{suc}}$ を持っていて直線型は部分力学系として $\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ をもつことがすぐわかる。これを自然に取り出したい。ただし、$\mathbb{N}_{\mathrm{suc}}$ の取り方は一意でないので一見難しいように感じる。ここで、部分力学系ではなくて剰余として取り出そうと考えると、より自然な概念が得られ、さらに直線型がさらに二つに別れる。

Definiton 1.6 (Type)**.** 力学系 X_f を正規同値関係 $a \sim b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ f^n(a) = f^n(b)$ で割った力学系を $\mathrm{Type}(X_f)$ と書く。標準的な射影 $X_f \to \mathrm{Type}(X_f)$ を η_{X_f} と書く。

つまり、$\mathrm{Type}(X_f)$ はいつか同じになるものを最初から同一視したものであり、“合流” をなくしたとも言える。これを計算すれば力学系の “合流” に関係しないと言う意味で大体の形がわかると考えられる。これは関手になると言う意味で自然なのか、また連結成分ごとに計算しても良いのか、と言う疑問が湧く。これに答えるため、Type の左随伴としての特徴づけをする。先に普遍性について述べる。

Lemma 1.2 (Type の普遍性)**.** 任意の力学系の射 $\phi : X_f \to Y_g$ について、g が単射なら図式

$$\begin{tikzcd} X_f \arrow[r, "\eta_{X_f}"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathrm{Type}(X_f) \arrow[d, dotted, "\tilde{\phi}"] \\ & Y_g \end{tikzcd}$$

を可換にする $\tilde{\phi}$ がただ一つ存在する。

この普遍性と任意の力学系 X_f について $\mathrm{Type}(X_f)$ の自己写像が単射であることから Type は object の対応から関手に持ち上げられた。普遍性から次の随伴もわかる。

Proposition 1.4 (Type の特徴づけ)**.** $\mathrm{Dyn}_{\mathrm{inj}}$ を自己写像が単射であるような力学系からなる Dyn の full subcategory とする。このとき Type は埋め込み $\mathrm{Dyn}_{inj} \to \mathrm{Dyn}$ の左随伴であり η はその unit である。

従って、Type を調べることも連結成分ごとに可能である。

Corollary 1.2 (Type と直和分解)**.** 関手 Type は colim を保つ。特に、力学系 X_f を連結成分の直和で $X_f \simeq \coprod_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda f}$ と表したとき、$\mathrm{Type}(X_f) \simeq \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Type}(U_{\lambda f})$ となる。

ここで注意がある。それは、$\mathrm{Dyn}_{\mathrm{inj}}$ での直和がわかってないことである。Type は連結成分ごとに計算して直和をとればいいのだが、この直和は Dyn での直和と一致するのか。Dyn は関手圏であったからすぐわかったが、今回はすぐにはわからなさそうだ。また、$\mathrm{Type}(X_f) \simeq \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Type}(U_{\lambda f})$ は連結成分への直和分解になっているかなど、連結性についての議論を Dyn と $\mathrm{Dyn}_{\mathrm{inj}}$ で統一的に扱いたい。ここで、次の章の内容に入る。

2 既約性

直和分解の一般的な性質について圏論的に調べる。まず、直和にそれ以上別れないと言う既約性がうまく定義できる圏を考える。

Definiton 2.1 (既約性圏)**.** 圏 $\mathcal{C}$ が既約圏であるとは、

- locally small である
- 全ての small coproduct を持つ
- initial object を持つ

を満たすことを言う。

initial object は空な図式の coproduct なので三番目の条件は論理的には必要ないのだが、明示的に書いておく。object が既約であることを、自明な直和分解しか持たないことで定義する。自明な直和分解とは、直和分解をした時に必ず "直和に関する単位元" との直和になっていることを要求する予定でいるので、"直和に関する単位元" が何か探っていく。

Lemma 2.1 (initial は直和の単位元)**.** 既約性圏 $\mathcal{C}$ とその object c に関して、

- c :initial
- $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \simeq c \coprod - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
- $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \simeq - \coprod c : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

は同値。

この補題のもとで次の定義は自然なものだと思う。

Definiton 2.2 (既約性)**.** 既約性圏 $\mathcal{C}$ とその object c について、c が既約であるとは、

- c :not initial
- $|\Lambda| \geq 2$ なる集合 Λ で添字づけられた object の族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について $c \simeq \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ となるとき $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在し X_{λ_0} :initial

の両方を満たすことを言う。

疑問は、関手により既約性が保たれるのかとか既約なものの性質だけから元の圏が全てわかるかとか言ったものである。今後の議論を楽にするために既約性の定義を使いやすい形にしておく。

Lemma 2.2 (既約の同値条件)**.** 既約性圏 $\mathcal{C}$ とその object c について、c が既約であることと

- c :not initial
- $\mathcal{C}$ の 2 つの objectX_0, X_1 について $c \simeq X_0 \coprod X_1$ となるとき X_0 or X_1 :initial

の両方を満たすことは同値である。

つまり、一般の直和分解でなくても、二つに別れる時さえ見てやれば良い。直和の普遍性から、Hom 関手

をいじることで次の補題、initial 以外が直和で消えないこと、も従う。

Lemma 2.3 (initial の直和因子は initial)**.** 既約圏 $\mathcal{C}$ とその object c とその object の族 $(d_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ について、$c \simeq \coprod_{\lambda\in\Lambda} d_\lambda$ なら二つの条件

- c :initial
- 任意の $\lambda \in \Lambda$ について d_λ :initial。

は同値。

ここから、関手と既約性の関係を見ていく。

Definiton 2.3 (既約と関手)**.** 既約圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について、

- F が既約を保つとは、任意の $\mathcal{C}$ の object c に対して c:既約 $\Rightarrow Fc$:既約　なること
- F が既約を引き戻すとは、任意の $\mathcal{C}$ の object c に対して Fc:既約 $\Rightarrow c$:既約　なること

を言う。

これで次の定理を述べる用意ができた。

Theorem 2.1 (充満部分圏と既約性)**.** 既約性圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ と fully faithful な関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について、

- F の本質的像が直和分解で閉じている (i.e. $Fc \simeq \coprod_{\lambda\in\Lambda} d_\lambda \Rightarrow \exists (c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\ Fc_\lambda \simeq d_\lambda$) なら、$F$ は initial と既約性を保つ。
- F の本質的像が直和で閉じている (i.e. $d \simeq \coprod_{\lambda\in\Lambda} Fc_\lambda \Rightarrow \exists c\ Fc \simeq d$) なら、$F$ は coproduct を保ち既約性を引き戻す。

が成立する。

これによって、自己写像が単射であるような力学系からなる充満部分圏においても既約性が同様に議論できることがわかった。一応系として書いておく。直和を引き戻すことは fully faithful からのみでわかっているので、次の形になる。

Corollary 2.1 ($\mathrm{Dyn}_{\mathrm{inj}} \to \mathrm{Dyn}$ と既約性)**.** 埋め込み $\mathrm{Dyn}_{\mathrm{inj}} \to \mathrm{Dyn}$ は直和、initial、既約性を保ち、引き戻す。

3　連結性

では、既約なものだけを調べれば良いかと言う疑問に移る。そのためには、全ての対象はまず力学系でそうであるように既約なものの直和として表されるべきだろう。

Definiton 3.1 (既約分解)**.**
既約性圏 $\mathcal{C}$ とその object c について、c の既約分解とは c への射からなる図式 $(c_\lambda \to c)_{\lambda\in\Lambda}$ であってこれが coproduct を与え、さらに任意の $\lambda \in \Lambda$ について c_λ :既約　なるものを言う。既約性圏 $\mathcal{C}$ について、$\mathcal{C}$ が既約分解圏であるとは、$\mathcal{C}$ の任意の object c について、c は initial であるか既約分解を持つことを言う。

このように、対象に関して既約分解ができる圏はたくさんあるが、有限群の有限次元表現論や有限次元の線形代数でそうであったように、既約なものの間の射を行列のように並べて一般の射が "分類" できたのは直和と直積が等しいと言う特殊な事情によるものであった。残念ながら Dyn は直和と直積は一般に一致しない。そこで別の構造に言及する必要があるわけだが、ここでは連結性を考える。既約分解圏の中でも連結性が考えられる圏として連結性圏を考える。次の連結性の定義は、Dyn で考えると連結であることを十分に感じてもらえると思う[*5]

Definiton 3.2 (連結性)**.** locally small 圏 $\mathcal{C}$ とその object c について、c が連結であるとは $\mathrm{Hom}(c,-):\mathcal{C}\to\mathrm{Set}$ が coproduct を保つことを言う。既約分解圏 $\mathcal{C}$ が連結性圏であるとは、任意の既約な object が連結であることを言う。

知りたいものにも言及しておく。

Proposition 3.1 (Dyn と連結性)**.** Dyn は連結性圏である[*6]。

連結性と既約性の関係はスッキリさせておこう。

Lemma 3.1 (連結と既約)**.** 連結性圏において、連結性と既約性は同値である。

連結性圏は射がわかるのが嬉しいのである。連結性圏は既約なもの、連結な対象とその間の射から圏の情報が復元できるのである。どのように復元するかといえば、既約な対象を "並列" したものを形式的な直和と思うのである。次のように並列を定義する。定義で出てくる Dis は集合と写像を small discrete 圏と関手とみなす関手 $\mathrm{Dis}:\mathrm{Set}\to\mathrm{CAT}$[*7]である。

Definiton 3.3 (既約部分圏と並列圏)**.** 既約性圏 $\mathcal{C}$ に関して、既約な対象全体からなる $\mathcal{C}$ の充満部分圏を $\mathrm{irr}\,\mathcal{C}$ と書き、$\mathcal{C}$ の既約部分圏と呼ぶことにする。圏 $\mathcal{C}$ に関して、$\mathcal{C}$ の並列圏 $\tilde{\mathcal{C}}$ とは、対象として集合 Λ と Λ を離散圏とみなした small discrete 圏 $\mathrm{Dis}(\Lambda)$ からの関手 $F:\mathrm{Dis}(\Lambda)\to\mathcal{C}$ の組 (Λ,F) を持ち、(Λ,F) から (Λ',G) への射として写像 $\phi:\Lambda\to\Lambda'$ と自然変換 $\eta:F\to G\circ\mathrm{Dis}(\phi)$ の組 (ϕ,η) を持ち、合成を $(\psi,\epsilon)\circ(\phi,\eta)=(\psi\circ\phi,\epsilon_{\mathrm{Dis}(\phi)}\circ\eta)$ で定める圏とする。

図式を書いておくと、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Dis}(\Lambda) \arrow[d, "\mathrm{Dis}(\phi)"'] \arrow[drr, "F"] & & \\
\mathrm{Dis}(\Lambda') \arrow[rr, "G"] \arrow[d, "\mathrm{Dis}(\psi)"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Swarrow\eta"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Swarrow\epsilon"] & & \mathcal{C} \\
\mathrm{Dis}(\Lambda'') \arrow[urr, "H"'] & &
\end{tikzcd}$$

のような状況である。後の記述や議論の正当化において便利なので関手や自然変換の言葉を使ったが、関手性や自然性は自明な状況を考えていて、本質的でない。

この時、並列は形式的な直和だと思っているわけで、これを本当の直和にする関手が考えられる。

[*5] 示すだけを示していないのだが、集合や有向グラフなどを想定している。

[*6] small 圏から連結性圏への関手圏は連結性圏か?

[*7] Cat でいいが、locally small category への射を考えるのでこうした

Definiton 3.4 (並列からの関手). 既約性圏 $\mathcal{C}$ について、関手 $\mathcal{E}_{\mathcal{C}} : \widetilde{\mathrm{irr}\,\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ を object については $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(\Lambda, F) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} F\lambda$ で定め (この時、直和の取り方、inclusion $(\iota_\lambda : F\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} F\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の選択をする)*8、射については $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(\phi, \eta)$ を cocone $(\iota_{\phi(\lambda)} \circ \eta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ から誘導される射とする。

次が連結性圏に関して既約な対象とその関係のみを調べれば良いと言える根拠である。

Theorem 3.1 (連結性圏は既約からわかる). 連結性圏 $\mathcal{C}$ について、$\mathcal{E}_{\mathcal{C}} : \widetilde{\mathrm{irr}\,\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ は圏同値を与える。

また、既約なもの全てを集めてこなくても、同型類から一つずつ取ってくれれば良いことが次からわかる。

Proposition 3.2 ($\widetilde{(-)}$ の関手性と圏同値). 並列圏を作る操作は関手を post-composite に移すことによって関手 $\widetilde{(-)} : \mathrm{CAT} \to \mathrm{CAT}$ となる。さらに $\widetilde{(-)}$ は full な関手を full な関手に移し、faithful な関手を faithful な関手に移し、essentially surjective な関手を essentially surjective な関手に移す。従って $\widetilde{(-)}$ は圏同値な二つの圏を圏同値な二つの圏に移す。

例えば Set は object と射を一つずつ持つ圏から作られるし、群の作用の圏は真部分群による剰余類への作用からなる圏から作られる。また、この定理から $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ は fully faithful なので既約分解の一意性もわかる。

Proposition 3.3 (既約分解の一意性). 連結性圏 $\mathcal{C}$ とその object の族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (Y_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ について、$\phi : \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to \coprod_{\lambda'\in\Lambda'}$ が iso なら全単射 $f : \Lambda \to \Lambda'$ と isomorphism の族 $(\eta_\lambda : X_\lambda \to Y_{f(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ であって ϕ を誘導するものがただ一つ存在する。

4　アイデア

- モノイドからの関手圏の一般論←小さい圏から連結性圏への関手圏は連結性圏か？
- 表現論とのアナロジーと対比←連結性圏
- $\widetilde{\mathrm{irr}}(\mathcal{C})$ から Set への忘却と連結成分を取る関手。離散対象を作る関手と terminal object の存在と既約性。

参考文献

[1] Emily Riehl, CATEGORY THEORY IN CONTEXT, DOVER, 2016.

*8 この分、$\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ には本質的ではない自由度が存在する