Trace in Symmetric Monoidal Categories.

Recall

線形代数におけるTrace

n次正方行列 $(a_{ij})_{ij}$ のトレースとは、$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ のことだった。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{tr}{\rightsquigarrow} 1+4+4 = 9 \quad //$$

トレースは cyclic $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ だったので、

基底のとりかえ $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(AP^{-1}P) = \mathrm{tr}(A)$

によらなかった。

トレースは、finite dimentional vector sp V の

endomorphism $f : V \longrightarrow V$ について

定まる。（基底のとり方によらない）

Tr(f) を f からとり出すには. V の dual space V^* を用いて,

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, "\mathrm{coev}"] & 1 \arrow[d, mapsto] \\
V \otimes V^* \arrow[d, "f \otimes 1"] & \sum_{b \in B} b \otimes b^* \arrow[d, mapsto] \\
V \otimes V^* \arrow[d, "\mathrm{ev}"] & \sum_{b \in B} f(b) \otimes b^* \arrow[d, mapsto] \\
\mathbb{C} & \mathrm{tr}(f)
\end{tikzcd}
$$

とすればよい。

Categorical formalization.

Step 1 dual object. in Monoidal Category (or bicategory)

Step 2 Trace in Symmetric monoidal Category.

Step 1　dual object.

Def (dual object)

$(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda)$: monoidal category の object M の

right dual (⇝ left adjoint) とは、

object M^* と、

coevaluation (⇝ unit) $I \xrightarrow{\eta} M \otimes M^*$

evaluation (⇝ counit) $M^* \otimes M \xrightarrow{\epsilon} I$

であって、triangle identity

Coherence 書いてない

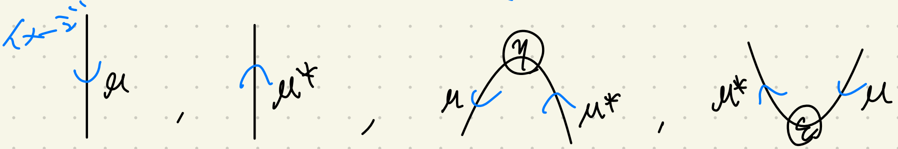
(i)

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\eta \otimes 1"] \arrow[dr, "1"'] & M \otimes M^* \otimes M \arrow[d, "1 \otimes \epsilon"] \\
& M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M^* \arrow[r, "1 \otimes \eta"] \arrow[dr, "1"'] & M^* \otimes M \otimes M^* \arrow[d, "\epsilon \otimes 1"] \\
& M^*
\end{tikzcd}
$$

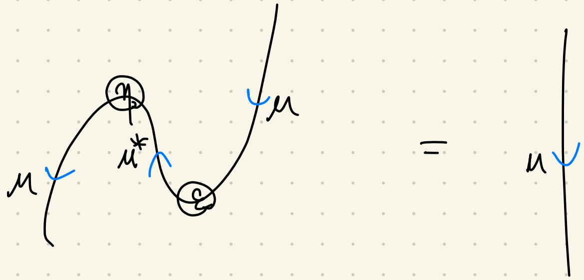
string diagram (今回は上から下へ読む)

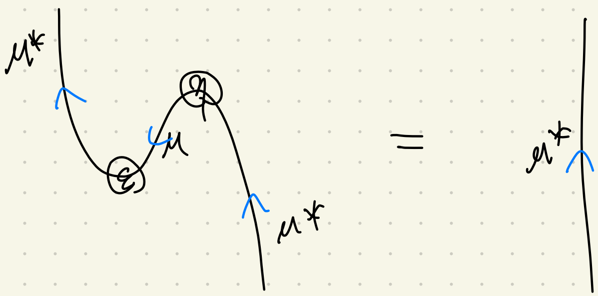
(自分とは上下左右逆)

イメージ



であって.





なるもの。

right dual をもつとき right dualizable,

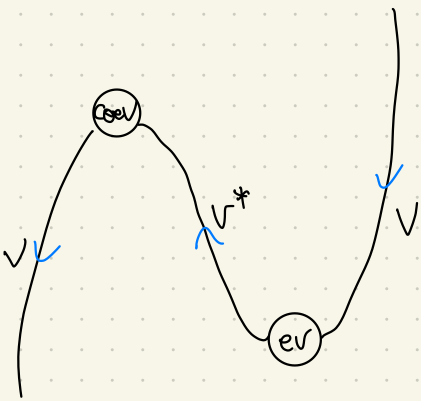
left dual をもつとき left dualizable という.

(何かの right dual になっているとき)

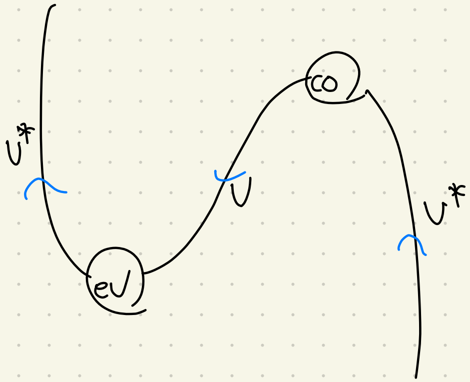
e.g. 王イベ) k: field について, V: fin dim vect. sp

$$k \xrightarrow{\mathrm{coev}} V \otimes V^*$$

$$V^* \otimes V \xrightarrow{\mathrm{ev}} k \quad \text{は dual.}$$



$$v$$
$$\downarrow$$
$$\sum_{b \in B} b \otimes b^* \otimes v$$
$$\downarrow$$
$$\sum_{b \in B} b \otimes (v \text{ の } b \text{ 成分})$$
$$\shortparallel$$
$$v$$



$$
\begin{array}{c}
f \\
\rotatebox{270}{$\mapsto$} \\
\sum_{b \in B} f \otimes b \otimes b^* \\
\rotatebox{270}{$\mapsto$} \\
\sum_{b \in B} f(b) \otimes b^* \\
\rotatebox{90}{$=$} \\
f
\end{array}
$$

e.g.) $\mathcal{C}$: category とする。$\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ は 合成で

(strict) monoidal category.

F の right dual は left adjoint のこと!

($\rightsquigarrow$ bicategory のこと)

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, shift right=1.5ex, "F"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, shift right=1.5ex, "\text{dual}"']
\end{tikzcd}
$$

e.g.) $\mathcal{C}$: cartesian monoidal category なら...

dual をもつ のは terminal だけ.

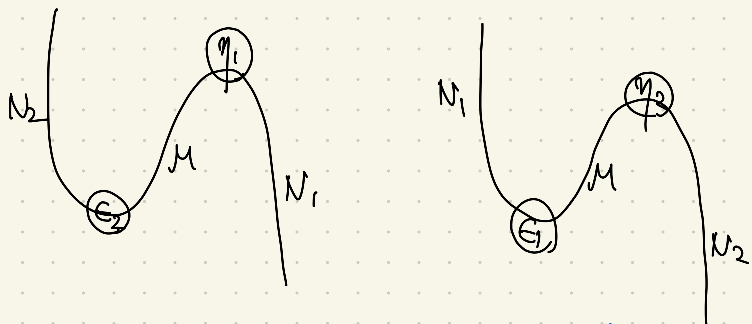
これは キョ。

dual は unique に定まるか? ⇝ Yes

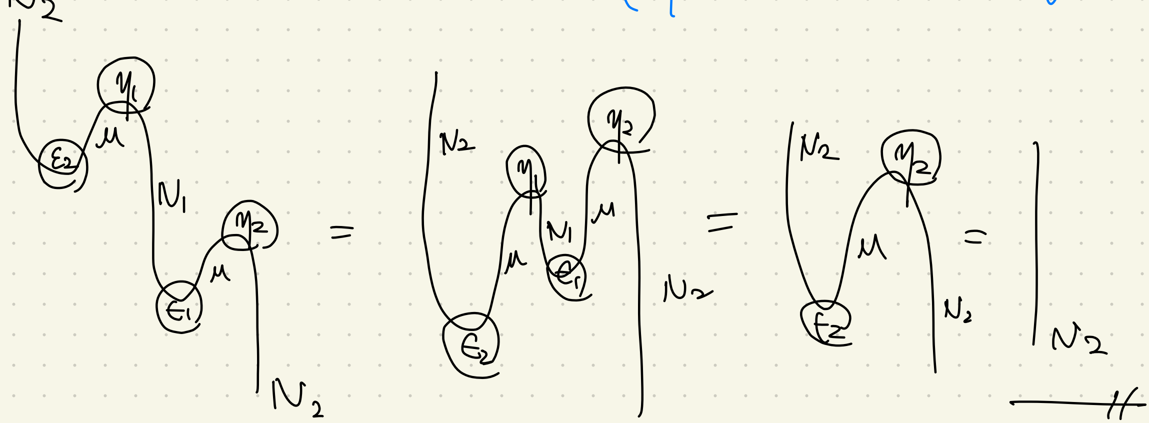
Lemma

dual object は up to canonical iso で unique.

M の right dual $(M, N_1, \eta_1, \varepsilon_1)$, $(M, N_2, \eta_2, \varepsilon_2)$ があれば,



は 互いの 逆射を与える. (η, ϵ との可換性も課すと unique!)



Step 2　Trace.

vector space では.

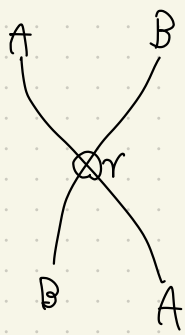
$$
\begin{array}{c}
k \\
\downarrow \\
V \otimes V^* \\
\downarrow {\scriptstyle f \otimes 1} \\
V \otimes V^* \\
\wr\| \\
V^* \otimes V \\
\downarrow {\scriptstyle \mathrm{coev}} \\
k
\end{array}
$$

← Symmetry.

とした。

Symmetric Monoidal Category

$$
\begin{array}{c}
A \otimes B \\
r \downarrow \wr\| \\
B \otimes A
\end{array}
$$



string

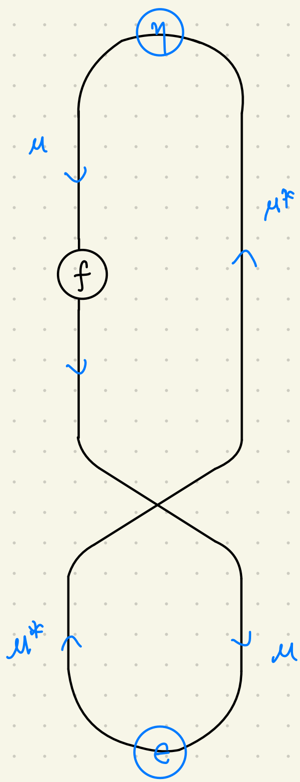
Def (Trace in Symmetric Monoidal Category)

$\mathcal{C}$: Symmetric Monoidal Category について、
$(\mathcal{C}, \otimes, I, \rho, \lambda, \gamma)$

M : dualizable object の endomorphism $f: M \to M$ の

trace とは

$$
\begin{array}{c}
I \\
\downarrow{\scriptstyle \eta} \\
M \otimes M^* \\
\downarrow{\scriptstyle f \otimes 1_{M^*}} \\
M \otimes M^* \\
\downarrow{\scriptstyle \text{Symmetry}} \\
M^* \otimes M \\
\downarrow{\scriptstyle \epsilon} \\
I
\end{array}
$$



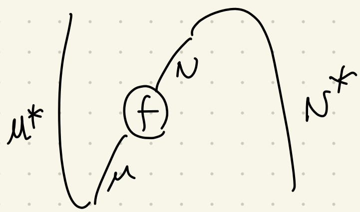
のことをいう

Q. わっかになってることと, Traceの cyclicity, かんけいある?

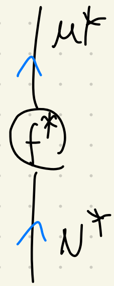
〜いっ ある.

まず, N, M: dualizable とする.

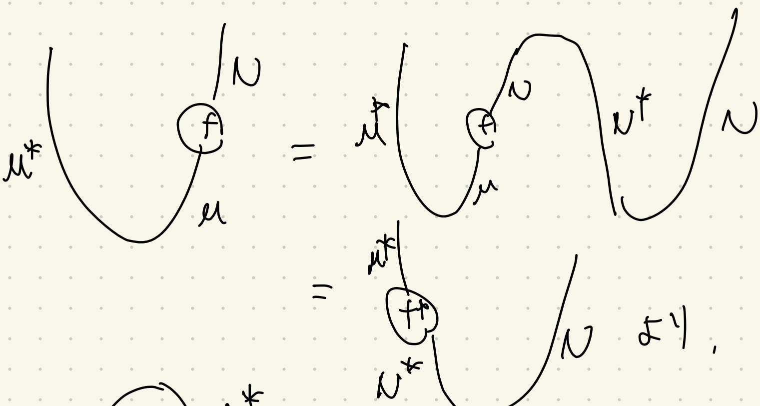
について,



を

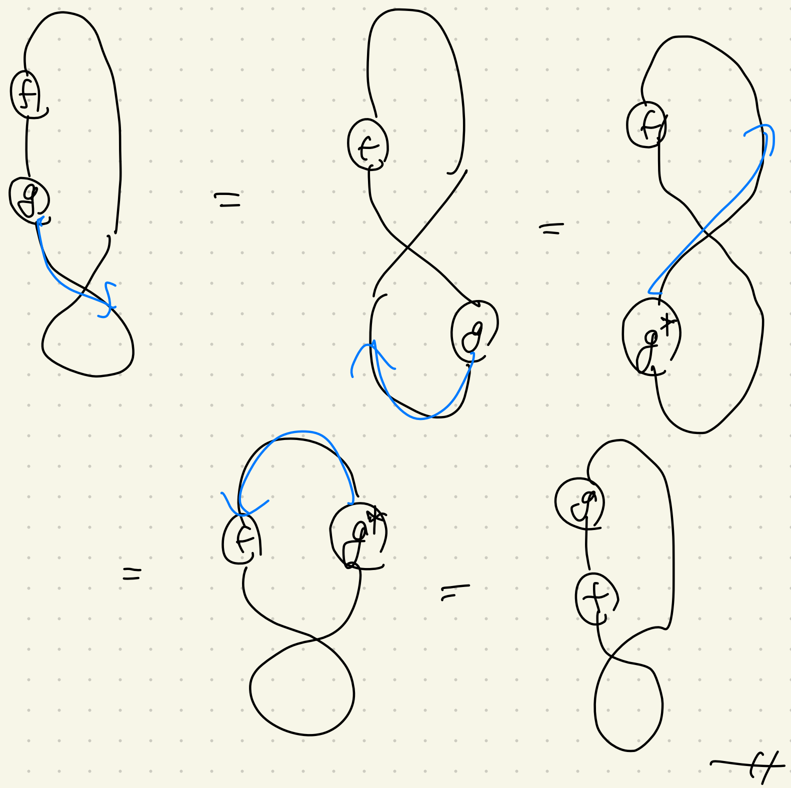


と略記する. (射をひっくり返せる!)



より, 射はわたれる!

증명,



$\boxed{3}$ Examples

① Vect. --- もうやった.

② R-Mod for R commutative ring

③ Chu

④ Cobordism

⑤ Rel

⑥ Cartesian ならず

② R-Mod

M = R-module

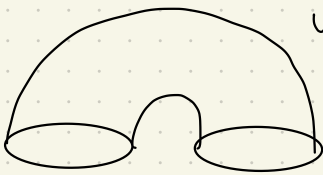
finitely generated projectives : dualizable.

③ Ch_R --- trace は traceの交代和らしい。

とくに, id の trace は Euler characteristic

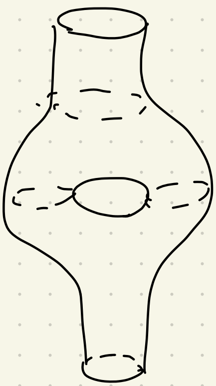
(derived category でみても面白くて.
そっからいろいろ いろ 構造との繋がりが出るらしい…)

④ every cobordism is dualizable.

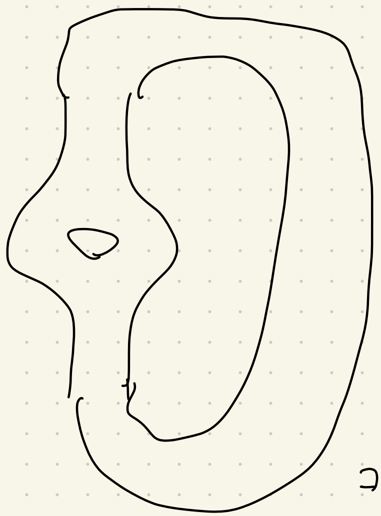


unit

counit.



の トレースは



コレ.

(今回はできないが $n\mathrm{Cob} \longrightarrow \mathrm{Vect}$ でおくる)

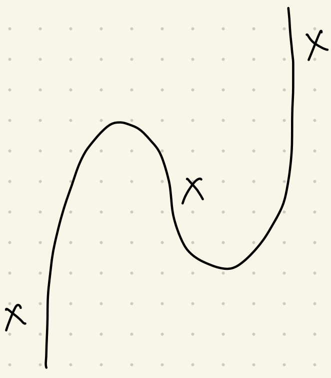
⑤ (1-)Category Rel　　object --- Set

morphism $X \to Y$ --- subset of $X \times Y$ (Relation)

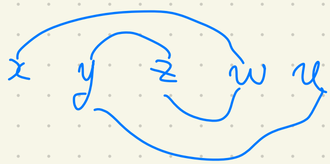
は、objectの集合としての productで symmetric monoidal.

このとき、すべての object X は自身と

$$* \xrightarrow{\eta} X \otimes X \quad と \quad X \otimes X \xrightarrow{\varepsilon} * \quad を 対角線として (=)$$



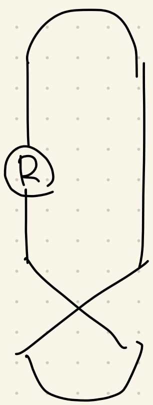
$$\begin{array}{c} (x) \\ \Big\downarrow \; y=z \text{ かつ } x=w \\ (y, z, w) \\ \Big\downarrow \; u=y \text{ かつ } z=w \\ (u) \end{array}$$



つまり、$x=u$ 連続,

$* \longrightarrow *$ “これら” は、Truth value!

$X \xrightarrow{R} X$ in Rel とする,



$=$

$()$

$x = y$

(x, y)

xRx' かつ $y = y'$

(x', y')

$x' = x''$ かつ $y' = y''$

(y'', x'')

$y'' = x''$

$()$

i.e. $\exists x \in X$ s.t. xRx.

とくに、function $f : X \longrightarrow X$ について、f のグラフ $R(f)$ の trace $\mathrm{Tr}(R(f))$ は「f は fixed point をもつか」である.

⑥ $\mathcal{C}$: cartesian monoidal から,

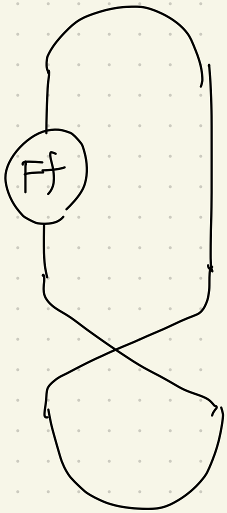
$\mathcal{D}$: not cartesian monoidal へ functor で

送るという手もある.

簡単な例として. $\mathrm{FinSet} \xrightarrow{F} \mathrm{Ab}$

$$S \longmapsto \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}_s$$

とすると, $Ff: FS \longrightarrow FS$ の trace は



$$
\begin{aligned}
&1 \\
&\;\downarrow \\
&\sum_{s\in S} s \otimes s^* \\
&\;\downarrow \\
&\sum_{s\in S} f(s) \otimes s^* \\
&\;\downarrow \\
&\sum_{s\in S} s^* \otimes f(s) \\
&\;\downarrow \\
&\sum_{\substack{s\in S \\ f(s)=s}} 1 = \#\{f \text{ の fixed point}\}
\end{aligned}
$$

(それはそうだが、

$$
\begin{tikzcd}
 & S_1 \arrow[dr, bend left, "f_1"] & \\
S_0 \arrow[ur, bend left, "f_0"] & & S_2 \arrow[ll, bend left, "f_2"]
\end{tikzcd}
$$

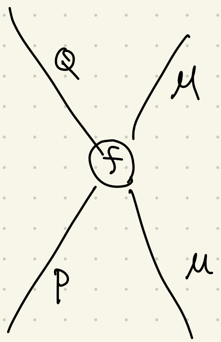
例えば、一周の fixed point の数はすべて同じ)

⇝ 本当はこの先で trace が良いfunctorで

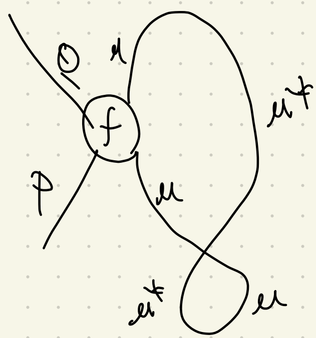
うつりなるところがおもしろい・・・

---

input があってもよい．



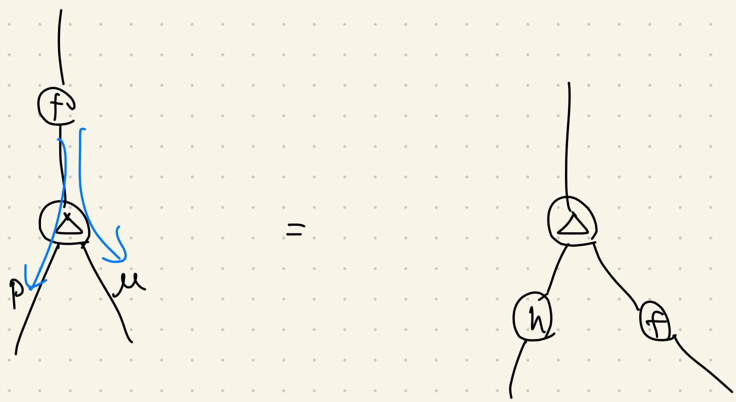
μ = dualizable とする．



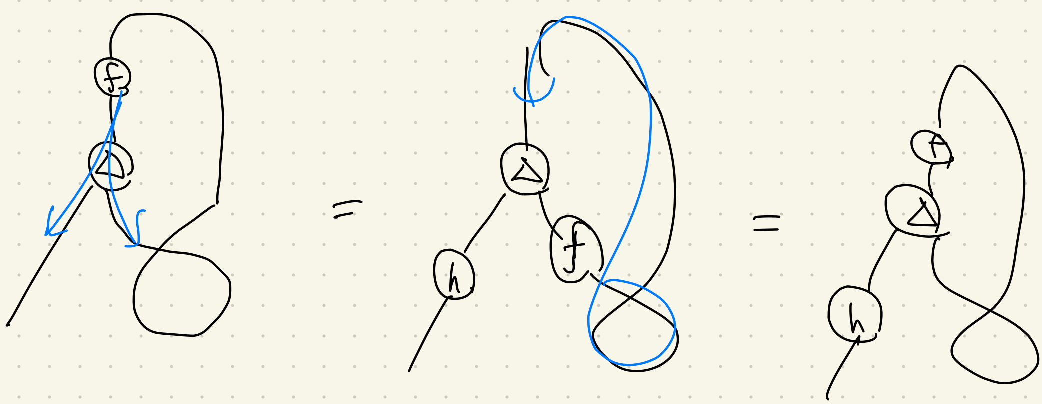
を trace とよぶ．

もし

があって



なら、

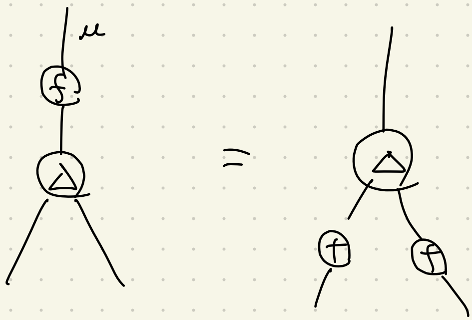


となり、

fixed point を示せる!

たとえば $\mathcal{C} = CC$ $\mathcal{D}$: symmetric monoidal.

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$: すごくよい、とする。



をFでうつして、

f a fixed point から $I_{\mathcal{D}} \longrightarrow F\mathcal{U}$

を得る。

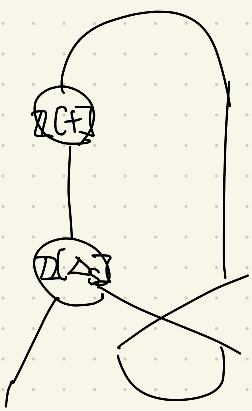
Set $\longrightarrow$ Ab では

$f: S \to S$

finite

$\mathbb{Z}[f]$ の fixed point

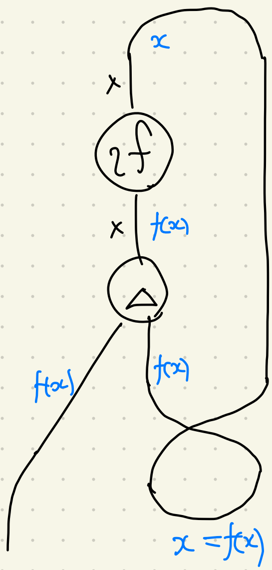
$$1 \mapsto \sum s \otimes s^* \mapsto \sum f(s) \otimes s^* \mapsto \sum f(s) \otimes f(s) \otimes s^* \mapsto \sum f(s) \otimes s^* \otimes f(s) = \sum_{s:\text{fixed point}} s$$



$2: \mathrm{Set} \longrightarrow \mathrm{Rel}$ で $f: X \longrightarrow X$ (X: finite)

とする、

1)



となり、

$* \sim x \iff x$: fixed point of f

Traced monoidal category

= Categorical semantics of recursive computing?

Lefschetz fixed point theorem