ジャグリング

hora-algebra

この文章は、ト***という名前でジャグラーをしているクラスメートに教えてもらったジャグリング可能数列についての考察をまとめたものである。ギ****やナ*やも**の協力による証明が多い。

目次

1 導入

有限正整数列 $\{a_i\}_{i=1\sim n}$ がジャグリング可能数列であるとは、任意の $1 \leq i < j \leq n$ に対して $a_i \not\equiv a_j \pmod{n}$ なることを言う。これは、n 単位時間周期のジャグリングで、時刻 i では a_i 単位時間後にボールが落ちてくるように投げるジャグリングを表す。つまり、ジャグリング可能数列は、同時に二つのボールが落ちてこないことを要請している。ジャグリング可能数列に関してはボールの個数という値が定義できる。ボールの個数はジャグリング可能数列に対応するジャグリングを実行するのに必要なボールの数であるが、この値がジャグリング可能数列の平均 $(a_1 + \cdots + a_n)/n$ で与えられるという事実がジャグラーの間では有名事実らしい。この事実とボールの個数が整数であることから、ジャグリング可能であれば $a_1 + \cdots + a_n$ が n の倍数でなくてはならないという一見非自明な制約が生まれてくる[*1]。このように、ジャグリング可能数列は数学的に考察する価値のある興味深い対象であると考え、基本的な問いについて考えることにした。

このジャグリング数列は周期的なジャグリングのみを記述している。実際に文化祭でジャグリングのステージを見たときは、周期的でなかったり複数人で投げ合うジャグリングも見られた。周期的でないジャグリング

[*1] これ自体は簡単な入試レベルの問題であるので示してみると良い。有限集合の自身への単射は全射であることを使う。

を無限数列で表し、有限数列の時との類似と相違点について考察していく。

2　ジャグリングの定義

では、周期的とは限らないジャグリングをどう定式化するかを考えよう。まず、有限数列のジャグリング可能数列はある種の単射性に言及した条件が課されている。これは同時に二つのボールが落ちてこないことを意味している。しかし、有限集合の自身への単射性というのは同時に全射性も言及していることに意識を向けなければならない。ジャグリング中にボールを補給することを考えなければ、全ての時間にボールが落ちてくるのも自然な要求であると言えるだろう。以上より、全ての時間にただ一つボールが落ちてくることを仮定する。また、有限数列のジャグリング可能数列はジャグリングの一つの周期に関して投げる高さを決定しているため、明確な開始と終了の情報を持っているわけではない。全ての時刻にボールが落ちてくることを綺麗に記述するために、明確な開始と終了のない数列、つまり $\mathbb{Z}$ で添字づけられた数列でジャグリングを考えることにしよう。

Definiton 2.1 (ジャグリング)**.** $\mathbb{Z}$ で添字づけられた正整数列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ がジャグリングであるとは、任意の整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して $i + a_i = k$ なる $i \in \mathbb{Z}$ が一意に存在することを言う。

この定義が有限数列のジャグリング可能数列の一般化になっていることを主張しておく。

Proposition 2.1 (ジャグリングは有限数列のジャグリングの一般化)**.** 有限数列 $\{a_i\}_{i=1\sim n}$ について、$\{b_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を $b_i = a_j$(j は $j \equiv i \pmod n$ なる 1 以上 n 以下の整数) と定めたとき、$\{a_i\}_{i=1\sim n}$ が有限数列のジャグリング数列であることと $\{b_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ がジャグリングであることは同値である。

したがって、この概念は自然な一般化になっている。このジャグリングという概念には文脈によって使い分けるいくつかの同値な定義が存在するので紹介しておく。

Proposition 2.2 (ジャグリングの同値な定義)**.** 以下の三つの概念は互いに一対一対応がある*2。

- ジャグリング
- 全単射 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ であって任意の $i \in \mathbb{Z}$ に関して $f(i) > i$ なるもの
- $\mathbb{Z}$ の上下に有界でない部分集合の族 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ であって $\mathbb{Z} = \coprod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ なるもの

Proof. 一つ目から二つ目を作るには、$f(i) = i + a_i$ と定義すれば良い。二つ目から一つ目を作るには $a_i = f(i) - i$ とすれば良い。二つ目から三つ目を作るには、$\mathbb{Z}$ を、f の整数回の合成*3で移り合うという同値関係で割れば良い。三つ目から二つ目を作るには、$i \in \mathbb{Z}$ に対して、$i \in B_\lambda$ なる B_λ の元で i の次に大きいものを $f(i)$ とすれば良い。 □

この命題より、ジャグリングは三つの視点からみることができる。三つの同値な定義のうち一つ目を数列としてのジャグリング、二つ目を写像としてのジャグリング、三つ目を直和分解としてのジャグリングと呼ぶことにする。数列としてのジャグリングはそれぞれの時刻での投げる高さを記述している。写像としてのジャグリングはそれぞれの時刻で投げたボールが落ちてくる時刻を記述している。直和分解としてのジャグリングはボールにラベリングをして時刻を落ちてくるボールで分類している。三つの視点は今後定義する概念や考察

*2 具体的な対応は証明の中で述べる。厳密にはその対応も含めて主張である

*3 全単射なので逆写像を考えられる。-3 回の合成は逆写像を 3 回合成したものと考える

にとって重要になる。今後はこの三つの定義を区別せず、ジャグリング一つを単にジャグリング G などと言い[*4]、G を数列 (写像, 直和分解) で表示するといった表現をする[*5]。

3　腕力の定義

ジャグリングが定義されたがジャグリングに関して定まる量を定義しておく。そして、基本的な性質を示すとともに、いくつかの面白い例を見る。最初はボールを投げる高さに関する量である、腕力[*6]を定義する。

Definiton 3.1 (腕力)**.** ジャグリング G の腕力とは、G の数列としての表示 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ について $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ の上限のことをいい、W_G とかく。$W_G < \infty$ なる G を有限腕力ジャグリングといい、$W_G = \infty$ なる G を無限腕力ジャグリングという。

この定義より、現実的に可能なジャグリングとして有限腕力を考えていると思ってもらって構わない。有限腕力ジャグリングであるという条件は大変強い制約であるので、有限腕力ジャグリングについては多くの性質が分かっている。

腕力が定義されたので、基本的な性質を見ていく。これらは、本質的な性質ではなく単なる興味として考えられていると思って構わないが、腕力への理解につながると思う。

Proposition 3.1 (任意の腕力が実現可能)**.** 任意の $W \in \mathbb{Z}_{>} \cup \{\infty\}$ に対して、$W_G = W$ なるジャグリングが存在する。

Proof. $0 < W < \infty$ の時、$\{a_i = W\}_{i\in\mathbb{Z}}$ なる数列は腕力 W のジャグリングを与える。B を負の偶数と 2 の冪からなる $\mathbb{Z}$ の部分集合であるとする。この時、$\mathbb{Z} = B \coprod (\mathbb{Z} - B)$ なる直和分解は腕力 ∞ のジャグリングを与える[*7]。 □

有限腕力ジャグリングも無限腕力ジャグリングも存在することがわかったが、それらがどの程度存在するかも興味がある。簡単な考察からジャグリングが非可算個あることがわかるが、有限腕力ジャグリングも無限腕力ジャグリングも非可算個存在するだろうか。

Proposition 3.2. 有限腕力ジャグリングも無限腕力ジャグリングも非可算個存在する。

Proof. 直和分解としてのジャグリングを考えれば良い。 □

4　ボールの個数の定義

次に、ジャグリングについて定まる量としてボールの個数を定義する。

Definiton 4.1 (ボールの個数)**.** ジャグリング G のボールの個数とは、G の直和分解としての表示 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について Λ の濃度のことをいい、N_G とかく。$N_G < \infty$ なる G を有限ボールジャグリングといい、$N_G = \infty$ なる G を無限ボールジャグリングという。

[*4] なぜ juggling の J ではないかというと、綴りを G と勘違いしたまま後戻りできないほど書き進めてしまったからである。

[*5] 気になるなら、ジャグリングとは上の命題で対応する三つの形の数学的対象の組であると思えば良い

[*6] 「高さ」などの名前にしなかった理由は、「腕力」の方がパワーワードを生みやすく私的に好みだからである

[*7] 実は、全ての正整数がちょうど一回現れるような数列としてのジャグリングが存在している!

これについても腕力同様のことを示しておこう。

Proposition 4.1 (任意のボールの個数が実現可能)**.** 任意の $N \in \mathbb{Z}_{>} \cup \{\infty\}$ に対して、$N_G = N$ なるジャグリングが存在する。

Proof. $0 < N < \infty$ の時、$\{a_i = N\}_{i\in\mathbb{Z}}$ なる数列はボールの個数 N のジャグリングを与える。$N = \infty$ の時は、直和分解としてのジャグリングを考えれば良い。例えば、$\mathbb{Z}$ の元を 2 で割れる回数で分類すれば (0 はどこかの仲間に入れるとして) 実現可能である。 □

この証明では直和分解としてのジャグリングが偉い。

Proposition 4.2. 有限ボールジャグリングも無限ボールジャグリングも非可算個存在する。

Proof. 直和分解としてのジャグリングを考えれば良い。 □

5 腕力とボールの個数

数列としてのジャグリングから腕力という概念が定義でき、直和分解としてのジャグリングからボールの個数という概念が定義できたわけだが、この二つの関係に言及していく。まず、ボールの個数が腕力で抑えられることを示す。

Theorem 5.1 (ボールの個数は腕力以下)**.** 任意のジャグリング G に関して、$N_G \leq W_G$ が成立する。

Proof. $W_G = \infty$ の時は明らか[*8]。$W_G < \infty$ の時、連続する W_G 個の整数からなる集合 I をなんでも良いのでとる。G の直和分解としての表示 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考える。W_G の定義より任意の $\lambda \in \Lambda$ について $B_\lambda \cap I \neq \emptyset$ となる。よって、属す直和成分の添字を取る写像 $I \to \Lambda$ は全射。I は W_G 元集合であり、Λ は N_G 元集合であるので示された。 □

N_G の値に依らず、等式が成立するようなジャグリングが存在することは簡単に確認できる。有限の場合は常に同じ高さに投げれば良いし、無限の場合は $N_G = \infty$ なる G を挙げれば良い。この定理から、特に次が成立する。

Corollary 5.1 (有限腕力なら有限ボール)**.** 有限腕力ジャグリングは有限ボールジャグリングである。

従って、有限の腕力と有限の試行回数しか持たない人間は有限個のボールしか必要としない。では、逆が成立するかが気になる。しかし、任意の腕力が実現可能であることの証明の際に与えた例は無限腕力の有限ボールジャグリングであったので、逆は成立しない。

また、この二つよりも強い形の次の定理が成立する。この定理は、導入で書いた有限数列のジャグリング数列でのボールの個数の公式の一般化である。無限腕力については言及できないが、有限腕力の場合は数列としてのジャグリングからボールの個数が直接計算できることを意味している。

Theorem 5.2 (ボールの個数は高さの平均)**.** 有限腕力ジャグリング G について、数列としての表示を

[*8] 順序は $\omega + 1$、つまり正整数に関する通常の順序に形式的に最大元 ∞ を加えたものとしている。

$\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ とすると、

$$N_G = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

が成立する。

Proof. $i \in \mathbb{Z}$ に対して、$j < i \le j + a_j$ なる $j \in \mathbb{Z}$ の集合を J_i と書くことにする。J_i は直和分解としてのジャグリングで各添字に対して i 以前で最後の元を集めたものなので N_G 元集合である[*9]。$n > W_G$ の時この集合を使って式を変形すると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} |J_i \cap [1,n]| \\ &= \sum_{i=1}^{W_G} |J_i \cap [1,n]| + \sum_{i=W_G+1}^{n} |J_i \cap [1,n]| + \sum_{i=n+1}^{n+W_G} |J_i \cap [1,n]| \\ &= \sum_{i=1}^{W_G} |J_i \cap [1,n]| + (n - W_G)N_G + \sum_{i=n+1}^{n+W_G} |J_i \cap [1,n]|\end{aligned}$$

を得る。最後の式の第 1,3 項はどちらも上から $W_G N_G$、下から 0 で抑えられるので、不等式

$$(n - W_G)N_G \le \sum_{i=1}^{n} a_i \le (n + W_G)N_G$$

を得る。n で割り極限を取ると求める数式が得られる。 □

この定理では $1 \sim n$ の平均をとったが、有限腕力である限りは n 個の連続する区間であれば証明の中の不等式は成立するため同様にボールの個数を求めることができる。直和分解の個数である N_G が好きに選んだ区間の高さの平均から決定されることは面白い。この定理は計算できることよりボールの個数が定まるために必要な情報に言及していることが嬉しい。

6　多人数でのジャグリング

数列としてのジャグリングから腕力を、直和分解としてのジャグリングからボールの個数を定義し、その関係を議論してきた。写像としてのジャグリングからはどのような概念が定義できるかを考えてみると、多人数でのジャグリングに対応していることがわかる。

Definiton 6.1 (ジャグリングの構成)**.** ジャグリング G, H について、それぞれの写像としての表示を g, h とすると、$h \circ g$ を G と H の合成といい HG とかく。

これは、二人でのジャグリングに対応している。ジャグリング G をする人とジャグリング H をする人が高さを変えず単に相手に投げている状況を考えれば良い。三つ四つ合成しても同様に三人四人のジャグリングに対応する。例えば、数列としてのジャグリング $\ldots, 2, 2, 2, \ldots$ とジャグリング $\ldots, 3, 3, 3, \ldots$ の合成は $\ldots, 5, 5, 5, \ldots$ となる。この例では有限ボールのジャグリングと有限ボールのジャグリングの合成で有限ボールのジャグリングになっている。一般にこれが成立するか知りたい。実は次が成立する。

[*9] 直感的には、J_i は時刻 i の時点で空中にあるボールの投げられた時刻を集めた集合である

Theorem 6.1 (合成のボールの個数)**.** 有限腕力ジャグリング G, H について、$N_{HG} = N_H + N_G$ である。

Proof. ジャグリング G の数列表示を $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$、ジャグリング H の数列表示を $\{b_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$、ジャグリング HG の数列表示を $\{c_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ とする。この時 $c_i = a_i + b_{i+a_i}$ であるので $\sum_{i=1}^{n} c_i$ を上下から評価し

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) - W_a W_b \leq \sum_{i=1}^{n} c_i \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) + W_a W_b$$

を得る。n で割り極限をとれば求める等式を得る。 □

従って、有限腕力の時はボールの個数は合成と整合性を持つことがわかった。系として、合成で有限性が保たれることを書いておく。

Corollary 6.1 (合成と有限性)**.** 有限腕力ジャグリング同士の合成は有限腕力ジャグリングであり、有限ボールジャグリング同士の合成は有限ボールジャグリングである。

Proof. より強い主張である $W_{HG} \leq W_H + W_G$、$N_{HG} = N_H + N_G$ からわかる。 □

7　予想

いくつかテーマになりそうなことを書いておく。まず、複数人でのジャグリングが合成という形で一人でのジャグリングと同じ概念で記述できた。逆に一人でのジャグリングの分解を考えるとどうなるのか。ジャグリングを $\mathbb{Z}$ の置換群の元とみるような代数的な考察が一般にどのくらい面白い結果を出すかに興味がある。群に広げるともちろん過去にボールを投げるような元も考えることになるし、直和分解としての解釈はもはや使えなくなる。有限腕力の情報は移動距離の有限性とすれば部分群を定めるし、周期的なジャグリングも部分構造を定める。

また、もう少し解析的な問題もある。ボールの個数は高さの平均であるという定理は無限腕力でも成立するのかという問題がある。これはすぐに破綻する。なぜなら有限ボールで無限腕力のジャグリングであって主張の無限級数が収束しないものが更生できてしまうからである。何か弱い形での定理はないだろうか。