

# 数学的であったり数学的でなかつたりする疑問

hora-algebra

2020年9月18日

生きていれば疑問が出てくるわけで、それをメモすることにした。数学的なものも数学的でないものもあるし（ただ比較的数学寄り）、具体的なものも具体的でないものもある。考えればすぐ解決されるものもあるだろうしもしかしたらそれなりに難しいものもあるかもしれない。ある程度分類していく。解決したものには!!!をついている。ほとんど to do リストみたいなやつもある。

## 目次

1	数学:曖昧	1
2	数学:具体的	13
3	数学以外	19
4	ネタ	20

## 1 数学:曖昧

**Question 1.1.** “Universal category” のようなものは定義できるか

集合に構造をのせた数学的対象 (concrete category で記述される類) を全て含む圏として考えられるのは何か。concrete category 全ての直和みたいな (size matter 的にヤバい) 安直な案から意味のある案まで考えて。中途半端な構造に対してちょうどそれを捉えてほしい。 $(\text{Set}^{\text{Set}}$  はどんな (Large) 圏??)

**Question 1.2.** 関係の圏はどのような性質を持つか

2-category やろうな

**Question 1.3.**  $!!f : X \rightarrow Y$ :function で  $B \subset Y$  の時の  $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$  を categorical に書け

集合演算、幂集合とかいう激偉関手圏とその間に誘導される 3 つの関手 (とその随伴関係) でかなりうまく記述されがちなのでこれもうまくいって。後、 $f: X \rightarrow Y$  と  $B \rightarrow Y$ : inclusion の pull back に関する Beck-Chevalley condition の特別な場合ってことがわかった。

**Question 1.4.** 同値関係と algebra を統一的に記述して。

集合上の代数の剩余が良い（演算と compatible な）同値関係で記述されるわけだが、良い同値関係と良い部分代数が同一視されている文脈がある。群なら正規部分群で、環なら両側イデアルである。良い部分代数（これはある意味で特別な元（0 や 1）の存在によって可能になっている）より良い同値関係の方が一般的な記述をしやすい。集合上の自明な代数構造として集合自信を捉えた時、同値関係はこの文脈での良い同値関係と一致しているはず。他の圏で一般化して、“良い同値関係”が“良い subobject”と対応するような圏について考察して。

**Question 1.5.** 関係の圏において、順序や同値関係などはきれいな特徴づけを持つか

根拠なし

**Question 1.6.** Set では同値関係は (dom 側の) 写像で定まるし、同値関係でも定まる。代数なんかを見ると良い同値関係と対応している。この二つの関係を調べる。

**Question 1.7.**  $\text{id}_{\text{Set}}$  同士のコンマ圏から同値関係つき集合の圏への関手を考えて

**Question 1.8.** 体の拡大  $L/K$  について  $L$  を自然に  $L$  の  $K$  ベクトル空間としての自己線形写像がなす  $K$ -algebra に埋め込んで。群のケーリーとの対応は。モノイダル圏のモノイドについて記述して

**Question 1.9.** 互いに素という概念、 $\lim$  が initial がち。どこまで言えるか（例えばイデアルは）

**Question 1.10.** いろいろな形の  $\lim$  をとる関手を作つて。diagram の圏

**Question 1.11.** 有限群の表現論。class function から  $1 \rightarrow 1$  を作る話の Categorical な解釈

$\text{Group}^{\text{op}} \rightarrow \text{CAT}$  を考えて

**Question 1.12.** monoid  $N$  について  $K[N] - \text{Mod}$  を考えると。随伴だけでなく豊穣圏の目線から

**Question 1.13.** poset の幂集合による表現定理は何か。真偽値-enriched category としての米田の視点から

**Question 1.14.** 上に関して、 $Q \rightarrow O(Q)$  は？

**Question 1.15.** wff を algebra として monad 的に解釈して

**Question 1.16.** poset を全順序にする話、埋め込み定理の観点から

**Question 1.17.** 全射をつかつて Cardinal の比較をする時、弱い公理系 (AC ないとか) だと何が起こるか

**Question 1.18.** !!!Semilattice と binary product を持つ poset は射も含めて同じか

NO。poset hom の方が多い。

**Question 1.19.**  $[0, 1]$  の universality は

context の Epilogue に coalgebra として載つている。ホモトピー論の path を作るものとしての普遍性。

**Question 1.20.**  $R - \text{alg}$  から Set への忘却をいくつものルートで辿り（モノイドや  $R$ -Mod や Ab や Ring など）、左随伴で帰つてくる図をかけ

**Question 1.21.**  $V:K\text{-vect.sp}$  について  $V' \leq V, W \leq W' \leq V$  なら  $(V' \cap W) + W' = (V' + W') \cap W$  なることを束論的に書いて

**Question 1.22.** アーベル圏を知らないが、射の和は(直和を介した diagram)で書けるものなのか

**Question 1.23.**  $V:K\text{-vect.sp}$  について  $W_1, W_2, W_3 \leq V$  とすると  $(W_{\sigma(1)} + W_{\sigma(2)}) \cap W_{\sigma(3)} = (W_{\sigma(1)} \cap W_{\sigma(3)}) + (W_{\sigma(2)} + W_{\sigma(3)})$  は  $\sigma \in S_3$  の取り方によらないことを束論的にかけ

**Question 1.24.** rank を categorical に書け

**Question 1.25.** 有限集合や有限次元ベクトル空間の  $(\text{mono} \Leftrightarrow \text{epi}) \Leftrightarrow \text{iso}$  という性質について。有限性万歳

**Question 1.26.** 任意の subobject が直和因子になる圏について(集合やベクトル空間)

**Question 1.27.** 体の拡大について、トレースの contravariant な functoriality

?

**Question 1.28.** 前層は代数か

層は前層の代数ですが。前層は、、モノイド上ならええんやけどそもそも忘却は何。

**Question 1.29.** 無限和のある代数構造で free なものは

**Question 1.30.** 形式的幕級数環が自由(数学用語)になれる圏を探して

イデアル付き R-代数の圏を介して完備化考えられる?

**Question 1.31.** limsup を categorical に書いて

colim の  $\lim_{\text{diagram}}$  の列を考えて

**Question 1.32.** 部分分数分解の algebraic な構造、特に線形空間の直和分解としての構造を調べて。

**Question 1.33.** 位数や最小多項式(忘却を表現するやつからの射の Ker を生成の気持ち)が必ず存在する代数とは

**Question 1.34.** !!!乗法群取る関手と最大 groupoid とる関手のアナロジー

monoid を介することで多対象モノイドとしての圏とモノイドのアナロジーからくる。

**Question 1.35.** 複積を持つ圏について hom の行列表示を

やったようなもんだが

**Question 1.36.** 組み合わせゲームの圏で思ったが、同型よりゆるいホモトピー同値みたいなものを考えるべきでは

はい 2-category やろう $\infty$ -category やろう。

**Question 1.37.** well-ordered set 集めても well-ordered なの categorical に書いて。

**Question 1.38.** !!!cpt と Hausdorff って dual で書ける??

ultrafilter で実現

**Question 1.39.** ultrafilter の階層づいた計算、 $\cup_{n=0}^{\infty} U^n(S)$  の間の随伴で書けないか

**Question 1.40.** 点列と収束のモナドを考えられないか

**Question 1.41.** !!!ヒルベルトの零点定理もガロア対応も最小多項式も hom と作用される対象の sub らの間の随伴から来ないか?

一般論できた (二変数命題から誘導されるガロア connection とそこから誘導される圏同値)

**Question 1.42.** 安定化群と category of elements

群の作用の category of elements を取るのか、なるほど

**Question 1.43.** 一般的文脈 (おそらく豊穣圏?) でモノイドは台対象の End に埋め込めるか

Set(普通のモノイド) は台集合の自己写像 (群ならケーリー) Ab なら環の積が Abel 群としての自己準同型を作るし、Vect なら代数が台となる線形空間の自己線形写像らの End に埋め込める。

**Question 1.44.** !!!(半?) 自明なゲーム  $pt \rightarrow \mathbb{Q}$  や  $pt \rightarrow \mathbb{R}$  を同一視するにはどうすればいいか

dom に誘導される順序を見る

**Question 1.45.** !!!2-variable の命題について幕集合の間に mutually right adjoint が誘導されるか

正しい。ヒルベルト、ガロア、最小多項式らの統一的な表現

**Question 1.46.** 2-variable 命題からくる圏同値に共通する構造は何か

**Question 1.47.** 作用の一般論を作って

まずはモノイダル圏のモノイドの作用から勉強

**Question 1.48.** vect.sp を fix して、各 subsp に End を載せる構造はどんな性質を持つか。最小多項式に注目して

制限できないの厳しそう。Vect(subsp, 全体) を許して

**Question 1.49.** seg 木に乗る構造は何か (性質を型に依存せず記述するにはどうすればいいか)

seg 木に乗る構造はモノイドとよく言われるが、大域性はいらないので圏でもよく、unit はいらないので半圏でいい。誠実に答えるなら結合則を満たす何かである。数学では型 (type theory) におけるそれとはとりあえず関係ないとしている) に性質をつけて定義するが、今回のように性質が先行する場合の言語があって然るべきだ。

**Question 1.50.** 随伴の分解をすると数学的な理解とそれに付随する興奮が得られ楽しいのだが、随伴の分解に関しての理論を作れ。特に既約な随伴を考えろ。

これ、安直な既約性だとヤバイ（例えば initial と terminal を持つといくらでも長い分解が簡単に得られる）

**Question 1.51.** 上の一般化として、多対象モノイドとして圏の射に自然に既約性を導入する。これは何か。  
例えば環を一点 Set(or Ab)-category とみた時の規約性が対応しているかを考えよ。

**Question 1.52.**  $M_n(K)$  を  $GL$  による共役作用で割った時の不変量として  $\det$  や  $\text{trace}$  や固有多項式がある  
が完全な不変量がほしい

代数閉ならジョルダン標準形がそれなんだっけ

**Question 1.53.** concrete category を二つ持ってきて、Set へ忘却させる図式の pull back ってどんなの？

**Question 1.54.** 距離空間の圏（射はいろいろ考えられる（連続とか、距離が増加しないとか）少なくとも連続で）から Top への忘却は随伴持つか

**Question 1.55.** 全ての (size) 圏は bicomplete な (size) 圏の full subcategory か

size matter が本質的。そうでなければ米田埋め込みがある。

**Question 1.56.** BicompleteCategory → Category は随伴を持つか

dom の圏の射はいろいろ考えられる。（パッと自然に思えるのは bicontinuous functor だが）

**Question 1.57.** connected な有限次数のグラフは可算個の頂点しか持たない（easy）が、このことの説明を可算な（ある意味自由な?）グラフからの全射により示せ

**Question 1.58.** !!!離散力学系にポテンシャルを定義して

した

**Question 1.59.** Hom には dom や Cod の Aut が作用している。割って考えられないか

力学系ならパラメータ取り替えになるし、線形代数なら基底の取り替えである。

**Question 1.60.** epi で移る性質（cpt とか各種有限性とかなんか小ささ）や mono で引き戻せる性質（Hausdorff とか可換性とか global でない性質）について的一般論を

reflective subcategory をさだめる時について。安直は層 in 前層で反例

**Question 1.61.** seg 木と結合則のように、性質とアルゴリズムの対応を考えて相互の理解を深められないか。型のない性質への言及として、ある種の計算モデルが使えないかと言っている。

**Question 1.62.** 忘却が表現可能な完備具体圏について。

位数とか最小多項式みたいに、元に対応して忘却を表現する対象の sub がほしいなら、zero-object ほしくないか。完備なくても equalizer があればいい。忘却だけでないよね、いろいろやってみて。

**Question 1.63.** ユークリッド空間に埋め込める距離空間について

**Question 1.64.** !!!いい感じの閉曲線が平面を有限個に分けたとき隣あう領域を別の色に塗れるか

回転数の偶奇

**Question 1.65.** !!!正則関数の積分が fundamental groupoid の表現を与えることを示せ

それどころか微分方程式について授業でやりましたね(う)

**Question 1.66.**  $\text{Top} \rightarrow \text{Groupoid}$  はどの程度 surj か。

objectwise surj ではない。sizematter 無視しても essentially surj でもなさそう。equiv of cat 入れたら? 自明な制約は?

**Question 1.67.** diagram chase の homotopy みを正当化して

2-category ですね。実際そう、勘大切。

**Question 1.68.** 相対エントロピーは距離を定めるか

何これ、情報数学忘れた

**Question 1.69.** 行列式への categorical な言及をして (どの圏で考えるか)

モノイドの可換化が存在するかと関わりそう

**Question 1.70.** Sehur functor って何

**Question 1.71.** 線形代数の世界 A.3.6.1 と A.3.6.2 の関係書いて

**Question 1.72.** 作用の圏の圏同値からの復元

豊穣圏も含めて。森田同値の話に関連して。淡中再構成とかがそれっぽい

**Question 1.73.** Vect への関手圏が代数の上の加群なの、豊穣圏して書ける?

多元環の表現とか?あと、豊穣圏一般よりアーベル圏の話なのかも (kamo) しれない

**Question 1.74.** 置換群や自己写像モノイドのモノイド環を考えて、行列式との関係を見て。

**Question 1.75.** 忘却関手を定式化して

concrete category のように (ここは主義によるが) 型にしてしまってもいいし、faithful のことだと思ってもいいし、monadic のように特殊な場合について言及してもいいし、概念の定義に回って記号的に定義しても良さそう

**Question 1.76.** Yoneda embedding が圏同値を与えることはあるか (sizematter 的にやばそう)。豊穣圏ならどうか

**Question 1.77.** 豊穣する圏の間の良い関手は豊穣される圏のなす 2 圏の間の 2 関手を誘導して

まあするやろなあ

**Question 1.78.** !!!豊穣圏して、double dual への埋め込みがかけたら monadmonad していく

対称モノイダル閉なら随伴隨伴するからそうじゃん (対象決めれば mutually right あるから誘導される monad をとると double dual monad でしょ)

**Question 1.79.** 生成の一般論楽しかったけど、測度空間の完備化もふくむ物作って

**Question 1.80.** comonad の coalgebra の例、順序集合と coreflective subcategory くらいでしかやってないので coalgebra だって例を出して

**Question 1.81.** ゲームの最適性と量化子。量化子、ゲームを使って説明されがち、書いて

**Question 1.82.** 線形代数の隨伴写像、形から隨伴なんだけど (なんなら語源なんじゃね)、enriched したら無理に関手の隨伴にかける?

**Question 1.83.**  $\text{Ker } f^* = (\text{Im } f)^\perp$  やその dual, 圏論的には何

**Question 1.84.** 実線形空間と二乗すると  $-1$  になる自己線型写像の組と複素線形空間が対応するらしい。これら整備すると綺麗に書けるはず。

やっぱ Vect-圏でえいえいとしたい

**Question 1.85.**  $\{(z, z^{-1}) \in \mathbb{C}^2 \mid 1 < |z| < 2\}$  ってどんな形してる?

homeo じゃなくて捻れ方見て (なんの訓練だ (やるだけ

**Question 1.86.** !!!ある種の命題の集合における closure operator を考えられるのでは

当時考えたかったの、一般に順序集合の ideal の話だった

**Question 1.87.** !!!非調和比から。作用の不変量は一般的に書けるな

n-transitive を使って書いた

**Question 1.88.** 可算無限この情報源に関してハフマン符号を考えて

**Question 1.89.** ティラー展開の計算で剩余環っぽい計算することをちゃんと収束幕級数間を形式的幕級数環に埋め込んで正当化して

**Question 1.90.** 代数からの忘却と、 $n$  乗直積関手使って  $n$  変数演算書いて

**Question 1.91.** 二項演算つき集合の圏について調べてよく見る圏を埋め込んで

**Question 1.92.** !!!商集合の普遍性、同値関係付き集合の圏と集合の圏の間の隨伴から記述できますね

はい

**Question 1.93.** 剰余代数の hogehoge と元の代数構造のうち hugahuga を含む hogehoge が対応するやつ、一般的に書いて

**Question 1.94.** 射が monoepi と canonical に分解される圏について

**Question 1.95.** !!!closure を公理的に書いて

このとき求めていたことはやった

**Question 1.96.** 写像が幂集合の間に誘導する 3 つの関手とその間の随伴について。unit counit の性質と随伴関手の性質の対応を使ってわかるまとめをまとめて

**Question 1.97.** “closed function” が monadic になる現象について

**Question 1.98.** monoidal 圈があったら free monoid monad ってあるの？

**Question 1.99.** 同値関係付き集合の圏と集合の圏の間の 3 つの関手とその間の随伴について。monadic なものがあるか調べよ

**Question 1.100.** 部分空間つきベクトル空間の圏から Vect へ伸びる剩余関手と忘却関手について自然変換を決定して

**Question 1.101.** !!!写像から誘導される adjunction は idempotent か

Galois Connection は一般にそう

**Question 1.102.** 雪江整数 2 より、イデアルのノルムを次数つき代数 (monoid) の観点から整備して

**Question 1.103.** 高校の時の GSC 研究、複素解析 I(II) の後なのでもっと進められるのでは

**Question 1.104.** 線型代数の随伴写像、bilinear と bifunctor 対応させたら同じ図式よな

**Question 1.105.** ハミング重みとノルムのアナロジーってどこまで成立するのか

**Question 1.106.** 整数論で積の Tr で双線形形式作ったけどどの程度拡大体は復元されるのか

**Question 1.107.** 単位区間の商位相ってどこまで決定できるんだろうか

**Question 1.108.** !!!連結空間の直和でかける位相空間、既約分解できるよね

既約分解と、既約対象から圏を復元する話、書いた

**Question 1.109.** 代数的に (多項式の) 微分考えたりするけど、(有理関数も考えて) 代数的に log 導入して

**Question 1.110.** Euclid の互除法、今ならもっともっとうまく書けるんじゃないかな

環論の意味でなくて、もっと

**Question 1.111.** 整数論で完備化テンソルすると分解するやつ、Natural iso として書きたいよね

**Question 1.112.**  $F_2$  の積でのモノイド、モノイドとしての右普遍性は？

可逆性に言及して。

**Question 1.113.** 外積代数、 $K$  代数の圏を経由して、交代的  $K$  代数の圏と Vect との間の随伴で書いて

**Question 1.114.** 分母が  $n$  の分数の少数の循環部分がいくつあるか。一般に  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  に関して  $m$  倍写像が作る力学系の連結成分について。一般に半環圏の理論を

**Question 1.115.**  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  の構造を調べて

**Question 1.116.**  $S \cap f(T) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists t \in T, f(t) \in S \Leftrightarrow f^{-1}(S) \cap T \neq \emptyset$  だけど例の随伴的に何

**Question 1.117.**  $\mathbb{R}^4$  だと (一次元的な) ヒモは解けるの? 次元を変えると?

**Question 1.118.** !!!群作用があると直積集合にも作用する。 $n$  乗しても自明な分解を除いて transitive になる条件を考えよ

n-transitive だ

**Question 1.119.** 数列とかを複素関数に載せるのどんな原理なんだ。解析的組み合わせ論とか

**Question 1.120.** 天秤の問題、情報理論的な一般論作る

**Question 1.121.** 自然数と剩余関係の圏から Ab への反変関手

**Question 1.122.** 位相代数から代数構造忘れる関手の monadicity

**Question 1.123.** 群を diagram で書いて (monoidal でも)。 $\text{inv}^2 = \text{id}$  とか書いて

**Question 1.124.** いちばんじゅうなにこうえんざんは

**Question 1.125.** 圏 1 から Set への singleton を pick する関手の (いろんな関手に沿った) 右 Kan 拡張計算して

**Question 1.126.** 左右の Kan 拡張はいつ一致するか。

例えば fully faithful な関手に沿った各点 Kan 拡張は本当の拡張になっているけど、このときはどうなってる?

**Question 1.127.** 金額を fix すると、その実現方法 (硬貨の分布。整数の分割) と分割に関して poset ができるが、これを調べて。

日本円なら max は 1 円玉で持つことで、min がありこれが嬉しい。 $k$  円玉が必ずあれば分割数。硬貨の種類に関して順序集合間の関係も考察できる

**Question 1.128.** 形式的な直和の圏、もっと diagram の圏の視点から書いて。

直和の contravariant Hom functor を利用して公理化して

**Question 1.129.** で、結局米田ってなんなんだ (いろんな圏論のいろんな米田を見るぞ)

context だけでもいろんな視点から米田を解釈したけど、もっともっと

**Question 1.130.** 圏の homotopical 構造が引き戻されるの、逆像で  $\sigma$ -alg や topology が引き戻されるのに似てるよね。homotopical 構造自体生成可能だし、Cat とかいう CCC で同じ議論を模索すべき。

**Question 1.131.** 数学的構造とアルゴリズムの対応あっていいよね

Seg 木と結合則の話だったけど、CS の三位一体とか関連させてさ

**Question 1.132.** 組み合わせの数から組み合わせ的対象を復元できても良くないか

カタラン数見たら例の木とかいろいろ書けるものあるし。何かの幕級数を介して何か代数構造作れんかくらいの意味

**Question 1.133.** !!!連続群  $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$  についてその集合への連続作用の圏を決定しろ

位相群の(離散)集合への作用を考えてる(SGL)。 $\mathbb{Q}$ は死ぬらしい。 $\mathbb{Z}_p$ はopen subgroupがたくさんあるので。まあこれはしたと言って良さそう(siteの構成をして(SGL参照)explicitな形もみた。ちなみに $\mathbb{Q}$ は死ぬ)。

**Question 1.134.** 随伴は関手圏の間の随伴を誘導するが、関手圏にいって初めて随伴を持ったりする。詳しく調べて

元々 adjoint あれば一致すること調べた。大域切断と定数層の随伴から。開集合でなくて一般の圏だと  $\lim$  になってもはや“大域切断”に一見見えなくなる

**Question 1.135.** terminal object付き圏の object 付き圏への full embedding は随伴を持つか。スライス圏との関係を考察して

terminal で右からスライスする(かわらん)ことを考える

**Question 1.136.** !!!preorder, くそな圏で enrich されてると言える?

クソじゃない。真偽値 enriched

**Question 1.137.** Heyting algenra についても stone duality みたいなことできる?

Esakia duality とかいうのあるらしい

**Question 1.138.** 情報からなる空間としての Stone space に興味がある。

例えば群についての(良い)条件を集めた set  $A$  と  $P(A)$  のうち実現可能なものを見て

**Question 1.139.** !!!subobject の圏が圏同値なら元の対象は同型か

んなことないじゃろと。まあ一応書く。もちろんそんなことはなくて  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  in Group とか。これが成立するような圏はどんな圏か見るのはなにか見えそう。

**Question 1.140.** 群の公理で左 hogehoge しかいらないって話の一旦  $e$  加える感じ monoidal 圏での  $e * e * A$  の話に似てないか。

一般的に記号的に可能であることと直感の対応がわかってない

**Question 1.141.**  $\mathbb{C}^n$  を  $n$  次対称群(による成分の置換)で割った空間も  $\mathbb{C}^n$  と同相。多項式の係数と根を使う。代数閉体についてどこまで言えるか

**Question 1.142.** 開集合の poset から元の位相空間は復元できないが、分離公理とかいろいろ入れたらできるのか

そば。近いうちに。

**Question 1.143.**  $\mathbb{Q}[x]$  の元であって整数を代入すると必ずある整数で割り切れる現象、うまく書けそう。

例えば  $x$  の  $k$  回下降階乗ベキは  $k!$  で必ず割れる。今回は組み合わせ的な現象が隠れているわけで、対称群の作用でかける。群の演習で同じ現象を何回か見たので。下降階乗幕がアーベル群としての基底をなす。有限群の有限集合への作用に関して  $n$  色で (群作用で写り合うものは同一視する) 配色数は多項式になり、今回調べる対象の良い例を与える。

**Question 1.144.** (位相) 群の作用、作用される点を空間に配置したらタングルっぽい現象起きるよね

$D_\infty$  の円への作用を手で表した時の話

**Question 1.145.** functor としての測度から色々書いて

幕集合への左右の Kan 拡張が一致する時を集めたのが測度の完備化だった。

**Question 1.146.** 順序集合、Heyalg-enriched category の underlying category と見るべきなこと多いな

厳しすぎる順序だなあ。 $\mathbb{R}$  値 (conti) 写像の順序をふやかす。a.e. な順序は? (null-set ぶんの差を除いた measurable set のなす代数を考え)

**Question 1.147.** Syntax と Semantics の duality 勉強して

context の参考文献にある。各種 duality に興味ある。RIMS とかでなされているらしい

**Question 1.148.** object が  $\mathbb{N}$  である圏まとめを作って

Fin から持ってくるのはもちろん、poset としても、Matrix も重要 (線形代数の諸々を書いて)。 $\mathbb{R}^n$  の原点付近を見る事で (そして stalk の時のように割ることで)  $C^n, C^\infty$  も議論して (写像としては多項式とともに考えられる)。その間の関手 Jacobi matrix の functor の性質として陰関数定理や逆写像定理を記述して。学部 1,2 年の数学の (この視点からの) 要約のようなことをして。

**Question 1.149.** 上に関連して、monoidal structure を考えれば functor の conservativeness としての IMT から abstract nonsense で IFT 示せないか

**Question 1.150.** 全てのリーマン面は cpt リーマン面に埋め込めるか。埋め込んだとして、像の complement が “null-set”(第二可算周り調節して) になるようにできるか

**Question 1.151.** (internal) group の圏からの忘却は monadic なのか

未来~~~。monoidal なのか直積なのか hoge

**Question 1.152.** ルベーグ積分してると、 $\mathbb{R}$  は実体として細かすぎる気がしない?

**Question 1.153.** 部分写像を中心として諸々の数学書いて

**Question 1.154.** !!部分写像の圏と点つき集合の圏は圏同値だが、部分連続写像の圏に似た圏同値はあるか

いい感じに closed point 入れたらできた。

**Question 1.155.** !!!連続版 Hex の勝敗について

差から  $[0, 1]^2 \rightarrow S^1$  を構成し基本群をみた

**Question 1.156.** 3 人でカブったら負けゲーム、戦略を考えて

YouTube から。二人が協力したらどうしようもなさそうに見えるけど、残り一人が裏切り宣言をすることうまく打開できないか。書いて

**Question 1.157.** 二変数命題からくる Galois connection、Topos で書いて。Heyalg でなくて CCC とか monoidal でかなり書ける!?

もっと一般的な現象のはず

**Question 1.158.** 群の族であってどの相異なる二つも一方 (と同型な群) を部分群として持たないようなものを作れ。できるだけ大きいのを作れ。

可算個なら素数位数の群集めればいい。もっと。

**Question 1.159.**  $\mathbb{Z}$  の積、普通に (原始再帰的関数としての def を見た時に) 環になること非自明だよね。

環とか、元を辿れば Ab とか、なんなんだろうね

**Question 1.160.** local には対称な手法で cyclic なデータを作れるか

東海オンエアから。ジャンケンで全順序作ってからつなげていた

**Question 1.161.** 最左簡約戦略とか冪零群の降中心列とか可解群の導來列とか、順序集合的には同じことしてそう。圏としても。

圏なら Ring の零環とか優秀。圏の合流性と Church Rosser とか、順序や有向グラフに関して hogehoge しがち

**Question 1.162.** 圏論の概念、いろんな解釈されがちでそれぞれ有用なので教育的な文章書きたいな

**Question 1.163.** tangent bundle とる自己関手、monad になってその代数は葉層構造と関わるらしい。学んで

**Question 1.164.** disjoint なら “和” を保つ構造をうまく書いて

数論的関数や加法的集合関数とか。poset っぽいのが多いかなあ

**Question 1.165.** 自身と相似な二つの図形に分解される  $\mathbb{R}^2$  の subset について

ほう？？？(4 つなら簡単だがと言てる。)(フラクタル次元的な話がしたいんだろうか)

**Question 1.166.** monoid からの functor はよく考える(作用)が、monoid への作用を自然に考えている文脈にはどんなものがあるか

重みつき有向グラフを (free) 圏にしたとき、path のコストは Category と DirGraph の自由忘却随伴から

やってくる自然なモノイドへの関手ですね。射に量を定義したい文脈が多そう。後はモノイドの集合への作用の Category of elements からの忘却とか

**Question 1.167.** 非可換環が対象で左右から作用される加群が射でテンソルが合成の圏みたいなの (合成は up to iso で) 考えられそうよね

きれいに書きたくなったらかこう。Ab でなく Set で先に実験して

**Question 1.168.** 確率的な力学系の安定条件

受験典型的の確率漸化式、線形代数の背景でちゃんと書いておきたいよね。離散時間マルコフ連鎖、実は初めて線形代数的な技術を (表面的には線形代数でない文脈で) 使った思い出のテーマ (サイエンスキャンプ)。

**Question 1.169.** めっちゃ愚直な疑問だけど、Grothendieck topos に対する etale space 的対応物はうまく作れないの?

位相空間的でない空間概念も扱えるのが偉いんだと言われたらそうなのかもしれないけど。まあこれは勉強して色々考えますこれからという案件

## 2 数学:具体的

**Question 2.1.** 有向グラフの圏から前順序集合の圏への path をとる関手は左右それぞれについて随伴を持つか

間に Cat を挟んで Free をとってから潰す関手だと思うと埋め込んで忘却するのが右になってないか

**Question 2.2.** !!!free semilattice を計算しろ

set of all non-empty finite subsets

**Question 2.3.** free Lattice を計算しろ

Notes on Lattice Theory とかにある。

**Question 2.4.** !!! $\hat{\mathbb{C}}$  と  $S^2$  の同相を示して

示した

**Question 2.5.** 共役な調和関数の存在と定数のぞく一意性とかいうやつを示して。单連結領域

**Question 2.6.** !!!次元定理を split から示せ

した。

**Question 2.7.** ジョルダン標準形を单因子論で説明するやつ復習して

**Question 2.8.**  $C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f \rightarrow \{f^{(n)}(0)\}$ :surj を示せ

**Question 2.9.** !!! $GL(2, \mathbb{C})$  の  $\hat{\mathbb{C}}$  への作用の安定化群を調べて

自己同型群の決定でやった

**Question 2.10.** !!!Stone-Cech compactification による Set の monad が ultrafilter monad であることを示せ

ultrafilter manad の Eilenberg Moore Category が cHaus なことも示した

**Question 2.11.** 加法群  $\mathbb{R}$  の部分群の同型類除いた構造決定して。例えば可算なら？

選択公理のもと  $\mathbb{Q}$  の無限直和であり、、、 $\mathbb{Q}$  上 vect.sp の圏は Ab を介して Group に fully faithful に右随伴で埋め込めるので...

**Question 2.12.** !!!マグマ、半群、可換マグマ、モノイド、群の包含関係を示しあり得る全ての可能性に関して例を挙げよ

やった。

**Question 2.13.** !!!他変数で微分の関手性を示せ

点付き多様体とから接空間取る関手でやった。

**Question 2.14.** !!!Monoid から Group への最大部分群を取る関手は随伴を持つか。それにつかええば R-alg と Group の間の群環乗法群随伴は分解されるか

正しい。monoid と Group は category と Groupoid の関係。実質同じ随伴。

**Question 2.15.** !!!片側逆元しか持たないモノイドってあるの?環なら?

mono と epi を考える。 $\mathbb{Z}$  の自己同型環とか

**Question 2.16.**  $\mathbb{Z}$  の可算直積は自由アーベル群か

代数学演習じゃん、やる。

**Question 2.17.** 加群のテンソル忘却随伴からくる圏同値は何か。どんな時自明でないか

局所化なら reflective subcategory になることを知っている。

**Question 2.18.** !!!群を直積するモナドは随伴から来ているか

何も知らない時の疑問。全てのモナドは随伴から来ている。

**Question 2.19.**  $\text{Ab}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  や  $\text{Ab}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  を決定しろ。

**Question 2.20.** !!!中心が一点であるような  $\mathbb{R}^2$  の open はあるか

あった。

**Question 2.21.** 微分方程式  $f'' = f^2$  を様々な条件で解け

これは何

**Question 2.22.**  $K\text{-vect.sp } V$  について  $f \in End(V)$  を fix すると、代入して 0 になるかを調べる命題で  $P(K[x]))$  と  $P(V)$  の間の両側右随伴が得られる。誘導される圏同値は何か。

**Question 2.23.**  $\forall a \in \mathbb{Z}_>, \exists b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 : \text{prime}$  か

**Question 2.24.** 群は  $\text{Set}_*$  上の構造だ。 $\text{Set}_*$  への忘却は右随伴か。そうだったとして monadic か。

**Question 2.25.**  $\mathbb{R}^2$  の自己 open conti であって、像が有界かつ星状性 (or 凸性) を保つものはあるか

**Question 2.26.** !!!正規行列の対角化可能性復習して

**Question 2.27.** 底面が長方形である四角錐の (長方形にない) 頂点付近での断面として実現される図形の決定

やるだけ、まあどんな四角形かを角について書く。ボケーっとビル見てた時のそれ

**Question 2.28.** 整域の整拡大と次元について復習

**Question 2.29.** !!! $n, m$  は正整数とする。正  $n$  角形の頂点に全部で  $m$  個の石が置かれている状況を考える。操作とは、正  $n$  角形の ( $n$  個の) 頂点から一つを選び、その頂点においてある石を全て取り、選んだ頂点の隣から反時計回りに石を一つずつ置いていくことを指す。どんな石の配置からどんな石の配置へも有限回の操作で移れるか。

元々は  $m$  は  $n$  の倍数の時を考えていたが、その理由を忘れたのでその仮定を外した。ようやく解決した。  
詳しくは <https://hora-algebra.github.io/石の問題.pdf>

**Question 2.30.** 素元を正の有限個持つような無限可換環は存在するか

**Question 2.31.** 直積ベクトル空間の次元になれる濃度は?

体に依存するのか? 可算無限はならない

**Question 2.32.** !!! $Mor : \text{Cat} \rightarrow \text{Set}$  の右随伴は存在するか

No. walking end と walking morphism をあてて矛盾。cat の colim 見やすいの initial と直和くらいだよな

**Question 2.33.** cMonoid  $\rightarrow$  Monoid は左随伴を持つか。仮に持つとしたら det はどう分解されるのか

**Question 2.34.** !!!terminal から initial に射が二つ以上ある圏は存在するか

ない。terminal から initial への射は存在すれば initial から terminal への (unique な) 射の逆射を与える。  
(zero object)

**Question 2.35.** 位数 3 のモノイドを分類して

なんで。小さい (日本語) 圏について知るのはまあいいことそう

**Question 2.36.** !!! $\mathbb{C}^n$  において多項式の非零点は open かつ dense なことを示せ

やる!!これと判別式使ってほぼ対角化可能なことがわかる

**Question 2.37.** 幂集合モナドの代数は何か

過去の自分は無限演算可能 semilattice みたいなもんじゃねと言っている

**Question 2.38.** !!!Endofunctor の圏が strict monoidal category であることを示せ  
示した

**Question 2.39.**  $Ab$  と  $Ab^{op}$  が圏同値でないことを示して

**Question 2.40.** !!!幂集合間の両側右随伴って必ず二変数命題からきている?

Yes。過去示したらしい

**Question 2.41.** !!!Poset って CCC?

はい。

**Question 2.42.** !!!split しない epi をあげて

たくさん。split epi はどこに関手で移しても split epi なので  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  in CRing とかでもいい

**Question 2.43.** !!! $Tr(A_1 \dots A_n)$  を保つ  $S_n$  の元は?

$(1, 2, \dots, n)$  で生成される位数  $n$  の部分群。そりやそうだった

**Question 2.44.** Semilattice や Lattice は Poset 上 monadic か

**Question 2.45.** !!! $\mathbb{C}$  の有界単連結領域で有限個の凸集合に別れないものはあるか

いや普通にある。なんかゴミ捨てるとき凸にしないと捨てられない遊びしててなんも考えずに書いた。

**Question 2.46.** !!!可算個の点つき連結空間をその点で潰したとき連結空間になるか

はい。

**Question 2.47.** !!!位相空間において、path-connected な相異なる二つの点は injective な path で繋げるか

そりや No ですね。Sierpinski とか。

**Question 2.48.** !!!任意の位相空間は連結な空間の部分空間か

はい。一点を入れて。

**Question 2.49.** Top の自己圏同値って id と自然同型なものだけ?

**Question 2.50.**  $\mathbb{N}$  を含む  $\mathbb{C}$  の領域は、 $\mathbb{N}$  を含む単連結な領域を含むか

**Question 2.51.** 上に非有界な全順序部分集合で任意の可算部分集合が上界を持つものは存在するか

**Question 2.52.** 二つの小圏について、Set への関手圏が圏同値なら元の圏も圏同値か

**Question 2.53.** !!!単位区間は可算無限個の閉集合の disjoint union で書けないことを示せ

示した

**Question 2.54.**  $\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x^x(1-x)^{1-x}} dx = \pi/e$  を示せ

SEG

**Question 2.55.** ユークリッド空間において、開集合の境界のルベーグ測度は 0 か

**Question 2.56.** Abel 圏は subobject classifier 持たない?

左加群の圏については示した。Abel 圏知らんけど知ったらすぐ解決する類そう

**Question 2.57.** !!!HeyAlg について、 $x \vee -$  が右随伴なことと Boolean は同値か

いいえ。biHeyting という条件。単位区間や  $\{0, 1, 2\}$ (Sierpinski space からくる) で反例。biHeyting に、pseudo-complement=co-pseudo-complement 入れたら boolean と同値になる。

**Question 2.58.** 対称群のアーベル化を考えたら unit は sgn だった。集合の Aut について一般には何になるか計算しろ

**Question 2.59.** heyting alg は  $\wedge$  によって対称モノイダル閉圏か

一般に CCC がそうなんじゃないの。近い未来やる

**Question 2.60.** !!!部分群の集合を取る関手  $\text{Group}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  は表現可能じゃないよね

はい。可能でない。 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  の部分群は 2 つだが、 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  からの群準同型は 1 つ(位数 5 の元が cod にない)か 4 つ以上(位数 5 の元が cod にある)である。

**Question 2.61.** 幂集合の濃度が等しければ元の集合の濃度も等しいか

違うって聞いた気がする。集合よく知らん。

**Question 2.62.** !!!small CCC は HeyAlg と圏同値か

No。Fin の skelton category を持ってくると poset でない small CCC である。

**Question 2.63.** !!! $S^1 \times S^1$  の open subset  $(-\epsilon, \epsilon) \times S^1 \cup S^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$  は  $\mathbb{C} \hookrightarrow \text{holomorphic}$  に埋め込めるか

いいえ。topological にだめ。non-cpt Riemann 面で  $\mathbb{C}$  に埋め込めない例

**Question 2.64.**  $\mathbb{R}^2$  の(空でない) 単連結領域は  $\mathbb{R}^2$  と同相か

オーバーキルできる定理を複素解析 II でやった気がするなあ

**Question 2.65.** Lie Group であって  $GL_n(\mathbb{R})$  の中にないやつ例出して

size matter 的な反例はやめて。第二可算とかつけとく

**Question 2.66.** !!!集合と部分写像の圏は Topos ですか

Topos 勉強前なので許して。勉強を始めたので解決。CCC は zero-object を持った途端 1 になってしまふ

(well-pointed topos を pointed topos って言い間違えると大変だねえ)。

**Question 2.67.** !!!正値 Lebesgue 可測関数の積分値は正か

Yes。0なら a.e. 0じゃない。

**Question 2.68.** monoid 環を撮る操作は essentially surj か

essentially surj でないこと示すの意外と難しかったりするよね (乗法群関手大変だった)

**Question 2.69.** Mor:Cat → Set とその左随伴について、誘導される monad とその代数を計算しろ

**Question 2.70.** 連續体濃度の Hausdorff 空間であって  $\mathbb{R}^n$  への連続写像が存在しないものはあるか。

無限次元のノルム空間とか考えて…

**Question 2.71.** !!! $[0, 1]$  上の関数について、無条件、有界変動、連續、絶対連續の論理的包含関係を (反例も挙げて) 全て明記しろ

した

**Question 2.72.** !!!始点付き戦略の圏は Grothendieck Topos か

No。Set への関手圏のいい感じの部分圏ってことしか知らないときに言ったもの。一点になるのがそっちなのはね、ダメですよ。(まず initial がない)

**Question 2.73.** !!!Hom functor の並列が faithful なことと generating set であることは同値か

同値だった。後に faithful functor 合成しちゃったりしても有用

**Question 2.74.** 圏の射のクラス  $P$  で、 $g \in P$  のもと  $f \in P \Leftrightarrow g \circ f \in P$  なるもの、dom の何かに全称量化子についてがち。うまく記述されて然るべき。

mono や faithful や etale が典型。slice 圏の性質 (例えば etale 射の圏でのスライスは Etale bundle の圏で monic の圏でのスライスは Sub) とも関連して記述して。dual も。

**Question 2.75.** 典型的な Hom set の式変形 (随伴や Yoneda 等々含む) は CAT での pasting diagram とかいうの (知らん) で色々楽に (Naturality 含めて) 書けがち。一次元的に hom set の式変形するより簡潔に (Naturality も含めて綺麗に) 書けるのでそれでまとめるべき。

最終的に Hom を Set に伸ばす diagram で全部書くわけだけど (追記: Yoneda の evaluation があったわ)、要は CAT / Set を見てる。size matter 色々気をつけて。

**Question 2.76.** スライス圏と subobject の poset のアナロジーについて

**Question 2.77.** 随伴、Hom の対角自然性が成立するケースっぽく書けそうだよね (安直には失敗するけど)

**Question 2.78.** Category with algebraic structure の間の射についての一般論を

とりあえず 2 圏勉強すべきなんだろうか (ぽい

**Question 2.79.** 随伴の既約分解、安直には厳しそう。随伴を射にもつ圏は((今回は)本質的でない問題はあるが)簡単に書いて、そこでの factorization( system)について調べてみたい

**Question 2.80.** short game、かなり strict というか構成がしっかりしていて、かなり広い公理的定義から性質で特徴付けたい。

**Question 2.81.**  $\text{Sub}(X) \cong \text{Sub}(Y) \Rightarrow X \cong Y$  なる圏ってどんなの

**Question 2.82.** CCC と環、 $0 = 1$  なら全体も (essentially) 一点という性質を共有してる。(半環圏とかいうものか何かで) 統一的に書いて

### 3 数学以外

**Question 3.1.** 現象に関して(調べたい性質に着目した時)普遍的なモデルは考えられるか。

**Question 3.2.** 上に関連し、モデルや現象というものをうまく定式化してほしい

**Question 3.3.** 情報とは何か、(授業でやった情報理論的な観点ではなく)現象とモデルの観点から定式化できなかいか。

**Question 3.4.** 自然性について。自然性は何かのモデルや実現からふると言えるのか

記号的議論がうまく回ることに関して、何かモデルや実現の存在から説明してほしい。

**Question 3.5.** “実在”によって記号的議論がうまくいく話数学的に書けないかなあ

視覚的イメージに沿って証明されることとか、適切なモデルをとると自明になる例とか(ジャグリング、補助線とかもそうかも)あと、証明できることと正しいことの対応(よく知らん)とか。後は最近のだと型がつく $\lambda$ -term の正規性とか

**Question 3.6.** 難しさってよく考えるとかなり非自明な概念ですよね。いくつかの視点から定式化してください。

例えば計算量のオーダーとかも一つの定式化です。

**Question 3.7.** (局所的には自明な)ルールが(複雑な)力学系を作ることがある。ルールや原理から力学系を作って

微分方程式とかはもちろんそうなのだが、それを具体例に含んで、十分一般的に、本質を掴んで

**Question 3.8.** 情報を持つことで不利になるゲームを作れるか。また、これの答えが No になるような綺麗なゲームの def はあるか?

**Question 3.9.** 力学系と安定化とポテンシャルらへん書いて

**Question 3.10.** (進化とかで)良いことがわかっている実体にモデル乗りがちでは

**Question 3.11.** よくわからんもんの次元(当然 undefined)よくわからんくね。色とか波長見れば一次元み

あるけど二次元的に書いたり三次元的に書いたりするよね

**Question 3.12.** 陸半球の中心が陸にあるかという疑問を考えられるが、これは陸の形の複雑性に言及できないか

**Question 3.13.** 学習システムとして人間を捉えたとき、情報ネットワークとしての人類って非自明で面白い現象なのでは

**Question 3.14.** ニューラルネットワークみたいな構造物、どういう普遍性よ（どこが本質

**Question 3.15.** 自己複製文書コンテスト参加したくないか

書いてる

**Question 3.16.** 地球が丸いことをどのように知るかについて。 $S^2$ ではなく $\mathbb{R}^2$ での進化モデルを見ることで（私の周りだけから）結論付けて

一般に、大域的な安定性条件が局所的にどのような形で現れるかを見て（熱拡散の安定解と複素解析はやったとおり）。

**Question 3.17.** めっちゃお気持ちだが、低次の定式化では非自明な制約に見えることが高次の構造を書き下したものだったということが結構ある。書いて

めっちゃ雑に言えば、モデルに依存せず構造に関する（not 構成に関する）記号で言及できるものがある種の自然性として現れているというか。うまく定式化したいですね。

## 4 ネタ

**Question 4.1.** 「米」っていう漢字と「田」っていう漢字、何かの変換で移り合わないか?? Yoneda duality  
じゃん()

**Question 4.2.** 形式的直和の圈定義したけど、ダジャレの定式化（サウナゼミのとき）で使った word の圈と似ていなか

## 参考文献

- [1] Emily Riehl, CATEGORY THEORY IN CONTEXT, DOVER, 2016.
- [2] Emily Riehl, Elements of  $\infty$ -Category Theory, 2020 現在執筆中.
- [3] S. マックレーン, 圈論の基礎, 丸善出版, 1998, 1971.
- [4] 斎藤 肇, 線形代数の世界 抽象数学の入り口, 東京大学出版会, 2007.
- [5] Jean-Pierre Serre, Linear Representations of Finite Groups, Springer, 1977.
- [6] J. B. Nation, Notes on Lattice Theory.
- [7] L.V. アールフォルス, 複素解析, 現代数学社, 1982.
- [8] 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980.

- [9] Marius Stekelenburg, Ultrafilters and Topology, 2014.
- [10] 雪江明彦, 代数学 1 群論入門, 日本評論社, 2010.
- [11] 雪江明彦, 代数学 2 環と体とガロア理論, 日本評論社, 2010.
- [12] 雪江明彦, 整数論 1 初等整数論から p 進数へ, 日本評論社, 2013.
- [13] 雪江明彦, 整数論 2 代数的整数論の基礎, 日本評論社, 2013.
- [14] 森田茂之, 集合と位相空間, 朝倉書店, 2002.
- [15] nLab <https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage>
- [16] Saunders Mac Lane, leke Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic A first Introduction to Topos Theory, Springer, 1994.
- [17] 松坂 和夫, 集合位相入門, 岩波書店, 1968.
- [18] M.F.Atiyah, I.G.MacDonald, 可換代数入門, 共立出版, 2006.
- [19] 岩垂 好裕, インターユニバーシティ 情報伝送と符号の理論, オーム社, 2000.
- [20] 横尾 英俊, 情報理論の基礎, 共立出版, 2004.
- [21] 秋葉 拓哉, 岩田 陽一, , 北川宜稔, 問題解決のアルゴリズム活用力とコーディングテクニックを鍛える プログラミングコンテストチャレンジブック 第 2 版, マイナビ出版, 2010.
- [22] Lynn Arthur Steen and J.Arthur Seebach, Jr., Counterexamples in Topology, DOVER, 1970,1978.
- [23] 伊藤 昇, 結び目理論の圈論 「結び目のほどき方」, 日本評論社, 2018.
- [24] 高橋 正子, 計算論 計算可能性とラムダ計算, 近代科学社, 1991.
- [25] John M.Lee, Introduction to Smooth Manifolds second Edition, Springer, 2003,2012.
- [26] Benoit Michel Jubin, The Tangent Functor Monad and Foliations, 2012.