ゲームの戦略と圏論

hora-algebra

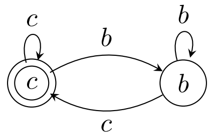
進化学の授業で扱った囚人のジレンマについて考えたこと。圏論の教科書、CATEGORY THEORY IN CONTEXT を二章まで読んで圏論の超基本概念のみ獲得した私が、囚人のジレンマだけでない一般のゲームの戦略について圏論の言葉で議論しようと試みたのが以下の文章である。圏論もゲーム理論も、なんなら TEX にも慣れていないので、悲惨なものになっているが、楽しく考えた記録として、(そして TEX で可換図式を書く練習として、) ここに残しておく[*1]。(2020/06/04 の私はこれに賛同しない)

目次

[*1] 自明なことしか書いてないじゃないか、と思うかもしれないが、圏論で一般的に考えた上で系として命題が沸くのが楽しい、ということで許してほしい。(2020/06/04 の私はこれに賛同しない)

1　基本的な定義

我々の最初の目標は、ゲームにおける戦略を対象に持つ圏を定義することである。戦略は、与えられる情報に対して、状況を把握し、自身の手を決定するものであるのであって欲しい。これを形式的に定義したい。囚人のジレンマの例で言えば、最初は協力し、その後は相手を真似するというしっぺ返し戦略と呼ばれる戦略が存在する。しっぺ返し戦略は、以下のように表現できる。

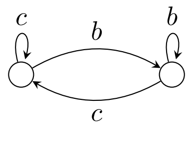


c は協力、b は裏切りを表す。二重丸は初期状態を表し、丸の中の文字は、自分が出す手を表している。矢印は相手の手によって状態がどこに移るのかを表している。まず、入力として集合 Λ の元が与えられるような図の圏を定義しよう。ここではまだ、初期状態や自分の手は考えない。

Definiton 1.1 (Dyn(Λ))**.** 集合 Λ について、圏 $\mathrm{Dyn}(\Lambda)$ を、次のように定義する[*2]。まず、対象は、集合 X と、Λ の元で添字つけられた自身への写像の族 $(f_\lambda : X \to X)_{\lambda\in\Lambda}$ の組、$(X, (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ である。$(X, (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(Y, (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への射は、写像 $\phi : X \to Y$ であって、任意の $\lambda \in \Lambda$ について下の図式が可換になるものである。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_\lambda"'] & Y \arrow[d, "g_\lambda"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & Y \end{tikzcd}$$

つまり、集合と、それ自身への写像として、ゲームの状況の変化を表している。元が状況を表していて、ゲームが Λ 通りに変化できるものを考えている。Λ はしばらく固定して考えるので明記せず、$\mathrm{Dyn}(\Lambda)$ を Dyn とかくことにする。対象 $(X, (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ も、省略して X とかく。$\mathrm{Dyn}(\Lambda)$ の対象が図を表す、ということについて言及をしておく。$\Lambda = \{c, b\}$ のときの対象 X で、$X = \{c, b\}$、c に対応する写像が全て c に移すもの、b に対応する写像が全て b に移すもの、であるときを考える。それは、以下の図を考えていることになる。



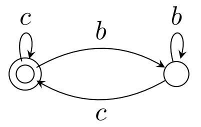
X の元には名前がついているだけで、まだ自身の手は考えていないことに注意して欲しい。以上の理由から、Dyn の対象を図と呼ぶことにする。

次に、初期状態も考えた圏を定義しよう。

Definiton 1.2 (Dyn_*)**.** 圏 Dyn_* の対象は Dyn の対象 X と X の元 x の組 (X, x) である。(X, x) から (Y, y) への射は Dyn での射 $\phi : X \to Y$ であって、$\phi(x) = y$ なるものである。

[*2] Dyn 自体は Set から CAT への反変関手である。このことは 7 節で扱う。

もちろんこれも、Dyn を使って定義しているので*3、入力の集合 Λ に依存している。(X,x) の x を initial point と呼ぶことにした。(X,x) も、略して X と書くことがある。Dyn_* の対象は、図として



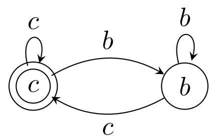
などと書ける。以上の理由から、Dyn_* の対象を始点付き図と呼ぶことにする。

最後に、戦略の圏 $\mathrm{Str}(H)$ を定義する。これは、出力の集合 H に依存する。

Definiton 1.3 ($\mathrm{Str}(H)$)**.** 集合 H を固定する。圏 $\mathrm{Str}(H)$ の対象は、Dyn_* の対象 X と、写像 $\sigma : X \to H$ の組 (X,σ) である。(X,σ_X) から (Y,σ_Y) への射は、Dyn_* での射 $\phi : X \to Y$ であって、以下の (Set での) 図式が可換になるものである。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\sigma_X"] & \\ Y \arrow[r, "\sigma_Y"'] & H \end{tikzcd}$$

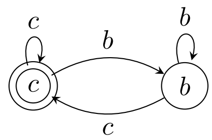
これは、Dyn_* を使って定義しているので*4、厳密には Λ と H の両方に依存している。そのため、本来 $\mathrm{Str}(\Lambda,H)$ などと書くべきである。ただ、基本的にはこれらを明記せず単に Str と書くことにする。対象 (X,σ) を、X 上の戦略などという。対象 (X,σ) を略して σ と書くこともある。 戦略 σ_X などと書いた時には、X は Dyn_* の object で、σ_X は X 上の戦略を表す。最初に書いたしっぺ返し戦略は、$\mathrm{Str}(\{c,b\},\{c,b\})$ の object である。再び図を書いておく。



相手の手だけで判断をする繰り返し囚人のジレンマの “戦略” は全て $\mathrm{Str}(\{c,b\},\{c,b\})$ の対象として表わされる*5。再び言及しておくが、Dyn_* の対象を戦略と呼ぶことにする。

2 戦略の表現

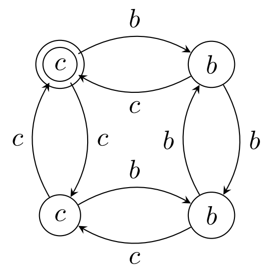
異なる戦略が、同じ行動を意味するように思えることがある。例えば、以下の三つの図は全てしっぺ返し戦略を意味していると言えそうだ。

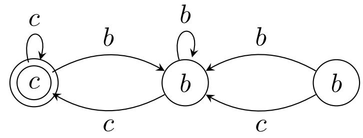


*3 U : Dyn $\to$ Set という忘却関手を考えれば、Dyn_* はその category of elements で、U の representability から Dyn_* に initial object が存在することがわかる。このことは後に触れられる。

*4 U を Dyn_* から Set への忘却関手とすると、Str は、反変関手 $\mathrm{Hom}(-,H)\circ U$ の category of elements である。

*5 もちろん、戦略、を定義していないので厳密な主張ではないが、次節で定義される Cir という Dyn_* の特別な object を見れば直感的にわかるはずである。

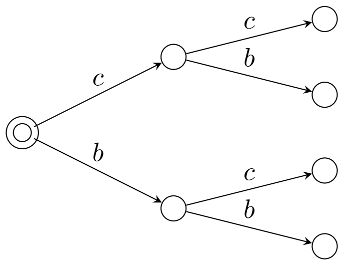




そこで、三つの戦略が同じ行動を意味するとはどういうことか考えていく。まず、普遍的な始点付き図を考える。

Definiton 2.1 (Cir)**.** Dyn_* の対象 Cir を、$\mathrm{Cir} := ((\bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda^n, (\theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}), ())$ と定める。ただし、Λ^0 は一点集合 $\{()\}$ であるとし、θ_λ は $\theta_\lambda((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda)$ で定める。

定義がややこしいが、$(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda^n, (\theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ が図であり、$()$ が initial point である。Cir はいわば、全ての状況をもれなくだぶりなく場合分けする始点付き図である。二点集合 $\Lambda = \{c, b\}$ について図に書けば、次のようになっている。実際は、右に続いている。



Cir が普遍的に思えるのは正しくて、実際次が成り立つ。

Proposition 2.1 (Cir は initial object)**.** Cir は Dyn_* の initial object である。

Proof. 始点付き図 $((X, (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}), x)$ を任意にとる。写像 $\phi : \mathrm{Cir} \to X$ を、$\phi((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = f_{\lambda_n} \circ \cdots \circ f_{\lambda_1}(x)$ と定めると、これは Dyn_* の射となる。さらに、Dyn_* の射は定義の可換図式より ϕ に限られる。 □

これで、Cir がある意味で普遍的な object であることはわかった。始点付き図 X をとれば、Cir から一意に射がのびることがわかったので、この射を p_X と書くことにする。これで、どんな戦略も Cir 上の戦略としてかけることがわかる。Cir 上の戦略として同一である、ということを同じ行動を意味する、と考えることにするのが自然であろう。

Definiton 2.2 (戦略の表現)**.** 戦略 σ_X について、$(\mathrm{Cir}, \sigma_X \circ p_X)$ を σ_X の表現といい、$\tilde{\sigma_X}$ と書く[*6]。二つの戦略 σ_X, σ_Y が同一な表現を持つとき σ_X と σ_Y は同値であるといい、$\sigma_X \sim \sigma_Y$ と書く。

これで、同じ行動を意味する、とは何かを、上の意味で同値であると定義できた。この節の最初に書いた三つの戦略が同値になっていることを確かめよう。この場合は簡単だが、Cir は基本的に無限集合であるので、一般には議論を工夫しない限り定義に基づいて示すのは難しい。二つの戦略が与えられたときに、その二つが同値な戦略であるか見分ける方法を与える。

Proposition 2.2 (同値 $\Leftrightarrow$zigzag で繋がる)**.** 戦略 σ_X, σ_Y について、以下の二つは同値[*7]。

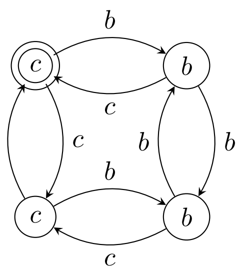
- $\sigma_X \sim \sigma_Y$
- 有限個の戦略 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ と戦略の射 $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ が存在し、ϕ_0 は domain と codomain に σ_X, σ_1 を一つずつ持ち[*8]、ϕ_k は domain と codomain に σ_k, σ_{k+1} を一つずつ持ち $(0 < k < n)$、ϕ_n は domain と codomain に σ_n, σ_Y を一つずつ持つ。

Proof. まず、一つ目から二つ目を導く。$p_X : \tilde{\sigma_X} \to \sigma_X$ と $p_Y : \tilde{\sigma_Y} \to \sigma_Y$ が存在し、仮定より $\tilde{\sigma_X} = \tilde{\sigma_Y}$ なので示された。逆を示す。同値であることは、同値関係であるので[*9]、射 $\phi : \sigma_X \to \sigma_Y$ が存在したときに $\sigma_X \sim \sigma_Y$ であることを示せば十分である。つまり、この仮定のもと $\sigma_X \circ p_X = \sigma_Y \circ p_Y$ を示せば良い。これは、以下の (Set での) 可換図式から従う。

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dd, "\phi"] \arrow[dr, "\sigma_X"] & \\ \mathrm{Cir} \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & & H \\ & Y \arrow[ur, "\sigma_Y"'] & \end{tikzcd}$$

左の三角形の可換性は、射が全て Dyn_* の射になることと、Cir が initial object であることから従う。右の可換性は、ϕ が Str の射であることそのものである。 □

これを用いれば、この節の最初の三つの戦略が同値であることがわかる。なぜなら、



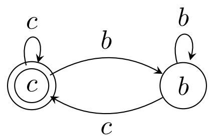
[*6] U を Dyn_* から Set への忘却関手とすると、上にある戦略をとる反変関手 $\mathrm{Hom}(-, H) \circ U$ で、p_X が移る射を用いて、σ_X はその表現に移る。この意味で、表現は自然である。p_- が、Str の自身への、表現をとる関手から恒等関手への自然変換である。

[*7] これは、表現をとる Str からの関手が Cir 上の戦略からなる離散圏への関手になっていることが本質である。

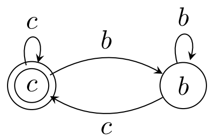
[*8] つまりどちらが domain でも良いしどつらが codomain でも良いが、片方から片方に射が伸びているということである

[*9] 集合でないのでこの書き方は不適切かもしれないが、言っている意味は理解していただけると思う

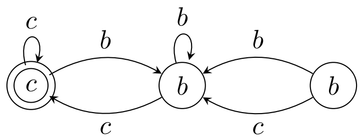
から



には同じ手を出す元への全射がのび、



から



には単射で埋めこむ射がのびるからである。

3　戦略の準同型定理

戦略について議論する前に、準同型定理の類似が成立することを言っておく。もちろん、群論で言う正規部分群のようなものがうまく定義できるわけではないので、いくつかの工夫をする。まず、準同型定理の主張を述べるためにいくつか定義をする。

Definiton 3.1 (剰余と像)**.** $\phi : \sigma_X \to \sigma_Y$ を戦略の射とする。ここで、X, Y は、Dyn_* の object として全ての要素を明記すると、$((X, (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}), x), ((Y, (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}), y)$ であるとする。集合 X に ϕ で定まる同値関係とは、$a, b \in X$ に対して $a \equiv b :\Leftrightarrow \phi(a) = \phi(b)$ で定まる同値関係 $\equiv$ のことである。この同値関係で割った集合 $X/\equiv$ に、$\tilde{f_\lambda} : X/\equiv \to X/\equiv$ を、$\tilde{f_\lambda}([a]) = [f_\lambda(a)]$ で定める[10]。$X/\equiv$ の initial point は、X の initial point x の同値類とする。$X/\equiv$ 上の戦略 $\sigma_{X/\equiv}$ を、$\sigma_{X/\equiv}([a]) = \sigma_X(a)$ で定める[11]。$\sigma_{X/\equiv}$ を、ϕ による剰余戦略といい、σ_X/ϕ と書く。

集合 $\mathrm{Im}(\phi)$ に、写像 $g_{\lambda\restriction_{\mathrm{Im}(\phi)}}$ を定めて図とする[12]。initial point は y とし[13]、$\mathrm{Im}(\phi)$ 上の戦略 $\sigma_{\mathrm{Im}(\phi)}$ を $\sigma_{Y\restriction_{\mathrm{Im}(\phi)}}$ と定める。この戦略を、戦略の射 ϕ の像といい、単に $\mathrm{Im}(\phi)$ と書く。

補題として、戦略の射が同型射であることと、全単射であることが同値であることを示しておく。

Lemma 3.1 (同型射 $\Leftrightarrow$ 全単射)**.** 戦略の射 $\phi : \sigma_X \to \sigma_Y$ について[14]、同型射であることと、写像として全単射であることは同値である。

[10] well-defined は、$\equiv$ の定義と、ϕ が Dyn での射でもあることから従う。
[11] well-defined は、ϕ が戦略の射であることから従う。図式を書けばすぐわかる。
[12] well-defined は、ϕ が Dyn の射であることから従う。
[13] well-defined は、ϕ が始点付き図の射ゆえ initial object を保つことから従う。
[14] Dyn や Dyn_* でも同様の事実が成立する。

Proof. 逆写像 ϕ^{-1} が戦略の射になることを示せば良い。これは、条件を一つ一つ確認すればわかり、簡単なので略す。 $\square$

これで、準同型定理を述べる準備はできた。

Proposition 3.1 (戦略の準同型定理)**.** 戦略の射 $\phi : \sigma_X \to \sigma_Y$ について[15]、$\sigma_X/\phi \cong \mathrm{Im}(\phi)$ である[16]。

Proof. 写像 $\tilde{\phi} : \sigma_X/\phi \to \mathrm{Im}(\phi)$ を、$\tilde{\phi}([a]) = \phi(a)$ と定めると、定義より well-defined で、全単射になる。戦略の射になることは、読者への演習問題とする[17]。 $\square$

これで、剰余について良い情報が得られた。ここでの本質は、剰余や像が、戦略になってくれることである。群論では、射の ker になることは、正規部分群であることとして記述できた。ここでも、射で定まる同値関係であるとはどういうことかを、その戦略のみを使って記述しよう。

Definiton 3.2 (正規同値関係)**.** 戦略 σ_X について、集合 X 上の同値関係 $\equiv$ が正規であるとは、任意の $a, b \in X$ について $a \equiv b \Rightarrow ((X, a), \sigma_X) \sim ((X, b), \sigma_X)$ かつ $a \equiv b \Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda,\ f_\lambda(a) \equiv f_\lambda(b)$ なることである。

これはつまり、initial point を同値関係で結ばれた点に変更させたとき同値な戦略を定める、という条件と、同値関係が自身への写像族と整合性を持つ、という条件である。前者が、本質的に同じ元であること、後者が実際に割れることを指している。一見奇妙であるが、戦略においてその点に行った後の挙動が同じであると主張しているのだから、次の命題が成立するのも納得できるであろう。あとで、複雑な定義であったものの、この定義が便利であることがわかっていただけると思う。自身とだけ関係があるような同値関係は、正規である。この正規同値関係を自明な正規同値関係という。

Proposition 3.2 (正規 $\Leftrightarrow$ 射で定まる)**.** 戦略 σ_X と集合 X 上の同値関係 $\equiv$ について、$\equiv$ が正規であることと、σ_X を domain に持つ戦略の射 $\phi : \sigma_X \to \sigma_Y$ が存在して $\equiv$ が ϕ で定まることは、同値である。

Proof. $\Rightarrow$ から示す。$\equiv$ が正規であると仮定して、$X/\equiv$ に戦略の構造を入れよう。まず、自身への写像 $\tilde{f_\lambda} : X/\equiv \to X/\equiv$ を、$\tilde{f_\lambda}([a]) = [f_\lambda(a)]$ と定める。well-defined は、正規の二つ目の条件からわかる。initial point は、X の initial point の同値類と定める。$X/\equiv$ 上の戦略 $\sigma_{X/\equiv}$ を、$\sigma_{X/\equiv}([a]) = \sigma_X(a)$ と定める。この well-defined は、$a \equiv b$ なら正規の一つ目の条件を表す可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & (X,a) \arrow[dr, "\sigma_X"] & \\
\mathrm{Cir} \arrow[ur, "p_{(X,a)}"] \arrow[dr, "p_{(X,b)}"'] & & H \\
 & (X,b) \arrow[ur, "\sigma_X"'] &
\end{tikzcd}$$

で $() \in \mathrm{Cir}$ を追えば $\sigma_X(a) = \sigma_X(b)$ となることからわかる。今定まった戦略 $\sigma_{X/\equiv}$ に、σ_X から標準的な射影がのびるが、これは戦略の射になる。$\equiv$ はこの戦略の射で定まる。$\Leftarrow$ を示す。$\equiv$ が $\phi : \sigma_X \to \sigma_Y$ で定まる

[15] Dyn や Dyn_* でも同様の事実が成立する。
[16] Str の対象として iso であると主張している。
[17] いいたかっただけ。ϕ が戦略の射であることを用いよ。もちろん、$\mathrm{Dyn}, \mathrm{Dyn}_*$ の射であることを示すのが前提である

としよう。$\phi(a)=\phi(b)$ を仮定して、正規の二つの条件を示す。先に、正規の二つ目の条件を示す。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_\lambda"'] & Y \arrow[d, "g_\lambda"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & Y \end{tikzcd}$$

で a,b を追えば、$\phi\circ f_\lambda(a)=\phi\circ f_\lambda(b)$ がわかる。正規の一つ目の条件を示す。示すべき可換図式

$$\begin{tikzcd} & (X,a) \arrow[dr, "\sigma_X"] & \\ \mathrm{Cir} \arrow[ur, "p_{(X,a)}"] \arrow[dr, "p_{(X,b)}"'] & & H \\ & (X,b) \arrow[ur, "\sigma_X"'] & \end{tikzcd}$$

で、元 $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathrm{Cir}$ をとれば、$\sigma_X\circ f_{\lambda_n}\circ\cdots\circ f_{\lambda_1}(a)=\sigma_X\circ f_{\lambda_n}\circ\cdots\circ f_{\lambda_1}(b)$ を示せば良いことがわかる。これは、次の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_{\lambda_1}"] \arrow[d, "\phi"] & X \arrow[r, "f_{\lambda_2}"] \arrow[d, "\phi"] & \dots \arrow[r, "f_{\lambda_{n-1}}"] & X \arrow[r, "f_{\lambda_n}"] \arrow[d, "\phi"] & X \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "\sigma_X"] & \\ Y \arrow[r, "g_{\lambda_1}"] & Y \arrow[r, "g_{\lambda_2}"] & \dots \arrow[r, "g_{\lambda_{n-1}}"] & Y \arrow[r, "g_{\lambda_n}"] & Y \arrow[r, "\sigma_Y"] & H \end{tikzcd}$$

で a,b を追えば良い。 □

この命題は、正規な同値関係については、それで割った剰余戦略を考えられる、と主張している。この理由で、今後は、剰余戦略として正規同値関係で割ったものも考える。代数における準同型定理のように、剰余からの射に言及しておこう。

Lemma 3.2 (剰余の普遍性)**.** 戦略 σ_X と戦略の射 $p:\sigma_X\to\sigma_Y$ と、σ_X の正規同値関係 $\equiv$ に関して、$a\equiv b\Rightarrow p(a)=p(b)$ なる時、図式

$$\begin{tikzcd} \sigma_X \arrow[r, "p_\equiv"] \arrow[dr, "p"'] & \sigma_{X/\equiv} \arrow[d, dotted, "\phi"] \\ & \sigma_Y \end{tikzcd}$$

を可換にする ϕ が一意に存在する。ここで、$p_\equiv:\sigma_X\to\sigma_{X/\equiv}$ は標準的全射である。

Proof. 存在を示せば、一意性は明らかである。写像 $\phi:\sigma_{X/\equiv}\to\sigma_Y$ を、$\phi([a])=p(a)$ と定める。well-defined は仮定 $a\equiv b\Rightarrow p(a)=p(b)$ からわかる。Dyn の射であることは、p が Dyn の射であることからわかる。initial object を保つことは明らかである。戦略の射であることは、p が戦略の射であることから、$\sigma_Y\circ\phi([a])=\sigma_Y\circ p(a)=\sigma_X(a)=\sigma_{X/\equiv}([a])$ となってわかる。 □

ここで、正規同値関係の定義が複雑であった理由を説明する。それは、次の特別な正規同値関係が一番 "大きい" ことを簡単にいうためである。

Definiton 3.3 (極大な正規同値関係)**.** 戦略 σ_X について、$a\equiv b:\Leftrightarrow((X,a),\sigma_X)\sim((X,b),\sigma_X)$ で定まる X 上の同値関係 $\equiv$ を、極大な正規同値関係であるという。

定義より、ある正規同値関係で結ばれるなら、極大な正規同値関係で結ばれる。言い換えれば、ある戦略の射で同じ点に移るなら、極大な正規同値関係で結ばれる。極大な正規同値関係が正規同値関係であることを示しておく。

Lemma 3.3 (極大な正規同値関係は正規同値関係)**.** 戦略 σ_X について、極大な同値関係 $\equiv$ は正規同値関係である。

Proof. 正規の一つ目の条件は自明である。二つ目を示す。$a \equiv b$ を仮定する。示すべきものは、$((X, f_\lambda(a)), \sigma_X) \sim ((X, f_\lambda(b)), \sigma_X)$ である。示すべきは、$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Cir}$ について $\sigma_X \circ f_{\lambda_n} \circ \cdots \circ f_{\lambda_1} \circ f_\lambda(a) = \sigma_X \circ f_{\lambda_n} \circ \cdots \circ f_{\lambda_1} \circ f_\lambda(b)$ なることである。これは、仮定の可換図式

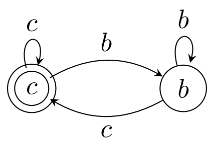
$$\begin{tikzcd}
 & (X,a) \arrow[dr, "\sigma_X"] & \\
\mathrm{Cir} \arrow[ur, "p_{(X,a)}"] \arrow[dr, "p_{(X,b)}"'] & & H \\
 & (X,b) \arrow[ur, "\sigma_X"'] &
\end{tikzcd}$$

で $(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Cir}$ を追えばいい。 □

これで、ある戦略の射で同じ点に移ることと、極大な正規同値関係で結ばれることは同値であることがわかった。つまり、極大な正規同値関係は、戦略の二つの元が射で潰せるか、本質的に同じ役割を果たしているか、を表していると言える。極大な正規同値関係は、次の節で用いる。

4 戦略の単純な形

一般論を説明してきたが、その応用例として、最も単純な戦略の一意存在について書く。同値な戦略が複数存在することはすでに見てきた。しっぺ返し戦略を表す、最も単純な戦略は、



であろう。このような、単純であるということを、simple として定式化しよう。

Definiton 4.1 (simple)**.** 戦略の射 ϕ は、写像として全射であるとき全射といい、写像として単射であるとき単射という。戦略 σ は、σ にのびる射が全て全射であるとき minimal、σ からのびる射が全て単射であるとき irreducible という。minimal かつ irreducible であるとき、simple であるという。

感覚的には、minimal は、余計な元が存在しない、“部分戦略” が存在しない、と言うイメージである。irreducible は二つの元が潰れないことを意味している。どちらも、ある種の小ささを表していると言って良い。今挙げたしっぺ返し戦略の例がこの定義を満たしてそうなことを確認して欲しい。第二節の最後に挙げた射は少なくとも反例にはなっていない。この節の目標は、任意に戦略 σ をとったとき、それと同値で simple な戦略が同型を除いて一意に存在することを示すことである。ちなみに、σ_X の表現を、その極大な正規同値関

係で割ったものが求めるものである。simple とは、minimal かつ irreducible であることであった。minimal と irreducible について、簡潔さは劣るが直感的である、同値な別定義を与えよう。

Lemma 4.1 (minimal $\Leftrightarrow$ Cir の剰余)**.** 戦略 σ_X について、σ_X が minimal であることと、表現 $\tilde{\sigma_X}$ からの射[*18]が全射であることは同値である。

Proof. $\Rightarrow$ は minimal の定義より真に弱い。すぐわかる。$\Leftarrow$ を示す。codomain が σ_X であるような戦略の射 $\phi\colon \sigma_Y \to \sigma_X$ を任意にとる。これが全射であることを示せば良いが、可換図式

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dd, "\phi"] \\ \mathrm{Cir} \arrow[ur, "p_Y"] \arrow[dr, "p_X"'] & \\ & X \end{tikzcd}$$

からわかる。 □

これはつまり、準同型定理より、Cir のある剰余と同型であることとも言える。また、戦略の全ての元が使用される可能性を持つ、無駄な元がない、と言う表現にも納得してもらえると思う。minimal は言い換えられたので、irreducible を言い換える。irreducible の言い換えは、simple の一意存在の証明には明示的に用いない。ただ、イメージするのが容易になるので書いておく。

Lemma 4.2 (irreducible $\Leftrightarrow$ 極大な正規同値関係が自明。)**.** 戦略 σ_X について、σ_X が irreducible であることと、σ_X の極大な正規同値関係 $\equiv$ が自明であることは同値。

Proof. どちらの方向も、対偶をとって示す。まず、$\Rightarrow$ から示す。$\equiv$ が自明でないなら、$\equiv$ で割った剰余戦略に、σ_X からのびる標準的全射が単射でないので irreducible でない。次に、$\Leftarrow$ を示す。単射でない射 $\phi\colon \sigma_X \to \sigma_Y$ をとると、これで定まる正規同値関係において、異なる二つの元 $a, b \in X$ が関係を持つ。この時、$a \equiv b$ であるので、$\equiv$ は自明でない。 □

ここでも、irreducible とは、どの元も潰されないことである、と言うイメージに沿った言い換えになっている。これで、simple であることが、戦略そのものの性質に言い換えられた。第二節から始まった準備は全て整ったので、simple が一意に存在することを示そう。

Theorem 4.1 (simple の一意存在)**.** 任意の戦略 σ_X について、σ_X と同値で simple な戦略 σ が同型を除いて一意に存在する。

Proof. まず、存在を示そう。σ_X の表現 $\tilde{\sigma_X}$ を考え、さらに $\tilde{\sigma_X}$ の極大な正規同値関係で $\tilde{\sigma_X}$ を割った剰余戦略 σ を考えよう。今、

$$\sigma_X \xleftarrow{p_X} \tilde{\sigma_X} \longrightarrow \sigma$$

から $\sigma_X \sim \sigma$ である[*19]。σ は表現から全射が伸びているので minimal である。さらに、irreducible でないと仮定すると、単射でない射 $\phi\colon \sigma \to \sigma_Y$ が取れるが、合成

$$\tilde{\sigma_X} \longrightarrow \sigma \xrightarrow{\phi} \sigma_Y$$

[*18] Cir が Dyn_* の initial object であることから、表現からの射は一意であった。
[*19] zigzag でつながっていれば同値な戦略なのであった。

で定まる同値関係が正規でなくなって[20]、矛盾である。よって、σ が σ_X と同値でかつ simple であることがわかった。次に、一意性を示そう。σ' が σ_X と同値で simple であると仮定する。同値であることから、$p : \tilde{\sigma_X} \to \sigma'$ がのびる。σ' は minimal なので p は全射。よって、剰余の普遍性から、存在証明で構成した σ へ戦略の射 $\phi' : \sigma' \to \sigma$ が取れる。σ' は irreducible で σ は minimal なので ϕ' は全単射で、つまり同型である。これで示された。 □

5 有限戦略

この節は、この話題を考える当初の目的だったので書いておく。無限回の繰り返し囚人のジレンマにおいて、各ターンにそのターンの得点を計算し、平均得点の極限をゲームの得点とした。この極限が収束するための十分条件として、対戦の両者が、以下で定義する有限戦略であることが挙げられる。

Definiton 5.1 (有限戦略)**.** 戦略 σ が有限戦略であるとは、σ と同値な戦略 σ_X で、その台集合 X が有限集合なるものが存在することを言う。

この定義は直感的には、有限集合上の戦略としてかける、という意味である。有限戦略同士の点数は必ず収束する[21]。ゆえに、有限戦略であるか考えるのには意味がある。有限戦略であることの定義は、存在命題である。故に、有限戦略でないことの証明は一般には難しい。例えば、相手の手に関わらず n 回目の手は π の 2 進数展開の n 桁目で決定するといった実質的にランダムな戦略は有限戦略だろうか。2^n 回ごとに手を変える戦略は有限戦略だろうか。相手の裏切りの回数が n 回だった時に相手の n 番目の手を出す戦略は有限戦略だろうか。これらを考えるには、simple な戦略の一意存在が活きる。

Lemma 5.1 (simple は最小濃度)**.** simple な戦略 σ_X は、任意の同値な戦略 σ_Y に対して、台集合の濃度がより小さいか等しい。

Proof. σ_X は、σ_Y の表現 $\tilde{\sigma_Y}$ を極大な正規同値関係で割ったものに等しい。表現からの射 p_Y に準同型定理を用いて、単射 $\tilde{\sigma_Y}/p_Y \to \sigma_Y$ を得る。また、剰余の普遍性から射 $\tilde{\sigma_Y}/p_Y \to \sigma_X$ を得るが、σ_X が minimal なのでこれは全射である。 □

これを用いて、次の一見当たり前の事実が示される。

Theorem 5.1 (有限 $\Leftrightarrow$simple が有限)**.** 戦略 σ_X が有限戦略であることと、σ_X と同値な simple な戦略が有限集合上の戦略であることは同値である。

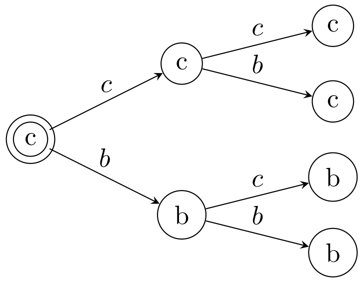
Proof. $\Leftarrow$ は有限戦略の定義からわかる。$\Rightarrow$ は今示した補題からわかる。 □

これで、有限戦略か調べるには simple な形で書き表してから、それが有限か調べれば良いことがわかった。これが実は有用であることが次の例からわかってもらえるだろう。

Example 5.1. 相手の裏切りの回数が n 回だった時に、相手が n 回目に出した手を出す戦略が有限戦略かどうかを調べよう。本質的ではないが議論のために初期動作を確定しておく。相手は 0 回目に協力をしていると

[20] 直感的には、極大な正規同値関係が極大であることから従う。厳密には、正規の定義の一つ目の条件を満たさないことによる。
[21] $\mathrm{Str}(\Lambda, \Lambda)$ の対象二つを考えると、それを合わせて一つの Dyn_* これはつまり、集合の直積に、一点集合が入力であるような有限戦略が循環するのは鳩ノ巣原理から従う。これは次の節で扱う

考えよう。つまり、相手が裏切るまでは協力し続けるということである。これを Cir 上の戦略として途中まで書くと、



となる。この戦略が有限戦略でないことを示そう。今、Cir 上の戦略としてかけているので、これを極大な正規同値関係で割れば simple になる。従って、極大な正規同値関係でどの二つも関係を持たないような無限部分集合が取れれば示せたことになる。そこで、$0 < n < m$ なる整数 n, m について、$(\underbrace{c, \ldots, c}_{n})$ と $(\underbrace{c, \ldots, c}_{m})$ は極大な正規同値関係で結ばれないことを示す。これらを initial point とした戦略が同値でないことを言えば良いが、$n+1$ 回裏切られれば行動が異なるので同値でない。

6 戦略の対戦

今まで考えてきたことは対戦相手を想定した戦略であった。ここで、戦略同士の対戦結果が今までの意味での戦略だと思えることを書いておく。今まで、戦略の圏を Str と書いてきたが、これからは入力集合と出力集合を明示して $\mathrm{Str}(\Lambda, H)$ などと書くことが増える。対戦が定義できるのは、次のように $\Lambda = H$ なる時である。

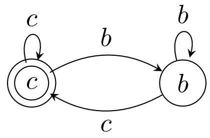
Definiton 6.1 (対戦の関手)**.** 集合 Λ に対して、関手 $F : \mathrm{Str}(\Lambda, \Lambda)) \times \mathrm{Str}(\Lambda, \Lambda)) \to \mathrm{Str}(\{*\}, \Lambda^2)$ を、次のように定義する。domain の対象 $\sigma_X = (X, (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, x, \sigma_X), \sigma_Y = (Y, (g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, y, \sigma_Y)$ について、$F(\sigma_X, \sigma_Y) := (X \times Y, f_{\sigma_Y} \times g_{\sigma_X}, (x, y), \sigma_X \times \sigma_Y)$ と定める。ただし、$(a, b) \in X \times Y$ について、$f_{\sigma_Y} \times g_{\sigma_X}(a, b) = (f_{\sigma_Y(b)}(a), g_{\sigma_X(a)}(b))$ とする。射 $(\phi : \sigma_X \to \sigma_{X'}, \psi : \sigma_Y \to \sigma_{Y'})$ は、$\phi \times \psi : X \times Y \to X' \times Y'$ に移す。

これが関手であることを示そう。まず、射の移り先が戦略の射になっていることである。まず、Dyn の射になっていることだが、入力集合 Λ は一元集合なので、

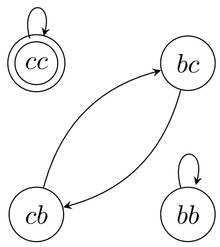
$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\phi \times \psi} & X' \times Y' \\ {\scriptstyle f_{\sigma_Y} \times g_{\sigma_X}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f'_{\sigma_{Y'}} \times g'_{\sigma_{X'}}} \\ X \times Y & \xrightarrow{\phi \times \psi} & X' \times Y' \end{array}$$

が可換であることを言えば良い。$(a, b) \in X \times Y$ を追って、$(f'_{\sigma_{Y'} \circ \psi(b)} \circ \phi(a), g'_{\sigma_{X'} \circ \phi(a)} \circ \psi(b)) = (\phi \circ f_{\sigma_Y(b)}(a), \psi \circ g_{\sigma_X(a)}(b))$ を示せば良いことがわかる。ϕ, ψ が Dyn の射であることから、これは $\sigma_{Y'} \circ \psi(b) = \sigma_Y(b)$ と $\sigma_{X'} \circ \phi(a) = \sigma_X(a)$ に帰着されるが、これは ϕ, ψ が戦略の射であることから従う。initial object を移すことは定義からわかる。戦略の射であることも定義からわかる。これで、射が移ることはわかった。これが関手的であることを確認する。恒等射が恒等射に移ることは定義からわかる。合成が合成に移ることも、定義からわかる。これで、F が関手であることがわかった。

Example 6.1. しっぺ返し戦略同士の対戦を考えよう。戦略 σ を、しっぺ返し戦略を表す次のような戦略



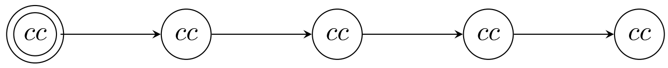
とする。$F(\sigma,\sigma)$ を図示すると、



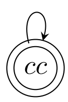
となる。

上のように、$F(\sigma,\sigma)$ は σ と σ の対戦の推移を表す。この理由で、$F(\sigma_X,\sigma_Y)$ を σ_X と σ_Y の対戦と呼ぶ。

対戦も一つの戦略であるので、表現や simple を考えられる。上のしっぺ返し戦略の対戦について、表現は、



である。本当は右に続いている。simple な形は、



である。しっぺ返し戦略同士の対戦では協力しか出ないと主張している。F の関手性からわかることを挙げておこう。有限戦略同士の対戦は必ず循環するといったが、これを示す。有限戦略の定義に、同値という概念を用いているのでこれを関手で移す[*22]。

Lemma 6.1 (同値な戦略は同値な対戦をする)**.** 戦略 $\sigma_X,\sigma_Y,\sigma_{X'},\sigma_{Y'}$ について、$\sigma_X\sim\sigma_{X'}$ かつ $\sigma_Y\sim\sigma_{Y'}$ ならば $F(\sigma_X,\sigma_Y)\sim F(\sigma_{X'},\sigma_{Y'})$

Proof. 戦略が同値であることと、zigzag で繋がることは同値であった。σ_X と σ_X が $\phi_0,\ldots,\phi_n$ で繋がれているとし、σ_Y と $\sigma_{Y'}$ が $\psi_0,\ldots,\psi_n$ で繋がれているとする。この時、$\mathrm{Str}(\Lambda,\Lambda))\times\mathrm{Str}(\Lambda,\Lambda))$ の対象として (σ_X,σ_Y) と $(\sigma_{X'},\sigma_{Y'})$ は、zigzag $\phi_0\times\mathrm{id}_Y,\ldots,\phi_n\times\mathrm{id}_Y,\mathrm{id}_{X'}\times\psi_0,\ldots,\mathrm{id}_{X'}\times\psi_n$ で繋がる[*23]。 □

これで、同値な戦略の対戦は同値な対戦に映ることがわかった。対戦の入力集合は一元集合である。入力集合が一元集合の戦略の圏において、有限戦略を特徴付ける性質を書いておく。

Definiton 6.2 (循環)**.** $\mathrm{Str}(\{*\},H)$ の対象 $\sigma=(X,f,x,\sigma)$ について、ある正整数 n が存在し、十分大きな整数 m について $\sigma\circ f^m(x)=\sigma\circ f^{m+n}(x)$ なるとき、σ は循環するという。

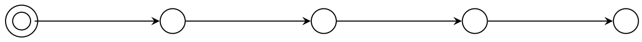
[*22] 対戦も、一つの戦略であるので、

[*23] 射の方向が一致していないと関手で写せないため、id を用いている。

これは、調べたい性質である。つまり、二つの戦略の対戦が循環するかを調べることがある[*24]。例えば、各ターンの点数の極限が存在する十分条件として対戦が循環することが挙げられる。

Proposition 6.1 (循環 $\Leftrightarrow$ 有限戦略)**.** $\mathrm{Str}(\{*\}, H)$ の対象 $\sigma = (X, f, x, \sigma)$ について、σ が循環することと σ が有限戦略であることは同値。

Proof. 入力集合が一点集合である時、Cir は $(\mathbb{N}, \theta, 0)$ などとかける。ただし、$\theta(n) = n + 1$ と定義する。図で書けば、



である。本当は右に続いている。まず $\Rightarrow$ から示す。σ の表現を極大な正規同値関係で割ったものが simple な形である。循環することより、ある正整数 n が取れ十分大きい整数 m について $\theta^m(x) = \theta^{m+n}(x)$ となる。極大な正規同値関係の定義より、このような $m, m+n$ は極大な正規同値関係で結ばれる。これゆえ、有限戦略であることがわかった。次に、$\Leftarrow$ は、有限戦略であるなら実際に有限集合上の同値な戦略をとってくれば鳩ノ巣原理よりその同値な戦略は循環する。同値であることから、表現からの射を考えれば σ も循環することがわかる。 $\square$

上の結果として、次の直感的には当たり前の命題が従う。

Proposition 6.2 (有限戦略の対戦は循環する)**.** 有限戦略 σ_X, σ_Y について、その対戦 $F(\sigma_X, \sigma_Y)$ は循環する。

Proof. σ_X, σ_Y を有限集合上の戦略で表してから関手で移せば良い。この節で示した補題と命題を使う。 $\square$

ゆえに、例えば無限回の繰り返し囚人のジレンマゲームにおいて、平均点の極限を得点とする時、有限戦略同士ならば必ず得点が確定する。これは、有限戦略でないことの証明に使える。例えば、前の節で言及した相手の手に関わらず n 回目の手は π の 2 進数展開の n 桁目で決定するといった実質的にランダムな戦略や、2^n 回ごとに手を変える戦略が有限戦略でないことが示せる。これは、全協力という有限戦略との対戦が循環しないからである[*25]。

7 ルール変更の関手

今まで議論してきたことは、繰り返し囚人のジレンマに限らない一般的なものであった。異なるゲームの戦略を関連づけることはできるだろうか。次の関手が本質的である。

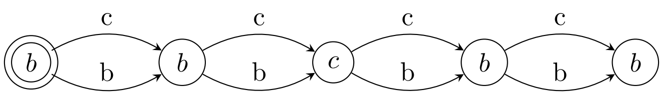
Definiton 7.1 (戦略の圏を作る関手)**.** 関手 $G : \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Set} \to \mathrm{CAT}$ を次のように定義する。domain の object(Λ, H) について、$G(\lambda, H) := \mathrm{Str}(\Lambda, H)$ と定める。domain の射 $(\alpha : \Lambda' \to \Lambda, H \to H')$ に対して、次のように定める関手 $G(\alpha, \beta) : \mathrm{Str}(\Lambda, H) \to \mathrm{Str}(\Lambda', H')$ を対応させる。まず、$\mathrm{Str}(\Lambda, H)$ の objet$(X, (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, x, \sigma)$ は $(X, (f_{\lambda'})_{\lambda' \in \Lambda'}, x, \beta \circ \sigma)$ に対応させる。射 ϕ はそのまま ϕ に対応させる。

well-defined を示さねばならないが略す。射の移り先が関手であることとと G が関手であることで二回関手性を確かめる必要があることに注意せよ。節のタイトルであるルール変更の関手とは G によって写像の組

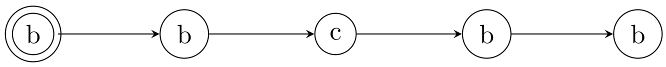
[*24] この節以外でも、次の命題は使うことがある。
[*25] このことは、次の節でより自然に証明される。

から誘導された関手のことを指す。上の関手により、二つのゲームがあった時に入力集合と出力集合に対応があれば戦略にも対応がつけられると考えられる。

Example 7.1. 囚人のジレンマゲームの戦略 $\mathrm{Str}(\Lambda, \Lambda), \Lambda = \{c, b\}$ の object で、相手の手と無関係なものを選ぼう。例えば、n 手目に π の小数点台 n 桁目が偶数なら c 奇数なら b を出す戦略を考えよう。例えば 0 番目の手は 3 が奇数なので b である。途中まで図で書くと



となる。この戦略は関手 $G(\alpha : \Lambda \to \{*\}, \mathrm{id}_\Lambda)$ によって[*26]、次に示す入力変数が一つの戦略から移るものである。



ルール変更の関手の性質をいくつかみていこう。ルール変更の関手は射をそのまま移すので faithful である。full であるのはどのようなときか、その十分条件を与える。

Proposition 7.1 (エピ射は fully faithful な関手に移る)**.** $\alpha : \Lambda' \to \Lambda$ が全射で $\beta : H \to H'$ が単射であるとき、$G(\alpha, \beta) : \mathrm{Str}(\Lambda, H) \to \mathrm{Str}(\Lambda', H')$ は fully faithful である。

Proof. faithful はすでにわかっているので full だけ示そう。$\mathrm{Str}(\Lambda, H)$ の object σ_X, σ_Y と $\mathrm{Str}(\Lambda', H')$ の射 $\phi : G(\alpha, \beta)(\sigma_X) \to G(\alpha, \beta)(\sigma_Y)$ を任意に取ろう。ϕ が $\mathrm{Str}(\Lambda, H)$ の射 $\phi : \sigma_X \to \sigma_Y$ となることを示せば良い。図の射であることは α が全射であることから従い、始点つき図の射であることは initial point を変えないことから従い、戦略の射であることは β の単射性から従う。 □

この性質から、例えば相手の手を考えない囚人のジレンマゲームの戦略の圏は考える戦略の圏に fully faithful に埋め込めることがわかる。また、ルール変更の関手は射を写像としてそのまま移すので、次の命題が成立する。

Proposition 7.2 (単射、全射は保存される)**.** ルール変更の関手で単射は単射に、全射は全射に移る。

8 様々な関手

前の節でルール変更の関手を定義した。ここから圏論的に考えていくために、これまで定義した概念を圏論的に表し圏論的な性質を示しておこう。この節では入力集合を Λ に出力変数を H に固定し、$\mathrm{Str}(\Lambda, H)$ を Str と略記する。

Definiton 8.1 ($\mathrm{Min}, \mathrm{Ire}, \mathrm{Rep}$)**.** 関手 $\mathrm{Min}, \mathrm{Ire}, \mathrm{Rep} : \mathrm{Str} \to \mathrm{Str}$ を次のように定義する。Min は domain の object σ_X を $\mathrm{Im}(p_X)$ に移し、射 $\phi : \sigma_X \to \sigma_Y$ をその制限 $\phi_{\restriction_{\mathrm{Im}(p_X)}} : \mathrm{Im}(p_X) \to \mathrm{Im}(p_Y)$ に移す[*27]。Ire は

[*26] α は一意に定まる。
[*27] もちろん well-defined が問題になる。Cir が initial object であるから $\phi \circ p_X = p_Y$ となることを用いよ。

domain の object σ_X を極大な同値関係 $\equiv$ で割った $\sigma_X/\equiv$ に移し、射 $\phi : \sigma_X \to \sigma_Y$ を可換図式

$$\begin{tikzcd}
\sigma_X \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{Ire}(\sigma_X) \arrow[d, "\mathrm{Ire}(\phi)"] \\
\sigma_Y \arrow[r] & \mathrm{Ire}(\sigma_Y)
\end{tikzcd}$$

を可換にする $\mathrm{Ire}(\phi)$ に移す[*28]。横方向の射は標準的射影を表す。Rep は domain の object σ_X を $\tilde{\sigma_X}$ に移し、射 $\phi : \sigma_X \to \sigma_Y$ を恒等射 $\mathrm{id}_{\tilde{\sigma_X}}$ に移す[*29]。

関手性の証明は略す。これまでの議論から、Min の像は minimal になり、Ire の像は irreducible になる。これらの概念は、戦略をある性質を満たすような形に同値なまま変換して得られる。同値なままであることを保証するためにこれまで変換前と変換後の戦略の間に射を与えてきた。関手としてかけた今、この射に対応するのは恒等関手 1_{Str} との間の自然変換であろう。

Theorem 8.1 (恒等関手との自然変換)**.** 埋め込み $i_\sigma : \mathrm{Min}(\sigma) \to \sigma$、標準的全射 $q_\sigma : \sigma \to \mathrm{Ire}(\sigma)$、表現からの射 $p_\sigma : \tilde{\sigma} \to \sigma$ (σ は Str の object) はそれぞれ自然変換 $i : \mathrm{Min} \Rightarrow 1_{\mathrm{Str}},\ q : 1_{\mathrm{Str}} \Rightarrow \mathrm{Ire},\ p : \mathrm{Rep} \Rightarrow 1_{\mathrm{Str}}$ を定める。

Proof. i, q は定義より明らかである。p は Cir が initial object であることを用いる。 □

今後も i, q, p の記法を用いる。この定理は、この関手を繰り返し用いても元の戦略と同値な戦略しか出てこないことを保証している。より一般的に書いておこう。

Proposition 8.1 (戦略の変換と同値性)**.** 二つの関手 $F, F' : \mathrm{Str} \to \mathrm{Str}$ が $\mathrm{Str}^{\mathrm{Str}}$ の zigzag で結ばれているとき[*30]、Str の任意の object σ について $F(\sigma) \sim F'(\sigma)$ となる。

Proof. 示したいことは $F(\sigma)$ と $F'(\sigma)$ が zigzag で結ばれることだが、仮定の自然変換を用いれば良い。 □

今まで行ってきた同値証明はこれを用いて示される。例えば、simple な形の構成で得られた戦略が元の戦略と同値であることは、$\mathrm{Str}^{\mathrm{Str}}$ の図式

$$1_{\mathrm{Str}} \overset{p}{\Longleftarrow} \mathrm{Rep} \overset{q_{\mathrm{Rep}}}{\Longrightarrow} \mathrm{Ire}\,\mathrm{Rep}$$

から従う。

これまで考えてきた概念の中でまだ関手で書かれていないものは simple である。simple は $\mathrm{Min}\,\mathrm{Ire}$ や $\mathrm{Ire}\,\mathrm{Min}$ などと書かれてほしいが、これらが本当に simple を表すのかわからない。そこで、実は $\mathrm{Min}\,\mathrm{Ire}$ と $\mathrm{Ire}\,\mathrm{Min}$ が自然同型であることを見ていく。これが示されれば、$\mathrm{Min}\,\mathrm{Ire}$ の像は同時に $\mathrm{Ire}\,\mathrm{Min}$ の像となり、minimal かつ irreducible、つまり simple であることが示される。基本的な主張を補題の形で書いておく。

Lemma 8.1 (minimal からの射は一意)**.** Str の minimal な object σ について、σ から伸びる射は存在するなら一意である。

[*28] 剰余の普遍性より一意に存在する。
[*29] σ_X, σ_Y は射でつながっているため同値である。
[*30] つまり、向きは気にせず自然変換の列で繋がれているとき。

Proof. 射 $\phi, \psi : \sigma \to \sigma'$ を取ろう。

$$\begin{tikzcd} \tilde{\sigma} \arrow[r, two heads, "p_\sigma"'] & \sigma \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \sigma' \end{tikzcd}$$

p_σ は σ が minimal なので全射である。$\phi \circ p_\sigma = \psi \circ p_\sigma$ と合わせて示される。 □

Proposition 8.2 (Min と Ire の可換性)**.** Min Ire と Ire Min は自然同型である。

Proof. σ を Str の object とする。補題より図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Min}\,\sigma \arrow[r, two heads, "q_{\mathrm{Min}\,\sigma}"] \arrow[d, "\mathrm{Min}\,q_\sigma"'] & \mathrm{Ire}\,\mathrm{Min}\,\sigma \arrow[d, hook, "\mathrm{Ire}\,i_\sigma"] \\ \mathrm{Min}\,\mathrm{Ire}\,\sigma \arrow[r, hook, "i_{\mathrm{Ire}\,\sigma}"'] & \mathrm{Ire}\,\sigma \end{tikzcd}$$

は可換である。$i_{\mathrm{Ire}\,\sigma}$ が単射であるので、$\mathrm{Ire}\,\mathrm{Min}\,\sigma$ の剰余の普遍性から次の図式を可換にする射 η_σ が一意に存在する。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Min}\,\sigma \arrow[r, two heads, "q_{\mathrm{Min}\,\sigma}"] \arrow[d, "\mathrm{Min}\,q_\sigma"'] & \mathrm{Ire}\,\mathrm{Min}\,\sigma \arrow[d, hook, "\mathrm{Ire}\,i_\sigma"] \arrow[dl, dotted, "\eta_\sigma"'] \\ \mathrm{Min}\,\mathrm{Ire}\,\sigma \arrow[r, hook, "i_{\mathrm{Ire}\,\sigma}"'] & \mathrm{Ire}\,\sigma \end{tikzcd}$$

ただし、右下の三角形の可換性は $q_{\mathrm{Min}\,\sigma}$ の全射性からわかる。縦方向の射の全射性、単射性から η_σ の全射性、単射性がそれぞれわかるので η_σ は同型射である。η が自然変換であることは、射 $\phi : \sigma \to \sigma'$ について次の図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Min}\,\sigma \arrow[r, two heads, "q_{\mathrm{Min}\,\sigma}"] \arrow[d, "\mathrm{Min}\,\phi"'] & \mathrm{Ire}\,\mathrm{Min}\,\sigma \arrow[r, "\eta_\sigma"] \arrow[d, "\mathrm{Ire}\,\mathrm{Min}\,\phi"'] & \mathrm{Min}\,\mathrm{Ire}\,\sigma \arrow[d, "\mathrm{Min}\,\mathrm{Ire}\,\phi"'] \\ \mathrm{Min}\,\sigma' \arrow[r, two heads, "q_{\mathrm{Min}\,\sigma'}"] & \mathrm{Ire}\,\mathrm{Min}\,\sigma' \arrow[r, "\eta_{\sigma'}"] & \mathrm{Min}\,\mathrm{Ire}\,\sigma' \end{tikzcd}$$

を見れば良い。補題で長方形の可換性、q_{Min} の naturality で左の正方形の可換性を示した後、$q_{\mathrm{Min}\,\sigma}$ の全射性を使う。[*31] □

以上の理由から、Min Ire の像は simple であるので次の定義は妥当である。

Definiton 8.2 (Sim)**.** 関手 $\mathrm{Sim} : \mathrm{Str} \to \mathrm{Str}$ を $\mathrm{Sim} := \mathrm{Min}\,\mathrm{Ire}$ と定める。

多くの場合、Sim は Ire Min とも同一視する。この Sim が戦略を simple な戦略に移す関手であることから、Ire と Min で移った射はその順序にかかわらず同型射となることなどが従う。

9 他のゲームへの帰着

ここまで、様々な概念を圏の言葉で書いてきた。ルール変更の関手と前節で書いた 4 つの関手はどのような対応を持ち、どう活用できるのかを考えたい。G から G への自然変換となってくれれば嬉しいのだが、そうはならない。しかし、いくつかの有用な視点を与えてくれる。例えば、囚人のジレンマゲームで相手の手が見える戦略と見えない戦略の対応を考えてみよう。その前にいくつか命題を示しておく。

[*31] q_{Ire} を用いるのに i_{Ire} を用いないことに違和感を覚えるかもしれないが、i_{Ire} を用いても同様に証明ができる。

Proposition 9.1 (Min σ の普遍性)**.** Str の object σ, σ' と単射 $\phi : \sigma' \to \sigma$ について、図式

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Min}\sigma \arrow[r, hook, "i_\sigma"] \arrow[d, dotted, "\psi"'] & \sigma \\ \sigma' \arrow[ur, hook, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\psi : \operatorname{Min}\sigma \to \sigma'$ が一意に存在する。またこのとき ψ は単射である。

Proof. 存在が示されれば、一意性は minimal な object からの射が存在すれば一意であることを用いればわかり、単射は図式から従う。存在を示そう。可換図式

$$\begin{tikzcd} \tilde{\sigma} \arrow[r, two heads, "p_{\operatorname{Min}\sigma}"] \arrow[d, "p_{\sigma'}"'] & \operatorname{Min}\sigma \arrow[d, hook, "i_\sigma"] \\ \sigma' \arrow[r, hook, "\phi"] & \sigma \end{tikzcd}$$

で Min σ に剰余の普遍性を用いて図式

$$\begin{tikzcd} \tilde{\sigma} \arrow[r, two heads, "p_{\operatorname{Min}\sigma}"] \arrow[d, "p_{\sigma'}"'] & \operatorname{Min}\sigma \arrow[d, hook, "i_\sigma"] \arrow[dl, dotted, "\psi"'] \\ \sigma' \arrow[r, hook, "\phi"] & \sigma \end{tikzcd}$$

を可換にする ψ を得る。右下の可換性は $p_{\operatorname{Min}\sigma}$ の全射性から従う。 □

Proposition 9.2 (minimal を保つルール変更)**.** $G = G(\alpha, \beta)$ は $\alpha : \Lambda' \to \Lambda$ が全射であるとき minimal を保つ。またこのとき Min G と G Min は自然同型である[*32]。

Proof. まず、minimal を保つことを示す。σ を minimal な $\mathrm{Str}(\Lambda, H)$ の object としよう。このとき、p_σ は全射であり G は全射を保つので図式

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G\sigma} \arrow[d, "p_{G\tilde{\sigma}}"'] \arrow[dr, "p_{G\sigma}"] & \\ G\tilde{\sigma} \arrow[r, two heads, "Gp_\sigma"'] & G\sigma \end{tikzcd}$$

を得る。今、$p_{G\sigma}$ が全射であることを言いたいが、図式より $p_{G\tilde{\sigma}}$ の全射性を示せば十分である。$p_{G\tilde{\sigma}}$ は写像としては各成分を α で送る写像

$$p_{G\tilde{\sigma}} : \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda'^n \to \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda^n$$

であるので α の全射性より全射となる。次に自然同型を示そう。Min $G\sigma$ の普遍性より図式

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Min} G\sigma \arrow[r, hook, "i_{G\sigma}"] \arrow[d, dotted, "\eta_\sigma"'] & G\sigma \\ G\operatorname{Min}\sigma \arrow[ur, hook, "Gi_\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする η_σ が一意に存在し、これは単射である。G Min σ は minimal なので η_σ は全射でもある。naturality は Ire と Min の可換性のときと同様に示される。G で単射が保存されることを用いよ。 □

[*32] それどころか関手として等しいと予想しているが、今回は示す必要がないので示さない

これによって、次の定理が示される。つまり、α が全射であるようなルール変更において、minimal であることは変更前のルールでも変更後のルールで見ても同じことだと主張している。

Theorem 9.1. α が全射であるとき、$G(\alpha,\beta)\sigma$ が minimal であることは σ が minimal であることと同値である。

Proof. $G\sigma$ が minimal であることを仮定して σ が minimal であることを示そう。σ に伸びる射 ϕ を任意にとろう。ϕ を G でうつせば $G\sigma$ への射になるので $G\phi$ が全射であることがわかる。$G\phi$ と ϕ は写像として等しいのでこれで示せたことになる。 □

10 Min と Ire の duality

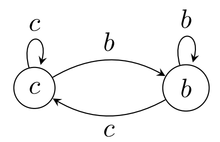
ここまで、Min の性質を見てきたが、Ire の性質も見ていかないと Sim の性質に迫れない。実は、Min と同様の議論で同様の性質が示せるのである。minimal、Min はそれぞれ irreducible、Ire に対応する。今まで Min の議論がしやすかったのは表現を考えていたからである。表現に対応する概念を考えよう。表現は、Dyn_* の initial object から発想を得ているのだった。この章の途中までは入力集合 Λ と出力集合 H を固定する。

Definiton 10.1 (Dyn^*)**.** 圏 Dyn^* を定義する。object は Dyn の object X と写像 $\sigma : X \to H$ の組 (X,σ) である。(X,σ) を単に σ や σ_X とも書く。射 $\sigma_X \to \sigma_Y$ は Dyn の射 $\phi : \sigma_X \to \sigma_Y$ であって図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\sigma_X"] & \\ Y \arrow[r, "\sigma_Y"'] & H \end{tikzcd}$$

を可換にするものである。

これは戦略から initial point を忘却したものである。Dyn^* の object を始点なし戦略と呼ぶことにする。始点なし戦略をイラストで書くと次のようになる。



始点を定めることによって初めて戦略が一つ定まるのである。そこで、始点なし戦略 σ で始点 x を定めて戦略としたものを σ^x と書くことにしよう。この記法により、σ が irreducible であることは $\sigma^x \sim \sigma^y \Rightarrow x = y$

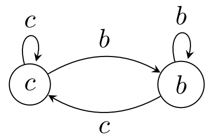
などとかける。今まで出てきた圏で Str から忘却して得られるものをまとめると

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Str} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Dyn}_* \arrow[dr] & & \mathrm{Dyn}^* \arrow[dl] \\ & \mathrm{Dyn} \arrow[d] & \\ & \mathrm{Set} & \end{tikzcd}$$

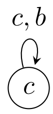
となる。射は全て忘却関手である。さて、Dyn_* の initial object　Cir が表現の発想を与えたわけなので、ここでは Dyn^* の terminal object を考えたい。ただし、Cir のときほど単純ではない。その構成に正規同値関係を用いる。戦略に関する正規同値関係や極大な正規同値関係の議論は Dyn^* でも成立することに注意して欲しい[*33]。始点なし戦略は始点を持たないので、複数の始点なし戦略を並べただけのものも再び始点なし戦略となる。

Definiton 10.2 (始点なし戦略の直和)**.** 集合 I で添字付けられた始点なし戦略の族 $\{\sigma_i : (X_i, (f_{i,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}, \sigma_i)\}_{i\in I}$ について、その直和 $\coprod_{i\in I}\sigma_i$ を $\coprod_{i\in I}\sigma_i := (\coprod_{i\in I} X_i, (\coprod_{i\in I} f_{i,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}, \coprod_{i\in I}\sigma_i)$ と定める。ただし、$\coprod_{i\in I}\sigma_i$ は射影 $\coprod_{i\in I} H = I\times H \to H$ を合成した H への写像と考える。

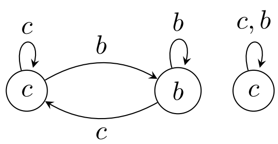
例えば、



と



の直和は



である。各直和因子から直和への埋め込みを標準的単射ということにしよう。直和の普遍性について述べておこう。

Proposition 10.1 (直和の普遍性)**.** 集合 I で添字付けられた始点なし戦略の族 $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ と始点なし戦略 σ

[*33] むしろ本質的には Dyn^* での議論であったというべきだろう。

と I で添字付けられた始点なし戦略の射の族 $\{\phi_i : \sigma_i \to \sigma\}_{i\in I}$ について、次の I で添字付けられた図式

$$\begin{tikzcd} \sigma_i \arrow[d] \arrow[dr, "\phi_i"] & \\ \coprod_{i\in I} \sigma_i \arrow[r, dotted, "\psi"] & \sigma \end{tikzcd}$$

を同時に可換にする射 $\psi : \coprod_{i\in I} \sigma_i \to \sigma$ が一意に存在する。ただし、縦の射は標準的単射である。

Proof. 直和の元が σ_i の元であるときに、ϕ_i で移せばよい。 □

terminal object の作り方は、イメージとしては始点なし戦略全ての直和を極大な同値関係で割ったものである。しかし、ここでサイズの問題が発生する。つまり、始点なし戦略全ての集まりは真クラスであるので安直には扱えないのである。そこで、Cir 上の戦略だけを集めて議論する。Cir は始点付き図であるが、始点を忘却したものも Cir と書くことにする。

Definiton 10.3 (Coc)**.** Dyn の object Cir 上の始点なし戦略全体の集合を I とし[*34]、$\coprod_{\sigma\in I} \sigma$ を極大な正規同値関係で割ったものを Coc と書く。

どんな戦略 (の同値類) も Coc の点を一つ選ぶことで実現し、その選び方はただ一通りであるように定義した。つまり、Coc の点は戦略の "同値類" と一対一対応している。これからの目標は Coc が Dyn* の terminal object であることの証明である。そのために、一つ命題を示しておく。

Proposition 10.2 (irreducible にのびる射は一意)**.** σ が irreducible な始点なし戦略であるとき、σ にのびる射は存在するならば一意である。

Proof. 背理法で示す。$\sigma = (X, (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \sigma)$, $\sigma' = (X', (f'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \sigma')$ とおこう。始点なし戦略の射 $\phi, \psi : \sigma' \to \sigma$ をとる。任意に $a \in X'$ をとって $\sigma^{\phi(a)} \sim \sigma^{\psi(a)}$ を示せばよい。$\sigma^{\phi(a)} \sim \sigma^{\psi(a)}$ とは図式で書けば

$$\begin{tikzcd} & (X, \phi(a)) \arrow[dr, "\sigma"] & \\ \mathrm{Cir} \arrow[ur] \arrow[dr] & & H \\ & (X, \psi(a)) \arrow[ur, "\sigma"] & \end{tikzcd}$$

が可換になることである。つまり、任意の $n \in \mathbb{N}$ と $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ について $\sigma \circ f_{\lambda_n} \circ \cdots \circ f_{\lambda_1} \circ \phi(a) =$

[*34] $I = \{\mathrm{Cir}\} \times (\mathrm{Cir}^{\mathrm{Cir}})^\Lambda \times H^{\mathrm{Cir}}$ ゆえに大きさの問題は解決されている。

$\sigma \circ f_{\lambda_n} \circ \cdots \circ f_{\lambda_1} \circ \psi(a)$ なることを示せばよい。これは可換図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f_{\lambda_1}"'] & X' \arrow[l, "\phi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f'_{\lambda_1}"'] & X \arrow[d, "f_{\lambda_1}"'] \\
X \arrow[d, "f_{\lambda_2}"'] & X' \arrow[l, "\phi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f'_{\lambda_2}"'] & X \arrow[d, "f_{\lambda_2}"'] \\
\vdots \arrow[d, "f_{\lambda_{n-1}}"'] & \vdots \arrow[d, "f'_{\lambda_{n-1}}"'] & \vdots \arrow[d, "f_{\lambda_{n-1}}"'] \\
X \arrow[d, "f_{\lambda_n}"'] & X' \arrow[l, "\phi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f'_{\lambda_n}"'] & X \arrow[d, "f_{\lambda_n}"'] \\
X \arrow[dr, "\sigma"'] & X' \arrow[l, "\phi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\sigma'"'] & X \arrow[dl, "\sigma"'] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

で a を追えばわかる。 □

準備が整ったので Coc が terminal object であることを示そう。

Theorem 10.1 (Coc は terminal object)**.** 任意の始点なし戦略 σ について、Coc への射 $\phi : \sigma \to \mathrm{Coc}$ が一意に存在する。

Proof. 存在すれば一意性は前の命題で示される。存在を示そう。$\sigma = (X, (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \sigma)$, $\mathrm{Coc} = (\mathrm{Coc}, (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \tau)$ とおく。$x \in X$ に対して始点なし戦略の射 $\psi_x : \widetilde{\sigma^x} \to \mathrm{Coc}$ を、標準的単射 $\widetilde{\sigma^x} \to \coprod_{\sigma\in I} \sigma$ と[*35]標準的全射 $\coprod_{\sigma\in I} \sigma \to \mathrm{Coc}$ の合成として定める。そして、写像 $\phi : X \to \mathrm{Coc}$ を $\phi(x) = \psi_x(())$ として定める[*36]。写像 ϕ が始点なし戦略の射であることを証明すればよい。ϕ の定義より、$\psi_x : \widetilde{\sigma^x} \to \mathrm{Coc}^{\phi(x)}$ は (始点つき) 戦略の射となる。よって、

$$\sigma^x \xleftarrow{p_{\sigma^x}} \widetilde{\sigma^x} \xrightarrow{\psi_x} \mathrm{Coc}^{\phi(x)}$$

となり、$\sigma^x \sim \mathrm{Coc}^{\phi(x)}$ を得る。任意の $x \in X$ について $\sigma^x \sim \mathrm{Coc}^{\phi(x)}$ であることとは、任意の $n \in \mathbb{N}$ と $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ について $\sigma \circ f_{\lambda_n} \circ \cdots \circ f_{\lambda_1} = \tau \circ g_{\lambda_n} \circ \cdots \circ g_{\lambda_1} \circ \phi$ なることである。始点なし戦略の射であるための二つの条件を示していく。まず、Dyn の射であることだが、任意の $x \in X$ と $\lambda \in \Lambda$ について $g_\lambda \circ \phi(x) = \phi \circ f_\lambda(x)$ なることを示せばよい。Coc は irreducible なので $\mathrm{Coc}^{g_\lambda \circ \phi(x)} \sim \mathrm{Coc}^{\phi \circ f_\lambda(x)}$ なること、つまり任意の $n \in \mathbb{N}$ と $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ について $\tau \circ g_{\lambda_n} \circ \cdots \circ g_{\lambda_1} \circ g_\lambda \circ \phi = \tau \circ g_{\lambda_n} \circ \cdots \circ g_{\lambda_1} \circ \phi \circ f_\lambda$ なることを示しても同じことである。これは $\sigma^x \sim \mathrm{Coc}^{\phi(x)}$ から従う。次に始点なし戦略の射となること、つまり図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[dd, "\phi"'] & \\
& H \\
\mathrm{Coc} \arrow[ur, "\tau"] &
\end{tikzcd}$$

[*35] ここでも I は Cir 上の始点なし戦略全体の集合である。

[*36] () は Cir の initial point であった。

が可換になることを示そう。これは上で書いた $\sigma^x \sim \mathrm{Coc}^{\phi(x)}$ の言い換えで $n=0$ とすればよい。 □

Min の性質は、表現の存在によって示されていた。Cir でいう表現を Coc でも考えよう。

Definiton 10.4 (双対表現)**.** x を initial point とする戦略 σ と始点なし戦略の射 $j : \sigma \to \mathrm{Coc}$ について[*37]、$\mathrm{Coc}^{j(x)}$ を σ の双対表現といい $\hat{\sigma}$ と書く。戦略の射 $\sigma \to \hat{\sigma}$ を j_σ と書く。

同値という概念は、同一の表現を持つこととして定義された。同一の双対表現を持つこととしても同値の概念は変わらない。つまり、同一の表現を持つことと同一の双対表現を持つことは同値である。

Proposition 10.3 (同一の表現を持つ ⇔ 同一の双対表現を持つ)**.** 戦略 σ, σ' が同値な戦略であることと同一の双対表現を持つことは同値である。

Proof. 同値であることは zigzag で繋がることであった。$\hat{\sigma} = \hat{\sigma'}$ と仮定する。このとき

$$\sigma \xrightarrow{j_\sigma} \hat{\sigma} \xleftarrow{j_{\sigma'}} \sigma'$$

となり zigzag で結ばれる。逆に射 $\phi : \sigma \to \sigma'$ が存在したとき同一の双対表現を持つことを示そう。これが示されれば機能的に zigzag で結ばれたときについても示される。始点なし戦略の図式

$$\begin{tikzcd} \sigma \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "j_\sigma"] & \\ \sigma' \arrow[r, "j_{\sigma'}"'] & \mathrm{Coc} \end{tikzcd}$$

は Coc が terminal object なので可換である。σ, σ' の initial point の行き先を見れば同一の双対表現を持つことがわかる。 □

minimal であることは、表現からの射が全射であることと言い換えられた。このことから minimal な戦略は本質的には Cir 上の戦略の剰余であると言えた。irreducible も同様に、双対表現への射が単射であることと言い換えられる。そして irreducible な戦略が本質的には Coc 上の戦略の部分戦略であることがわかるのである。

Proposition 10.4 (irreducible ⇔ Coc 上の戦略の部分戦略)**.** 任意の戦略 σ について、σ が irreducible であることと j_σ が単射であることは同値である。

Proof. j_σ が単射であると仮定する。このとき、任意に射 $\phi : \sigma \to \sigma'$ を取ってくると可換図式

$$\begin{tikzcd} \sigma \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, hook, "j_\sigma"] & \\ \sigma' \arrow[r, "j_{\sigma'}"'] & \mathrm{Coc} \end{tikzcd}$$

より ϕ が単射であることがわかる。逆は irreducible の定義から従う。 □

この命題も含めて、minimal や irreducible であることの関手 $\mathrm{Min}, \mathrm{Ire}$ を用いた特徴付けをまとめて定理の形にしておく。

[*37] initial point を忘却することで σ も始点なし戦略とみなせる。射 j が一意に存在することは今示したのであった。

Theorem 10.2 (minimal,irreducible の同値条件)**.** 任意の戦略 σ について次が成立する。σ が minimal であること、p_σ が全射であること、i_σ が全射であること、$\mathrm{Min}\,\sigma$ が σ に同型であること、の四命題は互いに同値である。σ が irreducible であること、j_σ が単射であること、q_σ が単射であること、$\mathrm{Ire}\,\sigma$ が σ に同型であること、の四命題は互いに同値である。

Proof. σ が minimal ならば、単射 $i_\sigma : \mathrm{Min}\,\sigma \to \sigma$ は全射でもあるので $\mathrm{Min}\,\sigma$ は σ に同型である。σ が irreducible ならば、全射 $q_\sigma : \sigma \to \mathrm{Ire}\,\sigma$ は単射でもあるので $\mathrm{Ire}\,\sigma$ は σ に同型である。残りはすでに示したか自明である。 □

表現をとる操作は射を恒等射に移すことで関手となった。双対表現も同様である。

Definiton 10.5 (Cor)**.** 関手 $\mathrm{Cor} : \mathrm{Str} \to \mathrm{Str}$ を、object はその双対表現に、射は恒等射に移すことで定める。

射がのびるなら双対表現は同一なので恒等射に移すことの正当性は保証される。自然変換 $p : \mathrm{Rep} \Rightarrow 1_{\mathrm{Str}}$ の対応物も存在する。

Proposition 10.5 (j は自然変換)**.** $j_\sigma : \sigma \to \hat{\sigma}$ は自然変換 $j : 1_{\mathrm{Str}} \Rightarrow \mathrm{Cor}$ を定める。

Proof. Naturality は Cor が terminal object であることから従う。 □

ここまでは新しく定義した概念の性質を見てきた。これらの概念によって既存の概念、例えば Ire、の性質がわかることを minimal との対比で見ていこう。

Lemma 10.1 (irreducible への射は一意)**.** 戦略 σ が irreducible であるとき、σ にのびる射は存在するなら一意である。

Proof. 射 $\phi, \psi : \sigma' \to \sigma$ をとる。図式

$$\begin{tikzcd} \sigma' \arrow[r, shift left, two heads, "\phi"] \arrow[r, shift right, two heads, "\psi"'] & \sigma \arrow[r, hook, two heads, "j_\sigma"] & \hat{\sigma} \end{tikzcd}$$

から $\phi = \psi$ を得る。 □

Proposition 10.6 ($\mathrm{Ire}\,\sigma$ の普遍性)**.** Str の object σ, σ' と全射 $\phi : \sigma \to \sigma'$ について、図式

$$\begin{tikzcd} & \sigma' \arrow[d, dotted, "\psi"] \\ \sigma \arrow[ur, two heads, "\phi"] \arrow[r, two heads, "q_\sigma"] & \mathrm{Ire}\,\sigma \end{tikzcd}$$

を可換にする射 $\psi : \sigma' \to \mathrm{Ire}\,\sigma$ が一意に存在する。またこのとき ψ は全射である。

Proof. 存在が示されれば、一意性は irreducible な object への射が存在すれば一意であることを用いればわかり、全射は図式から従う。存在を示そう。可換図式

$$\begin{tikzcd} \sigma \arrow[r, two heads, "\phi"] \arrow[d, two heads, "q_\sigma"'] & \sigma' \arrow[d, "j_{\sigma'}"] \\ \mathrm{Ire}\,\sigma \arrow[r, hook, two heads, "j_{\mathrm{Ire}\,\sigma}"] & \hat{\sigma} \end{tikzcd}$$

で σ' に剰余の普遍性を用いて図式

$$
\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[r, two heads, "\phi"] \arrow[d, "q_\sigma"'] & \sigma' \arrow[d, "j_{\sigma'}"] \arrow[dl, dotted, "\psi"'] \\
\operatorname{Ire}\sigma \arrow[r, hook, "j_{\operatorname{Ire}\sigma}"] & \hat{\sigma}
\end{tikzcd}
$$

を可換にする ψ を得る。右下の可換性は ϕ の全射性から従う。 □

11　アイデア

- チェスと将棋を同時にやるとしたら？
- essentially surjective は何に対応?
- 手もその点の情報なのだから、考える必要なくねと思ったけどそのおかげで cir がある気がししてきた。
- Min, Rep, Ire の二乗は自身と同型っぽいけど使えるかてか演算表が作れる。多分

演算表	Min	Ire	Rep	Sim
Min	Min	Sim	Rep	Sim
Ire	Sim	Ire	Sim	Sim
Rep	Rep	Rep	Rep	Rep
Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

  とか。
- 今までの証明を圏論的に書き直せ。
- $\operatorname{Min}\sigma$ じゃなくて Min の普遍性なんじゃね？
- $\mathrm{Str}^{\mathrm{Str}}$ で Min の普遍性とか議論しろ。
- 下層の圏が complete や cocomplete でないか確かめよ。
- 入力と出力を選べるやばく広い圏も考えられる。
- Coc の点は戦略の同値類と対応するが Cir は？
- Coc は "塗り分け" を represent する。
- Rep で同じのに移ったら同値というが、Min とかでも考えたい。
- Rep $\to$ Min $\to 1_{\mathrm{Str}} \to$ Ire $\to$ Cor を基本列などと呼びたい。全単全単となる。representation も考えよ。それ以上続かないことを見ろ。この形から一般論はないのか。
- $\operatorname{Min}\sigma, \operatorname{Ire}\sigma$ から σ は復元できるか。NO
- monic なら単射か？ NO っぽい
- simple に射がのびるなら minimal か？双対は嘘。逆は真。使えるかこれ？自明だわ。関手かけて終わりやん。
- Ire に関する G での保存や可換性はまだ示せてない。
- 先手と後手を持つ対戦の関手で必勝戦略の存在を示せ。勝敗は discrete category への関手である。
- 対戦の関手で必ず同値なら同値である。
- $F(\mathrm{Coc}, \mathrm{Coc}) \to \mathrm{Coc}$ が無駄を表しそう。
- $ev : \Lambda^2 \to \mathbb{R}$ とかで評価して ESS 考えたい。
- F と G の関係は？
- 対戦の関手で定まる自然変換について。
- 生物のモデルとして finite を考えるのは自然っぽい。

- 戦略の圏の圏
- 別件で多角形分割の圏楽しそう。分割を射でかくか、集める関手の category of elements との云々も。
- 今までの概念の特徴づけ。Min や Ire は随伴で、Str は入力や出力の集合の words で。
- 他にも随伴を考えろ。
- 対戦 (可算無限の入力) でなく有限の文字列を入力にすれば近似とか色々定義できて嬉しい。
- rep のアナロジーで図の圏からの忘却が関手圏からの云々で strictly creates なんですわ。
- コラッツと双対戦略
- もっと双対性に言及したい。Hom が Dyn になることをいい、Frac(Cir) のようなものを考えろ
- 戦略に関して、普遍被覆的な理論できないか
- 自己同型群は?
- Dyn*らを Str で書け。出力が一点とか。そこから duality が見える?
- 一番大きい圏を考えろ。上 3 つを含むようなもの。Dyn_* は始点を部分集合というか写像で捉えると bicomplete になりそう。
- 始点と値の duality、単に写像の向きだ!!!すげえ!!!

参考文献

[1] Emily Riehl, CATEGORY THEORY IN CONTEXT, DOVER, 2016.

[2] Robert Goldblatt, Topoi THE CATEGORIAL ANALYSIS OF LOGIC, DOVER, 2006.

[3] 雪江明彦, 整数論 1 初等整数論から p 進数へ, 日本評論社, 2014.

[4] ケネス・キューネン, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社, 2016.