

Obsah

1 Úvod	1
2 Základní pojmy planimetrie	2
2.1 Bod	2
2.2 Přímka	4
2.3 Osa	6
2.4 Vzájemná poloha přímek	6
2.5 Rovina	8
2.5.1 Polorovina	9
3 Úhel	11
3.1 Velikost úhlu	13
3.2 Osa úhlu	15
3.3 Úhlové míry	16
3.3.1 Oblouková míra úhlů	16
3.3.2 Stupňová míra úhlu	18
3.3.3 Převody mezi úhlovým a obloukovým úhlem	19
3.4 Orientovaný úhel	21

3.5	Dvojice úhlů	24
3.5.1	Vrcholové úhly	25
3.5.2	Vedlejší úhly	25
3.5.3	Souhlasné úhly	26
4	Vlastnosti geometrických objektů	28
4.1	Obsah geometrického objektu	28
4.2	Obvod geometrického objektu	29
4.3	Povrch	30
4.4	Objem	30
5	Planimetrie	33
5.1	Číslo pí	34
5.1.1	Výpočet hodnoty π	37
5.2	Kruh a kružnice	41
5.2.1	Obvod kružnice	42
5.2.2	Obsah kružnice	43
5.2.3	Vzájemná poloha dvou kružnic	46
5.3	Mnohoúhelníky	46
5.4	Geometrická zobrazení	46

6 Trigonometrie	47
6.1 Vlastnosti trojúhelníků	48
6.1.1 Trojúhelníková nerovnost	49
6.1.2 Shodnost trojúhelníků	50
6.1.3 Součet vnitřních úhlů	50
6.2 Klasifikace trojúhelníků	52
6.2.1 Rovnostranný trojúhelník	53
6.2.2 Rovnoramenný trojúhelník	54
6.2.3 Různostranný trojúhelník	57
6.2.4 Tupoúhlý trojúhelník	57
6.2.5 Ostroúhlý trojúhelník	58
6.2.6 Pravoúhlý trojúhelník	59
7 Goniometrie	61
7.1 Definice goniometrických funkcí sinus a kosinus	61
7.2 Rovnost goniometrických funkcí sinus a kosinus	65
7.3 Sinová věta	68
8 Stereometrie	71
9 Konvexní geometrický útvar	72

Kapitola 1

Úvod

Elementární geometrie je obor matematiky zabývající se popisem vlastností a vzájemných vztahů plošných a prostorových útvarů. Vlastnosti geometrických útvarů se rozumějí délky stran, obvod, obsah, objem, ...

Elementární geometrie se dá rozdělit na plošnou (rovinnou) geometrii - planimetrie a prostorovou geometrii - stereometrie. Zvláštní částí geometrie je goniometrie, která se zabývá goniometrickými funkcemi (rovnicemi). Speciální oblastí goniometrie je trigonometrie, která se zabývá řešením úloh s trojúhelníky.

Elementární geometrie má obrovský význam při řešení konstrukčních úloh, fyzikálních rovnic, počítačové grafiky a mnoho dalších oborů lidské činnosti.

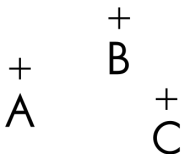
Kapitola 2

Základní pojmy planimetrie

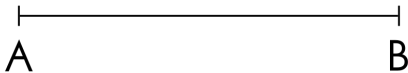
Základní pojmy elementární geometrie jsou **bod**, **přímka** a **rovina**. Pomocí těchto pojmů (axiomů, geometrických objektů) lze vytvořit libovolný geometrický útvar a budovat tak teorii geometrie.

2.1 Bod

Bod je bezrozměrný geometrický útvar, pomocí kterého se definují ostatní geometrické objekty. Bod je vyjádření pozice v rovině nebo v prostoru. Algebraicky je bod vyjádřen n souřadnicemi, kde n je rozměr prostoru ve kterém se daný bod nachází. V dvojrozměrném prostoru (rovině) je bod reprezentován dvěma číselnými hodnotami - šířka a délka. V trojrozměrném prostoru je bod reprezentován třemi číselnými hodnotami - šířka, délka a výška. Jedná se o uspořádanou n -tici číselných hodnot. Souřadnice bodu se zapisují do hranatých závorek - $[x, y, ..z]$ a značí se pomocí velkého tiskacího písmene abecedy - A, B, \dots Ve výkresech se body kromě jeho jména zapisují také křížkem, který přesně říká kde daný bod leží vůči ostatním bodům (objektům). Všechny geometrické útvary jsou definovány jako množina bodů.



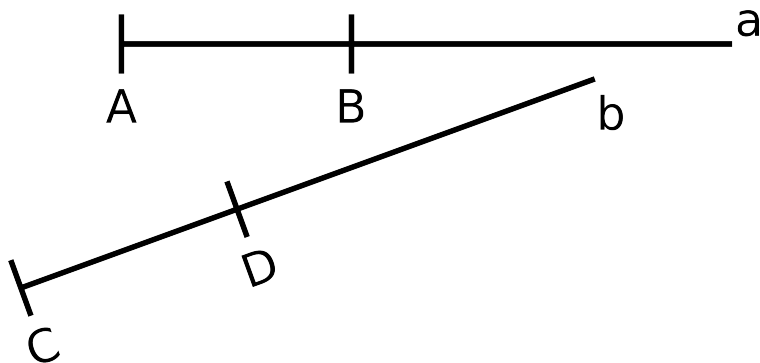
Nejkratším spojením dvou různých bodů v rovině se říká **úsečka**. Jedná se o část přímky mezi dvěma body. Tyto body se nazývají **krajní body úsečky**. Úsečka se v nákresech znázorňuje pomocí rovné čáry propojující oba krajní body a v zápisech se značí pomocí jmen jejích krajních bodů. Jestliže má tedy daná úsečka krajní body A a B , pak je v zápisech označována jako *úsečka AB* . U úsečky má cenu měřit její délku, tedy vzdálenost jejích krajních bodů. Délka úsečky se v zápisech zapisuje pomocí názvu dané úsečky uzavřené mezi dvěma svislými čarami (podobně jako absolutní hodnota reálného čísla). V případě úsečky AB je její délka zapisována $|AB| = x$. **Střed úsečky** je bod, který leží na dané úsečce a jehož vzdálenost je přesně stejná od obou krajních bodů. Středový bod úsečky je speciálním bode, který se označuje písmenem S . Jestliže je v nákrese úseček více, je pro přehlednost středovému bodu přidán dolní index s názvem úsečky na které se nachází: S_{AB} .



Bod lze také považovat za úsečku, jejíž délka je rovna nule.

2.2 Přímka

Přímka je po bodech a úsečkách nejjednodušší jednorozměrný geometrický útvar. Přímku lze definovat jako nekonečně dlouhou, nekonečně tenkou a dokonale rovnou čaru (křivku), která nemá ani konec ani začátek. Přímka je v zápisech označována malými tiskacími písmeny abecedy, například a , b , c , ... Přímka se zadává pomocí dvou bodů, protože každými dvěma body lze vést právě jednu přímku. Jeden bod slouží k určení polohy přímky v rovině a dva body společně definují její směr. Dohromady tedy určují její umístění a směr v rovině (prostoru).



Speciálním případem přímky je **polopřímka**. Jedná se o přímku, která má počátek v definovaném bodě, ale stejně jako přímka stále nemá konec. Typickým případem polopřímky jsou ramena úhlů. Bod P ležící na přímce p tuto přímku rozděluje na dvě polopřímky. Bod P se nazývá **počáteční bod polopřímky**. Tyto dvě polopřímky jsou navzájem opačné.

Jestliže je možné přímku vyjádřit jako nekonečnou množinu bodů roviny, pak bod ležící na dané přímce je tedy prvkem množiny bodů tvořící přímku. Tato skutečnost se zapisuje $A \in p$, to znamená, že bod A leží na přímce p . Jestliže daný bod neleží na přímce, tato skutečnost se zapisuje $A \notin p$. To samé platí i v případě úseček, nebo

složitějších geometrických útvarů. Pro množinu bodů (bodová množina) se v geometrii užívá pojem **geometrický útvar**.

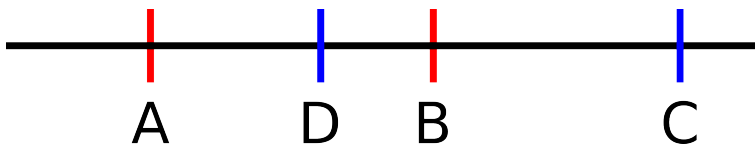
2.3 Osa

Osa je přímka, popřípadě v některých případech úsečka, která je kolmá k danému geometrickému útvaru a pólí jej na dvě symetrické (stejně) části.

2.4 Vzájemná poloha přímek

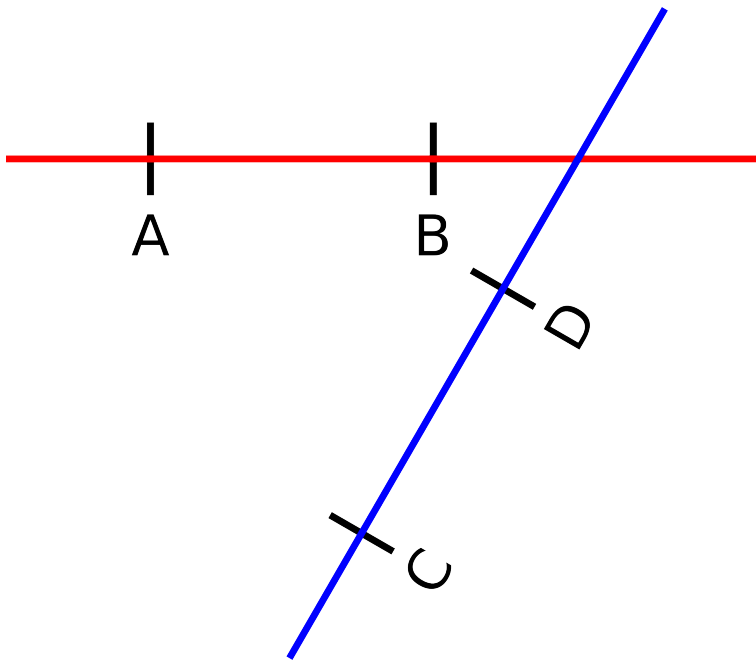
Dvě přímky v rovině mohou mít několik různých vzájemných poloh.

Jestliže jsou dvě přímky, které leží na sobě a splývají v jednu, protínají se ve všech bodech, nazývají se **přímky totožné**:

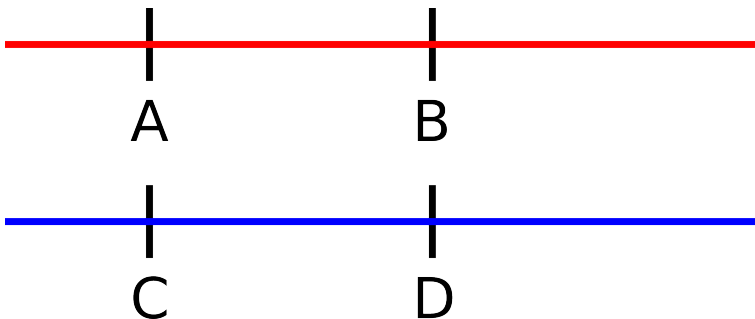


Pokud se přímky protínají v jediném bodě, nazývají se **přímky různoběžné (různoběžky)**. Bod ve kterém se obě přímky protínají se nazývá **průsečík přímek**. Speciál-

ním případem různoběžných přímek jsou **kolmé přímky (kolmice)**. Dvě navzájem kolmé přímky mezi sebou svírají úhel 90° .



Pokud se přímky neprotínají v žádném bodě, nazývají se **přímky rovnoběžné**:



2.5 Rovina

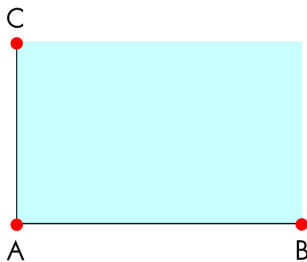
Rovinu si lze představit jako dvourozměrnou neomezenou dokonale rovnou plochu. Algebraicky si lze rovinu představit jako množinu bodů, které jsou reprezentované uspořádanou dvojicí hodnot $[x,y]$. Jedná se tedy o množinu kartézského součinu jednorozměrné souřadnicové množiny.

$$R^2 = R \times R$$

kde R je množina souřadnic tvořící jednorozměrný pros-

tor. Jedná se tedy o rozšíření jednorozměrného prostoru (přímky, číselné osy).

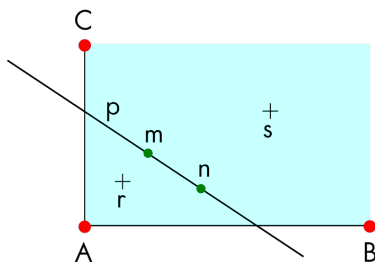
Rovina může být určena třemi různými body a nebo přímkou a bodem, který leží mimo tuto přímku. První bod tvoří počátek (výchozí bod) druhý bod šířku a třetí bod délku roviny:



Rovina je buď plocha, na kterou se kreslí geometrický výkres a nebo se znázorňuje nějakým geometrickým útvarem pomocí některého geometrického promítání. Rovina se v zápisech označuje pomocí malého řeckého písmene. Rovina je množina bodů prostoru, které vyhovují rovnici roviny.

2.5.1 Polorovina

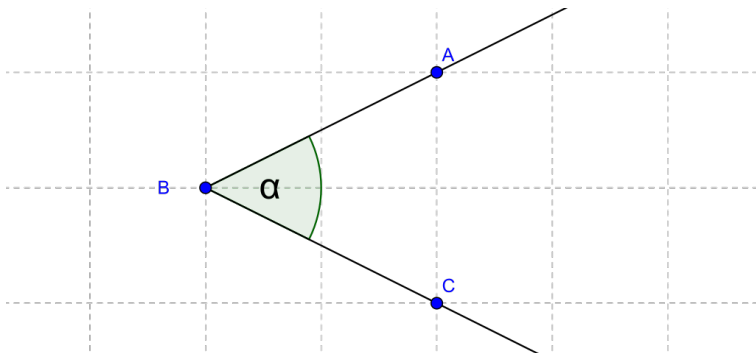
Libovolná přímka p , která leží v rovině ρ rozděluje tuto rovinu na dvě části, z nichž každá včetně přímky p se nazývá **polorovina**. Přímce p se říká **hraniční přímka poloroviny**. Každý bod X , který neleží na hraniční přímce poloroviny se nazývá **vnitřní bod poloroviny**. Množina všech vnitřních bodů poloroviny se nazývá **vnitřek poloroviny**:



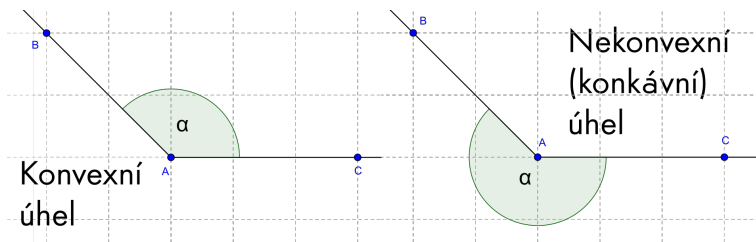
Kapitola 3

Úhel

Úhel je plocha (část roviny) vymezená dvěma polopřímkami s počátkem ve společném bodě. Polopřímky, které vymezují úhel ABC v rovině se nazývají **ramena úhlu** (polopřímky AB a BC) a společný bod polopřímek se nazývá **vrchol úhlu** (bod B). Je důležité, že úhel nejsou jen ramena, ale také celá plocha, celá rovina včetně všech bodů, kterou tato dvě ramena svírají (množina všech bodů které jsou vymezeny rameny úhlu, jedná se tedy o podmnožinu množiny definující rovinu). Každý bod úhlu ABC , který neleží na žádné z polopřímek se nazývá **vnitřní bod úhlu**. Množina všech bodů úhlu se nazývá **vnitřek úhlu**. Množina všech bodů roviny, které nepatří do úhlu, se nazývá **vnějšek úhlu**. Úhly se značí malými řeckými písmeny.



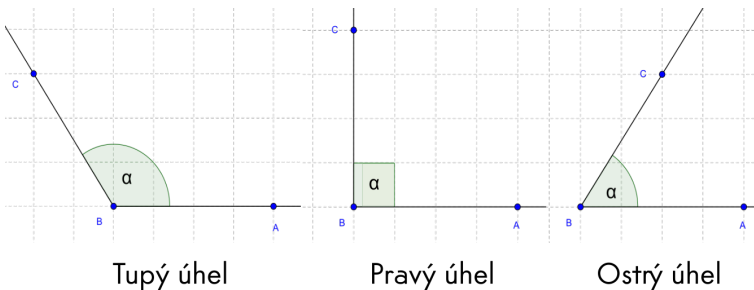
Dvě polopřímky ale rozdělí rovinu na dvě části, přičemž se obě tyto části nazývají úhel - **konvexní** a **nekonvexní (konkávní)**. Proto by se mělo v zápisech rozlišovat zda se jedná o úhel konvexní, tedy úhel menší než 180° , nebo nekonvexní, tedy úhel větší než 180° .



3.1 Velikost úhlu

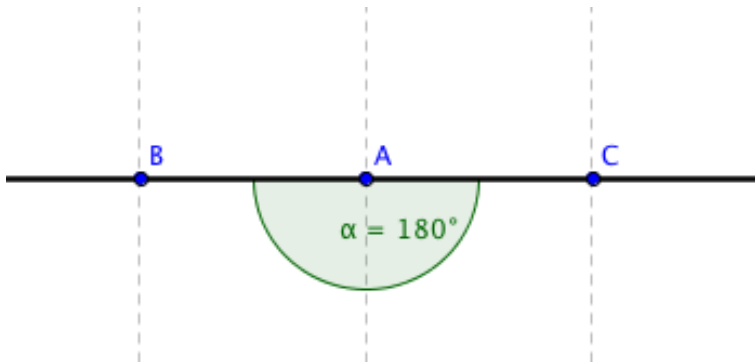
Každému konvexnímu i nekonvexnímu úhlu lze přiřadit právě jedno nezáporné číslo, které se nazývá **velikost úhlu** tak že platí, že každé dva úhly, které jsou si rovny jsou vyjádřeny stejnou hodnotou a tedy mají stejnou velikost úhlu.

Rozdělením jednoho přímého úhlu na dva shodné úhly vzniknou dva shodné konvexní úhly, které svírají úhel 90° . Konvexní úhel, který svírá 90° se nazývá **pravý úhel**. Úhel který je menší než pravý úhel se nazývá **ostrý úhel**. Konvexní úhel, který je větší než pravý úhel se nazývá **tupý úhel**.

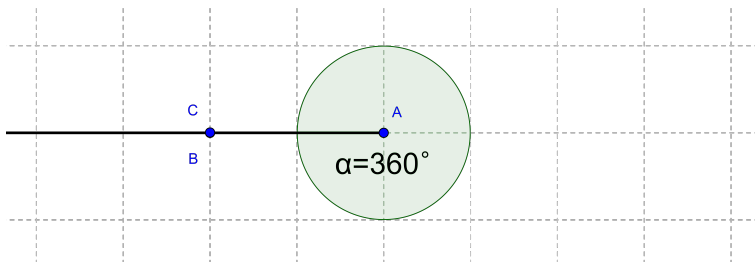


Navzájem opačné polopřímky AB a BC rozdělují rovinu v níž leží na dvě poloroviny se společnou hraniční přímkou

AB . Každé z těchto polorovin se říká **přímí úhel** ABC . Přímí úhel má tedy přesně 180° . Je to tedy polorovina, na jejíž hraniční přímce je vyznačen vrchol B úhlu.



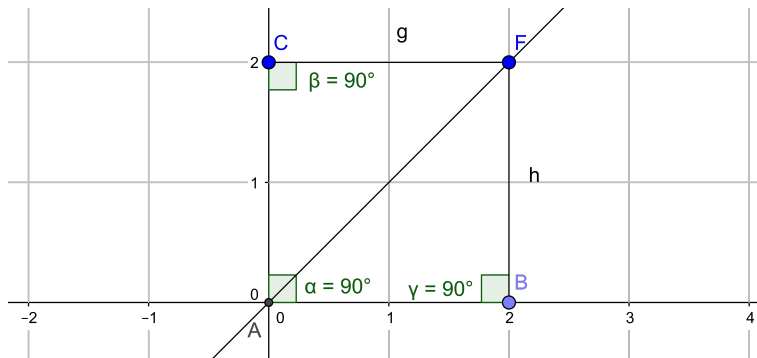
Dvě splývající polopřímky AB a BC v dané rovině tvoří úhel, který svírá 360° a nazývá se **plný úhel** a nebo 0° a nazývá se **nulový úhel**. V případě plného úhlu tvoří vnitřek úhlu všechny body dané roviny. Nulový úhel žádný vnitřek nemá.



3.2 Osa úhlu

Osa úhlu je přímka, která prochází vrcholem daného úhlu a pŕílí ho na dvě stejně velké části. Osa úhlu je v každém svém bodě stejně vzdálená od prvního i druhého ramene úhlu. Tím lze odvodit, že osu úhlu lze vytvořit u jakéhokoli nenulového úhlu. Osa úhlu se obvykle značí malým písmenem o , popřípadě s dolním indexem s názve úhlu.

Jestliže je na ose úhlu ABC zvolen libovolný bod F , pak úhly ABF a FBC jsou stejně velké.



3.3 Úhlové míry

Velikosti úhlů se zapisují dvojím způsobem, respektive ve dvou různých jednotkách (formách). Jednou z nich je **stupňová míra** a druhou je **oblouková míra**. Obě jednotky mají svá specifická využití a jsou navzájem konvertibilní, tedy úhly ve stupňové míře lze převést na úhly v obloukové míře a naopak. To je dáno tím, že obě metody ve skutečnosti měří stejnou veličinu - úhel, který má stále stejné vlastnosti.

3.3.1 Oblouková míra úhlů

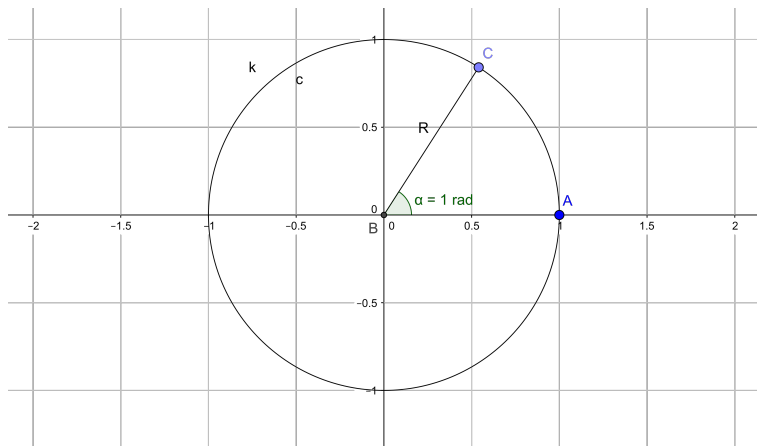
V rovině ABC je sestrojena kružnice k se středem v

bodě B a o poloměru $r = 1$. Taková kružnice se nazývá **jednotková kružnice**. Dva průsečíky kružnice, které tvoří polopřímky AB a BC s počátkem v bodě B definují oblouk s hraničními body A , C . Velikost úhlu ABC v obloukové míře se nazývá délka tohoto oblouku A , C jednotkové kružnice k , který leží v úhlu ABC .

Jednotkový úhel obloukové míry se nazývá **radián**. V zápisech se označuje značkou rad . Jeden radián je takový úhel, který na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu vytíná oblouk o délce 1. Obecně lze říci, že hodnota jednoho radiánu odpovídá délce oblouku jehož délka je rovna poloměru r kružnice k (poloměr = oblouk). Jestliže obvod kružnice je dán vzorcem, tak počet radiánů na jednu kružnici je roven:

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Tento vztah se využívá při převodech mezi hodnotami obloukové míry a hodnotami stupňové míry, nebo při výpočtech kruhové výseče.



3.3.2 Stupňová míra úhlu

Velikostí úhlu ABC ve **stupňové míře** se nazývá nezáporné číslo, které vyjadřuje, kolikrát je úhel ABC větší (popřípadě menší) než je velikost jednoho úhlového stupně. Jednotkový úhel stupňové míry se nazývá **úhlový stupeň** (krátce jen stupeň s označením $^\circ$) a je roven $\frac{1}{360}$ plného úhlu. Ve stupňové míře se také využívá menších jednotek, které se užívají k vyjádření úhlů menších než je velikost jednoho stupně a nebo jeho necelé části. **Úhlová minuta** (krátce jen minuta s označením $'$) se rovná $\frac{1}{60}$ stupně. **Úhlová vteřina**

(krátce jen vteřina s označením ") se rovná $\frac{1}{60}$ minuty. Platí tedy:

$$1^{\circ} = 60' = 360''$$

3.3.3 Převody mezi úhlovým a obloukovým úhlem

V praxi mnoho zařízení pracuje s úhly v jednotkách radiánů, tedy v obloukové míře. Ale pro lepší představu o tom jak velký úhel je danou hodnotou vyjádřen slouží stupňová míra. Díky tomu je často potřeba metoda pro převod mezi stupňovou a obloukovou mírou úhlu.

Při převodu úhlových stupňů na radiány je nejprve třeba zjistit kolika stupňům odpovídá jeden radián, neboli kolik stupňů se vejde do jednoho radiánu. Jestliže platí, že plný úhel odpovídá 360° a 2π radiánů, pak je třeba zjistit, kolikrát se hodnota plného úhlu v radiánech vejde do hodnoty plného úhlu ve stupních, tedy:

$$1Rad = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} \doteq 57,296...$$

Protože radián je definován pomocí iracionální konstanty π , je jeho vyjádření ve stupňové míře také iracionální hodnota, kterou nelze celou vyčíslit. Pro převod ze stupňů

na radiány je třeba zjistit kolikrát se hodnota 57,296... vejde do hodnoty vyjadřující úhel ve stupních:

$$Rad = \frac{x^{\circ}}{\frac{180}{\pi}} = x^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180}$$

Při převodu z radiánů na stupně se naopak počet radiánů vyjadřující úhel vynásobí hodnotou vyjadřující počet stupňů jednoho radiánu:

$$x^{\circ} = Rad \cdot \frac{180}{\pi}$$

K tomuto vztahu lze jednoduše dojít, také úpravou vzorce pro převod ze stupňů na radiány, vyjádřením proměnné x° :

$$Rad = x^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180} \Rightarrow x^{\circ} = \frac{Rad}{\frac{180}{\pi}} \Rightarrow x^{\circ} = Rad \cdot \frac{180}{\pi}$$

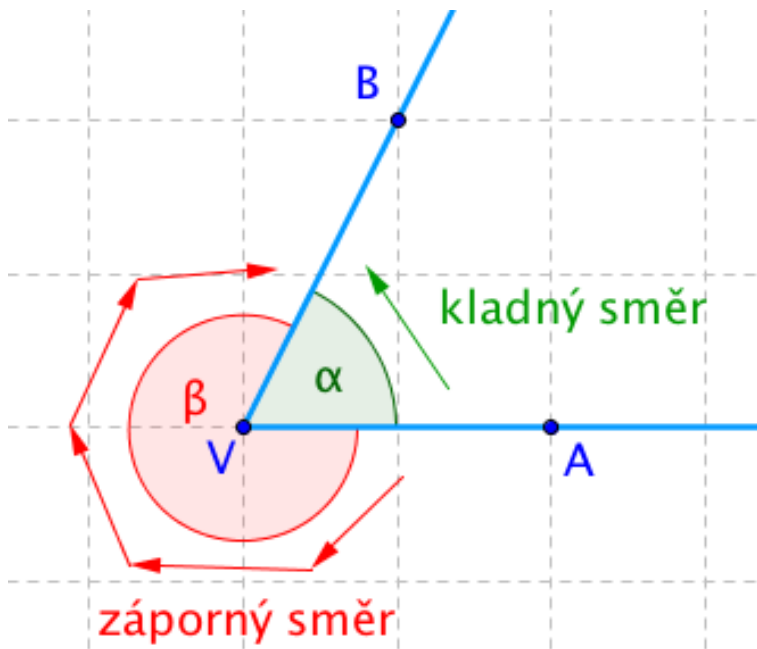
Některé důležité stupně, které se používají například u goniometrických funkcí:

<i>Stupně</i>	0	30	45	60	90	180	270	360
<i>Radiány</i>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2}{3}\pi$	2π

3.4 Orientovaný úhel

Při práci s úhly a při jejich vkládání do soustavy souřadnic je důležité kromě jejich velikosti také směr odečítání úhlu. Je třeba zvolit jedno rameno úhlu jako počáteční (v kartézské soustavě souřadnic je to většinou kladná poloosa x) a druhé rameno jako konečné. V případě orientovaného úhlu se postupuje od počátečního ramene ke konečnému:

- **Protisměru hodinových ručiček** - kladný směr
- **Po směru hodinových ručiček** - záporný směr



Toto pravidlo nevychází z žádné matematické definice, jedná se pouze o nepsanou dohodu. Z toho vyplývá, že polarita úhlů může být i opačná, ale je třeba to v zápise uvést. Nastane-li situace, že je záporný úhel odečítán od kladného a zároveň absolutní hodnota záporného úhlu je větší než

hodnota kladného úhlu, výsledný úhel bude záporný. To znamená, že došlo ke změně úhlu v záporném směru.

Orientovaný úhel jako takový je uspořádaná dvojice polopřímek se společným počátečním bodem, které tvoří hranice úhlu. V závislosti na tom, která polopřímka je uvedena jako první je definován směr orientace daného úhlu. Orientovaný úhel lze tedy zapisovat jako uspořádanou dvojici polopřímek:

$$[\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{BV}]$$

Základní velikost orientovaného úhlu je délka o jakou se úhel pootočí v kladném směru (proti směru hodinových ručiček) od počátečního ramene ke koncovému. Velikost základního úhlu je tedy vždy v intervalu $\langle 0 : 360 \rangle$ nebo v obloukové míře $\langle 0 : 2\pi \rangle$. Tento interval je zprava otevřený, protože úhel 0° splývá s úhlem 360° respektive 2π a daný úhel nemůže mít velikost 0° a zároveň 360° respektive 2π , protože by to dělalo zmatky v zápisech.

Kromě základní velikosti orientovaného úhlu je tu ještě pouze velikost orientovaného úhlu. Ta může být větší než je velikost základního úhlu, tedy 360° respektive 2π . Jestliže se daný úhel pootočí okolo své osy (nebo vícekrát) je tato skutečnost vyjádřena tak, že velikost úhlu je větší než 360° respektive 2π . Počet těchto otočení je zjištěn vydělením

daného úhlu hodnotou 360, popřípadě 2π . Například:

$$420^\circ \% 360 = 60^\circ$$

$$420 \div 360 = 1$$

došlo k jednomu úplnému otočení kolem své osy a nyní se nachází v úhlu 60° .

3.5 Dvojice úhlů

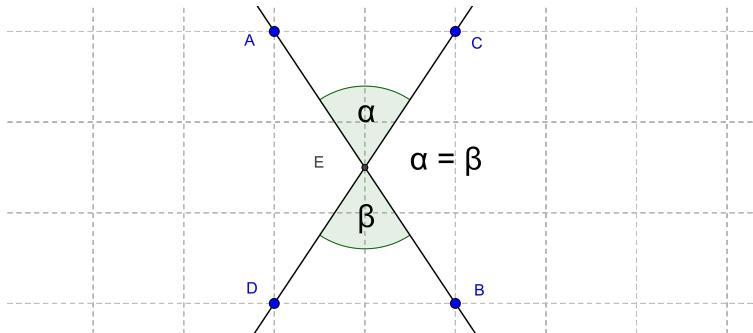
Dva různé úhly v daném uspořádání mohou navzájem vykazovat určité vlastnost, které se využívají při praktickém používání geometrie. Mezy taková uspořádání patří:

- Vrcholové úhly
- Vedlejší úhly
- Souhlasné úhly
- Střídavé úhly

Existují ještě další typy úhlů, ale už jsou to pouze pozice, které se dají odvodit na základě těchto tří výše popsaných umístění.

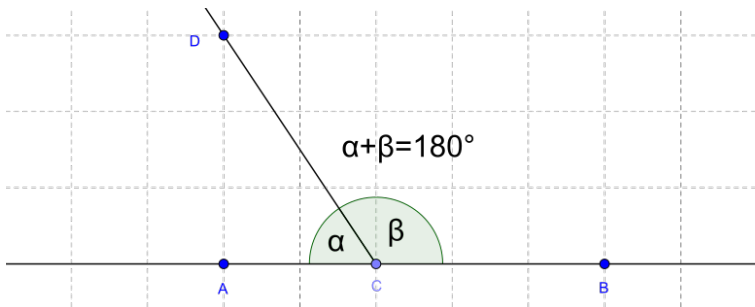
3.5.1 Vrcholové úhly

Vrcholové úhly jsou takové úhly, které mají společný vrchol a jejich ramena tvoří opačné polopřímky. Vrcholové úhly jsou vždy shodné, mají stejnou velikost.



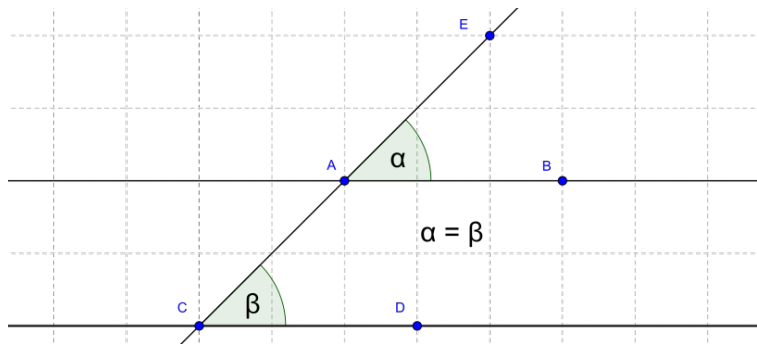
3.5.2 Vedlejší úhly

Vedlejší úhly jsou takové úhly, které mají jedno rameno společné a druhá ramena jsou opačné polopřímky. Součet vedlejších úhlů je vždy roven 180° , přímému úhlu.



3.5.3 Souhlasné úhly

Souhlasné úhly jsou úhly, jejichž první ramena jsou rovnoběžná a druhá leží na jedné přímce. Musí také platit, že úhly mají stejnou orientaci. Souhlasné úhly jsou shodné.



Kapitola 4

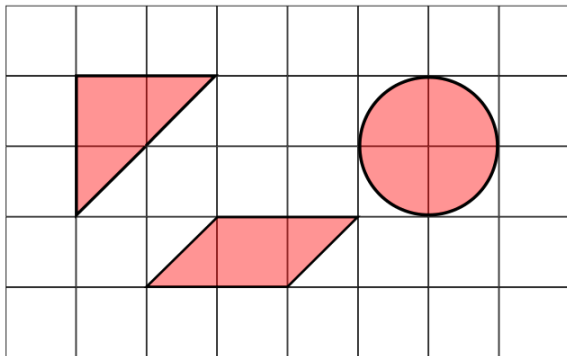
Vlastnosti geometrických objektů

Geometrické objekty ať už plošné nebo prostorové tvoří množinu bodů. To je ale abstraktní a v praxi ne moc dobře využitelný pojem. V praktickém použití je třeba využít určitých vlastností, které charakterizují daný objekt. Všechny plošné, či prostorové objekty mají určité vlastnosti, kterými se vyznačují, které jsou pro jejich aplikaci důležité a které závisí na jejich tvaru. Tyto vlastnosti jsou obsah, obvod, povrch a objem. Jednotlivé vlastnosti jsou navzájem provázány a změna jedné vlastnosti ovlivní také zbylé ostatní.

4.1 Obsah geometrického objektu

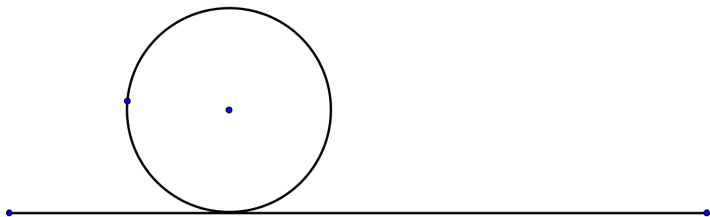
Obsah je vlastností plošných objektů a vyjadřuje velikost plochy, kterou tento objekt zabírá v rovině. Obsah se označuje velkým písmenem **S**. Měří se většinou v metrech čtverečných - m^2 , nebo jiných odvozených jednotkách - cm^2 , mm^2 , ... Index nad jednotkou vyjadřuje počet rozměrů (dimenzí), které obsah vyjadřuje. Obsah se měří ve čtverečných jednotka, protože hodnota obsahu

vyjadřuje počet čtverců o hraně jeden metr (popřípadě jiných délkových jednotkách), které se vejdou do vnitřní plochy daného plošného objektu.



4.2 Obvod geometrického objektu

Obvod je vlastností plošných geometrických objektů, která vyjadřuje součet délek jeho jednotlivých stran. Obvod se značí velkým písmenem O . Protože obvod je pouze jednorozměrná veličina, měří se v metrech, popřípadě v jeho odvozených jednotkách délky.

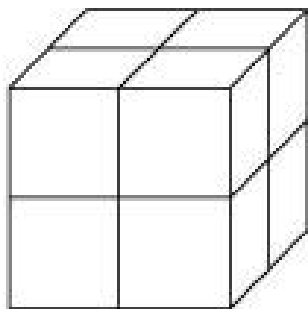
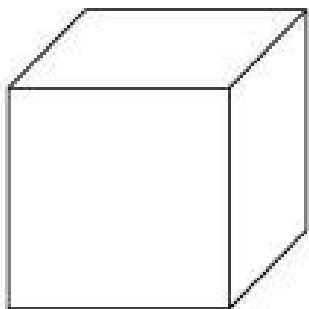


4.3 Povrch

Povrch je vlastnost prostorových geometrických objektů, která je vyjádřena součtem obsahů všech jeho plošných stěn. Jedná se tedy o zobecnění obsahu na prostorové objekty. Povrch se značí stejně jako obsah velkým písmenem **S** a stejně jako u obsahu je měřen v metrech čtverečných - m^2 , popřípadě jeho odvozenou délkovou jednotkou (cm^2 , mm^2 , ...).

4.4 Objem

Objem je vlastností prostorových objektů, která vyjadřuje velikost vnitřního prostoru, který daný objekt vyplňuje v prostoru. Objem se značí velkým písmenem **V** a měří se v krychlových metrech - m^3 , popřípadě v jeho dovozených jednotkách (cm^3 , mm^3 , ...). Index nad jednotkou vyjadřuje počet dimenzí, které objem vyjadřuje. Objem se měří ve čtverečných jednotkách, protože vyjadřuje kolik krychlí o délce hrany jeden metr (popřípadě jiných délkových jednotkách) se vejde do vnitřního prostoru daného objektu.



Kapitola 5

Planimetrie

Planimetrie je část geometrie, zabývající se vlastnostmi a vztahy plošných geometrických útvarů. Tyto dvourozměrné útvary pak slouží jako základ pro budování prostorových geometrických objektů, jejich vlastností a vztahů mezi nimi.

Speciálními oblastmi planimetrie jsou **trigonometrie** a **goniometrie**, které se zabývají vlastnostmi trojúhelníků a jejich vnitřních úhlů.

Mezi plošné geometrické objekty patří:

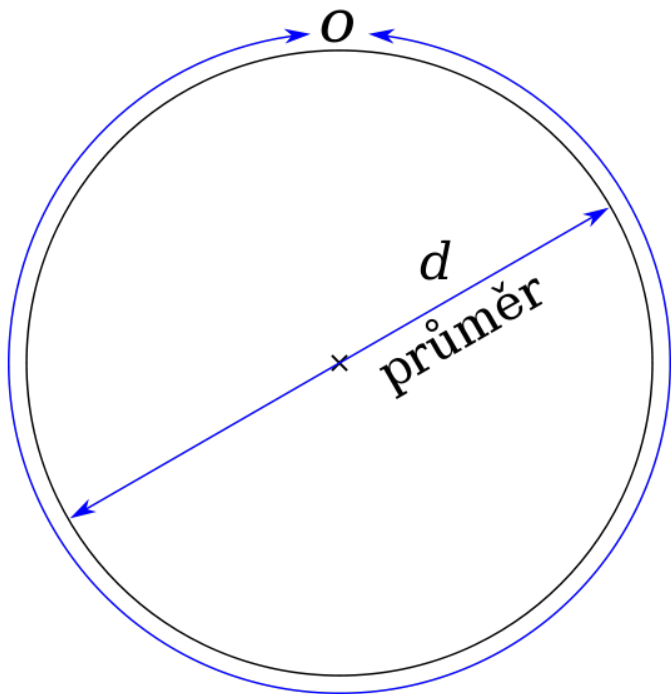
- Trojúhelník
- Obdélník
- Kosočtverec
- Kosodélník
- Lichoběžník
- Deltoid
- Kruh a kružnice

- Kuželosečky
- N-úhelník

5.1 Číslo pí

Číslo pí je nejdůležitější matematická konstanta v geometrii a v celé matematice. Číslo pí je značeno pomocí symbolu řeckého písmene π a vyjadřuje poměr mezi obvodem kruhu a jeho průměru, který je u libovolně velkého kruhu vždy stejný:

$$\pi = \frac{O}{d}$$



Číslo π je iracionální číslo, které nikdy nelze přesně

vyjádřit. Z toho lze vyjádřit pouze jeho desetinnou aproximaci s určitým počtem desetinných míst, která je rovna:

$$\pi = 3.14159\dots$$

V praxi se používají aproximace ve tvaru zlomku přirozených čísel, které vyjadřují číslo π s přesností na daný počet desetinných míst. Příkladem jsou:

$$\frac{355}{113} = 3,1415929203539823008849557522124$$

nebo

$$\frac{22}{7} = 3,1428571428571428571428571428571$$

Definice iracionálního čísla je, že jej nelze vyjádřit pomocí zlomku, ale současně definicí zlomku je, že číselník a jmenovatel je celé číslo. Z toho vyplývá, že obvod a průměr kruhu není přirozené číslo. To znamená, že nelze najít takový kruh, jehož délka obvodu a průměru by byla celé (přirozené) číslo. Vždy může být celé číslo pouze jedna veličina.

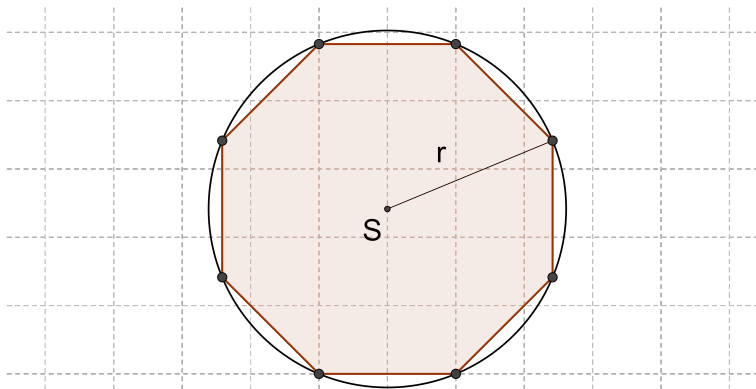
I když číslo π je iracionální číslo, které nelze nikdy přesně vyčíslit, tedy najít jeho přesnou hodnotu, pro praktické použití stačí jeho vyjádření s určitým počtem desetinných míst. Většina měřících zařízení a strojů totiž

dokáže pracovat pouze s omezenou přesností a proto je desetinná aproximace čísla π dostatečná. Nemá tak cenu počítat s číslem π s vyšším počtem desetinných míst, tedy s vyšší přesností než s jakou dokáže daný stroj provádět měření.

5.1.1 Výpočet hodnoty π

Přesnou hodnotu čísla π ze jeho podstaty nelze nikdy přesně vypočítat, ale existují matematické metody, kterými lze jeho hodnotu s určitou přesností vypočítat. Číslo π je transcendentní číslo, to znamená, že není kořenem žádné algebraické rovnice. Z tohoto důvodu nelze sestavit žádnou rovnici, kterou by bylo možné jednoduše vypočítat přesně hodnotu čísla π .

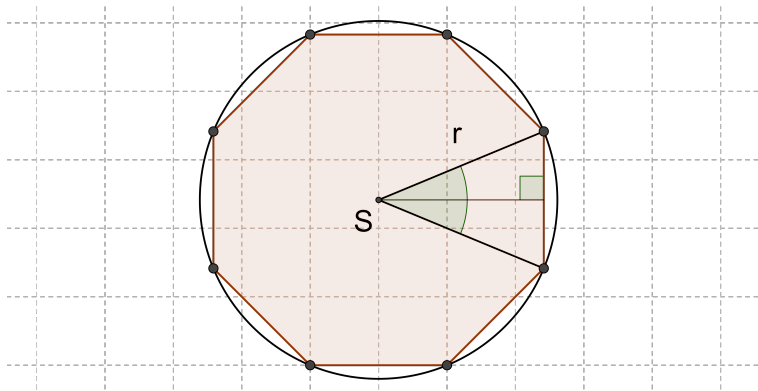
Nejjednodušší způsob jak vypočítat přibližnou hodnotu čísla π je pomocí pravidelného mnohoúhelníku o n stranách. Platí, že čím více hran mnohoúhelník má, tím více připomíná dokonalý kruh. Proto lze říci, že kruh je mnohoúhelník o nekonečně mnoha hranách. K přibližnému výpočtu čísla π je potřeba jen vypočítat obvod mnohoúhelníku a podělit jej jeho průměrem.



Mnohoúhelník oproti dokonalému kruhu disponuje určitou nepřesností danou velikostí n kruhových vrchlíků, kde n je počet hran mnohoúhelníku. Platí, že čím větší je n tím menší je kruhový vrchlík. Na druhou stranu je těchto vrchlíků v kruhu stále více a proto s rostoucím počtem hran mnohoúhelníku klesá rychlost snižování jeho nepřesnosti. Lze ale dokázat, že limitně se v nekonečnu (při nekonečném množství hran) tato nepřesnost rovná nule. To je zároveň základ pro důkaz pro výpočet hodnoty čísla π .

Mnohoúhelník lze rozdělit na n rovnoramenných trojúhelníků, které lze rozdělit na dva stejné pravoúhlé tro-

júhelníky. Díky tomu lze použít k výpočtu goniometrické funkce.



Kruhový vrchlík je nulový v případě, že hrana mnohoúhelníku bude nulová. Pomocí limity, lze dokázat, že při nekonečně mnoha hranách je délka jedné hrany rovna nule a tak se mnohoúhelník stává dokonalým kruhem. Délka hrany se vypočítá pomocí vztahu:

$$2 \cdot \sin\left(\frac{360}{2n}\right) \cdot r$$

kde n je počet hran a r je poloměr mnohoúhelníku.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sin\left(\frac{360}{2n}\right) \cdot r$$

Zde je nutné vypočítat limitu výrazu $\frac{360}{2n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{360}{2n} = 0$$

Na základě toho lze říct, že hodnota sinu v bodě nula je rovněž nula a cokoli krát nula je vždy nula. Proto platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \sin\left(\frac{360}{2n}\right) \cdot r = 0$$

Z toho lze odvodit vzorec na výpočet obvodu mnohoúhelníku, kdy se pouze počítají délky jednotlivých hran:

$$O = \left(2 \cdot \sin\left(\frac{360}{2n}\right) \cdot r\right) \cdot n$$

Protože se ale délka hrany mnohoúhelníka při nekonečně mnoha hranách rovná nule, nezle získat přesné číslo, respektive výsledek by byl roven nule, ale platí, že čím vyšší počet hran mnohoúhelníka tím přesnější hodnota čísla pi. Poté co je obvod podělen jeho průměrem je možné získat přibližnou hodnotu čísla pi:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2 \cdot \sin(\frac{360}{2n}) \cdot r) \cdot n)}{2r}$$

Po úpravě lze získat rovnici ve tvaru:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{360}{2n}) \cdot n$$

Po úpravě ze vztahu vypadl poloměr r . To dokazuje, že hodnota čísla π nezávisí poloměru kružnice. Obecně lze tedy napsat, že číslo π je limitně rovno poměru n -hranného mnohoúhelníka s jeho průměrem:

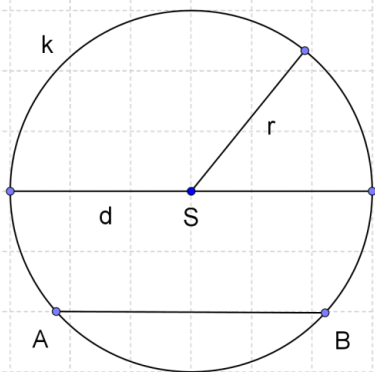
$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O_n}{d}$$

5.2 Kruh a kružnice

Kružnice je speciálním případem křivky, pro kterou platí, že všechny body ležící na dané kružnici jsou stejně vzdáleny od jednoho bodu, který se nazývá **střed kružnice**. Této vzdálenosti se říká **poloměr kružnice** a značí se písmenem r . Střed kružnice se zpravidla označuje velkým písmenem S popřípadě s s dolním indexem značící název dané kružnice. Kružnice se značí libovolným malým pís-

menem například p , o , k , ... popřípadě nějakým speciálním názvem.

Vnitřní oblast kružnice je množina bodů, které mají vzdálenost od středu menší než poloměr kružnice. Vnější oblast kružnice je množina bodů, které mají vzdálenost od středu větší než poloměr kružnice. Sjednocením kružnice, respektive množiny bodů tvořící danou kružnici a množinu bodu tvořící její vnitřní oblast je získán **kruh**.

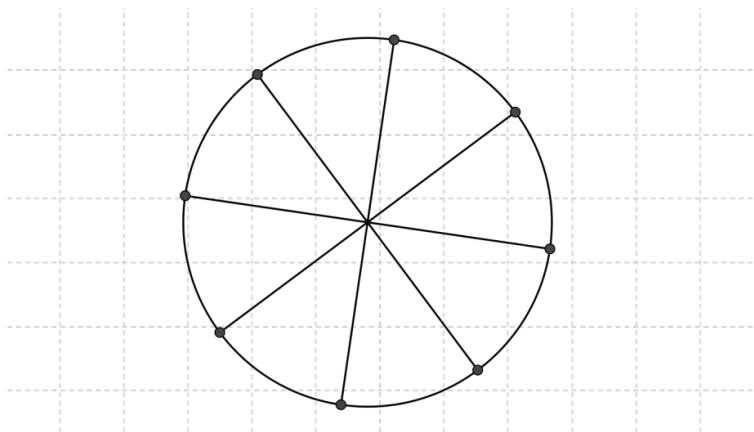


5.2.1 Obvod kružnice

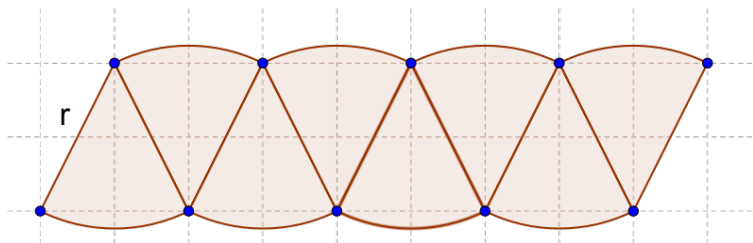
5.2.2 Obsah kružnice

Pro odvození vzorce pro výpočet obsahu kružnice existuje několik metod.

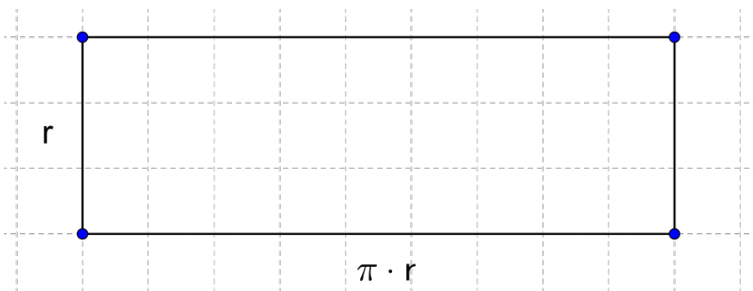
První způsob rozdělí celou kružnici na x výsečí:



Tyto výseče jsou následně graficky přeskupeny:



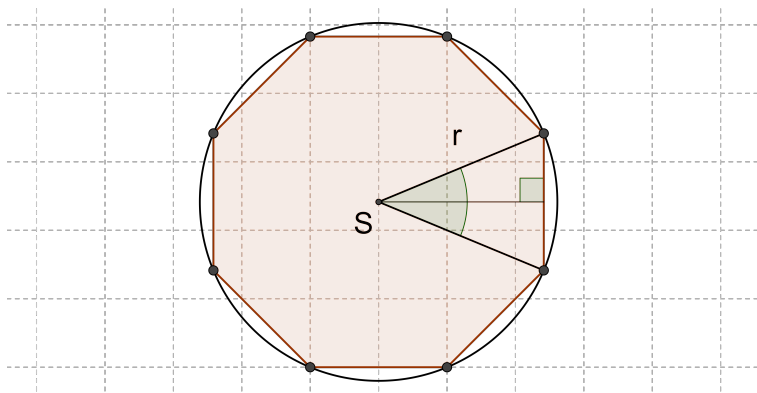
Následně platí, že na čím více kruhových výsečí je kružnice rozdělena tím menší oblouk vznikne. Při nekonečně velkém množství kruhových výsečí začne uspořádání kruhových výsečí přecházet v dokonalý obdélník jehož obsah je vypočítán pomocí vztahu: $O = a \cdot b$. Boční hrany obdélníku tvoří poloměr kružnice a součet délek spodní a vrchní hrany tvoří obvod kružnice:



Z toho lze odvodit vzorec pro výpočet obsahu kružnice:

$$0 = r \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot r^2$$

Druhý způsob odvození vztahu pro výpočet obsahu kružnice předpokládá, že kružnice je speciálním typem mnohoúhelníku o nekonečně mnoha hranách. Obsah kruhu je pak shodný s obsahem daného mnohoúhelníku:



Daný n -úhelník tvoří n rovnoramenných trojúhelníků, které lze rozdělit na $2n$ pravoúhlých trojúhelníků. Obsah jednoho rovnoramenného trojúhelníku je vypočítán pomocí

vztahu:

$$S_t = \sin\left(\frac{360}{2n}\right) \cdot \cos\left(\frac{360}{2n}\right)$$

kde n je počet hran n -úhelníku. Obsah daného n -úhelníku je pak součet jednotlivých obsahů rovnoramenných trojúhelníků:

$$S_m = n \cdot \left(\sin\left(\frac{360}{2n}\right) \cdot \cos\left(\frac{360}{2n}\right)\right)$$

5.2.3 Vzájemná poloha dvou kružnic

5.3 Mnohoúhelníky

Mezi mnohoúhelníky se řadí široká (nekonečně velká) skupina plošných objektů. Mezi nejdůležitější typy mnohoúhelníků patří **čtyřúhelníky**. Mezi čtyřúhelníky patří:

- různoběžníky
- rovnoběžníky
- lichoběžníky

5.4 Geometrická zobrazení

Kapitola 6

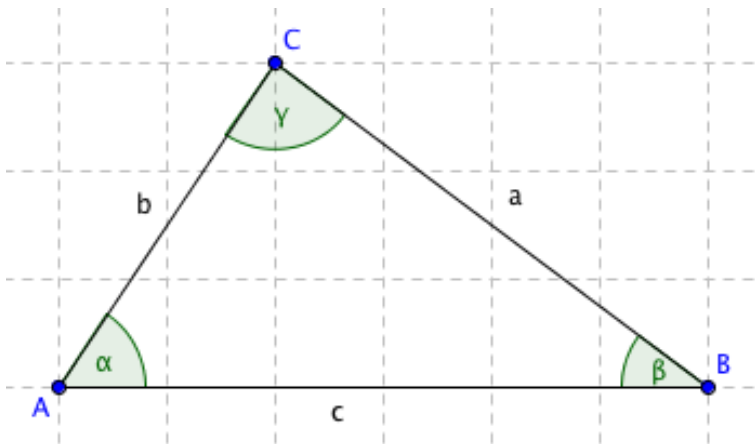
Trigonometrie

Trojúhelník je speciálním případem mnohoúhelníku, který má přesně tři strany (vrcholy). Trojúhelník je tedy geometrický útvar určený třemi body, které neleží na jedné přímce. Tyto body jsou pak spojeny pomocí úseček, kterým se říká **spojnice vrcholů trojúhelníka**. Tyto úsečky tvoří **stěny trojúhelníka**. Jedná se o základní plošný geometrický útvar, který se používá jako nástroj, kterým lze odvodit vztahy mnohoúhelníků o n stranách (vrcholech). Tyto strany se označují malými písmeny abecedy - a , b , c . V případě, že je v nákresu trojúhelníků více, každý z nich by měl mít pro přehlednost vlastní pojmenování stran. Trojúhelník má také tři hrany - vrcholy trojúhelníka, které se značí stejnými písmeny jako jeho strany, ale tiskacími - A , B , C . Strana a pak odpovídá úsečce BC , strana b pak odpovídá úsečce AC a strana c odpovídá úsečce AB . To znamená, že daná strana se v trojúhelníku nachází vždy naproti jeho vrcholu.

Sjednocení všech stran trojúhelníku se nazývá **hranice trojúhelníku**. Všechny body, které leží na hranici trojúhelníku se nazývají **hraniční body trojúhelníku**. Všechny ostatní body trojúhelníka se nazývají **vnitřní body trojúhel-**

níku. Množina všech vnitřních bodů trojúhelníku se nazývá **vnitřek trojúhelníka**.

Trojúhelník má také tři **vnitřní úhly**, které se většinou označují malými řeckými písmeny alfa α , beta β a gama γ . Trojúhelník tvoří průnik tří polorovin, které tvoří přímky AB , BC a AC , to znamená množina všech bodů, které leží na spojnicích (strany trojúhelníka) a všechny body, které leží zároveň ve všech třech polorovinách (vnitřek trojúhelníka).



6.1 Vlastnosti trojúhelníků

Každý trojúhelník se vyznačuje určitými vlastnostmi, které jsou důležité pro práci s nimi. Díky nim lze definovat řadu vzorců pro technické výpočty.

6.1.1 Trojúhelníková nerovnost

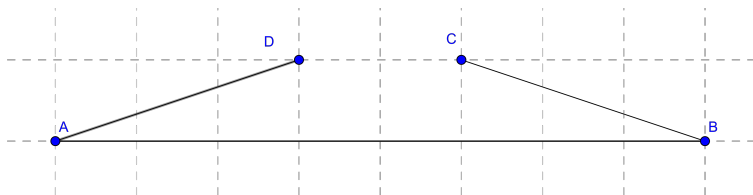
Trojúhelníková nerovnost je vztah mezi délkami jednotlivých ramen trojúhelníků, který se v praxi používá při kontrole existence určitého trojúhelníku. Platí, že součet délek dvou libovolných stran je vždy větší než délka třetí, zbývající strany:

$$|A| + |B| > |C|$$

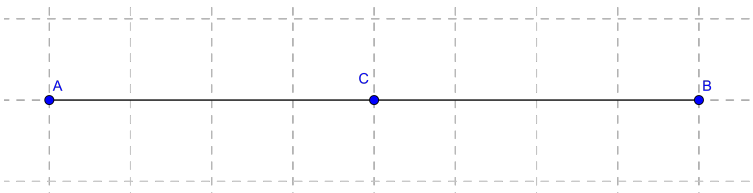
$$|A| + |C| > |B|$$

$$|B| + |C| > |A|$$

Pokud by platilo, že jedna strana je delší než zbývající dvě v součtu, nemohl by trojúhelník vzniknout, protože tyto dvě strany budou příliš krátké a *nedosáhnou na sebe*:



Pokud by platila rovnost součtu délek dvou stran, tedy dvě strany by byly v součtu stejně dlouhé jako třetí strana, pak by při pokusu narýsovat trojúhelník všechny body ležely na jedné přímce:



6.1.2 Shodnost trojúhelníků

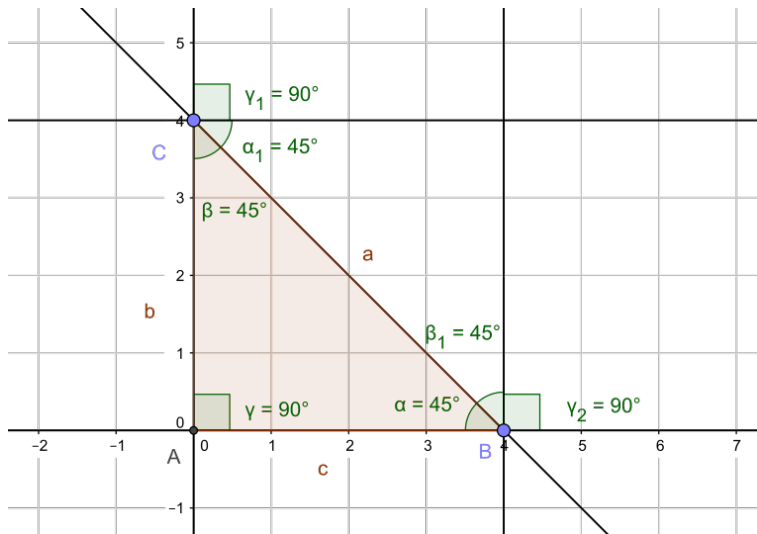
6.1.3 Součet vnitřních úhlů

Nejdůležitější vlastností všech typů trojúhelníků je, že součet vnitřních úhlů je vždy roven 180° respektive π

radiánů. Tuto vlastnost lze jednoduše dokázat. Předpoklad je:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Nejjednodušší je důkaz prezentovat na pravoúhlém trojúhelníku, který má vždy jeden úhel pravý, tedy 90° . Důkaz lze následně zobecnit na libovolný trojúhelník, protože z libovolného různostranného trojúhelníka lze vytvořit dva pravoúhlé trojúhelníky. Další známí předpoklad je velikost plného úhlu, který má 180° , respektive π radianů, skrze který je možné distribuovat všechny úhly v trojúhelníku:



Z obrázku je patrné, že libovolný plný úhel lze prezentovat jako součet úhlů α a β bez ohledu na jejich velikost a pravého úhlu. Protože platí, že $\gamma = 90^\circ$, platí tedy součet:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

6.2 Klasifikace trojúhelníků

Jakýkoli trojúhelník lze klasifikovat, zařadit podle stran a podle úhlů do určité skupiny.

Trojúhelníky lze podle délek stran na:

- Rovnostranný trojúhelník
- Rovnoramenný trojúhelník
- Různostranný trojúhelník

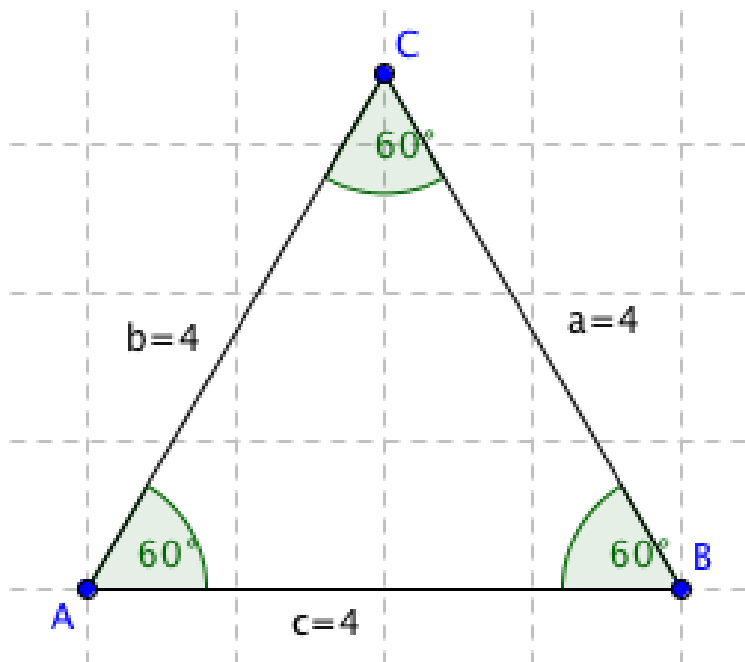
Trojúhelníky lze podle úhlů rozdělit na:

- Ostroúhlý trojúhelník
- Tupoúhlý trojúhelník
- Pravoúhlý trojúhelník

6.2.1 Rovnostranný trojúhelník

Rovnostranný trojúhelník má všechny strany stejně dlouhé. A protože má všechny strany stejně dlouhé má stejně velké i všechny vnitřní úhly, které mají hodnotu:

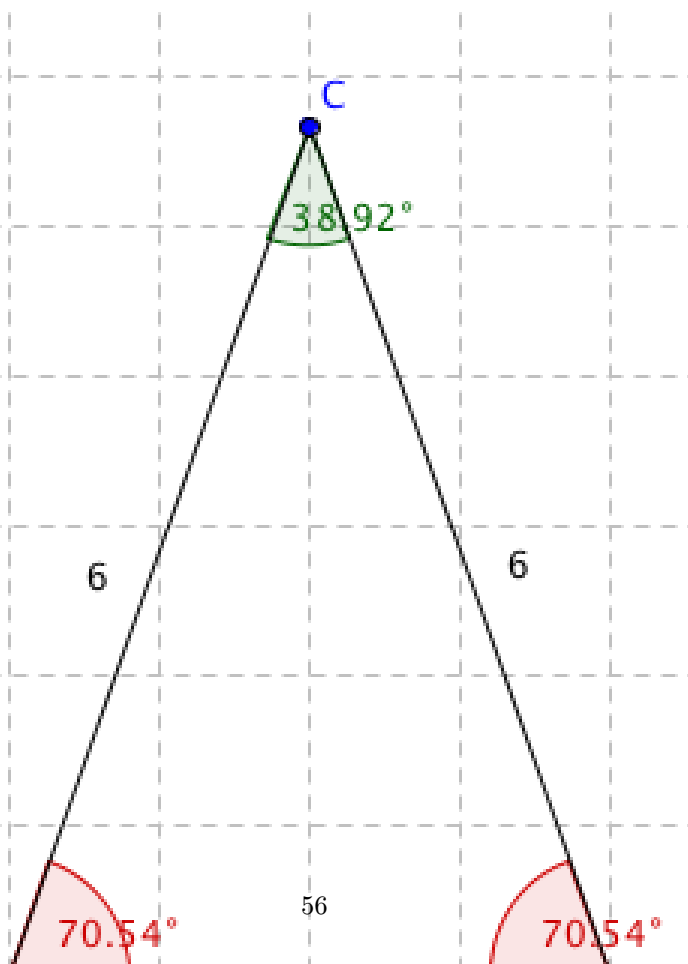
$$180 \div 3 = 60$$



6.2.2 Rovnoramenný trojúhelník

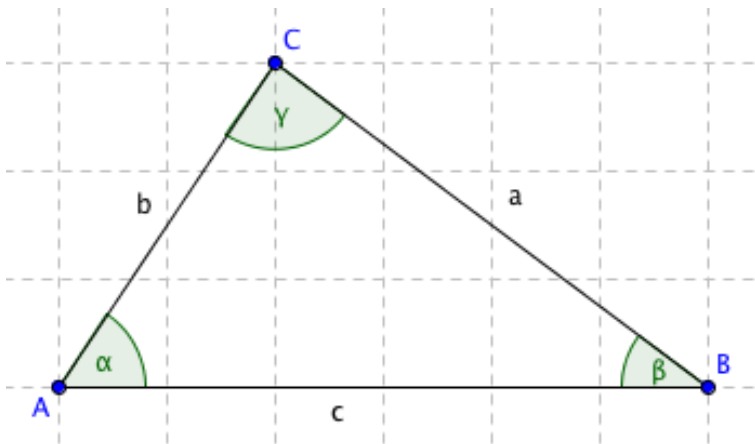
Rovnoramenný (rovnostanný) trojúhelník má přesně dvě strany stejně dlouhé. Těm stranám, které jsou stejně

dlouhé, se říká **ramena trojúhelníku**, třetí straně se říká **základna trojúhelníku**. Protože jsou ramena rovnostranného trojúhelníku stejně velké, obě svírají stejný úhel se základnou:



6.2.3 Různostranný trojúhelník

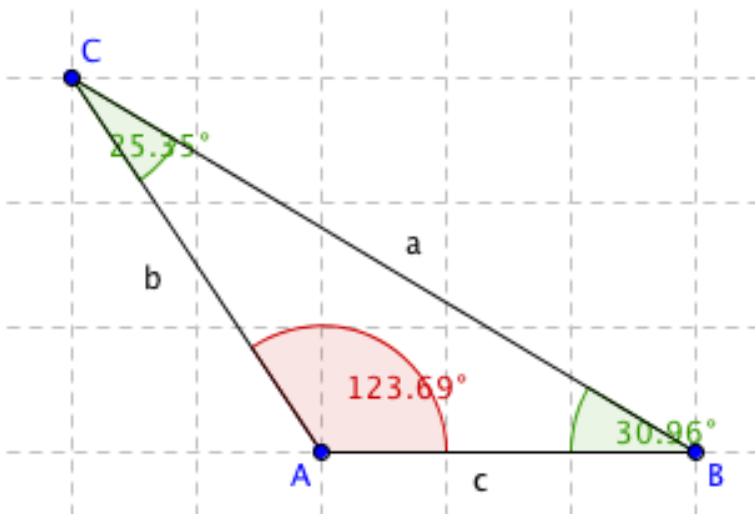
Různostranný trojúhelník nemá žádné dvě strany stejně velké. Z toho vyplývá, že ani žádné dva vnitřní úhly nejsou stejně velké:



6.2.4 Tupoúhlý trojúhelník

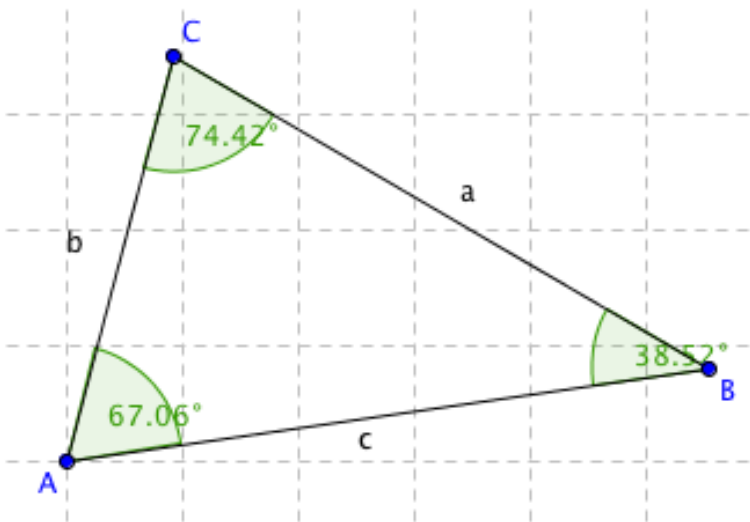
Tupoúhlý trojúhelník má právě jeden vnitřní úhel větší než 90° a protože trojúhelník nemůže mít dva pravé úhly, zbývající dva vnitřní úhly musejí být ostré, tedy menší než

90° :



6.2.5 Ostroúhlý trojúhelník

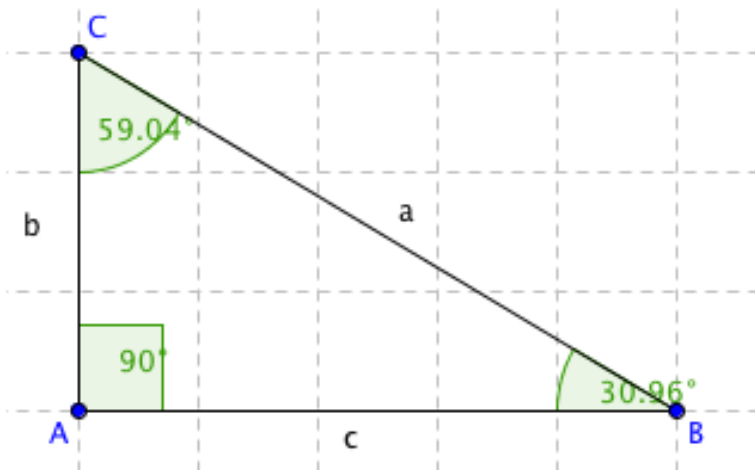
Ostroúhlý trojúhelník je takový trojúhelník, který má všechny vnitřní úhly ostré, to je menší než 90° :



6.2.6 Pravoúhlý trojúhelník

Pro technickou praxi nejdůležitější je pravoúhlý trojúhelník. Pravoúhlý trojúhelník je takový trojúhelník, který má právě jeden pravý úhel. Trojúhelník nemůže mít více než jeden pravý úhel, protože součet úhlů trojúhelníku je vždy 180° . To znamená, že zbylé dva úhly musejí být menší než 90° . V pravoúhlém trojúhelníku se nejdelší strana nazývá **přepona** a zbývající strany se nazývají

odvěsny:



Pravoúhlý trojúhelník se vyznačuje některými pro praxi velice důležitými vlastnostmi. Zejména se jedná o vztah mezi velikostmi vnitřních úhlů a délek stran. Tím se zabývá speciální odvětví geometrie, které se nazývá **goniometrie**. Pomocí vlastností pravoúhlého trojúhelníku jsou definovány vzorce pro výpočet vlastností různých plošných i prostorových objektů.

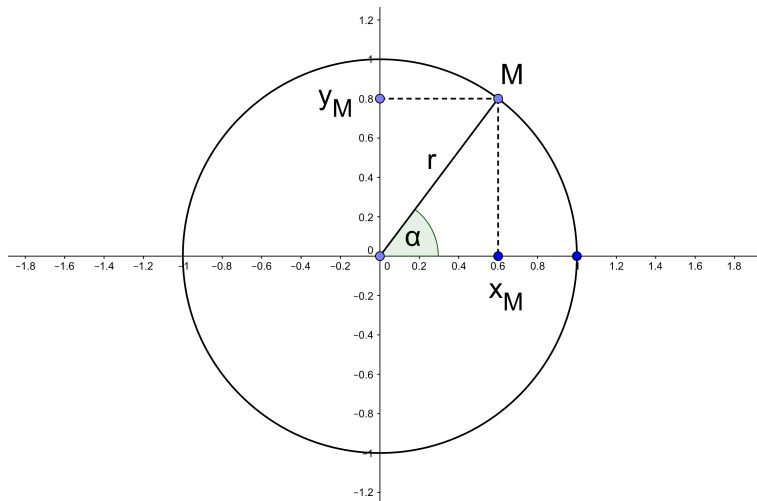
Kapitola 7

Goniometrie

Goniometrie je část trigonometrie, která se zabývá vlastnostmi vnitřních úhlů a délek stran v pravoúhlém trojúhelníku. Goniometrické funkce lze používat i v případě ostatních trojúhelníků, protože z každého trojúhelníku lze vytvořit dva pravoúhlé trojúhelníky.

Goniometrické funkce (rovnice) vyjadřují vztah mezi délkami stran pravoúhlého trojúhelníka a jejich vnitřních úhlů, především úhlu α . To má velký význam v konstrukční geometrii, počítačové grafice, astronomii a všech ostatních oborech kde se pracuje s vizuálními objekty.

7.1 Definice goniometrických funkcí sinus a kosinus



O číslech x_M , y_M se říká, že jsou **první** a **druhou souřadnicí bodu M** a zapisují se:

$$M[x_M, y_M]$$

Druhá souřadnice bodu M jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu α v základní poloze se nazývá **sinus** α a jeho první souřadnice se nazývá **kosinus** α a značí se jako **sin** α a **cos** α :

$$\sin \alpha = y_M, \cos \alpha = x_M : \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Uvedenými vztahy je každému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazeno právě jedno reálné číslo $\sin x$ a právě jedno reálné číslo $\cos x$, tyto vztahy udávají funkční předpisy funkce sinus:

$$f : x = \sin x, D_f = \mathbb{R}$$

a funkce kosinus:

$$f : x = \cos x, D_f = \mathbb{R}$$

Důležitá vlastnost goniometrických funkcí je, že nezáleží na délkách jednotlivých ramen pravoúhlého trojúhelníka. Pokud je daný úhel α stejný, pak je poměr mezi danými dvěma stranami trojúhelníka vždy stejný. Díky tomu lze vypočítat hodnotu sinu a kosinu pro libovolný pravoúhlý trojúhelník. Protože jsou goniometrické funkce definovány na jednotkové kružnici s pravoúhlým trojúhelníkem, který má díky tomu délku přepony přesně jedna stačí pokrátit délky stran délkou přepony. Funkce sinus a kosinus jsou tedy zobecněny pro libovolný pravoúhlý trojúhelník pomocí poměru jedné z odvěsen a přepony:

$$\sin = \frac{a}{c}$$

$$\cos = \frac{b}{c}$$

Goniometrické funkce bohužel nejsou algebraické, což znamená, že nelze vytvořit rovnici, kterou by bylo možné vypočítat poměr daných dvou stran trojúhelníka pro danou velikost úhlu α . V praxi jsou používány dva způsoby jak převést poměr tento poměr daných dvou stran trojúhelníka na stupňovou popřípadě obloukovou míru úhlu. Buď převodové tabulky, které obsahují pro každý stupeň přibližnou danou poměru daných dvou stran pravoúhlého trojúhelníka a nebo pomocí numerických metod, které jsou schopné vypočítat přibližnou velikost daného úhlu pro daný poměr dvou stran pravoúhlého trojúhelníka.

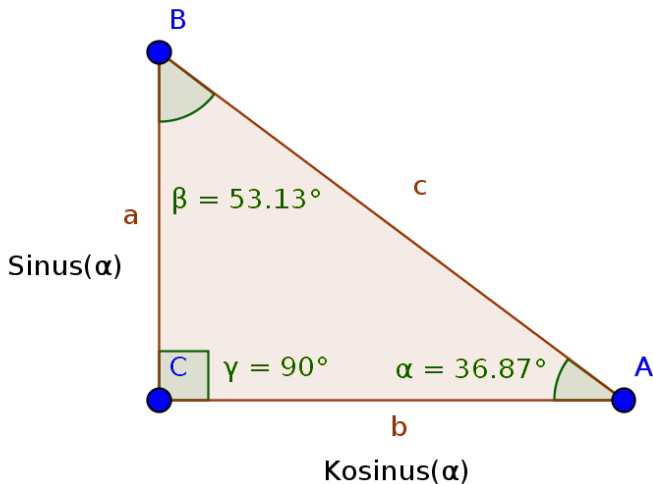
Grafy funkcí sinus a kosinus argumentu x jsou sestaveny na základě jejich definice pomocí souřadnic bodů M jednotkové kružnice k se středem v počátku O kartézské soustavy souřadnic. Podle definice stačí sestavit grafy v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$, respektive $\langle 0; 360 \rangle$ a pak průběh funkcí periodicky prodloužit. Graf funkce sinus se nazývá **sinusoida** a graf funkce kosinus se nazývá **kosinusoida**. Přitom kosinusoida je posunutá o $\frac{\pi}{2}$ respektive 90° ve směru záporné poloosy x .

7.2 Rovnost goniometrických funkcí sinus a kosinus

Goniometrické funkce sinus a kosinus mají v pravoúhlém trojúhelníku jednu vlastnost. Sinus a kosinus jsou si vždy rovny v případě, že platí:

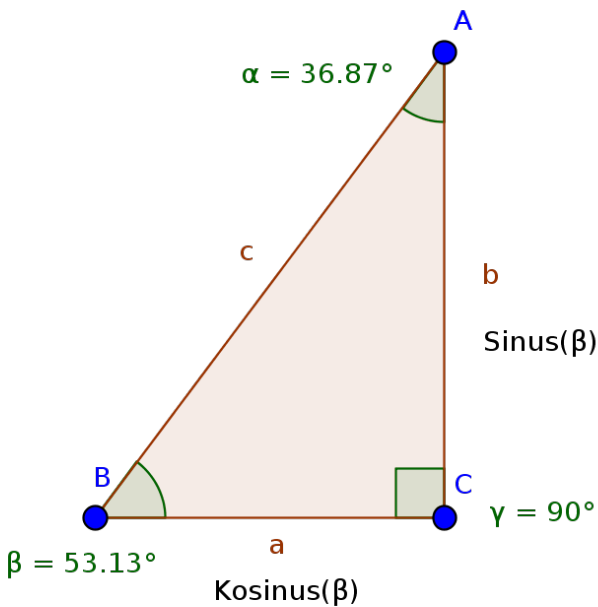
$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) \wedge \sin(\beta) = \cos(\alpha)$$

Tato vlastnosti vyplývá z definice pravoúhlého trojúhelníku a vlastnosti součtu úhlů v trojúhelníku. Sinus je definován jako velikost protilehlé odvěsny pravoúhlého trojúhelníku s délkou přepony 1. Kosinus je pak definován jako velikost přilehlé odvěsny pravoúhlého trojúhelníka s délkou přepony 1:



Goniometrické funkce jsou orientovány podle úhlu, který se v pravoúhlém trojúhelníku nachází naproti pravému úhlu - úhel α . V případě, že je trojúhelník otočen o 90° doleva, pak se úhly v trojúhelníku prohodí a naproti pravému úhlu se nachází úhel β . Celá situace pak vypadá

takto:



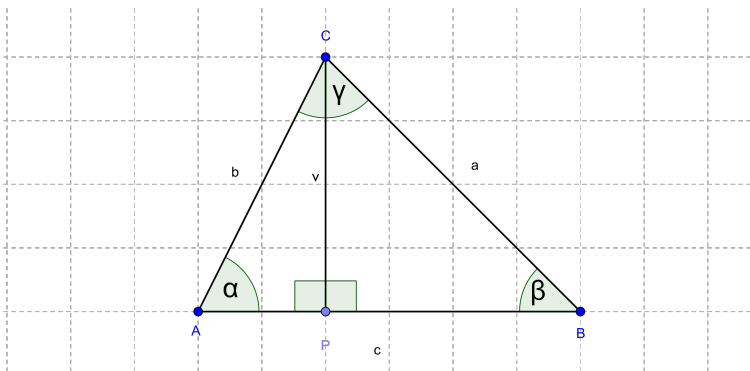
Z toho lze vyvodit, že platí vztahy:

$$\sin(\alpha) = \cos(90 - \alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \sin(90 - \alpha)$$

7.3 Sinová věta

Sinová věta je rozšíření funkce sinus na obecný trojúhelník (trojúhelník bez pravého úhlu). Základem Sinové věty je možnost rozdělit libovolný obecný trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky ve kterých je již využít goniometrické funkce. Díky Sinové větě je možné snadno vypočítat hodnoty vnitřních úhlů na základě znalostí velikostí stran trojúhelníka a nebo velikosti stran trojúhelníka na základě znalosti velikostí vnitřních úhlů. Zároveň tak lze jednoduše odvozovat i složitější vzorce pro práci s obecnými trojúhelníky.



Díky tomu lze odvodit, že délka strany $|CP|$ (výška trojúhelníka) je rovna:

$$|CP| = \sin(\alpha) \cdot b$$

nebo

$$|CP| = \sin(\beta) \cdot a$$

Z toho vyplývá, že tyto výrazy si musejí být rovny:

$$\sin(\alpha) \cdot b = \sin(\beta) \cdot a$$

Tuto rovnici lze upravit do tvaru:

$$\frac{\sin(\alpha) \cdot b}{a \cdot b} = \frac{\sin(\beta) \cdot a}{a \cdot b}$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

Tyto rovnice říkají, že výšku trojúhelníku lze vypočítat pomocí velikosti jednoho z úhlů a délky protilehlé strany.

Kapitola 8

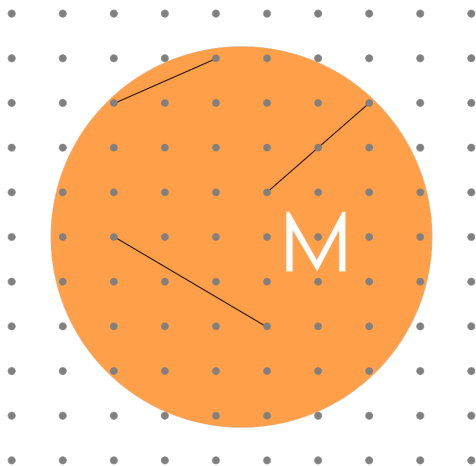
Stereometrie

Kapitola 9

Konvexní geometrický útvar

Konvexní geometrický útvar (množina), respektive množina jeho bodů je taková množina, která je podmnožinou množiny bodů roviny, ve které body ležící na úsečce XY jsou součástí daného geometrického útvaru:

$$XY \subseteq M$$



Jestliže daný geometrický útvar, respektive množina jeho bodů není konvexní (nekonvexní), pak platí, že existuje alespoň jeden bod, který není součástí množiny bodů daného geometrického útvaru:

$$XY \not\subset M$$

To znamená, že daný geometrický útvar se nenachází celou svou plochou v dané rovině a určitými svými částmi z ní vyčnívá.

