بسمه تعالی

تمرین اول سیستم‌های نهفته و بی‌درنگ

- **سوال اول**

Which of the following languages use a broadcast mechanism for updating variables: StateCharts, SDL, Petri nets?

- پاسخ:

- SDL زبان توسعه یافته FSM می‌باشد که در آن پروسس‌ها می‌توانند روی داده‌ها فرآیندی را اعمال کنند. متغیرها به صورت داخلی درون پروسس‌ها تعریف می شوند اما ارتباط بین پروسس ها از طریق روش message passing انجام می شود که ساده ترین نوع آن یک صف FIFO است. بنابراین گزینه درستی برای پاسخ نمی باشد.

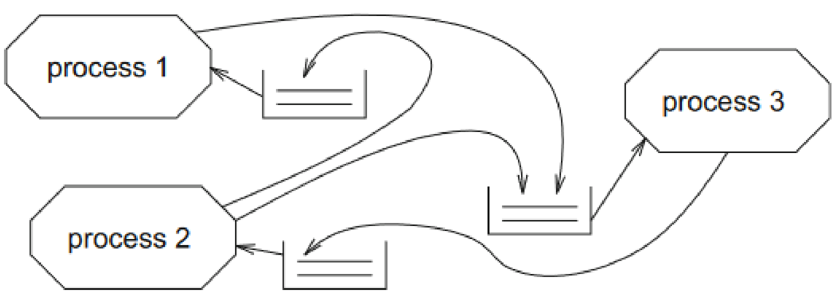


figure ۱ : نمایی از ارتباط درون پراسسی SDL

- در زبان Petri nets فرضی بر روی هماهنگی جهانی اطلاق نشده است. به همین جهت مفهومی به نام broadcast در آن استفاده نمی شود.

- از میان گزینه های مطرح شده، StateChart از شیوه ارتباطی broadcast برای به روز رسانی مقدار متغیرها استفاده می کند. در این زبان، ما می توانیم در transitionهای صورت گرفته، متغیرها را مقداردهی کنیم که در نتیجهٔ آن یک step رخ دهد. نکته قابل توجه این است که متغیرها برخلاف Event ها مقدار خود را حفظ می کنند تا زمانی که تغییر یابند. بر اساس همین تعریف، در تمامی Stepها، مقادیر جدید یک متغیر برای تمام بخش های یک مدل باید قابل دسترسی باشد. به عبارت دیگر، مقدار جدید اطلاق شده به متغیرها باید به تمامی بخش های مدل انتقال یابد. از این مفهوم یک حافظه مشترک را دریافت میکنیم. معمولا زبان های مشابه به StateChart فرض بر یک حافظه مشترک دارند. بطور کلی به این فرآیند، broadcast می گویند.

- **سوال دوم**

قسمت های a تا c مسئله ۶ فصل دوم مرجع LeeSeshia را در مورد مدلسازی موتور DC حل کنید.

- a) Assuming the motor is initially at rest, rewrite (2.15) as an integral equation.

معادله ۲.۱۵ داده شده طبق صورت سوال به صورت زیر می باشد:

$$k_T i(t) - x(t) = I \frac{d}{dt} \omega(t)$$

ابتدا از دو طرف معادله داده شده در بازه [0,t] انتگرال میگیریم (به ازای $\forall t > 0$):

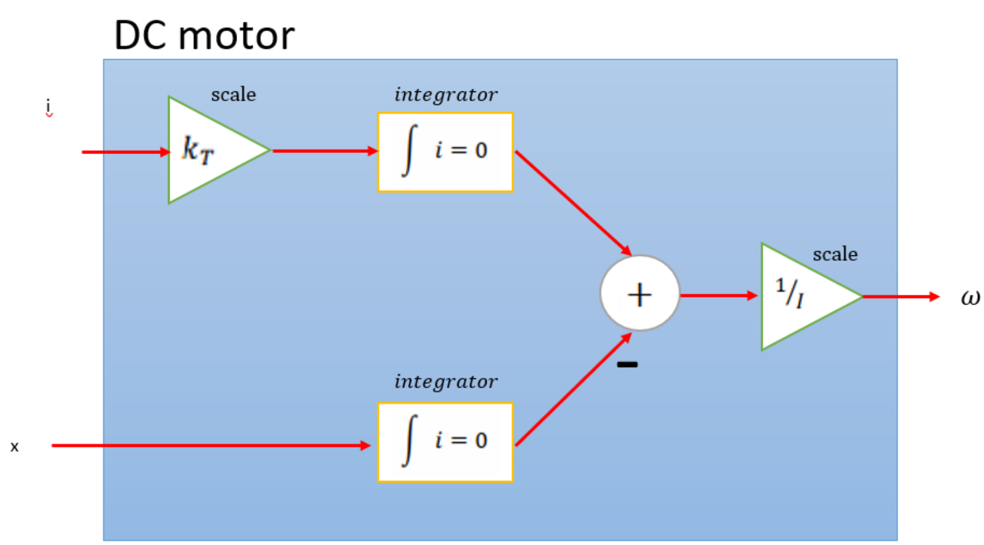
$$\int_0^t \big(k_T i(\tau) - x(\tau)\big) d\tau = \int_0^t I \frac{d}{dt} \omega(\tau) d\tau$$

$$\int_0^t k_T i(\tau) d\tau - \int_0^t x(\tau) d\tau = I\omega(\tau) - I\omega(0)$$

با توجه به فرض صورت سوال، موتودر ابتدا در حالت ایستاده بوده در نتیجه داریم: $\omega(0) = 0$. در نهایت برای به دست آوردن سرعت زاویه‌ای معادله به شکل زیر در می آید:

$$\omega(\tau) = \frac{k_T \int_0^t i(\tau) d\tau - \int_0^t x(\tau) d\tau}{I}$$

- b) Assuming that both x and i are inputs and ω is an output, construct an actor model (a block diagram) that models this motor. You should use only primitive actors such as integrators and basic arithmetic actors such as scale and adder.



بازه انتگرال از صفر تا t بوده و مقدار اولیه انتگرال گیر ها برابر با صفر قرار داده شده. نماد مورد استفاده برای تفریق کننده، نمادی مشابه است که در کتاب مرجع آورده شده.

- c) n reality, the input to a DC motor is not a current, but is rather a voltage. If we assume that the inductance of the motor windings is negligible, then the relationship between voltage and current is given by

  $$v(t) = Ri(t) + K_b\omega(t)$$

  where R is the resistance of the motor windings and kb is a constant called the motor back electromagnetic force constant. The second term appears because a rotating motor also functions as an electrical generator, where the voltage generated is proportional to the angular velocity.
  Modify your actor model so that the inputs are v and x rather than I and x.

$$i(t) = \frac{v(t) - K_b\omega(t)}{R}$$

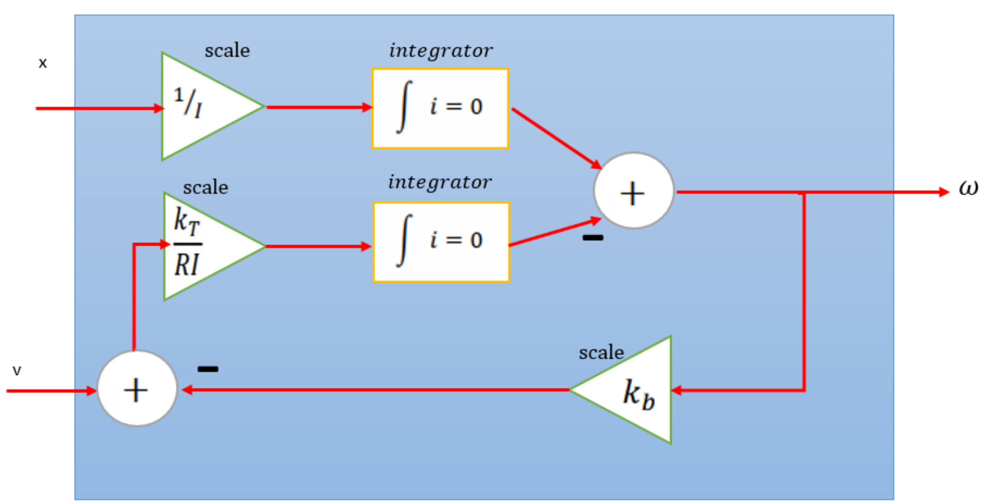
حال این رابطه را در جواب بخش الف جایگذاری می کنیم:

$$\omega(\tau) = \frac{k_T \int_0^t \frac{v(\tau) - K_b\omega(\tau)}{R} d\tau - \int_0^t x(\tau)d\tau}{I}$$

$$\omega(\tau) = \frac{k_T \int_0^t (v(\tau) - K_b\omega(\tau))d\tau - R\int_0^t x(\tau)d\tau}{RI}$$

$$\omega(\tau) = \frac{k_T}{RI}\int_0^t \big(v(\tau) - K_b\omega(\tau)\big)d\tau - \frac{1}{I}\int_0^t x(\tau)d\tau$$

فرمول بدست آمده را میتوانیم به صورت مدل actor زیر رسم می کنیم:



- **گزارش سوال سوم**

مدل نهایی را در Simulink وارد کرده و با پارامترهای زیر، پاسخ پله 5 volt را شبیه سازی کنید. ابتدا موتور بدون بار است ولی در ثانیه ۵ یک بار به اندازه 0.01 newton.meter به آن متصل میگردد.

I = 3.88×10^{-7} kg·meters2

K_b= 2.75×10^{-4} volts/RPM

K_T = 5.9×10^{-3} newton·meters/amp

R = 1.71 ohms

  - پاسخ:

با توجه به اینکه سوال مدل نهایی را خواسته است پس باید دو ورودی v که تابع پله ۵ ولت است و i که جریان torque است را قرار دهیم. خروجی هم ω(t) یعنی سرعت زاویه ای موتور می باشد. مطابق مدل ارائه شده در سوال قبل در سیمولینک طراحی را انجام میدهیم.

ابتدا یک subsystem قرار میدهیم و یک IN دیگر هم اضافه میکنیم که ۲ تا ورودی داشته باشیم.

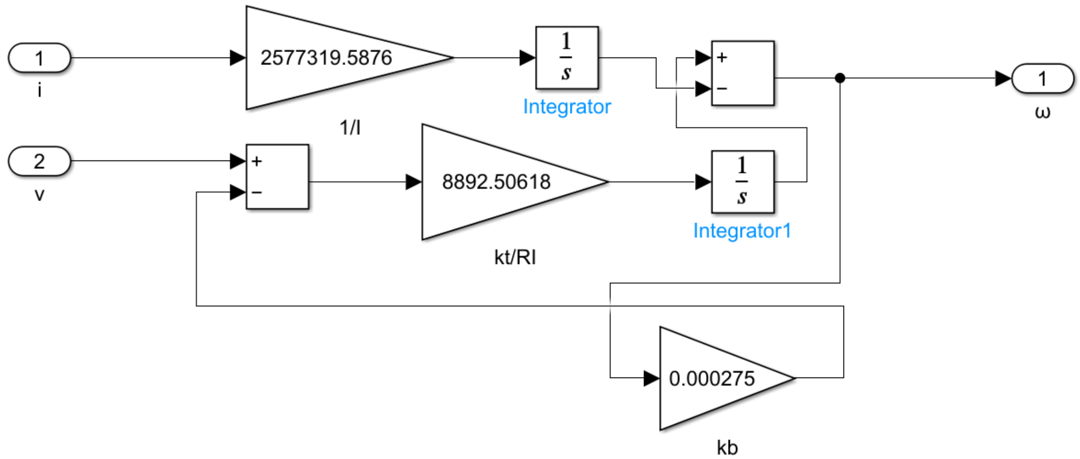
مطابق مدل سه عدد gain میخواهیم (scale) که انهارا هم قرار میدهیم. با توجه به روابط به دست امده از سوال قبل و مقادیر داده شده فوق، مقادیر هر کدام را در سیمولینک قرار میدهیم.

$$gain = \frac{1}{I} \rightarrow \frac{1}{3.88 \times 10^{-7}} = 2577319.5876$$

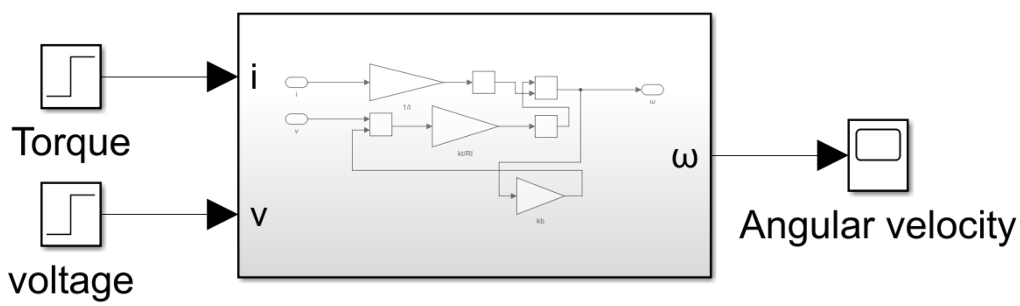
$$gain = \frac{k_T}{RI} \rightarrow \frac{5.9 \times 10^{-3}}{1.71 \times 3.88 \times 10^{-7}} = 8892.50618$$

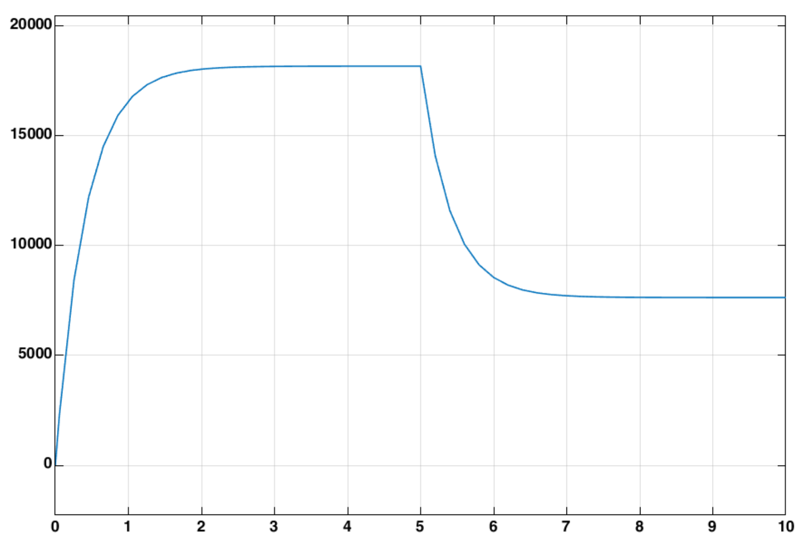
$$gain = k_b \rightarrow 2.75 \times 10^{-4} = 0.000275$$

۲ عدد تفریق کننده و ۲ عدد انتگرالگیر با مقدار اولیه ۰هم قرار میدهیم. در نهایت مطابق مدل رابط ها را وصل میکنیم.



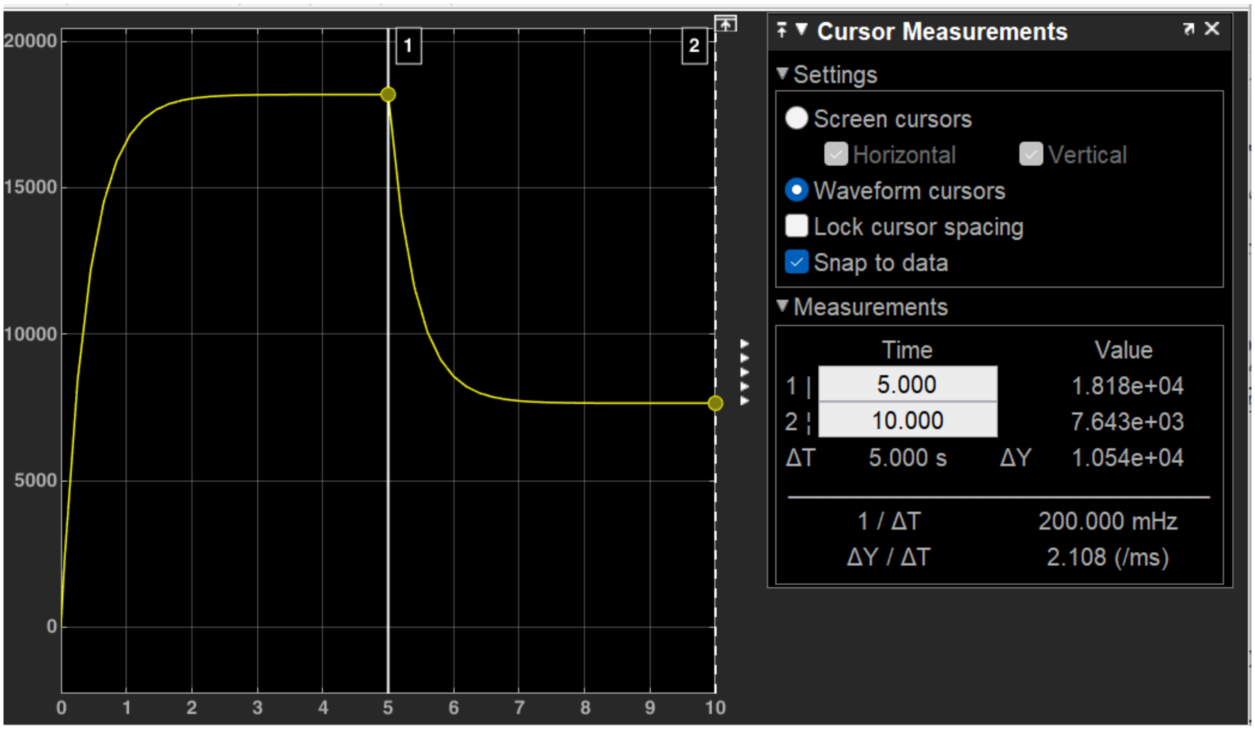
حالا به بیرون زیرسیستم میرویم تا torque و ولتاژ پله را متصل کنیم و برای مشاهده سیگنال های خروجی به ω یک scope متصل میکنیم.





در نهایت پروژه را ران میکنیم و خروجی امواج اسکوپ را مشاهده میکنیم و از طریق منوی file خروجی نمودار را در گزارش می آوریم:

مقدار دقیق را هم با استفاده از cursor measurements بدست می اوریم:



برای تحلیل و بررسی صحت شبیه سازی به صورت ریاضی معادلات را بررسی میکنیم:

مقادیر داده شده را در معادله بدست آمده قسمت c سوال ۲ قرار میدهیم باز ۰.۰۱ را هم ضرب میکنیم تا اعمال شود:

$$\omega(\tau) = \frac{k_T}{RI}\int_0^t \big(5u(\tau) - K_b\omega(\tau)\big)d\tau - \frac{1}{I}\int_0^t 0.01u(\tau-5)d\tau$$

معادله بالا به ازای $\forall\ t > 0$ مقدار تابع $u(\tau)$ در بازه [0,+∞) برابر با یک و مقدار تابع $u(\tau-5)$ در بازه [0,5] برابر با صفر می باشد:

$$\omega(\tau) = \begin{cases} \dfrac{5k_T t}{RI} - \dfrac{k_T k_b}{RI}\displaystyle\int_0^t \omega(\tau)d\tau\ , & t < 5 \\ \dfrac{5k_T t}{RI} - \dfrac{k_T k_b}{RI}\displaystyle\int_0^t \omega(\tau)d\tau + \dfrac{0.01(5-t)}{I}, & t \geq 5 \end{cases}$$

(در t های بالاتر از ۰ تابع پله ۱ است. u(τ-5) هم با توجه به انتقال توابع در قبل از ۵ مقدارش ۰ است. پس میتوان معادله را ساده کرد)

- $t < 5$

با توجه به اینکه مقدار $\omega(\tau)$ و انتگرال آن را در دسترس داریم، میتوان پیش بینی کرد که جواب به فرمت زیر می باشد:

$$\omega(t) = Ae^{Bt} + C$$
$$\omega(0) = 0 \ \rightarrow \ \omega(t) = Ae^{Bt} - C \ \rightarrow \ \omega'(t) = ABe^{Bt}$$

می دانیم که مقدار $\omega(t)$ در زمان مورد نظر از طریق معادله داده شده در قسمت بالا بدست می آید. با مشتق گیری از آن داریم:

$$\omega'(t) = \frac{5k_T t}{RI} - \frac{k_T k_b}{RI}\omega(t)$$

جایگذاری:

$$A = \frac{-5}{2.75 * 10^{-4}}, B = -\frac{(5.9 * 10^{-3})(2.75 * 10^{-4})}{1.71(3.88 * 10^{-7})}$$
$$A = \frac{-1 * 10^{6}}{55} \cong -18181.81, B = -\frac{81125}{33174} \cong -2.44$$

با توجه به مقادیر به دست امده فرم این نمودار دقیقا مانند شبیه سازی خواهد بود.

- $t \geq 5$

با توجه به فرم معادله و روش حدس میتوانیم بگوییم فرم زیر را دارد:

$$\omega(t) = Ae^{Bt} + C(t \geq 5)$$

$$\omega(t) = \frac{5k_T t}{RI} - \frac{k_T k_b}{RI}\int_0^t (Ae^{Bt} + C)d\tau + \frac{0.01(5-t)}{I}$$
$$\omega(t) = \frac{5k_T t}{RI} - \frac{k_T k_b}{RI}\int_0^t \left(\frac{A}{B}e^{Bt} + Ct - \frac{A}{B}\right) + \frac{0.05}{I} - \frac{0.01t}{I}$$
$$\omega(t) = \frac{5k_T t}{RI} - \frac{k_T k_b}{RI}\frac{A}{B}e^{Bt} - \frac{k_T k_b}{RI}\frac{A}{B}Ct + \frac{k_T k_b}{RI}\frac{A}{B}e^{Bt} + \frac{0.05}{I} - \frac{0.01t}{I}$$

خواهیم داشت:

$$\omega(t) = -\frac{k_T k_b}{RI}\frac{A}{B}e^{Bt}$$

$$0t = \frac{5k_T t}{RI} - \frac{k_T k_b}{RI} Ct - \frac{0.01t}{I} \rightarrow 5k_T - k_T k_b C - 0.01R$$

$$C = \frac{k_T k_b}{RI} \frac{A}{B} + \frac{0.05}{I} \rightarrow C = \frac{k_T k_b}{RI} \frac{A}{-\frac{k_T k_b}{RI}} + \frac{0.05}{I} = -A + \frac{0.05}{I}$$

$$B = -\frac{k_T k_b}{RI} = -\frac{81125}{33174} \cong -2.44$$

$$C = \frac{5k_T - 0.01R}{k_T k_b} = \frac{124 * 10^6}{16225} \cong 7642.52$$

$$A = \frac{0.05}{I} - C = 121223.45938$$

با توجه به مقادیر شکل نمودار دقیقا مشابه شبیه سازی برای بعد از ۵ ثانیه می شود.