



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



# **Numerický model neizotermálního proudění a obtékání překážek založený na mřížkové Boltzmannově metodě**

## **Numerical model of non-isothermal flow around obstacles based on the lattice Boltzmann method**

Diplomová práce

Autor: **Bc. Dominik Horák**  
Vedoucí práce: **Ing. Jakub Klinkovský Ph.D.**  
Konzultant: **doc. Ing. Radek Fučík Ph.D.**  
Akademický rok: 2023/2024

### *Poděkování:*

Chtěl bych zde poděkovat především mým vedoucím Ing. Jakubovi Klinkovskému Ph.D. a doc. Ing. Radku Fučíkovi, Ph.D. za ochotu, zázemí, pečlivost a v neposlední řadě také za neocenitelné rady bez kterých by tato práce nevznikla. Mé díky patří také mé rodině a přítelkyni za veškerou podporu při studiu.

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS20/184/OHK4/3T/14.

### *Čestné prohlášení:*

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 10. května 2024

Bc. Dominik Horák





*Název práce:*

**Numerický model neizotermálního proudění a obtékání překážek založený na mřížkové Boltzmannově metodě**

*Autor:* Bc. Dominik Horák

*Obor:* Matematické inženýrství

*Zaměření:* Matematické modelování

*Druh práce:* Výzkumný úkol

*Vedoucí práce:* doc. Ing. Radek Fučík Ph.D., Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 120 00, Praha 2

*Konzultant:* Ing. Jakub Klinkovský Ph.D., Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 120 00, Praha 2

*Abstrakt:* Práce se zabývá matematickým modelováním neizotermálního proudění nestlačitelné Newtonovské tekutiny. Práce si klade za cíl implementovat a popsat přestup tepla ve 3D numerickém modelu. V teoretické části je prezentován matematický model neizotermálního proudění Newtonovské tekutiny spolu se základním popisem chladicího okruhu studentské formule. Ve druhé části je čtenář seznámen s mřížkovou Boltzmannovou metodou (LBM) a poslední část je pak věnována diskuzi výsledků aplikace LBM s implementovaným přestupem tepla na matematický model. Implementace přestupu teploty byla úspěšná a metoda produkuje uspokojivé výsledky.

*Klíčová slova:* mřížková Boltzmannova metoda, MPI, rovnice vedení tepla, simulace proudění na GPU

*Title:*

**Numerical model of non-isothermal flow around obstacles based on the lattice Boltzmann method**

*Author:* Bc. Dominik Horák

*Abstract:* The work deals with the mathematical modeling of non-isothermal flow of incompressible Newtonian fluids. The aim of the work is to implement and describe heat transfer in a 3D numerical model. In the theoretical part, the mathematical model of non-isothermal flow of Newtonian fluids is presented together with a basic description of the cooling circuit of a student formula car. In the second part, the reader is introduced to the lattice Boltzmann method (LBM), and the last part discusses the results of the application of LBM with implemented heat transfer to the mathematical model. The implementation of heat transfer was successful, and the method produces satisfactory results.

*Key words:* lattice Boltzmann method, MPI, heat equation, flow simulation on GPU

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>8</b>
<b>1 Matematický model</b>	<b>9</b>
1.1 Popis dynamiky tekutiny . . . . .	9
1.2 Vedení tepla . . . . .	10
1.3 Charakteristické veličiny . . . . .	10
1.4 Formulace 3D úlohy . . . . .	11
<b>2 Mřížková Boltzmannova metoda</b>	<b>12</b>
2.1 Diskretizace LBM . . . . .	12
2.2 Přejchod k bezrozměrnému systému jednotek . . . . .	14
2.3 Numerické schéma pro proudění tekutiny . . . . .	15
2.3.1 Počáteční a okrajové podmínky . . . . .	16
2.4 Numerické schéma pro vedení tepla . . . . .	17
2.4.1 Počáteční a okrajové podmínky . . . . .	18
2.5 Inamurova okrajová podmínka pro přestup tepla . . . . .	18
2.6 Symetrická okrajová podmínka . . . . .	19
2.7 Algoritmus LBM . . . . .	19
<b>3 Implementace</b>	<b>21</b>
3.1 Datové struktury pro implementaci LBM . . . . .	21
3.1.1 Pole pro difuzní koeficient . . . . .	21
3.1.2 Poznámky k počítání na více grafických kartách . . . . .	22
3.2 Implementace přestupové podmínky pro ADR schéma . . . . .	22
<b>4 Výsledky</b>	<b>25</b>
4.1 Implementace prostorově proměnlivé difuze . . . . .	25
4.2 Testování přestupové okrajové podmínky . . . . .	27
4.2.1 Přestupová OP . . . . .	28
4.2.2 Výsledky úlohy 4.2.1 . . . . .	31
4.2.3 Poznámka k implementaci přestupové okrajové podmínky . . . . .	32
4.3 Testování konvergence přestupové okrajové podmínky . . . . .	32
4.3.1 Přestupová OP pro $D_* \approx 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . . . . .	33
4.3.2 Výsledky úlohy 4.3.1 . . . . .	35
4.3.3 Přestupová OP pro $D_* \approx 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . . . . .	37
4.4 Experiment CUBI . . . . .	37
4.4.1 Experiment CUBI . . . . .	39

<i>OBSAH</i>	7
4.4.2 Výsledky úlohy 4.4.1 . . . . .	39
<b>Závěr</b>	<b>40</b>

# Úvod

Tato práce se zabývá problematikou simulace proudění tekutin (anglicky computational fluid dynamics, dále CFD), za použití mřížkové Boltzmannovy metody (LBM), což patří mezi nejsklonovanější témata na poli numerické matematiky. Zároveň je CFD velmi hojně využíváné v praxi, například ve Formuli 1. V automobilovém průmyslu obecně je v posledních letech stále větší důraz kladen na numerické simulace narozdíl od experimentů, které bývají finančně mnohem náročnější.

V předcházející bakalářské práci [9] bylo zkoumáno neizotermální proudění okolo překážek a spolu s ním i aerodynamické vlastnosti tohoto proudění. V této práci je hlavním cílem simulovat izotermální proudění spolu s přestupem tepla mezi různými typy prostředí.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole je představen matematický model dynamiky tekutin formulací úlohy.

Ve druhé kapitole je čtenář seznámen s mřížkovou Boltzmannovou metodou. Popsány jsou základní principy metody, numerická schémata používaná při simulacích, spolu s představením okrajových podmínek a algoritmu LBM. V této kapitole je také popsána přestupová okrajová podmínka implementovaná v rámci této práce.

Třetí kapitola je věnována poznámkám k implementaci kódu

Dále zde čtenář nalezne popis datových struktur použitých k implementaci LBM. V poslední kapitole jsou prezentovány výsledky aplikace mřížkové Boltzmannovy metody na matematický model zavedený v první kapitole. V této části je nejprve komentována implementace pole pro různé difuzní koeficienty, dále je zde ověřována přestupová okrajová podmínka a hledány optimální rozměry chladiče. Na závěr této kapitoly jsou diskutována možné směry dalšího zlepšení modelu.

Ke zmíněným numerickým simulacím byl využíván kód LBM vyvíjený již několik let na KM FJFI ČVUT v Praze. Kód je napsán v jazyce C++ a je v něm využita architektura CUDA umožňující paralelní počítání na grafických kartách. Dále kód využívá knihovny OpenMPI pro paralelní počítání na více grafických kartách. Výpočty byly primárně uskutečněny na výpočetním clusteru HELIOS na KM FJFI ČVUT, konkrétně na grafických kartách NVIDIA A100 s 80 GB pamětí. Díky funkcionalitě OpenMPI bylo možné využít všechny čtyři dostupné grafické karty najednou. Tento kód byl následně modifikován dle potřeb zadání – byla do něj implementována přestupová okrajová podmínka a dále bylo přidáno difuzní pole umožňující nastavení odlišného difuzního koeficientu pro různé objekty v simulaci.



# Kapitola 1

## Matematický model

Mějme trojrozměrnou oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  s hranicí  $\partial\Omega$ . V této oblasti uvažujeme pevné těleso  $\Omega_b \subset \Omega$ . Časový interval uvažujeme  $\mathcal{I} = \langle 0, \mathcal{T} \rangle \subset \mathbb{R}$  pro  $\mathcal{T} > 0$ .

### 1.1 Popis dynamiky tekutiny

K popisu tekutin chceme použít diferenciální počet. To lze za předpokladu, že při makroskopickém pohledu můžeme tekutinu považovat za spojité prostředí (kontinuum), ve kterém zanedbáváme částicové vlastnosti tekutin. To platí i pro infinitezimálně malou část kontinua. Pro tekutinu tedy dostáváme Navierovy-Stokesovy-Fourierovy rovnice v konzervativním tvaru popisující dynamiku tekutiny

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} + \rho F_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( E + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( E + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \mathbf{u} \right] = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \rho Q + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{i=1}^3 u_i \tau_{ik} \right) - \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}), \quad (1.1c)$$

kde  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t, T)$  [m s<sup>-3</sup>] je hustota tekutiny,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  [m s<sup>-1</sup>] značí vektor rychlosti pro  $\mathbf{x} \in \Omega$  [m],  $t \in \mathcal{I}$  [s],  $p = p(\mathbf{x}, t, T)$  [kg m<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup>] vyjadřuje tlak okolního materiálu,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t, T)$  [kg m s<sup>-2</sup>] je objemová síla vztahovaná na jednotku hmotnosti a dynamický tenzor napětí značíme  $\mathbf{T}_D = (\tau_{ij})$  [kg m<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup>]. Dále  $E = E(\mathbf{x}, t, T)$  [kg m<sup>2</sup> s<sup>-2</sup>] vyjadřuje specifickou vnitřní energii,  $\kappa$  [kg m K<sup>-1</sup> s<sup>-3</sup>] se nazývá koeficient tepelné vodivosti,  $T = T(\mathbf{x}, t)$  [K] je teplota tekutiny a  $Q = Q(\mathbf{x}, t)$  [kg m<sup>2</sup> s<sup>-3</sup>] je hustota tepelných zdrojů na jednotku hmotnosti.

Tekutinu uvažujeme newtonovskou, tudíž složky dynamického tenzoru napětí, viz [4], jsou pro  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  ve tvaru

$$\tau_{ij} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad i = j, \quad (1.2)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i \neq j, \quad (1.3)$$

kde  $\mu$  [kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>] se nazývá součinitel molekulární viskozity nebo také dynamická viskozita a platí  $\mu = \rho \nu$ , pro kinematickou viskozitu  $\nu$  [m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>]. Ve vztahu (1.2) se objevuje také druhý viskózní koeficient  $\lambda$  [kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>], pro který uvažujeme Stokesovu hypotézu [10]

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu. \quad (1.4)$$

## 1.2 Vedení tepla

Rovnici pro zákon zachování energie (1.1c) zjednodušíme pomocí rovnice vedení tepla. Celková změna tepelné energie za čas je rovna tepelnému toku přes hranici  $\varphi$  [kg s<sup>-3</sup>] a tepelné energii generované vnějšími zdroji  $Q$ . To lze symbolicky zapsat jako

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) = -\nabla \cdot (\varphi + \rho c T \mathbf{u}) + Q, \quad (1.5)$$

kde  $c$  [m<sup>2</sup> s<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup>] je měrná tepelná kapacita. Tepelný tok  $\varphi$  je z Fourierova zákona definován vztahem

$$\varphi = -\kappa \nabla T, \quad (1.6)$$

kde  $\kappa = \kappa(\mathbf{x})$  [kg m s<sup>-3</sup> K<sup>-1</sup>] vystupuje v roli součinitele tepelné vodivosti a  $\nabla T$  [K m<sup>-1</sup>] označuje teplotní gradient. Předpokládejme, že hustota  $\rho$  je konstantní. Dosazením (1.6) do (1.5) dostaneme

$$\frac{\partial(cT)}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \nabla \cdot (cT \mathbf{u}) + \frac{Q}{\rho}. \quad (1.7)$$

V případě, že  $\kappa$  a  $c$  jsou také konstantní, lze tuto rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T - \mathbf{u} \cdot \nabla T + \frac{Q}{\rho c}, \quad (1.8)$$

kde jsme označili difuzní koeficient  $D = \frac{\kappa}{\rho c}$  [m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>] a Laplaceův operátor  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ .

Pro přestup tepla zavádíme součinitel přestupu tepla  $\omega$  [kg s<sup>-3</sup> K<sup>-1</sup>]

$$\omega = \frac{\varphi}{\Delta T}, \quad (1.9)$$

kde  $\Delta T$  označuje rozdíl teplot na rozhraní mezi tělesem a překážkou.

## 1.3 Charakteristické veličiny

Při popisu proudění tekutin je dobré zavést některé veličiny, které pomohou během následného vyhodnocování výsledků lépe charakterizovat jednotlivé typy proudění tekutin, viz [8]. Mezi tyto veličiny patří:

- Reynoldsovo číslo

$$\text{Re} = \frac{l_0^2}{t_0 \nu} = \frac{l_0 u_0}{\nu}, \quad (1.10)$$

- Sherwoodovo číslo

$$\text{Sh} = \frac{\omega l_0}{D_0} = \frac{k}{u_0}, \quad (1.11)$$

kde  $\omega$  je koeficient přestupu a  $l_0, t_0, u_0, D_0$  značí po řadě charakteristickou délku, čas, rychlost a difuzi.

Turbulence + veličiny

## 1.4 Formulace 3D úlohy

Tato sekce bude věnována formulaci 3D úlohy proudění tekutiny. Mějme tedy 3D oblast tvaru kváдру  $\Omega = (0, W) \times (0, H) \times (0, H)$ ,  $W, H \in \mathbb{R}^+$ , stejnou jako v sekcích 1.1 a 1.2. Časový interval uvažujme  $\mathcal{I} = \langle 0, \mathcal{T} \rangle$  pro  $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^+$ .

Pro izotermální systém s nestlačitelnou, newtonovskou, vazkou tekutinou mějme zákony zachování ve tvaru

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.12a)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = \rho \nu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.12b)$$

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla T, \quad (1.12c)$$

na oblasti  $\Omega \times \mathcal{I}$ , kde  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$  značí vektor rychlosti a  $x_i$  jsou po řadě složky polohového vektoru  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ . Všechny veličiny mohou být obecně závislé na poloze  $\mathbf{x}$ , čase  $t$  a teplotě  $T$ . První rovnice odpovídá rovnici kontinuity (1.1a), druhá zákonu zachování hybnosti (1.1b) a poslední rovnici vedení tepla (1.8).

Pro 3D úlohu zbývá ještě dodefinovat okrajové a počáteční podmínky. Ty jsou pro řešení Navierových-Stokesových rovnic tvaru

$$(\nabla p(\mathbf{x}, t) - \nu \rho \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_{in}, 0, 0)^\top \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_{in} \times \mathcal{I}, \quad (1.13a)$$

$$\nabla p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_w \times \mathcal{I}, \quad (1.13b)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_{out}(\mathbf{x}, t), \quad \nabla u_i(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_{out} \times \mathcal{I}, \quad (1.13c)$$

$$\nabla p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.13d)$$

kde  $\mathbf{u}_{in}$  značí rychlost na vstupní části hranice  $\Gamma_{in}$ . Pro řešení advekčně-difuzní úlohy (1.12c) jsou okrajové a počáteční podmínky tvaru

$$T(\mathbf{x}, t) = T_{in} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_{in} \times \mathcal{I}, \quad (1.14a)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_w \times \mathcal{I}, \quad (1.14b)$$

$$\nabla T_i(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_{out} \times \mathcal{I}, \quad (1.14c)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_a \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_b, \quad (1.14d)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_b \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \overline{\Omega}_b \times \mathcal{I}, \quad (1.14e)$$

$$\mathbf{J}_a(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_v = \text{Sh}(T_v(\mathbf{x}, t) - T_b(\mathbf{x}, t)) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_b \times \mathcal{I}, \quad (1.14f)$$

$$\mathbf{J}_b(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_b = \text{Sh}(T_b(\mathbf{x}, t) - T_v(\mathbf{x}, t)) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_b \times \mathcal{I}, \quad (1.14g)$$

kde  $T_{in}$  značí teplotu na vstupní části oblasti,  $T_v$  je počáteční teplota v oblasti mimo překážku a  $T_b$  značí počáteční teplotu na překážce. Rovnice (1.14f) resp. (1.14g) odpovídají tepelnému toku z oblasti do tělesa resp. z tělesa do oblasti, viz [5].

Při řešení úlohy budeme uvažovat různé hodnoty difuzního koeficientu v závislosti na poloze, tj.  $D = D(\mathbf{x})$ . V případě, že se budeme nacházet na tělese  $\Omega_b$ , uvažujeme difuzní koeficient s označením  $D_b$ . V opačném případě jej budeme značit  $D_a$ .

## Kapitola 2

# Mřížková Boltzmannova metoda

Numerická metoda použitá k simulaci izotermálního proudění tekutin je mřížková Boltzmannova metoda, zkráceně LBM. Tato metoda je jedna z nejmladších hojně používaných metod k simulaci tekutin. Následující kapitola se bude věnovat popisu této metody v prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

LBM používá mezoskopického popisu tekutiny, kdy uvažujeme tekutinu složenou z částic a popsanou jednočásticovou pravděpodobnostní hustotou  $f$  [ $\text{kg m}^{-6} \text{s}^3$ ]. Funkce  $f = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$  znázorňuje pravděpodobnost, že fiktivní částici najdeme v malém okolí ( $H_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^3$ ) bodu  $\mathbf{x}$ , s rychlostí v malém okolí ( $H_{\boldsymbol{\xi}} \subset \mathbb{R}^3$ ) rychlosti  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top$  [ $\text{m s}^{-1}$ ] a v čase  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Prostor rychlostí budeme značit  $\Xi$ , tj.  $\boldsymbol{\xi} \in \Xi = \mathbb{R}^3$ . Takto zavedená distribuční funkce  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$  se pak řídí Boltzmannovou transportní rovnicí

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = C, \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^\top$  [ $\text{m s}^{-2}$ ] vyjadřuje vektor zrychlení a  $C$  [ $\text{kg m}^{-6} \text{s}^2$ ] je kolizní operátor, který bude popsán později.

### 2.1 Diskretizace LBM

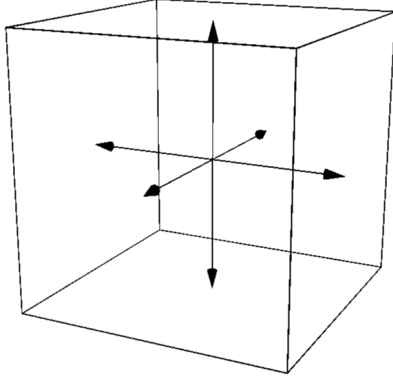
Diskretizace prostoru se v LBM provádí za pomoci pravidelné mřížky (angl. lattice). Diskretizace prostoru rychlostí se potom odvíjí od zvoleného rychlostního modelu  $DdQq$ , kde  $d$  a  $q$  postupně značí dimenzi prostoru a počet směrů, kterými se z každého uzlu lze vydat. V této práci budeme uvažovat modely  $D3Q27$  pro simulaci proudění a  $D3Q7$  pro řešení advekčně-difuzní rovnice. Oba modely jsou vyobrazeny na obrázku 2.1. Modely mají následující rozložení rychlostí:

D3Q27:

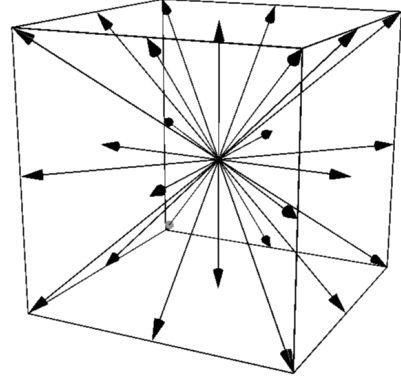
$$\{\boldsymbol{\xi}_k\}_{k=0}^{26} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.2)$$

D3Q7:

$$\{\xi_k\}_{k=0}^6 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.3)$$



(a) D3Q7.



(b) D3Q27.

Obrázek 2.1: Znázornění rychlostních modelů D3Q7 a D3Q27.

V kapitole 1 jsme definovali oblast  $\Omega$ , kterou nyní zdiskretizujeme izotropní mřížkou  $\bar{\hat{\Omega}}$  ve tvaru

$$\bar{\hat{\Omega}} = \{\mathbf{x}_{i,j,\ell} = (ih, jh, \ell h)^T \mid i \in \{0, 1, \dots, N_x - 1\}, j \in \{0, 1, \dots, N_y - 1\}, \ell \in \{0, 1, \dots, N_z - 1\}\}, \quad (2.4a)$$

$$\hat{\Omega} = \{\mathbf{x}_{i,j,\ell} \mid i \in \{1, 2, \dots, N_x - 2\}, j \in \{1, 2, \dots, N_y - 2\}, \ell \in \{1, 2, \dots, N_z - 2\}\}, \quad (2.4b)$$

$$\hat{\Gamma} := \bar{\hat{\Omega}} \setminus \hat{\Omega}, \quad (2.4c)$$

kde  $\hat{\Omega}$  značí vnitřek oblasti  $\Omega$  a  $\hat{\Gamma}$  označuje uzly diskretizující hranici této oblasti. Prostorový krok uvažujeme ve všech směrech kartézských os stejný (tzv. ekvidistantní mřížka), značme jej proto  $h$ . Diskretizovanou překážku budeme značit  $\hat{\Omega}_b \subset \bar{\hat{\Omega}}$ , její hranici  $\hat{\Gamma}_b$  budeme rozumět uzly  $\mathbf{x}_b \in \hat{\Omega}_b$ , pro které existuje  $k \in \{1, 2, \dots, q - 1\}$  takové, že mřížkový bod  $\mathbf{x}_b + \Delta t \xi_k \notin \hat{\Omega}_b$ .

Před diskretizací samotné Boltzmannovy rovnice zbývá zavést diskretizaci pro časový interval  $\mathcal{I}$ . Definujeme tedy diskrétní interval

$$\hat{\mathcal{I}} = \{t_i = i\Delta t \mid i \in \{0, 1, \dots, N_t - 1\}\}, \quad (2.5)$$

ve kterém  $\Delta t = \frac{\mathcal{T}}{N_t}$  a  $N_t \in \mathbb{N}$ .

Po zavedení diskretizace dostáváme z (2.1) diskrétní Boltzmannovu transportní rovnici

$$f_k(\mathbf{x} + \Delta t \xi_k, t + \Delta t) - f_k(\mathbf{x}, t) = C_k(\mathbf{x}, t) + \mathcal{S}_k(\mathbf{x}, t), \quad (2.6)$$

kde  $k \in \{0, 1, 2, \dots, q - 1\}$  je index směru dané rovnice v modelu DdQq. Na pravé straně rovnice se vyskytují kolizní operátor  $C_k$  a silový člen  $\mathcal{S}_k$ , oba závislé na zvoleném typu LBM [7, 3, 6].

Při zavedení postkolizní distribuční funkce  $f_k^*$  vztahem

$$f_k^*(\mathbf{x}, t) = f_k(\mathbf{x}, t) + C_k(\mathbf{x}, t) + \mathcal{S}_k(\mathbf{x}, t), \quad (2.7)$$

můžeme rovnici (2.6) přepsat do tvaru

$$f_k(\mathbf{x} + \Delta t \boldsymbol{\xi}_k, t + \Delta t) = f_k^*(\mathbf{x}, t), \quad (2.8)$$

který platí  $\forall \mathbf{x} \in \hat{\Omega}, \forall k \in \{0, 1, \dots, q-1\}, \forall t \in \{0, 1, \dots, N_t-1\}$ .

V rámci kolizního kroku, který bude popsán později, se objevuje diskrétní aproximace Maxwellovy-Boltzmannovy rovnovážné distribuční funkce  $f_k^{eq}$ ,  $\forall k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ . Ta je tvaru

$$f_k^{eq}(\rho, \mathbf{u}) = \rho w_k \left( 1 + \frac{\boldsymbol{\xi}_k \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\boldsymbol{\xi}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_s^2} \right). \quad (2.9)$$

Hodnoty  $c_s$  hrají roli mřížkové rychlosti zvuku, která závisí na zvoleném modelu – pro  $D3Q27$   $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$  a  $c_s = \frac{1}{2}$  pro  $D3Q7$ . Dále se ve vztahu vyskytují váhy  $w_k$ , jejichž tvar je také určen rychlostním modelem, kterého se daná rovnovážná distribuční funkce týká [1]. Váhy nabývají hodnot

$$\{w_k\}_{k=0}^6 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right\} \quad \text{pro } D3Q7, \quad (2.10)$$

a u modelu  $D3Q27$  jsou to hodnoty

$$w_k = \begin{cases} \frac{8}{27}, & k = 0, \\ \frac{2}{27}, & k \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}, \\ \frac{1}{54}, & k \in \{7, 8, \dots, 18\}, \\ \frac{1}{216}, & k \in \{19, 20, \dots, 26\}. \end{cases} \quad (2.11)$$

## 2.2 Přechod k bezrozměrnému systému jednotek

Pro zjednodušení vzorců používaných v LBM volíme mřížkový prostorový a časový krok dle [7]

$$\Delta t = h = 1. \quad (2.12)$$

Díky této volbě pak získáváme tyto převodní vztahy:

$$\nu = \frac{h^2}{\Delta t} \nu', \quad (2.13a)$$

$$D = \frac{h^2}{\Delta t} D', \quad (2.13b)$$

$$u_i = \frac{h}{\Delta t} u'_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.13c)$$

$$k = \frac{h}{\Delta t} k', \quad (2.13d)$$

kde čárkované veličiny označují příslušné veličiny v mřížkových jednotkách.

Hustota kapalin v LBM fluktuuje okolo své referenční hodnoty  $\rho'_{ref}$ , kterou bývá ve zvyku volit rovnu 1. V kapitole 1 byl ale jedním z předpokladů na proudění kapaliny její nestlačitelnost. Z tohoto důvodu bývá LBM někdy označováno za metodu řešící slabě stlačitelné proudění [7]. Lze tedy psát

$$\rho' = \rho'_{ref} + \delta'_\rho. \quad (2.14)$$

## 2.3 Numerické schéma pro proudění tekutiny

### Rozepsat

Rovnice proudění tekutin budeme řešit modelem  $D3Q27$ , pro který máme sadu distribučních funkcí označenou

$$\{f_k(\mathbf{x}, t) \mid k \in \{0, 1, 2, \dots, 26\}\} \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in \bar{\Omega} \times \hat{T} \quad (2.15)$$

Tyto distribuční funkce  $f_k$  jsou řízeny diskretní Boltzmannovou transportní rovnicí (2.6), kde za diskretní kolizní operátor  $C_k$  volíme kumulantní LBM kolizní operátor (CuLBM), [3].

Makroskopické veličiny získáme ze vztahů

$$\rho = \sum_{k=0}^{26} f_k, \quad (2.16a)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{k=0}^{26} f_k \boldsymbol{\xi}_k + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{g}, \quad (2.16b)$$

kde při řešení NSR odpovídá nultý moment hustotě a první moment vektoru hybnosti. Rychlost získáme z rovnice pro hybnost vydělením předem spočtenou hustotou.

Základem kumulantního kolizního operátoru jsou relaxační časy makroskopických momentů, které jsou zároveň Galileovsky invariantní a statisticky nezávislé. Mějme tedy rychlostní model  $D3Q27$ , pro který jsou obecné a centrální momenty ve tvaru

$$m_{\alpha} := \sum_{k=0}^{26} f_k \xi_{k,1}^{\alpha_1} \xi_{k,2}^{\alpha_2} \xi_{k,3}^{\alpha_3}, \quad (2.17)$$

a

$$k_{\alpha} := \sum_{k=0}^{26} f_k (\xi_{k,1} - u_1)^{\alpha_1} (\xi_{k,2} - u_2)^{\alpha_2} (\xi_{k,3} - u_3)^{\alpha_3}, \quad (2.18)$$

kde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \in \mathbb{Z}^3$  a  $\mathbf{u}$  značí po řadě multiindex a makroskopickou rychlost.

Kolizní operátor je tvaru [3]

$$C(f(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \left( N^{-1} \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{G} (\mathbf{M} f^{eq}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M} f(\mathbf{x}, t)) \right), \quad (2.19)$$

tudíž pro postkolizní distribuční funkci dostáváme vztah

$$f^*(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \left( N^{-1} \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{G} (\mathbf{M} f^{eq}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{M} f(\mathbf{x}, t)) \right), \quad (2.20)$$

kde matice  $\mathbf{S}$  je pro relaxační časy  $\tau_i, i \in \{0, 1, \dots, 26\}$  ve tvaru

$$\mathbf{S} = \text{diag} \left( 0, 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{\tau_1}, \frac{\Delta t}{\tau_2}, \frac{\Delta t}{\tau_3}, \frac{\Delta t}{\tau_4}, \dots, \frac{\Delta t}{\tau_{22}}, \frac{\Delta t}{\tau_{23}} \right). \quad (2.21)$$

Pomocí matice  $\mathbf{M}$  definujeme vektor makroskopických momentů  $\boldsymbol{\mu}$  jako

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M} f. \quad (2.22)$$

Další maticí, která vystupuje ve vztahu (2.20), je matice kombinace kumulantů  $N$ . Podrobný popis těchto matic lze nalézt v [3]. Posledním výrazem, který vystupuje ve vztahu pro postkolizní funkce, je nelineární operátor  $G$ , za pomoci kterého je provedena transformace obecných momentů  $\mu$  do kumulantního vektoru

$$\gamma = G(\mu) = G(Mf) = (\gamma_{(0,0,0)}, \gamma_{(1,0,0)}, \gamma_{(0,1,0)}, \dots, \gamma_{(2,2,2)})^T. \quad (2.23)$$

Nakonec definujeme vektor

$$\gamma^{eq} = (\rho, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3\rho c_s^2, 0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{27} \quad (2.24)$$

a následně můžeme vztah (2.20) přepsat v řeči vektoru  $\gamma$

$$\gamma^*(x, t) = \gamma(x, t) + N^{-1}SN(\gamma^{eq}(x, t) - \gamma(x, t)). \quad (2.25)$$

Předpokládáme-li izotropní viskozitu, lze volit relaxační časy

$$\tau_1 = \tau_{shear}, \quad (2.26a)$$

$$\tau_i = 1 \quad \forall i \in \{2, 3, 4, \dots, 23\}, \quad (2.26b)$$

kde  $\tau_{shear}$  splňuje

$$\nu_{LBM} = c_s^2 \left( \tau_{shear} - \frac{\Delta t}{2} \right). \quad (2.27)$$

### 2.3.1 Počáteční a okrajové podmínky

V této části uvedeme LBM aproximace pro počáteční a okrajové podmínky úlohy 1.4.

Počáteční stav rozložení hustoty  $\rho_{ini}$  a rychlosti  $\mathbf{u}_{ini}$  pokládáme roven rovnovážným distribučním funkcím  $f_k^{eq}$  vztahem

$$f_k(\mathbf{x}_{i,j,\ell}, 0) = f_k^{eq}(\rho_{ini}(\mathbf{x}_{i,j,\ell}), \mathbf{u}_{ini}(\mathbf{x}_{i,j,\ell})). \quad (2.28)$$

Okrajové podmínky volíme následující:

$\hat{\Gamma}_w, \hat{\Gamma}_b$ : Full-way bounce-back okrajová podmínka:

U okrajových podmínek typu bounce-back uvažujeme odrazy fiktivních částic tekutiny od hranice zpátky do oblasti s tekutinou. Pro odrazy od stěn u simulace proudění použijeme variantu full-way této podmínky. Pro její popis uvažujme uzel tekutiny  $\mathbf{x}_f$  a uzel stěny  $\mathbf{x}_b$ . Potom můžeme psát  $\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_f + \Delta t \xi_k$  pro směr  $k$ , ve kterém se, z pohledu  $\mathbf{x}_f$ , nachází uzel  $\mathbf{x}_b$ . Pro uzly překážky poté předepíšeme podmínku

$$f_k^*(\mathbf{x}_b, t) = f_k^*(\mathbf{x}_f, t - \Delta t) \quad \mathbf{x}_b \in \hat{\Gamma}_b, \quad \mathbf{x}_f \in \hat{\Omega} \setminus \bar{\hat{\Omega}}_b \cup \bar{\hat{\Omega}}_w, \quad (2.29)$$

kde  $\xi_{\bar{k}} = -\xi_k$ . Samotný algoritmus pro odraz od uzlu  $\mathbf{x}_b$  je popsán v [9].

$\hat{\Gamma}_{in}$ : Okrajová podmínka na vstupu:

K aproximaci podmínky na vstupu použijeme předpoklad, že známe hustotu tekutiny, která do oblasti proudí. Hustota je navázána na tlak pomocí vztahu  $p = c_s^2 \rho$ , viz [7].

$\hat{\Gamma}_{out}$ : Neumannova okrajová podmínka na výstupu:

Pro simulaci odtokové okrajové podmínky na části hranice  $\hat{\Gamma}_{out}$  nemáme v LBM k dispozici všechny potřebné distribuční funkce [7, 9]. Abychom tyto funkce nahradili, využijeme uzlů předešlých (uvnitř oblasti), čímž bude platit  $\nabla f_k \cdot \mathbf{n} = 0$  pro  $k$  splňující  $\xi_{k,1} = -1$  a  $\mathbf{n}$  vnější normálový vektor pro  $\hat{\Gamma}_{out}$ .



## 2.4 Numerické schéma pro vedení tepla

### Rozepsat

Vedení tepla v tekutině budeme řešit za pomoci rychlostního modelu  $D3Q7$ , pro který jsou nám k dispozici distribuční funkce

$$\{g_k(\mathbf{x}, t) \mid k \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}\} \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in \bar{\Omega} \times \hat{I} \quad (2.30)$$

Distribuční funkce  $g_k$  jsou, stejně jako v případě NSR, řízeny diskrétní Boltzmannovou rovnicí (2.1), kde tentokrát volíme za kolizní operátor centrální LBM kolizní operátor (CLBM), [2].

Teplotě odpovídá v případě řešení ADR nultý moment distribučních funkcí, tj.

$$T = \sum_{k=0}^6 g_k. \quad (2.31)$$

U centrálního kolizního operátoru se kolize provádí v prostoru centrálních momentů  $g_k$ . Ve zvoleném rychlostním modelu  $D3Q7$  pro advektivně difuzní schéma máme definované obecné a centrální momenty

$$m_\alpha := \sum_{k=0}^6 g_k \xi_{k,1}^{\alpha_1} \xi_{k,2}^{\alpha_2} \xi_{k,3}^{\alpha_3}, \quad (2.32)$$

a

$$k_\alpha := \sum_{k=0}^6 g_k (\xi_{k,1} - u_1)^{\alpha_1} (\xi_{k,2} - u_2)^{\alpha_2} (\xi_{k,3} - u_3)^{\alpha_3}, \quad (2.33)$$

kde se vyskytuje makroskopická rychlost  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$  definovaná vztahem (2.16b) a  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^\top \in \mathbb{Z}^3$  je multiindex.

Operátor CLBM je tvaru

$$C(g(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{K} (g^{eq}(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x}, t)), \quad (2.34)$$

z čehož pak z rovnice (2.7) dostáváme vztah pro postkolizní distribuční funkci

$$g^*(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{K} (g^{eq}(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x}, t)), \quad (2.35)$$

kde matice  $\mathbf{S}$  je pro relaxační časy  $\tau_i, i \in \{0, 1, \dots, 8\}$  tvaru

$$\mathbf{S} = \text{diag} \left( 0, \frac{\Delta t}{\tau_1}, \frac{\Delta t}{\tau_2}, \dots, \frac{\Delta t}{\tau_6} \right). \quad (2.36)$$

Dále matici  $\mathbf{K}$  volíme tak, aby splňovala

$$\kappa := \mathbf{K} \mathbf{g} = \begin{pmatrix} k_{(0,0,0)} \\ k_{(1,0,0)} \\ k_{(0,1,0)} \\ k_{(0,0,1)} \\ k_{(2,0,0)} + k_{(0,2,0)} + k_{(0,0,2)} \\ k_{(2,0,0)} - k_{(0,2,0)} \\ k_{(2,0,0)} - k_{(0,0,2)} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

a pro vektor centrálních momentů distribučních funkcí platilo, že

$$\boldsymbol{\kappa}^{eq} := \mathbf{K} \mathbf{g}^{eq} = (\rho, 0, 0, 0, 3Tc_s^2, 0, 0)^T. \quad (2.38)$$

Relaxační časy volíme

$$\tau_i = \tau_h \quad \forall i \in \{2, 3, 4\}, \quad (2.39a)$$

$$\tau_i = 1 \quad \forall i \in \{5, 6, 7\}, \quad (2.39b)$$

kde  $\tau_h$  splňuje vztah

$$D_j = c_s^2 \left( \tau_h - \frac{\Delta t}{2} \right), \quad (2.40)$$

pro  $j \in \{a, b\}$  v závislosti na tom, jestli kolize probíhá na tělese nebo mimo něj.

### 2.4.1 Počáteční a okrajové podmínky

V případě řešení advekčně difuzního schématu použijeme stejnou počáteční podmínku jako u řešení NSR schématu, tj. položíme počáteční stav teploty  $T_{ini}$  a rychlosti  $\mathbf{u}_{ini}$  roven rovnovážným distribučním funkcím  $g_k^{eq}$ :

$$g_k(\mathbf{x}_{i,j,\ell}, 0) = g_k^{eq}(T_{ini}(\mathbf{x}_{i,j,\ell}), \mathbf{u}_{ini}(\mathbf{x}_{i,j,\ell})). \quad (2.41)$$

Aproximace okrajových podmínek pro řešení ADR budou následující:

$\hat{\Gamma}_w$ : Full-way bounce-back okrajová podmínka:

Pro simulaci stěn, se kterými neprobíhá výměna tepla, použijeme stejnou okrajovou podmínku jako v případě proudění – tedy bounce-back okrajovou podmínku.

$\hat{\Gamma}_{in}$ : Okrajová podmínka na vstupu:

Na vstupní části hranice předepíšeme hodnotu teploty  $T_{in}$ . Použijeme k tomu rovnovážné distribuční funkce  $g_k^{eq}$ .

$\hat{\Gamma}_b$ : Pro simulaci stěn, se kterými probíhá výměna tepla použijeme Inamurovu okrajovou podmínku pro přestup, viz 2.5.

## 2.5 Inamurova okrajová podmínka pro přestup tepla

Tok teploty  $\mathbf{j}$  přes hranici vyjadřuje vztah

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = \sum_{k=0}^6 g_k \boldsymbol{\xi}_k \cdot \mathbf{n}. \quad (2.42)$$

Pro známou normálu  $\mathbf{n}$  lze tok aproximovat hledanou teplotou  $T_b(\mathbf{x}_b, t)$  a teplotou tekutiny  $T_f$  v sousedním uzlu (ve směru normály  $\mathbf{n}$ ). Můžeme tedy psát

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = D \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \approx D \frac{T_b - T_f}{h}. \quad (2.43)$$

Díky volbě rychlostního modelu  $D3Q7$  je rozklad teploty do normálového směru přímo roven distribuční funkci v daném směru [7]. Tento fakt značně zjednodušuje implementaci podmínky. V bezrozměrném zápise budeme psát

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \approx \text{Sh} \frac{T_b - T_f}{h}. \quad (2.44)$$

## 2.6 Symetrická okrajová podmínka

## 2.7 Algoritmus LBM

Pokud opomeneme samotnou inicializaci, kde se nastaví počáteční a okrajové podmínky, algoritmus jednoho schématu LBM probíhá následovně:

- Během **šíření** jsou rozeslány hodnoty distribučních funkcí v příslušných směrech. Poté se spočtou hodnoty distribučních funkcí pro další krok.
- Dále jsou spočteny **makroskopické veličiny** za pomoci vztahů (2.16) a (2.31) v závislosti na daném schématu.
- Poté se vyřeší **okrajové podmínky**, viz sekce 2.3.1 a 2.4.1.
- Poslední část cyklu se věnuje **koliznímu kroku**, který závisí na konkrétním schématu a během kterého se spočtou postkolizní distribuční funkce dle vztahu (2.7).

Při numerických simulacích byl použit kód používající dvě LBM schémata – NSR schéma řešící Navierovy-Stokesovy rovnice a ADR schéma použité k řešení rovnice vedení tepla. Tato schémata jsou při jednotlivých krocích výpočtu od sebe oddělena. Jejich propojení obstarává propojovací krok, během kterého se nastaví rychlost používaná pro advekční schéma tak, že rovnice (1.12c) přejde do následujícího tvaru

$$1 \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa T) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla T, \quad (2.45)$$

tedy  $\rho$  u výrazu  $\frac{\partial T}{\partial t}$  jsme v bezrozměrném tvaru aproximovali hodnotou 1.

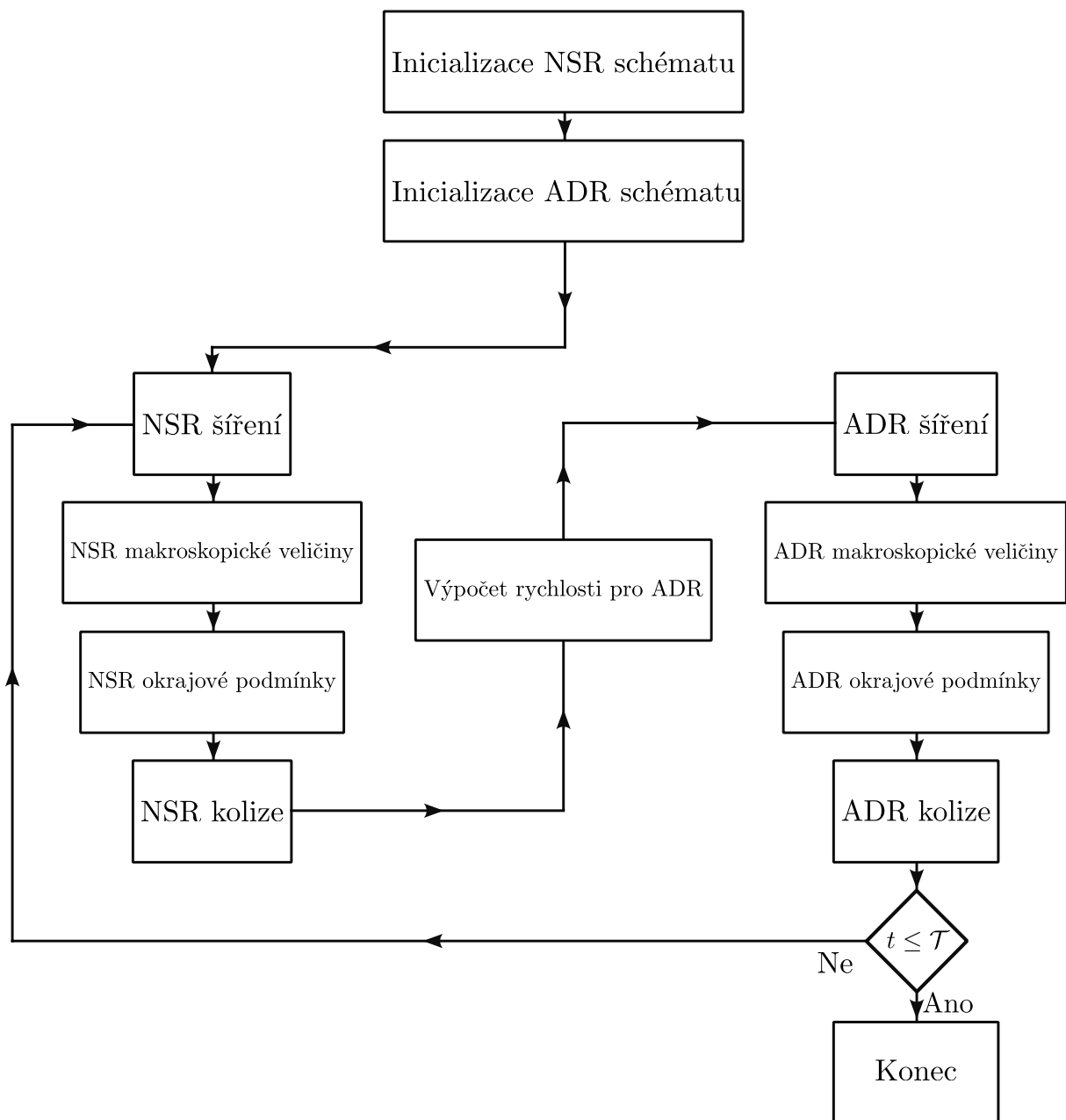
Kompletní algoritmus pak vypadá jako na obrázku 2.2.

V případě NSR schématu volíme na počátku simulace kinematickou viskozitu  $\nu$  a LBM viskozitu  $\nu_{LBM}$ . Z těchto informací spočteme nejdříve časový krok

$$\Delta t = \frac{\nu_{LBM}}{\nu} h^2. \quad (2.46)$$

Při inicializaci ADR pak zvolíme pouze fyzikální difuzi  $D$  a LBM difuze  $D_{LBM}$  je pak vypočtena za pomoci časového kroku jako

$$D_{LBM} = \frac{\Delta t}{h^2} D. \quad (2.47)$$



Obrázek 2.2: Schéma algoritmu LBM pro řešení NSR a ADR.

## Kapitola 3

# Implementace

### 3.1 Datové struktury pro implementaci LBM

V této sekci se zaměříme na popis datových struktur, které jsou použity při implementaci mřížkové Boltzmannovy metody.

Jak bylo popsáno podrobně v této kapitole, podstatou LBM jsou distribuční funkce, které jsou rozmístěny na ekvidistantní mřížce. Rozměry mřížky jsou v případě 3D schémat  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$ . Pro každý uzel mřížky máme v paměti uloženou celou sadu distribučních funkcí, tj. pro NSR schéma využívající modelu  $D3Q27$  to je celkem  $27N_xN_yN_z$  hodnot, pro ADR schéma s modelem  $D3Q7$  pak jen  $7N_xN_yN_z$  hodnot. Navíc je tento algoritmus navržen tak, aby měl k dispozici 2 sady distribučních funkcí, které se při každém časovém kroku střídají, tudíž jen k uložení distribučních funkcí je potřeba několik polí o celkové délce  $68N_xN_yN_z$ . Při počítání na grafických kartách se tato pole se duplikují mezi systémovou pamětí a grafickou kartou. Během inicializace se pak pole kopírují z RAM do GPU, při výstupu na disk kopírování probíhá z GPU do RAM.

Dále je zapotřebí definovat pole o velikosti  $N_xN_yN_z$ , ve kterém budou uloženy hodnoty okrajových podmínek v daném uzlu. Tato pole budou potřeba dvě – jedno pro NSR a druhé pro ADR schéma.

Nakonec pak dostáváme vzorec pro odhad celkové paměti potřebné pro jednu simulaci:

$$Me = 8 \cdot 68N_xN_yN_z + 8 \cdot VN_xN_yN_z + 2 \cdot 2N_xN_yN_z, \quad (3.1)$$

kde  $Me$  [B] značí celkový odhad potřebné paměti. První sčítanec zastupuje velikost polí pro distribuční funkce, druhý odhaduje velikost ukládaných makroskopických veličin  $V$  [–] a třetí člen aproximuje pole s okrajovými podmínkami. První dva členy jsou typu **double** s velikostí 8 bajtů, poslední pak může být ukládán pouze jako **short int**, tedy s velikostí 2 bajty. Co se počtu makroskopických veličin  $V$  týče, jejich počet je pro simulace v této práci roven 5 - složky rychlosti  $u_i$  pro  $i \in \{1, 2, 3\}$ , hustota  $\rho$  a teplota  $T$ .

#### 3.1.1 Pole pro difuzní koeficient

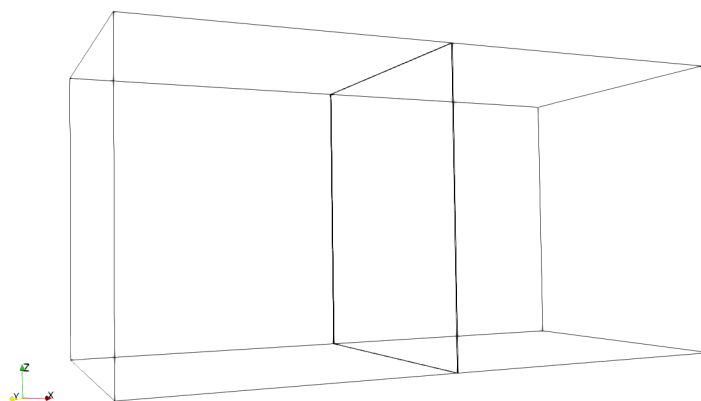
Schéma řešící ADR bylo v rámci této práce rozšířeno o pole pro difuzní koeficient, díky čemuž je možnost nastavit v oblasti různou fyzikální difuzi. Toto pole inicializujeme na počátku algoritmu hodnotami difuze ve všech bodech mřížky a následně je toto pole zkopírováno na grafickou kartu, kde hodnoty z něj jsou pak používány v dalších částech algoritmu.

Například chceme-li simulovat těleso, které má jiný difuzní koeficient než okolní tekutina, stačí pro uzly náležící tomuto tělesu nastavit difuzi na požadovanou hodnotu.

### 3.1.2 Poznámky k počítání na více grafických kartách

Při paralelním počítání na více grafických kartách je celá mřížka rozdělena do bloků dle počtu použitých grafických karet. Toto rozdělení v použitém kódu probíhá výhradně podél osy  $x$ , viz obrázek 3.1.

Pro zajištění správné komunikace mezi jednotlivými bloky mezi sebou je nutné zavést tzv. překryvy jednotlivých bloků. Pro každý blok na každé kartě alokujeme pole o 1 větší v každém směru osy  $x$ . Během komunikace si sousedící bloky předávají informace z těchto překryvů a mohou tedy získat potřebné distribuční funkce ze směrů, které by jinak byly nedostupné.



Obrázek 3.1: Rozdělení výpočetní oblasti  $\bar{\Omega}$  na dva bloky pro umožnění počítání na dvou grafických kartách. Rozdělení oblasti je provedeno ve směru osy  $x$ .

## 3.2 Implementace přestupové podmínky pro ADR schéma

V rámci této práce byla implementována přestupová podmínka pro ADR schéma popsána v sekci 2.5. V této sekci blíže popíšeme její implementaci pro LBM schéma  $D3Q7$ .

Při prvotní inicializaci okrajových podmínek je umístěna do výpočetní oblasti  $\bar{\Omega}$  překážka  $\bar{\Omega}_b$ . V samotném kódu je to provedeno nastavením hodnoty GEO\_SOLID pro uzly příslušející překážce.

Následně je zavolána funkce, která pro výše zvolenou překážku nastaví samotnou přestupovou okrajovou podmínku. Mohou nastat tři situace, které musíme v kódu rozlišit:

- přestup z tekutiny (vzduchu) do překážky,
- přestup z překážky do tekutiny,
- přestup mezi překážkou a zdí.

Funkce nejprve inicializuje pomocná pole pro jednotlivé situace a nastavíme je na hodnotu **false**:

```
1 bool_array_t TransferFS;  
2 bool_array_t TransferSF;  
3 bool_array_t TransferSW;  
4  
5 TransferFS.setSizes(global.x(), global.y(), global.z());  
6 TransferSF.setSizes(global.x(), global.y(), global.z());
```

```

7 TransferSW.setSizes(global.x(), global.y(), global.z());
8
9 for(idx x = offset.x(); x < offset.x() + local.x(); x++)
10     for(idx y = offset.y(); y < offset.y() + local.y(); y++)
11         for(idx z = offset.z(); z < offset.z() + local.z(); z++)
12             if (isLocalIndex(x, y, z)) {
13                 TransferFS(x, y, z) = false;
14                 TransferSF(x, y, z) = false;
15                 TransferSW(x, y, z) = false;
16             }

```

Funkce `isLocalIndex(x, y, z)` je pomocnou funkcí pro počítání paralelně pomocí OpenMPI.

Když jsou pomocná pole inicializovaná, nastane prohledání celé oblasti a přiřazení hodnoty `true` pro takové uzly, které splňují podmínky pro jednu ze situací pro přestup popsaných výše, tj.

•

Po nastavení směrů pro přestup již můžeme přejít ke kroku nastavení samotné přestupové okrajové podmínky:

```

1 for(idx x = offset.x(); x < offset.x() + local.x(); x++)
2     for(idx y = offset.y(); y < offset.y() + local.y(); y++)
3         for(idx z = offset.z(); z < offset.z() + local.z(); z++){
4             if(TransferFS(x,y,z))
5                 setMap(x,y,z, CONFIG::BC::GEO_TRANSFER_FS);
6             if(TransferSF(x,y,z))
7                 setMap(x,y,z, CONFIG::BC::GEO_TRANSFER_SF);
8             if(TransferSW(x,y,z))
9                 setMap(x,y,z, CONFIG::BC::GEO_TRANSFER_SW);
10        }

```

Implementace jednotlivých přestupových podmínek je pak následující.

• Pro `GEO_TRANSFER_FS` je ve tvaru:

```

1 case GEO_TRANSFER_FS: {
2
3     dreal Temp[6] = {0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0};
4     Temp[0] = SD.df(df_cur, zzz, xp, y, z) + SD.df(df_cur, pzz, xp, y, z)
5             + SD.df(df_cur, zpz, xp, y, z) + SD.df(df_cur, zzp, xp, y, z)
6             + SD.df(df_cur, mzz, xp, y, z) + SD.df(df_cur, zmz, xp, y, z)
7             + SD.df(df_cur, zzm, xp, y, z);
8     Temp[1] = SD.df(df_cur, zzz, x, yp, z) + SD.df(df_cur, pzz, x, yp, z)
9             + SD.df(df_cur, zpz, x, yp, z) + SD.df(df_cur, zzp, x, yp, z)
10            + SD.df(df_cur, mzz, x, yp, z) + SD.df(df_cur, zmz, x, yp, z)
11            + SD.df(df_cur, zzm, x, yp, z);
12    Temp[2] = SD.df(df_cur, zzz, x, y, zp) + SD.df(df_cur, pzz, x, y, zp)
13            + SD.df(df_cur, zpz, x, y, zp) + SD.df(df_cur, zzp, x, y, zp)
14            + SD.df(df_cur, mzz, x, y, zp) + SD.df(df_cur, zmz, x, y, zp)
15            + SD.df(df_cur, zzm, x, y, zp);
16    Temp[3] = SD.df(df_cur, zzz, xm, y, z) + SD.df(df_cur, pzz, xm, y, z)
17            + SD.df(df_cur, zpz, xm, y, z) + SD.df(df_cur, zzp, xm, y, z)
18            + SD.df(df_cur, mzz, xm, y, z) + SD.df(df_cur, zmz, xm, y, z)
19            + SD.df(df_cur, zzm, xm, y, z);
20    Temp[4] = SD.df(df_cur, zzz, x, ym, z) + SD.df(df_cur, pzz, x, ym, z)
21            + SD.df(df_cur, zpz, x, ym, z) + SD.df(df_cur, zzp, x, ym, z)
22            + SD.df(df_cur, mzz, x, ym, z) + SD.df(df_cur, zmz, x, ym, z)
23            + SD.df(df_cur, zzm, x, ym, z);

```

```

24     Temp[5] = SD.df(df_cur,zzz,x,y,zm) + SD.df(df_cur,pzz,x,y,zm)
25             + SD.df(df_cur,zpz,x,y,zm) + SD.df(df_cur,zzp,x,y,zm)
26             + SD.df(df_cur,mzz,x,y,zm) + SD.df(df_cur,zmz,x,y,zm)
27             + SD.df(df_cur,zzm,x,y,zm);
28
29     if(SD.transferDir(pzz, x, y, z)){
30         KS.f[mzz] = SD.df(df_cur,pzz,x, y, z)
31                 + SD.C*(Temp[0] - SD.macro(0, x, y, z));
32     }
33     if(SD.transferDir(zpz, x, y, z)){
34         KS.f[zmz] = SD.df(df_cur,zpz,x, y, z)
35                 + SD.C*(Temp[1] - SD.macro(0, x, y, z));}
36     if(SD.transferDir(zzp, x, y, z)){
37         KS.f[zzm] = SD.df(df_cur,zzp,x, y, z)
38                 + SD.C*(Temp[2] - SD.macro(0, x, y, z));
39     }
40     if(SD.transferDir(mzz, x, y, z)){
41         KS.f[pzz] = SD.df(df_cur,mzz,x, y, z)
42                 + SD.C*(Temp[3] - SD.macro(0, x, y, z));
43     }
44     if(SD.transferDir(zmz, x, y, z)){
45         KS.f[mpz] = SD.df(df_cur,zmz,x, y, z)
46                 + SD.C*(Temp[4] - SD.macro(0, x, y, z));
47     }
48     if(SD.transferDir(zzm, x, y, z)){
49         KS.f[zzp] = SD.df(df_cur,zzm,x, y, z)
50                 + SD.C*(Temp[5] - SD.macro(0, x, y, z));
51     }
52     COLL::computeDensityAndVelocity(KS);
53     break;
54 }

```

- Podmínka GEO\_TRANSFER\_SF má totožnou implementaci jako GEO\_TRANSFER\_FS
- Pro GEO\_TRANSFER\_SW je podmínka obdobou bounce-back okrajové podmínky ??:

```

1  case GEO_TRANSFER_SW: {
2
3      if(SD.transferDir(pzz, x, y, z))    KS.f[mzz] = SD.df(df_cur,pzz,x, y, z);
4      if(SD.transferDir(zpz, x, y, z))    KS.f[zmz] = SD.df(df_cur,zpz,x, y, z);
5      if(SD.transferDir(zzp, x, y, z))    KS.f[zzm] = SD.df(df_cur,zzp,x, y, z);
6      if(SD.transferDir(mzz, x, y, z))    KS.f[pzz] = SD.df(df_cur,mzz,x, y, z);
7      if(SD.transferDir(zmz, x, y, z))    KS.f[mpz] = SD.df(df_cur,zmz,x, y, z);
8      if(SD.transferDir(zzm, x, y, z))    KS.f[zzp] = SD.df(df_cur,zzm,x, y, z);
9      COLL::computeDensityAndVelocity(KS);
10     break;
11 }

```



## Kapitola 4

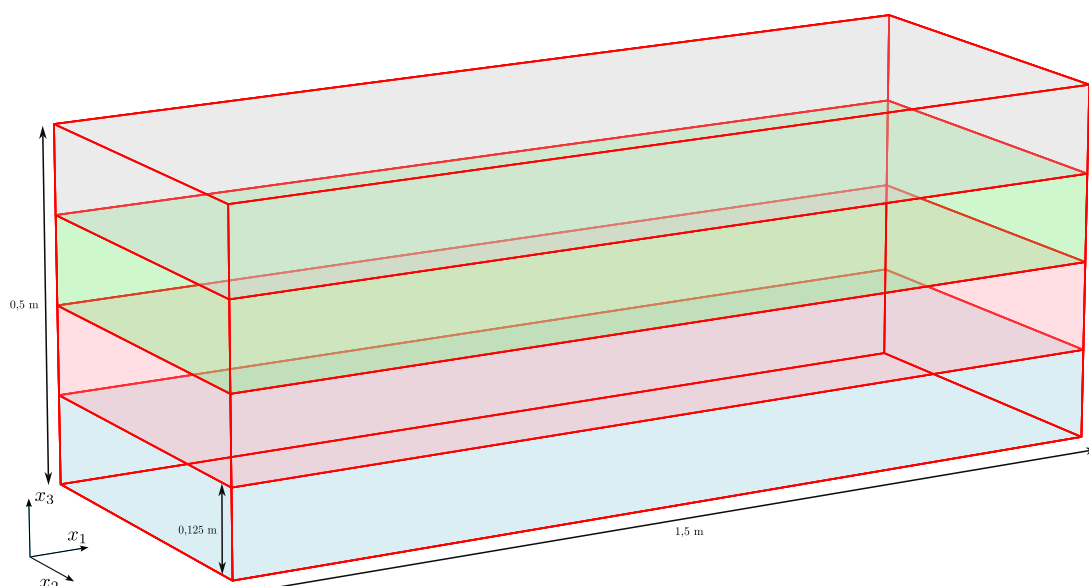
# Výsledky

Tato kapitola bude shrnovat výsledky použití mřížkové Boltzmannovy metody na matematický model, který byl popsán v kapitole 1.

První sekce bude zaměřena na diskuzi implementace přestupové okrajové podmínky. Ve druhé části se zaměříme na otestování zavedených numerických schémat na testovací úloze a poslední sekce bude věnována zkoumání vlivu rozměrů radiátoru na účinnost chlazení.

### 4.1 Implementace prostorově proměnlivé difuze

V této sekci krátce shrneme výsledky aplikace různých difuzních koeficientů na neizotermální proudění. Budeme uvažovat kanál ve tvaru kvádru s konstantní rychlostí na vstupu. Tento kanál rozdělíme podél roviny  $xz$  na čtyři části za pomoci pevné zdi. V každé části pak předepíšeme jiný difuzní koeficient  $D_i$  pro  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  a budeme pozorovat vliv na šíření teploty v jednotlivých částech.



Obrázek 4.1: Schéma výpočetní oblasti pro úlohu 4.1.

#### Úloha 4.1

Parametry úlohy:

- $\Omega = (0; 1,0 \text{ m}) \times (0; 0,5 \text{ m}) \times (0; 0,5 \text{ m})$ ,
- $T_{ini} = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ,
- $t \in \langle 0; 0,1 \rangle \text{ s}$ ,
- $T_{in} = 25 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ,
- $\nu = 1,552 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $u_{in} = 2 \text{ m s}^{-1}$ ,
- $D_i \in \{2,239 \cdot 10^{-i} \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}\} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Počáteční a okrajové podmínky:

- V  $\bar{\Omega}$  nastavíme počáteční podmínky dle sekcí 2.3.1 a 2.4.1.
- Na části hranice  $\hat{\Gamma}_{in}$  zvolíme vstupní okrajové podmínky popsané v 2.3.1 a 2.4.1.
- Pro  $\hat{\Gamma}_{out}$  volíme odtokové podmínky dle 2.3.1 a 2.4.1.
- Na  $\hat{\Gamma}_w$  použijeme bounce-back okrajové podmínky ze sekcí 2.3.1 a 2.4.1.
- Pro hranice mezi oblastmi předepíšeme bounce-back okrajové podmínky ze sekcí 2.3.1 a 2.4.1.

Parametry LBM:

- $N_x \times N_y \times N_z = (768 \times 384 \times 384)$ ,
- $\text{Re} = 66\,666$ ,
- $\nu_{LBM} = 10^{-6}$ , odpovídá  $\Delta t \approx 10^{-7} \text{ s}$ .



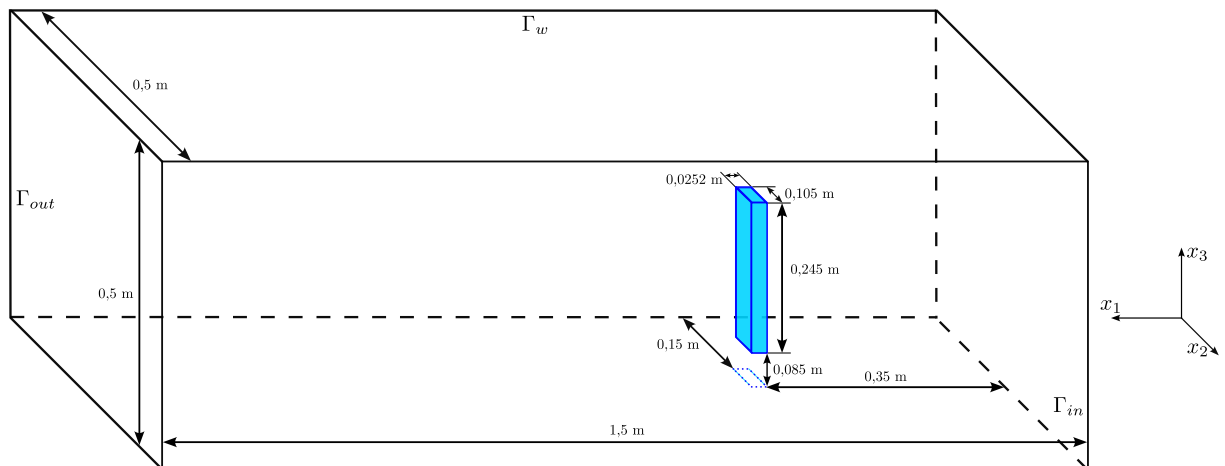
Obrázek 4.2: Průřez výpočetní oblasti znázorňující čtyři oddělené části oblasti s rozdílným difuzním koeficientem  $D_i$  pro  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  v čase  $t = 0,05$  s.

## 4.2 Testování přestupové okrajové podmínky

V této sekci bude cílem otestovat implementovanou přestupovou okrajovou podmínku definovanou v sekci 2.5.

Budeme uvažovat 3D výpočetní oblast ve tvaru kvádru  $\Omega = (0; 1,5 \text{ m}) \times (0; 0,5 \text{ m}) \times (0; 0,5 \text{ m})$ . Do ní bude pevně umístěno kvádrové těleso  $\Omega_b$  o rozměrech  $(0,0252 \text{ m} \times 0,245 \text{ m} \times 0,105 \text{ m})$  s počáteční teplotou  $T_{ini,b}$ , viz obrázek 4.3.

Při simulacích budeme uvažovat různé hodnoty jak pro koeficient přestupu  $\omega$ , tak i pro velikost vstupní rychlosti  $u_{in}$ . Dále uvažujeme i různé prostorové kroky  $h$ . Předmětem zájmu pro nás bude průměrná teplota na tělese  $\Omega_b$ .



Obrázek 4.3: Schéma výpočetní oblasti pro úlohu 4.2.1.

### 4.2.1 Přestupová OP

#### Úloha 4.2.1

Parametry úlohy:

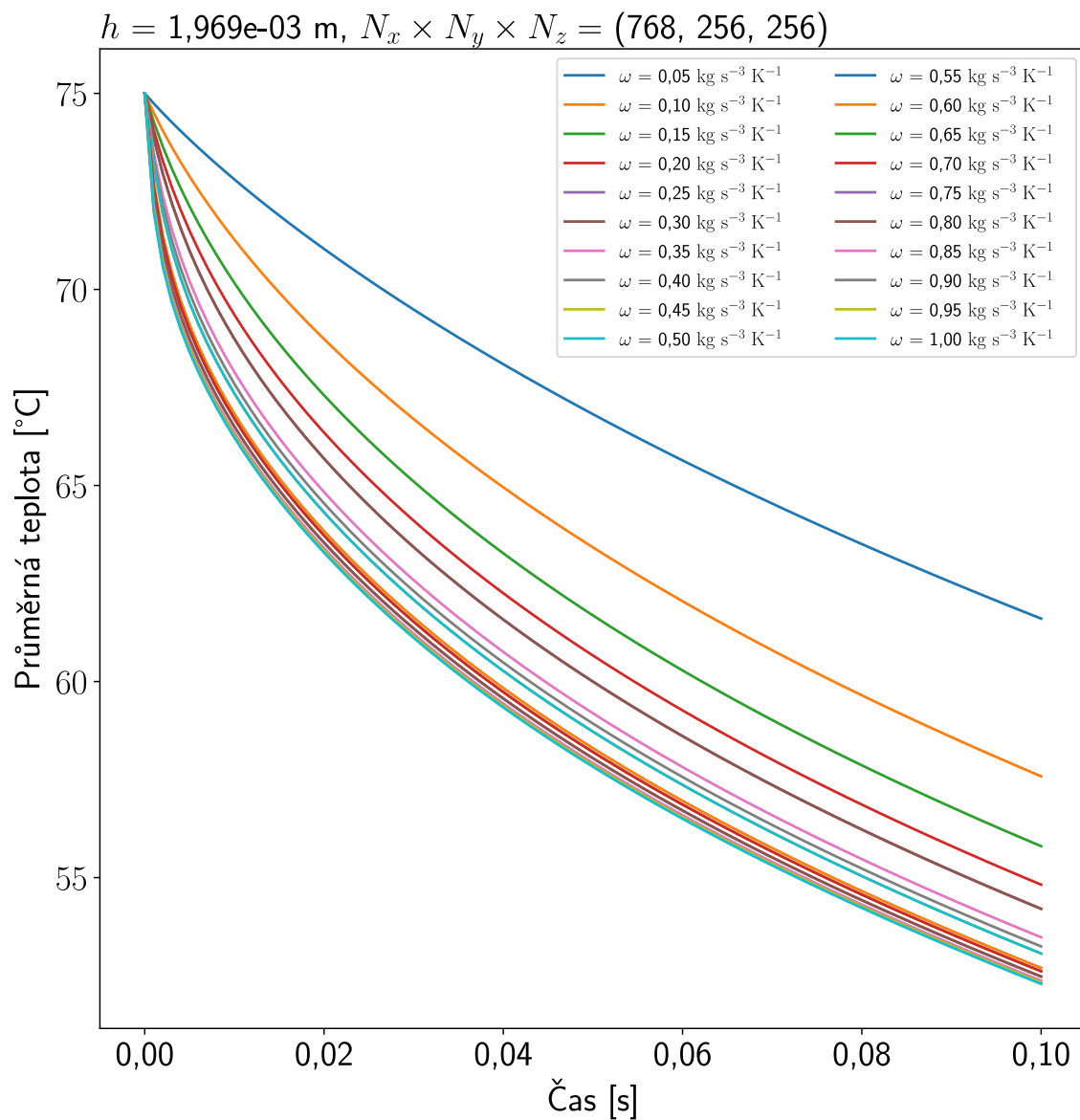
- $\Omega = (0; 1,5 \text{ m}) \times (0; 0,5 \text{ m}) \times (0; 0,5 \text{ m})$ ,
- $T_{in} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ,
- $t \in \langle 0; 0,1 \rangle \text{ s}$ ,
- $T_{ini,b} = 75 \text{ }^\circ\text{C}$ ,
- $\nu = 1,552 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $D_a = 2,239 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $u_{in} \in \{1, 4, 8, 12, 16, 20\} \text{ m s}^{-1}$ ,
- $D_b = 9,700 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $T_{ini,a} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ,
- $\omega = 0,05j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, 20\} \text{ kg s}^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

Počáteční a okrajové podmínky:

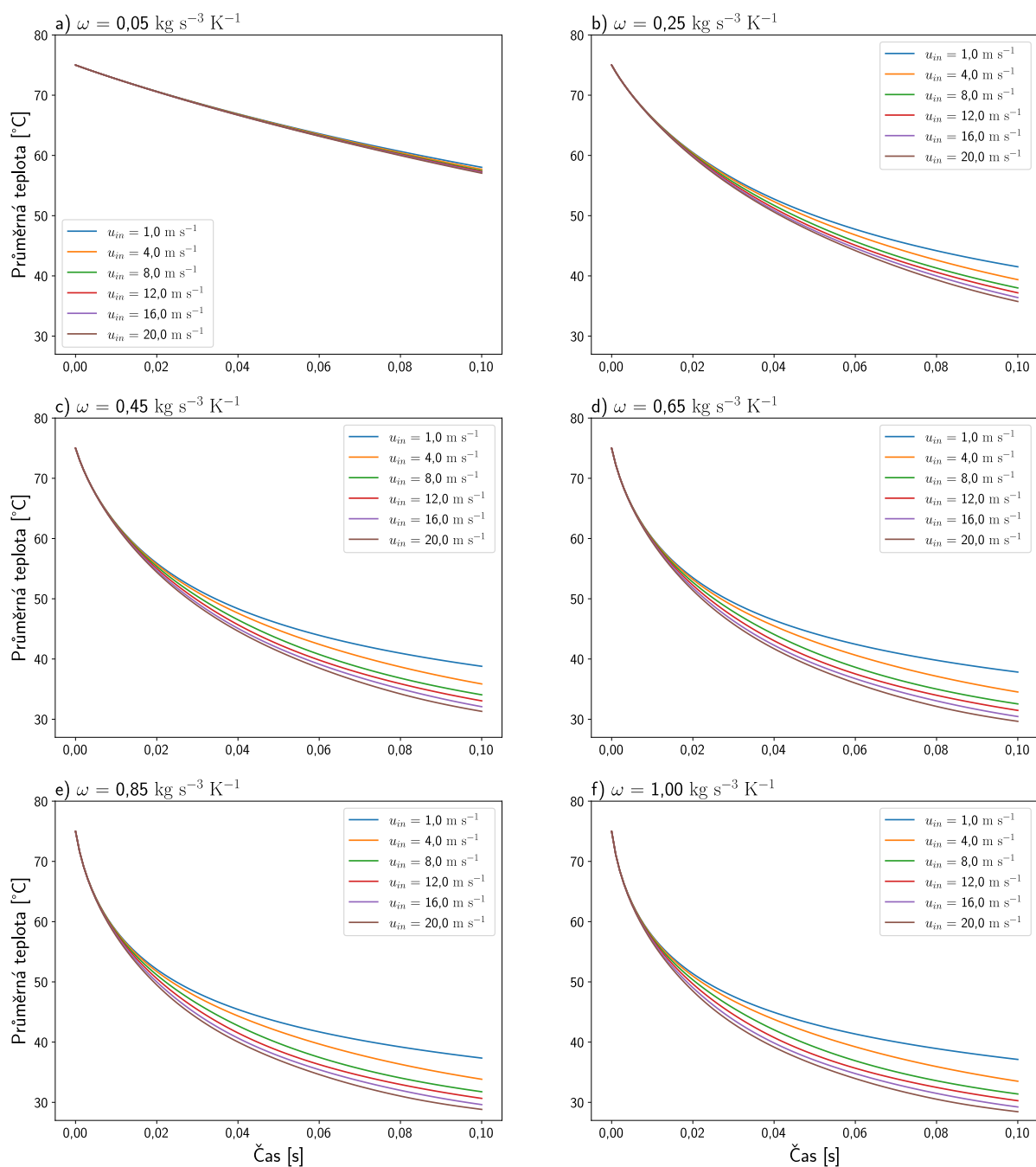
- V  $\bar{\Omega}$  nastavíme počáteční podmínky dle sekcí 2.3.1 a 2.4.1.
- Na části hranice  $\hat{\Gamma}_{in}$  zvolíme vstupní okrajové podmínky popsané v 2.3.1 a 2.4.1.
- Pro  $\hat{\Gamma}_{out}$  volíme odtokové podmínky dle 2.3.1 a 2.4.1.
- Na  $\hat{\Gamma}_w$  použijeme bounce-back okrajové podmínky ze sekcí 2.3.1 a 2.4.1.
- Pro těleso  $\bar{\Omega}_b$  volíme následující okrajové podmínky:
  - Pro NSR schéma volíme na  $\bar{\Omega}_b$  bounce-back okrajovou podmínku dle 2.3.1,
  - V ADR schématu použijeme na  $\hat{\Gamma}_b$  přestupovou podmínku, viz 2.4.1.

Parametry LBM:

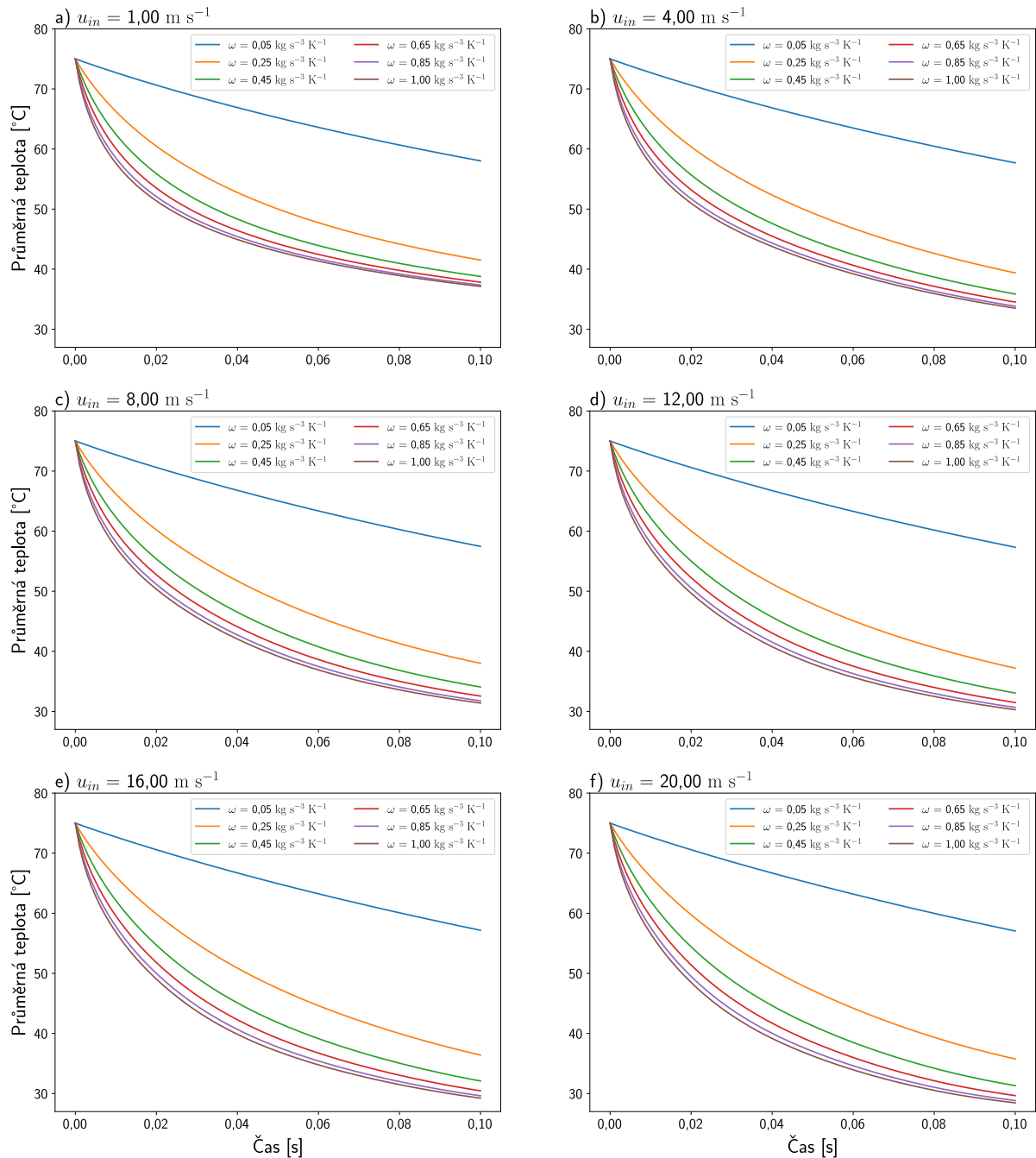
- $N_x \times N_y \times N_z \in \{96i \times 32i \times 32i \mid i \in \{3, 4, \dots, 8\}\}$ ,
- $\text{Re} \in \langle 33\,333, 666\,666 \rangle$ ,
- $\nu_{LBM} = 10^{-6}$ , odpovídá  $\Delta t \approx 10^{-7} \text{ s}$ .



Obrázek 4.4: Graf závislosti průměrné teploty na tělese  $\Omega_b$  na čase  $t$  pro úlohu 4.2.1 a pro různé hodnoty koeficientu přestupu  $\omega$ , prostorový krok  $h = 1,969 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  odpovídající mřížce (768, 256, 256), časový krok  $\Delta t = 2,497 \cdot 10^{-7} \text{ s}$  a velikost vstupní rychlosti  $u_{in} = 1 \text{ m s}^{-1}$ .



Obrázek 4.5: Grafy zobrazující závislost průměrné teploty  $T$  na čas  $t$  pro úlohu 4.2.1 a pro různé velikosti vstupní rychlosti  $u_{in}$ . Vyobrazeny jsou grafy pro různé volby koeficientu přestupu  $\omega$ . Ve všech grafech uvažujeme prostorový krok  $h = 1,969 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  odpovídající mřížce (768, 256, 256) a časový krok  $\Delta t = 1,015 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ .



Obrázek 4.6: Grafy zobrazující závislost průměrné teploty  $T$  na čas  $t$  pro úlohu 4.2.1 a pro různé hodnoty koeficientu přestupu  $\omega$ . Vyobrazeny jsou grafy pro různé hodnoty vstupní rychlosti  $u_{in}$ . Ve všech grafech uvažujeme prostorový krok  $h = 1,969 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  odpovídající mřížce (768, 256, 256) a časový krok  $\Delta t = 1,015 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ .

#### 4.2.2 Výsledky úlohy 4.2.1

Úloha 4.2.1 simuluje nastavení přestupové okrajové podmínky v modelu. Předmětem zkoumání zde je vývoj průměrné teploty  $T_{mean}$  v čas  $t$ . Na grafu 4.4 pozorujeme závislost průměrné teploty pro různé koeficienty přestupu  $\omega$  a vstupní rychlost  $u_{in} = 1 \text{ m s}^{-1}$ . Z grafu je zřejmé, že se zvyšující se hodnotou  $\omega$  se účinnost chlazení zvyšuje až do určitého limitního stavu. Na obrázku 4.6 je tato situace vyobrazena

pro různé hodnoty počáteční rychlosti  $u_{in}$  a pro vybrané koeficienty přestupu  $\omega$ . Lze nahlédnout, že i pro vyšší hodnoty vstupní rychlosti průměrné teploty konvergují.

Z obrázku 4.5 lze vyčíst, že pro malé koeficienty přestupu téměř nezávisí na velikosti vstupní rychlosti. Pro hodnoty  $\omega$  blízké 1 jsou již rozdíly mezi průměrnými teplotami nezanedbatelné, ale i přesto tyto rozdíly nejsou tak markantní v porovnání s rychlostmi na vstupu.

### 4.2.3 Poznámka k implementaci přestupové okrajové podmínky

Při implementaci přestupové okrajové podmínky došlo k odhalení chyby, kvůli které teplota unikala do okolí i při nulovém koeficientu přestupu. Po lokalizaci chyby bylo zjištěno, že problém nastává v situaci, kdy dojde ke kontaktu stěn oblasti s překážkou, tj.  $\exists k \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$  takové, že

$$g(\mathbf{x}_b + \xi_k \Delta t, t) = g(\mathbf{x}_w, t), \quad (4.1)$$

pro nějaké uzly  $\mathbf{x}_b$  a  $\mathbf{x}_w$  označující po řadě uzel tělesa a uzel stěny.

Pro vyřešení této chyby se nakonec ukázalo nutné do přestupové podmínky zahrnout ještě i tento případ, tedy situaci, kdy se uzly tělesa nachází v kontaktu s uzlem zdi.

## 4.3 Testování konvergence přestupové okrajové podmínky

V této sekci budeme zkoumat chování teploty v oblasti okolo překážky při použití přestupové okrajové podmínky popsané v sekci 2.5. V průběhu výzkumu byly pozorovány numerické chyby v oblasti náběhové hrany překážky.

Pro optimalizaci výpočtu použijeme na stěnu  $\Gamma_{top}$  symetrickou okrajovou podmínku, při výpočtech ušetříme polovinu paměti a budeme tak moci dosáhnout jemnějšího rozlišení sítě. Přeci jen připomeňme, že jsme při výpočtech omezení paměti grafických karet, která je stále jednou z největších překážek při výpočtu.

V rámci této sekce budeme ve výpočtech sledovat chování minimální a maximální teploty v podoblasti  $\overline{\Omega}_s$  výpočetní oblasti  $\overline{\Omega}$ .



### 4.3.1 Přestupová OP pro $D_* \approx 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

#### Úloha 4.3.1

Parametry úlohy:

- $\Omega = (0; 1,25 \text{ m}) \times (0; 1 \text{ m}) \times (0; 0,5 \text{ m})$ ,
- $T_{in} = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ ,
- $t \in \langle 0; 10 \rangle \text{ s}$ ,
- $T_{ini,b} = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ ,
- $\nu = 1,552 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $D_a = 2,239 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $u_{in} = 1 \text{ m s}^{-1}$ ,
- $D_b = 9,700 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $T_{ini,a} = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ ,
- $\omega = 0,01 \text{ kg s}^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

Počáteční a okrajové podmínky:

- V  $\bar{\Omega}$  nastavíme počáteční podmínky dle sekcí 2.3.1 a 2.4.1.
- Na části hranice  $\hat{\Gamma}_{in}$  zvolíme vstupní okrajové podmínky popsané v 2.3.1 a 2.4.1.
- Pro  $\hat{\Gamma}_{out}$  volíme odtokové podmínky dle 2.3.1 a 2.4.1.
- Na  $\hat{\Gamma}_w$  použijeme bounce-back okrajové podmínky ze sekcí 2.3.1 a 2.4.1.
- Pro těleso  $\bar{\Omega}_b$  volíme následující okrajové podmínky:
  - Pro NSR schéma volíme na  $\bar{\Omega}_b$  bounce-back okrajovou podmínku dle 2.3.1,
  - V ADR schématu použijeme na  $\hat{\Gamma}_b$  přestupovou podmínku, viz 2.4.1.

Parametry LBM:

- $N_x \times N_y \times N_z \in \{40i \times 32i \times 16i \mid i \in \{3, 4, \dots, 25\}\}$ ,
- $\text{Re} = 33\,333$ ,
- $\nu_{LBM} = 10^{-4}$ , odpovídá  $\Delta t \approx 10^{-5} \text{ s}$ .

$t = 1.0 \text{ s}$			
Rozlišení sítě	Prostorový krok $h \text{ [m]}$	Minimální teplota $T_{min} \text{ [}^\circ\text{C]}$	Minimální teplota $T_{min} \text{ [}^\circ\text{C]}$
$160 \times 128 \times 64$	$7,81 \cdot 10^{-3}$	4,757	5,587
$200 \times 160 \times 80$	$6,25 \cdot 10^{-3}$	4,795	5,491
$240 \times 192 \times 96$	$5,21 \cdot 10^{-3}$	4,824	5,423
$280 \times 224 \times 112$	$4,46 \cdot 10^{-3}$	4,845	5,367
$320 \times 256 \times 128$	$3,91 \cdot 10^{-3}$	4,822	5,327
$360 \times 288 \times 144$	$3,47 \cdot 10^{-3}$	4,869	5,288
$400 \times 320 \times 160$	$3,13 \cdot 10^{-3}$	4,864	5,258
$440 \times 352 \times 176$	$2,84 \cdot 10^{-3}$	4,929	5,169

Tabulka 4.1: Vývoj minimální a maximální teploty v závislosti na rozlišení sítě pro hodnotu difuzního koeficientu  $D \approx 10^{-3}$  v čase  $t = 1 \text{ s}$ .

$t = 3.0 \text{ s}$			
Rozlišení sítě	Prostorový krok $h \text{ [m]}$	Minimální teplota $T_{min} \text{ [}^\circ\text{C]}$	Minimální teplota $T_{min} \text{ [}^\circ\text{C]}$
$160 \times 128 \times 64$	$7,81 \cdot 10^{-3}$	4,771	5,593
$200 \times 160 \times 80$	$6,25 \cdot 10^{-3}$	4,802	5,494
$240 \times 192 \times 96$	$5,21 \cdot 10^{-3}$	4,828	5,424
$280 \times 224 \times 112$	$4,46 \cdot 10^{-3}$	4,847	5,367
$320 \times 256 \times 128$	$3,91 \cdot 10^{-3}$	4,865	5,322
$360 \times 288 \times 144$	$3,47 \cdot 10^{-3}$	4,879	5,287
$400 \times 320 \times 160$	$3,13 \cdot 10^{-3}$	4,888	5,258
$440 \times 352 \times 176$	$2,84 \cdot 10^{-3}$	4,931	5,169

Tabulka 4.2: Vývoj minimální a maximální teploty v závislosti na rozlišení sítě pro hodnotu difuzního koeficientu  $D \approx 10^{-3}$  v čase  $t = 3 \text{ s}$ .

$t = 5.0 \text{ s}$			
Rozlišení sítě	Prostorový krok $h \text{ [m]}$	Minimální teplota $T_{min} \text{ [}^\circ\text{C]}$	Minimální teplota $T_{min} \text{ [}^\circ\text{C]}$
$160 \times 128 \times 64$	$7,81 \cdot 10^{-3}$	4,772	5,594
$200 \times 160 \times 80$	$6,25 \cdot 10^{-3}$	4,803	5,497
$240 \times 192 \times 96$	$5,21 \cdot 10^{-3}$	4,824	5,428
$280 \times 224 \times 112$	$4,46 \cdot 10^{-3}$	4,845	5,372
$320 \times 256 \times 128$	$3,91 \cdot 10^{-3}$	4,864	5,324
$360 \times 288 \times 144$	$3,47 \cdot 10^{-3}$	4,880	5,285
$400 \times 320 \times 160$	$3,13 \cdot 10^{-3}$	4,889	5,257
$440 \times 352 \times 176$	$2,84 \cdot 10^{-3}$	4,930	5,172

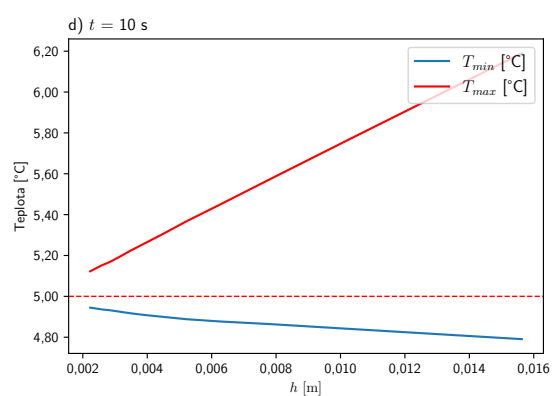
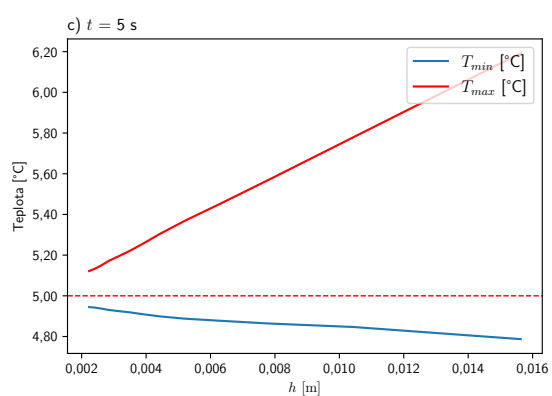
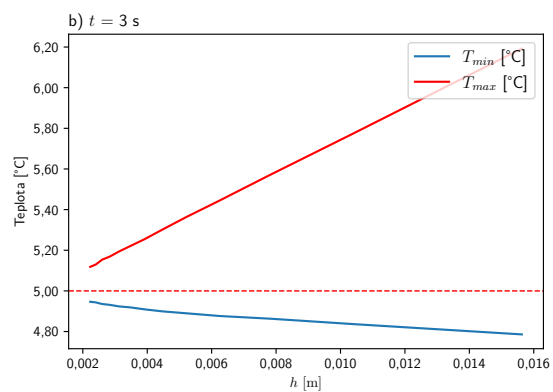
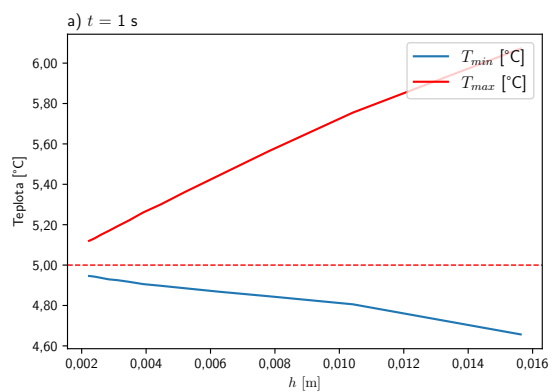
Tabulka 4.3: Vývoj minimální a maximální teploty v závislosti na rozlišení sítě pro hodnotu difuzního koeficientu  $D \approx 10^{-3}$  v čase  $t = 3 \text{ s}$ .

$t = 10.0 \text{ s}$			
Rozlišení sítě	Prostorový krok $h \text{ [m]}$	Minimální teplota $T_{min} \text{ [}^\circ\text{C]}$	Minimální teplota $T_{min} \text{ [}^\circ\text{C]}$
$160 \times 128 \times 64$	$7,81 \cdot 10^{-3}$	4,772	5,596
$200 \times 160 \times 80$	$6,25 \cdot 10^{-3}$	4,802	5,497
$240 \times 192 \times 96$	$5,21 \cdot 10^{-3}$	4,826	5,427
$280 \times 224 \times 112$	$4,46 \cdot 10^{-3}$	4,847	5,368
$320 \times 256 \times 128$	$3,91 \cdot 10^{-3}$	4,863	5,325
$360 \times 288 \times 144$	$3,47 \cdot 10^{-3}$	4,878	5,289
$400 \times 320 \times 160$	$3,13 \cdot 10^{-3}$	4,889	5,257
$440 \times 352 \times 176$	$2,84 \cdot 10^{-3}$	4,932	5,168

Tabulka 4.4: Vývoj minimální a maximální teploty v závislosti na rozlišení sítě pro hodnotu difuzního koeficientu  $D \approx 10^{-3}$  v čase  $t = 3 \text{ s}$ .

#### 4.3.2 Výsledky úlohy 4.3.1

Úloha 4.3.1 simuluje nastavení přestupové okrajové podmínky v modelu pro různé hodnoty prostorového kroku  $h$ . Předmětem zkoumání je zde vývoj minimální  $T_{min}$  a maximální  $T_{max}$  teploty v závislosti zmenšujícím se prostorovým kroku  $h$ .



Obrázek 4.7: Grafy zobrazující závislost minimální a maximální teploty na prostorovém kroku  $h$  pro úlohu 4.3.1 a pro různé časy  $t$ .

### 4.3.3 Přestupová OP pro $D_* \approx 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

#### Úloha 4.3.3

Parametry úlohy:

- $\Omega = (0; 1,25 \text{ m}) \times (0; 1 \text{ m}) \times (0; 0,5 \text{ m})$ ,
- $T_{in} = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ ,
- $t \in \langle 0; 0,1 \rangle \text{ s}$ ,
- $T_{ini,b} = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ ,
- $\nu = 1,552 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $D_a = 2,239 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $u_{in} = 1 \text{ m s}^{-1}$ ,
- $D_b = 9,700 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $T_{ini,a} = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ ,
- $\omega = 0,01 \text{ kg s}^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

Počáteční a okrajové podmínky:

- V  $\bar{\Omega}$  nastavíme počáteční podmínky dle sekcí 2.3.1 a 2.4.1.
- Na části hranice  $\hat{\Gamma}_{in}$  zvolíme vstupní okrajové podmínky popsané v 2.3.1 a 2.4.1.
- Pro  $\hat{\Gamma}_{out}$  volíme odtokové podmínky dle 2.3.1 a 2.4.1.
- Na  $\hat{\Gamma}_w$  použijeme bounce-back okrajové podmínky ze sekcí 2.3.1 a 2.4.1.
- Pro těleso  $\bar{\Omega}_b$  volíme následující okrajové podmínky:
  - Pro NSR schéma volíme na  $\bar{\Omega}_b$  bounce-back okrajovou podmínku dle 2.3.1,
  - V ADR schématu použijeme na  $\hat{\Gamma}_b$  přestupovou podmínku, viz 2.4.1.

Parametry LBM:

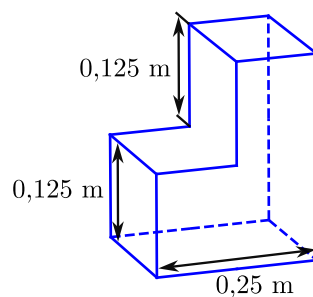
- $N_x \times N_y \times N_z \in \{40i \times 32i \times 16i \mid i \in \{3, 4, \dots, 25\}\}$ ,
- $\text{Re} = 33\,333$ ,
- $\nu_{LBM} = 10^{-4}$ , odpovídá  $\Delta t \approx 10^{-5} \text{ s}$ .

## 4.4 Experiment CUBI

V této sekci se zaměříme na simulaci probíhajícího experimentu ve výzkumném centru SENSE, v americkém ...

Projekt zkoumá vývoj rychlostního a teplotního profilu v oblasti mezní vrstvě okolo překážky - tzv. CUBIho. Experiment probíhá ve větrném tunelu, jehož průřez je ve tvaru čtverce o hraně 1 m.

Uvažujme tedy výpočetní oblast  $\bar{\Omega}$ . Překážku  $\bar{\Omega}_b$  v tomto případě bude tvořit těleso složené ze tří totožných krychlí o hraně 0.125 m sestavených do tvaru písmene L, viz. obrázek 4.8. Toto těleso dostalo jméno CUBI.

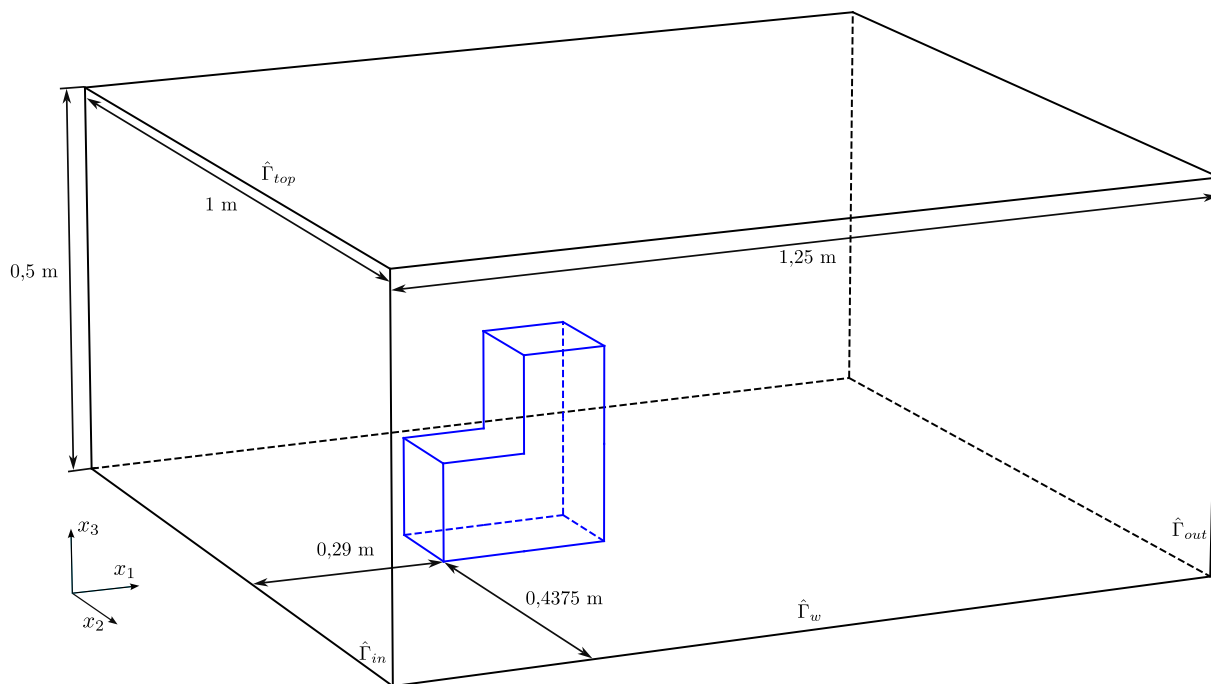


Obrázek 4.8: Schéma CUBIho s vyznačenými rozměry.

Při implementaci tohoto experimentu byla použita symetrická okrajová podmínka  $??$ . To bylo možné provést z podstaty úlohy. Jelikož je výška překážky v porovnání s výškou tunelu malá, proudění ve vrchní polovině tunelu se stává laminárním a tudíž pro nás nezajímavým.

Velkou výhodou použití této okrajové podmínky je ušetření poloviny paměti, což nám umožní dosáhnout jemnějšího rozlišení.

Předmětem zájmu pro nás bude rychlostní a teplotní profil těsně nad povrchem spodní stěny výpočetní oblasti  $\bar{\Omega}$ . Nastavení výpočetní oblasti pro simulace bude jako na obrázku  $??$ .



Obrázek 4.9: Schéma výpočetní oblasti pro úlohu 4.4.1.

#### 4.4.1 Experiment CUBI

##### Úloha 4.4.1

Parametry úlohy:

- $\Omega = (0; 1,25 \text{ m}) \times (0; 1 \text{ m}) \times (0; 0,5 \text{ m})$ ,
- $T_{in} = 5 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ,
- $t \in \langle 0; 0,1 \rangle \text{ s}$ ,
- $T_{ini,b} = 5 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ,
- $\nu = 1,552 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $D_a = 2,239 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $u_{in} = 1 \text{ m s}^{-1}$ ,
- $D_b = 9,700 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,
- $T_{ini,a} = 5 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ,
- $\omega = 0,01 \text{ kg s}^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

Počáteční a okrajové podmínky:

- V  $\bar{\Omega}$  nastavíme počáteční podmínky dle sekcí 2.3.1 a 2.4.1.
- Na části hranice  $\hat{\Gamma}_{in}$  zvolíme vstupní okrajové podmínky popsané v 2.3.1 a 2.4.1.
- Pro  $\hat{\Gamma}_{out}$  volíme odtokové podmínky dle 2.3.1 a 2.4.1.
- Na  $\hat{\Gamma}_w$  použijeme bounce-back okrajové podmínky ze sekcí 2.3.1 a 2.4.1.
- Na vrchní stěnu  $\hat{\Gamma}_{top}$  předepíšeme symetrickou okrajovou podmínku ??.
- Pro těleso  $\bar{\Omega}_b$  volíme následující okrajové podmínky:
  - Pro NSR schéma volíme na  $\bar{\Omega}_b$  bounce-back okrajovou podmínku dle 2.3.1,
  - V ADR schématu použijeme na  $\hat{\Gamma}_b$  přestupovou podmínku, viz 2.4.1.

Parametry LBM:

- $N_x \times N_y \times N_z \in \{40i \times 32i \times 16i \mid i \in \{3, 4, \dots, 25\}\}$ ,
- $\text{Re} = 33\,333$ ,
- $\nu_{LBM} = 10^{-4}$ , odpovídá  $\Delta t \approx 10^{-5} \text{ s}$ .

#### 4.4.2 Výsledky úlohy 4.4.1

# Závěr

Cílem této práce bylo matematické modelování izotermálního proudění newtonovské nestlačitelné tekutiny pomocí mřížkové Boltzmannovy metody.

První kapitola byla věnována zasvěcení čtenáře do matematického modelu popisující rovnice izotermálního proudění. V rámci této kapitoly byly uvedeny rovnice popisující dynamiku tekutiny.

Druhá kapitola se zaměřovala na samotnou numerickou metodu použitou k simulaci – mřížkovou Boltzmannovu metodu (LBM). V této části byla popsána přestupová okrajová podmínka, která byla v rámci práce implementována. V této kapitole byly také popsány datové struktury použité v LBM kódu, dále zde jsou uvedeny poznámky k implementaci na více grafických kartách.

Ve třetí kapitole jsou shrnuty výsledky aplikace mřížkové Boltzmannovy metody na úlohu formulovanou v první kapitole. V první části je úspěšně implementováno pole pro prostorově proměnlivý difuzní koeficient. Druhá část se věnuje implementaci přestupové okrajové podmínky, která byla také úspěšně implementována. V poslední části je LBM použita k hledání optimálního rozměru radiátoru pro vůz FSE.12.

K numerickým simulacím byl využit kód LBM využívající softwarového balíčku CUDA od společnosti Nvidia, díky kterému bylo umožněno počítání na grafických kartách. Tento kód je napsán v jazyce C++ a již několik let je vyvíjený na KM FJFI ČVUT v Praze. V rámci této práce byl v tomto kódu opraven model D3Q7. Kód byl pro účely práce rozšířen o pole pro různé difuzní koeficienty a také byla do kódu implementována přestupová okrajová podmínka.

V blízké budoucnosti je cílem simulovat složitější geometrii chladiče, která by měla zohledňovat i geometrii jádra. Dále je v plánu porovnat výsledky numerických simulací s reálnými daty ze senzorů vozu FSE.12. Dalším cílem je studovat a vyhodnotit chování teplotního pole na mezní vrstvě.



# Literatura

- [1] Zou, Q., Hou, S., Chen, S. a Doolen, G. D. „A improved incompressible lattice Boltzmann model for time-independent flows“. *Journal of Statistical Physics*, 81 (1995), s. 35–48.
- [2] Geier, M., Greiner, A. a Korvink, J. G. „Properties of the cascaded lattice Boltzmann automaton“. *International Journal of Modern Physics C*, 18.04 (2007), s. 455–462.
- [3] Geier, M., Schönherr, M., Pasquali, A. a Krafczyk, M. „The cumulant lattice Boltzmann equation in three dimensions: Theory and validation“. *Computers & Mathematics with Applications*, 70.4 (2015), s. 507–547.
- [4] Landau, L. D. a Lifshitz, E. M. *Fluid Mechanics: Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics*. Sv. 6, Elsevier, 2013.
- [5] Míka, V. a Neužil, L. *Chemické inženýrství II*. Vysoká škola chemicko-technologická, 1999.
- [6] Guo, Z. a Shu, C. *Lattice Boltzmann method and its application in engineering*. Sv. 3. World Scientific, 2013.
- [7] Krüger, T., Kusumaatmaja, H., Kuzmin, A., Shardt, O., Silva, G. a Viggien, E. M. „The lattice Boltzmann method“. *Springer International Publishing*, 10 (2017), s. 3–978.
- [8] Ruzicka, M. C. On dimensionless numbers. *Chemical Engineering Research and Design*, 86 (2008), s. 835-868.
- [9] Horák, D. Matematické modelování proudění a obtékání překážek pomocí mřížkové boltzmannovy metody. Bakalářská práce, České vysoké učení technické v Praze, 2022.
- [10] Buresti, G. „A note on Stokes' hypothesis“. *Acta Mechanica*, 226.10 (2015), s. 3555–3559.