# 2023-1 Discrete Mathematics Assignment 3

학과(부): 컴퓨터융합학부 학년: 1학년 학번: 202302547 이름: 나소진 점수:

1. $S$ 를 다음에 의해 재귀적으로 정의된 정수 순서쌍 집합의 부분 집합이라 하자
   기본단계: $(0,0) \in S$
   귀납단계: $(a,b) \in S$ 이면, $(a+2, b+3) \in S$ 이고 $(a+3, b+2) \in S$ 이다.

구조적 귀납법을 이용하여 $(a,b) \in S$ 일 때, $5 | a+b$ 임을 증명하시오.

기본단계: $n=0$ 일 때, 5는 $0+0$으로 나누어 떨어지기 때문에 $(0,0) \in S$ 가 성립

귀납단계: $(a,b) \in S$ 일 때, $(a+2, b+3)$과 $(a+3, b+2)$가 참임을 증명

① $(a+2)+(b+3) = a+b+5$ 이고, $a+b$와 5는 모두 5로 나눌 수 있다.

② $(a+3)+(b+2) = a+b+5$, $a+b$와 5는 모두 5로 나눌 수 있다.

∴ 구조적 귀납법에 따라 $(a,b) \in S$ 일 때, $5 | a+b$는 참임을 알 수 있다.

2. $a_{m,n}$ 이 $a_{1,1} = 5$ 와

$$a_{m,n} = \begin{cases} a_{m-1,n} + 2 & \text{if } n=1 \text{ and } m>1 \\ a_{m,n-1} + 2 & \text{if } n>1 \end{cases}$$

에 의해 재귀적으로 정의된다면 일반화된 귀납법에 의해 모든 $(m,n) \in Z^+ \times Z^+$ 에 대하여 $a_{m,n} = 2(m+n)+1$ 임을 보이시오.

기본단계: $(m,n) = (1,1)$ 이라 할 때
$a_{1,1} = 5 = 2(1+1)+1$

귀납단계: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 사전순 정렬에서 $(m', n')$이 $(m, n)$ 보다 작을 때, $a_{m',n'} = 2(m'+n')+1$ 임을 가정

i) $n=1$이고 $m>1$일 때

$$\begin{aligned} a_{m,n} &= a_{m-1,n} + 2 \\ &= 2(m-1+n)+1+2 \\ &= 2(m+n)-2+2+1 \\ &= 2(m+n)+1 \end{aligned}$$

ii) $n>1$일 때

$$\begin{aligned} a_{m,n} &= a_{m,n-1} + 2 \\ &= 2(m+n-1)+1+2 \\ &= 2(m+n)-2+2+1 \\ &= 2(m+n)+1 \end{aligned}$$

∴ 일반화된 귀납법에 따라 $(m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ 에 대해 $a_{m,n} = 2(m+n)+1$은 참임을 알 수 있다.

3. 결혼식장에서 신랑과 신부를 포함하여 6명을 1열로 나열하여 사진을 찍고자 한다. 다음의 각 경우에 몇가지의 서로 다른 방법으로 사진을 찍을수 있는가?

(1) 신부는 반드시 신랑 옆에 서도록 하는 경우

① (신랑+신부) A B C D

② 신랑 - 신부의 자리가 바뀌는 경우

$5! \times 2 = 240$

(2) 신부는 반드시 신랑 옆에 서지 않도록 하는 경우

① 전체 6명의 나열

② 신랑 - 신부가 나란히 서는 경우 제외

$6! - 240 = 720 - 240$

$= 480$

(3) 신부는 신랑의 왼쪽 어딘가에 서도록 하는 경우

① 6명 중 2명 자리 (왼쪽이 신부 자리)

② 남은 4명 배열

${}_6C_2 \times 4! = 15 \times 24$

$= 360$

4. 어떤 팔씨름 선수가 75 시간동안 챔피언이었다. 여기에서의 시간은 오후 1시와 같은 정시에서부터의 1시간 동안의 간격을 의미한다. 또한 이 팔씨름 선수는 한시간에 적도록 한 판의 시합을 하는데 총 125판 이상 시합하지는 않는다. 그럼 이 팔씨름 선수가 정확히 24판의 팔씨름을 한 연속된 시간이 반드시 존재함을 증명하시오.

$a_1, a_2 \cdots a_{75}$

$j$ : $j$ 시간까지 시합한 경기 수

$1 \le a_j \le 124$

$a_1 + 24,\ a_2 + 24 \cdots a_{75} + 24$

$\rightarrow 25 \le a_j \le 148$ ( 1 ~ 149 비둘기<br>1 ~ 148 비둘기 집 )

$\rightarrow 1 \le a_i$ 또는 $a_i + 24 \le 148$

→ 비둘기 집의 원리에 의해 같아지는 숫자가 존재

$a_j = a_{i+24}$ (단, $j \ne i$)