Введение

Учебная дисциплина «Алгебра и геометрия» включает в себя следующие основные разделы:

- Элементы линейной алгебры
- Элементы векторной алгебры
- Аналитическая геометрия на плоскости
- Аналитическая геометрия в пространстве
- Комплексные числа
- Линейные пространства и операторы

Для лучшего освоения этих разделов студенты должны прорешать большое количество задач по всем темам. В данном издании приведён минимальный набор заданий, необходимых для освоения курса. Эти задания сгруппированы в три контрольные работы по темам.

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради (12 листов). Каждое задание должно начинаться с нового листа и оформляться в следующем порядке: сначала записывается текст задания, потом приводится его решение с пояснениями, рисунками и подробными вычислениями, далее обязательно следует ответ. В тетради обязательно должны быть поля не менее 2,5 см. Допускается печатный вариант оформления работы с соблюдением всех выше перечисленных требований.

Также в издании приведены образцы решения некоторых заданий.

Издание предназначено студентам всех специальностей направления 230100 – Информатика и вычислительная техника.

Контрольная работа №1

Тема «Линейная алгебра»

Вариант 1.

1. Вычислить определитель по определению и с помощью разложения по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. а) Вычислить $A^2 - 2AB + BA$.
   б) Найти A^{-1} двумя способами.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Исследовать и, если возможно, решить систему трёх уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса, матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

Вариант 2.

1. Вычислить определитель по определению и с помощью разложения по 2-й строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. а) Вычислить $A^2 - 2AB + BA$.
   б) Найти A^{-1} двумя способами.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Исследовать и, если возможно, решить систему трёх уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса, матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + z = -2 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

Вариант 3.

1. Вычислить определитель по определению и с помощью разложения по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

2. а) Вычислить $A^2 - 2AB + BA$.
   б) Найти A^{-1} двумя способами.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Исследовать и, если возможно, решить систему трёх уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса, матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

Вариант 4.

1. Вычислить определитель по определению и с помощью разложения по 2-й строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$$

2. а) Вычислить $A^2 - 2AB + BA$.
   б) Найти A^{-1} двумя способами.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Исследовать и, если возможно, решить систему трёх уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса, матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$$

Вариант 5.

1. Вычислить определитель по определению и с помощью разложения по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

2. а) Вычислить $A^2 - 2AB + BA$.
   б) Найти A^{-1} двумя способами.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Исследовать и, если возможно, решить систему трёх уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса, матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{aligned} 3x - 3y + 2z &= 2 \\ 4x - 5y + 2z &= 1 \\ 5x - 6y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

Вариант 6.

1. Вычислить определитель по определению и с помощью разложения по 2-й строке:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

2. а) Вычислить $A^2 - 2AB + BA$.
   б) Найти A^{-1} двумя способами.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 1,2 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Исследовать и, если возможно, решить систему трёх уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса, матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Вариант 7.

1. Вычислить определитель по определению и с помощью разложения по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

2. а) Вычислить $A^2 - 2AB + BA$.
   б) Найти A^{-1} двумя способами.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 12 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Исследовать и, если возможно, решить систему трёх уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса, матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 15 \\ 3x - y + z = 8 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Вариант 8.

1. Вычислить определитель по определению и с помощью разложения по 2-й строке:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 8 & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

2. а) Вычислить $A^2 - 2AB + BA$.
   б) Найти A^{-1} двумя способами.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Исследовать и, если возможно, решить систему трёх уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса, матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = -5 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

Вариант 9.

1. Вычислить определитель по определению и с помощью разложения по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

2. а) Вычислить $A^2 - 2AB + BA$.
   б) Найти A^{-1} двумя способами.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 21 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Исследовать и, если возможно, решить систему трёх уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса, матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = -4 \\ 5z - 4y + z = 5 \end{cases}$$

Вариант 10.

1. Вычислить определитель по определению и с помощью разложения по 2-й строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

2. а) Вычислить $A^2 - 2AB + BA$.
   б) Найти A^{-1} двумя способами.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Исследовать и, если возможно, решить систему трёх уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса, матричным способом и по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = -4 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Контрольная работа №2

Тема «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»

Вариант 1

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма

$$A(0,8),\ B(-4,-5),\ C(-8,-2)$$

Найти:

1) Уравнение стороны AD
2) Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты
3) Уравнение диагонали BD
4) Площадь параллелограмма
5) Угол между диагоналями параллелограмма.

2. Даны две точки $M_1(3,-1,2),\ M_2(4,-2,-1).$ Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору M_1M_2.
3. Уравнение кривой второго порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

$$16x^2 - y^2 - 40x + 6y = 0$$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, площадь грани $A_1A_2A_3$, объём пирамиды.

$$A_1(7,7,6),\ A_2(5,10,6),\ A_3(5,7,12),\ A_4(7,10,4).$$

Вариант 2

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма

$$A(6,5),\ B(-6,0),\ C(-10,3)$$

Найти:

1) Уравнение стороны AD
2) Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты
3) Уравнение диагонали BD
4) Площадь параллелограмма
5) Угол между диагоналями параллелограмма.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3,4,-5)$ параллельно двум векторам $\overline{a_1\{3,1,-1\}},\quad \overline{a_2\{1,-2,1\}}$
3. Уравнение кривой второго порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

$$y^2 + 4y - 6x + 7 = 0$$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, площадь грани $A_1A_2A_3$, объём пирамиды.

$$A_1(6,1,1),\ A_2(4,6,6),\ A_3(4,2,0),\ A_4(1,2,6).$$

Вариант 3

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма

$$A(10,-1),\ B(-2,-6),\ C(-6,-3)$$

Найти:

1) Уравнение стороны AD
2) Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты
3) Уравнение диагонали BD
4) Площадь параллелограмма
5) Угол между диагоналями параллелограмма.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3,-1,2),\quad M_2(4,-1,-1),\quad M_3(2,0,2)$.
3. Уравнение кривой второго порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

$$4x^2+15y^2-16x+90y+91=0$$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, площадь грани $A_1A_2A_3$, объём пирамиды.

$$A_1(8,7,5),\ A_2(10,6,6),\ A_3(5,7,9),\ A_4(8,11,8).$$

Вариант 4

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма

$$A(7,1),\ B(-5,-4),\ C(-9,-1)$$

Найти:

1) Уравнение стороны AD
2) Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты
3) Уравнение диагонали BD
4) Площадь параллелограмма
5) Угол между диагоналями параллелограмма.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3,-2,-7)$ параллельно плоскости $2x-3y+z-5=0$.
3. Уравнение кривой второго порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

$$4x^2+4x+3y-2=0$$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, площадь грани $A_1A_2A_3$, объём пирамиды.

$$A_1(7,7,3),\ A_2(6,5,8),\ A_3(3,5,8),\ A_4(8,4,1).$$

Вариант 5

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма

$$A(1,3),\ B(9,-1),\ C(2,-3)$$

Найти:

1) Уравнение стороны AD
2) Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты
3) Уравнение диагонали BD
4) Площадь параллелограмма
5) Угол между диагоналями параллелограмма.

2. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,-3,-5)$ перпендикулярно к плоскости $2x-3y+5z-1=0$
3. Уравнение кривой второго порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

$$9x^2+225y^2+150y-200=0$$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, площадь грани $A_1A_2A_3$, объём пирамиды.

$$A_1(4,2,5),\ A_2(0,7,2),\ A_3(0,2,7),\ A_4(1,5,0).$$

Вариант 6

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма

$$A(-5,5),\ B(1,3),\ C(3,7)$$

Найти:

1) Уравнение стороны AD
2) Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты
3) Уравнение диагонали BD
4) Площадь параллелограмма
5) Угол между диагоналями параллелограмма.

2. Найти угол между прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $\quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.
3. Уравнение кривой второго порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

$$5x+y^2+6y-1=0$$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, площадь грани $A_1A_2A_3$, объём пирамиды.

$$A_1(4,4,10),\ A_2(4,10,2),\ A_3(2,8,4),\ A_4(9,8,9).$$

Вариант 7

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма

$$A(2,-2),\ B(3,-5),\ C(5,1)$$

Найти:

1) Уравнение стороны AD
2) Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты
3) Уравнение диагонали BD
4) Площадь параллелограмма
5) Угол между диагоналями параллелограмма.

2. Найти точку пересечения прямой и плоскости

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}, \quad 2x+3y+z-1=0.$$

3. Уравнение кривой второго порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

$$4x^2+y^2-10y-7=0$$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, площадь грани $A_1A_2A_3$, объём пирамиды.

$$A_1(4,6,5),\ A_2(6,9,4),\ A_3(2,10,10),\ A_4(7,5,9).$$

Вариант 8

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма

$$A(-2,0),\ B(8,8),\ C(6,-2)$$

Найти:

1) Уравнение стороны AD
2) Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты
3) Уравнение диагонали BD
4) Площадь параллелограмма
5) Угол между диагоналями параллелограмма.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2,-3,-5)$ перпендикулярно к плоскости $2x-3y+5z-1=0$

3. Уравнение кривой второго порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

$$9x^2+y^2-2y+72x+136=0$$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, площадь грани $A_1A_2A_3$, объём пирамиды.

$$A_1(3,5,4),\ A_2(8,7,4),\ A_3(5,10,4),\ A_4(4,7,8).$$

Вариант 9

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма

$$A(0,2),\ B(0,4),\ C(2,4)$$

Найти:

1) Уравнение стороны AD
2) Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты
3) Уравнение диагонали BD
4) Площадь параллелограмма
5) Угол между диагоналями параллелограмма.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2,-3,1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{1}$.
3. Уравнение кривой второго порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

$$4x^2+4x+12y+13=0$$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, площадь грани $A_1A_2A_3$, объём пирамиды.

$$A_1(10,6,6),\ A_2(-2,8,2),\ A_3(6,8,9),\ A_4(7,10,3).$$

Вариант 10

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма

$$A(-3,3),\ B(5,-1),\ C(5,5)$$

Найти:

1) Уравнение стороны AD
2) Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты
3) Уравнение диагонали BD
4) Площадь параллелограмма
5) Угол между диагоналями параллелограмма.

2. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$.
3. Уравнение кривой второго порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

$$4x^2+8x-y^2+4y=16$$

4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, площадь грани $A_1A_2A_3$, объём пирамиды.

$$A_1(2,9,3),\ A_2(6,3,7),\ A_3(6,8,5),\ A_4(5,11,10).$$

Контрольная работа №3

Тема «Комплексные числа. Линейные пространства и операторы»

Вариант 1

1. Записать комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, изобразить его на координатной плоскости, вычислить a^5, найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$.

$$a = \frac{1}{\sqrt{3} + i}$$

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = \{1,4,6\},$$
$$b = \{1,-1,1\},$$
$$c = \{1,1,1\}.$$

3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

4. Найти координаты вектора $x = \{6,-1,3\}$. в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_2' = 2e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Записать комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, изобразить его на координатной плоскости, вычислить a^5, найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$.

$$a = \frac{1}{\sqrt{3} - i}$$

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = \{2, -3, 1\},$$
$$b = \{3, -1, 5\},$$
$$c = \{1, -4, 3\}.$$

3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$$

4. Найти координаты вектора $x = \{1, 2, 4\}$. в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e_2' = \frac{3}{2}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Записать комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, изобразить его на координатной плоскости, вычислить a^5, найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$.

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{1 + i}$$

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = \{5, 4, 3\},$$
$$b = \{3, 3, 2\},$$
$$c = \{8, 1, 3\}.$$

3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

4. Найти координаты вектора $x = \{1,3,6\}$. в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 4e_3, \\ e_2' = \dfrac{4}{3}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Записать комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, изобразить его на координатной плоскости, вычислить a^5, найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$.

$$a = \frac{4}{\sqrt{3} + i}$$

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = \{1,1,1\},$$
$$b = \{0,1,1\},$$
$$c = \{0,0,1\}.$$

3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

4. Найти координаты вектора $x = \{2,4,1\}$. в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{3}{2}e_3, \\ e_2' = 3e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Записать комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, изобразить его на координатной плоскости, вычислить a^5, найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$.

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{1-i}$$

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = \{1,-1,2\},$$
$$b = \{-1,1,-1\},$$
$$c = \{2,-1,1\}.$$

3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Найти координаты вектора $x = \{6,3,1\}$. в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{4}{3}e_3, \\ e_2' = 4e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Записать комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, изобразить его на координатной плоскости, вычислить a^5, найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$.

$$a = \frac{-4}{1-\sqrt{3}i}$$

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = \{3,2,-4\}, \quad b = \{4,1,-2\}, \quad c = \{5,2,-3\}.$$

3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$$

4. Найти координаты вектора $x=\{1,4,8\}$. в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 5e_3, \\ e_2' = \dfrac{5}{4}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Записать комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, изобразить его на координатной плоскости, вычислить a^5, найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$.

$$a = \frac{-2\sqrt{2}}{1+i}$$

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = \{1,2,3\},$$
$$b = \{6,5,9\},$$
$$c = \{7,8,9\}.$$

3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$$

4. Найти координаты вектора $x=\{8,4,1\}$. в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{5}{4}e_3, \\ e_2' = 5e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Записать комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, изобразить его на координатной плоскости, вычислить a^5, найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$.

$$a = \frac{-2\sqrt{2}}{1-i}$$

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = \{1,2,3\},$$
$$b = \{4,5,6\},$$
$$c = \{7,8,9\}.$$

3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

4. Найти координаты вектора $x = \{2,5,10\}$. в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 6e_3, \\ e_2' = \frac{6}{5}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Вариант 9

1. Записать комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, изобразить его на координатной плоскости, вычислить a^5, найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$.

$$a = \frac{4}{1-\sqrt{3}i}$$

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = \{0,1,1\},$$
$$b = \{1,0,1\},$$
$$c = \{1,1,0\}.$$

3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

4. Найти координаты вектора $x = \{10,5,1\}$. в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \frac{6}{5}e_3, \\ e_2' = 6e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Вариант 10

1. Записать комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, изобразить его на координатной плоскости, вычислить a^5, найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$.

$$a = \frac{-4}{\sqrt{3} - i}$$

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$$a = \{2,1,0\},$$
$$b = \{-5,0,3\},$$
$$c = \{3,4,3\}.$$

3. Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x + 2x_4 - 3x_5 = 3. \end{cases}$$

4. Найти координаты вектора $x = \{1,6,12\}$. в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 7e_3, \\ e_2' = \dfrac{7}{6}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Образцы решения некоторых заданий

1. **Исследовать на линейную зависимость систему векторов.**

$a = \{5,4,3\}$,
$b = \{3,3,2\}$,
$c = \{8,1,3\}$.

Решение.

Составляем определитель из координат данных векторов.

$$(a,b,c) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 45 + 9 + 64 - (72 + 10 + 36) = 0.$$

Т.к. определитель равен нулю, то данная система векторов линейно зависима.

2. **Найти общее решение для каждой из данных систем и проанализировать его структуру (указать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение.

Решение системы 1.

Выписываем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приводим ее к треугольному виду.

2 · 1 2 · 2 1 | 1 10 · 3 · 2 · 1

1 10 · 3 · 2 · 1 , 2 · 1 2 · 1 1 ,

4 19 · 4 · 5 · 1 | 4 19 · 4 · 5 · 1

1 10 · 3 · 2 · 1 | 1 10 · 3 · 2 · 1

0 · 21 8 3 3 , 0 · 21 8 3 3 ,

Полагаем $X_3 = C_1$, $X_4 = C_2$, $X_5 = C_3$.

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 3c_1 + 2c_2 + c_3 \\ -21x_2 = -8c_1 - 3c_2 - 3c_3 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{17}{21}c_1 + \frac{4}{7}c_2 - \frac{3}{7}c_3 \\ x_2 = \frac{8}{21}c_1 + \frac{1}{7}c_2 + \frac{1}{7}c_3 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases}$$

Базис:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{17}{21} \\ \frac{8}{21} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Размерность линейного пространства решений равна 3.

Решение системы 2.

Выписываем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приводи ее к треугольному виду.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -4 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

Полагаем $X_3 = C_1$, $X_4 = C_2$, тогда:

$$\begin{cases} x_1+3x_2=1+c_1+2c_2 \\ x_2=1+2c_1-c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2-5c_1+5c_2 \\ x_2=1+2c_1-c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$$

Общее решение:

$$X=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}-5\\2\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}5\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Частное решение при $C_1=C_2=1$:

$$X_4=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

3. **Найти координаты вектора x в базисе (e_1', e_2', e_3'), если он задан в базисе (e_1, e_2, e_3).**

$x=\{6,3,1\}$.

$$\begin{cases} e_1'=e_1+e_2+\frac{4}{3}e_3, \\ e_2'=4e_1-e_2, \\ e_3'=-e_1+e_2+e_3. \end{cases}$$

Решение.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4/3\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{np};\ A_{np}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4/3\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1.$$

$A_{11}=1,\ A_{12}=4,\ A_{13}=-3.$

$A_{21}=-\frac{1}{3},\ A_{22}=-\frac{7}{3},\ A_{23}=2.$

$A_{31}=-\frac{4}{3},\ A_{32}=-\frac{16}{3},\ A_{33}=5.$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1/3 & -4/3\\ 4 & -7/3 & -16/3\\ -3 & 2 & 5\end{pmatrix};\ \left(A^{-1}\right)^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ -1/3 & -7/3 & 2\\ -4/3 & -16/3 & 5\end{pmatrix};$$

$x'=(A^{-1})^T\cdot x;$

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ -1/3 & -7/3 & 2\\ -4/3 & -16/3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\ -7\\ -19\end{pmatrix}$$

значит координаты $x=\{6,3,1\}$ относительно базиса $\{e_1', e_2', e_3'\}$ будут $\{15,-7,-19\}$.

. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b.

$a=6p-q,$
$b=5q+p.$
$|p|=\frac{1}{2}, |q|=4, (p\wedge q)=\frac{5\pi}{6}.$
$S=|(6p-q)\times(5q+p)|==|6p\times5q+6p\times p-5q\times q-q\times p|=|6p\times5q+p\times q|=$
$=31|p|\cdot|q|\cdot\sin(p\wedge q)=31\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot\sin\frac{5\pi}{6}=31\cdot2\cdot\frac{1}{2}=31.$

4. **. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.**

$A_1(0,-1,-1),$

$A_2(-2,3,5),$
$A_3(1,-5,-9),$
$A_4(-1,-6,3).$

Решение.

$\overline{A_1A_2}=\{-2,4,6\},$
$\overline{A_1A_3}=\{1,-4,-8\},$
$\overline{A_1A_4}=\{-1,-5,4\}.$

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right|=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4 & 6\\ 1 & -4 & -8\\ -1 & -5 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot|32-30+32-24+80-16|=\frac{74}{6}.$$

$$V_{A_1A_2A_3A_4}=\frac{1}{3}S_{A_1A_2A_3}\cdot h\Rightarrow h=\frac{3V}{S}.$$

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 4 & 6\\ 1 & -4 & -8\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|-8i-10j+4k\right|=\frac{1}{2}\sqrt{64+100+16}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{180}=\sqrt{45}.$$

$$h=\frac{3\cdot 74}{6\cdot\sqrt{45}}=\frac{37}{\sqrt{45}}.$$

5. **Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.**

$M_1(2,3,1)$,

$M_2(4,1,-2)$,
$M_3(6,3,7)$,
$M_0(-5,-4,8)$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=0,$$

$$-12(x-2)-24(y-3)+8(z-1)=0,$$
$$-12x-24y+8z+88=0,$$
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$d=\frac{|-12\cdot(-5)-24\cdot(-4)+8\cdot 8+88|}{\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}}=\frac{308}{\sqrt{784}}=\frac{308}{28}=11.$$

6. **Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.**

$A(0,-2,8)$,
$B(4,3,2)$,
$C(1,4,3)$.

Решение.

$\overline{BC}=\{-3,1,1\}$.

Т.к. вектор $\overline{BC} \perp$ искомой плоскости, то его можно взять в качестве вектора нормали, следовательно

$$-3(x-0)+(y+2)+(z-8)=0,$$
$$-3x+y+z-6-0.$$

7. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2},$$
$$x+2y-z-2=0,$$

Решение.

$$\begin{cases} x=-t-2, \\ y=t+1, \\ z=2t-3. \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости

$$(-t-2)+2(t+1)-(2t-3)-2=0,$$
$$-t-2+2t+2-2t+3-2=0,$$
$$-t+1=0,$$
$$t=1.$$

Таким образом, координаты искомой точки $(-3,2,-1)$.

Список использованных источников

1. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — СПб: Издательство «Лань», 2005
2. Майоров В.М., Скопец З.А. Задачник-практикум по векторной алгебре. М.: Учедпедгиз, 1961
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. — 3-е изд. — М.: Айрис-пресс. 2005.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч.: Учеб. Пособие для вузов / П.Е.Данко, А. Г. Попов, Т.Я.Кожевникова, С.П.Данко. — 6-е изд. — М.:ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство « Мир и Образование», 2007.