Análise no domínio z

Osmar Tormena Junior, Prof. Me.*

1 Introdução

A transformada z (e sua inversa) de um sinal discreto, constitui uma das ferramentas de análise mais fundamentais no processamento digital de sinais.

Sua abrangência é devida ao fato da transformada z de um sinal, ou sistema LIT, sempre existir, para alguma região de convergência no plano z.

Na prática, $x(n)$ sempre possui suporte finito, o que significa que $X(z) = \mathcal{Z}\left(x(n)\right),$ $z \in R_x$, com R_x sendo todo o plano z.

Para sistemas FIR, $h(n)$ também possui suporte finito, de maneira que $y(n) = h(n) * x(n)$ é computável—$y(n)$ também terá suporte finito. Como $H(z) = \mathcal{Z}\left(h(n)\right), \forall z$, pelas propriedades da transformada z

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad \forall z. \tag{1}$$

Sendo $H(z)$ comumente chamada de função de transferência, pois

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \tag{2}$$

Para sistemas IIR, como $h(n)$ possui suporte infinito, $H(z) = \mathcal{Z}\left(h(n)\right), z \in R_h$, onde R_h é apenas uma região anelar do plano z.

A partir da equação de diferenças

$$\sum_{m=0}^{N} a_m y(n-m) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m), \tag{3}$$

aplicando a transformada z

$$Y(z)\sum_{m=0}^{N} a_m z^{-m} = X(z)\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}, \tag{4}$$

é possível chegar à função de transferência

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^{N} a_m z^{-m}}, \tag{5}$$

onde

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad z \in R_y \supseteq R_h. \tag{6}$$

2 Forma direta

Como a soma de convolução é um caso especial da equação de diferenças ($N = 0$), para sistemas FIR e IIR, é comum a representação da função de transferência $H(z)$ como uma função racional sobre os coeficientes da equação de diferenças

$$H(z) = \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 + \displaystyle\sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m}}. \tag{7}$$

Os polos e zeros de $H(z)$, que definem os modos da resposta natural do sistema, ficam determinados a partir dos coeficientes dos polinômios em z, da função racional. Isto é indesejável, pois a obtenção das raízes a partir dos polinômios é um problema mal-condicionado, o que pode causar problemas em sistemas digitais.

Exemplo 1: Projeto de um filtro de Butterworth passa-banda de ordem 6.

*tormena@utfpr.edu.br

```
%% Forma direta
close all
clear
clc

N = 6;
wn = [2.5e6 29e6]/500e6;
ftype = 'bandpass';

[b,a] = butter(N,wn,ftype);
freqz(b,a,[0:pi/10000:pi/10])
```

□

3 Forma cascata

Os problemas da forma direta podem ser contornados trabalhando diretamente com os valores das raízes de $H(z)$, que fica da forma

$$H(z) = k\frac{\prod_{i=1}^{M}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(z - p_i)}, \tag{8}$$

com k uma constante, z_i os M zeros e p_i os N polos.

Porém, na presença de polos e zeros complexos conjugados, para evitar a necessidade da aritmética complexa no sistema real, é comum implementar a forma cascata em seções na forma direta de segunda ordem (tomando o cuidado de agrupar polos e zeros complexos conjugados na mesma seção).

Assim, escolhe-se um compromisso entre simplicidade nos cálculos e o condicionamento de uma função de transferência de segunda ordem, que ainda possui, comumente, bom condicionamento matemático

$$H(z) = g\prod_{i=1}^{L}\frac{b_{0,i} + b_{1,i}z^{-1} + b_{2,i}z^{-2}}{1 + a_{1,i}z^{-1} + a_{2,i}z^{-2}}. \tag{9}$$

Exemplo 2: Projeto de um filtro de Butterworth passa-banda de ordem 6.

```
%% Forma cascata
close all
clear
clc

N = 6;
wn = [2.5e6 29e6]/500e6;
ftype = 'bandpass';

[z,p,k] = butter(N,wn,ftype);
[sos,g] = zp2sos(z,p,k);
freqz(sos,[0:pi/10000:pi/10])
```

□

4 Forma paralela

A expansão em frações parciais, por representar diretamente os polos de $H(z)$, também é numericamente mais robusta, comparada à forma direta. Uma grande vantagem desta implementação está na possibilidade de explorar o paralelismo da plataforma computacional.

A expansão em frações parciais, representada por

$$H(z) = \sum_{i=1}^{N}\frac{r_i}{1 - p_i z^{-1}}, \tag{10}$$

para o caso simples de N polos p_i, sem multiplicidade.

Assim como na forma cascata, é comum agrupar polos complexos conjugados em um único termo real da expansão, da forma

$$\frac{r_{0,i} + r_{1,i}z^{-1}}{1 + a_{1,i}z^{-1} + a_{2,i}z^{-2}}. \tag{11}$$

Assim como na forma direta, a expansão em frações parciais é um problema mal-condicionado, devendo ser evitada

Exemplo 3: Projeto de um filtro de Butterworth passa-banda de ordem 6.

```
%% Forma direta
close all
clear
clc

N = 6;
```

```
wn = [2.5e6 29e6]/500e6;
ftype = 'bandpass';

[b,a] = butter(N,wn,ftype);
[r,p,k] = residuez(b,a);
```

□

5 Espaço de estados

O espaço de estados é a forma mais robusta de representar um sistema LIT digital. Por esta razão, a menos que existam razões específicas para não fazê-lo, vale a regra de sempre projetar e implementar sistemas nesta representação.

No espaço de estados, o vetor de estado $\mathbf{x}(n)$ $(N \times 1)$ com as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ (respectivamente, $N \times N$, $N \times 1$, $1 \times N$ e 1×1) são utilizados para implementar a relação entre a entrada $u(n)$ e a saída $y(n)$ de um sistema LIT de ordem N, através das equações

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}u(n); \tag{12}$$

$$y(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}u(n), \tag{13}$$

que pode ser resolvida recursivamente, a partir de um $\mathbf{x}(0)$ conhecido.

Exemplo 4: Projeto de um filtro de Butterworth passa-banda de ordem 6.

```
%% Forma direta
close all
clear
clc

N = 6;
wn = [2.5e6 29e6]/500e6;
ftype = 'bandpass';

[A,B,C,D] = butter(N,wn,ftype);
sys = ss(A,B,C,D,-1);
bode(sys,[0:pi/10000:pi/10])
```

□

6 Implementação

Exercício 1: Implemente um filtro de Butterworth de ordem 4, com `wn = 0.5;` e `ftype = 'lowpass';` em todas as formas apresentadas. Desenhe as estruturas de rede.

Exercício 2: Compare, no mesmo gráfico, as respostas impulsivas, para um impulso na origem, definido em $[0, 9]$.

Exercício 3: Baseado em seu conhecimento teórico das estruturas de rede, determine o custo computacional, por amostra processada, para o sistema implementado nos exercícios anteriores.