Computationalphysics 1: Übungsaufgabe Differentiation

Aufgabe 1: Konvergenzverhalten

Jakob Hollweck

Abgabe 6.11.17

1 Globaler Fehlerplot

Der Gesamtfehler $\Delta(h)$ steigt linear mit Schrittweise h. Bei $h = \pi/2$ schlägt $\Delta(h)$ aus, entfernt sich von der linearen Form und oszilliert (Auch schon für kleine h, aber schwach). Der Grund dafür dürfte die Periodizität des Sinus' sein. Die Amplitude der Oszillation erhöht sich mit größerer Schrittweite, da sich der Fehler dadurch erhöht.

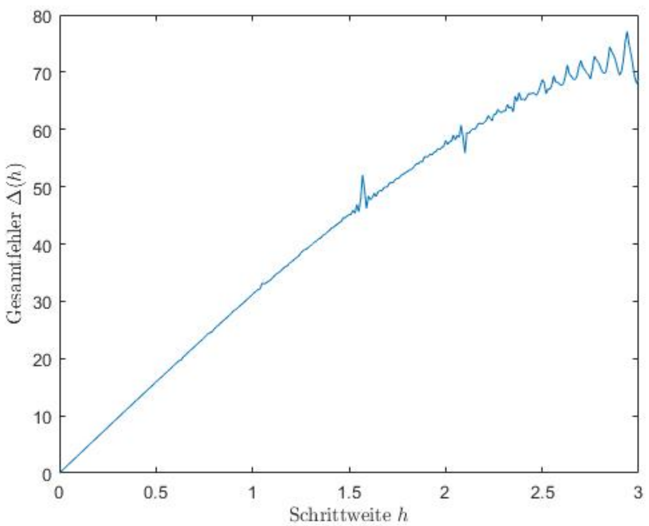

Abbildung 1: Gesamtfehler $\Delta(h)$ über Schrittweite h

2 Lokaler Fehlerplot

Es ist zu erkennen, dass der lokale Fehler E_h mit steigender Schrittweite h steigt. Jede der Kurven lässt eine Schwebung erkennen. Eine Betrachtung der abgebildeten Funktion liefert die Erklärung:

$$f(x) \coloneqq \cos(x) - \frac{\sin(x+h) - sin(x)}{h}$$

Der hintere Teil kann aufgefasst werden als Linearkombination der harmonischen Schwingungen $f_1(x) = \frac{1}{h}\sin(x+h)$ und $f_2(x) = \frac{1}{h}\sin(x)$. Additionstheoreme liefern:

$$f_1(x) - f_2(x) = 2\cos\left(\frac{x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{x-h}{2}\right)$$

Darüber hinaus lässt sich ablesen, dass mit steigendem h der lokale Fehler E_h steigt, was direkt eine Erhöhung der Amplitude der Einhüllenden zur Folge hat. Der $\cos(x)$-Term ist hierbei jeweils nur ein sich verändernder Offset.

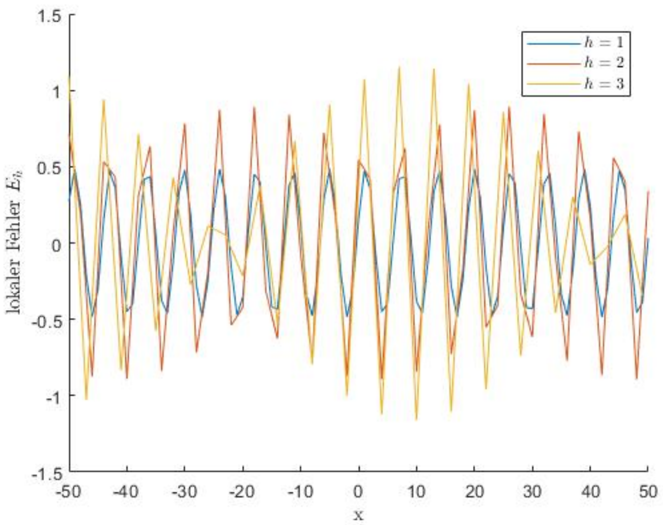

Abbildung 2: Lokaler Fehler E_h über x für Schrittweiten für $h \in \{1, 2, 3\}$